

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

JULIANA ALONSO GADI DE JONG ZAMBELLI

FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: A VALORIZAÇÃO DA GEOMETRIA A PARTIR DE  
UMA NOVA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

SANTO ANDRÉ

2013

JULIANA ALONSO GADI DE JONG ZAMBELLI

FRACATAIS NO ENSINO MÉDIO: A VALORIZAÇÃO DA GEOMETRIA A PARTIR DE  
UMA NOVA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à  
Universidade Federal do ABC como requisito  
parcial para a obtenção do título de mestre em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca

SANTO ANDRÉ

2013

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais Tereza, Rudolf e Leila, que sempre, com muito amor, acreditaram na minha condição de estudante, desde o Ensino Médio, e não mediram esforços para eu alcançar tudo aquilo que eu sempre almejei.

À minha irmã, Thais, e a toda minha família que sempre me apoiaram e me deram força para que chegasse até onde cheguei.

Ao meu marido Eduardo, que me incentivou desde o começo a iniciar meus estudos para o mestrado, que teve paciência e compreensão de não estar junto a mim aos sábados durante dois anos e que, com muito amor, me apoiou do início ao fim do mestrado.

Aos meus colegas de curso, pela trajetória no PROFMAT e pelas dicas de estudos.

A todos os professores do curso, que foram importantes para que a primeira turma do PROFMAT se formasse e que continuem formando novos mestres.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Fonseca, pela paciência e dedicação na orientação do meu trabalho.

À UFABC, por ter acreditado no PROFMAT sendo uma das universidades pioneiras no projeto.

À CAPES, pelo incentivo financeiro dado a cada aluno.

Aos meus alunos que participaram ativamente desse trabalho.

A todos aqueles que colaboraram de alguma maneira para a conclusão desse trabalho.

## RESUMO

De acordo com minha vivência em sala de aula, percebo que a Geometria é um dos ramos da Matemática que os alunos possuem maior dificuldade. Meissner (2001) num estudo sobre o processo do ensino/aprendizagem de Geometria refere-se ao fato de que não tem sido muito investigado a maneira a qual as crianças aprendem Geometria. Indica ele como exemplo que, somente 5% das dissertações de mestrado em Educação Matemática, são referentes a esse tema.

Por isso, pensei na Geometria Fractal como um tema diferente dos apresentados no Ensino Médio para integrar outras áreas do conhecimento, gerar curiosidade nos alunos, motivá-los a aprender algo novo e promover a capacidade da investigação Matemática.

Este trabalho sugere a aplicação de um plano de aula, que diagnostica as dificuldades principais de geometria de cada aluno, aplicando os conceitos da Geometria Fractal de maneira simplificada e sugerindo algumas atividades práticas para compreensão das características dos fractais. Assim os alunos podem utilizar o conteúdo deste trabalho para solucionar problemas relacionados à visualização e à identificação de elementos geométricos, além de possibilitar o desenvolvimento de outras habilidades e competências nos mesmos.

Palavras-chave: Geometria Fractal na sala de aula; Dimensão de Hausdorff no Ensino Médio.

## **ABSTRACT**

According to my classroom experience, I can check that the geometry is a branch of the mathematics which the students have more difficulty. Meissner (2001) in a study on the process of teaching/learning geometry refers to the fact that has not been much investigated the way of how the children are learning geometry. He suggests as an example that only 5% of the mathematics education dissertations are related to this subject.

So, I thought in Fractal Geometry as a different theme from those in high school in order to integrate other areas of knowledge, to generate curiosity in the students, to motivate them to learn something new and to promote the Mathematics researches capacity.

This paper suggests the application of a class plan, which diagnoses the main geometry difficulties of each student, applying the fractal geometry concepts in a simplified way and suggesting some practical activities to understand the fractals features. This way, the students can use the content of this paper for solving problems related to the visualization and identification of geometric elements, as well to allow them the development of other abilities and competencies.

**Keywords:** Fractal Geometry in the classroom; Hausdorff Dimension in High School.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Foto ilustrativa de galhos de árvores.....	11
Figura 2 - Foto ilustrativa de um raio.....	11
Figura 3 - Costa da Grã-Bretanha (conjunto $F$ ) e três possibilidades de $\delta$ -cobertura de $F$ .....	15
Figura 4 - Conjuntos de escala por um fator $\lambda$ aumentam comprimentos por um fator $\lambda$ , área por um fator $\lambda^2$ , e medida de Hausdorff $s$ -dimensional por um fator $\lambda^s$ .....	16
Figura 5 - Gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ em função de $s$ .....	16
Figura 6 - Conjunto de Cantor com três iterações.....	24
Figura 7 - Segmento inicial e a primeira iteração da Curva de Koch.....	26
Figura 8 - Representação até nível 3 da iteração e tabela com os níveis da iteração do floco de neve.....	27
Figura 9 - Figura inicial e as cinco primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.....	28
Figura 10 - Conjuntos de Julia gerados a partir de computador.....	31
Figura 11 - O Conjunto de Mandelbrot.....	32

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - A quantidade e o comprimento de cada segmento de cada etapa da construção do conjunto de Cantor.....	24
Tabela 2: Dimensões fractais aproximadas de vários processos naturais.....	38

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>9</b>
<b>2. MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF.....</b>	<b>13</b>
<b>3. ESTUDIOSOS E SEUS FRACTAIS.....</b>	<b>23</b>
3.1 CANTOR.....	23
3.1.1 CONJUNTO DE CANTOR.....	24
3.2 KOCH.....	26
3.2.1 CURVA DE KOCH.....	26
3.3 SIERPINSKI.....	28
3.3.1 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI.....	28
3.4 GASTON JULIA E PIERRE FATOU.....	30
3.5 MANDELBROT.....	32
<b>4. PLANO DE AULA.....</b>	<b>33</b>
4.1 METODOLOGIA .....	33
4.2 QUESTIONÁRIO.....	34
4.3 DIMENSÃO PARA O ENSINO MÉDIO .....	38
4.3.1 HAUSDORFF .....	40
4.3.2 BOX - COUNTING .....	41
4.3 ATIVIDADES SUGERIDAS.....	42
4.4 AVALIAÇÃO.....	46
4.6 RESULTADOS.....	46
<b>5. CONCLUSÃO.....</b>	<b>49</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>50</b>



## 1. INTRODUÇÃO

Muitas das formas encontradas na natureza não são círculos, triângulos, retângulos, prismas regulares ou esferas, enfim, não são simples curvas, superfícies ou sólidos, conforme definidos na geometria clássica de Euclides. A partir dessa constatação houve a necessidade de encontrar uma maneira de representar as verdadeiras formas da natureza e no ano de 1975 com Benoit Mandelbrot (1924 - 2010), que alegava: "*Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta*", surgiu o emprego do termo fractal, do latim, *fractus*, que significa quebrar, fragmentar, fracionar.

Fractais são objetos geométricos que podem ser repartidos, onde cada uma das partes é semelhante à figura original, ou seja, um fractal pode ser ampliado de tal forma que sua estrutura continua idêntica à inicial. Mandelbrot definiu, em 1983: "*um conjunto é dito fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que sua dimensão topológica*", mas não necessariamente um fractal é definido dessa maneira, já que muito se sabe sobre os fractais, mas ainda há muito a se estudar. Percebe-se que as três principais características dos fractais são:

- auto-semelhança: simetria através das escalas, ou seja, os objetos geométricos podem ser repartidos e cada parte é semelhante à original;
- complexidade infinita: a parte geradora do fractal possui uma infinidade de iterações;
- dimensão: é um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida em que a escala diminui, ou seja, representa o grau de ocupação desse fractal no espaço. Por exemplo, um segmento de reta possui dimensão um, já a Curva de Koch, que ocupa mais espaço que um segmento de reta e menos espaço que um plano, possui dimensão 1,26. (Mandelbrot, 1977)

A teoria fractal fornece uma maneira simples e coerente de entender um fenômeno complexo. Por exemplo, o fenômeno fractal parece estar muito difundido na arqueologia, então é indispensável para arqueólogos reconhecer fractais e analisá-los corretamente. Outro exemplo, alguns fractais são utilizados como base para animações digitais, pois colaboram na criação de texturas e até mesmo na simulação de paisagens ou vegetações complexas. Inclusive, o filme Titanic, vencedor de onze prêmios Oscar, aplicou esse recurso.

Uma das perguntas mais famosas nos estudos dos fractais é "Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?" e Mandelbrot responde que " *o comprimento das encostas acaba por ser uma noção ilusória que desliza entre os dedos de quem quer alcançá-lo*". Barbosa (2005) expôs a seguinte resposta encontrada por Mandelbrot:

A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas aparecem ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em documentos dos dois países vizinhos, a fronteira da Espanha com Portugal difere em cerca de 20%, o mesmo acontecendo por exemplo com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidades de escalas diferentes. (p.12)

Essa resposta dada por Mandelbrot significa que para medir o tamanho de um litoral é necessário definir a escala que será trabalhada. Isto por que já foram encontrados, em pesquisas, alguns valores para o comprimento terrestre das fronteiras comuns firmadas pela Espanha e por Portugal de 987 km contra 1214 km.

A ideia de geometria fractal é antiga, porém muito se avançou com Mandelbrot. Sabe-se, inclusive, que os Maias já tinham conhecimento sobre os fractais.

Segundo Brown (2003) os antigos Maias viviam nos estados do México: Campeche, Quintana Roo, Yucatán, e as partes orientais de Chiapas e Tabasco; toda Guatemala e Belize; e na parte ocidental de Honduras e El Salvador. A construção Maia é bem característica e é fractal. No campo da arqueologia, por exemplo, sabe-se que as construções são fractais devido aos edifícios formarem um padrão complexo de repetição. A organização espacial dos edifícios é lógica, geometricamente auto-similar e matematicamente de dimensão fracionária.

A antiga construção Maia tem sido conteúdo de intensos estudos durante muitos anos devido suas implicações para a complexidade social, urbanismo e evolução cultural. Análises modernas começaram em 1950 com o mapeamento de Mayapán (M. Jones, 1952.) e com o trabalho de Willey no Vale do Rio Belize (Willey, Bullard Jr, Glass, Gifford, 1965.). A coleção de dados, de qualquer maneira, permanece irregular e incompleta, o que torna impossível avaliar diretamente algumas hipóteses sobre as construções.

Com o estudo dos fractais, que está em enorme expansão, muito se pode aplicar em outras áreas, como no caso da Biologia, da Economia, da Música, dentre outras. Além disso, muitas perguntas não foram respondidas com a Geometria Euclidiana, como por exemplo a dimensão de certas figuras que possuem rugosidade, portanto, houve a necessidade de pesquisar outras possibilidades. Podemos perceber na natureza muitas formas consideradas caóticas, como os sismos, os raios, as árvores, as nuvens, a costa dos continentes, a couve-

flor, dentre outras, e esse tipo de figura considerada estranha intrigou alguns matemáticos, como mostram as figuras 1 e 2.



Figura 1: Foto ilustrativa de galhos de árvores



Figura 2: Foto ilustrativa de um raio

O objetivo desse trabalho é utilizar a Geometria Fractal para instigar a curiosidade de um conteúdo que não está previsto nos planejamentos comuns do Ensino Médio e utilizá-lo para solucionar o problema da dificuldade da visualização de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, assim como a identificação de elementos geométricos. A Geometria Fractal propicia a escrita de fórmulas a partir das iterações, permite um aprofundamento de conceitos matemáticos previamente conhecidos pelos alunos e, principalmente, instiga a vontade de aprender a Geometria, como um todo.

Dessa forma, o método da aplicação desse conteúdo para os alunos pode contribuir para uma aprendizagem baseada na descoberta, já que nem todas as formas da natureza podem ser explicadas a partir da Geometria Euclidiana. Além disso, podemos, com um conhecimento um pouco mais aprofundado do assunto, calcular as dimensões dos fractais mais famosos com a utilização do conteúdo de logaritmo (trabalhado no Ensino Médio) e calcular perímetros, áreas e volumes das figuras que serão apresentadas aos alunos.

De acordo com as Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, uma das finalidades do Ensino Médio é " a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina" (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, p. 14). Portanto, os professores em suas aulas deveriam apresentar aos alunos a relação que existe entre teoria e prática, principalmente quando o conteúdo explanado utiliza os elementos presentes no dia-a-dia.

A Geometria Fractal foi utilizada como ponto de partida desse trabalho, pois os fractais, de uma maneira geral, têm histórico interessante, despertam a curiosidade, utiliza a natureza e seus elementos como objeto de estudo e permitem atividades interativas em sala de

aula, como é o caso do Vídeo Feedback, do caleidoscópio, dos cartões fractais<sup>(2)</sup> ou até mesmo da utilização de programas computacionais que os geram a partir da Geometria Euclidiana e de algoritmos. Dessa maneira, pretende-se contribuir para que se apure o senso crítico e estético dos alunos quando perceberem a regularidade nas irregularidades.

Quando a Geometria Fractal é trabalhada em sala de aula, Barbosa (2005) diz que a Geometria Fractal auxilia tanto na compreensão de fenômenos que nos ocorrem em diversos ambientes como mostra a existência de belos fractais, o que leva a descoberta do senso artístico aplicado à construção dos mesmos, juntamente com a percepção e a observação da ordem diante da desordem, causando surpresa.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi realizada uma pesquisa sobre o tema dos Fractais em diversos livros e sites, onde o foco foi a aplicabilidade em sala de aula. Porém para que eu pudesse me aprofundar mais nesse conceito, estudei mais a fundo o conteúdo sobre medida e dimensão.

Dentre a bibliografia utilizada, o livro que mais surgiu de suporte para o Capítulo 2, foi *Fractal Geometry* de Kenneth Falconer, pela facilidade que eu obtive em lê-lo. Esse capítulo possui um aprofundamento sobre medida e dimensão fractal, porém não será apresentado dessa maneira aos alunos do Ensino Médio, devido à sua linguagem. O conceito de dimensão fractal será apresentado, em sala de aula, de uma forma mais simplificada, como lê-se no capítulo 4.

O capítulo 3 traz a biografia de alguns matemáticos e seus mais famosos fractais e tem como objetivo principal o aprendizado do cálculo de perímetros, áreas e dimensões desses fractais.

O capítulo 4 apresenta o plano de aula que foi seguido para aplicar o conceito dos fractais para os alunos do segundo ano do Ensino Médio, assim como os resultados encontrados após a aplicação de um questionário aos alunos (questionário encontra-se nesse capítulo).

O capítulo 5 expõem a conclusão do trabalho e suas considerações finais quanto à aplicabilidade do conceito de Geometria Fractal em sala de aula.

(2) Essas atividades estão explicadas no Plano de Aula, capítulo 4.

## 2. MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF

A noção de dimensão é fundamental na geometria fractal. De uma maneira geral, dimensão indica a quantidade de espaço que um conjunto ocupa próximo de cada um dos seus pontos. Das várias maneiras que há de se calcular a dimensão de um fractal, a que é definida como Hausdorff é provavelmente a mais utilizada. pois essa dimensão tem a vantagem de ser definida por qualquer conjunto, e é matematicamente conveniente, uma vez que é baseada em medidas, que são relativamente fáceis de estimar. A maior desvantagem é que em muitos casos é difícil de calcular ou estimar por um método computacional. Entretanto, para um entendimento dos matemáticos para fractais, o conhecimento do método Hausdorff é essencial.

TEORIA PRELIMINAR<sup>(3)</sup>:

**Definição 1.** Se  $A$  é um conjunto qualquer de números reais, o supremo de  $A$  (denota-se por  $\sup A$ ) é o menor número  $s$ , tal que  $s \geq x$  para qualquer  $x \in A$ , ou infinito, no caso de nenhum número verificar esta condição. Analogamente, o ínfimo de  $A$  (denota-se por  $\inf A$ ) é o maior número  $i$ , tal que  $i \leq x$  para qualquer  $x \in A$ , ou  $-\infty$ , no caso de nenhum número verificar esta condição.

**Definição 2.** A classe dos conjuntos de Borel (ou conjuntos borelianos) é a menor coleção de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) Os conjuntos abertos ou fechados são conjuntos de Borel;
- (b) A união ou intersecção, de qualquer coleção finita ou numerável de conjuntos de Borel, é um conjunto de Borel.

**Definição 3.** Seja  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ . Chamamos  $\mu$  uma medida em  $\mathcal{X}$ , se  $\mu$  atribui um valor não negativo a cada subconjunto de  $\mathcal{X}$ , satisfazendo:

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subset B$
- (c) Se  $A_1, A_2, \dots$ , é uma sequência, finita ou enumerável, de conjuntos, então

(3) A teoria preliminar apresenta três definições que serão utilizadas para a definição de medida e posteriormente para a definição de dimensão. Essas três definições foram retiradas do capítulo 1 do livro "Fractal Geometry" de Falconer.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

tomando-se a igualdade, isto é,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

se os  $A_i$  forem conjuntos de Borel disjuntos.

Chamamos  $\mu(A)$ , a medida do conjunto  $A$ .

#### MEDIDA DE HAUSDORFF

"Seja  $U$  é um subconjunto não vazio em  $\mathbb{R}^n$ , o diâmetro de  $U$  é definido como  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , isto é, a maior distância entre dois pontos quaisquer em  $U$ . Se  $\{U_i\}$  é uma coleção de conjuntos de diâmetro de no máximo  $\delta$  que cobre  $F$ , onde  $F$  é um conjunto fractal, isto é,  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  com  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para todos  $i$ , dizemos que  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ .

**Definição 4.** Suponha que  $F$  seja um subconjunto dos  $\mathbb{R}^n$  e  $s$  é um número não negativo. Para qualquer  $\delta > 0$ , temos

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

Assim, olhamos para todas as coberturas de  $F$  como conjuntos de diâmetro de no máximo  $\delta$  e procuramos minimizar a soma das potências (de ordem  $s$ ) dos diâmetros (figura 3). Quando  $\delta$  decresce, a classe das possíveis coberturas de  $F$  na definição 4 fica reduzida. Portanto, o ínfimo  $\mathcal{H}_{\delta}^s(F)$  aumenta, e assim aproxima-se do limite para  $\delta \rightarrow 0$ . Escrevemos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , embora o valor desse limite possa ser 0 ou  $\infty$ . Chamamos  $\mathcal{H}^s(F)$  de medida de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $F$ .

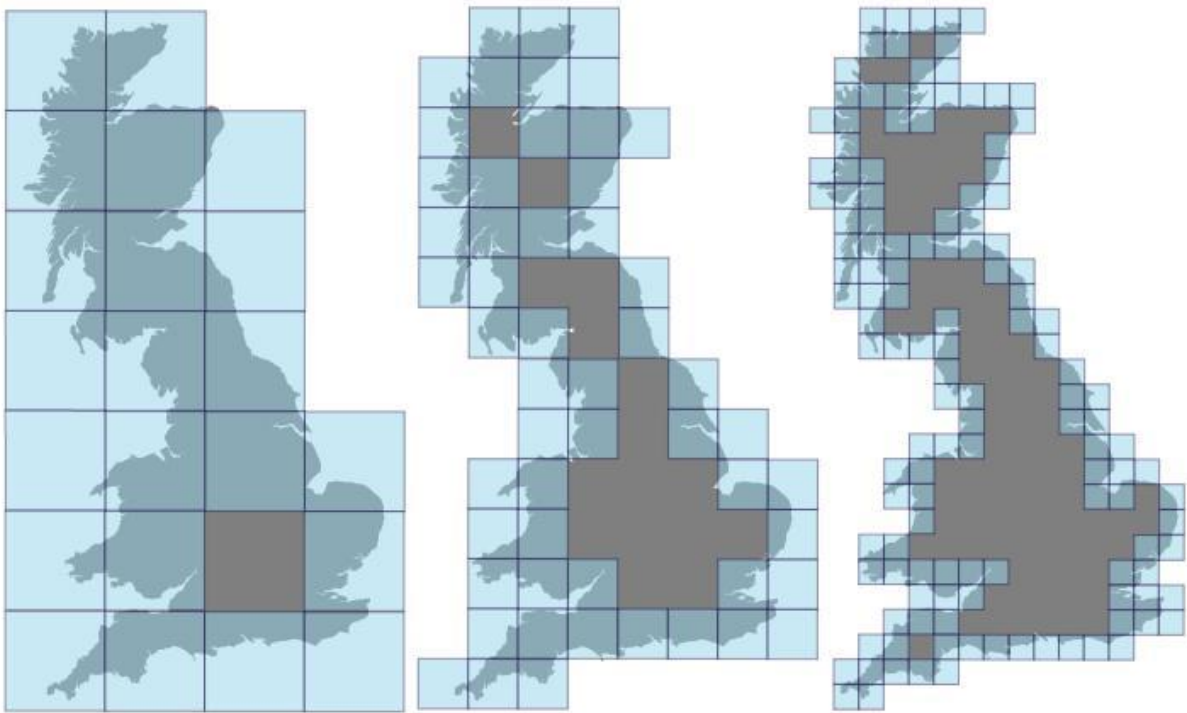


Figura 3: Costa da Grã-Bretanha (conjunto  $F$ ) e três possibilidades de  $\delta$ -cobertura de  $F$ .

Com um certo esforço, pode-se mostrar que  $\mathcal{H}^s$  é uma medida, isto é, satisfaz a definição 3:  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ ; se  $E \subset F$  então  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ ; e se  $\{F_i\}$  é qualquer coleção contável de conjuntos, então

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

As medidas de Hausdorff generalizam os conceitos familiares de comprimento, área, volume, etc. Mais precisamente, se  $F$  é um subconjunto boreliano de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F)$$

onde  $c_n$  é o volume de uma bola  $n$ -dimensional de diâmetro 1, de modo que  $c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n (\frac{n}{2})!}$  se  $n$

é par e  $c_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot (\frac{n-1}{2})!}{n!}$  se  $n$  é ímpar. (Lima, 2009). Analogamente, para subconjuntos suficientemente regulares de  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão menor, temos que  $\mathcal{H}^0(F)$  é o número de pontos em  $F$ ;  $\mathcal{H}^1(F)$  dá-nos o comprimento de uma curva suave;  $\mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \cdot \text{área}(F)$  se  $F$  for uma superfície lisa;  $\mathcal{H}^3(F) = \frac{6}{\pi} \cdot \text{vol}(F)$ ; e  $\mathcal{H}^m(F) = c_m^{-1} \text{vol}^m(F)$  se  $F$  é uma

subvariedade suave de  $\mathbb{R}^n$  com dimensão  $m$ , isto é, aquela cuja representação matemática é uma função contínua em todos os pontos.

As propriedades de escala de comprimento, área e volume são bem conhecidas. Na ampliação por um fator  $\lambda$ , o comprimento de uma curva é multiplicada por  $\lambda$ , a área de uma região plana é multiplicada por  $\lambda^2$  e o volume de um objeto em terceira dimensão é multiplicada pelo fator  $\lambda^3$  (figura 4). Tais propriedades de escala são fundamentais para a teoria dos fractais.

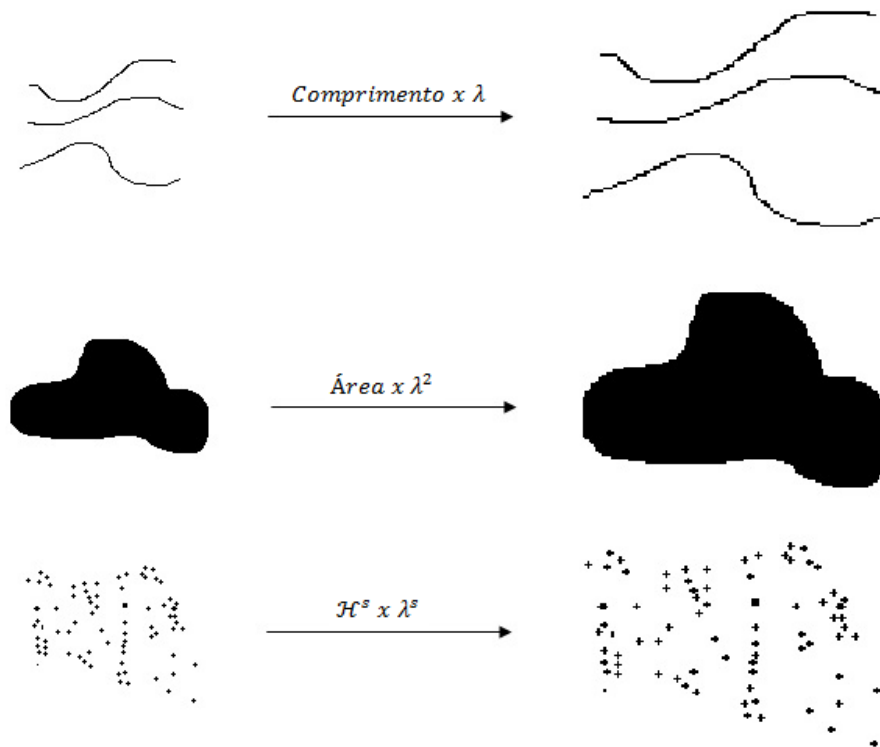


Figura 4: Conjuntos de escala por um fator  $\lambda$  aumentam comprimentos por um fator  $\lambda$ , área por um fator  $\lambda^2$ , e medida de Hausdorff  $s$ -dimensional por um fator  $\lambda^s$

## PROPRIEDADE DE ESCALA

**Proposição 5.** Seja  $T$  uma transformação de similaridade de fator de escala  $\lambda > 0$ . Se  $F \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\mathcal{H}^s(T(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

**Prova.** Se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então  $\{T(U_i)\}$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $T(F)$ , e então

$$\sum |T(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s$$

então

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(T(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$$



tomando o ínfimo. Tomando  $\delta \rightarrow 0$  temos que  $\mathcal{H}^S(T(F)) \leq \lambda^S \mathcal{H}^S(F)$ .

Substituindo  $T$  por  $T^{-1}$ ,  $\lambda$  por  $\frac{1}{\lambda}$  e  $F$  por  $T(F)$  ficamos com a desigualdade necessária oposta.//

Seja  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função tal que  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ , ( $x$  e  $y \in F$ ). Essa condição é conhecida como de Lipschitz Hölder de expoente  $\alpha$ . Tal condição implica que  $f$  é contínua. Particularmente, é importante ressaltar o caso de  $\alpha = 1$ , isto é,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad (x \text{ e } y \in F)$$

quando  $f$  é conhecida como função de Lipschitz Hölder, e

$$\mathcal{H}^S(f(F)) \leq c^S \mathcal{H}^S(F).$$

**Proposição 6.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função que satisfaz a condição de Lipschitz Hölder onde  $c$  e  $\alpha$  são constante positivas. Então para cada  $s$

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^S(F)$$

**Prova.** Se  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , então, uma vez que  $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$ , segue que  $\{f(F \cap U_i)\}$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura de  $f(F)$ , onde  $\varepsilon = c\delta^\alpha$ . Assim,  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$ , de modo que  $\mathcal{H}_\varepsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^S(F)$ . Como  $\delta \rightarrow 0$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos finalmente  $\mathcal{H}_\infty^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^S(F)$ .//

Em particular,  $\mathcal{H}^S(f(F)) \leq c^S \mathcal{H}^S(F)$  vale para qualquer função diferenciável com derivada limitada; tal função é necessariamente Lipschitz Hölder como uma consequência do teorema do valor médio. Se  $f$  é uma isometria, isto é,  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ , então  $\mathcal{H}^S(f(F)) = \mathcal{H}^S(F)$ . Assim, a medida de Hausdorff é invariante por translações (isto é,  $\mathcal{H}^S(F + z) = \mathcal{H}^S(F)$ , onde  $F + z = \{x + z : x \in F\}$ ) e por rotações.

## DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Retomando a equação

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$$

é claro que para um dado conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é não crescente com  $s$ . Dessa forma, por

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

$\mathcal{H}^s(F)$  também não é crescente. De fato, se  $t > s$  e  $U_i$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ , temos

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Assim, tomando os ínfimos,  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Tomando  $\delta \rightarrow 0$  verificamos que se  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  então  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ . Portanto, o gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  em função de  $s$  (figura 5) mostra que há um valor crítico de  $s$  para o qual  $\mathcal{H}^s(F)$  salta de  $\infty$  para 0. Este valor crítico é conhecido como dimensão de Hausdorff de  $F$ , e escreve-se como  $\dim_{\mathcal{H}} F$ , e se define para qualquer conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Formalmente,

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

(tomando o supremo do conjunto vazio como 0), então temos

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s \leq \dim_{\mathcal{H}} F \\ 0 & \text{se } s > \dim_{\mathcal{H}} F \end{cases}$$

Se  $s = \dim_{\mathcal{H}} F$ , então  $\mathcal{H}^s(F)$  pode ser zero ou infinito, ou pode satisfazer  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

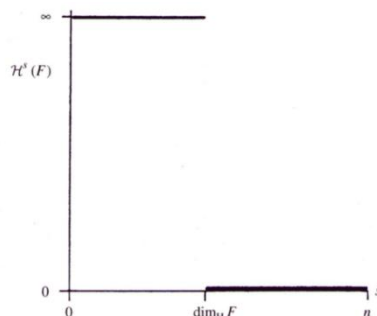


Figura 5 Gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  em função de  $s$ .

Um conjunto de Borel que satisfaz a última condição é chamado de s-conjunto. Matematicamente, s-conjuntos são os mais convenientes de serem estudados e ocorrem com bastante frequência.

**Exemplo 1:** Seja  $F$  um disco plano de raio unitário no  $\mathbb{R}^3$ . A partir das propriedades conhecidas de comprimento, área e volume,  $\mathcal{H}^1(F) = \text{comprimento}(F) = \infty$ ,  $0 < \mathcal{H}^2(F) = \frac{4}{\pi} \cdot \text{área}(F) = 4 < \infty$  e  $\mathcal{H}^3(F) = \frac{6}{\pi} \cdot \text{vol}(F) = 0$ . Então  $\dim_{\mathcal{H}} F = 2$ , com  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  se  $s < 2$  e  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  se  $s > 2$ .

A dimensão de Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades (que podem ser seguidas por qualquer definição razoável de dimensão):

- Monotonicidade: Se  $E \subset F$  então  $\dim_{\mathcal{H}} E \leq \dim_{\mathcal{H}} F$ . Isto é imediato a partir da propriedade de medida que diz  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$  para cada  $s$ .
- Estabilidade finita: Se  $F_1, F_2, \dots$  é uma sequência de conjuntos então  $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_{\mathcal{H}} F_i \}$ . Certamente,  $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_{\mathcal{H}} F_j$  para cada  $j$  da propriedade da monotonicidade. Por outro lado, se  $s > \dim_{\mathcal{H}} F_i$  para todo  $i$ , então  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ , assim  $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ , resultando na inequação oposta.
- Conjuntos finitos: Se  $F$  é finito então  $\dim_{\mathcal{H}} F = 0$ . Se  $F_i$  é um único ponto,  $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$  e  $\dim_{\mathcal{H}} F_i = 0$ , então pela propriedade da estabilidade finita,  $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$ .
- Conjuntos abertos: Se  $F \subset \mathbb{R}^n$  é aberto, então  $\dim_{\mathcal{H}} F = n$ . Pois se  $F$  contém uma bola com volume  $n$ -dimensional positivo, temos  $\dim_{\mathcal{H}} F \geq n$ , mas se  $F$  está contida em muitas bolas, temos  $\dim_{\mathcal{H}} F \leq n$ , usando a propriedade de estabilidade finita e da monotonicidade.
- Variedade diferenciáveis: Se  $F$  é uma subvariedade  $m$ -dimensional continuamente diferenciável de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim_{\mathcal{H}} F = m$ . Em particular, curvas suaves tem dimensão 1 e superfícies lisas tem dimensão 2.

**Proposição 7.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$  e suponha que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaz uma condição de Lipschitz Hölder, então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}} F$ .

**Prova.** Se  $s > \dim_{\mathcal{H}} F$ , então pela proposição 6 ,  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$ , implicando em  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$  para todos  $s > \dim_{\mathcal{H}} F$ . //

**Corolário 8.**

(a) Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de Lipschitz ( $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ , para  $x$  e  $y \in F$ ), então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \dim_{\mathcal{H}} F$ .

(b) Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação de bi-Lipschitz, isto é,

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in F)$$

onde  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , então  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) = \dim_{\mathcal{H}} F$ .

**Prova.** Parte (a) segue da proposição 7 tomando  $\alpha = 1$ . Aplicando (a) a  $f^{-1}: f(F) \rightarrow F$  temos a outra desigualdade requerida para provar (b).

Este corolário revela uma propriedade fundamental da dimensão de Hausdorff: A *dimensão de Hausdorff é invariante sob transformações de bi-Lipschitz*. Portanto se dois conjuntos têm dimensões diferentes, não há uma transformação de bi-Lipschitz que leve um no outro. Podemos fazer uma analogia à situação da topologia, onde vários "invariantes" (como os grupos de homologia ou homotopia) são criados para distinguir entre os conjuntos que não são homeomorfos: se os invariantes topológicos de dois conjuntos são distintos, então não pode haver um homeomorfismo entre os dois.

Na topologia, dois conjuntos são considerados "o mesmo" se há um homeomorfismo entre eles. Na geometria fractal considera-se dois conjuntos "o mesmo" se há uma transformação bi-Lipschitz entre eles. Assim como os invariantes topológicos são usados para distinguir entre conjuntos não-homeomorfos, podemos buscar parâmetros, incluindo a dimensão, para distinguir os conjuntos que não são bi-Lipschitz equivalentes. Sabemos então que as transformações de bi-Lipschitz são necessariamente homeomorfismos e que a dimensão de Hausdorff fornece mais características entre os fractais.

Em geral, a dimensão de um conjunto nos diz pouco sobre suas propriedades topológicas. Entretanto, para conjuntos com dimensão menor que 1, existem pontos que não se encontram na mesma componente conexa, resultando numa certa "desordem", como afirma a próxima proposição.

**Proposição 9.** Um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  com  $\dim_{\mathcal{H}} F < 1$  é totalmente desconexo.

**Prova.** Sejam  $x$  e  $y$  pontos distintos de  $F$ . Definimos a função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  por  $f(z) = |z - x|$ . Uma vez que  $f$  não aumenta distâncias e como  $|f(z) - f(w)| = ||z - x| - |w - x|| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|$ , temos do corolário 8 que  $\dim_{\mathcal{H}} f(F) \leq \dim_{\mathcal{H}} F < 1$ . Portanto,  $f(F)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com medida  $\mathcal{H}^1$ , ou comprimento zero, logo possui um complemento denso. Escolhendo  $r$  tal que  $r \notin f(F)$  e  $0 < r < f(y)$  segue que

$$F: \{z \in F: |z - x| < r\} \cup \{z \in F: |z - x| > r\}$$

Assim,  $F$  está contido em dois conjuntos abertos disjuntos com  $x$  em um deles e  $y$  no outro. Dessa forma,  $x$  e  $y$  estão em diferentes componentes conexos de  $F$ . //

### CÁLCULO DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF - EXEMPLO SIMPLES

**Exemplo 2:** Seja  $F$  o conjunto de Cantor (ver figura 6, Capítulo III). Se  $s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots$  então  $\dim_{\mathcal{H}} F = s$  e  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

**Cálculo Heurístico.** O conjunto de Cantor  $F$  divide-se na parte esquerda  $F_E = F \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$  e na parte direita  $F_D = F \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ . Claramente ambas as partes são geometricamente semelhantes a  $F$  mas dimensionadas a uma proporção de  $\frac{1}{3}$ , e  $F = F_E \cup F_D$ , sendo a união disjunta. Assim, para qualquer  $s$

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_E) + \mathcal{H}^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

pela proposição 5. Assumindo que, para o valor crítico  $s = \dim_{\mathcal{H}} F$ , temos  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$  e podemos dividir por  $\mathcal{H}^s(F)$  obtendo  $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$  ou  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ .

**Cálculo Rigoroso:**  $E_k$  consiste de  $2^k$  intervalos para cada comprimento de  $3^{-k}$ .

Tomando os intervalos de  $E_k$  como uma  $3^{-k}$ -cobertura de  $F$  temos que  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^S(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$  se  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Tomando  $k \rightarrow \infty$  temos  $\mathcal{H}^S(F) < 1$ .

Para provar que  $\mathcal{H}^S(F) \geq \frac{1}{2}$  devemos mostrar que

$$\sum |U_i|^S \geq \frac{1}{2} = 3^{-S}$$

para qualquer cobertura  $\{U_i\}$  de  $F$ . Claramente, é suficiente assumir que os  $\{U_i\}$  são intervalos e pela expansão deles levemente e usando a compacidade de  $F$ , precisamos apenas verificar  $\sum |U_i|^S \geq \frac{1}{2} = 3^{-S}$  se  $\{U_i\}$  for uma coleção finita de subintervalos fechados de  $[0,1]$ . Para cada  $U_i$ , seja  $k$  um número inteiro tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$$

Então  $U_i$  pode intersectar, no máximo, um intervalo de  $E_k$  uma vez que a separação entre estes intervalos é de pelo menos  $3^{-k}$ . Se  $j \geq k$  então, por construção,  $U_i$  intersecta, no máximo,  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^S |U_i|^S$  intervalos de  $E_j$ , usando  $3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$ . Se escolhermos  $j$  suficientemente grande, então  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  para todos  $U_i$ , assim, sabendo que  $\{U_i\}$  intersecta todos  $2^j$  intervalos básicos de comprimento  $3^{-j}$ , a contagem dos intervalos nos dá  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^S |U_i|^S$ , o qual se reduz a  $\sum |U_i|^S \geq \frac{1}{2} = 3^{-S}$ . //“(4)

(4) Falconer, Fractal Geometry, Capítulo 2, 2003, tradução nossa.

### 3. ESTUDIOSOS E SEUS FRACTAIS

Esse capítulo apresenta alguns estudiosos e seus famosos fractais. Cada um possui uma particularidade, portanto o objetivo principal é utilizar cada fractal e estudar seu processo de iteração, calcular perímetros, áreas e a dimensão fractal de cada um, além de apresentar uma teoria moderna que enriquece a geometria clássica e introduzir esses conceitos no Ensino Médio, pois a Geometria Fractal mudou radicalmente a forma como o homem entende a natureza.

#### 3.1 CANTOR

George Ferdinand Ludwig Philip Cantor, nascido em São Petersburgo, Rússia, em 1845, ficou conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos, uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos, teoria a qual contribuiu para que se pensasse sob outros pontos os problemas da matemática e que faz parte de quase todos os ramos da matemática, desde os que surgem nos fundamentos da disciplina até os que são típicos de ramos especializados da álgebra, da análise ou da geometria. (Boyer, 1996).

Os primeiros interesses de Cantor se voltavam para a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas. A sutil teoria das séries trigonométricas parece tê-lo inspirado a se enfrontar nos fundamentos da análise. Criou então uma bela abordagem dos números irracionais, que utiliza sequências convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind, e em 1874 começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito. Com este último trabalho, Cantor criou um campo novo da pesquisa matemática. Em seus artigos ele desenvolveu a teoria dos números transfinitos, baseado num tratamento análogo à aritmética dos números finitos. (Eves, 2004)

Durante a última metade da sua vida sofreu de depressão, o que comprometeu a sua capacidade de trabalho e o manteve hospitalizado por diversas vezes. Desenvolveu o seu conceito de Infinito Absoluto, que identificava a Deus. Ficou na miséria durante a Primeira Guerra Mundial e faleceu num hospital psiquiátrico em Halle, em 1918. (Eves, 2004).

## O CONJUNTO DE CANTOR

O conjunto de Cantor  $C$ , criado por Cantor com seus estudos a partir do ano de 1870, também conhecido como Poeira de Cantor, consiste em dividir o intervalo fechado  $[0,1]$  em três partes iguais, removendo o terço central  $\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$ . Com isso, ficamos com o conjunto união  $A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  de dois intervalos fechados de comprimento igual a  $\frac{1}{3}$  cada. Continuando, devemos dividir cada intervalo  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  em três partes iguais, removendo o terço central em cada parte, obtendo o conjunto união  $A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$  de quatro intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{9}$  cada. Seguindo dessa forma, no próximo passo, obtemos  $A_3$ , o conjunto união dos oito intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{27}$  cada. E assim sucessivamente, até obtermos  $A_n$ , o conjunto união dos  $2^n$  intervalos fechados de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  cada, analise a tabela 1 e figura 6.

Etapas	n	Comprimento de cada intervalo (U)
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
⋮	⋮	⋮
n	$2^n$	$\frac{1}{3^n}$

Tabela 1: A quantidade e o comprimento de cada segmento de cada etapa da construção do conjunto de Cantor.



Figura 6: Conjunto de Cantor com três iterações.



Assim, definimos o conjunto de Cantor como  $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , cujo comprimento total é dado por  $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Dessa forma, concluímos que o comprimento de  $\mathcal{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , o que resulta em  $\mathcal{C}$  não possuir intervalos, ou seja, sua dimensão topológica é zero.

Finalmente, concluímos também que a dimensão fractal é  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} \cong 0,63$ , já que em cada passo ficamos com dois segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais.

### 3.2 KOCH

Niels Fabian Helge von Koch, nascido em Estocolmo, em 1870, é famoso pela Curva de Koch que aparece em seu trabalho *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane* publicado em 1906, que reúne a geometria elementar com a teoria das curvas, teoria a qual apresenta o famoso fractal conhecido como o "flocos de neve Koch", que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito.

#### A CURVA DE KOCH

A curva de Koch, definida por ele em 1904, consiste em dividir um segmento de reta em três segmentos iguais, remover o terço central e substituí-lo por um triângulo equilátero de lado igual ao segmento removido, sem sua base, conforme figura 7.



Figura 7: Segmento inicial e a primeira iteração da Curva de Koch

Nesse fractal podemos perceber o que acontece com a quantidade de segmentos e o comprimento de cada segmento após as iterações. Consideremos o segmento inicial de comprimento  $L_0$ . Após a primeira iteração teremos quatro novos segmentos, todos com comprimento  $L_1$  igual a  $3^{-1} \cdot L_0$ . Após a segunda iteração teremos  $16 = 4^2$  novos segmentos, cada um com comprimento igual a  $3^{-2} \cdot L_0$ , e, assim sucessivamente, até a  $n$ -ésima iteração onde a curva de Koch terá  $4^n$  novos segmentos com  $3^{-n} \cdot L_0$  de comprimento cada. Dessa forma, concluímos que quando  $n \rightarrow \infty$ , a curva de Koch possui infinitos segmentos de comprimento tendendo a zero.

De acordo com as dimensões vistas anteriormente, concluímos também que a dimensão fractal é  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{(\frac{1}{3})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3} \cong$

1,26, já que em cada passo ficamos com quatro segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais.

Dessa famosa curva de Koch, podemos construir o conhecido "flocos de neve", onde cada lado de um triângulo equilátero passa pelo processo iterativo da curva de Koch. Essa iteração no triângulo equilátero resultará em uma curva contínua e não diferenciável (devido aos seus infinitos "cantos"), onde seu perímetro terá valor  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right) = \infty$ .

Para o cálculo da área  $A$  do "flocos de neve", observe a figura 8 abaixo:

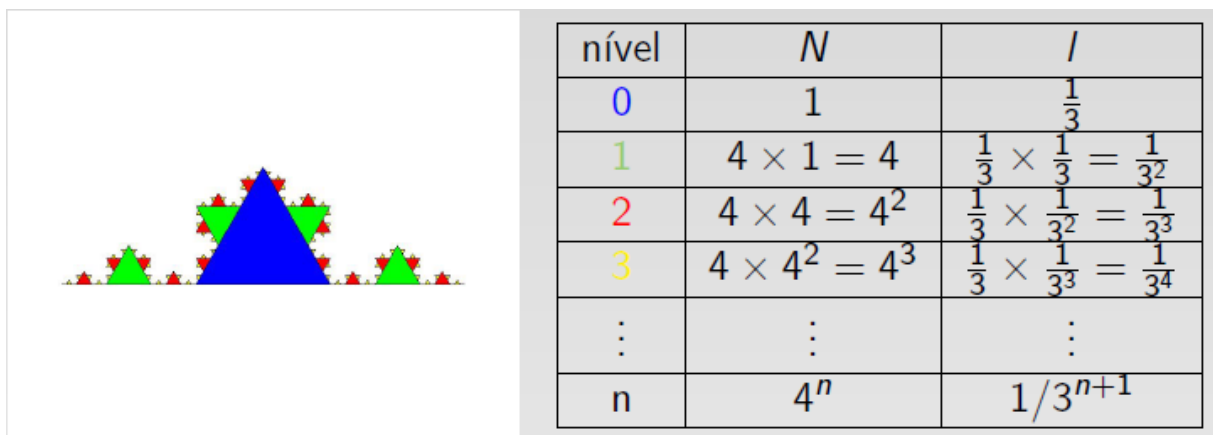


Figura 8: Representação até nível 3 da iteração e tabela com os níveis da iteração do floco de neve.

A figura à esquerda, reporta a área delimitada pela curva de Koch e a tabela à direita, a quantidade  $N$  de triângulos de base  $l$ , considerando o comprimento inicial unitário. Assim, ao calcularmos o valor dessa área  $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4} \cdot \frac{1}{9^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ .

A somatória que aparece em  $A_1$  é uma somatória de uma progressão geométrica infinita onde o primeiro termo e a razão possuem valor  $\frac{4}{9}$ , ou seja,  $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4/9}{1-4/9} = \frac{\sqrt{3}}{20}$ .

O "flocos de neve" é formado a partir de um triângulo equilátero, onde cada lado passa pelo processo iterativo da curva de Koch. Dessa forma, temos sua área total:

$$A = 3 \cdot A_1 + \text{área do triângulo equilátero inicial}$$

Considerando cada lado do triângulo equilátero unitário, temos:

$$A = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

### 3.3 SIERPINSKI

Waclaw Sierpinski, nascido em Varsóvia, em 1882, dedicou parte de sua trajetória ao estudo da teoria dos conjuntos, em 1907. Ao longo de sua vida Sierpinski manteve uma produção incrível de trabalhos de pesquisa e livros, publicando mais de 700 artigos e 50 livros. Durante a Primeira Guerra Mundial, Sierpinski trabalhou com diversos matemáticos, onde iniciaram alguns estudos, dentre eles um sobre conjuntos analíticos. Ao terminar a Guerra, mudou-se para Lvov, onde foi-lhe oferecido um cargo na Universidade de Varsóvia. Em 1919 foi promovido a professor em Varsóvia, onde passou o resto de sua vida lá. Sierpinski também estudou topologia e função de uma variável real.

#### O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Esse tipo de estudo colabora com o enriquecimento da geometria clássica a partir de uma teoria moderna e o objetivo é introduzir esses conceitos no ensino médio.

O triângulo de Sierpinski consiste em marcar os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero e ligar esses pontos, formando um novo triângulo equilátero, que deve ser removido. Com esse primeiro processo obtemos a figura geradora. Dessa forma, aplicamos o mesmo processo em cada um dos três triângulos restantes, e assim sucessivamente. Ver figura 9.

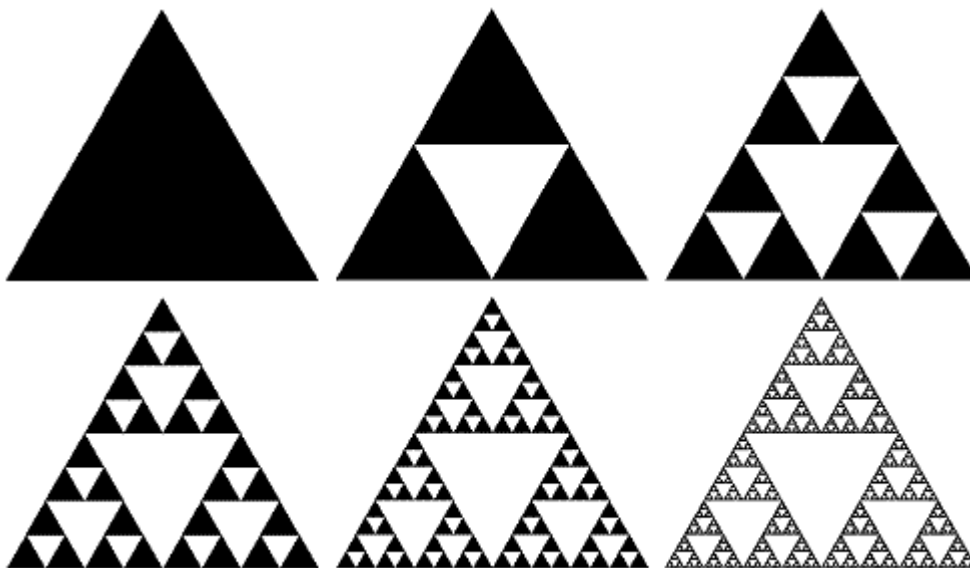


Figura 9: Figura inicial e as cinco primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.

Nesse fractal podemos analisar o que acontece com o perímetro e com a área quando essas iterações tendem para o infinito. Assim, na primeira iteração, percebemos que a área  $A_1$  é igual a  $\frac{3}{4}$  da área inicial  $A_0$ , assim como o perímetro  $P_1$  é igual a  $\frac{3}{2}$  do perímetro inicial  $P_0$ . Na segunda iteração, temos, então, área  $A_2$  igual a  $\frac{3}{4}$  de  $A_1$ , ou seja,  $\left(\frac{3}{4}\right)^2$  de  $A_0$  e perímetro  $P_2$  igual a  $\frac{3}{2}$  de  $P_1$ , ou seja,  $\left(\frac{3}{2}\right)^2$  de  $P_0$ , e, assim sucessivamente, até a  $n$ -ésima iteração onde o Triângulo de Sierpinski terá área  $A_n = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$  e  $P_n = P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ .

Dessa forma, podemos calcular os valores do perímetro e da área após infinitas iterações:

- Perímetro:  $P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$ ;
- Área:  $A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ .

Concluimos também que a dimensão fractal é  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 3}{n \cdot \log 2} \cong 1,59$ , já que deverá ser ampliado pelo valor dois para retornar à figura original e que o número de partes obtidas é três.

### 3.4 GASTON JULIA E PIERRE FATOU

Pierre Fatou, nascido em Lorient em 1878, trabalhou no campo da dinâmica analítica complexa e estudou processos iterativos e recursivos como  $f(Z) = Z^2 + c$ , onde  $Z$  é um número no plano complexo da fórmula  $Z = x + yi$  e  $c$  um complexo constante. Ele era particularmente interessado no caso  $Z_0 = 0$ , que foi mais tarde computacionalmente analisado por Benoit Mandelbrot para gerar representações gráficas do comportamento destas séries por cada ponto no plano complexo, atualmente chamado de conjunto de Mandelbrot.

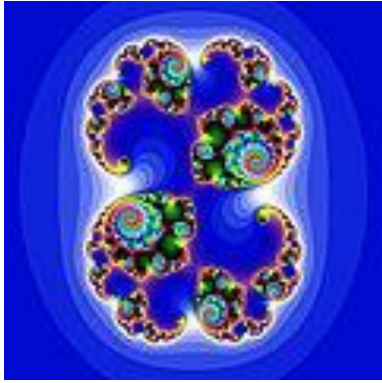
Gaston Julia, nascido em 1893, conduziu investigações matemáticas que o levaram à escrita da sua obra-prima *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, trabalho que lhe trouxe a fama entre os matemáticos, definindo os conjuntos conhecidos como de Julia, redescobertos na década de 70 pelas experiências computacionais de Mandelbrot.

Julia e Fatou realizaram essas pesquisas separadamente e sem a utilização do computador, ferramenta a qual facilita muito na análise do comportamento de funções iterativas, como no caso da função  $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ , onde  $Z$  é um número no plano complexo da forma  $Z = x + yi$  e  $c$  é um complexo constante. Nessa função, para cada ponto  $Z_0$ , a iteração gerará o que chamamos de órbita de  $Z_0$ :

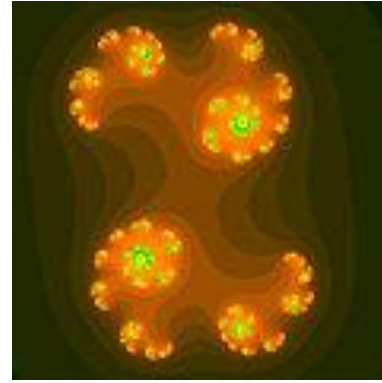
$$\begin{aligned} Z_0 &\rightarrow Z_1 = Z_0^2 + c \\ Z_1 &\rightarrow Z_2 = Z_1^2 + c \\ Z_2 &\rightarrow Z_3 = Z_2^2 + c \\ &\vdots \end{aligned}$$

Devemos analisar duas situações de resultados para a órbita de  $Z_0$ , uma quando é atraída para o infinito e a outra quando é atraída para um círculo em torno da origem. No primeiro caso, chamamos  $Z_0$  de ponto de escape, então, ele não pertence a nenhum conjunto de Julia. No segundo caso, chamamos  $Z_0$  de ponto prisioneiro, então, ele pertence a algum conjunto de Julia.

Esses dois conjuntos (o conjunto dos pontos de escape - conjunto escape - e o conjunto dos pontos prisioneiros - conjunto prisioneiro) formam o conjunto de Julia, pois ambas as fronteiras dos dois conjuntos são simultâneas. Seguem dois exemplos, figura 10, do conjunto de Julia, para valor distintos de  $c$ .



Conjunto de Julia para  $c=0.285+0.01i$



Conjunto de Julia para  $c=0.45+0.1428i$

Figura 10: Conjuntos de Julia gerados a partir de computador.

É possível encontrar cada figura do conjunto de Julia a partir de ampliações das partes do conjunto de Mandelbrot (vide próximo texto).

### 3.5 MANDELBROT

Benoit Mandelbrot, nascido na Polônia em 1924, emigrou-se para França com sua família devido à Segunda Guerra Mundial e mais tarde mudou-se para os Estados Unidos da América, onde tornou-se professor. É conhecido mundialmente como sendo um dos responsáveis pelo enorme interesse nos chamados objetos fractais.<sup>(5)</sup>

O conjunto de Mandelbrot, foi definido pela primeira vez por Fatou, em 1905, e é o conjunto de todos os complexos  $c$  tais que  $Z$  não tende a infinito após iterações de  $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ , onde  $Z$  é um número no plano complexo da forma  $Z = x + yi$  e  $c$  é um número no plano complexo da forma  $c = a + bi$  e graficamente representam os pontos no plano complexo.

De acordo com Mandelbrot, quando observamos o comportamento de  $Z_{n+1}$  podemos ter duas possibilidades: se  $Z_n$  é um valor finito, atribui-se a cor preta a  $Z$ , mas se  $Z_n$  tende para infinito, atribui-se cores distintas de acordo com o comportamento de  $Z_n$ .

O conjunto de Mandelbrot, embora pareça possuir partes isoladas do todo, na verdade é uma união de conjuntos que pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardióide localizado ao centro do plano complexo e uma infinidade de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardióide) que tangenciam o cardióide e variam de tamanho com raio tendendo a zero, além de conjuntos formados por sequências ilimitadas, as partes coloridas. Cada ponto no plano complexo corresponde a um conjunto de Julia diferente, os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot são os conjuntos de Julia conexos e os que ficam fora são os desconexos. (Mandelbrot, 1977)

Cada um desses círculos pretos tem seu próprio conjunto de pequenos círculos cujos raios também tendem a zero. Esse processo se repete infinitamente, gerando o fractal da figura 11.

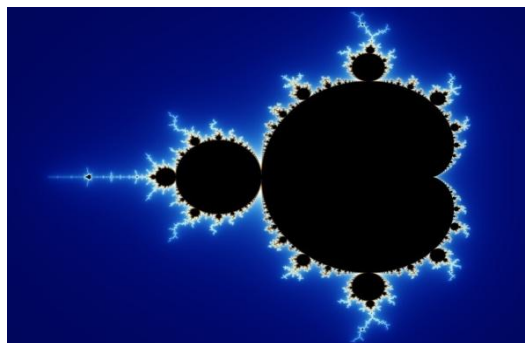


Figura 11: O Conjunto de Mandelbrot.

Figura 11: retirada de aidobonsai.com

(5) Dados retirados de <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/mandelbrot.htm>



#### 4. PLANO DE AULA

Esse capítulo consiste da elaboração de uma proposta de atividade educacional, cujo tema a ser trabalhado é "Fractais no Ensino Médio: a valorização da Geometria a partir de uma nova experiência em sala de aula". O objetivo principal é a aplicação de um conceito novo aos alunos, a Geometria Fractal, o qual ajude a solucionar o problema da dificuldade da visualização e identificação de elementos geométricos que os alunos de Ensino Médio ainda possuem.

Esse trabalho foi aplicado aos alunos do 2º ano do Ensino Médio, pois, supostamente, eles possuem maior domínio sobre os conteúdos da Geometria Euclidiana que serão utilizados, como ponto médio de um segmento, cálculo de perímetro e área, por exemplo, além de terem o conhecimento do conteúdo de logaritmo trazido do 1º ano do Ensino Médio.

#### METODOLOGIA

Essa proposta de trabalho foi desenvolvida baseada numa sala de aula com aproximadamente 35 alunos para 5 aulas de 50 minutos cada. A atividade foi aplicada em alunos de Ensino Técnico do curso de Eletroeletrônica, alunos que possuem gosto pelas aulas de matemática, em uma escola em Barueri. Foi investigado o conhecimento prévio dos alunos em relação à Geometria, assim como o entendimento de um conceito novo, a Geometria Fractal, utilizando a leitura dos enunciados bem formulados dos exercícios.

Na primeira aula, os alunos responderam a um questionário de 15 perguntas (p. 34) para uma avaliação diagnóstica dos conteúdos e conceitos que os alunos possam conhecer. Essa avaliação serviu como base para eu preparar as aulas subsequentes. De acordo com o que foi respondido pelos alunos, percebi que alguns conceitos geométricos não estavam contemplados. Portanto precisei retomar alguns conteúdos antes de apresentar os fractais a eles.

Segue um exemplo do que um dos alunos respondeu na avaliação diagnóstica em relação à dimensão euclidiana:

Qual é a dimensão de um ponto? São várias pontinhas aglomeradas em um sentido

Qual é a dimensão de uma reta? São várias pontas ligadas em um sentido e no

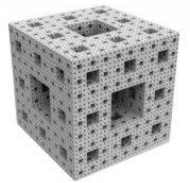
Qual é a dimensão de um plano? mesma direç

Qual é a dimensão de um cubo? \_\_\_\_\_

Esse tipo de resposta fez com que eu retomasse o conceito todo de dimensão euclidiana para, assim, poder apresentar a eles a dimensão fractal. Outras respostas que envolveram perímetro e área também precisaram ser retomadas nas aulas expositivas.

### Questionário

- 1) O que você entende por perímetro? \_\_\_\_\_
- 2) O que você entende por área? \_\_\_\_\_
- 3) O que você entende por volume? \_\_\_\_\_
- 4) Qual é a dimensão de um ponto? \_\_\_\_\_
- 5) Qual é a dimensão de uma reta? \_\_\_\_\_
- 6) Qual é a dimensão de um plano? \_\_\_\_\_
- 7) Qual é a dimensão de um cubo? \_\_\_\_\_
- 8) Você seria capaz de calcular a dimensão de um cubo como o da figura ao lado? Por que? \_\_\_\_\_
- 9) O que significa duas figuras serem congruentes? \_\_\_\_\_
- 10) O que significa duas figuras serem semelhantes? \_\_\_\_\_



11) Analise a sequência abaixo:



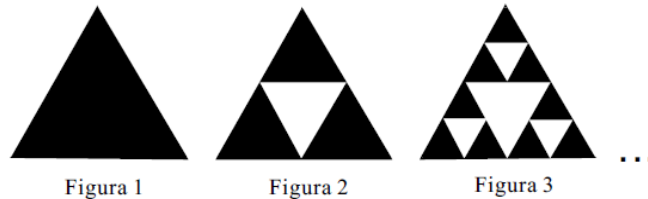
O processo de iteração que analisamos nas três figuras funciona da seguinte maneira: a partir de um segmento divida-o em três partes iguais e retire a parte central, substituindo-a por um triângulo equilátero porém sem sua base.

Conhecido o processo de iteração, suponha que o comprimento do segmento inicial seja de 9 cm. Com essas informações, responda:

- a) Qual é o comprimento da figura após a primeira iteração? \_\_\_\_\_
- b) Qual é o comprimento da figura após a segunda iteração? \_\_\_\_\_
- c) O que acontecerá com esse comprimento após infinitas iterações? \_\_\_\_\_

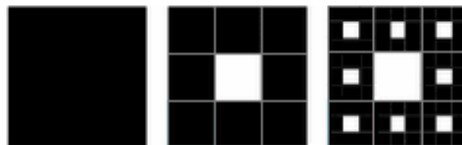
12) (ENEM 2008 - adaptado) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares. O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).



Desenhe as duas figuras seguintes, seguindo o processo acima.

13) Analise a sequência ao lado:



Sabendo que a área do primeiro quadrado (figura inicial) é  $81\text{cm}^2$  e que a cada etapa do processo de iteração o quadrado central é retirado, diga o que acontecerá com a área dessa figura após infinitas iterações? \_\_\_\_\_

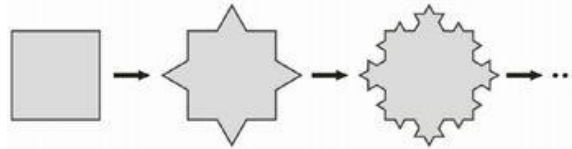
(Obs: O processo de iteração significa dividir cada quadrado em nove outros semelhantes e retirar o central)

14) (UFF) Certas imagens captadas por satélites espaciais, quando digitalizadas, são representadas por formas geométricas de aspecto irregular ou fragmentado, conhecidas por fractais. Podem-se obter tais fractais pela alteração da forma original de uma curva por meio de um processo em que os resultados de uma etapa são utilizados como ponto de partida para a etapa seguinte. Considere o processo tal que, em todas as etapas, cada segmento de reta é

transformado em uma poligonal cujo comprimento é quatro vezes a terça parte do segmento original, como ilustrado na figura a seguir:



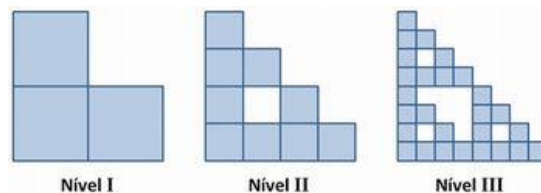
Por esse processo, a partir de um quadrado com 1 metro de lado, obtém-se a seqüência de figuras:



O perímetro, em metro, do quinto polígono dessa seqüência é:

- a)  $4^4 / 3^4$       b)  $4^4 / 3^5$       c)  $4^5 / 3^4$       d)  $3^5 / 4^5$       e)  $3^4 / 4^1$

15) (Universidade de Brasília - adaptado)



A seqüência de figuras acima ilustra 3 passos da construção de um fractal utilizando-se como ponto de partida um triminó — nível I —, que consiste em uma peça formada por três quadradinhos de 1 cm de lado cada, justapostos em forma de L. No segundo passo, substituiu-se cada quadradinho do fractal de nível I por um triminó, que tem os comprimentos dos lados de seus quadradinhos adequadamente ajustados à situação, de forma a se obter o fractal de nível II, conforme ilustrado acima. No terceiro passo, obtém-se, a partir do fractal de nível II, também substituindo-se cada um de seus quadradinhos por um triminó com os lados de seus quadradinhos ajustados, o fractal de nível III. O processo continua dessa forma, sucessiva e indefinidamente, obtendo-se os fractais de níveis  $n = I, II, III, \dots$

Com base nessas informações, calcule:

- a) O perímetro externo do fractal de nível IV. \_\_\_\_\_
- b) Uma expressão que represente a área do fractal de nível III. \_\_\_\_\_
- c) O desenho do fractal no nível IV. \_\_\_\_\_

Nas segunda e terceira aulas foi apresentado à turma primeiramente uma revisão sobre dimensão euclidiana, perímetro e área, e depois, o conceito de fractal e seus principais exemplos (resumo dos capítulos I e III), assim como uma de suas principais características, a dimensão fractal. Em relação à dimensão, como alunos do 2º ano do Ensino Médio não possuem conhecimento prévio para a linguagem do capítulo II, foi apresentado a eles o conceito de dimensão de uma maneira simplificada, como segue adiante.

## DIMENSÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Para estudarmos os fractais, precisamos estudar uma importante característica deles, conhecida como dimensão, ou seja, descrever a quantidade de espaço que um certo conjunto ocupa. A dimensão de uma curva fractal é um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida em que a escala diminui. Enquanto que a dimensão topológica de uma linha é sempre 1 e a de uma superfície é sempre 2, a dimensão fractal pode ser qualquer número real entre 1 e 3. Veja a tabela 2 abaixo.

Tabela 2: Dimensões fractais aproximadas de vários processos naturais

ÁREA	SISTEMA	DIMENSÃO FRACTAL
Biologia	Pulmão	~2,2
	Cérebro dos mamíferos	~2,6
	Borda de colônias de fungos e bactérias	~1,4
Geociências	Linhas costeiras	Entre 1,2 e 1,4
	Contornos topográficos de montanhas	Entre 1,1 e 1,3
	Objetos fragmentados (granito, basalto, carvão, etc)	Entre 2,1 e 2,6
Cosmologia	Distribuição de galáxias no Universo	~1,2
Estrutura da matéria	Nuvens (projeção do perímetro)	~1,35

Sabemos, da geometria euclidiana, que um ponto tem dimensão zero, uma reta tem dimensão um, um plano tem dimensão dois, um sólido tem dimensão três, e assim sucessivamente, mesmo que seja sensorialmente impossível perceber além da terceira dimensão. A superfície terrestre, por exemplo, possui dimensão dois, já que cada ponto é determinado a partir do par ordenado dos valores da latitude (distância ao Equador medida ao longo do meridiano de Greenwich e esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0° e 90° para Norte ou para Sul) e da longitude (distância ao meridiano de Greenwich medida ao longo do Equador e esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0° e 180° para Leste ou para Oeste). Agora, para a localização de um satélite, por exemplo, é necessário,

além da longitude e latitude, o valor da altitude. Assim, o espaço, de uma maneira geral, possui dimensão três. Essa dimensão euclidiana denomina-se usualmente por dimensão topológica.

A dimensão de um fractal, ao contrário do que ocorre na geometria euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nesse caso, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Para estudarmos essa característica básica de qualquer fractal, a dimensão, vamos estudar a dimensão de Hausdorff e a "box-counting", método computacional que é obtido a partir do processo de Hausdorff. (Falconer, 2003)

## HAUSDORFF

Dado um segmento de reta de comprimento  $L$ , podemos dividi-lo em  $S$  partes congruentes, que são auto-semelhantes. Seja  $C$  o comprimento de cada novo segmento obtido a partir dessa divisão, ou seja,  $C = \frac{L}{S}$ . Assim, temos também que  $S = \frac{L}{C}$ . Aplicando logaritmo em ambos os lados, ficamos com  $\log S = \log \left(\frac{L}{C}\right)$ . Mas sabemos, da geometria euclidiana, que segmento de reta possui dimensão um, portanto,  $d = \frac{\log S}{\log \frac{L}{C}} = 1$ .

Da mesma maneira, podemos dividir um quadrado de lado  $L$  (área  $L^2$ ) em outros  $S$  quadrados auto-semelhantes. Seja  $C$  o comprimento de cada novo segmento obtido a partir dessa divisão, ou seja,  $C = \frac{L}{\sqrt{S}}$ , obtendo quadrados menores e auto-semelhantes de área  $C^2 = \frac{L^2}{S}$ . Assim, temos também que  $S = \left(\frac{L}{C}\right)^2$ . Aplicando logaritmo em ambos os lados, ficamos com  $\log S = \log \left(\frac{L}{C}\right)^2$ . Sabemos, da geometria euclidiana, que planos possuem dimensão dois, e realmente,  $d = \frac{\log S}{\log \frac{L}{C}} = 2$ .

Analogamente para um cubo de lado  $L$  (volume  $L^3$ ), podemos dividi-lo em  $S$  cubos auto-semelhantes. Seja  $C$  o comprimento de cada novo segmento obtido a partir dessa divisão, ou seja,  $C = \frac{L}{\sqrt[3]{S}}$ , obtendo cubos menores e auto-semelhantes de volume  $C^3 = \frac{L^3}{S}$ . Assim, temos também que  $S = \left(\frac{L}{C}\right)^3$ . Aplicando logaritmo em ambos os lados, ficamos com  $\log S = \log \left(\frac{L}{C}\right)^3$ . Sabemos, da geometria euclidiana, que cubos são tridimensionais, e realmente,  $d = \frac{\log S}{\log \frac{L}{C}} = 3$ . (Silva, M. M.; Souza, W. A., 2010)

Da mesma maneira, podemos incluir as figuras fractais, ou seja, a dimensão de um fractal pode ser expressa por:

$$d = \frac{\log S}{\log \frac{L}{C}}$$



## BOX - COUNTING

Dentre os vários cálculos de dimensão fractal existentes, o "box-counting" é um dos mais utilizados, pois utiliza um processo fácil de visualização, a divisão da figura original em quadrados cada vez menores, utilizando uma malha quadriculada.

Para calcular essa dimensão consideramos uma figura qualquer coberta por uma malha quadriculada. Calcula-se o número de quadrados necessários para cobrir toda a figura que é representado por  $N$ , para um número  $s$  de vezes que o lado da imagem original foi dividido. Quanto menor for o valor de  $s$ , maior será o de  $N$ , e dessa forma chega-se a um número mais próximo do valor da dimensão "box-counting", como vemos na figura 8.

A dimensão "box-counting" será calculado a partir da fórmula:

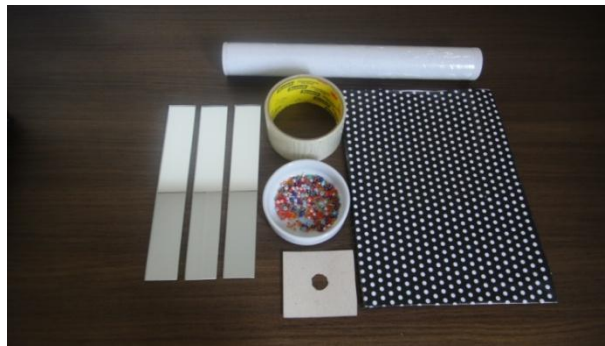
$$dim = - \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

Na quarta aula a turma foi dividida em grupos e cada grupo escolheu uma atividade relacionada aos fractais a qual foi entregue após duas semanas.

#### ATIVIDADES SUGERIDAS - DESCRIÇÃO INDIVIDUAL:

- Caleidoscópio: objeto que apresenta, após movimentações, diversas combinações de figuras e um belo efeito visual. Apresenta simetria, ou seja, auto-semelhança que os fractais possuem.

Material necessário: três espelhos de dimensões 3 cm x 20 cm, fita adesiva, papel filme, miçangas coloridas, pedaço de papelão com um furo no centro para fechar uma das extremidades, papel colorido para forrar o caleidoscópio.



Construção: Una os três espelhos, formando um prisma triangular com a fita adesiva, deixando a parte refletora para dentro.



Feche uma das extremidades com papel filme e insira as miçangas.



Feche com o papelão a outra extremidade (se considerar necessário cubra o papelão com papel filme para que as miçangas não saiam de seu caleidoscópio). Cubra seu caleidoscópio com o papel colorido apenas para enfeitá-lo.



- Vídeo Feedback: essa atividade permite o aluno visualizar um vídeo que apresenta a complexidade infinita de um processo recursivo que define um fractal.

Material necessário: máquina filmadora, televisão e objeto que julgar interessante.

Construção: Ligue sua máquina filmadora à televisão. Dê um ângulo à máquina e ligue ambos os aparelhos, posicionando sua máquina voltada à televisão, como se estivesse filmando-a. Movimente algum objeto entre a máquina e a televisão, por exemplo uma lanterna.

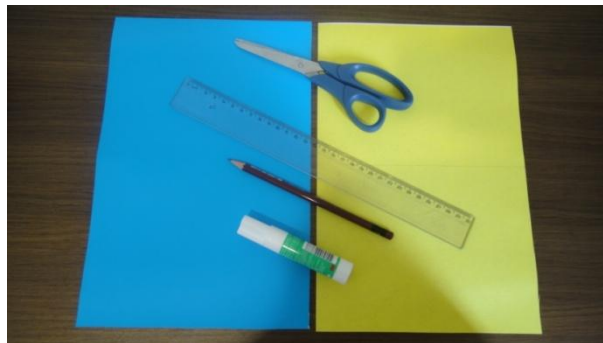
- Construção de fractal a partir de um programa de computador ou de um desenho em papel: essa atividade pode contribuir para a pesquisa de fractais diferentes dos que estudamos em aula, fazendo com que o aluno descubra outros fractais e entenda seu processo de iteração.

Material necessário: programa de computador Geogebra<sup>(6)</sup> ou papel A3 e lápis de cor.

Construção: Caso seja escolhido o programa de computador, escolha um dos fractais estudados na aula anterior e utilize o programa para sua construção a partir das iterações estudadas. Agora, caso seja escolhido o desenho em papel, invente e construa seu próprio fractal.

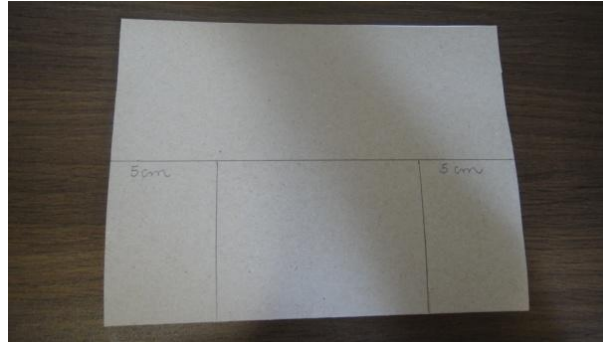
- Cartão fractal: a construção de um cartão fractal permite ao aluno a visualização do processo de iteração existente.

Material necessário: 2 papéis retangulares coloridos para cartão (duas cores distintas e mesmo tamanho, 30cm x 20cm), régua, lápis, tesoura e cola.

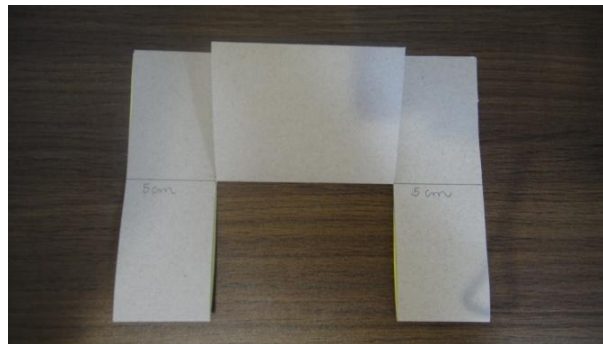


(6) GeoGebra: é um software de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Disponível para fazer download no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). (Disponível em português)

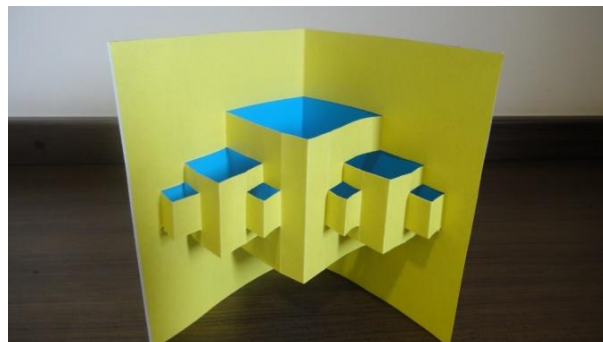
Construção: Dobre um de seus papéis retangulares ao meio de tal forma que as novas medidas sejam 15cm x 20cm e mantenha-o dobrado, com a dobra voltada a você. Com o auxílio de uma régua trace uma reta paralela à dobra centralizada. Nessa reta, marque um ponto com 5 cm de distância de cada extremidade (um quarto para cada lado e metade ao centro) e trace um segmento perpendicular a partir desses pontos ligando sua reta com a dobra inicial, formando um novo retângulo.



Recorte apenas esses dois últimos segmentos e dobre até atingir o outro lado do cartão. Dessa forma foi construído um novo retângulo, do qual devemos realizar as mesmas etapas seguidas anteriormente.



Construa quantos recortes quiser, formando seu cartão fractal. Para finalizar, cole o outro papel colorido apenas pelas beiradas do seu cartão fractal.



E, finalmente, na quinta e última aula, no dia da entrega de suas atividades, os alunos responderam novamente ao questionário que eles já haviam respondido na primeira aula para comparar o que cada um aprendeu com essa proposta.

## AVALIAÇÃO

Primeiramente, os alunos foram avaliados a partir da participação perante ao primeiro questionário e às aulas ministradas sobre o tema. Além da participação, houve mais duas notas: uma, em grupo, dada pela apresentação da atividade prática, previamente escolhida por eles; a outra foi individual, após a segunda resolução do questionário, que foi corrigido como uma atividade escrita avaliativa: questões de 1 a 10 valendo 0,5 ponto e questões de 11 a 15 valendo 1,0 ponto, totalizando 10,0 pontos.

## RESULTADOS

Após as cinco aulas previstas para a aplicação desse plano, pude perceber que os alunos se interessaram sobre o assunto, pois eles perceberam a aplicação dos elementos geométricos e matemáticos em um conteúdo novo, a Geometria Fractal, discutindo o assunto com seus colegas e outros professores.

O resultado quanto ao questionário foi promissor, pois é nítida a diferença entre o primeiro respondido pelos alunos e o segundo, que foi respondido após as aulas sobre o tema. Por exemplo, a maioria dos alunos havia deixado em branco a resposta sobre dimensão no primeiro momento (questões 4 a 7), mas souberam responder as mesmas perguntas no segundo. Por exemplo:

Qual é a dimensão de um ponto? São várias pontinhas aglomeradas em um sentido  
 Qual é a dimensão de uma reta? São várias pontas ligadas em um sentido  
 Qual é a dimensão de um plano? \_\_\_\_\_  
 Qual é a dimensão de um cubo? \_\_\_\_\_

Qual é a dimensão de um ponto? dimensão 0  
 Qual é a dimensão de uma reta? dimensão 1  
 Qual é a dimensão de um plano? dimensão 2  
 Qual é a dimensão de um cubo? dimensão 3



Outro exemplo foi em relação às questões 11 e 13, as quais tratavam de comprimento e área, respectivamente. Nesse caso, os alunos não haviam percebido o aumento de comprimento na figura da questão 11, assim como a diminuição da área do exercício 13,

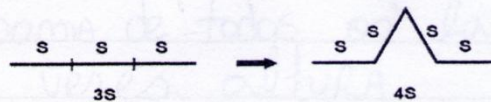
- a) Qual é o comprimento da figura após a primeira iteração? 4,5 cm para cada espaço  
 b) Qual é o comprimento da figura após a segunda iteração? 16 cm para cada espaço  
 c) O que acontecerá com esse comprimento após infinitas iterações? O comprimento dele ficará 100 vezes maior

porém, após a aula-tema, a maioria entendeu a ideia de limite e percebeu que havia diferença nos dois casos. Exemplo de resposta da questão 11 na avaliação diagnóstica e após explicação, respectivamente:

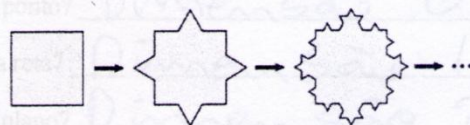
- a) Qual é o comprimento da figura após a primeira iteração? 12 cm  
 b) Qual é o comprimento da figura após a segunda iteração? 16 cm  
 c) O que acontecerá com esse comprimento após infinitas iterações? vai aumentar o comprimento

No exercício 12, o qual tratava de continuar o desenho nas próximas duas iterações, apesar dos alunos terem conseguido entender o enunciado da questão, muitos não mantiveram o tamanho original, ampliando o desenho nos dois questionários. E finalmente, nas questões 14 e 15, questões de vestibulares, poucos alunos conseguiram concluir suas respostas, mas os que resolveram, as fizeram corretamente. Exemplo de resolução de exercício de vestibular:

14) (UFF) Certas imagens captadas por satélites espaciais, quando digitalizadas, são representadas por formas geométricas de aspecto irregular ou fragmentado, conhecidas por fractais. Podem-se obter tais fractais pela alteração da forma original de uma curva por meio de um processo em que os resultados de uma etapa são utilizados como ponto de partida para a etapa seguinte. Considere o processo tal que, em todas as etapas, cada segmento de reta é transformado em uma poligonal cujo comprimento é quatro vezes a terça parte do segmento original, como ilustrado na figura a seguir:



Por esse processo, a partir de um quadrado com 1 metro de lado, obtém-se a seqüência de figuras:



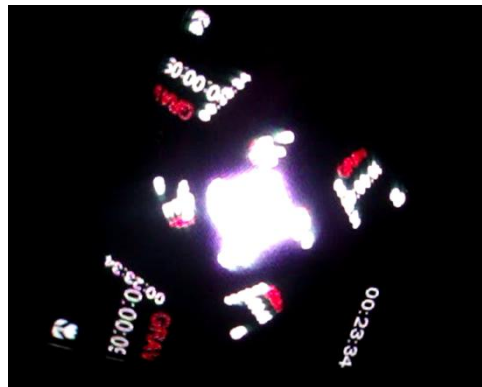
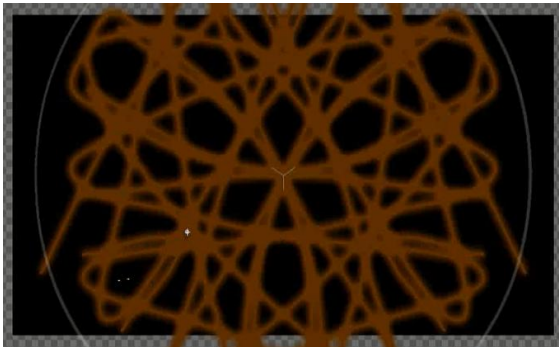
O perímetro, em metro, do quinto polígono dessa seqüência é:

- a)  $4^4/3^4$       b)  $4^4/3^5$        c)  $4^5/3^4$       d)  $3^5/4^5$       e)  $3^4/4^1$

$$4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^N$$

$$4 \cdot \frac{4^4}{3^4}$$

O resultado quanto às atividades práticas foi excelente, pois dos 100 alunos da 2ª série do Ensino Médio que participaram do projeto, 95 entregaram no dia previamente combinado. Dentre eles, 10 realizaram o vídeo-feedback, 13 construíram o caleidoscópio e o restante construiu algum tipo de cartão fractal. Dos alunos que entregaram o cartão fractal, apenas quatro estavam incorretos, e então houve a necessidade de uma nova explicação a esses alunos. Dos que entregaram o vídeo ou o caleidoscópio, todos estavam corretos. Seguem três fotos de algumas atividades dos alunos:





## 5. CONCLUSÃO

Considere o projeto didático, pois os três momentos mais importantes para o aprendizado de um aluno foram trabalhados em sala de aula: o de uma avaliação diagnóstica, em que preparei cada aluno para uma outra abordagem, utilizando os conceitos previamente conhecidos; o do desenvolvimento, momento em que discutimos o tema dos fractais e trabalhamos com as outras experiências, além de rever conteúdos de séries anteriores; e finalmente, o da conclusão, em que cada aluno pôde rerepresentar sua bagagem de conteúdos e refletir sobre o seu novo conhecimento adquirido.

De acordo com os PCNEM, *"a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais"*. (PCNEM, parte III, p. 40)

Portanto, o estudo da Geometria Fractal, em sala de aula, gera a oportunidade do aprimoramento ou desenvolvimento das habilidades e competências de cada aluno, com uma proposta diferente das que os alunos estão habituados, utilizando outra visualização, já que valoriza a Geometria Euclidiana e promove a curiosidade e a vontade em aprender, empregando conteúdos como cálculo de perímetro e área, de sequências, de funções, de iterações, de semelhança entre figuras e de dimensão.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barbosa, R. M. *Descobrimos a geometria fractal - para a sala de aula*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Carl B. Boyer, tradução Elza F. Gomide, 1996.
- BRASIL, LDB. Lei 9394/96 - *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*.
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM): parte III – ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília, 2000b. 40p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 01 jan. 2013.
- C.T. Brown, W.R.T. Witschey. *The fractal geometry of ancient Maya settlement*. Journal of Archaeological Science 30 (2003).
- Carvalho, M. C. C. S. et al. *Fractais: uma breve introdução*. São Paulo, 1986.
- Eves, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Howard Eves, tradução Hygino H. Domingues, 2004.
- Falconer, K. J. *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2003.
- Falconer, K. J. *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, 1997.
- Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals: new frontiers of science*. Second edition, 2004.
- Jonh Briggs. *Fractals: the patterns of chaos*. Touchstone, 1992.
- Lima, E. L. *Curso de análise*. Volume 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- Mandelbrot, Benoit B. *The fractal geometry of nature*. Benoit B. Mandelbrot, 1977.
- Manfred Schroeder. *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise*. Dover ed, 1991.

Meissner, H. *Encapsulation of a process in geometry*. International group for the psychology of mathematics education. Utrecht, 2001.

Silva M. M.; Souza, W. A. *Revista eletrônica de matemática*. Nº 2 - 2010.

Sallum, E. M. Fractais no ensino médio. *Revista do Professor de Matemática, SBM*, nº. 57, p. 1-8, maio/ago. São Paulo, 2005.