Ricardo Scopel Alves Pereira

Tópicos em Geometria Espacial de Posição: Paralelismo e Perpendicularidade

Vitória

2022

Ricardo Scopel Alves Pereira

Tópicos em Geometria Espacial de Posição: Paralelismo e Perpendicularidade

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Florêncio F. Guimarães Filho

Vitória

2022

Ricardo Scopel Alves Pereira

Tópicos em Geometria Espacial de Posição: Paralelismo e Perpendicularidade

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Vitória, 2 de janeiro de 2023

Prof. Dr. Florêncio F. Guimarães Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr.Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr.Fidélis Zanetti de Castro
IFES - Instituto Federal de Educação
Membro Externo

Vitória
2022

Dedico este trabalho em memória de meus queridos e amados pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar meu caminho e me dar forças para seguir sempre em frente e, assim, cumprir mais uma importante etapa da minha vida.

Agradeço a minha família, principalmente a meus pais, pela educação, alicerce para a vida.

Aos professores do PROFMAT, em especial a meu orientador professor Dr. Florêncio F. Guimarães Filho, que, com incansável dedicação, motivou-me a concluir este trabalho.

"O melhor para aprender qualquer coisa é descobrir por si próprio. Deixe que (os alunos) aprendam adivinhando. Deixe que aprendam provando. Não desista, porém, do seu papel secreto - deixe que os estudantes adivinhem antes de você contar - deixe que eles descubram por eles mesmos tanto quanto for possível."

(Polya)

Resumo

Este trabalho demonstra a importância dos conhecimentos de Geometria no espaço amparada pelos conceitos de Geometria Plana na construção de sólidos geométricos e cálculos no espaço. O paralelismo no espaço e suas propriedades permitirão fazer transposições de ângulos que serão de grande valia nas construções; já as relações de perpendicularidade serão importantes para os cálculos de distâncias e ângulos no espaço. Dessa forma, teremos boas fundamentações do assunto e uma maior facilidade no desenvolvimento de uma visão e intuição espaciais. Já os exemplos apresentados mostrarão aplicações desses conceitos em situações problemas e evidenciarão como a Geometria Espacial está presente nas mais variadas situações do cotidiano. Pretende-se também, com este trabalho, contribuir para a formação de educadores em Geometria proporcionando aos mesmos embasamento teórico para efetiva construção dos sólidos geométricos. Desse modo, espera-se suprir lacunas existentes em livros didáticos sobre o tema.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Paralelismo e Perpendicularidade; Construções de Sólidos.

Abstract

This work demonstrates the importance of knowledge of geometry in space supported by the concepts of plane geometry in the construction of geometric solids and calculations in space. Parallelism in space and its properties will make it possible to transpose angles that will be of great value in constructions; the perpendicularity relations will be important for the calculation of distances and angles in space. In this way we will have good foundations of the subject and greater ease in the development of a vision and spatial intuition. The examples presented will demonstrate applications of these concepts in problem situations and will show how Spatial Geometry is present in the most varied everyday situations. It is also intended, with this work, to contribute to the training of educators in Geometry, providing them with a theoretical basis for the effective construction of geometric solids. In this way, it is expected to fill existing gaps in textbooks on the subject.

Keywords: Spatial Geometry; Parallelism and Perpendicularity; buildings of Solid.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

De um modo geral, quando nos deparamos com um problema de Geometria Espacial, tendemos a priorizar mais a álgebra que os conceitos geométricos e as suas representações no plano e no espaço, sem perceber que, sem tais habilidades, é praticamente impossível desenvolver um bom trabalho em Geometria.

A Geometria Espacial nos permite explorar as propriedades de figuras que são construídas a partir de certos conceitos básicos de elementos no espaço. Esses termos geométricos são estabelecidos por meio de definições, axiomas e teoremas.

Antes de tratarmos da teoria e aplicações da Geometria Espacial, apresentaremos um breve recorte histórico da Geometria.

A Geometria (medida da terra), que deriva do grego geo – terra e metria – medida, desde os primórdios, sempre esteve presente na vida das pessoas. Os conhecimentos geométricos são indispensáveis nas tarefas do dia a dia, mesmo que de forma intuitiva, além de desenvolverem o raciocínio lógico e colaborarem para um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento.

De acordo com (BOYER, 1994), afirmações sobre os primórdios da Matemática, seja da Aritmética ou Geometria, são necessariamente arriscadas, pois a origem do assunto é mais antiga que a arte de escrever.

Por volta de 3000 a.C., aconteceu um evento que podemos chamar de revolução agrícola, advindo da necessidade de produzir alimentos para abastecer as cidades que surgiram. Tal demanda fez com que os povos se desenvolvessem em vários aspectos, inclusive na aplicação da Geometria em construção de canais de irrigação, barragens, entre outros.

Segundo (EVES, 2011), todos os ingredientes para o progresso científico estavam reunidos: escrita, necessidade de novas tecnologias, ambientes urbanos e tempo de lazer.

Iniciaremos o contexto histórico pela Mesopotâmia (Babilônia), no vale entre os rios Tigre e Eufrates, região onde floresceu a civilização suméria, antes de 3500 a.C. O povo sumério tornou-se conhecido por prosperar construindo cidades e desenvolvendo avançados sistemas de irrigação, além do sistema legal, administrativo e até mesmo um serviço postal. Destaca-se ainda a escrita desenvolvida e a contagem baseada em um sistema sexagesimal, ou seja, de base 60. Tábuas de argila cozida foram usadas para fazer registros. Na Geometria, os sumérios sobressaíram-se na mensuração prática, cálculo de áreas e volumes. Além de fazer uma estimativa de 3 para o π, também conheciam o teorema de Pitágoras. A marca principal da Geometria babilônica era o seu caráter algébrico.

Muitas dessas tábuas registraram assuntos que, embora não contenham matemática profunda, são fascinantes, como, por exemplo, os sistemas de irrigação das primeiras civilizações da Mesopotâmia.

Segundo (MUROI, 1992), era uma tarefa importante para os governantes da Mesopotâmia cavar canais e mantê-los, porque os canais não eram apenas necessários para irrigação, mas também úteis para o transporte de mercadorias e exércitos. Os governantes ou altos funcionários do governo devem ter ordenado aos matemáticos da Babilônia que calculassem o número de trabalhadores e dias necessários para a construção de um canal, bem como as despesas totais dos salários dos trabalhadores.

No Egito Antigo, a Matemática não alcançou o nível obtido pelos babilônicos devido a diversos motivos; principalmente o isolamento geográfico, que reduzia o risco de invasão. O rio Nilo, por ser bastante sereno, não carecia de obras de engenharia. Esses detalhes acabaram atrapalhando o desenvolvimento matemático, entretanto os egipícios se destacaram no cálculo de áreas e volumes, teoria das proporções, volume do tronco de pirâmides de base quadrada e, em destaque, nas construções das pirâmides. Os registros dessas construções foram feitas em papiros, destacando o papiro de Rhind e o papiro de Moscou.

Na China, vários fatores levaram ao desenvolvimento da Matemática. Por estar geograficamente isolada, a princípio teve um grande período de desenvolvimento de forma independente de outros povos, mas, quando o país foi conquistado por invasores estrangeiros, por volta de 1000 a.C, aconteceu uma rica mistura de culturas que ajudou muito o desenvolvimento cultural chinês.

Os primeiros registros chineses eram feitos em ossos e carapaças de tartaruga. O uso da Matemática chinesa se destacou na agricultura, engenharia e na agrimensura. Os chineses dominavam o teorema de Pitágoras e já conheciam uma aproximação do π até a sexta casa decimal.

Uma das obras mais famosas da Matemática chinesa, o livro " Os nove capítulos sobre a arte da Matemática", revela que não havia demonstrações como faziam os gregos, somente regras de resolução.

E, por fim, a Grécia causou a mudança de paradigmas ao introduzir o raciocínio dedutivo matemático, que foi empregado pela primeira vez por Tales de Mileto (640-564 a.C). A partir desse período, iniciaram-se questionamentos matemáticos tais como "Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "Por que o diâmetro de um círculo divide o círculo ao meio?".

A introdução da noção de discurso lógico como uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas, processo chamado de método postulacional, tornou-se a verdadeira essência da Matemática moderna.

A Geometria grega teve o seu auge entre 600 a.C e 300 a.C, iniciando com Tales de Mileto e terminando com Euclides, cujo desenvolvimento passou por Platão 427 a.C, que estudou filosofia com Sócrates e Matemática com Teodoro de Cirene, e tornou-se grande amigo de Arquitas. No retorno a Atenas (387 a.C), Platão fundou sua renomada academia onde quase todos os trabalhos matemáticos importantes da época (séc. IV a.C) foram desenvolvidos. O lema na entrada era "Que aqui não adentrem aqueles não versados em Geometria."

Pouco se sabe sobre Euclides, o grande expoente da Geometria grega e mundial. Os registros de nascimento e morte não são confiáveis; sabe-se que foi convidado para ser professor de Matemática e chefiar a Universidade de Alexandria, e que possivelmente sua formação matemática veio da escola platônica de Atenas, onde aprendeu Geometria de Eudoxio e Teeteto.

De acordo com (BULMER-THOMAS, 1970), uma consideração geral das obras de Euclides sugere que ele deve ter escrito depois dos alunos de Platão, como Eudoxo, e antes de Arquimedes.

Alguns episódios são atribuídos a Euclides, como a resposta dada à indagação de Ptolomeu sobre não haver caminho mais curto para o conhecimento geométrico: "Não há estradas reais na Geometria". Alguém que estudava Geometria com Euclides, quando aprendeu o primeiro teorema, perguntou-lhe: "O que vou ganhar aprendendo essas coisas?" Euclides chamou seu escravo e disse: "Dê-lhe três pences, pois ele deve lucrar com o que aprende".

Algumas obras de Euclides perduraram, como: "Os dados", "Divisão de figuras", "Os fenômenos" e "Óptica". Sua maior obra, "Os Elementos", só é superada, em estudos, pela Bíblia. Considerada a maior influenciadora do pensamento científico, possui mais de 1000 edições, sendo a primeira datada de 1482. Infelizmente não existe nenhuma cópia da época de Euclides, as edições publicadas se basearam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois. Alguns historiadores declaram que Euclides teve acesso à coleção de Teúdio de Magnésia, e que foi uma fonte inspiradora para a sua obra. Pode-se afirmar que o grande mérito de "Os Elementos" consiste na escolha adequada das proposições e no ordenamento em uma sequência lógica, a partir de umas poucas suposições iniciais.

Além das questões relacionadas à Geometria, a obra "Os Elementos" aborda também a Teoria dos números e Álgebra elementar. O conjunto da obra possui quatrocentos e sessenta e cinco proposições, distribuídas em treze livros.

No livro 1, são apresentadas as definições, cinco postulados e axiomas necessários para o desenvolvimento do pensamento dedutivo. No livro 2, quatorze proposições, transformações de áreas e álgebra geométrica da escola pitagórica. No livro 3, há trinta e nove proposições e os assuntos abordados são teoremas sobre círculos, cordas, secantes e medidas de ângulos. Já no livro 4, temos dezesseis proposições, dando enfoque às construções com régua e compasso, estudo dos polígonos regulares de três, quatro, cinco e seis lados, além da inscrição e circunscrição desses polígonos num círculo dado. O livro 5 trata da teoria das proporções de Eudoxo. O livro 6 apresenta a teoria das proporções eudoxiana aplicada à Geometria Plana, como semelhança de triângulos, médias proporcionais, resolução geométrica de equações quadráticas e uma generalização do teorema de Pitágoras. Como podemos observar, os seis primeiros livros referem-se à Geometria Plana. Os livros 7, 8 e 9 possuem no total cento e duas proposições sobre a Teoria Elementar dos Números. Os livros 11, 12 e 13 abordam Geometria Espacial. O livro 11 fornece as definições básicas necessárias para o entendimento dos três livros juntos e expõe sobre retas e planos. O livro 12 trata de volumes e o 13, de inscrição de sólidos dos cinco poliedros na esfera (BICUDO, 2009).

De acordo com (HEATH, 1956), "Os Elementos", com todas as suas imperfeições, que são na verdade mínimas, considerando a data em que foi publicado, é seguramente o mais importantesem livro de Matemática de todos os tempos devido à imensurável contribuição e relevânciapara para o estudo da mesma.

Ao longo desta dissertação, serão empregados os postulados que envolvem paralelismo e perpendicularidade por meio de três princípios fundamentais da Geometria Espacial:

1. A propriedade de paralelismo é transitiva, ou seja, se as retas 1, 2 e 3 são diferentes, e a reta 1 paralela à reta 2, e a reta 2 é paralela à reta 3, então a reta 1 é paralela à reta 3.

2. Paralelismo preserva ângulos. Ângulos de lados paralelos têm a mesma medida.

3. Retas e Planos perpendiculares. Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano determinado pelas duas retas, abordando o teorema das três perpendiculares.

Esses princípios serão de extrema importância para os cálculos de distâncias e ângulos, que são apresentados a seguir. Por fim, os princípios de paralelismo e perpendicularidade serão ilustrados por meio de aplicações na resolução de problemas.

2 Paralelismo e Transitividade

Neste capítulo, serão abordadas algumas definições de retas paralelas, no plano e no espaço, e a propriedade da transitividade. Inicialmente, serão listados os conceitos básicos para dar suporte aos conteúdos a serem apresentados, fundamentados em (DOLCE, 2005) e (CARVALHO, 1993).

2.1 Conceitos Primitivos e Postulados

2.1.1 Conceitos Primitivos

São conceitos adotados sem definição.

1. Ponto

Características: Não possui dimensão (adimensional) e nem formato. sua representação geométrica é indicada por letra maiúscula do alfabeto latino (A, B, C, ...). Por um ponto, passam infinitas retas.

2. Reta

Características: É unidimensional e tem comprimento infinito, sua representação geométrica é indicada por letra minúscula do alfabeto latino (r, s, t, ...). Em uma reta, há infinitos pontos.

3. Plano

Características: É bidimensional, possui largura e comprimentos infinitos e não possui espessura, sua representação geométrica é indicada por letra do alfabeto grego (α, β, e γ).

2.1.2 Postulados

Postulados são proposições aceitas sem demonstrações.

Postulado I. Por dois pontos do espaço passa uma e somente uma reta.

Postulado II. Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

Postulado III. Por três pontos do espaço, não situados numa mesma reta, passa um, e somente um, plano.

Postulado IV. Dado um plano do espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.

Postulado V. Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos mais de um ponto em comum, e, portanto, pelo menos uma reta em comum.

2.1.3 Determinação de plano

Existem quatro modos de passar um plano:

1°) Com três pontos distintos e não colineares determina-se um plano.

2°) Por uma reta e um ponto fora dela.

3°) Por duas retas concorrentes.

4°) Por duas retas paralelas.

2.2 Paralelismo de retas

Definição 2.2.1. *Duas retas do espaço são paralelas quando estão contidas num mesmo plano e não possuem nenhum ponto comum.*

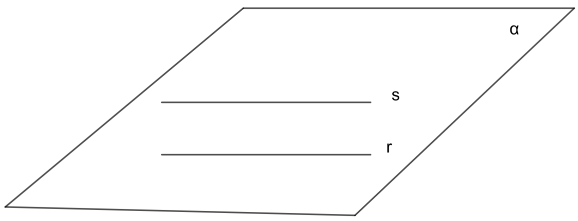

Figura 1 – Duas retas paralelas determinam um único plano contemplando o 1°, 2° e 4° modos de determinação de planos

Definição 2.2.2. *Duas retas distintas contidas num plano são ditas retas coplanares. Duas retas que possuem um único ponto em comum são ditas retas concorrentes. Duas retas não coplanares, ou seja, não contidas num mesmo plano, são ditas retas reversas.*

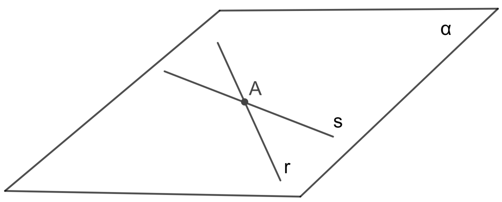

Figura 2 – Duas retas concorrentes determinam um único plano

Segue-se que duas retas paralelas ou concorrentes são coplanares.

Duas retas que não têm ponto em comum nem são paralelas são retas reversas.

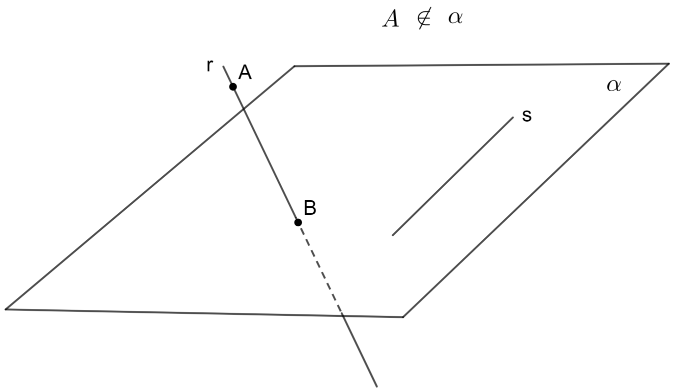

Figura 3 – Duas retas reversas

A reta r tem no máximo um ponto em todo plano α que contém s, lembrando que outra forma de determinar um plano é através de uma reta e um ponto fora dela.

Teorema 2.2.1. *Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a essa reta.*

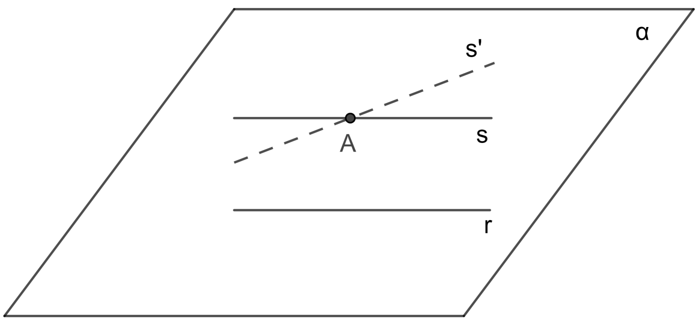

Figura 4 – Por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela

Demonstração. Considere uma reta r e um ponto $A \notin r$. Como vimos anteriormente, por uma reta e um ponto fora dela passa um único plano. Temos um plano α determinado por r e A. Conforme postulado V de Euclides, pelo ponto A no plano α passa uma reta s que não encontra r. Então a reta s é paralela à reta r.

Para mostrar que a reta s é a única reta do espaço que passa pelo ponto A e é paralela a r, suponha que s e s' são paralelas a r e passam ambas por A. Como s' é paralela a r, vai existir um plano α' contendo as retas r e s'. Como s' contém A , então o plano α' contém r e A. Como por r e A passa um único plano, então podemos concluir que o plano α' coincide com o plano α. As retas s e s' estão contidas em α, passam pelo ponto A e são paralelas a r. Devido a unicidade da reta paralela em α, conclui-se que $r = r'$. □

2.3 Transitividade do paralelismo

Se duas retas distintas r e t são paralelas à mesma reta s, então r e t são paralelas entre si, ou seja, $r \parallel s$ e $s \parallel$ t, $r \neq t \Rightarrow r \parallel t$.

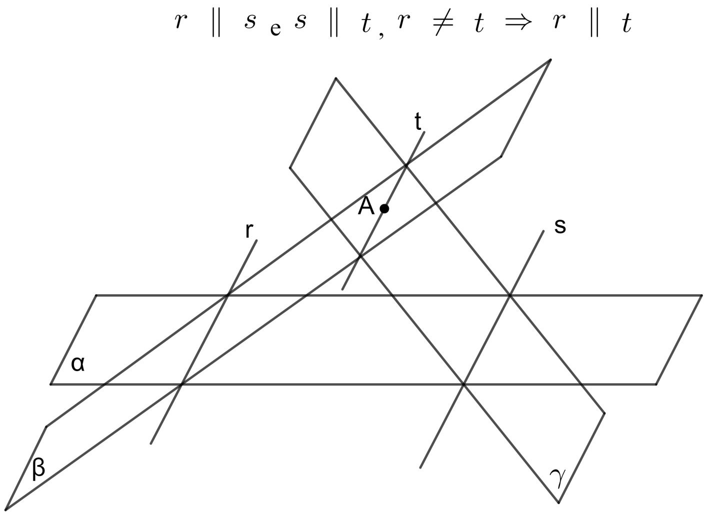

Figura 5 – Planos secantes e retas paralelas

Teorema 2.3.1. *Por um ponto fora de duas retas paralelas passa uma única reta paralela às duas retas.*

Demonstração. Seja A um ponto fora de duas retas paralelas r e s contidas num plano α. Há dois casos a considerar.

Caso 1: $A \in \alpha$.

Pelo ponto A passa uma única reta t paralela a r, $t \subset \alpha$. Se s e t tivessem um ponto P em comum, elas seriam duas retas paralelas a r passando por P, contrariando o postulado V. Logo s e t são paralelas.

Caso 2: $A \notin \alpha$.

Seja β o plano determinado por r e A e seja γ o plano determinado por s e A. Os planos β e γ são distintos, caso contrário $\beta = \gamma$ conteria as retas r e s, logo $\beta = \gamma = \alpha$ conteria o ponto A.

Assim r é paralela a γ. De fato, se γ contivesse um ponto de r, então $\gamma = \alpha$ conteria o ponto A. Como t e r são coplanares e $t \subset \gamma$ segue-se que t é paralela a r.

Assim como s é paralela a β. De fato, se β contivesse um ponto de s, então $\beta = \alpha$ conteria o ponto A. Como t e s são coplanares e $t \subset \beta$, segue-se que t e s são paralelas.

□

Corolário 2.3.1. *Sejam r, s e t três retas distintas tais que r é paralela à s e s é paralela à t, então r é paralela à t.*

Demonstração. Seja A um ponto de t. Pelo teorema 2.3.1, existe uma reta t' que passa em A com $t' \parallel r$ e $t' \parallel s$. Pela unicidade da paralela à s pelo ponto A, $t' = t$. □

Podemos então concluir que retas paralelas possuem a seguinte propriedade transitiva: *"se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si"*.

2.3.1 Aplicação 1

Os conhecimentos sobre paralelismo e transitividade que foram expostos no teorema 2.3.1 e seu respectivo corolário, podem-ser aplicados na construção de um paralelepípedo. Para isso, conceitua-se: 1) Poliedro como sendo um sólido totalmente limitado por polígonos que se ligam pelos seus lados, sendo cada um desses lados comum a exatamente dois polígonos. Cada polígono é chamado face do poliedro, os lados de cada face de arestas e os vértices de cada face de vértices do poliedro. Da mesma forma que na Geometria Plana, em que a palavra polígono pode indicar tanto a região por ele delimitado quanto o seu contorno, a palavra poliedro é utilizada tanto para indicar a região do espaço quanto para indicar a coleção de polígonos que limita esta região.

2)Semiespaço como sendo uma das duas partes em que um plano divide o espaço euclidiano tridimensional. Nota-se que um ponto ponto é capaz de dividir uma reta mas não um plano; uma reta reta é capaz de separar um plano mas não o espaço. A propriedade de separação do espaço mostra o fato que que o espaço tem uma dimensão a mais que o plano.

Definição 2.3.1. *Chama-se paralelepípedo ao poliedro convexo cujas faces são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a união de seis paralelogramos. Chama-se de paralelepípedo reto-retângulo quando suas faces são retangulares e chama-se de cubo ao paralelepípedo cujas faces são quadrados.*

O paralelepípedo ABCDEFGH é um poliedro que podemos construir utilizando três segmentos de retas não coplanares (planos diferentes) AB, AD e AE. Isso mostra que o ponto E não pertence ao plano definido por AB e AD. Primeiro passamos por B e D paralelas a AD e AB, com isso obtemos o paralelogramo ABCD. Depois, traçamos as paralelas a AE nos pontos B, C e D. Tomando segmentos iguais a AE sobre essas retas,

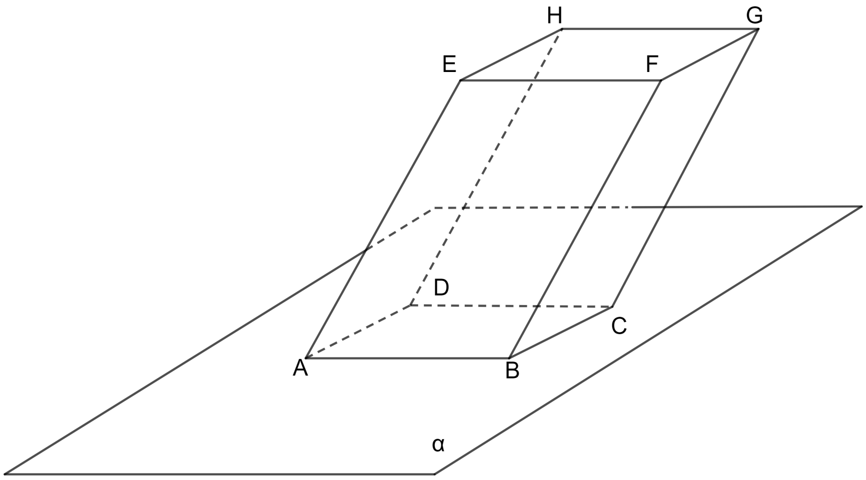

Figura 6 – Construção de um paralelepípedo

no mesmo semiespaço de E, obtemos os pontos F, G e H. Assim $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$. Por fim, são traçados os segmentos EF, FG, GH e HE. Esses segmentos estão no mesmo plano, já que as retas EF e GH são paralelas, basta observar que ABFE e CDHG são paralelogramos.

Ainda observando a figura 6, podem-se verificar a existência de retas reversas; não possuem ponto comum e estão em planos diferentes. Por exemplo as retas definidas pelas arestas AE e BC são reversas.

2.4 Posições relativas entre retas e planos

Há três casos possíveis para a intersecção de uma reta e um plano. A seguir, serão expostos os casos das posições relativas entre eles.

1. Se a reta contém pelo menos dois pontos do plano, então a reta está contida no plano.

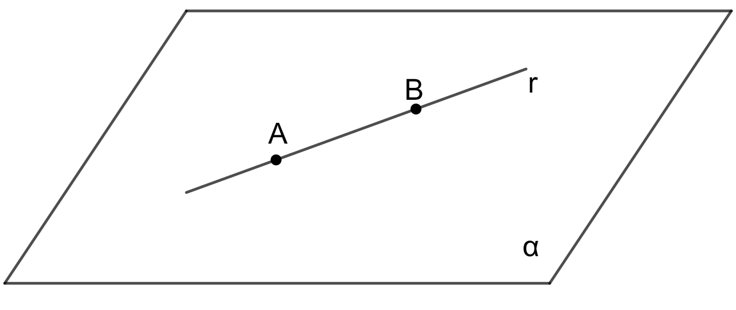

Figura 7 – Reta contida em um plano

2. Se a reta possui um único ponto em comum com o plano, então a reta e o plano são ditos concorrentes ou secantes.

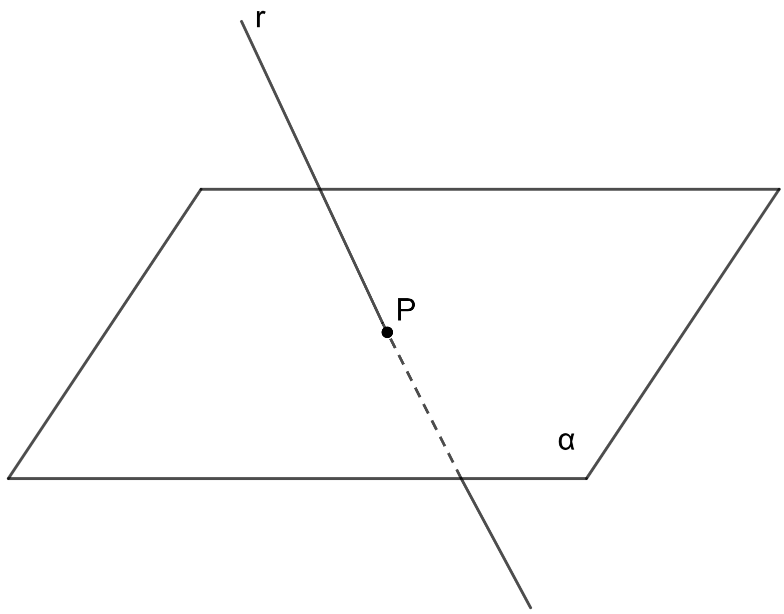

Figura 8 – Reta e plano secantes

3. Se a reta e o plano não têm ponto em comum, então a reta é paralela ao plano.

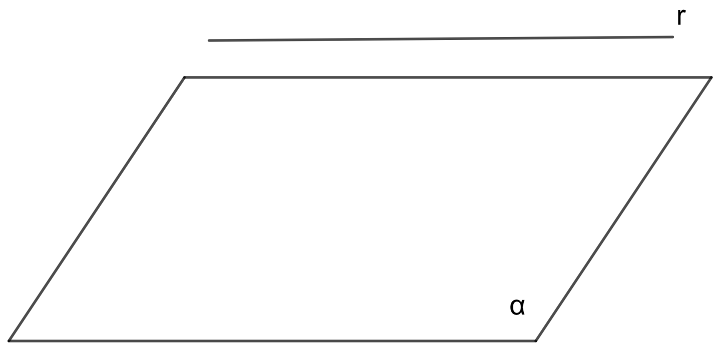

Figura 9 – Reta e plano paralelos 1

2.5 Paralelismo entre retas e planos

Definição 2.5.1. *Uma reta e um plano são paralelos quando não possuem pontos em comum.*

Teorema 2.5.1. *Se uma reta r, não pertencente a um plano α, for paralela a uma reta s de α, então r é paralela a α.*

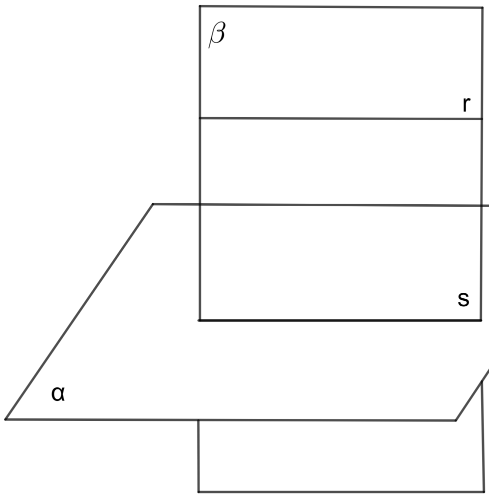

Figura 10 – Reta e plano paralelos 2

Demonstração. Como r e s são paralelas, então r e s estão contidas num mesmo plano β. A intersecção dos planos α e β é a reta s. Como $r \subset \beta$, se existisse um ponto P comum entre r e α, então $P \in \beta \cap \alpha = s$. Logo $P \in r \cap s = \varnothing$, um absurdo. Logo, r é paralela a α. □

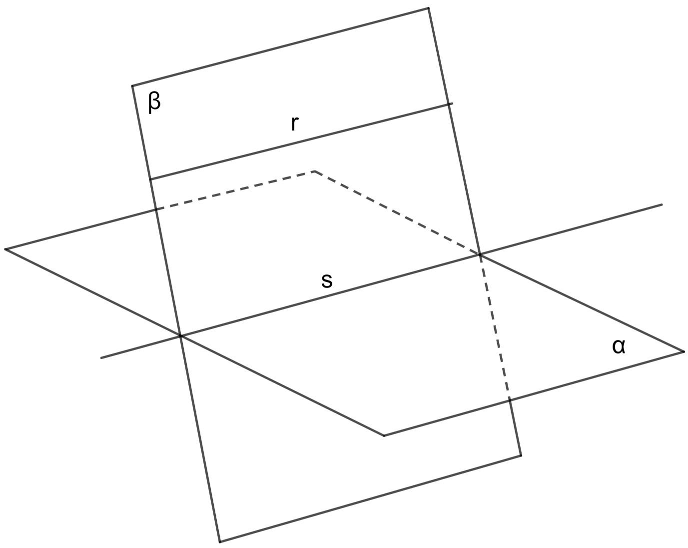

Figura 11 – Reta paralela ao plano

2.6 Paralelismo de planos

Há duas posicões relativas entre dois planos distintos no espaço. Secantes, se possuem uma reta em comum, ou paralelos, se não possuírem pontos em comum. Nesta seção, destacaremos a construção de planos paralelos.

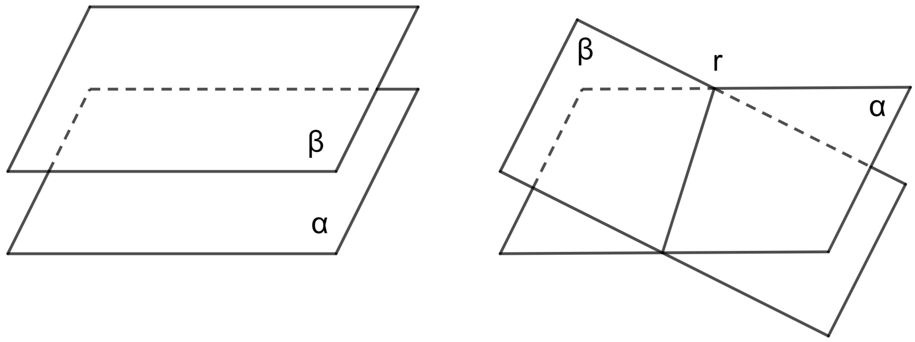

Figura 12 – Posições relativas de dois planos distintos

Teorema 2.6.1. *Se α e β são planos paralelos, então α é paralela a todas as retas de β. Por outro lado, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas num plano β, então α e β são paralelos.*

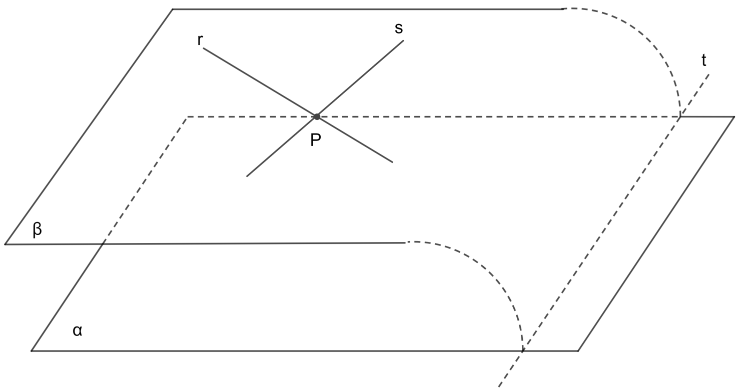

Figura 13 – Planos paralelos

Demonstração. Como toda reta r de β não toca α, concluímos que a reta r é paralela ao plano α. Agora tomemos duas retas r e s do plano β, concorrentes em P, ambas paralelas ao plano α. Sendo α e β planos distintos, suponhamos que se cortem segundo uma reta t. As retas r e s não cortam o plano α e, portanto, não podem cortar a reta t que está contida no plano α. Mas isto significa que as retas r e s pertencem ao plano β, o mesmo que contém a reta t e são ambas paralelas à reta t; o que contradiz a unicidade da paralela à reta t passando pelo ponto A.

□

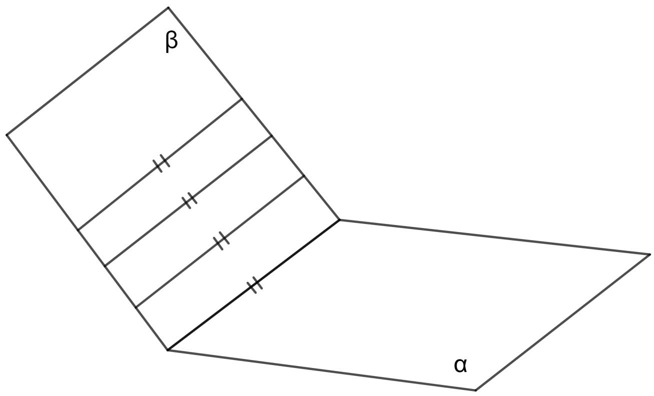

Figura 14 – Infinitas retas de β paralelas a α

3 Paralelismo preserva ângulos

Neste capítulo, será demonstrado como os pares de semirretas paralelas determinam ângulos iguais, isto é, como o paralelismo preserva ângulos e também a sua utilização na construção de sólidos.

3.1 Ângulos com lados respectivamente paralelos são iguais

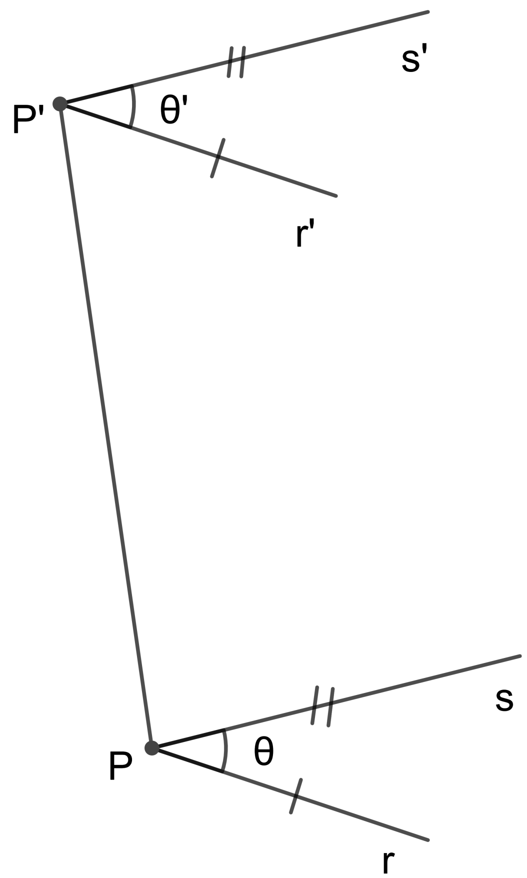

Figura 15 – Pares de semirretas paralelas determinam ângulos iguais 1

Teorema 3.1.1. *Duas semirretas r e s de origem em P formam um ângulo θ e duas semirretas r' e s' de origem em P' formam um ângulo θ'. Se r' é paralela a r e s' é paralela a s, então θ' é igual a θ.*

Demonstração. Para mostrar que $\theta' = \theta$, marca-se um ponto A em r e um ponto B em s, distintos de P. Em seguida, marcam-se os pontos A' em r' e B' em s' tais que $\overline{P'A'} = \overline{PA}$ e $\overline{P'B'} = \overline{PB}$.

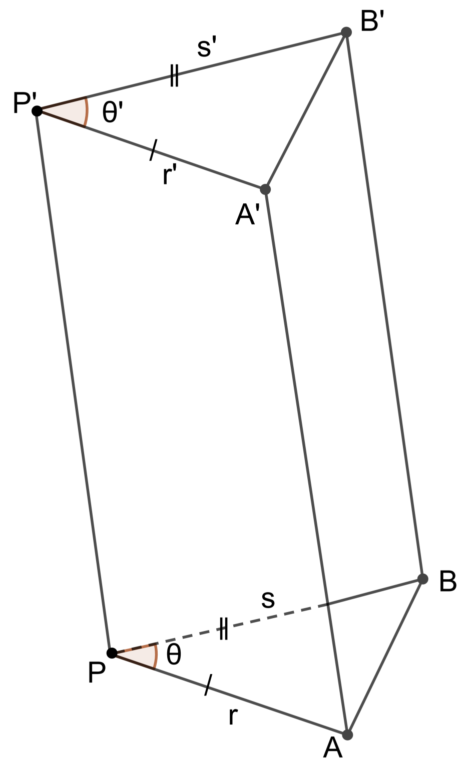

Figura 16 – Pares de semirretas paralelas determinam ângulos iguais 2

Será demonstrado que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ e assim concluir que os triângulos PAB e $P'A'B'$ são congruentes, pelo critério LLL. Têm-se, então, os ângulos $\angle APB = \angle A'P'B'$, logo os ângulos $\theta = \theta'$. Ao traçar os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{PP'}$, tem-se, por hipótese, que $\overline{PA}$ // $\overline{P'A'}$ e $\overline{PA} = \overline{P'A'}$, e os pontos A, P, P' e A' são coplanares, logo o quadrilátero $PAA'P'$ é um paralelogramo. Daí conclui-se que os outros dois lados são paralelos e de mesmo tamanho, ou seja, $\overline{AA'}//\overline{PP'}$ e $\overline{AA'} = \overline{PP'}$. Também temos que $\overline{PB}//\overline{P'B'}$ e $\overline{PB}$ = $\overline{P'B'}$, e os pontos P, B, B' e P' são coplanares, logo o quadrilátero $PBB'P'$ é um paralelogramo. Daí pode-se concluir que os outros dois lados são paralelos e de mesmo tamanho, ou seja, $\overline{BB'}//\overline{PP'}$ e $\overline{BB'} = \overline{PP'}$. Pela transitividade do paralelismo, teremos $\overline{AA'}//\overline{BB'}$ e também $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Logo o quadrilátero $AA'B'B$ é um paralelogramo. Como consequência, $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, como queríamos demonstrar.

$\square$

3.1.1 Aplicação 2

A Matemática deixa claro: a Terra não é plana!

Se a terra fosse plana, o ângulo entre os raios solares e qualquer objeto perpendicular ao solo em qualquer hora do dia, não importando o local, deveria ser o mesmo, pois ângulos com lados respectivamente paralelos são iguais. verifica-se, porém, que isso não acontece na prática, dessa forma pode-se mostrar que a Terra não é plana, conforme constata-se nas figuras a seguir.

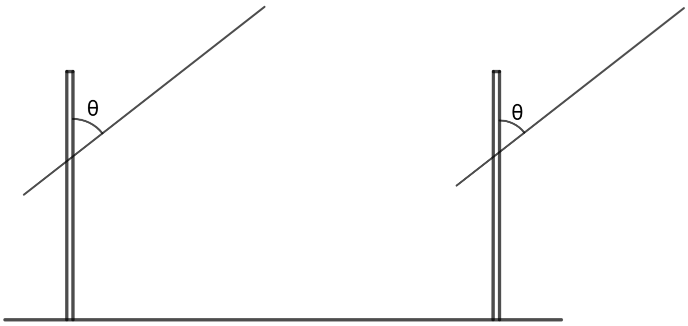

Figura 17 – Terra plana 1

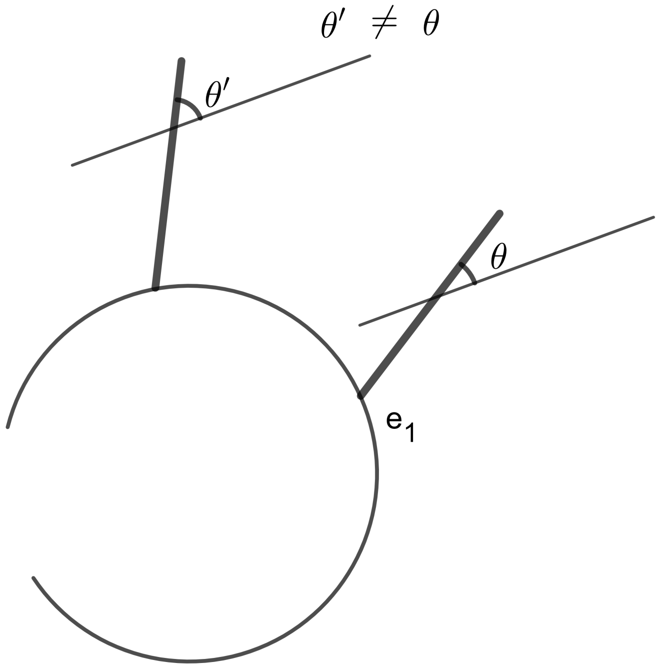

Figura 18 – Terra plana 2

3.2 Ângulo entre retas

Sejam as retas r e s do espaço, não necessariamente coplanares. Para definir o ângulo entre r e s, fixe um ponto P arbitrário e passa-se por P retas $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$. Seja θ o ângulo entre as r' e s'. Definimos o ângulo entre r e s como sendo igual a θ. Pelo teorema 3.1.1, o valor de ângulo θ não depende da escolha do ponto P.

Definição 3.2.1. *Denomina-se ângulo entre duas retas o ângulo formado quando se traça, por um ponto, duas retas paralelas às retas dadas.*

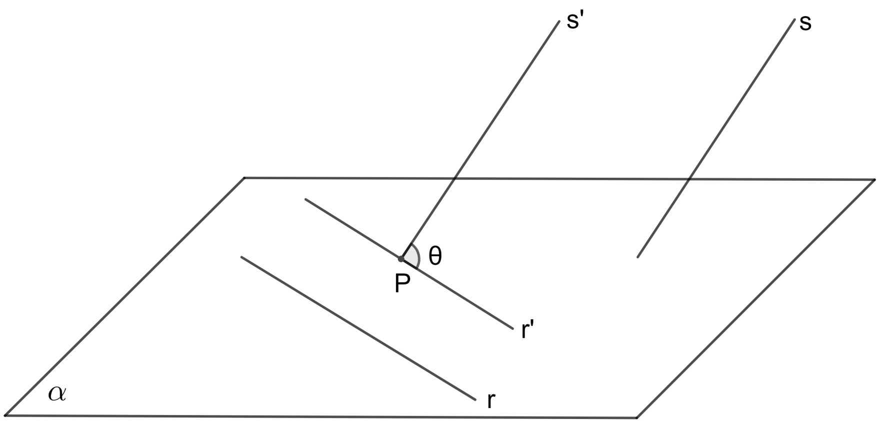

Figura 19 – Ângulo entre retas

Duas retas concorrentes que fazem ângulo reto são ditas retas perpendiculares. Duas retas reversas que fazem ângulo reto são ditas retas ortogonais.

3.2.1 Aplicação 3

Mostrar que um tetraedro regular de aresta ℓ passa através de um barbante fechado de comprimento 2ℓ sem romper (GUIMARÃES, 2021).

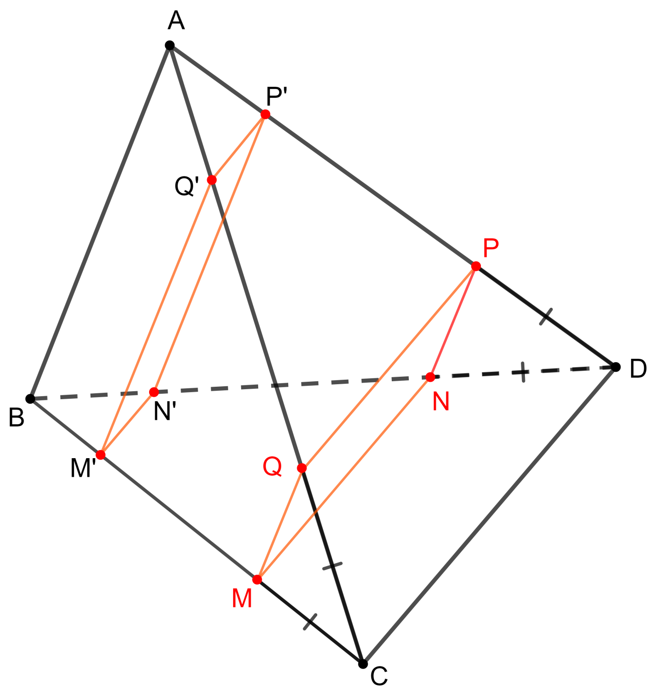

Figura 20 – Tetraedro regular 1

Resolução:

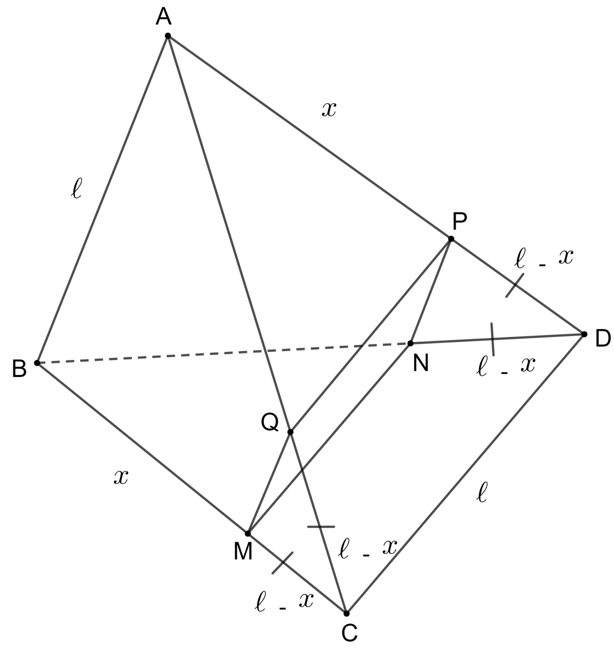

Figura 21 – Tetraedro regular 2

Como se sabe, por um ponto fora de duas retas passa um único plano paralelo às retas.

Agora considere um plano π paralelo às arestas AB e CD, cortando a aresta AD no ponto P.

Seja $MNPQ$ o quadrilátero obtido pela intersecção de π e as faces do tetraedro. Os lados MN e PQ são paralelos a CD, pela transitividade se $MN \parallel PQ$, os lados NP e MQ também são paralelos, pois são paralelos a AB, logo $MNPQ$ é um paralelogramo.

Observando os triângulos equiláteros ACD e ABD temos:

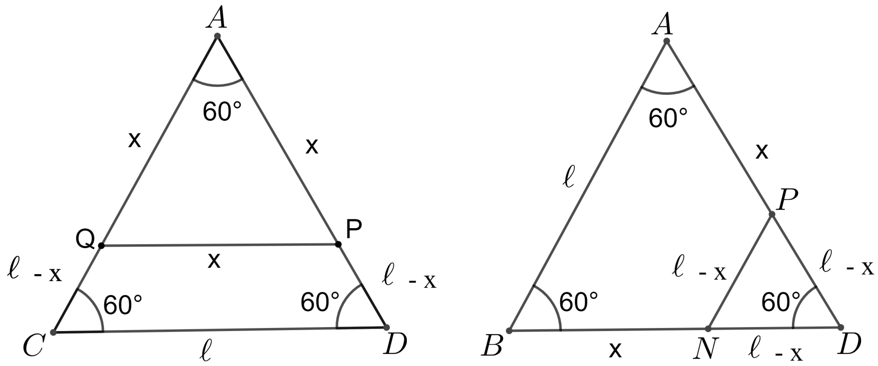

Figura 22 – Triângulos equiláteros

Como CD é paralelo a QP e o triângulo APQ é equilátero, logo $AP = AQ = PQ = x$.

Como AB é paralelo a PN e o triângulo PND é equilátero, logo $PD = ND = PN = \ell$ - x. Então o perímetro do paralelogramo $PQMN$ será: 2(ℓ - x) + 2 (x) = 2ℓ - 2x + 2x = 2ℓ. Como queríamos demonstrar.

4 Perpendicularidade

Este capítulo versará sobre as relações entre retas e planos, em especial a perpendicularidade entre eles, bem como construções baseadas na generalização do cilindro e do cone, com suas particularidades e seus desdobramentos, segundo (GARBI, 2010), (MUNEM, 2011) e (DOLCE, 2005).

4.1 Reta e plano perpendiculares

Definição 4.1.1. *Uma reta secante é perpendicular a um plano quando é perpendicular a todas as retas do plano que passam no ponto de intersecção da reta com o plano.*

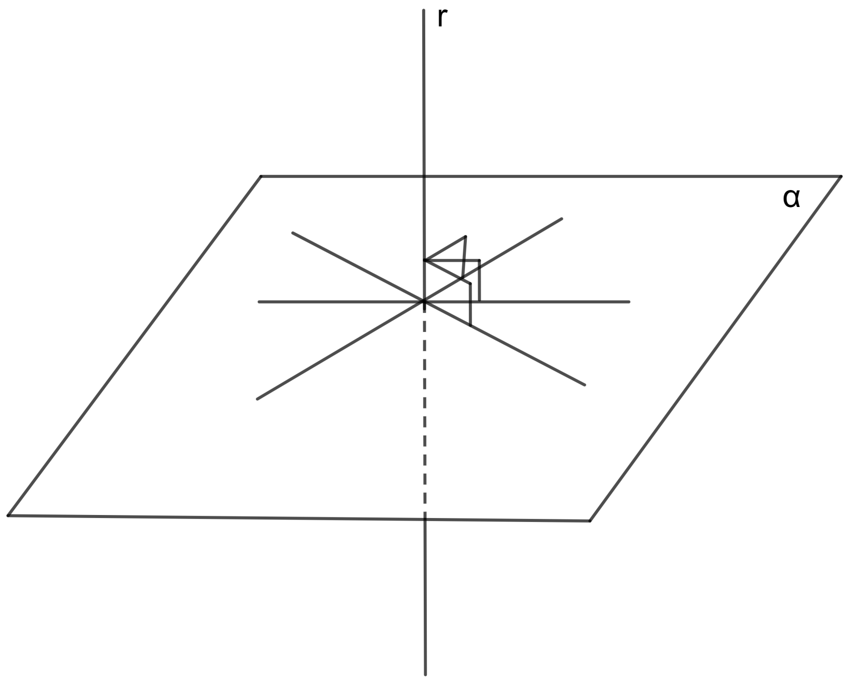

Figura 23 – Uma reta perpendicular a um plano α

Para uma reta ser perpendicular a um plano, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes do plano, conforme será demonstrado a seguir.

Teorema 4.1.1. *Toda reta que é perpendicular a duas retas concorrentes contidas num plano é perpendicular ao plano.*

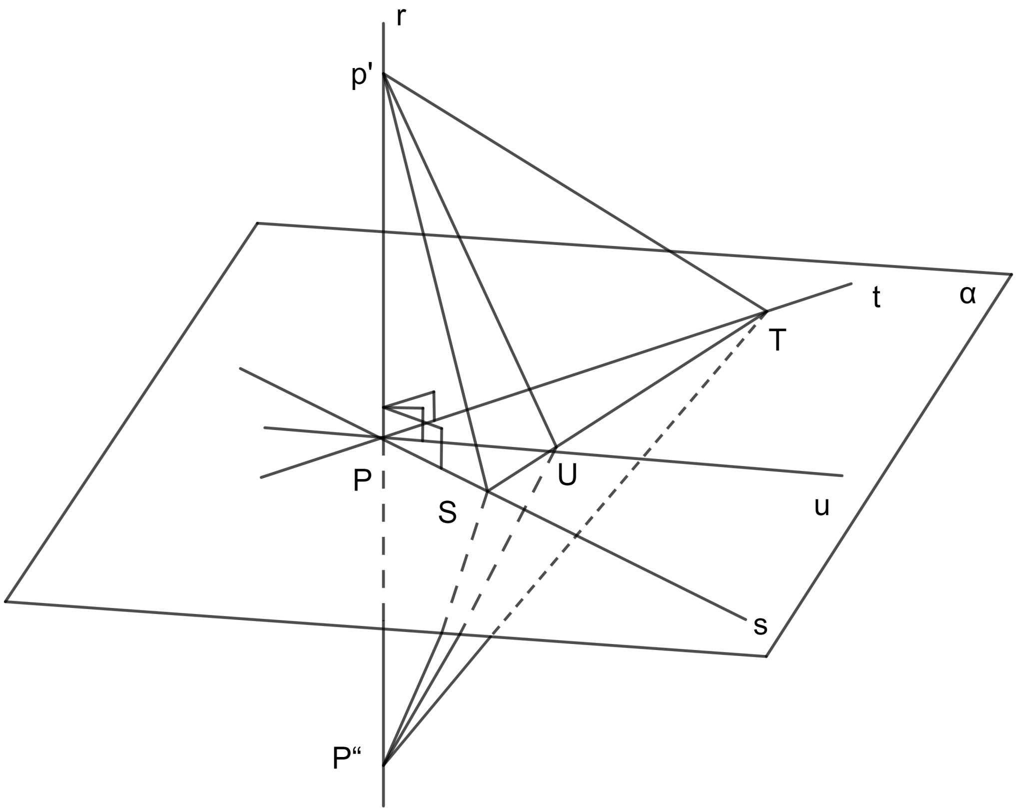

Figura 24 – Condição para que reta e plano sejam perpendiculares

Demonstração. Seja r uma reta perpendicular a duas retas s e t concorrentes contidas num plano α. Seja u uma reta do plano passando pelo ponto P de intersecção de s e t. Devemos mostrar que r é perpendicular a u. Agora tomemos em r dois pontos simétricos P' e P'' em relação a P, com $\overline{P'P} = \overline{P"P}$. Tomemos ainda um ponto $S \in s$ e ponto $T \in t$ tais que $\overline{ST}$ intersecta u num ponto U (basta que S e T estejam em semiplanos opostos em relação a u). Os triângulos retângulos $P'PS$ e $P"PS$ são congruentes, pois possuem catetos respectivamentes iguais, logo $\overline{P'S} = \overline{P"S}$. Analogamente os triângulos retângulos $P'PT$ e $P"PT$ são congruentes, pois possuem catetos respectivamente iguais, logo $\overline{P'T} = \overline{P"T}$. Assim, os triângulos $P'ST$ e $P"ST$ são congruentes pelo caso LLL, logo os ângulos $P'\widehat{T}\,U = P"\widehat{T}\,U$. Conclui-se, então, que os triângulos $P'TU$ e $P"TU$ são congruentes pelo caso LAL. Logo $\overline{P'U} = \overline{P"U}$. Segue-se que o triângulo $P'P"U$ é isósceles e o segmento PU é mediana, logo PU é altura. Portanto PP' é perpendicular PU, ou seja, r é perpendicular a u. □

Corolário 4.1.1. *Toda paralela a uma reta perpendicular a um plano é perpendicular ao plano.*

Demonstração. Seja r uma reta perpendicular a um plano α passando num ponto $P \in \alpha$. Seja $r' \parallel r$ uma reta paralela a r passando num ponto $P' \in \alpha$. Para mostrar que $r' \perp$

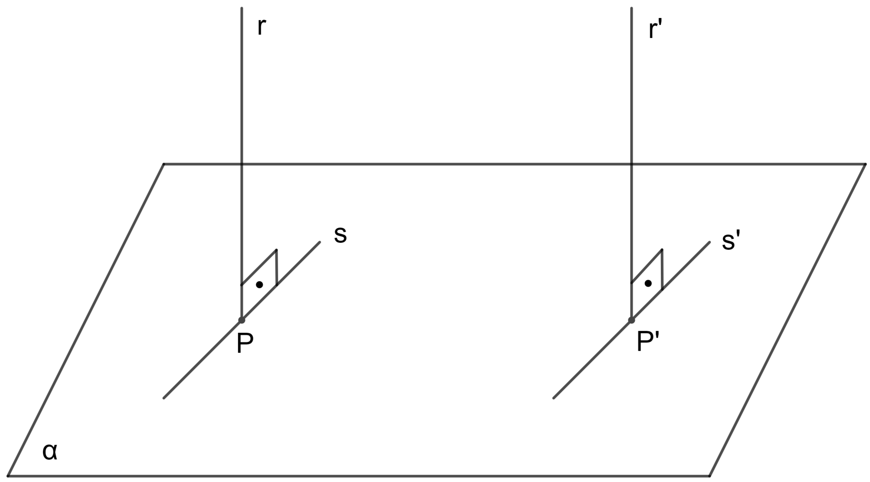

Figura 25 – Paralela a uma perpendicular é perpendicular

α, seja s' uma reta de α passando em P' arbitrário, trace uma reta s por P paralela a s'. Como r $\perp$ α então $r \perp s$. Como $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$, pelo teorema 4.1.1, segue-se que $r' \perp s'$. Logo $r' \perp \alpha$. □

Corolário 4.1.2. *Toda reta perpendicular a um plano é ortogonal a toda reta do plano.*

4.1.1 Baixando uma perpendicular a um plano

Teorema 4.1.2. *Por um ponto fora de um plano pode-se traçar uma única perpendicular a esse plano.*

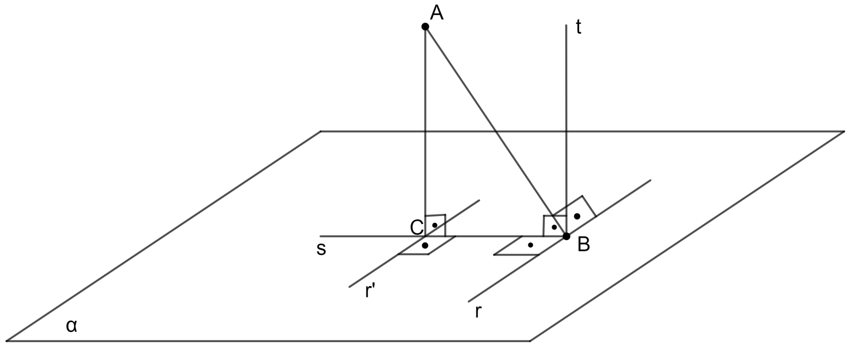

Figura 26 – Perpendicular baixada de um ponto A sobre um plano α.

Demonstração. São dados um plano α e um ponto $A \notin \alpha$. Seja r uma reta arbitrária contida em α. Seja B um ponto de r tal que $AB \perp r$. Seja s uma reta de α perpendicular a r e passando por B. No plano β determinado por AB e s, trace a perpendicular AC à reta s com $C \in s$. A reta r é perpendicular a β, pois r é perpendicular às retas AB e s de β. Trace a reta t paralela a AC passando em B. Então, $t \perp BC$ e $t \perp r$, logo $t \perp \alpha$. Como AC é paralela a t, pelo corolário 4.1.1, $AC \perp \alpha$.

Para mostrar a unicidade, suponha que AC e AC' são duas perpendiculares a α passando em A, com C e $C' \in \alpha$. Então o triângulo ACC' possui dois ângulos retos, um absurdo.

□

4.1.2 Suspendendo uma perpendicular a um plano

Teorema 4.1.3. *Por um ponto de um plano é possível traçar uma única perpendicular a esse plano.*

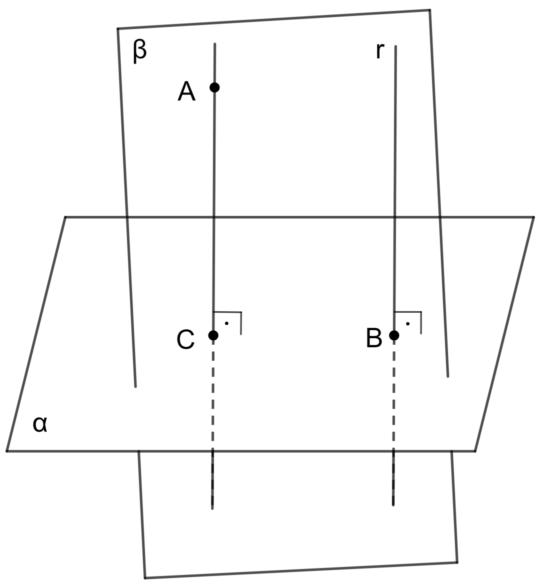

Figura 27 – Suspendendo uma perpendicular por um ponto de um plano 1

Demonstração. Dados um plano α e um ponto $B \in \alpha$. Por um ponto $A \notin \alpha$, baixe uma perpendicular $AC \perp \alpha$. Pelo corolário 4.1.1, a reta r paralela a AC que passa em B é perpendicular a α.

Unicidade. Suponha que por um ponto $B \in \alpha$, passem duas perpendiculares t e t' distintas. Considerando o plano β determinado por t e t' e a reta intersecção $u = \beta \cap \alpha$, então t e t' são perpendiculares a u em β, um absurdo. □

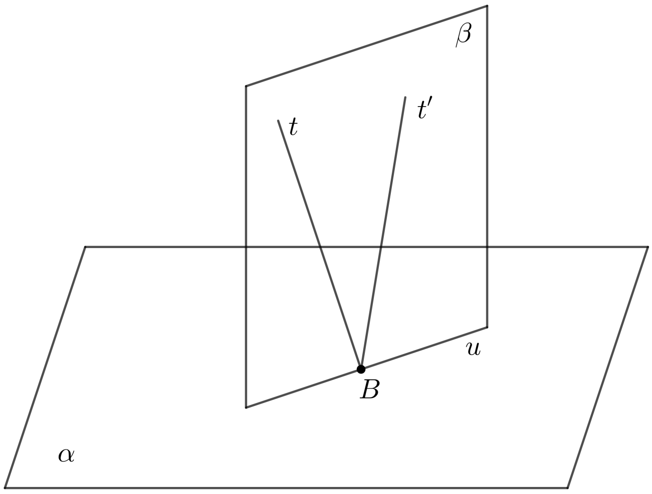

Figura 28 – Suspendendo uma perpendicular por um ponto de um plano 2

4.1.3 Plano perpendicular a uma reta passando por um ponto fora da reta

Teorema 4.1.4. *Por um ponto fora de uma reta, passa um único plano perpendicular a essa reta.*

Demonstração. Seja r uma reta e A um ponto fora de r. Seja α o plano determinado por r e A. Trace a perpendicular AB à r, com $B \in r$.

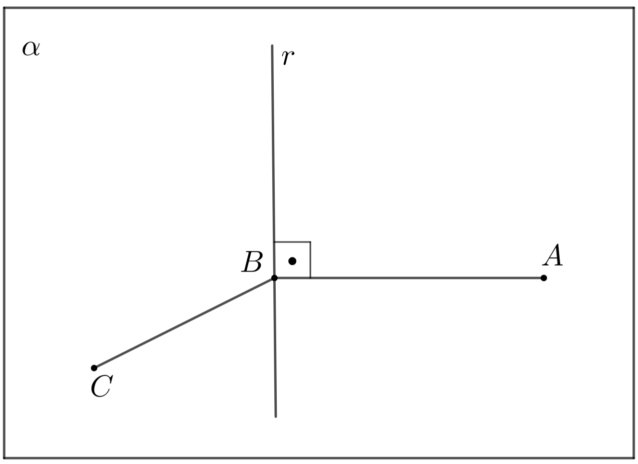

Figura 29 – Plano perpendicular a uma reta passando por um ponto fora da reta

Pelo ponto B suspenda uma perpendicular BC ao plano α e seja β o plano determinado pelos pontos A, B e C. A reta r é perpendicular a BA e BC de β, logo r é perpendicular ao plano β que passa em A.

Unicidade. Seja β' um plano perpendicular a r, com $A \in \beta'$. Seja B' o ponto de intersecção de r e β'. Então AB e AB' são duas perpendiculares a r baixadas do ponto A, por unicidade $B = B'$. Como $AB \perp \beta'$, então, no plano de r e C, existe uma reta perpendicular a r, logo é a reta BC; o que implica $C \in \beta'$, logo $\beta' = \beta$.

□

4.1.4 Plano perpendicular a uma reta passando num ponto da reta.

Teorema 4.1.5. *Por um ponto de uma reta, passa um único plano perpendicular a essa reta.*

Demonstração. Seja r uma reta e A um ponto de r. Marque um ponto P fora de r e seja α o plano de r e P. Pelo ponto A, suspenda uma reta s de α perpendicular a r e suspenda uma reta t perpendicular a α. Seja β o plano determinado pelas retas s e t. Então r é perpendicular a β pois r é perpendicular às retas s e t de β.

Unicidade. Se β' passa no ponto A e é perpendicular a r, então β' contém todas as retas perpendiculares a r passando em A, logo contém as retas s e t da construção anterior. Logo $\beta' = \beta$.

□

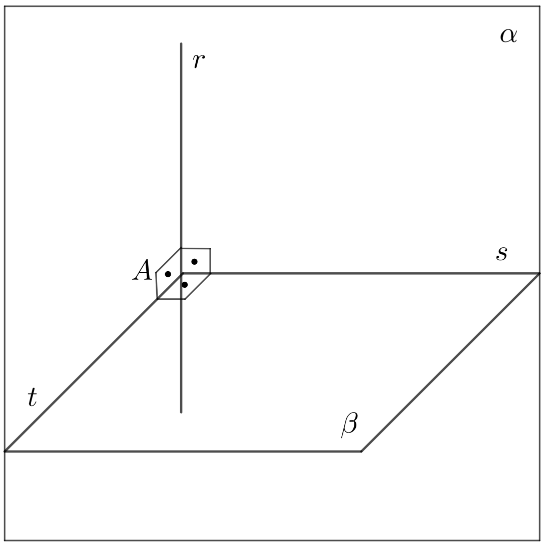

Figura 30 – Plano perpendicular a uma reta passando num ponto da reta

4.2 Teorema das Três Perpendiculares

Teorema 4.2.1. *Se por um ponto P que não pertence ao plano α, traçamos a perpendicular PA ao plano, e, por um ponto qualquer B de α, traçamos a reta r perpendicular a AB, então PB é perpendicular a r.*

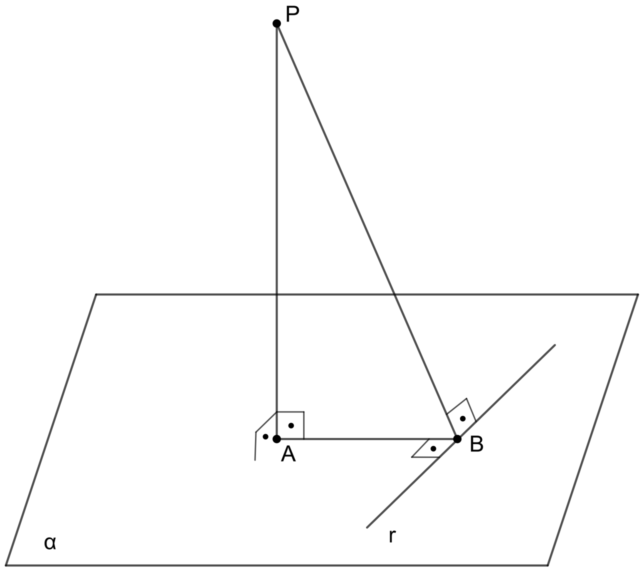

Figura 31 – Teorema das três perpendiculares 1

Demonstração. 1

Observamos que as retas PA e AB são ambas ortogonais a r, e $A \in \alpha$, já que PA é perpendicular ao plano α que contém r e AB é perpendicular a r. Logo o plano definido por essas duas retas é perpendicular a r e, portanto, a reta PB desse plano é perpendicular a r. □

Demonstração. 2

Usando-se a recíproca do teorema de Pitágoras.

Temos que: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \hat{B} = 90°$.

Mostraremos que o ΔPBC é retângulo em $\hat{B}$.

Usando novamente o teorema de Pitágoras temos que nos triângulos:

$\Delta ABC \rightarrow d^2 = c^2 + e^2$

$\Delta PAB \rightarrow e^2 + h^2 = b^2$

$\Delta PAC \rightarrow a^2 = h^2 + d^2$

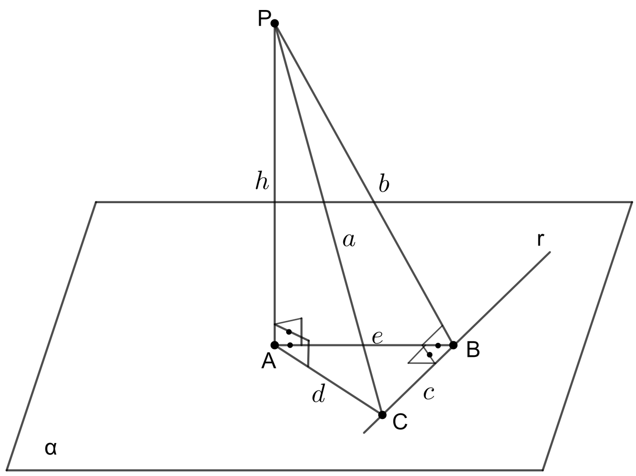

Figura 32 – Teorema das três perpendiculares 2

Somando-se as equações temos: $a^2 = b^2 + c^2$. Então o ângulo $\hat{B}$ é igual a 90°, como queríamos demonstrar.

□

4.2.1 Aplicação 4

Considere um paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ em que $AB = 15$, $AD = 20$ e $AE = 16$. Qual a medida do menor segmento que liga o vértice E a um ponto da reta BD? (LIMA E.L, 2004)

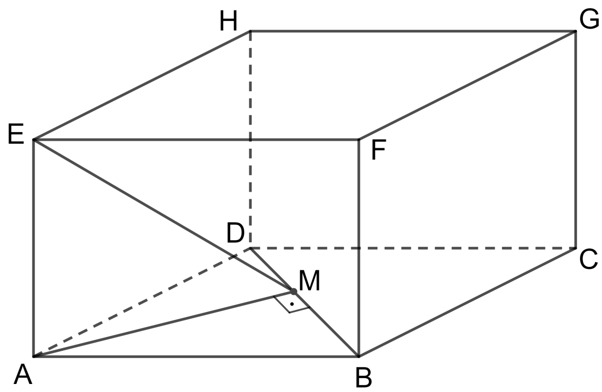

Figura 33 – Exemplo sobre o teorema das três perpendiculares

Pelo teorema das três perpendiculares, EM é perpendicular a BD, então EM é o menor segmento que liga E a BD. Observando o triângulo retângulo ABD, temos os catetos medindo 20 e 15, donde obtemos a hipotenusa $BD = 25$, e a altura relativa a ela, o segmento $AM = 12$.

No triângulo retângulo EAM temos os catetos $EA = 16$ e $AM = 12$. Obtem-se, assim, hipotenusa $EM = 20$, que é o menor segmento que liga o vértice E a um ponto da reta BD.

4.3 Ângulos entre planos

Em Geometria Plana, pode-se medir $A\hat{O}B$ tomando o comprimento do menor arco de círculo de centro O e raio 1, com extremidades sobre os lados OA e OB do ângulo. essa unidade de medida é chamada de radianos.

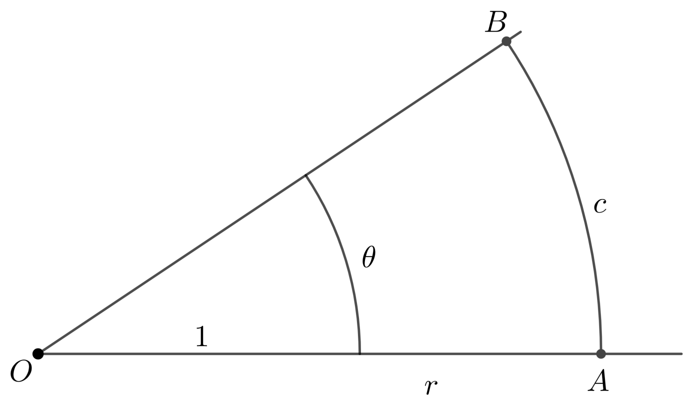

Figura 34 – Radianos

Como o comprimento do arco é proporcional ao raio, temos para um arco de comprimento C de raio r ligando OA a OB, $\frac{C}{r} = \frac{\theta}{1}$.

Assim a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é $\theta = \frac{C}{r}$ radianos.

Intuitivamente, o ângulo $A\hat{O}B$ medido em radianos é o comprimento da trajetória de um ponto A, com $\overline{OA} = 1$. Quando o lado OA gira até o lado OB, pode-se usar de analogia para definir ângulo entre dois planos.

Sejam α e β dois planos que se intersectam segundo uma reta t. Fixe um ponto $O \in t$ e considere um plano γ passando por O e perpendicular a t.

Definição 4.3.1. *O ângulo entre os planos secantes α e β e o ângulo das retas OA e OB de intersecção do plano γ com α e β.*

Se tomarmos outro ponto $O' \in t$ e $\gamma' \perp t$, γ' passando em O' então as intersecções de γ' com α e γ' com β são retas paralelas a OA e OB, logo formam o mesmo ângulo; sendo assim a definição de ângulo não depende do ponto O escolhido sobre r.

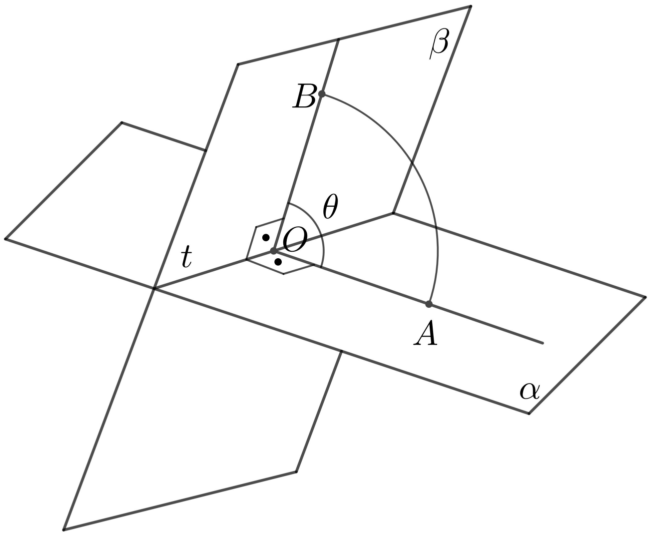

Figura 35 – Ângulo entre planos

4.3.1 Planos perpendiculares

Definição 4.3.2. *Dois planos secantes são perpendiculares quando o ângulos entre eles é reto.*

Teorema 4.3.1. *Dois planos são perpendiculares se e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.*

Demonstração. Sejam α e β dois planos perpendiculares .

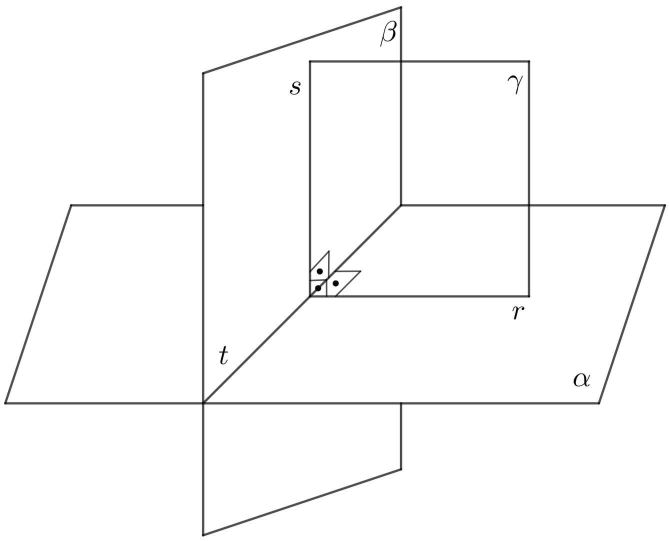

Figura 36 – Planos perpendiculares 1

Tomando um plano γ perpendicular à intersecção $t = \alpha \cap \beta$, então as retas $r = \gamma \cap \alpha$ e $s = \gamma \cap \beta$ são perpendiculares. Logo o plano β contém a reta s que é ortogonal às retas r e t de α. Desse modo, $s \perp \alpha$ e $s \subset \beta$, assim como $r \subset \alpha$ e $r \perp \beta$.

Reciprocamente, suponha que β contém uma reta s perpendicular a α. Seja γ o plano que contém s e é perpendicular a $t = \alpha \cap \beta$. Se $r = \gamma \cap \alpha$, então $s \perp r$. Portanto o ângulo entre α e β é o ângulo entre s e r, que é reto. logo $\alpha \perp \beta$. □

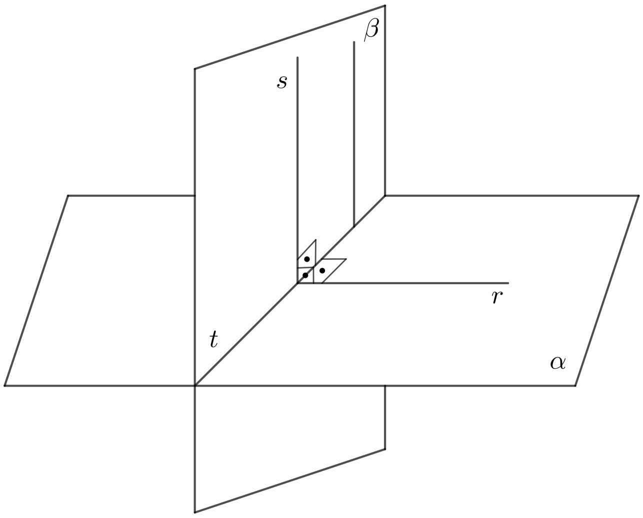

Figura 37 – Planos perpendiculares 2

4.4 Projeção Ortogonal de uma reta sobre um plano

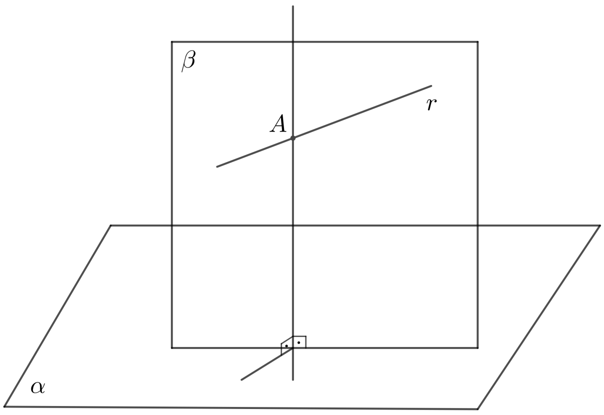

Figura 38 – Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Teorema 4.4.1. *Seja α um plano e r uma reta do espaço, não perpendiculares. Então existe um único plano β que contém r e é perpendicular a α. A reta intersecção $\beta \cap \alpha$ é chamada de projeção ortogonal de r sobre α.*

Demonstração. Dado um ponto $A \in r$, existe uma reta s perpendicular a α passando por A. O plano determinado por r e s é perpendicular a α, pois contém a reta $s \perp \alpha$.

Por outro lado, qualquer plano perpendicular a α e que contém r contém a reta s que passa por A, logo é igual a β. Portanto o plano β é único. $\square$

4.4.1 Ângulo entre reta e plano

Seja r uma reta secante a um plano α.

Definição 4.4.1. *O ângulo entre a reta r e o plano α é igual ao ângulo entre r e a reta que é projeção ortogonal de r sobre α.*

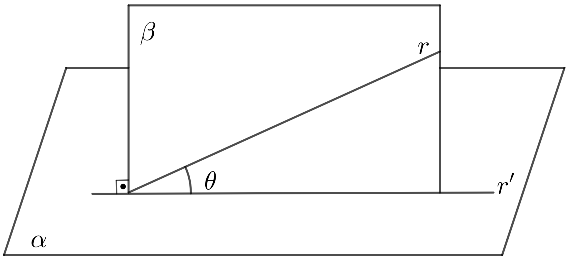

Figura 39 – Ângulo entre reta e plano

r' é a projeção ortogonal de r sobre α.

Ang (r, α) = ang $(r', r) = \theta$.

4.5 Definição de curva

Definimos curva como a figura geométrica gerada pelo movimento contínuo de um ponto no espaço. Curva fechada é aquela em que seu ponto inicial coincide com seu ponto terminal. Uma curva simples é aquela que não é interceptada por si própria, exceto nos pontos inicial e terminal.

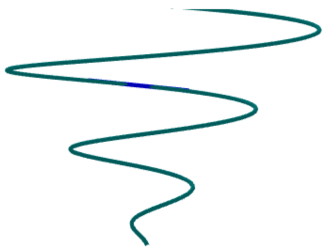

Figura 40 – Curva

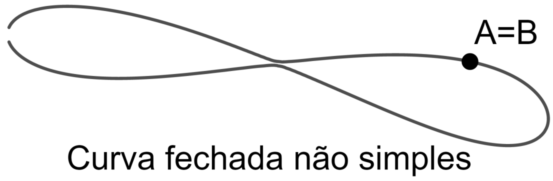

Figura 41 – Curva fechada não simples

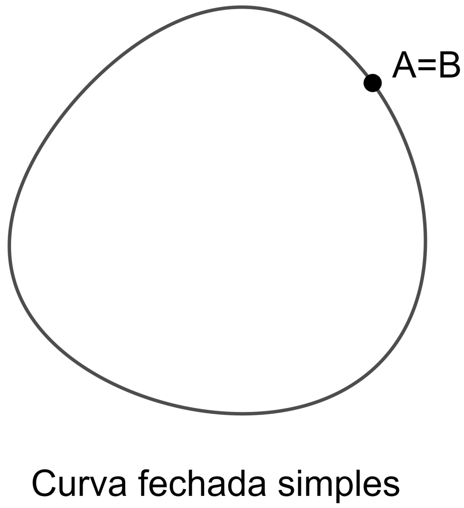

Figura 42 – Curva fechada simples

4.6 Cilindro

4.6.1 Definição de superfície cilíndrica

Seja C uma curva em um plano e seja r uma reta não paralela ao plano. O conjunto de todas as retas paralelas a r e interceptando C é chamado de cilindro. C é chamado de curva geradora (ou diretriz) do cilindro e as retas paralelas são chamadas de geratrizes. Sem perda de generalidade, vamos supor que a curva C está contida em um dos três planos coordenados.

Neste trabalho, consideram-se os cilindros circulares, cuja curva geradora é um círculo. O Cilindro propriamente dito é a reunião de parte do cilindro circular ilimitado compreendido entre os planos de suas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções. No caso de um cilindro circular reto, temos que a diretriz é perpendicular ao plano coordenado que contém a curva. Para construir um cilindro circular reto, traça-se geratrizes que serão perpendiculares ao plano da base. A geratriz que passa pelo centro

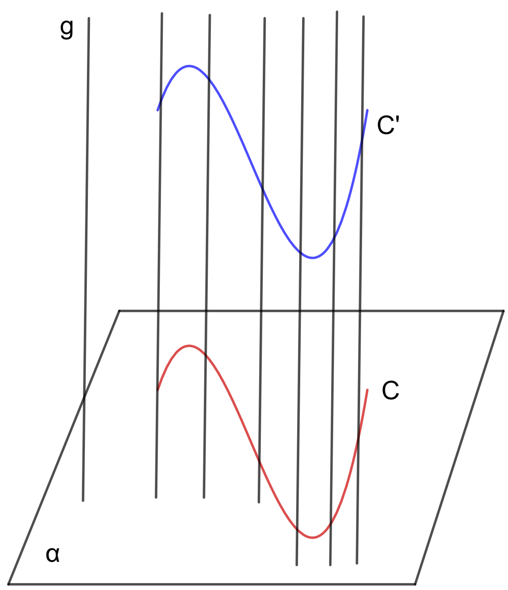

Figura 43 – Cilindro

do círculo é chamado de eixo do cilindro. Um cilindro circular reto também é chamado de cilindro de revolução, pois ele é o sólido gerado através da rotação completa de um retângulo em torno do eixo dado com um de seus lados.

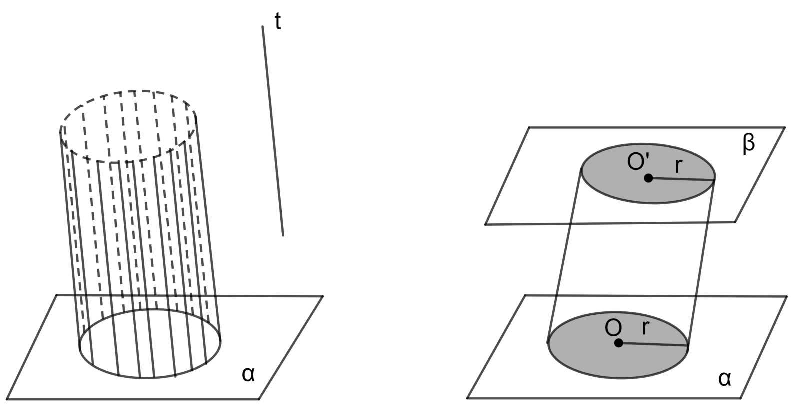

Figura 44 – Cilindro circular

4.7 Prisma

4.7.1 Definição de prisma

Consideramos uma região poligonal convexa plana (curva fechada simples) A_1, A_2, ... , A_n de n lados e uma reta r não paralela nem contida no plano da região da curva. Chama-se prisma convexo ilimitado a reunião das retas paralelas a r e que passam pelos pontos da curva dada. A superfície de um prisma ilimitado denomina-se superfície prismática convexa ilimitada.

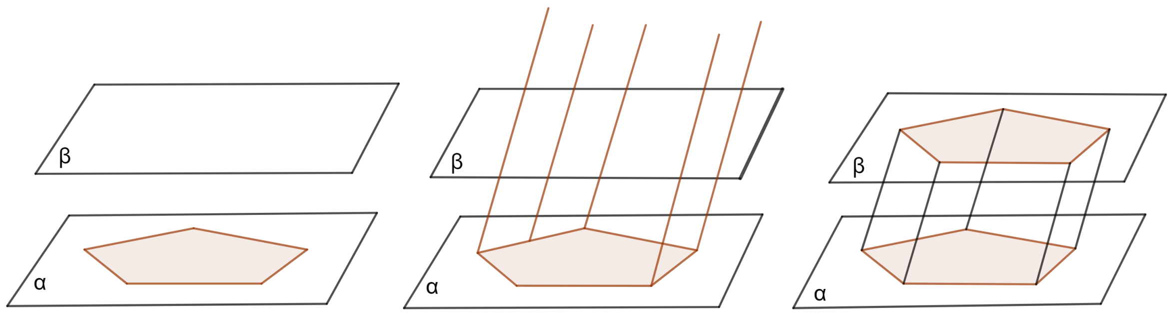

Figura 45 – Construção de prismas

O prisma convexo limitado é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas. Para construirmos um prisma, devemos num plano α traçar um polígono P de n lados, depois passar um plano β paralelo a α, em seguida traçar n retas paralelas passando pelos vértices de P. Os planos α e β determinam nas retas n segmentos de mesmo comprimento chamados arestas laterais do prisma. As extremidades dos segmentos em β determinam um polígono P' congruente a P, ambos são chamados de bases do prisma. As arestas laterais determinam n paralelogramos chamados de faces laterais do prisma. Em um prisma reto, as faces laterais são retângulos e a altura é congruente com quaisquer arestas laterais. Para isso, tomamos para as arestas laterais retas perpendiculares ao plano da base. Em consequência, as faces laterais são retângulos e a altura são as arestas laterais. Temos vários casos particulares. Quando a base é um polígono regular, teremos um prisma regular. Quando a base é um retângulo, tem-se um paralelepípedo retângulo, cujas faces serão retangulares. Sendo assim, qualquer das faces é chamada de base. Tem-se também o cubo ou hexaedro regular, que é um paralelepípedo cujas faces são quadrados.

4.8 Cone

4.8.1 Superfície cônica

Superfícies cônicas são geradas por uma reta g (geratriz) que passa por um ponto dado V (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada d (diretriz), com V fora de d.

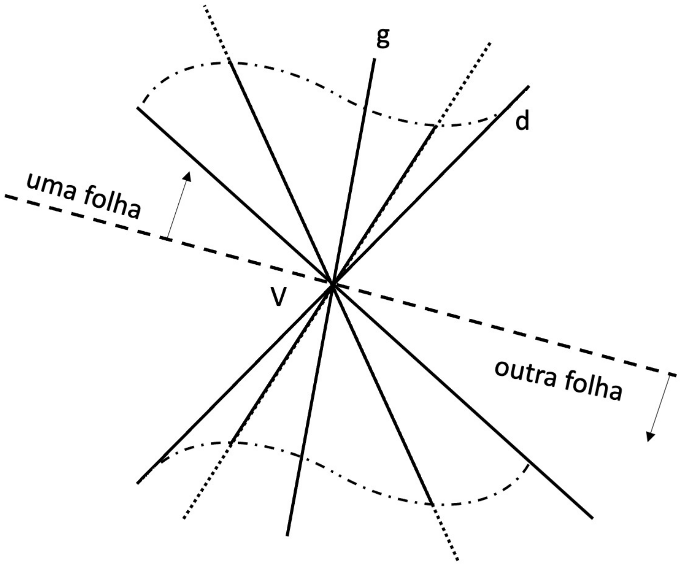

Figura 46 – Superfícies cônicas

4.8.2 Cone sobre curvas

Dado uma curva C no plano α e um ponto V fora desse plano, o cone de vértice V sobre C é a união das retas que passam em V e por um ponto de C. Se a curva for um círculo, o cone é dito circular. Pode-se classificar o cone pela posição da reta VO em relação ao plano da base. Se a reta VO for oblíqua ao plano da base, tem-se um cone circular oblíquo. Se a reta VO for perpendicular ao plano da base, tem-se um cone circular reto.

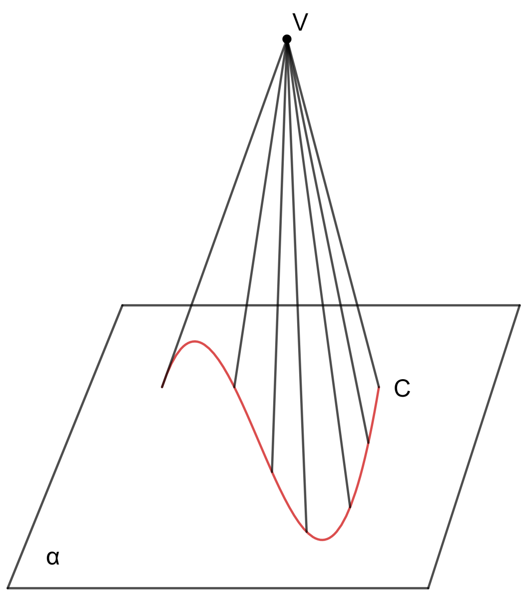

Figura 47 – Cone sobre curva

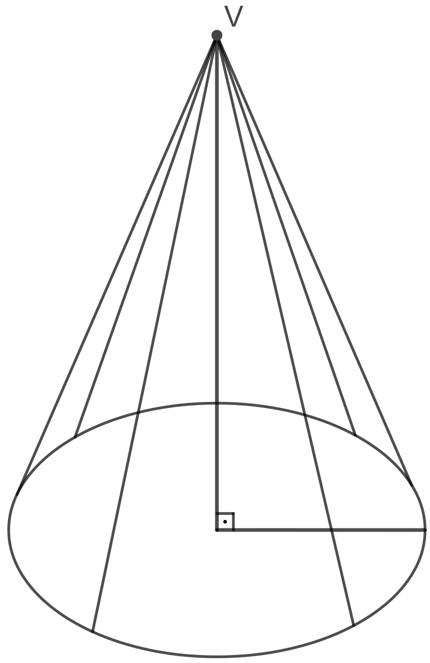

Figura 48 – Cone circular reto

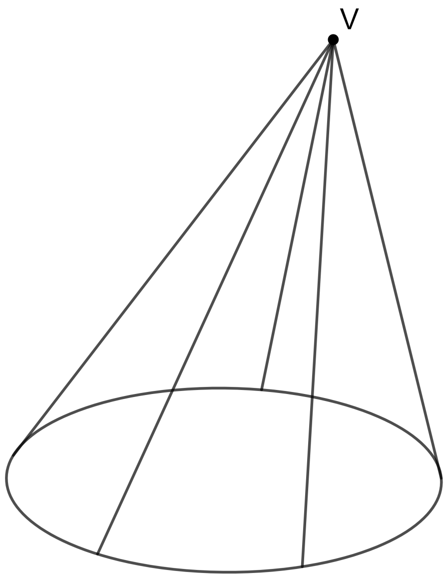

Figura 49 – Cone circular oblíquo

4.9 Pirâmides

4.9.1 Pirâmides ilimitadas

Dada uma curva C poligonal convexa A_1, A_2, A_3, ..., A_n de n lados. Considere um ponto V fora do plano que contém a reunião das semirretas que partem de V e que passam pelos pontos de C. A mesma é denominada pirâmide ilimitada convexa.

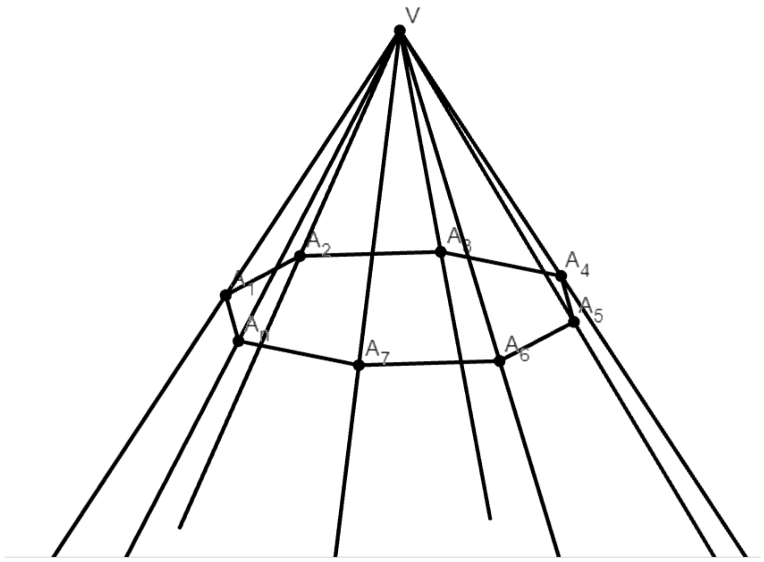

Figura 50 – Pirâmide ilimitada convexa

4.9.1.1 Pirâmide limitada convexa

A pirâmide limitada convexa é a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. Se a projeção do vértice não coincide com o centro da base, a pirâmide é dita oblíqua e, se a projeção do vértice coincide com o centro da base, a mesma é dita reta. Caso a base seja formada por polígono regular, a pirâmide é chamada de regular.

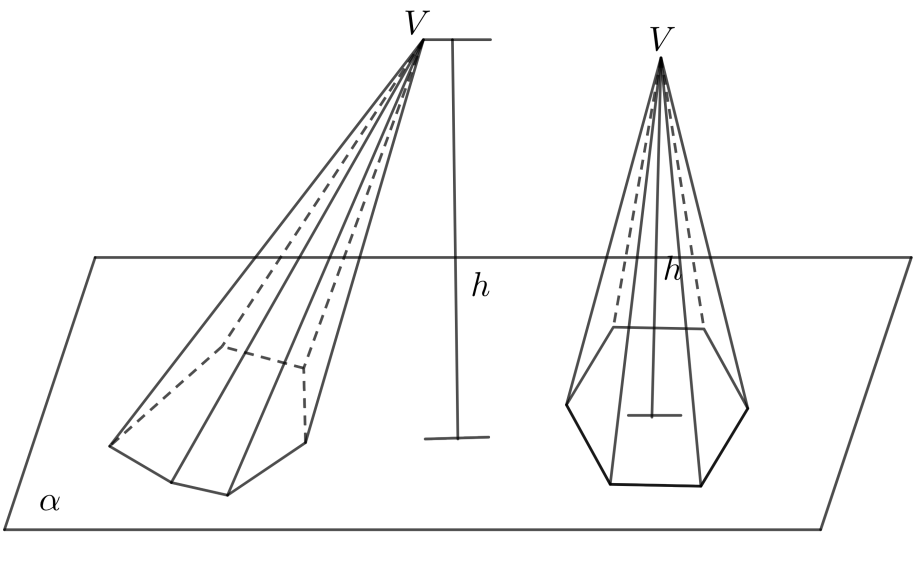

Figura 51 – Pirâmide limitada convexa

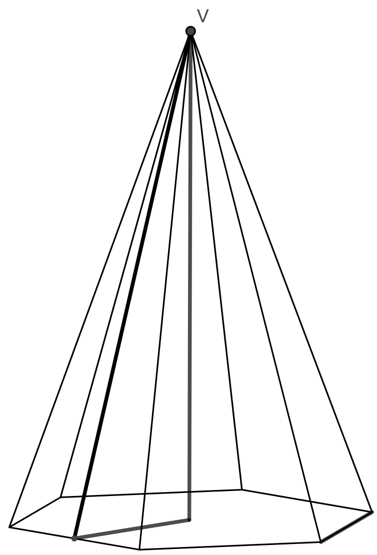

Figura 52 – Pirâmide regular

4.9.2 Aplicação 5

Construção de pirâmides regulares.

Tomemos por base um polígono regular $A_1A_2...A_n$ e um ponto V fora do plano da base como vértice. Esse ponto V fica situado sobre a perpendicular ao plano do polígono de centro O. A distância de V até O denomina-se altura da pirâmide. Nas pirâmides regulares, as faces laterais são triângulos isósceles. Para verificar essa propriedade, tomemos os triângulos retângulos VOA_1, VOA_2,..., VOA_n, por possuirem catetos respectivamente congruentes, e o cateto VO comum a todos e $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Consequentemente $VA_1 = VA_2 = ... = VA_n$, mostrando que as faces laterais são triângulos isósceles.

4.9.3 Aplicação 6

Construção de um tetraedro regular.

Tomemos um polígono regular triangular de base ABC e vértice V fora do plano da base e perpendicular ao mesmo, de modo que as arestas laterais VA, VB, VC sejam iguais às arestas AB, AC e BC da base. As faces da pirâmide obtidas são triângulos equiláteros congruentes. Além disso, se por A tomamos a perpendicular ao plano VBC, que corta este plano em P, verifica-se que os triângulos retângulos APB, APV e APC são congruentes, já que as hipotenusas são iguais e o cateto AP é comum a todos os três. Assim, temos $PB = PC = PV$, logo P é o centro do triângulo equilátero VBC, o que faz com que a pirâmide seja regular qualquer que seja a face tomada como base. Observa-se que as retas VO e AP e as retas perpendiculares traçadas a duas faces do tetraedro regular pelo vértice oposto a cada uma destas faces são coplanares. Consideremos o plano

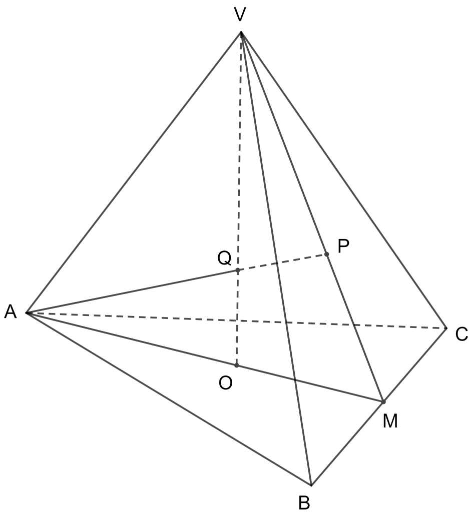

Figura 53 – Tetraedro regular

α determinado pela reta VO e pelo vértice A. Este plano corta o plano da base ABC segundo a reta AO. Mas como ABC é um triângulo equilátero de centro O, AO corta o lado BC em seu ponto médio M. Logo, a altura VM da face VBC está contida no plano α , em particular, o ponto P que é o centro de VBC, está neste plano. Logo, a reta VP está contida em α, o que mostra que VP e AO são concorrentes. Como os pontos de VO são equidistantes de V, B e C, o ponto de intersecção de VO e AP é um ponto equidistante dos quatro vértices do tetraedro, denominado centro do tetraedro. O fato mostra que as quatro perpendiculares traçadas de cada vértice à face oposta passam todas pelo ponto O.

4.10 Sistema de coordenadas tridimensionais

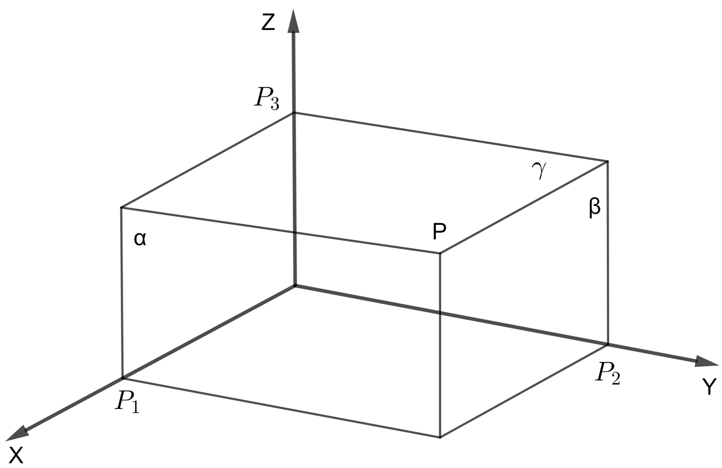

Figura 54 – Sistema de coordenadas tridimensionais

Um sistema de coordenadas para o espaço é construído a partir de três eixos perpendiculares entre si e com uma origem em comum. Para essa construção, basta tomar duas retas perpendiculares contidas num mesmo plano e conduzir uma reta perpendicular a esse plano passando pela intersecção das retas. As coordenadas dos pontos marcados no sistema é a intersecção com cada eixo do plano que passa pelo ponto e é perpendicular ao eixo. Isso equivale obter a projeção ortogonal do ponto sobre os planos definidos por cada par de eixos e, depois, projetar os pontos obtidos sobre eles.

5 Distâncias geométricas

Neste capítulo, serão obordadas as distâncias geométricas entre ponto e reta, dois pontos, duas retas paralelas, ponto e plano, reta e plano paralelo, planos paralelos e retas reversas. Os conhecimentos sobre essas distâncias serão aplicados para dar suporte aos cálculos dos elementos dos sólidos.

5.1 Distâncias geométricas

5.1.1 Distância entre dois pontos distintos

Definição 5.1.1. *Chamamos de distância entre dois pontos distintos A e B o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$. No entanto, se A for igual a B, a distância entre A e B é nula.*

Observação 5.1.1. *O Teorema de Pitágoras será utilizado para calcular a distância entre dois pontos tanto no plano quanto no espaço.*

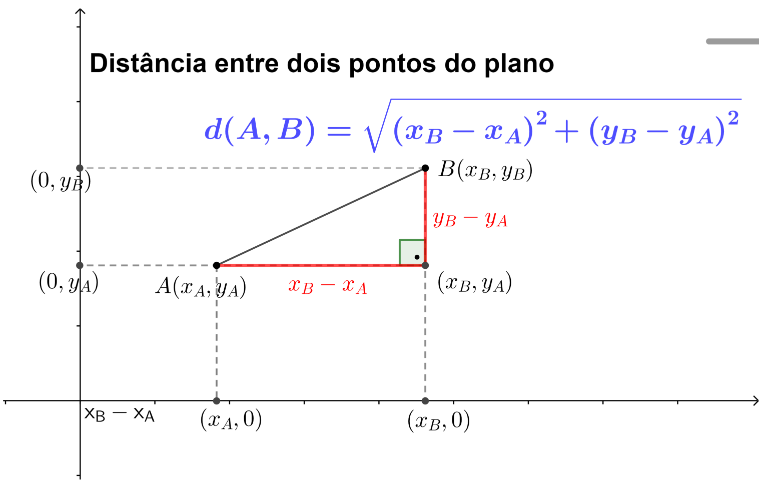

Figura 55 – Distância entre dois pontos

5.1.2 Aplicação 7

Consideremos o problema de calcular a diagonal BH, que chamaremos de d de um paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ de arestas $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$ e a diagonal $BD = e$. Para resolvermos o problema será aplicado o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD retângulo em A e depois no triângulo retângulo BDH retângulo em D. . No triângulo ABD, temos $e^2 = a^2 + b^2$ e no triângulo BDH $d^2 = e^2 + c^2$. Logo, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Em particular, em um cubo de aresta a, tem-se que sua diagonal d é dada por: $d = \mathrm{a}\sqrt{3}$.

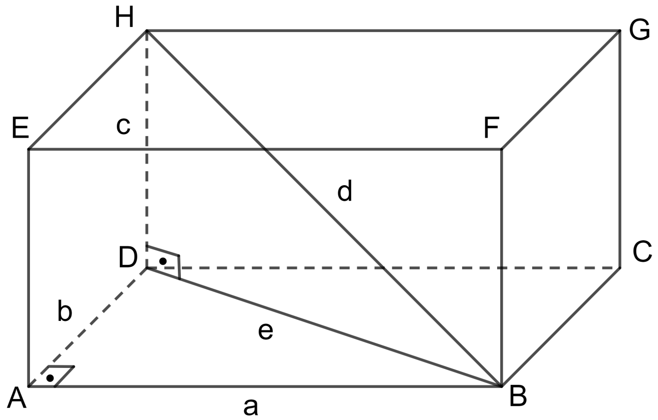

Figura 56 – Diagonal do paralelepípedo retângulo

5.1.3 Distância entre ponto e reta

Definição 5.1.2. *Chamamos de distância entre ponto e reta a distância entre o ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida por esse ponto.*

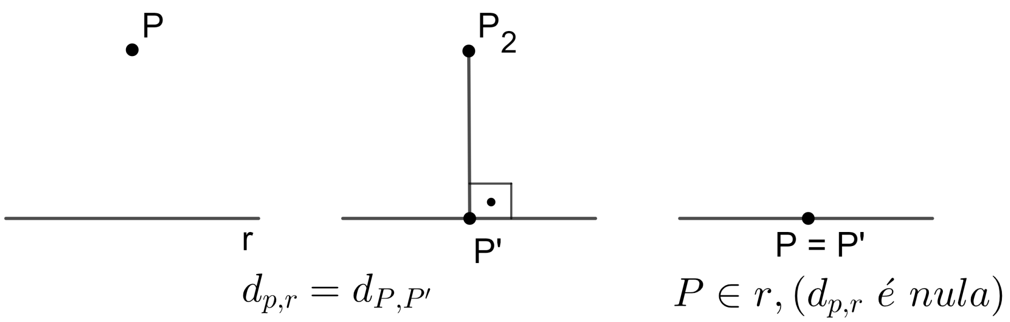

Figura 57 – Distância entre um ponto e uma reta 1

Dado um ponto P e uma reta do espaço. O ponto Q em que a reta r corta o plano perpendicular a r, passando por P, é chamado de projeção ortogonal de P sobre r conforme demonstrado anteriormente. O comprimento de segmento $\overline{PQ}$ é a distância de p a r. Quando P não pertence à reta r, os pontos P e Q são distintos e PQ é a única reta perpendicular a r traçada por P. Se R é um outro ponto qualquer de r, o triângulo PQR tem hipotenusa $\overline{PR}$ e cateto $\overline{PQ}$, logo $\overline{PQ} < \overline{PR}$. Desse modo, comprova-se que o comprimento da perpendicular é menor que o comprimento de qualquer reta oblíqua. Assim, o cálculo da distância de um ponto a uma reta envolve o traçado da perpendicular à reta passando pelo ponto.

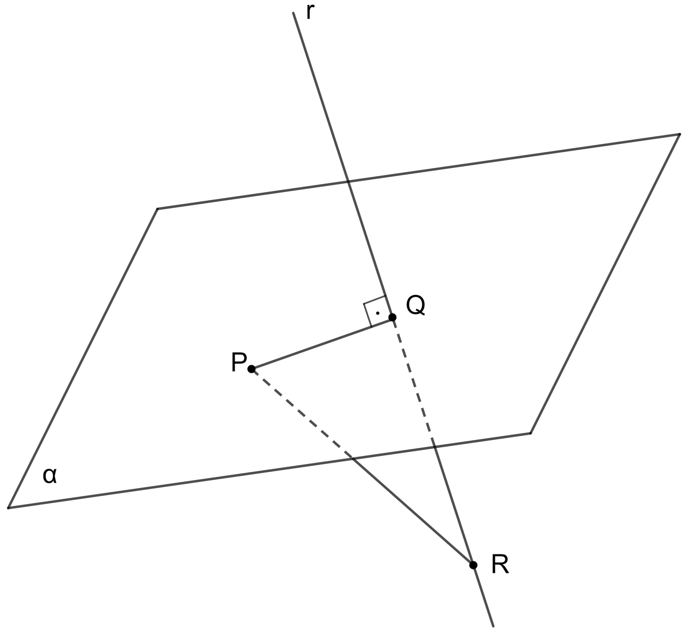

Figura 58 – Distância entre um ponto e uma reta 2

5.1.4 Distância entre duas retas paralelas

Definição 5.1.3. *Chamamos de distância entre duas retas paralelas à distância entre um ponto qualquer de uma reta a outra.*

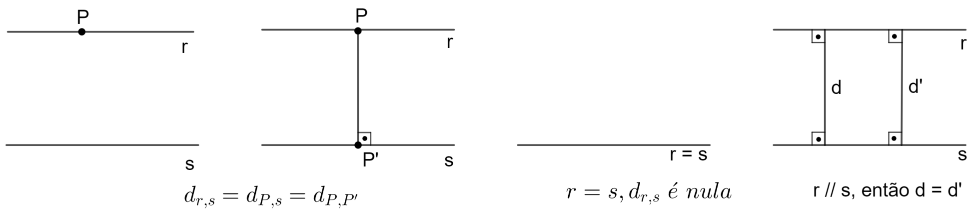

Figura 59 – Distância entre duas retas paralelas

5.1.5 Distância entre ponto e plano

Definição 5.1.4. *Chamamos de distância entre ponto P e o plano α a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular ao plano α que passa por esse ponto. Observe que, se R é um outro ponto qualquer do plano, o triângulo PQR é retângulo e tem PQ como cateto e PR como hipotenusa. Assim, o comprimento da perpendicular PQ é menor que o comprimento de qualquer oblíqua PR.*

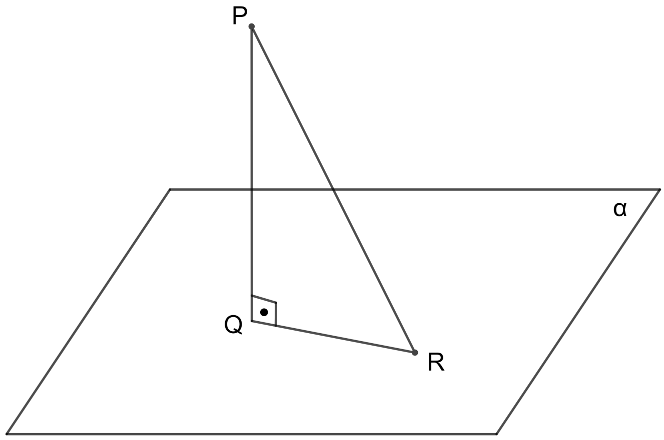

Figura 60 – Distância de ponto a plano

5.1.6 Aplicação 8

Consideremos o problema de calcular a altura do tetraedro regular $ABCD$ de aresta ℓ. Para isso, deve-se encontrar a distância do vértice A ao plano BCD.

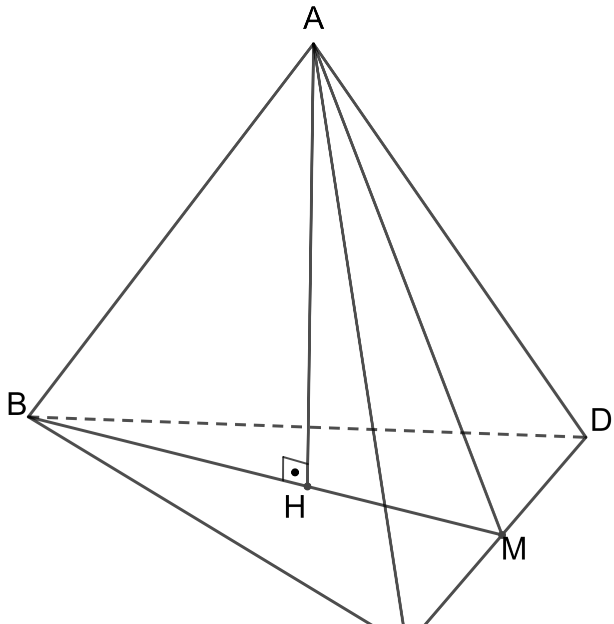

Figura 61 – Altura do tetraedro regular

Novamente aplica-se ao Teorema de Pitágoras. Como vimos, H é o centro do triângulo equilátero BCD. Olhando para o triângulo AHB, AB é a aresta do tetraedro, que chamaremos de ℓ. O lado HB é o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero de lado ℓ, logo teremos $HB = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$. Tem-se, então, $(AH)^2 + (\frac{\ell\sqrt{3}}{3})^2 = \ell^2$ e pode-se concluir que $AH = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$.

5.1.7 Distância entre reta e plano paralelo

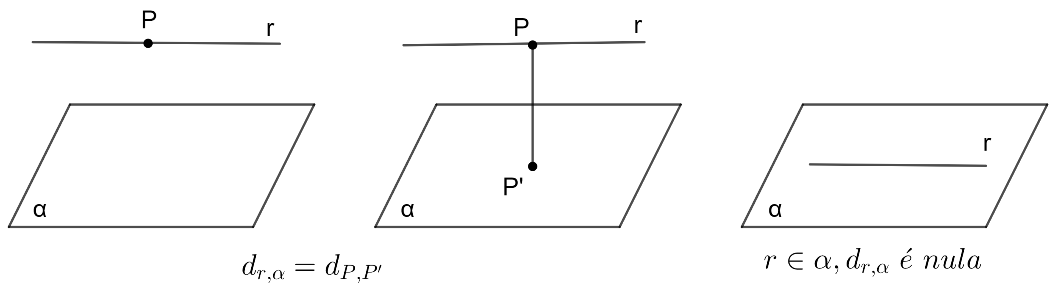

Figura 62 – Distância entre reta e plano paralelo 1

Definição 5.1.5. *Chamamos de distância entre reta e plano paralelo a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.*

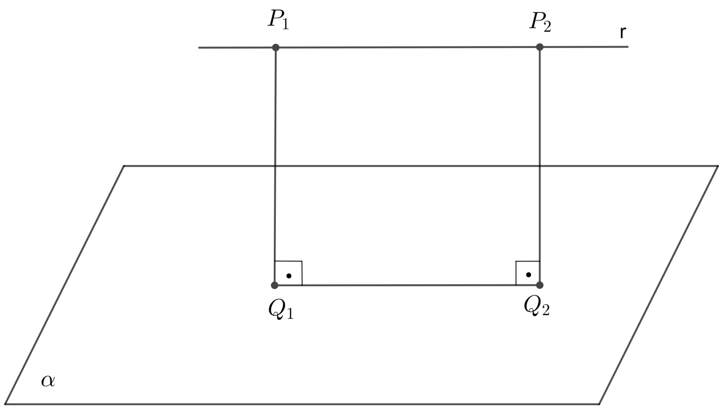

Figura 63 – Distância entre reta e plano paralelo 2

Se a reta r é paralela a um plano α, todos os seus pontos estão a mesma distância do plano. De fato, se por dois pontos P_1 e P_2 da reta r paralela a α traçarmos as perpendiculares $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{P_2Q_2}$ a α, obtemos um retângulo $P_1P_2Q_2Q_1$. Logo, $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$.

5.1.8 Distância entre planos paralelos

Definição 5.1.6. *Chamamos de distância entre dois planos paralelos a distância entre um ponto qualquer de um plano até o outro plano.*

Se β é um plano paralelo a α, todos os seus pontos estão a mesma distância d de α. Se o ponto A for diferente do ponto B, com A e B pertencendo a β, isso implica que a reta r que passa pelos pontos A e B está contida em β. Dessa forma, recorremos ao caso da distância de reta e plano paralelos.

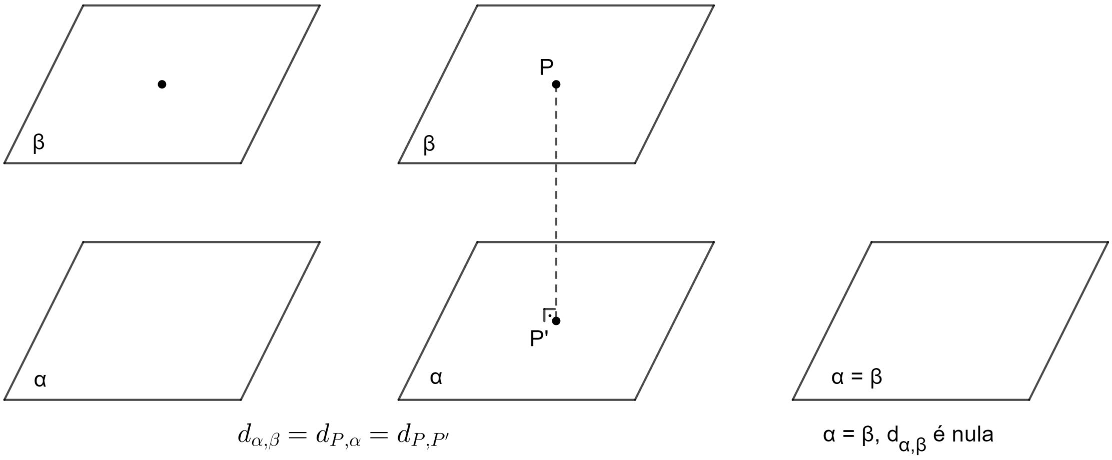

Figura 64 – Distância entre planos paralelos 1

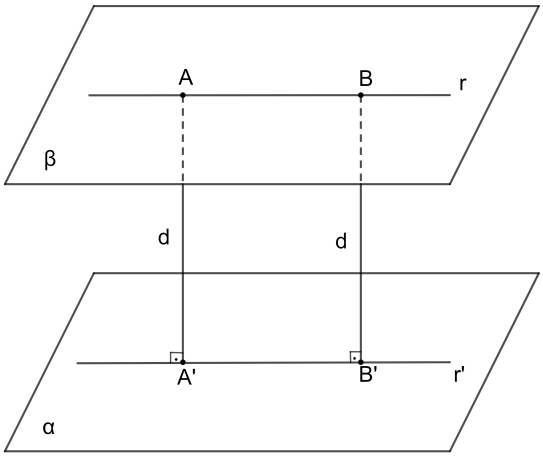

Figura 65 – Distância entre planos paralelos 2

5.1.9 Aplicação 9

IME-2015 / 2016 - 1 fase Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

Resolução:

Observando o triângulo retângulo AHM tem-se:

$AM^2 = AH^2 + HM^2$ então $HM^2 = AM^2$ - AH^2

Observando o triângulo equilátero ABC de lado a, verificamos que AM é a sua

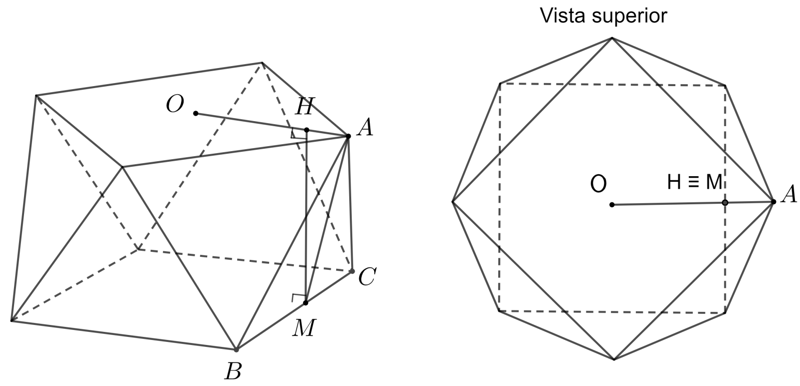

Figura 66 – Aplicação de distância entre planos paralelos

altura, logo AM é igual a $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Temos que $AH = OA$ - OH, como OA é a metade da diagonal do quadrado de lado a, então OA é igual a $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Para encontrar OH, sabe-se que M é a projeção ortogonal de H. Com isso, $OH = MC$ e MC=$\frac{a}{2}$. Dessa forma, OH=$\frac{a}{2}$. Então AH=$a\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Já que $HM^2 = AM^2$ - AH^2, conclui-se que $HM = a\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

5.2 Distância entre retas reversas

Definição 5.2.1. *Chama-se de distância entre duas retas reversas o comprimento mínimo dado por uma reta perpendicular a ambas.*

5.2.1 Aplicação 10

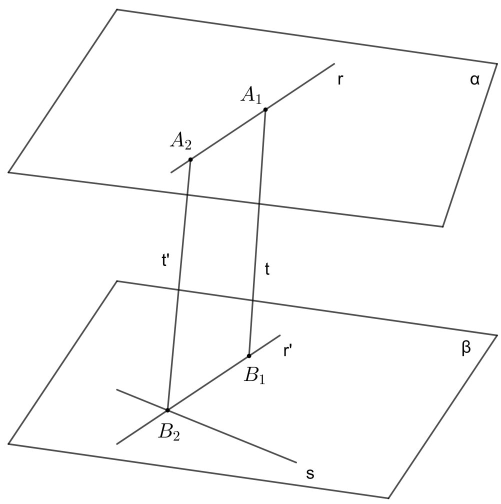

Figura 67 – Perpendicular comum a duas retas reversas

Construção da perpendicular comum a duas retas reversas.

Traça-se dois planos paralelos, α e β, contento cada uma das retas. Para construir tais planos, basta passar por um ponto de cada uma das retas, uma reta paralela a outra. Depois, por um ponto A_1 qualquer de r, traçamos uma reta t perpendicular ao plano β, que o corta em B_1. Por B_1, traçamos a paralela r' a r. A reta r' está contida em β e corta s no ponto B_2. Por fim, por B_2 traçamos a reta t' paralela a A_1B_1. Verifica-se que as retas t', t, r e r' estão todas no mesmo plano. Logo, t' forma ângulo reto com r e s, por ser perpendicular aos planos α e β, e é concorrente com ambas. É, portanto, uma perpendicular comum a r e s. A perpendicular comum A_2B_2 entre as retas reversas r e s construída é única. Caso existisse outra perpendicular comum CD, ela seria necessariamente paralela a A_2B_2 por serem perpendiculares aos planos α e β, mas assim os pontos C, D, A_2 e B_2 estariam no mesmo plano. Desta forma, as retas r e s seriam coplanares, o que é uma contradição. Como a perpendicular comum a r e s é também a perpendicular comum aos planos α e β, o comprimento do segmento por ela determinado é o menor comprimento possível de um segmento cujos extremos sejam quaisquer pontos de α e β. Logo, o comprimento do segmento da perpendicular comum exprime a distância entre as duas retas.

5.2.2 Aplicação 11

(FUVEST-SP) O ângulo formado por duas reversas r e s é θ e a distância entre elas é a. Tome em r um ponto B situado a uma distância b da perpendicular comum às duas retas. Qual a distância de B à reta s?

Resolução:

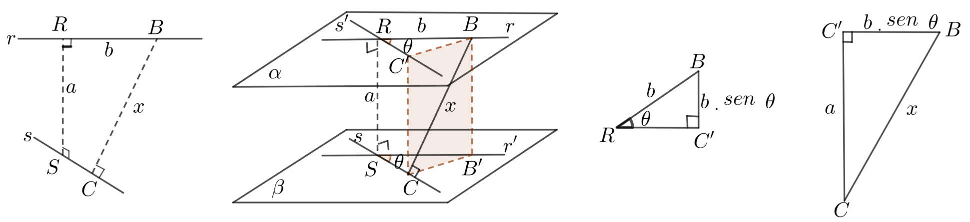

Figura 68 – Exemplo de distância entre retas reversas

Seja C o pé da perpendicular baixada de B até a reta s. Logo, $x = d(B, s) = d(B, C)$ é a distância procurada. Sejam α e β os planos paralelos que contém r e s, observa-se que o segmento RS perpendicular à reta r e à reta s é perpendicular aos planos α e β.

Sejam r' a projeção de r sobre β e s' a projeção de s sobre α. Logo, B' é a projeção de B sobre β, com $B \in r'$ e C' é a projeção de C sobre α, com $C \in s'$.

Como r e r' são coplanares e, sendo α paralelo a β, temos r paralela a r'. Analogamente, s é paralela a s'. Logo, $RSCC'$, $BB'CC'$ e $BB'SR$ são retângulos planos ortogonais a α e β e, portanto, $RS \equiv BB' \equiv CC'$. Em particular, s é perpendicular a CC'. Assim como s também é perpendicular a BC. Conforme demonstrado anteriormente, se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano, o que garante que s é perpendicular ao retângulo $BB'CC'$ e, em particular, s é perpendicular a CB'. Consequentemente, o triângulo SCB' é retângulo em C. Sendo $SCB' \equiv RC'B$ temos que $RC'B$ é triângulo retângulo em C'.

O ângulo entre r e s é o mesmo ângulo entre r e s' (ou entre r' e s). Seja θ a medida desse ângulo. Desta forma, no triângulo retângulo $RC'B$ temos b como a medida da hipotenusa e θ como medida do ângulo $\hat{R}$. Logo, o cateto $C'B$ mede b sen (θ).

Finalizando, no triângulo retângulo $CC'B$ temos o cateto $C'B$ medindo b sen (θ), o cateto CC' medindo a e a hipotenusa BC medindo x. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $x = \sqrt{a^2 + b^2 sen^2\theta}$, que é a distância procurada.

6 Ângulos

Após discorrer, no capítulo 4, sobre ângulo entre planos, será aplicado esse conhecimento para tratarmos de diedros, intersecção de plano secante com uma esfera, bem como aplicações.(AGUSTINE, 2014)

6.1 Diedros

Definição 6.1.1. *Ângulo diedro ou diedro é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos no mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces.*

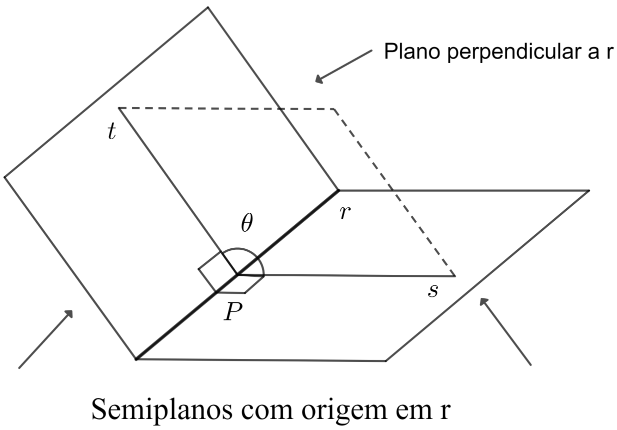

Figura 69 – Medida de um diedro

Um diedro divide o espaço em duas regiões: uma convexa e a outra não convexa. A região convexa é chamada de interior do diedro. A reunião de um diedro com seu interior é chamada de setor diedral .

A medida de um diedro é a medida de um ângulo obtido pela intersecção do diedro com um plano perpendicular a sua aresta. Diferente de ângulo entre planos, um diedro pode ser obtuso.

Para medir um ângulo diedro, conduzimos um plano perpendicular às arestas e medimos o ângulo entre as semirretas determinadas por cada face. Um ângulo diedro pode variar de $0°$ a $180°$. O ângulo entre dois planos secantes é igual a medida do menor diedro formado por eles.

Como se pode observar, a medida de um diedro não depende do plano perpendicular à aresta escolhida para fazer a intersecção.

Dois diedros são congruentes se possuírem a mesma medida.

6.1.1 Aplicação 12

De um ponto P no interior a um diedro de medida 120°, traçam-se as perpendiculares r e s às faces. Calcule a medida do ângulo formado por r e s.

Resolução:

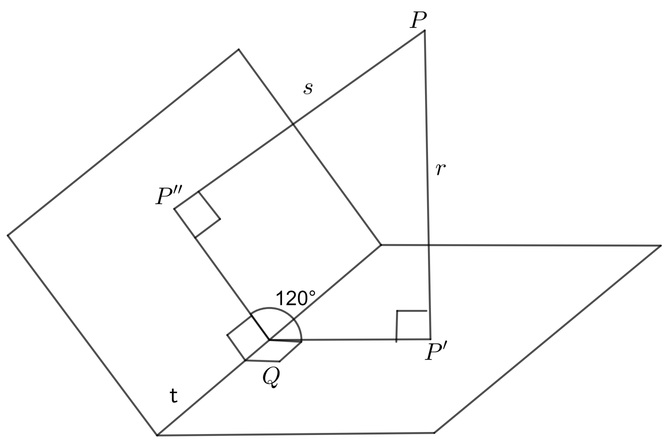

Figura 70 – Ângulo entre diedros

Sejam P' e P'' pontos de intersecção de r e s com as faces do diedro. Sejam ainda α o plano determinado por r e s e, por fim, t a aresta do diedro. Temos que t é ortogonal às retas concorrentes r e s. Como visto anteriormente, se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano. Temos que t é perpendicular a α. Seja Q o ponto de intersecção de t com α. Com isso, a medida do ângulo $P'\hat{Q}P''$ é a medida do diedro, que é de 120°.

Dessa forma, temos um quadrilátero $PP'QP''$ contido no plano α, sendo que esse quadrilátero possui dois ângulos retos em P' e P'', um ângulo de medida 120° em Q e, portanto, o ângulo $\hat{P}$ deve medir 60°. Assim sendo, pode-se concluir que o ângulo entre r e s mede 60°.

6.1.2 Aplicação 13

A figura seguinte mostra a planta de um telhado de uma casa. Cada plano contendo uma porção do telhado é chamado de água. O telhado representado na figura tem quatro águas. Ao longo da reta de intersecção de duas águas, corre uma calha. Sabendo que cada água é inclinada 30° em relação à horizontal, qual é a inclinação em relação a horizontal da calha AM assinalada na figura?

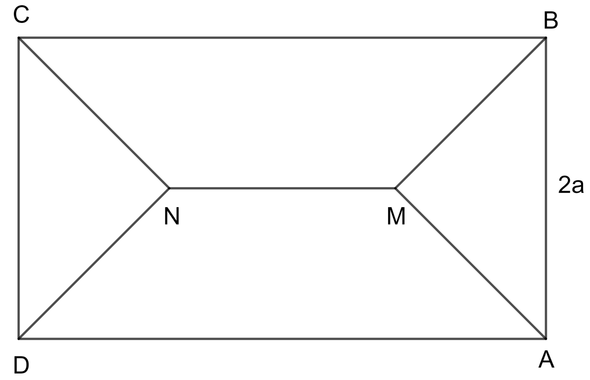

Figura 71 – Exemplo de ângulo entre reta e plano

Resolução: A figura a seguir mostra uma vista em perspectiva do telhado, no qual estão representados os pontos P, Q e R, obtidos respectivamente, projetando o ponto M sobre as beiradas AB e AD do telhado e sobre o plano $ABCD$. Os ângulos que as àguas ABM e $ADMN$ formam com a horizontal são iguais, respectivamente, aos ângulos MPR e MQR. Como esses ângulos são ambos iguais a 30°, os triângulos retângulos MQR e MPR são iguais, já que possuem um cateto comum MR. Assim, designando a menor dimensão do retângulo $ABCD$ por $2a$ temos:

$RP = RQ = a$ e $MR = RQ.tg\ 30° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

O ângulo α que a reta AM forma com o plano horizontal é igual ao ângulo $R\hat{A}M$ do triângulo retângulo MAR, do qual conhecemos os catetos MR e AR. A medida AR é a diagonal do quadrado $APRQ$.

$tg\ \alpha = \frac{MR}{AR} = a\sqrt{3}\ .\ \frac{1}{3a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ e $\alpha \cong 22°$.

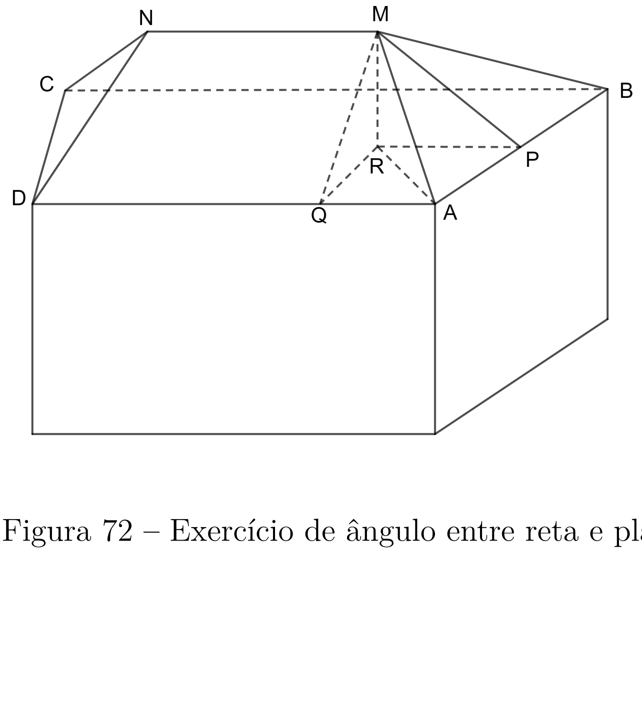

Figura 72 – Exercício de ângulo entre reta e plano.

6.2 Esfera

A superfície esférica, ou simplesmente esfera de centro O, e um segmento de medida R, que chamamos de raio, é o conjunto de pontos P do espaço , cuja distância $\overline{OP}$ seja igual a R.

A esfera é o análogo tridimensional do círculo, inclusive na ambiguidade de terminologia; a palavra esfera tanto pode ser usada para se referir à superfície esférica quanto ao sólido por ela determinado.

A posição de um ponto em relacão a uma esfera vai depender da distância do mesmo até o centro da esfera. Dessa forma, os pontos podem ser: interior a esfera, se a distância for menor que o raio; pertencente a esfera, se a distância for igual ao raio e exterior se a distância for maior que o raio.

Da mesma forma, a posição relativa de uma reta em relação a uma esfera também será determinada pela distância do centro da esfera até a reta. A reta será exterior à esfera se a distância entre a reta e o centro da esfera for maior que o raio, tangente se a distância da reta até o centro da esfera for igual ao raio e secante se a distância da reta até o centro da esfera for menor que o raio.

6.2.1 Intersecção de um plano secante com uma esfera

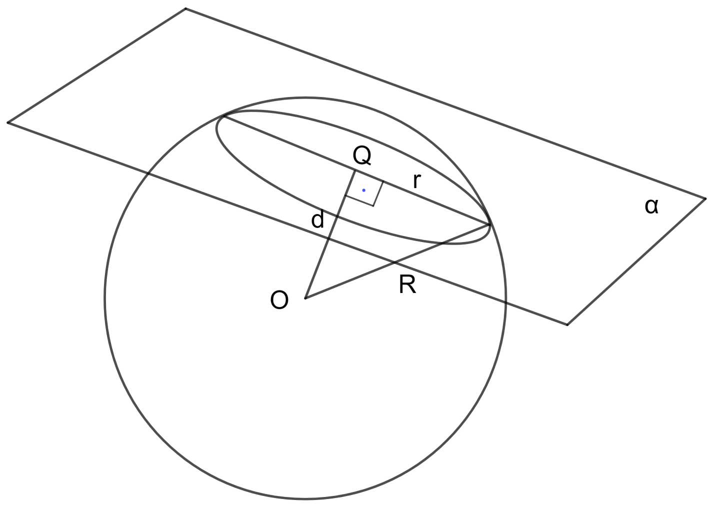

Figura 73 – Plano secante à esfera

Toda secção plana de uma esfera é um círculo. Caso o plano secante passe pelo centro da esfera, temos como secção o círculo máximo da esfera. De fato, os pontos de intersecção de um plano e uma esfera são os pontos P do plano cuja distãncia PO ao centro da esfera O é igual ao seu raio. Sendo Q o pé da perpendicular baixada de O ao plano α. Qualquer que seja o ponto P em α, o triângulo POQ é retângulo em Q. Sendo

$OQ = d$ a distância do centro da esfera até o plano α, $PO = R$ o raio da esfera e $PQ = r$ o raio do círculo da secção do plano com a esfera. Então vale a relação $R^2 = d^2 + r^2$.

6.2.1.1 Aplicação 14

Cálculo de distâncias entre cidades de mesma latitude. Podemos calcular a distância entre as cidades de Vitória, no Brasil, e Santa Cruz de La Sierra, na Bolívia.(as latitudes não são iguais, mas muito próximas).

Informações:

Vitória: Latitude: 20,25° Sul e Longitude: 40,28° Oeste.

Santa Cruz De La Sierra: Latitude:17,81° Sul e Longitude: 67,13° Oeste.

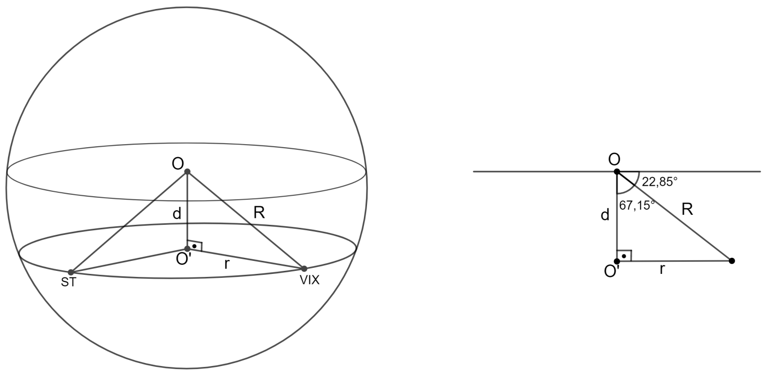

Figura 74 – Cálculo de distância na mesma latitude

R = raio da terra (aproximadamente 6371 km).

r = raio da secção.

θ = diferença entre as latitudes.

α = 90° - θ

θ = 63,13° - 40,28°

θ = 22,85°

α = 67,15°

Então, temos que sen $\alpha = \frac{r}{R}$, assim r = 6371 . 0,921, então r = 5867,69 km.

Como temos que a distância terrestre é : r . $\theta . \frac{1}{360}$. 2 π.

Essa distância será de 2338,89 km, adimitindo que Vitória e Santa Cruz De La Sierra estejam no mesmo paralelo.

Obs.: A distância no Google é de 2419 km.

6.2.1.2 Aplicação 15

Calcule o raio das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas de um cubo de aresta a.

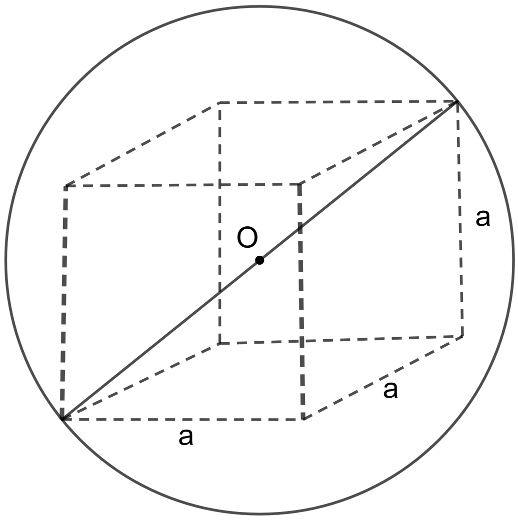

Figura 75 – Esfera circunscrita ao cubo

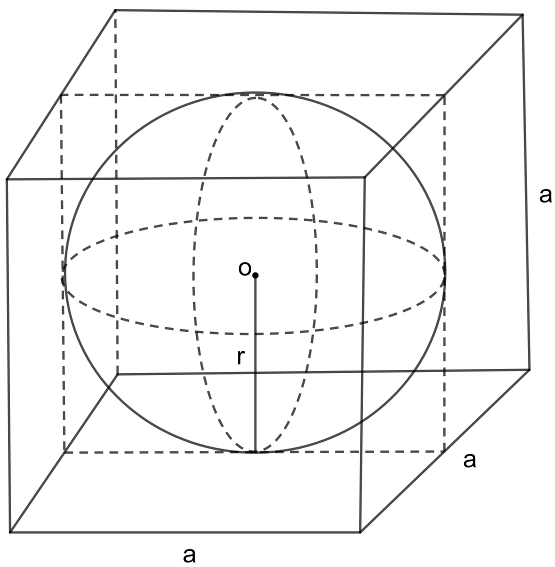

Figura 76 – Esfera inscrita no cubo

Resolução:

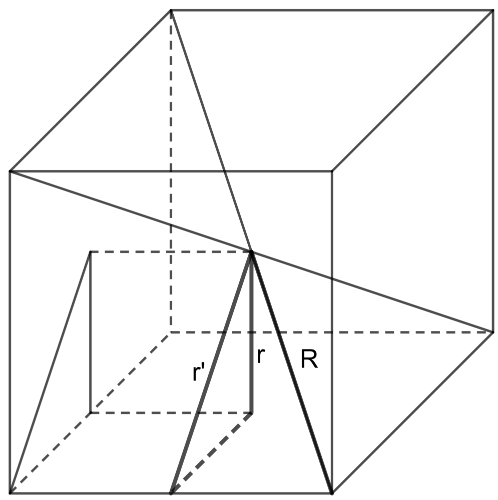

Figura 77 – Raios das esferas associadas a um cubo

Em qualquer paralelepípedo, todas as suas diagonais têm um ponto em comum, o ponto médio de cada uma delas. O ponto de interseção das diagonais é, na verdade, o centro de simetria do paralelepípedo. Se o paralelepípedo é retângulo, todas as diagonais têm o mesmo tamanho. Logo, existe uma esfera centrada nesse ponto e que passa por todos os vértices. Essa esfera é chamada de esfera circunscrita ao paralelepípedo. No caso do cubo, o centro é equidistante das seis faces e equidistante das 12 arestas. Logo, com o mesmo centro, existe também uma esfera tangente às faces, esfera inscrita no cubo e uma esfera tangente às arestas. É simples de observar que os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas do cubo são respectivamente iguais a metade de uma diagonal do cubo, a metade de uma aresta do cubo e a metade da diagonal de uma face do cubo. Logo esses raios são: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{l}{2}$ e $r' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7 Considerações finais

Espera-se que os assuntos discutidos neste trabalho contribuam para uma abordagem diferenciada na construção de alguns temas da Geometria Espacial. No decorrer desta dissertação, buscou-se alinhar e mostrar as ricas conexões entre paralelismo e a perpendicularidade.

O paralelismo e a perpendicularidade no espaço e suas propriedades permitem uma melhor compreensão das transposições de ângulos formando uma base para as construções e cálculos de distância envolvendo ângulos no espaço. Desse modo, garante ao leitor compreender a Matemática e, em especial, a Geometria como uma

> *... arte, onde o enlace das proposições, as conexões entre suas diversas teorias, a elegãncia e a limpeza dos seus raciocínios, a singela eloquência dos seus enunciados e a surpresa de suas conclusões elevam o espírito e comprazem o nosso senso estético.* (LIMA, 2001)

Referências

AGUSTINE, E. *Um Curso de Geometria Euclidiana Espacial*. Uberlândia: UFU, 2014. Citado na página 64.

BICUDO, I. *Os elementos , Euclides*. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Citado na página 17.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 11ª edição. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1994. Citado na página 14.

BULMER-THOMAS, J. M. I. *Biografia no Dicionário de Biografia Científica*. Nova York: [s.n.], 1970. Citado na página 16.

CARVALHO, P. C. *Introdução à geometria espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1993. Citado na página 18.

DOLCE, O. *fundamentos da matemática elementar,10*. 6ª edição. ed. São Paulo: Saraiva S.A Livreiros Editores, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.

EVES, H. *Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues*. 5ª edição. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 14.

GARBI, G. G. *CQD: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e formulas essenciais da geometria*. São Paulo: Editora livraria da física, 2010. Citado na página 34.

GUIMARÃES, F. F. *Notas de aula:Geometria no Espaço*. UFES: Estudo dirigido, 2021. Citado na página 31.

HEATH, T. *Os Treze Livros dos Elementos de Euclides*. Nova York: [s.n.], 1956. Citado na página 17.

LIMA, E. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: Coleção do professor de matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado na página 71.

LIMA E.L, C. P. W. E. M. A. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. 5ª edição. ed. Rio de Janeiro: Editora S B M, 2004. Citado na página 41.

MUNEM, M. A. *Cálculo, volume 2*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011. Citado na página 34.

MUROI, K. *Problemas de construção de muros e diques no texto matemático babilônico*. Tókio: Sociedade de história da ciência do Japão, 1992. Citado na página 15.