UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra

Diego Rodolfo Munhoz

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Diego Rodolfo Munhoz

Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento

USP – São Carlos
Julho de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M963e

Munhoz, Diego Rodolfo
Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra / Diego Rodolfo Munhoz; orientadora Érica Regina Filletti Nascimento. -- São Carlos, 2022.
105 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Funções trigonométricas. 2. Modelagem matemática. 3. Geogebra. I. Filletti Nascimento, Érica Regina, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Diego Rodolfo Munhoz

Teaching trigonometric functions with the support of the mathematical modeling and of the GeoGebra software

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento

USP – São Carlos
July 2022

Este trabalho é dedicado aos meus filhos e esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha orientadora , Prof(a). Dr(a). Érica Regina Filletti Nascimento, que acreditou na proposta deste trabalho e não poupou esforços para me ajudar a realizá-lo, mesmo diante de tanta dificuldade que enfrentamos por causa da pandemia Covid-19.

Agradeço à minha mulher, Tamires Fernanda Vomero, que sempre me apoiou e incentivou, sem ela provavelmente eu teria desistido de escrever esse trabalho. Agradeço aos meus filhos, Theo Vomero Munhoz de 9 anos e Lucca Vomero Munhoz de 5 anos, pela paciência e por entender todas as horas que deixei de me dedicar a eles, para me dedicar a este trabalho. Eu amo vocês. Obrigado!

Agradeço a todos os meus professores aqui no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional oferecido pela Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, especialmente à Prof(a). Dr(a). Ires Dias, por sempre estar do nosso lado. E ao professor Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro, por quase arrancar nosso couro de tanto estudar, mas sempre com um carisma incrível. Obrigado!

Agradeço a todos os meus companheiros de turma, em especial ao André Penedo, por todo tempo de estudo que passamos juntos, por todos os risos.

RESUMO

MUNHOZ D.R. **Ensino de funções trigonométricas com o auxílio da modelagem matemática e do software GeoGebra**. 2022. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho tem como objetivo principal despertar os professores de matemática do Ensino Médio para a possibilidade de ensinar funções trigonométricas utilizando a modelagem matemática como ferramenta pedagógica, contando também com o uso da tecnologia para intensificar os resultados. O trabalho tem como premissa evitar que os alunos se questionem sobre como essas funções são usadas na vida real, ou seja, fora do ambiente escolar. Assim, foi elaborada uma proposta de atividades contendo quatro problemas sobre modelagem matemática para melhorar a aprendizagem de tais funções e para isso, o trabalho foi guiado pela pergunta-problema: "Como incentivar e contribuir para a aprendizagem de funções trigonométricas usando a modelagem matemática como estratégia de ensino?" Ainda, na fundamentação teórica foi apresentado um passo a passo de como construir as funções seno e cosseno vinculadas ao ciclo trigonométrico usando o software GeoGebra, além de mostrar algumas aplicações práticas em áreas como Física, Medicina e Oceanografia. Esperamos que este trabalho possa contribuir com os professores de Matemática para tornar a aprendizagem de funções trigonométricas mais significativa e prazerosa para os alunos.

Palavras-chave: Funções trigonométricas, modelagem matemática, GeoGebra.

ABSTRACT

MUNHOZ D.R. **Teaching trigonometric functions with the support of the mathematical modeling and of the GeoGebra software**. 2022. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work aims to awaken high school Mathematics Teachers to the possibility about teaching trigonometric functions, using mathematical modeling as a pedagogical tool, also counting on the use of technology to intensify the results. The paper is premised on preventing students from questioning how these functions are used in real life, or even outside the school environment. Thus, a proposal for activities containing four problems on mathematical modeling was elaborated to improve the learning of such functions and for this, the work was guided by the question-problem: "How to encourage and contribute to the learning of trigonometric functions using mathematical modeling as a teaching strategy?" Also, in the theoretical foundation it was presented a step by step of how to build the sine and cosine functions linked to the trigonometric cycle using the GeoGebra software, in addition to showing some practical applications in areas such as Physics, Medicine and Oceanography. We hope that this paper can contribute to Mathematics teachers to transform the learning of trigonometric functions more meaningful and pleasant for students.

Keywords: trigonometric functions, mathematical modeling, GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática vem sendo aplicado, por muitos professores, de forma tradicional, isto é, o professor explica a teoria na lousa enquanto os alunos assistem passivamente, e logo após, emprega exercícios apenas com aplicações diretas da teoria, muitas vezes sem contexto, exercícios em que o aluno só precisa olhar para as fórmulas e usá-las da forma correta. Isso faz com que a matemática se torne chata e insignificante, levando o aluno a perguntas do tipo: "Por que devemos aprender esse conteúdo? Qual a utilidade disso na minha vida real?" O fato de os alunos fazerem essas perguntas é bastante normal. Isso porque a matemática é geralmente considerada uma atividade separada da vida real e realizada apenas na escola.

Saber como responder a esse tipo de pergunta e tornar a matemática atraente, no ensino das funções trigonométricas, são as motivações desse trabalho, usando a modelagem matemática como estratégia de ensino - aprendizagem. Sobre isso, (BASSANEZI, 2002) diz:

> "A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável." (BASSANEZI, 2002).

Ao usar a modelagem, a educação matemática torna-se mais agradável e deixa o objetivo inicial do ensino de matemática, que é desenvolver habilidades em resoluções de problemas e o pensamento matemático, mais fácil de ser alcançado.

Na realidade, o uso de modelagem como instrumento de ensino da matemática nas escolas é muito pouco. No ensino da matemática no Brasil raramente se aplica esse instrumento, porque é difícil para o professor quebrar seus paradigmas de que o ensino tradicional é a melhor maneira de ensinar. Bassanezi (BASSANEZI, 2002) trata esse assunto no trecho abaixo:

> “ [...] a maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de Modelagem, pela maioria dos professores de Matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional em que o objetivo de estudo apresenta-se quase sempre delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada."(BASSANEZI, 2002).

Esse ensino tradicional vai na contra mão do que diz a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que nos mostra que o professor precisa criar meios para que o aluno seja capaz de pensar e não apenas repetir aplicações de fórmulas matemáticas.

> “No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.” (BRASIL, 2017)

Esse trecho da BNCC (BRASIL, 2017) reforça, ainda, que os alunos devem ter a habilidade de construir modelos matemáticos e que o foco do ensino é produzir uma matemática aplicada à realidade. Pois a modelagem matemática é um processo de desenvolvimento de um modelo capaz de conseguir transformar uma situação da vida real em um problema matemático.

A proposta desse trabalho, cuja boa parte das atividades é desenvolvida no software GeoGebra com a construção e análise dos gráficos das funções trigonométricas, vai de encontro à BNCC nesse quesito e também à habilidade número 4 vinculada à competência específica de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio da BNCC, que é:

> “Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.” (BRASIL, 2017)

As razões básicas que podem levar os professores de matemática utilizar modelagem como instrumento de ensino estão na resposta da seguinte questão: Qual educação matemática deve ser realizada para que os alunos obtenham conhecimentos matemáticos e habilidades de pensamento matemático que eles podem usar em sua vida real? Podemos colocar, também, como uma dessas razões básicas a preocupação com a insuficiência dos métodos tradicionais no desenvolvimento de habilidades para a resolução de problema.

Assim, o fato do ensino da matemática, no Ensino Médio, há muito tempo estar voltado para a resolução de problemas abstratos, a ponto de ser visto como um treinamento para o vestibular e ENEM, criou-se um distanciamento entre o aluno e o interesse pela matemática e é preciso mais que a vontade de ser aprovado em uma universidade para despertar esse interesse. (SIQUIERE; QUARTIERI, 2021), em seu artigo, defende que a modelagem é uma estratégia para envolver os alunos com a matemática, já que usa os conceitos aplicados a algo do cotidiano do aluno, e dessa forma, esses ganham significado.

Já (MATOS; SANTOS, 2018) em seu trabalho, escrito para professores do Ensino Médio, defende uma mudança na metodologia de ensino que expõe o conteúdo seguido de exercícios, para uma metodologia que apresente atividades capazes de fazer com que o aluno investigue, construa o conhecimento pesquisando e refletindo sobre a realidade. Para as autoras, a modelagem é o tipo de atividade que tem essas características e com isso se torna uma facilitadora do ensino da matemática. Este trabalho propõe uma aplicação na nutrição, utilizando sistemas lineares como tema principal, e o tema Tratamento da Informação é também abordado durante a atividade na organização dos dados em tabelas.

Em seu artigo (MAGNUS; CALDEIRA, 2020), após pesquisas minuciosas sobre o ensino-aprendizagem da matemática, chegam a conclusão que existe uma crise no ensino desse componente, cuja causa é justificada, na maioria das vezes, como a "falta de base", ou seja o problema começa no anos iniciais do ensino fundamental, do primeiro ao quinto ano, e se prolonga até o ingresso na universidade. Esse problema esta relacionado com hierarquia e linearidade dos conteúdos, os autores consideram as atividades de modelagem matemática como uma possibilidade para amenizar esse problema, já que em atividades de modelagem trabalha-se muitos conteúdos sem que haja um conhecimento prévio. Para se ensinar matemática de formas não tradicionais é preciso saber muito mais que somente conteúdos matemáticos. Em seu artigo (BISOGIN; BISOGNIN, 2021), reflete sobre quais conhecimentos um professor deve ter para se ensinar matemática de forma eficaz, o que leva ao estudo da modelagem matemática em cursos de formação de professores.

Assim, diante do exposto, vamos propor uma série de atividades que une tecnologia com uso do software GeoGebra e a modelagem matemática, para ensinar os conceitos das funções trigonométricas. Essas atividades buscam atingir os diferentes tipos de modos de aprendizagem: o visual, o auditivo e o cinestésico. O visual e o auditivo são atingidos nas aulas com o auxílio do software GeoGebra, já o cinestésico é atingido na parte prática da atividade em que o aluno vai plotar pontos e gráficos no GeoGebra e modelar as funções.

O software GeoGebra vai nos servir para mostrar para o aluno, visualmente, o que acontece quando alteramos um determinado parâmetro de uma função trigonométrica e qual a relação do ciclo trigonométrico com o gráfico das funções. Já a modelagem matemática vai nos ajudar a despertar o interesse do aluno, pois trará uma abordagem através de um problema da vida real, respondendo as questões sobre a utilidade da matemática no cotidiano.

1.1 Objetivos

Esta dissertação tem como principal objetivo servir de apoio para o professor do Ensino Médio que vai ministrar aulas de funções trigonométricas, assunto esse, que é dado como complicado pela maioria dos alunos, o que gera a perda de interesse no aprendizado.

Para tal fim, foi elaborada uma proposta de atividades para melhorar a aprendizagem de tais funções e para isso nos guiamos pela pergunta-problema: "Como incentivar e contribuir para a aprendizagem de funções trigonométricas usando a modelagem matemática como estratégia de ensino?" Acreditamos que uma possibilidade viável para que a aprendizagem torne-se significativa é usar problemas contextualizados para despertar o interesse dos alunos e, por isso, as atividades propostas neste trabalho usam a modelagem matemática.

O presente trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

1. O Capítulo 2 traz os principais conceitos teóricos de funções trigonométricas, além de apresentar o software GeoGebra mostrando como usá-lo para plotar os gráficos dessas funções. Além disso, também fala da importância da modelagem matemática no ensino de Matemática.

2. No Capítulo 3 são apresentados alguns modelos matemáticos envolvendo funções trigonométricas, relacionando-as com fenômenos periódicos e mostrando que a matemática encontra-se nas mais diversificadas áreas como Física, Medicina e outras.

3. O Capítulo 4 tem a finalidade de apresentar as atividades propostas para incentivar os alunos na aprendizagem de funções trigonométricas, bem como servir de suporte para os professores do ensino médio que desejam motivar seus alunos usando problemas contextualizados que envolvem funções trigonométricas.

4. Por fim, no Capítulo 5 encontram-se as considerações finais.

Esperamos que este trabalho possa contribuir com os professores de Matemática para tornar a aprendizagem de funções trigonométricas mais significativa e prazerosa para os alunos.

CAPÍTULO

2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo vamos apresentar conceitos de funções trigonométricas, que embasam todas atividades propostas nessa dissertação. Também apresentaremos o software GeoGebra e como usá-lo para plotar gráficos de funções trigonométricas. Ainda, falaremos sobre modelagem matemática e sua importância no ensino de Matemática. Vamos usar as seguintes referências bibliográficas (IEZZI, 2013),(SOUZA, 2018)(BASSANEZI, 2002).

2.1 Funções trigonométricas

Esta seção é dedicada aos principais conceitos de trigonometria, como ângulo, grau, radiano, ciclo trigonométrico, entre outras, e também às funções trigonométricas.

2.1.1 Conceitos básicos

Definição 2.1. *Ângulo* é a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com uma das regiões determinadas por elas.

Definição 2.2. Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência, como mostra a Figura 1. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um *arco de circunferência*:

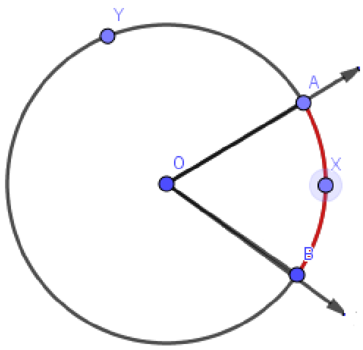
(i) arco de circunferência $A\hat{X}B$ e

(ii) arco de circunferência $A\hat{Y}B$,

onde A e B são extremidades do arco.

Definição 2.3. Dizemos que $A\hat{O}B$ é um *ângulo central* se o vértice está no centro da circunferência, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Circunferência de centro O.

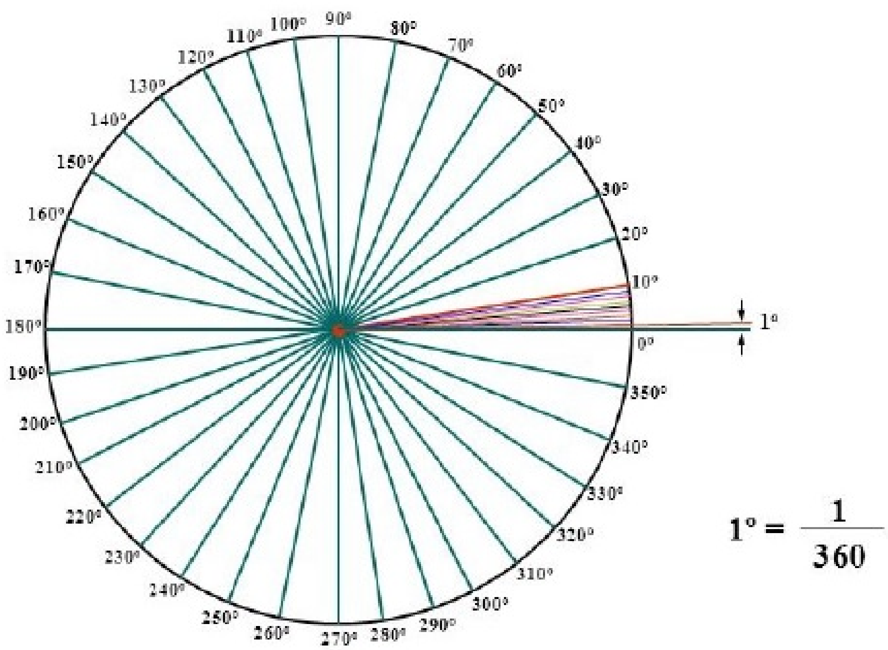


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade de medida para arcos, são usadas apenas duas unidades: o grau e o radiano.

Definição 2.4. O *grau* (símbolo $^\circ$) é um arco unitário igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Circunferência dividida em graus.



Fonte- https://slideplayer.com.br/slide/334098/

Definição 2.5. O *radiano* (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Um radiano cabe aproximadamente seis vezes em uma circunferência, mais precisamente uma circunferência mede 6,283184... rad, usamos essa medida como 2π rad, para facilitar as operações.

Com essas considerações, podemos usar as seguintes relações, para conversão de unidades:

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180^\circ \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

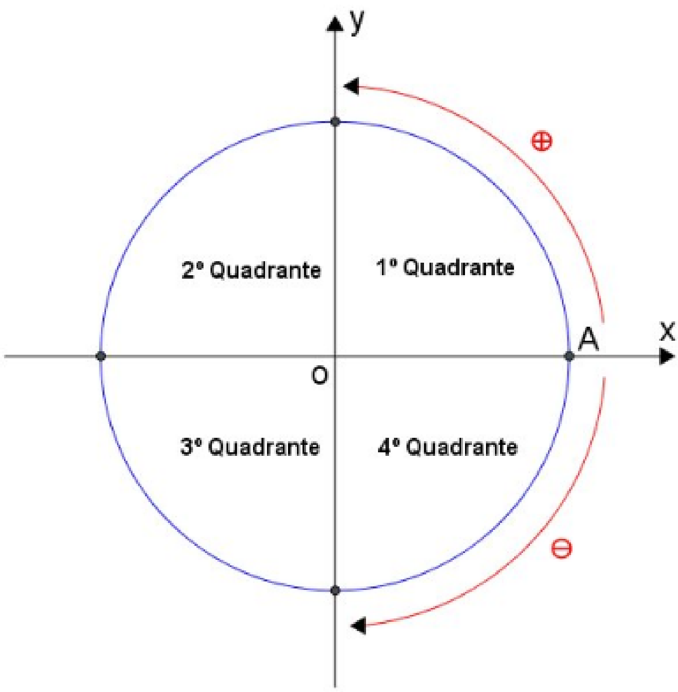
Exemplo 1. Converta 1 rad em graus.
Solução:

$$180^\circ \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$x \quad \longleftrightarrow 1 \text{ rad}$$

$$x = \frac{180}{\pi}$$
$$x = \frac{180}{3,1416}$$
$$x = 57^\circ 17' 44''$$

Definição 2.6. *Ciclo trigonométrico* é uma circunferência de raio igual a 1, centrada na origem de um plano cartesiano. Os eixos dividem a circunferência em quatro partes iguais, chamadas de *quadrantes*, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Ciclo trigonométrico dividido em quadrantes.



Fonte - https://www.infoescola.com/matematica/circulo-trigonometrico/

Se caminharmos com um ponto qualquer sobre a circunferência no sentindo anti-horário, teremos medidas de arcos positivos, se o sentido for horário as medidas de arcos serão negativas. O sentindo em que se começa a contar os quadrantes sempre será o anti-horário.

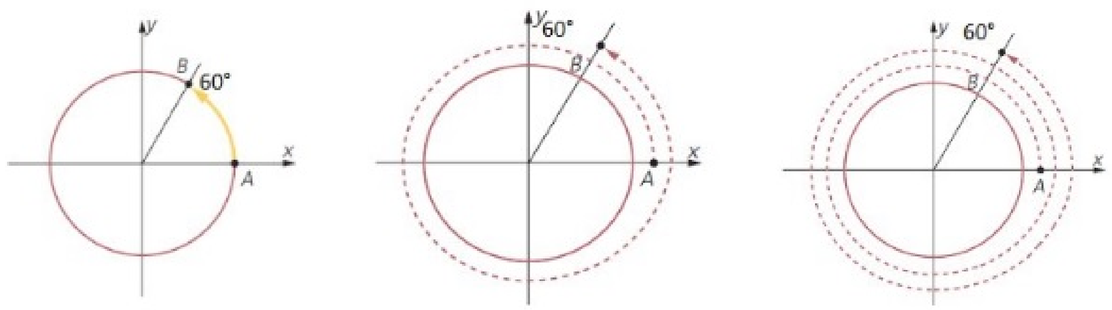
Definição 2.7. Dois arcos são *côngruos* quando possuem a mesma extremidade. Isso acontece porque no ciclo trigonométrico se pode dar um número k de voltas, como ilustra a Figura 4, que mostra três arcos congruentes:

(i) $60°$

(ii) $420° = 360° + 60°$

(iii) $780° = 2 \cdot 360° + 60°$

Figura 4 – Arcos côngruos.



Fonte - https://www.infoescola.com/matematica/circulo-trigonometrico/

De uma uma forma geral um arco x pode ser escrito como:

(i) Representação em grau:

$$x = \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ \quad com \;\; k \in \mathbb{Z};$$

(ii) Representação em radiano:

$$x = \alpha + 2 \cdot k \cdot \pi \quad com \;\; k \in \mathbb{Z},$$

em que k é o número de voltas no ciclo trigonométrico.

2.1.2 Funções periódicas

Definição 2.8. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada *função periódica* se houver um número real positivo t tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x) = f(x+t).$$

Alguns fenômenos naturais, como o comportamento das marés, ou funcionalidades do corpo humano, como a respiração, podem ser modelados matematicamente através dessas funções, mais especificamente as funções seno e cosseno.

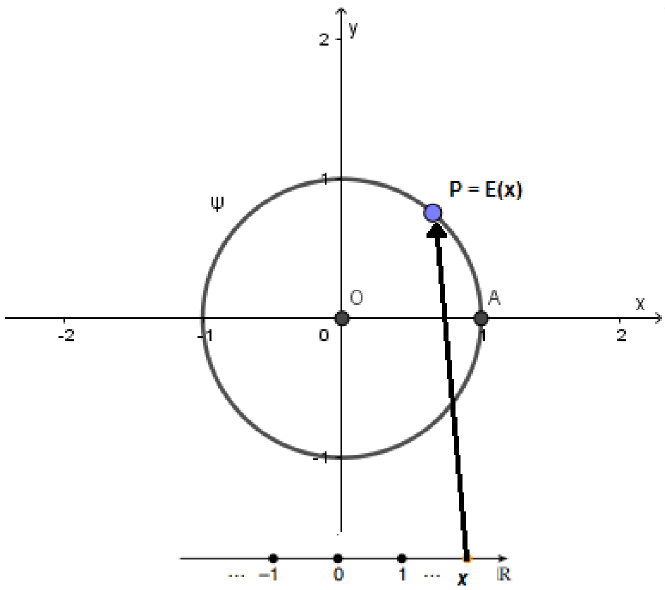
2.1.2.1 Função de Euler

Consideremos uma circunferência ψ de raio igual a 1 e centro O, na origem de um sistema cartesiano xOy. Como o raio é igual a 1, essa circunferência tem comprimento 2π.

Vamos definir uma função $E : \mathbb{R} \to \psi$, que associa a cada número real x um único ponto P da circunferência ψ (Figura 5) do seguinte modo:

- Se $x = 0$, então P coincide com o ponto A;
- Se $x > 0$, então realizamos a partir de Aum percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final;
- Se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário, e marcamos P como ponto final.

Figura 5 – Ilustração da Função de Euler.



Fonte - Elaborado pelo autor

Na prática a função de Euler consiste em enrolar a reta real na circunferência ψ, de modo que o ponto $x = 0$ da reta real coincida com o ponto $A(1,0)$ de ψ.

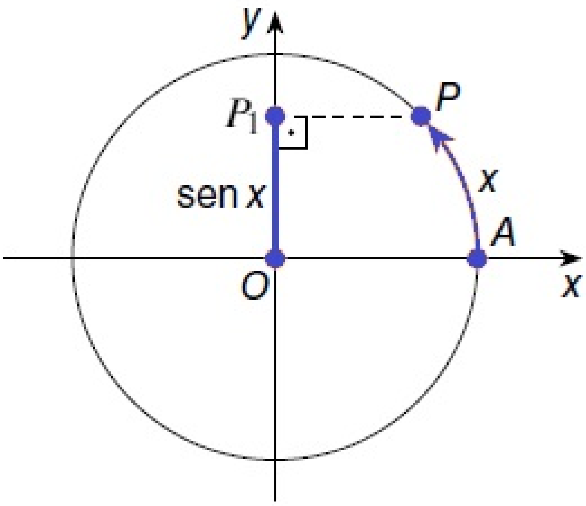
2.1.2.2 Função seno

Definição 2.9. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos seno de x (e indicamos $\operatorname{sen} x$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P. Denominamos *função seno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$, isto é,

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

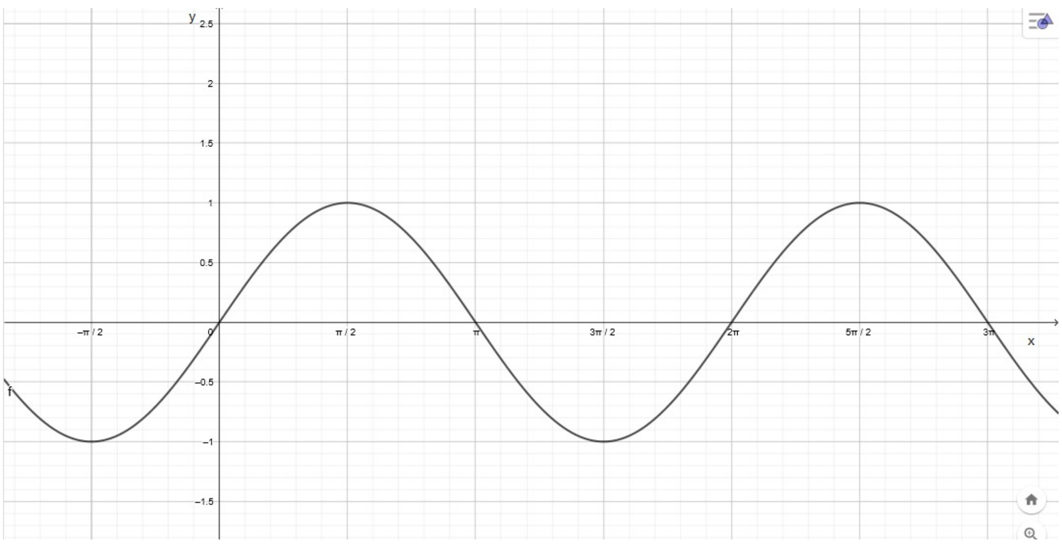
como ilustra a Figura 6. O gráfico da função seno encontra-se na Figura 7.

Figura 6 – Função seno no ciclo trigonométrico.



Fonte - Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Função seno.

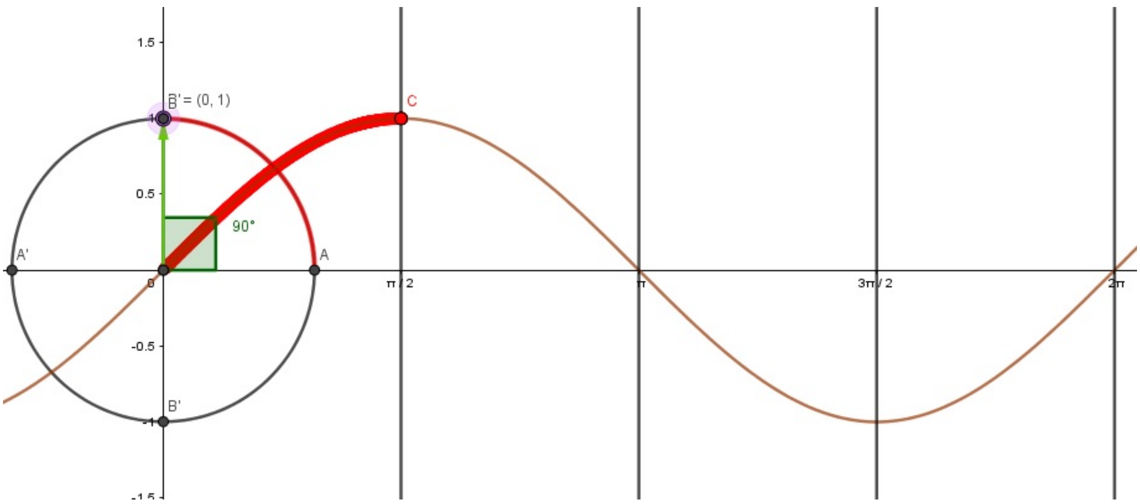


Fonte - Elaborado pelo autor.

Características da função seno

- A imagem da função seno, $f(x) = \operatorname{sen} x$, é o intervalo $[-1, 1]$;
- Sinal da função seno:
  i) se x pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então $f(x) = \operatorname{sen} x$ tem valor positivo;
  ii) se x pertence ao terceiro ou quarto quadrantes, então $f(x) = \operatorname{sen} x$ tem valor negativo;
  A propriedade se justifica pelo fato de o ciclo trigonométrico estar centrado na origem de um plano cartesiano.
- A função seno é periódica com período de 2π;
- A função seno é ímpar, pois $f(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$;
- A metade da diferença entre o máximo e o mínimo valor numérico da função seno, chamado de amplitude, é igual a 1;
- Se x percorre o primeiro quadrante de $0° < x < 90°$, então $f(x) = \operatorname{sen} x$ é crescente, como ilustra a Figura 8;

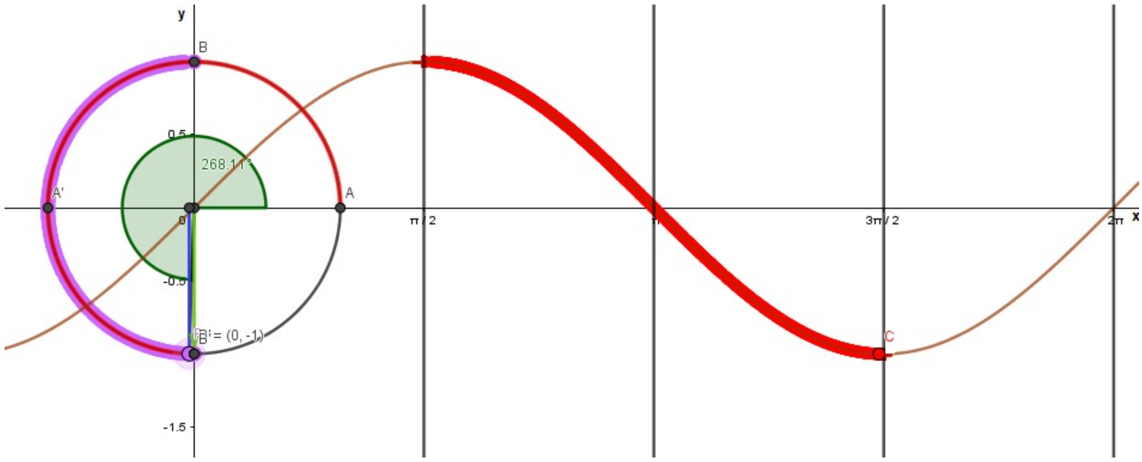
Figura 8 – Função seno no primeiro quadrante.



Fonte - Elaborado pelo autor

- Se x percorre o segundo e terceiro quadrantes de $90° < x < 270°$, então $f(x)$ é decrescente, como ilustra a Figura 9;

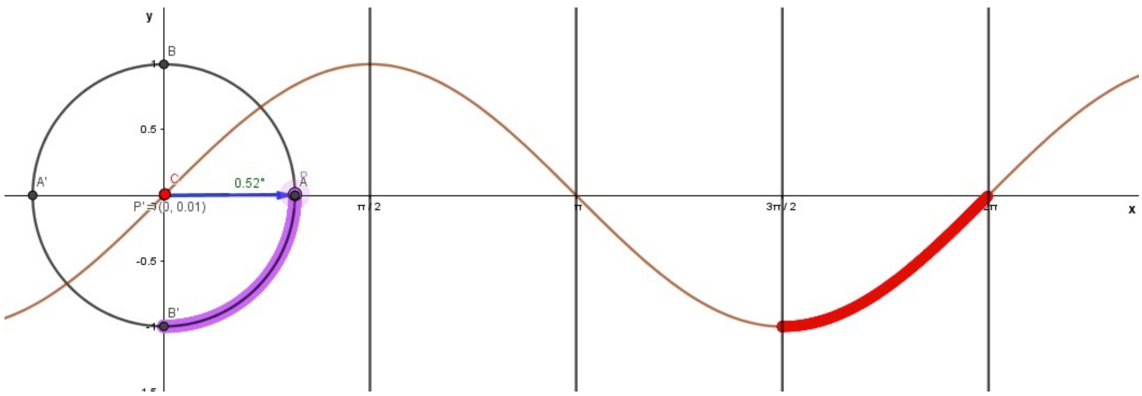
Figura 9 – Função seno no segundo e terceiro quadrantes.



Fonte - Elaborado pelo autor

- Se x percorre o quarto quadrante de $270° < x < 360°$, então $f(x)$ é crescente, como ilustra a Figura 10.

Figura 10 – Função seno no quarto quadrante.



Fonte - Elaborado pelo autor

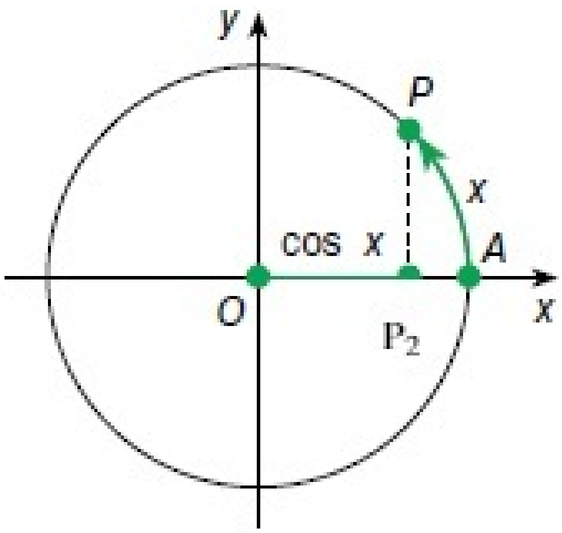
2.1.2.3 Função cosseno

Definição 2.10. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a ordenada $\overline{OP_2}$ do ponto P. Denominamos de *função cosseno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é,

$$f(x) = \cos x,$$

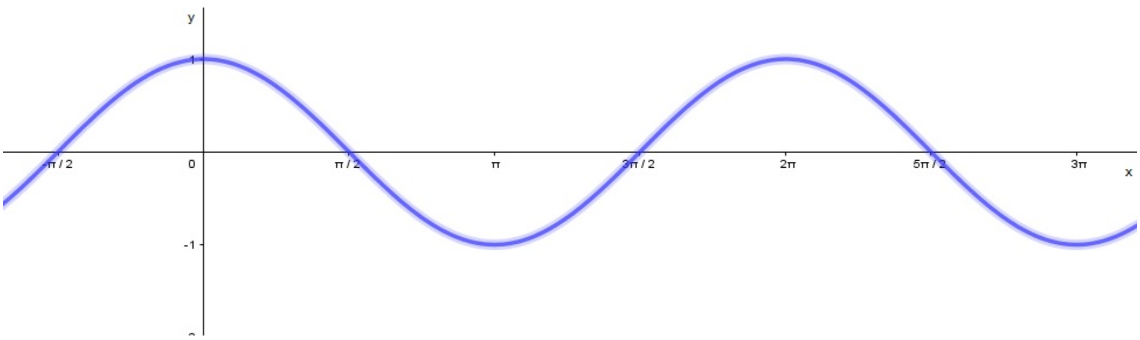
como ilustra a Figura 11. O gráfico da função cosseno encontra-se na Figura 12.

Figura 11 – Função cosseno no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Função cosseno.



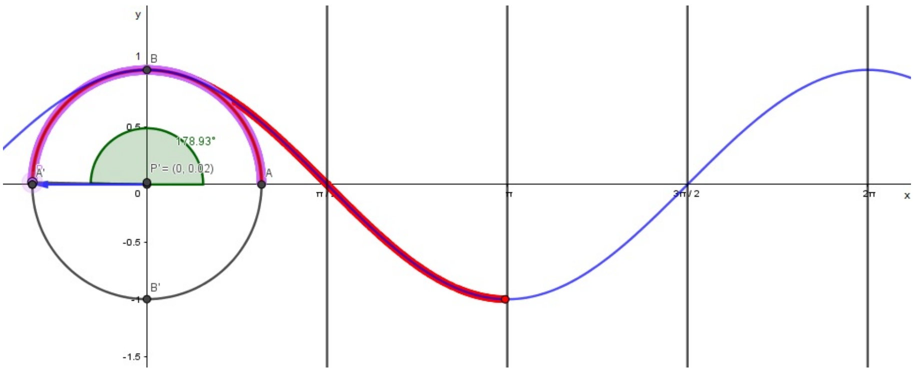
Fonte: Elaborado pelo autor.

Características da função cosseno

- A imagem da função cosseno é o intervalos $[-1,1]$;
- Sinal da função cosseno:
  i) se x pertence ao primeiro ou quarto quadrante $\cos x$ tem valor positivo;
  ii) se x pertence ao segundo ou terceiro quadrantes $\cos x$ tem valor negativo;
  A propriedade se justifica pelo fato de o ciclo trigonométrico estar centrado na origem de um plano cartesiano.
- A função $f(x) = \cos x$ é periódica com período de 2π;
- A função cosseno é par, pois $f(-x) = \cos x = f(x)$;

- A metade da diferença entre o máximo e o mínimo valor numérico da função cosseno,chamado de amplitude, é igual a 1;
- Se x percorre o primeiro e segundo quadrantes de $0° < x < 180°$, então $f(x)$ é decrescente, como ilustra a Figura 13;

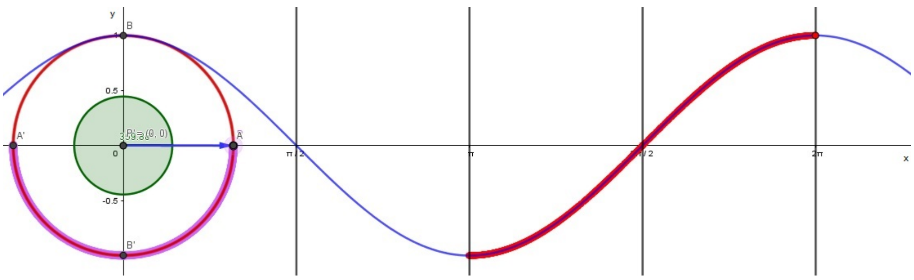
Figura 13 – Cosseno no primeiro e segundo quadrantes



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Se x percorre o terceiro e quarto quadrantes de $180° < x < 360°$, então $f(x)$ é decrescente, como ilustra da Figura 14.

Figura 14 – Cosseno no terceiro e quarto quadrantes



Fonte: Elaborado pelo autor.

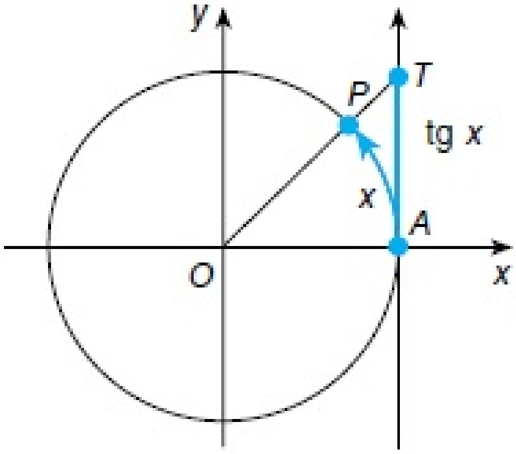
2.1.2.4 Função tangente

Definição 2.11. Dado um número real x, com $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta $\overline{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos tg x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$. Denominamos de *função tangente* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ o real $\overline{AT} = \text{tg}\, x$, isto é,

$$f(x) = \text{tg}\, x,$$

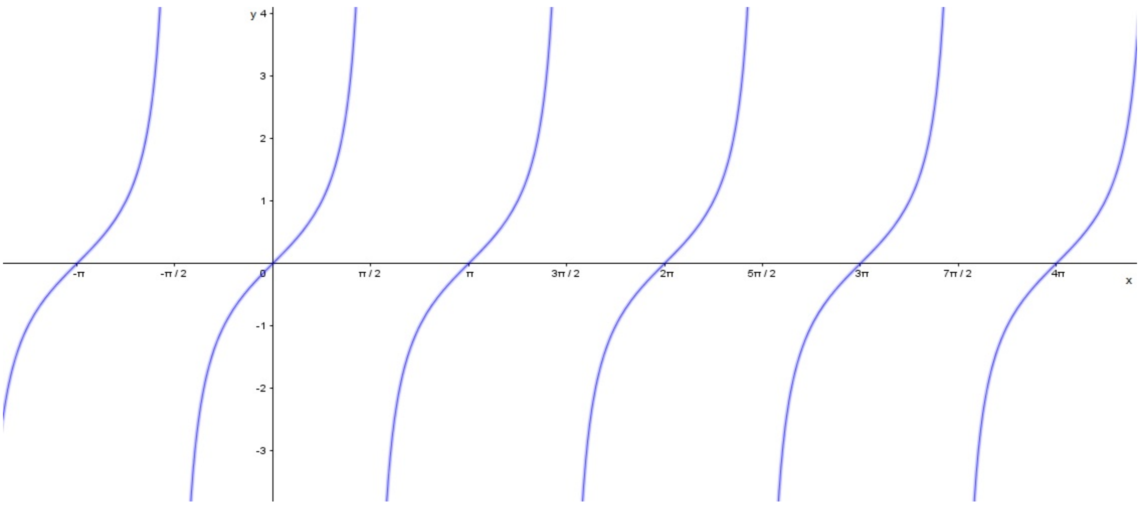
como ilustra a Figura 15. O gráfico da função tangente encontra-se na Figura 16.

Figura 15 – Tangente no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – Função tangente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Características da função tangente

- O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$;
- A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$;
- Sinal da função tangente:
  i) se x pertence ao primeiro ou terceiro quadrante tg x tem valor positivo;
  ii) se x pertence ao segundo ou quarto quadrantes tg x tem valor negativo;
  A propriedade se justifica pelo fato de o ciclo trigonométrico estar centrado na origem de um plano cartesiano.
- A função tangente é periódica com período de π;

- A função tangente é ímpar, pois $f(-x) = -\text{tg}\, x = -f(x)$;
- A função tangente é sempre crescente, ou seja, se x percorre o ciclo trigonométrico de $0° < x < 360°$, então $f(x)$ é crescente, como mostra o gráfico da Figura 16 acima.

2.1.2.5 Construção de gráficos

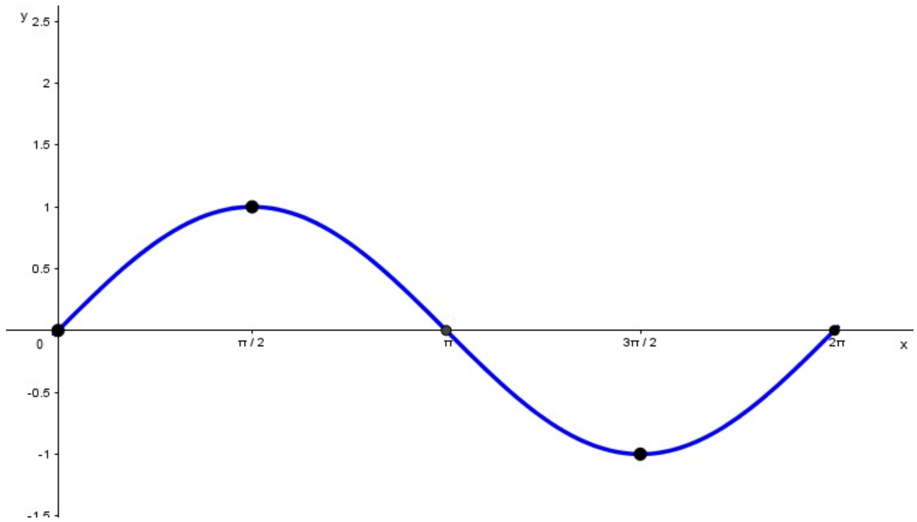
Vamos construir o gráfico da função seno, $f(x) = \text{sen}\, x$. Para isso vamos escolher alguns valores arbitrários para x, como mostra a Tabela 1, de forma a facilitar nossos cálculos, e em seguida calcular as imagens referentes a esses valores, afim de encontrar alguns pontos para nosso gráfico.

Tabela 1 – Alguns valores de $f(x) = \text{sen}\, x$.

x	sen x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Com o gráfico da função fundamental seno, mostrado na Figura 17, vamos construir alguns gráficos que podem aparecer em problemas reais, e sempre manter uma comparação com o gráfico fundamental, afim de estudar como ocorrem as transformações.

Figura 17 – Função seno como referência.



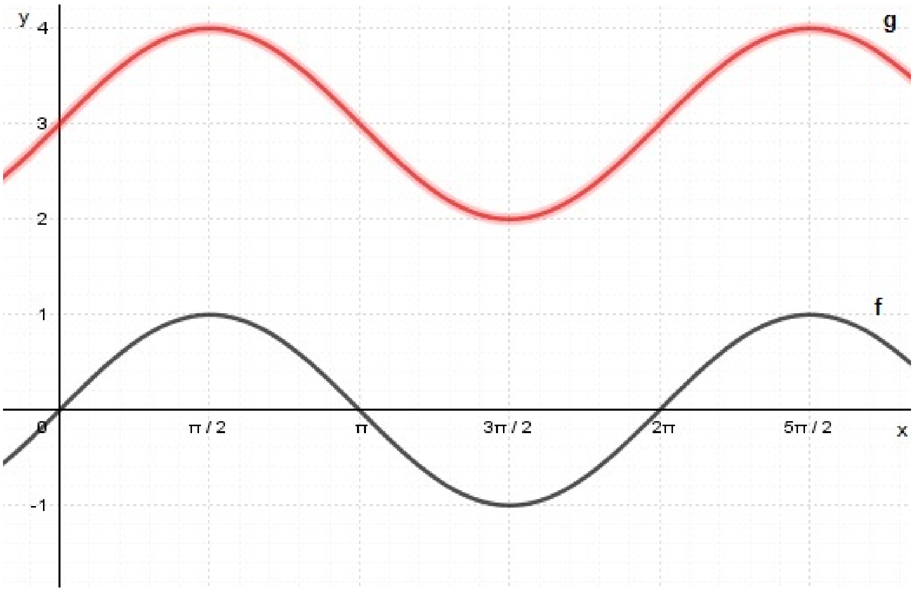
Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos construir o gráfico de $g(x) = 3 + \operatorname{sen} x$, e para nos auxiliar, convém usar uma coluna com $\operatorname{sen} x$ na Tabela 2.

Tabela 2 – Alguns valores de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 3 + \operatorname{sen} x$

x	$\operatorname{sen} x$	$3 + \operatorname{sen} x$
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	1	4
π	0	3
$\frac{3\pi}{2}$	-1	2
2π	0	3

Figura 18 – Comparação entre $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 3 + \operatorname{sen} x$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que, na Figura 18, $g(x)$ tem o mesmo domínio, período e amplitude de $f(x)$, porém o gráfico transladou 3 unidades para cima e sua imagem passou a ser $[2,4]$. Se caso tivéssemos adicionado -3, o gráfico teria transladado para baixo 3 unidades.

De uma forma geral, os gráfico das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, do tipo $y = A + \operatorname{sen} x$, $y = A + \cos x$ ou $y = A + \operatorname{tg} x$, transladam verticalmente $|A|$ unidades em relação ao gráfico fundamental, da seguinte maneira:

- Se $A > 0$ a translação é para cima;
- Se $A < 0$ a translação é para baixo.

Como a imagem da função seno está limitada ao intervalo $[-1,1]$, podemos representá-la como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, adicionando A a todos os membros teremos

$$-1 + A \leq A + \operatorname{sen} x \leq 1 + A,$$

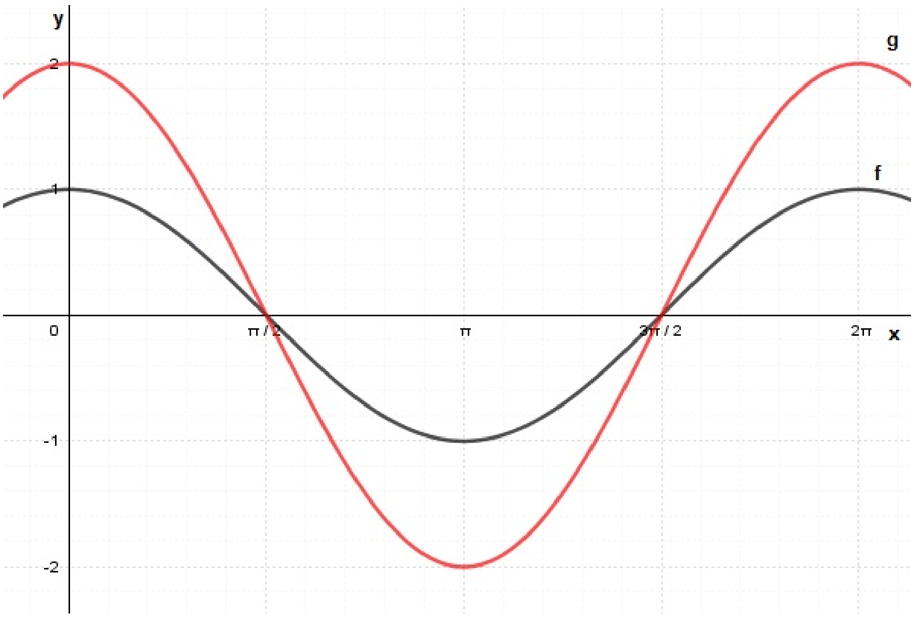
assim, o conjunto imagem será $[-1+A, 1+A]$.

Agora, vamos construir o gráfico de $f(x) = \cos\, x$ e $g(x) = 2\cos\, x$, da mesma forma feita anteriormente. Vamos usar uma coluna auxiliar com $\cos\, x$ na tabela.

Tabela 3 – Alguns valores de $f(x) = \cos\, x$ e $g(x) = 2\cos\, x$.

x	$cosx$	$2cosx$
0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	2

Figura 19 – Comparação entre $f(x) = \cos\, x$ e $g(x) = 2\cos\, x$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que, na Figura 19, o domínio e o período de $g(x)$ não se alteram em relação a $f(x)$, porém a amplitude dobrou e o intervalo da imagem se alterou para $[-2, 2]$.

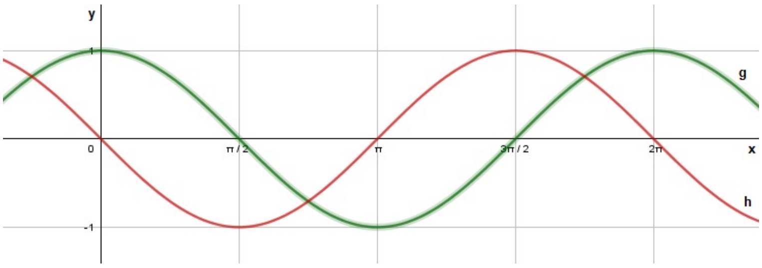
De uma forma geral, os gráficos das funções trigonométricas do tipo $y = B\text{sen}\, x$ e $y = B\cos\, x$, com $B \neq 0$ têm amplitude igual a $|B|$. Se $B < 0$, o gráfico de $y = B\text{sen}\, x$ ou $y = B\cos\, x$, será simétrico em relação ao eixo horizontal a partir do gráfico de $y = |B|\,\text{sen}\, x$ ou $y = |B|\cos\, x$.

Vamos construir o gráfico de $f(x) = \cos\, x$ e $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, da mesma forma feito com os gráficos anteriores, usando agora duas colunas auxiliares, uma para $\cos\, x$ e outra para $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ na Tabela 4.

Tabela 4 – Alguns valores de $f(x) = \cos\, x$ e $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

x	$\cos\, x$	$x + \frac{\pi}{2}$	$\cos(x + \frac{\pi}{2})$
0	1	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	π	-1
π	1	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	2π	1
2π	1	$\frac{5\pi}{2}$	0

Figura 20 – Gráfico de $f(x) = \cos\, x$ e $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe, na Figura 20, que o domínio, imagem, período e amplitude de $h(x)$ não se alteram em relação a $f(x)$, porém o gráfico de $h(x)$ translada $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

De uma forma geral, os gráficos das funções trigonométricas do tipo $y = \text{sen}(x + D)$ e $y = \cos(x + D)$, sofrem um translação em relação ao gráfico fundamental, da seguinte maneira:

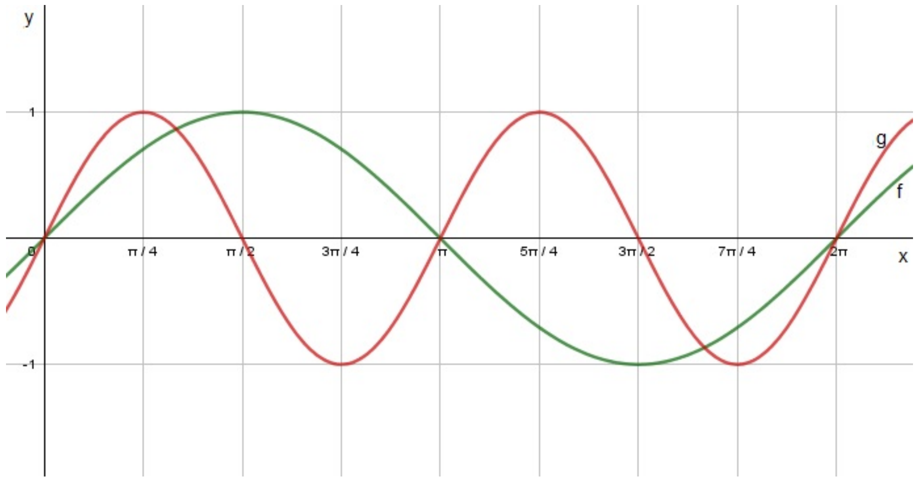
- Se $D > 0$ a translação é para a esquerda;
- Se $D < 0$ a translação é para a direita.

Por último, vamos construir o gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $h(x) = \text{sen}(2x)$, da mesma forma feito com os gráficos anteriores, usando uma coluna auxiliar, com $2x$, na Tabela 5, como já construímos o gráfico de sen x, não há necessidade de uma coluna para o mesmo. Aqui vamos escolher valores para x, de forma a obtermos imagens iguais a 0, 1, 0 e -1, afim de facilitar a construção do gráfico.

Tabela 5 – Alguns valores de $h(x) = \text{sen}(2x)$

x	$2x$	$\text{sen}(2x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

Figura 21 – Comparação do gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $h(x) = \text{sen}(2x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe na Figura 21, que o domínio, imagem e a amplitude de $h(x)$ não se alteram em relação a $f(x)$, porém o gráfico de $h(x)$ sofreu uma redução no seu período de 2π para π.

De uma forma geral, os gráficos das funções trigonométricas do tipo $y = \text{sen}(Cx)$ e $y = \cos(Dx)$, sofrem uma alteração em seu período em relação ao gráfico fundamental, de $\dfrac{2\pi}{|C|}$. Já os gráficos do tipo $y = \text{tg}(Cx)$, sofrem uma alteração em seu período em relação ao gráfico fundamental, de $\dfrac{\pi}{|C|}$.

2.2 Recursos Tecnológicos

Nesta seção apresentaremos o software GeoGebra, que foi escolhido para auxiliar nas atividades de aprendizagem de funções trigonométricas neste trabalho.

De acordo com (PASINATO; VOSGERAU, 2011) o professor pode estar em um dos seis estágios de apropriação tecnológica. São eles:

- Estágio 0: **Não utilização**. O professor não faz uso das tecnologias digitais nas suas aulas.
- Estágio 1: **Familiarização**. Começa a ter contato com as tecnologias, porém não tem experiência e não se interessa em utilizá-las nas suas aulas.
- Estágio 2: **Conscientização**. É consciente da importância do uso das tecnologias e tem noção do uso do computador e de alguns softwares, tendo passado a utilizá-los para complementar suas aulas.
- Estágio 3: **Implementação**. Passa a pensar na aprendizagem utilizando um meio tecnológico. Sabe utilizar a tecno-

logia e auxilia colegas e estudantes.

- Estagio 4: **Integração**. Utiliza a tecnologia e a integra ao currículo para desenvolvimento do processo de ensino e para a aprendizagem dos estudantes. Seu plano de ensino prevê acesso dos estudantes ao computador para dar continuidade ao trabalho pedagógico fora da sala de aula.
- Estágio 5: **Evolução**. A tecnologia já se encontra plenamente integrada ao planejamento do professor, que consegue, de forma interdisciplinar, articular os conteúdos curriculares ao contexto social dos estudantes, utilizando a tecnologia como um recurso para a produção do conhecimento.

Nos dias atuais é essencial que o professor esteja entre os estágios 4 e 5, para que consiga desenvolver de forma significativa e atraente os conteúdos do currículo. Por isso, em específico, mostraremos como construir a função

$$g(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$$

e como alterar seus parâmetros a, b, c e d, usando o *software* GeoGebra.

2.2.1 O software GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e tornou-se um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.(GEOGEBRA, 2020).

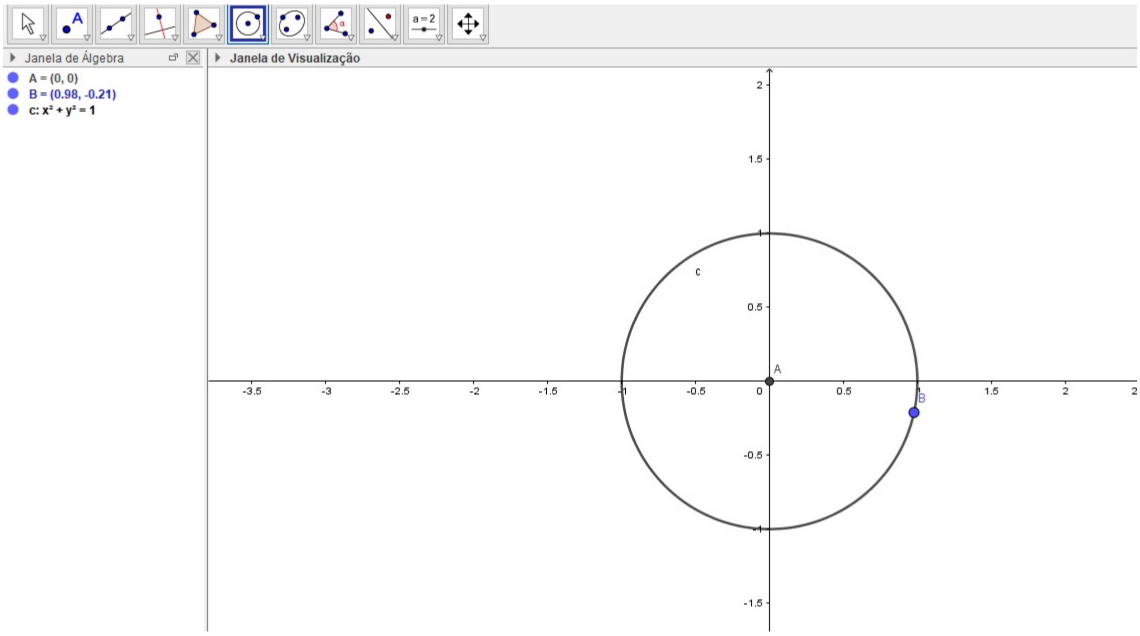
Por esses motivos, neste trabalho optou-se por usar esse *software* como ferramenta de ensino para aprendizagem de funções trigonométricas.

2.2.2 Como construir uma função seno usando o GeoGebra

Vamos construir um gráfico que vincula o movimento de um ponto no ciclo trigonométrico ao movimento de um ponto no gráfico da função trigonométrica dentro do intervalo de $[0, 2\pi]$. A seguir, temos o passo a passo:

1. Com GeoGebra aberto, clique na ferramenta "círculo dado centro e ponto", depois clique na origem do plano cartesiano e arraste o ponteiro do mouse até a medida 1.Veja como fica na Figura 22.

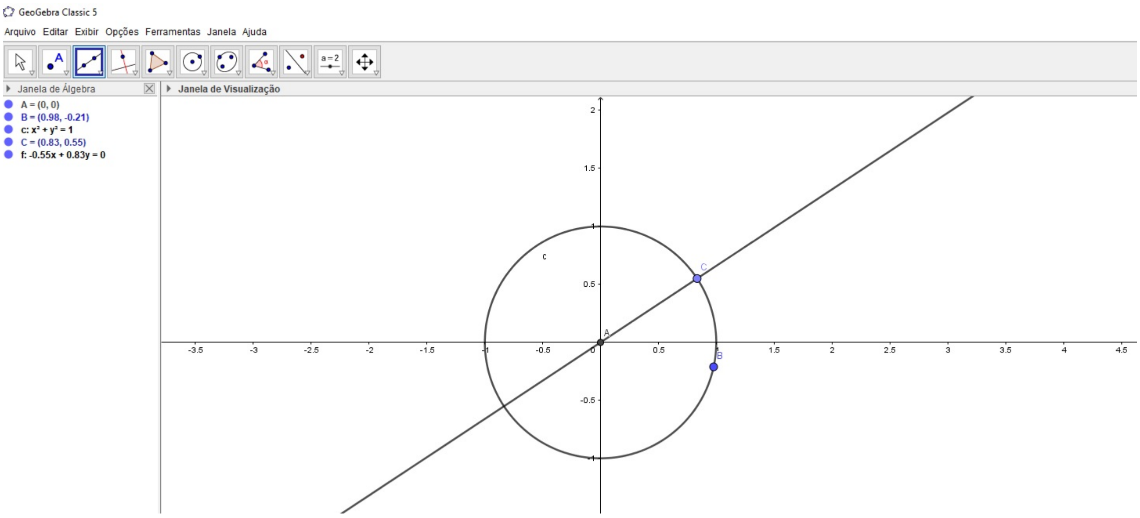
Figura 22 – Círculo feito com o Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Clique na ferramenta "reta definida por dois pontos", depois clique no centro e na circunferência. Veja como fica na Figura 23.

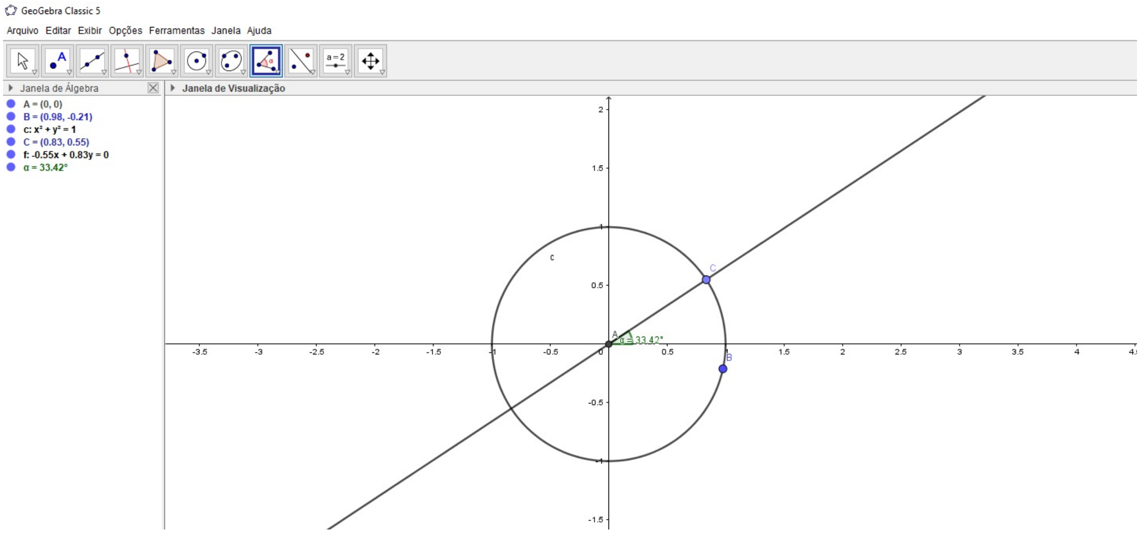
Figura 23 – Círculo e reta feitos com o Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Clique na ferramenta "ângulo", depois clique no eixo x e na reta criada no item 2. Veja como fica na Figura 24.

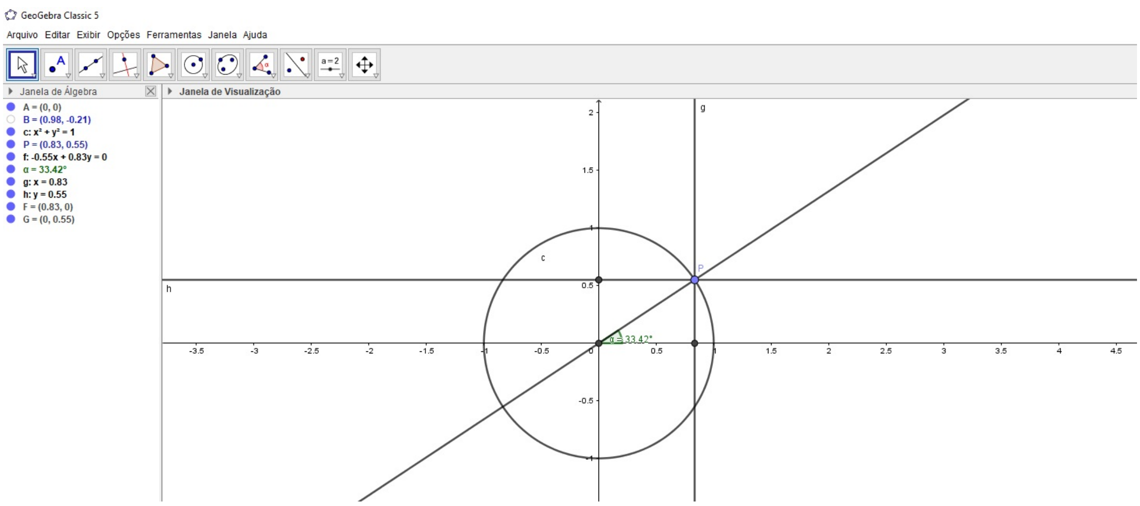
Figura 24 – Ângulo feito com o Geogebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Clique na ferramenta "reta perpendicular", depois clique no ponto de intersecção da reta criada no item 2 e logo após no eixo x. Repita o processo com o eixo y. Veja como fica na Figura 25.

Figura 25 – Reta perpendicular feita com o GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

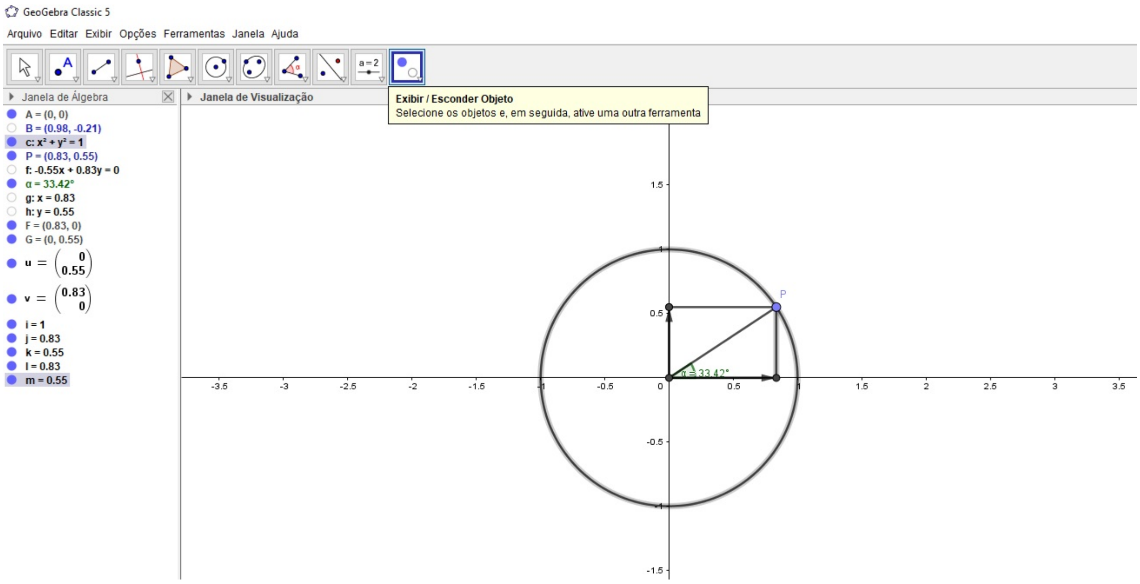
5. Clique na ferramenta "intersecção de dois objetos", depois clique em todas as retas traçadas, na circunferência e nos eixo.

6. Clique na ferramenta "vetor definido por dois pontos", em seguida clique no centro e no ponto de intersecção da reta perpendicular com a ordenada. Faça o mesmo com o ponto de intersecção da perpendicular.

7. Clique na ferramenta "segmento definido por dois pontos", depois clique no centro e na intersecção com a circunferência.

8. Clique na ferramenta "exibir/esconder objetos", depois em todas as restas construídas e em seguida na ferramenta "mover". Veja como fica na Figura 26.

Figura 26 – Segmentos perpendiculares aos eixos feitos com o GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

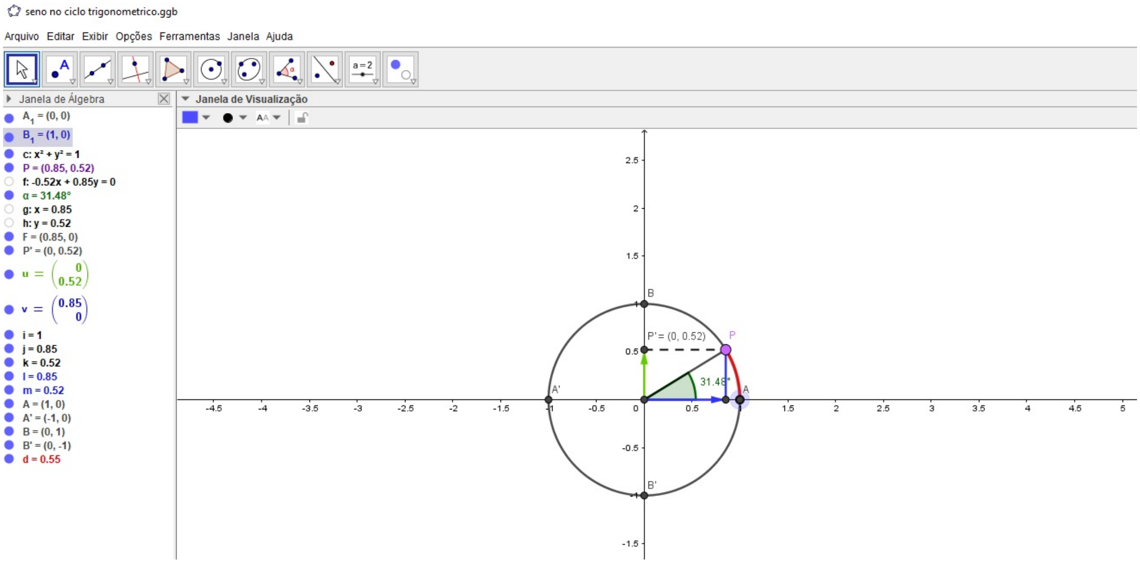
9. Clique na ferramenta "arco circular dado centro e dois pontos", depois clique no centro, ponto de intersecção com a circunferência e ponto de intersecção da circunferência com a abscissa.

10. Devemos dar um destaque ao arco, aos vetores e aos segmentos perpendiculares aos eixos. Para isso, clique com o botão direito em cada elemento e clique em propriedades, nesse menu é possível alterar a cor, espessura, tipo de linha. Veja como fica na Figura 27.

11. Digite no campo entrada $p(x) = \text{sen}\, x$. Veja como fica na Figura 28.

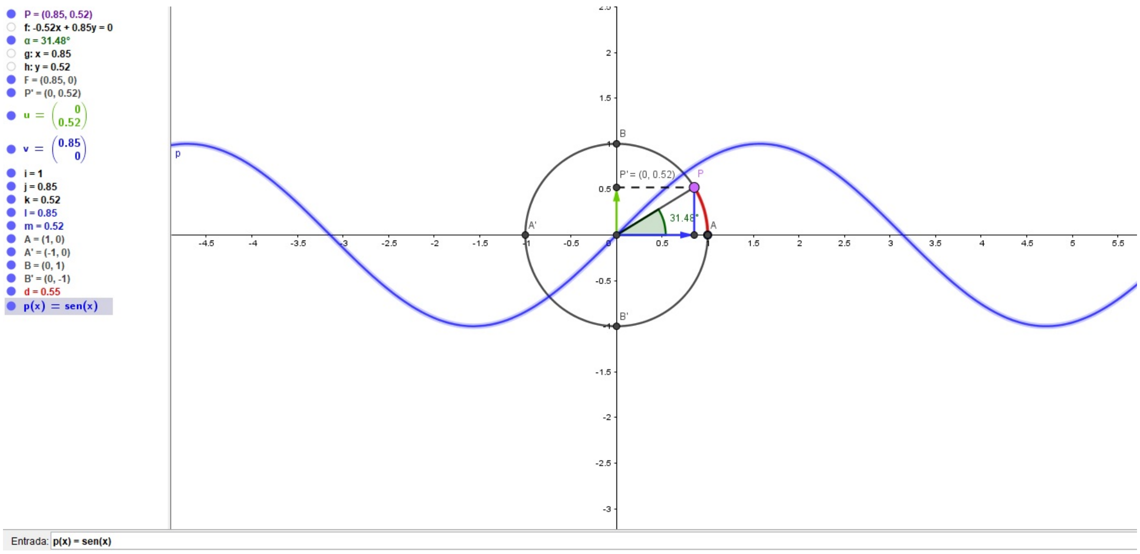
12. Vamos vincular um ponto ao gráfico de $p(x) = \text{sen}\, x$. Para isso crie um ponto clicando na ferramenta "ponto", dê dois cliques em cima desse ponto, altere as coordenadas a para $(\alpha, \text{sen}(\alpha))$, em seguida clique no ponto com o botão direito do mouse e em exibir rastro. Veja como fica na Figura 29.

Figura 27 – Destaque colorido: arco, vetores e segmentos perpendiculares aos eixos.



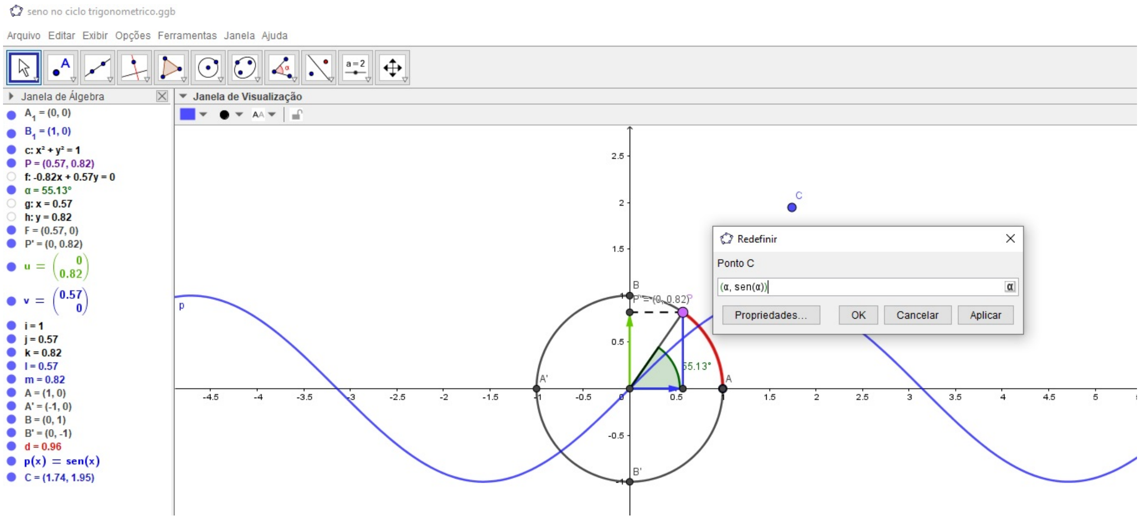
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Acrescentando a função $p(x) = \text{sen}\, x$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

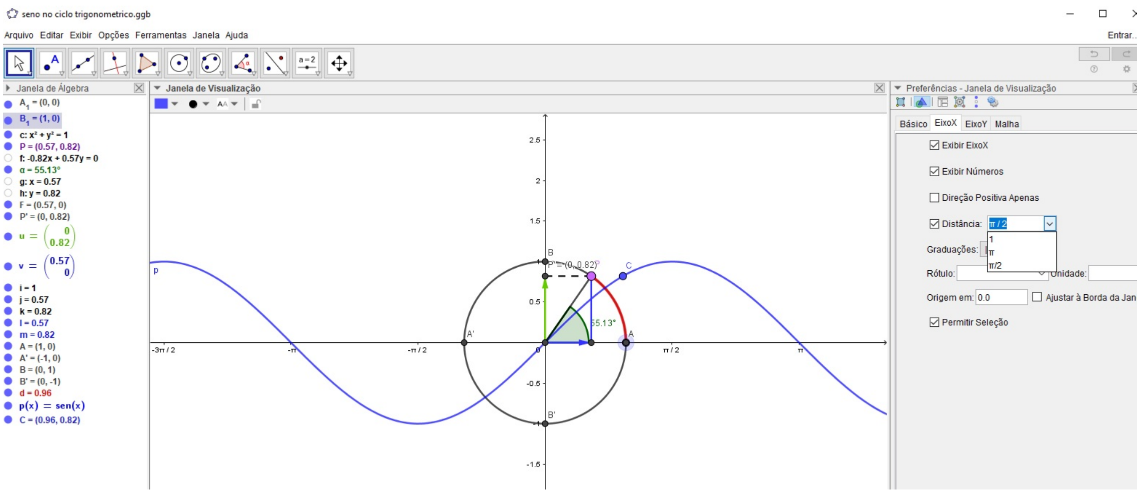
Figura 29 – Acrescentando o ponto $(\alpha, \mathrm{sen}(\alpha))$.



Fonte: elaborado pelo autor.

13. Altere a graduação do eixo das abscissas clicando com o botão direito em propriedades, clique em eixo x, selecione distância. Veja como fica na Figura 30.

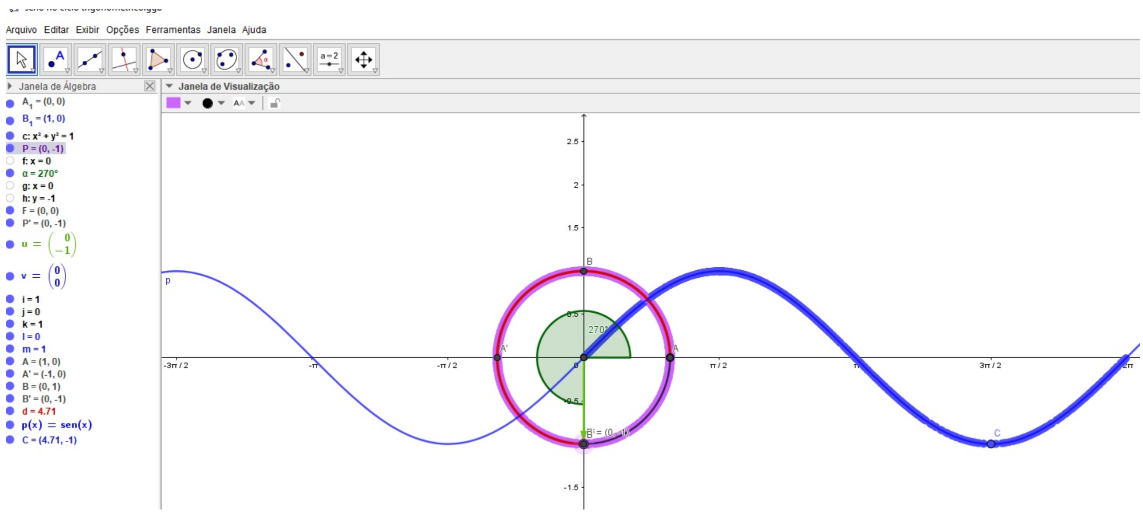
Figura 30 – Alterando a graduação do eixo das abscissas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

14. Por último deslize o ponto P pela circunferência. Veja como fica na Figura 31.

Figura 31 – Deslizando o ponto P pela circunferência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para fazer a função cosseno repita os passos 11 e 12 trocando sen por cos.

2.2.3 Como construir a função seno com todos seus parâmetros e botões deslizantes usando o GeoGebra

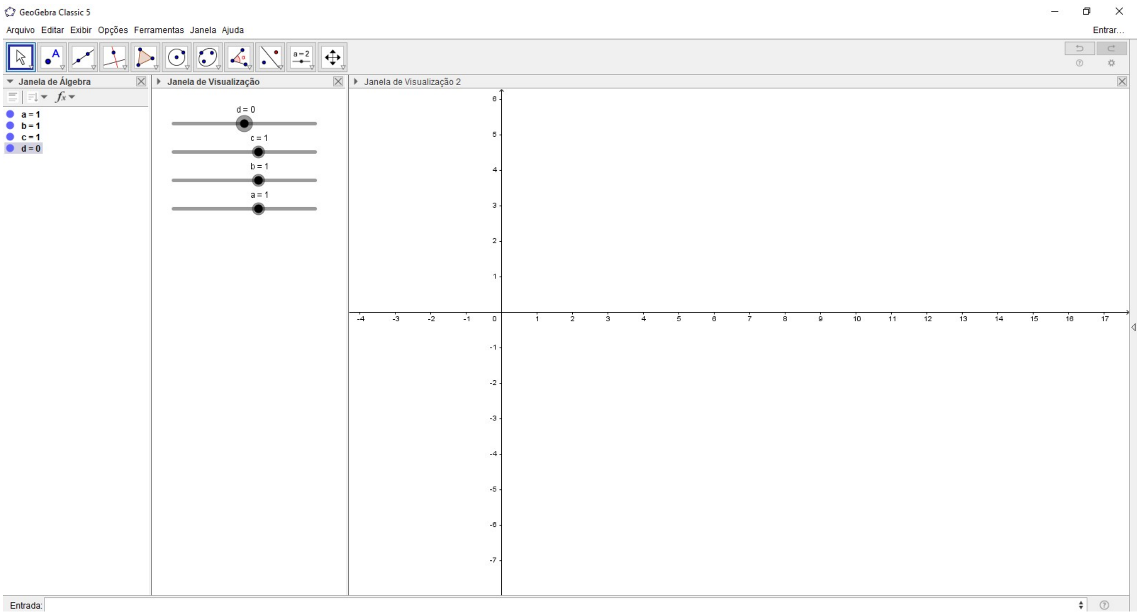
Vamos construir uma apresentação da função seno com todos os seus parâmetros, com botões deslizantes, isto é, conforme mudamos o valor de algum parâmetro, o gráfico se movimenta para que o aluno veja, de forma dinâmica, o efeito que cada parâmetro causa no gráfico das funções. Para isso siga o passo a passo.

1. Com o GeoGebra aberto clique com o botão direito do mouse em qualquer lugar da tela e clique em malha e eixo para esconder ambos.

2. Na caixa de entrada digite $a = 0$, aperte a tecla enter do teclado. Repita o processo para $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. Esses serão nossos parâmetros. Clique com o botão direito do mouse em cada um desses parâmetros e clique em exibir objetos. Feito isso o GeoGebra cria quatro controles de botões deslizantes.

3. Vamos precisar de uma nova janela para essa construção. Para isso, clique em exibir e em seguida em janela de visualização 2, dimensione a janela 2, posicionando o mouse sobre a linha que separa as janelas. Clique e arraste para a esquerda. Veja como fica na Figura 32.

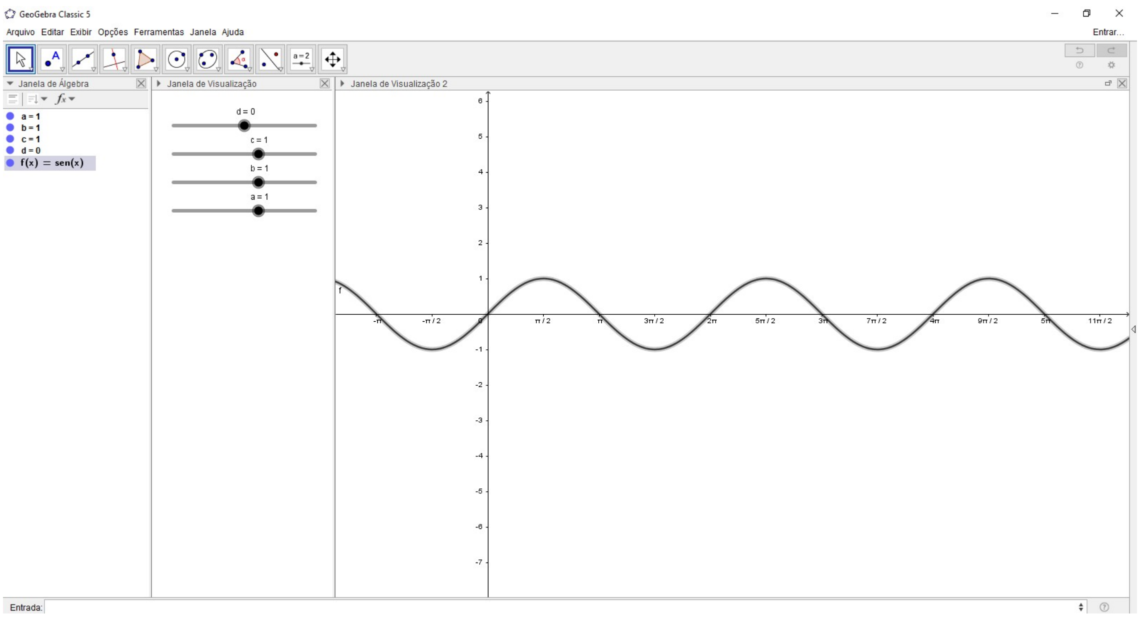
Figura 32 – Abrindo uma nova janela de visualização.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Vamos criar a função seno. Clique na janela 2 para que ela fique ativa e digite na caixa de entrada $f(x) = \text{sen}\, x$. Veja como fica na Figura 33.

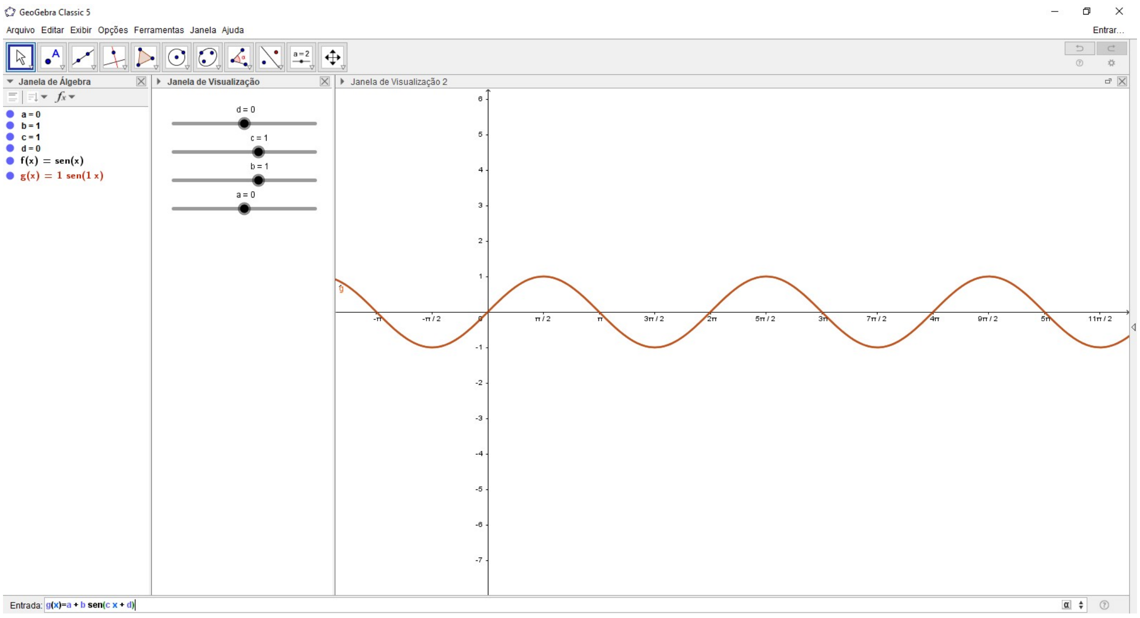
Figura 33 – Plotando a função $f(x) = \text{sen} x$ no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor

5. Clique na janela 2 para que ela fique ativa e digite na caixa de entrada $g(x) = a + b * sen(c * x + d)$, com $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$. Altere a cor dessa função, clicando com o botão direito e logo após em propriedades. Veja como fica na Figura 34.

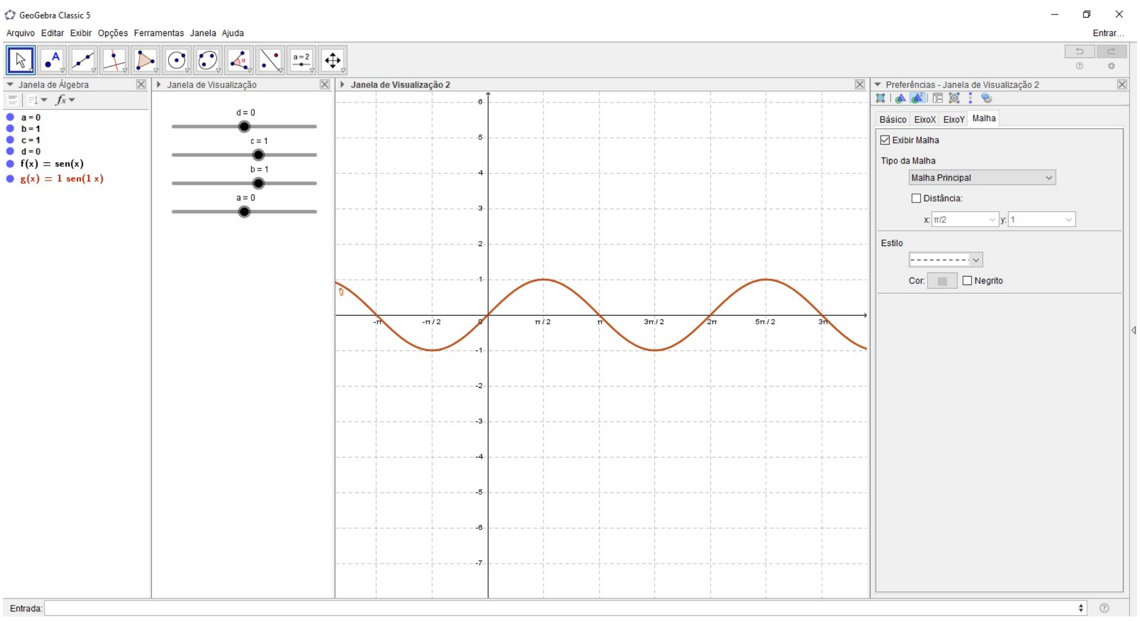
Figura 34 – Acrescentando a função g.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6. Vamos exibir a malha para melhorar a visualização. Para isso, clique em qualquer lugar da janela 2 com o botão direito do mouse e logo em seguida em janela de visualização, clique na guia malha e altere da forma que preferir. Veja como fica na Figura 35.

Figura 35 – Exibindo a malha para melhor visualização.

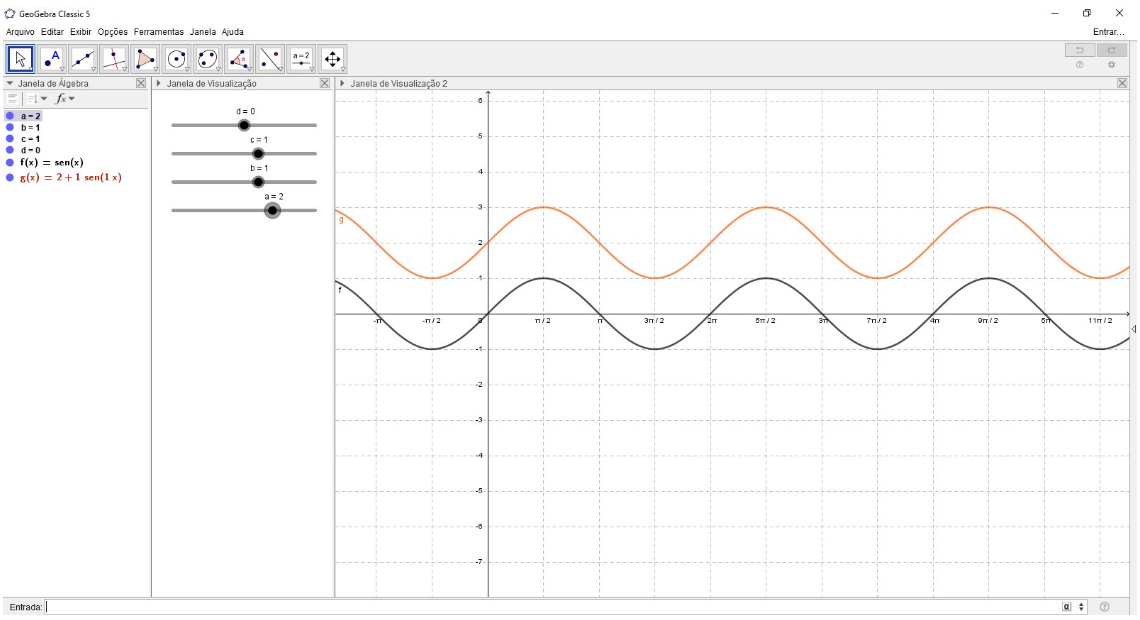


Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, para movimentar a função $g(x)$, clique em um dos botões deslizantes e movimente para onde desejar.

Na Figura 36, moveu-se o parâmetro a de $a = 0$ para $a = 2$. Note que a função g (em laranja) teve seu gráfico deslocado para cima em duas unidades.

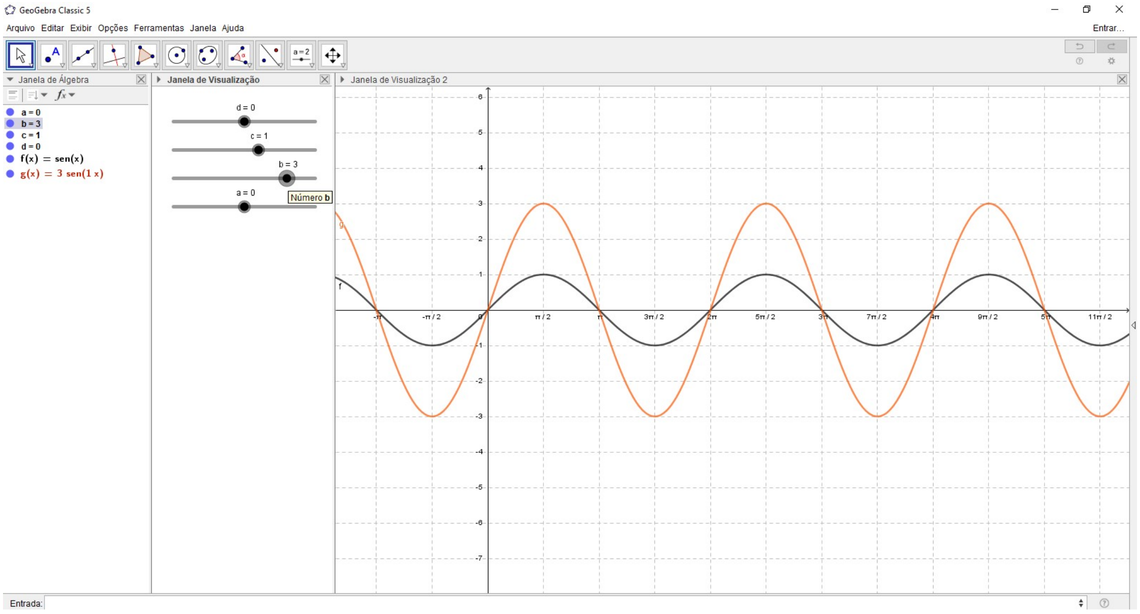
Figura 36 – Movendo o parâmetro a de $a = 0$ para $a = 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

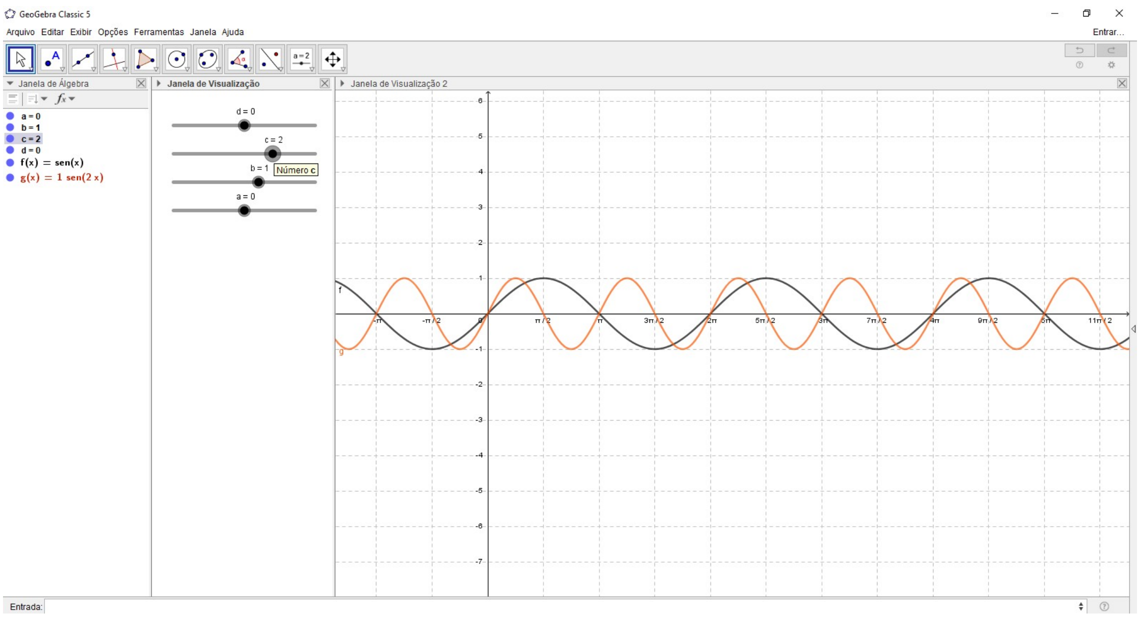
Na Figura 37, o parâmetro b foi alterado de $b = 1$ para $b = 3$, o que expandiu o gráfico da função g verticalmente por um fator de 3. Já na Figura 38, o parâmetro c foi alterado de $c = 1$ para $c = 2$, o que comprimiu o gráfico da função g horizontalmente por um fator de 2. Por fim, na Figura 39, moveu-se o o parâmetro d de $d = 0$ para $d = 1$ e o gráfico de g foi deslocado em uma unidade para a esquerda.

Figura 37 – Movendo o parâmetro b de $b = 1$ para $b = 3$.



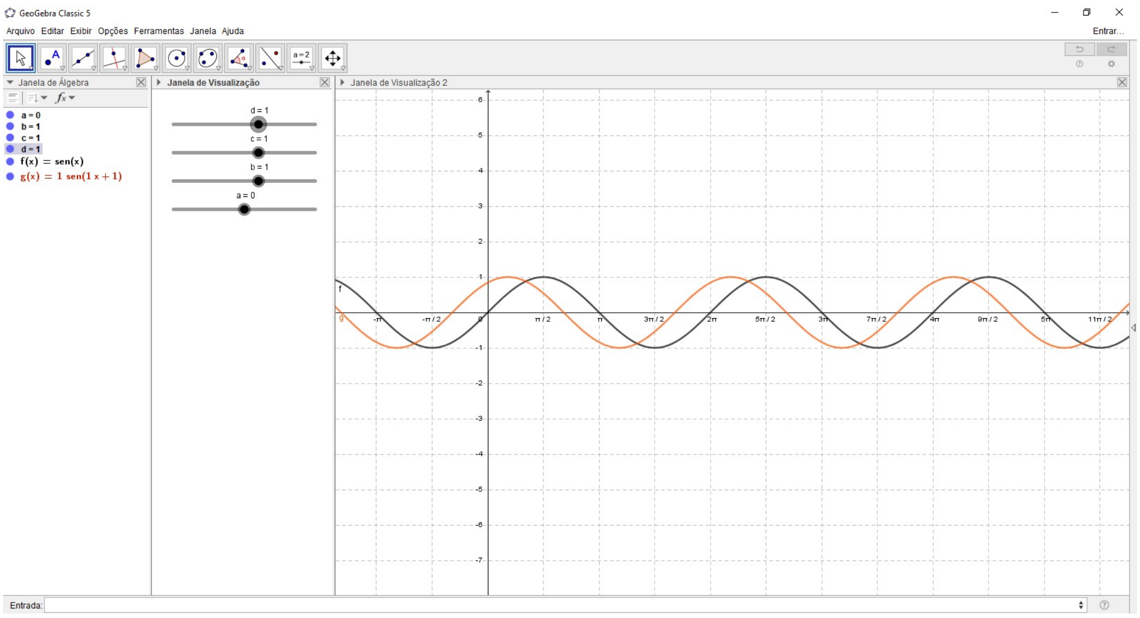
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Movendo o parâmetro c de $c = 1$ para $c = 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Movendo o parâmetro d de $d = 0$ para $d = 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Modelagem Matemática

Nesta seção vamos reforçar a ideia de que a modelagem matemática é capaz de tornar o ensino de matemática significante para os alunos, falando de sua importância no processo de ensino/aprendizagem. Além, claro, de definir o termo modelagem matemática.

A modelagem matemática, utilizada como estratégia de ensino, faz com que o aluno desenvolva habilidades que o possibilite construir, analisar, criar e estabelecer relações entre a matemática teórica e sua vivência, de forma significativa. Por isso, é interessante que os professores de matemática utilizem essa ferramenta em suas aulas, trazendo situações desafiadoras e convidadtivas para os alunos.

Mas o que é modelagem matemática? Segundo Bassanezi "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2013).

De acordo com (GALBRAITH; CLATWORTHY, 1990), a modelagem matemática é definida como a implementação de matemática na resolução de problemas não estruturados em situações da vida real. Nessas modelagens, as abordagens matemáticas são usadas para encontrar soluções relacionadas a problemas da vida real. O problema da vida real é transformado em um problema matemático e resolvido usando técnicas matemáticas.

Um dos objetivos do ensino da matemática é oferecer aos alunos a habilidade de raciocínio matemático. Essa habilidade é importante para que os alunos interpretem as situações e encontrem soluções em uma situação problema. Como a modelagem matemática transforma uma situação da vida real em problema por meio de um modelo matemático, é capaz de fazer o aluno desenvolver a habilidade supracitada.

A modelagem matemática é uma ferramenta capaz de incentivar os alunos a desenvolverem interesse pelo estudo da matemática, já que traz um pouco do mundo real para a matemática, proporcionando assim, uma aprendizagem significativa. Como dizem (BIEMBENGUT; HEIN, 2005), "a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir" e (BASSANEZI, 2013) diz que "no setor educacional, aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de explicações".

(ALMEIDA; DIAS, 2004), dizem: "Não é mais suficiente o aluno aprender Matemática e saber utilizá-la para resolver problemas cotidianos. Além desses saberes, é necessário que o aluno seja capaz de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática." Com a modelagem, a matemática se torna uma arma poderosa na formação do aluno, como pessoa, tornando-o capaz de entender o meio social em que vai viver.

Portanto, acreditamos que a modelagem matemática é o caminho para despertar o interesse em matemática nos alunos, em especial, os do Ensino Médio. E para isso, é necessário que os professores invistam nesta ferramenta para que suas aulas sejam mais significativas.

CAPÍTULO

3

MODELOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo vamos apresentar alguns modelos matemáticos envolvendo funções trigonométricas, que descrevem fenômenos periódicos. O objetivo desse capítulo é preparar os professores para enfrentarem as famosas perguntas dos alunos "para que serve isso?"ou "qual a utilidade desse conteúdo na vida real?".

3.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

Vamos começar essa seção com um texto do Livro Fundamentos de Física, volume 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica, de Halliday - Resnick (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009). Pois esse texto nos dá argumentos sobre a importância das funções trigonométricas, visto que para se entender a teoria de oscilações é necessário ter conhecimentos sobre o comportamento dessas funções.

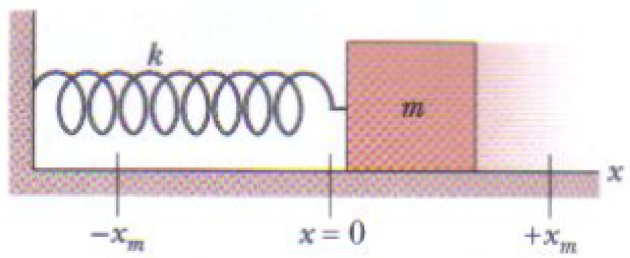
Nosso mundo está repleto de oscilações, nas quais os objetos se movem repetidamente de um lado para outro. Muitas são simplesmente curiosas ou desagradáveis, mas outras podem ser economicamente importantes ou perigosas. Eis alguns exemplos: Quando um taco rebate uma bola de beisebol, o taco pode sofrer uma oscilação suficiente para machucar a mão do batedor ou mesmo se partir em dois. Quando o vento fustiga uma linha de transmissão de energia elétrica, a linha às vezes oscila ("galopa", no jargão dos engenheiros elétricos) com tanta intensidade que pode se romper, interrompendo o fornecimento de energia elétrica a toda uma região. Nos aviões, a turbulência do ar que passa pelas asas faz com que elas oscilem, causando fadiga no metal, o que pode fazer com que as asas se quebrem. Quando um trem faz uma

> *curva, as rodas oscilam horizontalmente quando são forçadas a mudar de direção, produzindo um som peculiar. Quando acontece um terremoto nas vizinhanças de uma cidade os edifícios sofrem oscilações tão intensas que podem desmoronar. Quando uma flecha é lançada de um arco as penas da extremidade conseguem passar pelo arco sem se chocar com ele porque a flecha oscila. Quando se deixa cair uma moeda em um prato metálico a moeda oscila de uma forma tão característica que é possível saber o valor da moeda pelo som produzido. Quando um caubói de rodeio monta um touro seu corpo oscila em várias direções enquanto o touro gira e corcoveia (ao menos, é o que o caubói procura fazer). O estudo e o controle de oscilações são dois objetivos importantes da física e da engenharia.*(WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009, P.87)

Segundo (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009) movimento harmônico é todo movimento que se repete em intervalos regulares, também chamado de movimento periódico.

Vamos discutir como uma massa ligada à extremidade de uma mola se move em função do tempo, o que chamaremos de Movimento Harmônico Simples (MHS). Para isso vejamos a Figura 40.

Figura 40 – Oscilador harmônico simples linear.



Fonte:(WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009).

A Figura 40 representa um bloco de massa m ligado à extremidade de uma mola. O eixo x representa a posição do bloco movendo-se ligado à mola, sem considerar as forças de atrito. Em $x = 0$, temos que a mola está em seu estado natural. Se esticarmos a mola até a distância $+x_m$ a força que a mola exerce sobre o bloco é chamada de força de restituição da mola e é dada pela equação

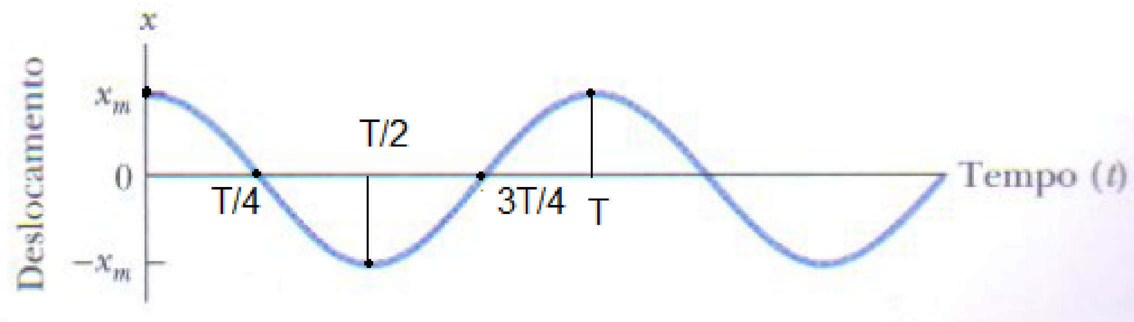
$$F = -k \cdot x, \tag{3.1}$$

em que k é uma constante determinada pelas características da mola e x é o quanto a mola foi deformada.

Se segurarmos um bloco massa m na posição $+x_m$, com a mola esticada teremos o máximo de energia potencial elástica. Ao liberarmos esse bloco de massa m, a força de restituição fará o bloco se mover da direita para a esquerda e ao chegar no ponto zero, terá o máximo da energia cinética, que seria o ponto equilíbrio da mola. Mas, devido à quantidade de movimento do bloco, a mola continuará se comprimindo até chegar na posição $-x_m$, transformando toda a energia cinética em energia potencial elástica.

Recomeçando o processo, a mola vai empurrar o bloco novamente até a posição x_m, lembrando que estamos em um sistema sem atrito. Vamos estudar como que a posição x da massa varia em função do tempo t. Para isso vejamos a Figura 41.

Figura 41 – Gráfico da posição x da massa em função do tempo t.



Fonte:(WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009) modificado pelo autor

.

Neste gráfico, o eixo x representa o deslocamento do bloco de massa m e o eixo t representa o tempo que o bloco leva para se movimentar entre a posição máxima, representada por x_m, e a mínima representada por $-x_m$, assim, temos uma função $x(t)$.

O gráfico se inicia em x_m, pois é quando o tempo é igual a zero, ou seja, no início do processo. O período que indica o tempo que o bloco leva para ir da posição x_m até a posição $-x_m$ e voltar para a posição x_m, está definido pela letra T. Nesse caso o bloco chega a posição $-x_m$ na metade do tempo T, representado no gráfico por $T/2$. Da mesma forma para chegar à posição 0, a partir de $-x_m$ leva metade do tempo $T/2$, representado no gráfico por $T/4$. Analogamente, $3T/4$, representa a metade do tempo que o bloco leva para chegar ao ponto 0, partindo de x_m.

A curva que mais se encaixa nessa situação é a desenhada no gráfico da Figura 41, pois quando o bloco está em x_m sua velocidade é zero e acelera até chegar à sua máxima velocidade e depois desacelera até chegar à velocidade zero novamente na posição $-x_m$, e isso se repete periodicamente. Essa curva lembra a função cosseno, pois em $t = 0$ ela assume seu valor máximo.

Assim, a lei de formação da função que modela esse gráfico é da forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t) \tag{3.2}$$

onde ω é a frequência angular do MHS. Agora precisamos encontrar quais são os parâmetros que descrevem corretamente a situação.

Para isso, vamos lembrar que a força elástica é dada por

$$F = -kx \tag{3.3}$$

Vamos reescrevê-la lembrando que $F = ma$, ou seja,

$$ma = -kx(t) \tag{3.4}$$

onde m é a massa do bloco preso à mola e a é a aceleração.

Precisamos de um pouco do conhecimento de cálculo para estudar a aceleração. Para isso vamos primeiro lembrar o que a velocidade v é a taxa de variação de x em relação ao tempo t, ou seja,

$$v(t) = x'(t) \tag{3.5}$$

A aceleração a é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, e assim, temos

$$a(t) = v'(t), \tag{3.6}$$

ou seja, a aceleração é a derivada de segunda ordem de $x(t)$,

$$a(t) = x''(t). \tag{3.7}$$

Voltando a equação (3.4) e substituindo a da equação (3.7) temos a seguinte equação:

$$mx''(t) = -kx(t) \tag{3.8}$$

A equação resultante é uma equação diferencial, portanto o que estamos procurando como solução não é um valor numérico e sim funções que satisfazem a equação (3.8), ou sejam, a incógnita é uma família de funções.

Conforme mencionamos anteriormente, supondo que a equação (3.2), dada por $x(t) = x_m \cos(\omega t)$, modela o gráfico apresentado na Figura 41, vamos verificar quais as condições para que essa equação seja uma solução da equação (3.8).

Para derivar a equação (3.2), primeiramente observamos que trata-se de uma função composta. Portanto, devemos usar a Regra da Cadeia e derivar o argumento ωt, cuja derivada é igual a ω, pois t é a variável independente. Agora, derivando $\cos(\omega t)$, obtemos $-\operatorname{sen}(\omega t)$. Assim, a derivada fica:

$$x'(t) = x_m \omega(-\operatorname{sen}(\omega t)) \tag{3.9}$$

Reescrevendo temos:

$$x'(t) = -x_m \omega \operatorname{sen}(\omega t) \tag{3.10}$$

Vamos derivar $x'(t)$ para obter a derivada de segunda ordem de $x(t)$. Temos novamente a derivada de uma função composta, portando resolvemos de forma análoga ao que fizemos anteriormente, obtendo

$$x''(t) = -x_m \omega \omega \cos(\omega t), \tag{3.11}$$

reescrevendo, temos

$$x''(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t). \tag{3.12}$$

Vamos agora substituir as equações (3.2) e (3.12) na equação (3.8). Assim, obtemos

$$m(-x_m \omega^2 \cos(\omega t)) = -k x_m \cos(\omega t) \tag{3.13}$$

Dividindo ambos os lados por $-x_m$ temos

$$m\omega^2 \cos(\omega t) = k \cos(\omega t) \tag{3.14}$$

Essa equação é verdadeira para

$$k = m\omega^2. \tag{3.15}$$

Isolando ω, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.16}$$

Portanto, concluímos que a função $x(t)$ que satisfaz a equação (3.8) é dada por

$$x(t) = x_m \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t). \tag{3.17}$$

Esta função trigonométrica descreve o movimento harmônico simples e ele só oscila para frente e para trás. Podemos desenvolver um pouco mais essa teoria e encontrar qual o período T, ou seja, o tempo que se leva para completar um ciclo.

Para isso devemos pensar quais são os pontos em que cosseno é igual a 1, ou seja, os ponto em que cosseno atinge seu valor de máximo. Observando a Figura 41 e usando o fato de que $\cos(2\pi) = 1$, podemos pensar que $x(T) = x_m$ quando

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi. \tag{3.18}$$

Isolando T, temos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.19}$$

Vejamos, agora um exemplo sobre MHS extraído do livro (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009).

Exemplo 3.1. (WALKER; HALLIDAY; RESNICK, 2009) Um bloco cuja massa m é 680g está preso a uma mola cuja constante elástica k é 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância $x = 11$ cm a partir de uma posição de equilíbrio em $x = 0$ e liberado a partir do repouso no instante $t = 0$.

a) Quais são a frequência angular, a frequência e o período do movimento resultante?

Solução: O sistema bloco-mola constitui um oscilador harmônico simples linear, com o bloco executando um movimento harmônico simples, então basta aplicar a Eq. 3.16 para encontrar a frequência angular, ou seja,

$$\omega = \sqrt{\frac{65\ N/m}{0,68\ Kg}} \tag{3.20}$$

$$\omega = 9,78 Rad/s \tag{3.21}$$

Para encontrar a frequência em Hertz, basta dividir a frequência angular ω pelo período da função trigonométrica que descreve o MHS, ou seja, 2π. Então, tem-se

$$f = \frac{9,78\ Rad/s}{2\pi\ Rad} \tag{3.22}$$

$$f = 1,56 Hz. \tag{3.23}$$

Para encontrar o período, basta tomar o inverso da frequência, ou seja,

$$T = \frac{1}{f} \tag{3.24}$$

$$T = \frac{1}{1,56Hz} \tag{3.25}$$

$$T = 0,64s \tag{3.26}$$

b) Qual é a amplitude das oscilações?

Solução: Na ausência de atrito a energia mecânica do sistema massa-mola se conserva. Assim, como o bloco é liberado a 11 cm da posição de equilíbrio, com energia cinética nula e o máximo de energia potencial elástica, tem-se que o bloco terá energia cinética nula, sempre que estiver novamente a 11 cm da posição de equilíbrio. Isso significa que jamais se afastará mais do que 11 cm da posição de equilíbrio. Portanto seu deslocamento máximo será 11 cm, ou seja,

$$x_m = 11\ cm. \tag{3.27}$$

c) Qual é a velocidade máxima v_m do bloco e onde se encontra o bloco quando tem essa velocidade?

Solução: A velocidade máxima v_m é a amplitude da velocidade ωx_m, então basta fazer:

$$v_m = \omega x_m \tag{3.28}$$

$$v_m = (9,78rad/s) \cdot (0,11m) \tag{3.29}$$

$$v_m \approx 1,1m/s \tag{3.30}$$

A velocidade máxima é observada quando o bloco esta passando pela origem.

d) Qual é o módulo a_m de aceleração máxima do bloco?

Solução: O módulo a_m de aceleração é a amplitude da aceleração ω^2.

$$a_m = \omega^2 \cdot x_m \tag{3.31}$$

$$a_m = (9,78rad/s)^2 \cdot (0,11m) \tag{3.32}$$

$$a_m \approx 11m/s^2 \tag{3.33}$$

e) Qual é a constante de fase ϕ do movimento

Solução: a equação $x(t) = x_m cos(\omega t + \phi)$ fornece o deslocamento do bloco em função do tempo. Sabemos que no instante $t = 0$ o bloco está em $x = x_m$. Substituindo essa condições iniciais, como são chamadas e cancelando x_m, obtemos

$$1 = \cos\phi \tag{3.34}$$

Resolvendo a equação temos que:

$$\phi = 0\ rad \tag{3.35}$$

e) Qual é a função deslocamento $x(t)$ do sistema bloco-mola?

Solução: A forma geral da função $x(t)$ é dada pela equação $x(t) = x_m cos(\omega t + \phi)$, substituindo as grandezas conhecidas, temos:

$$x(t) = x_m cos(\omega t + \phi) \tag{3.36}$$

$$x(t) = (0,11\ m)cos((9,8\ rad/s)t + 0) \tag{3.37}$$

$$x(t) = 0,11cos(9,8t) \tag{3.38}$$

onde x está em metros e t em segundos.

3.2 As marés

Nesta seção vamos mostrar como criar um problema envolvendo as marés, a partir de um texto retirado d0 site (TABUADEMARES, 2019) que divulga os estudos das marés das praias brasileiras. O problema foi dividido em itens para facilitar o entendimento do passo a passo da criação e verificação da atividade.

Uma análise da influência da distância da Terra à Lua nas altura das marés das praias de Santos: Sábado, 24 de agosto de 2019, amanheceu em Santos às 6h23min e o pôr do Sol foi às 17h52min. Podemos observar que a primeira baixa-mar (ou maré baixa) foi às 4h40min e a seguinte baixa-mar às 17h10min. A primeira preia-mar (ou maré alta) foi às 11h19min e a seguinte preia-mar às 22h17mim. Tivemos 11 horas e 29 minutos de sol. O trânsito solar foi às 12h07min. A lua saiu pelo Leste (70°) às 0h55min e se pôs pelo Noroeste (292°) às 12h07min. A Lua foi visível por 11 horas e 12 minutos. A fase lunar era minguante e a distância Terra-Lua era de 385.932km.

A Tabela 6 reúne as informações sobre a altura das marés nos horários de baixa-mar e preia-mar:

Hora	Altura
4h40min	0,5m
11h19min	1,2m
17h10	0,4m
22h17min	1,0m

Tabela 6 – Altura das marés. Fonte https://tabuademares.com/br/so-paulo/santos

O texto acima descreve com detalhes o decorrer de um dia nas praias de Santos, com informações sobre o Sol e a Lua, dois corpos celestes que influenciam diretamente em como as marés se comportam no decorrer do dia.

Como determinar a altura da maré em relação ao tempo ao longo de um dia na praia de Santos? Vamos responder aos itens a seguir para modelar uma função matemática que nos ajude a solucionar essa questão, analisando os dados da Tabela 6.

(a) Converter as horas em decimais e dividir em intervalos de tempos iguais.

(b) Organizar os novos dados em outra tabela e plotar os novos pontos no GeoGebra.

(c) Modelar uma função que melhor descreva os pontos dessa tabela.

(d) Plotar a função no GeoGebra para confirmar se os pontos pertencem a função.

3.2.1 Horas e intervalos de tempo

Inicialmente, para resolver o item (a) devemos tomar a hora como a parte inteira e usar uma regra de três para transformar os minutos em decimais.

Por exemplo, para 4h40min temos que transformar 40 minutos em decimais, dessa forma:

Hora	Minuto
1	60
x	40

$$\frac{1}{x} = \frac{60}{40} \tag{3.39}$$

$$x = \frac{40}{60} \tag{3.40}$$

$$x = 0,666... \tag{3.41}$$

Portanto, 4h40min em decimal fica aproximadamente 4,67. Analogamente, os outros valores ficam:

$11h19min \longrightarrow 11,32$

$17h10min \longrightarrow 17,17$

$22h17min \longrightarrow 22,28$

Ainda, para dividir em intervalos de tempos iguais, vamos fazer os seguintes arredondamentos, afim de facilitar os cálculos:

$4,67 \longrightarrow 4,70$

$11,32 \longrightarrow 11,30$

$17,17 \longrightarrow 17,20$

$22,28 \longrightarrow 22,30$

Em seguida devemos calcular o módulo da diferença entre a maior hora e a menor hora e dividir por três para obter um intervalo de tempo igual entre cada horário:

$$\frac{|22,3-4,7|}{3} \approx 6 \tag{3.42}$$

Assim, trabalharemos com intervalos de 6 horas entre uma baixa-mar e uma preia-mar e vice-versa. Ou seja, o intervalo entre entre duas baixa-mares ou entre duas preia-mares será de 12 horas.

Para a altura das marés devemos tomar a média das alturas máximas e a média das alturas mínimas, conforme segue:

Mínima

$$\frac{0,5+0,4}{2} = 0,45 \tag{3.43}$$

Máxima

$$\frac{1,2+1,0}{2} = 1,1 \tag{3.44}$$

Portanto, usaremos 0,45 m para a baixa-mar e 1,1 m para a preia-mar.

3.2.2 Nova tabela e novos pontos no GeoGebra

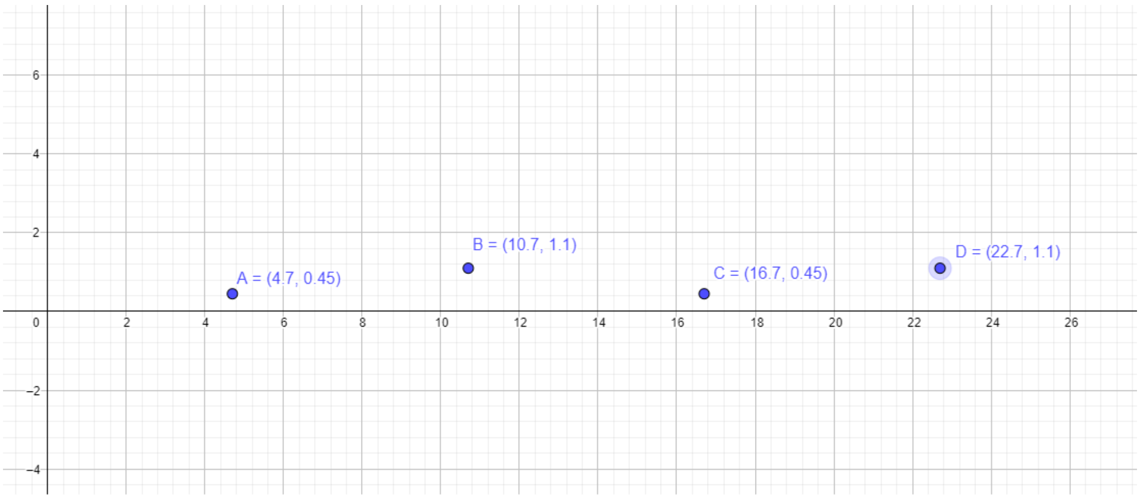
Agora, precisamos organizar as horas com um intervalo de 6 horas começando por 4,7 e organizar em uma tabela como pede o item (b).

Hora	Altura
4,7	0,45 m
10,7	1,10 m
16,7	0,45 m
22,7	1,10 m

Tabela 7 – Altura das marés em função das horas.

Vejamos como ficam os pontos no GeoGebra.

Figura 42 – Pontos da Tabela 7 da altura das marés em função das horas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Notemos, na Figura 42, que a disposição dos pontos tem o comportamento periódico, pois se considerássemos horas antes de $4,7$ e depois de $22,7$ teríamos as mesmas alturas máximas e minímas. Com isso podemos modelar uma função trigonométrica, seno ou cosseno.

3.2.3 Modelo que descreve a altura das marés na cidade de Santos-SP

Para responder os itens (c) e (d), vamos escolher usar a função seno, pois a posição dos pontos se assemelha mais com a curva senoide, no intervalo de $4,7$ a $22,7$. Vale lembrar que a função seno é dada por

$$f(x) = A + B\operatorname{sen}(Cx + D). \tag{3.45}$$

Para encontrar o parâmetro A basta calcular a média entre os pontos de máximo e mínimo.

$$A = \frac{0,45 + 1,1}{2} = 0,775 \tag{3.46}$$

O parâmetro A é também por onde passa a linha média do gráfico. Podemos usá-la para calcular o parâmetro B, sabendo que B é a amplitude do gráfico e que a amplitude é a distância da linha média até um dos extremos. Portanto, temos que:

$$B = 1,1 - 0,775 \tag{3.47}$$

$$B = 0,325 \tag{3.48}$$

Outra forma de calcular o parâmetro B é substituir os valores já conhecidos na função:

$$f(x) = 0,775 + B \cdot \text{sen}(Cx + D). \tag{3.49}$$

Fazendo $f(x) = 1,1$, a função f atinge seu máximo quando $\text{sen}(Cx + d) = 1$. Assim temos:

$$1,1 = 0,775 + B \cdot 1. \tag{3.50}$$

E obtemos o mesmo resultado encontrado anteriormente, ou seja, $B = 0,325$.

Sabemos que o parâmetro C determina o período da função, e o período é dado pela distância horizontal entre as alturas máximas, ou minímas, ou seja, um período de $16,7 - 4,7 =$ 12 horas.

Sabendo que uma função seno tem período igual a 2π, basta dividir esse período em 12 horas e obteremos o valor de C, isto é, temos

$$C = \frac{2\pi}{12} \tag{3.51}$$

$$C = \frac{\pi}{6} \tag{3.52}$$

Outra forma de encontrar o valor de C é usando a fórmula para determinar o período P de uma função trigonométrica, dada por:

$$P = \frac{2\pi}{|C|} \tag{3.53}$$

$$12 = \frac{2\pi}{C} \tag{3.54}$$

$$12\dot{C} = 2\pi \tag{3.55}$$

$$C = \frac{2\pi}{12} \tag{3.56}$$

$$C = \frac{\pi}{6} \tag{3.57}$$

Substituindo os valores de A, B e C na equação (3.45), temos a seguinte equação

$$f(x) = 0,775 + 0,325\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}x + D). \tag{3.58}$$

Para calcular o parâmetro D, escolhemos um valor arbitrário de x e aplicamos na função obtida até o momento, ou seja, na equação (3.58) e resolvemos a equação trigonométrica resultante.

Claramente vamos escolher um valor de x pertencente à Tabela 7, para facilitar os cálculos. Escolhemos $x = 10,7$, pois $f(10,7) = 1,1$. Substituindo na Equação (3.58), temos

$$1,1 = 0,775 + 0,325\,\text{sen}(\frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D). \tag{3.59}$$

$$1,1 - 0,775 = 0,325\,\text{sen}(\frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D). \tag{3.60}$$

$$0,325 = 0,325\,\text{sen}(\frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D). \tag{3.61}$$

$$\frac{0,325}{0,325} = \text{sen}(\frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D). \tag{3.62}$$

$$1 = \text{sen}(\frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D). \tag{3.63}$$

Sabemos que seno é igual a 1 quando seu argumento é igual a $\frac{\pi}{2}$. Então, o argumento da função seno que aparece na equação (3.63) deve ser igual a $\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot 10,7 + D \tag{3.64}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{10,7 \cdot \pi}{6} = D \tag{3.65}$$

$$D = \frac{3 \cdot \pi}{6} - \frac{10,7 \cdot \pi}{6} \tag{3.66}$$

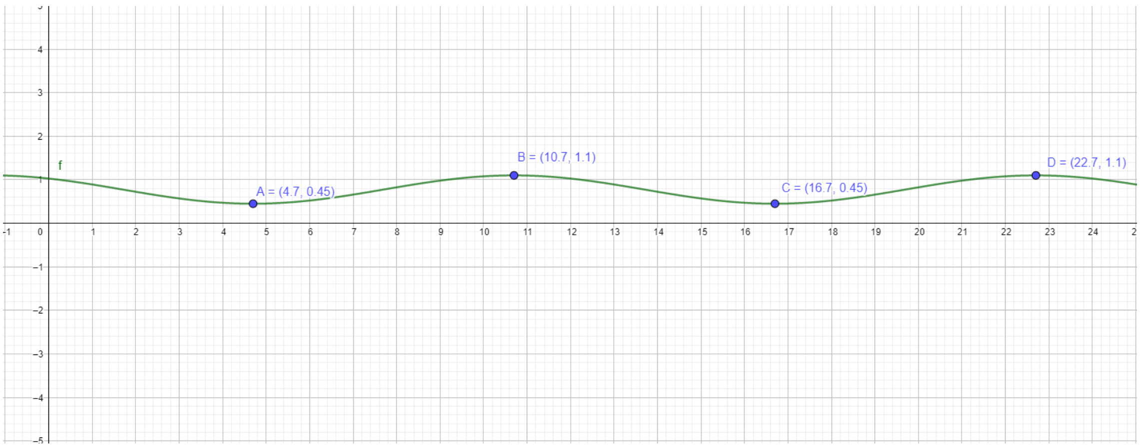
$$D = -\frac{7,7 \cdot \pi}{6} \tag{3.67}$$

Por fim, substituindo o parâmetro D na equação (3.58), a função que modela a altura das marés, em relação ao tempo, ao longo de um dia na praia de Santos é dada por

$$f(x) = 0,775 + 0,325 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{7,7\pi}{6}\right). \tag{3.68}$$

Vamos, agora, plotar a função dada na equação (3.68) no GeoGebra, para confirmar se os pontos pertencem à função. Pelo gráfico da Figura 43 vemos que a função encontrada para modelar o problema passa exatamente pelos 4 pontos que indicam as alturas das marés.

Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = 0,775 + 0,325 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{7,7\pi}{6}\right)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma ideia bastante interessante de atividade a se fazer com os alunos é desenvolver um exemplo desses de modelagem e ao final da aula levantar uma questão aos alunos: "Será que as fases da lua influenciam na altura das marés?"

E para próxima aula levar duas situações problemas análogas a esta, de uma mesma praia, só que com fases diferentes da lua, e no final plotar os gráficos no GeoGebra para discutir a questão levantada.

3.3 Pressão arterial

Nesta seção vamos utilizar um exercício retirado do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) para mostrar que as funções trigonométricas estão presentes na Medicina.

Como motivação, vejamos o texto:

> *A intensidade da pressão arterial é estabelecida no chamado centro circulatório situado numa parte do cérebro e adapta-se a cada situação através de mensagens enviadas aos centros nervosos. A pressão arterial ajusta-se através de alterações na intensidade e frequência do ritmo cardíaco (pulsações) e no diâmetro dos vasos circulatórios. Este último efeito ocorre através de músculos finíssimos situados nas paredes dos vasos sanguíneos. A pressão arterial altera-se ciclicamente no curso da atividade cardíaca. Atinge o seu valor máximo (pressão sanguínea sistólica), durante a "expulsão" do sangue (sístole) e o seu mínimo (pressão arterial diastólica), quando o coração termina o "período de repouso" (diástole). (PORTALBRASIL, 2020)*

Assim, como a pressão arterial se comporta ciclicamente podemos modelar uma função trigonométrica que descreva o comportamento da pressão em relação ao tempo, como sugere o problema a seguir do ENEM (INEP, 2017).

3.3.1 Exercício do ENEM e solução comentada

(ENEM 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo

$$P(t) = A + B\cos(Kt) \tag{3.69}$$

em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundos. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os seguintes dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

Tabela 8 – Dados da pressão arterial.

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

(A) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

(B) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

(C) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

(D) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

(E) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

Solução: Podemos resolver esse problema, sem necessariamente construir um esboço do gráfico. Para isso basta sabermos que a pressão máxima será o valor máximo que a função atingirá e a pressão miníma será o valor mínimo da função. Com isso calculamos a linha média desse gráfico, que será o valor do parâmetro A, ou seja, o quanto o gráfico transladou verticalmente. Para calcular por onde passa a linha média, calculamos a media aritmética entre os valores máximos e mínimos da função, portanto

$$A = \frac{120 + 78}{2} \tag{3.70}$$

$$A = 99 \tag{3.71}$$

Com o valor do parâmetro A conhecido, fica trivial descobrir o valor do parâmetro B. Sabendo que B é o que determina a amplitude do gráfico, basta calcular a distância da linha média a um dos extremos do gráfico.

$$B = 120 - 99 \tag{3.72}$$

$$B = 21 \tag{3.73}$$

O parâmetro K determina o período da função, ou seja, o tempo (em segundos) que demora 1 batimento do coração. Para isso vamos fazer uma regra de três usando a informação da última linha da Tabela 8.

Batimentos	Segundo
90	60
1	P

$$90P = 60 \tag{3.74}$$

$$P = \frac{60}{90} \tag{3.75}$$

$$P = \frac{2}{3} \tag{3.76}$$

Conhecido o período P podemos usar a fórmula que determina o período de uma função $P = \dfrac{2\pi}{|C|}$, fazendo $C = K$ e $P = \dfrac{2}{3}$.

$$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{K} \tag{3.77}$$

$$K = 3\pi \tag{3.78}$$

Portanto, a alternativa correta é o item (A) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

CAPÍTULO

4

ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Com o objetivo de tornar o estudo de funções trigonométricas mais interessante para os alunos, preparamos uma série de atividades com modelagem matemática que envolve a construção das funções seno e cosseno. Essa sequência didática é uma proposta para que professores do Ensino Médio possam trabalhar de forma atraente com funções trigonométricas, e pode ser aplicada após uma aula ministrada com o auxílio do software GeoGebra, utilizando botões deslizantes para descrever a influência que cada parâmetro tem nos gráficos dessas funções.

A sequência didática proposta é composta por um pré-teste seguido de quatro problemas com nível crescente de dificuldade, que contemplam a competência do Currículo Paulista: "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente"((ESTADO), 2020). E para finalizar e avaliar a aprendizagem é sugerido aplicar um pós-teste com o mesmo nível de dificuldade do pré-teste. Nos anexos encontra-se uma sugestão de pré-teste e uma de pós-teste.

Na proposta deste trabalho, o problema 1 foi escolhido para, por meio de seus itens, mostrar de forma simples e objetiva como se calcula cada parâmetro de uma função trigonométrica, além de trabalhar com a análise de gráfico.

O problema 2, sobre o fluxo de ar nos pulmões, tem como objetivo fazer com que o aluno possa utilizar o software GeoGebra e, para isso, deve ser desenvolvido em laboratório de informática. Esse problema foi escolhido também porque mostra uma função trigonométrica sendo aplicada na área de ciências médicas e biológicas e desenvolve praticamente todos os conceitos principais do conteúdo abordado nesta dissertação.

Os problemas 3 e 4, referentes às temperaturas diária e anual na cidade de Jaú-SP, foram desenvolvidos para motivar os alunos com uma aplicação mais próxima da sua realidade, visto que inicialmente a sequência didática seria aplicada em uma escola dessa cidade, mas a pandemia COVID-19 acabou impedindo a aplicação. Vale ressaltar que, caso o professor lecione em outra cidade, ele pode adaptar a atividade buscando informações sobre a temperatura da cidade escolhida no site (CLIMA-TEMPO, 2021).

4.1 Problema 1 - Como calcular os parâmetros de uma função trigonométrica

Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas, o que justifica a enorme aplicação dessas funções em campos da ciência como acústica, astronomia, economia, engenharia, medicina etc.

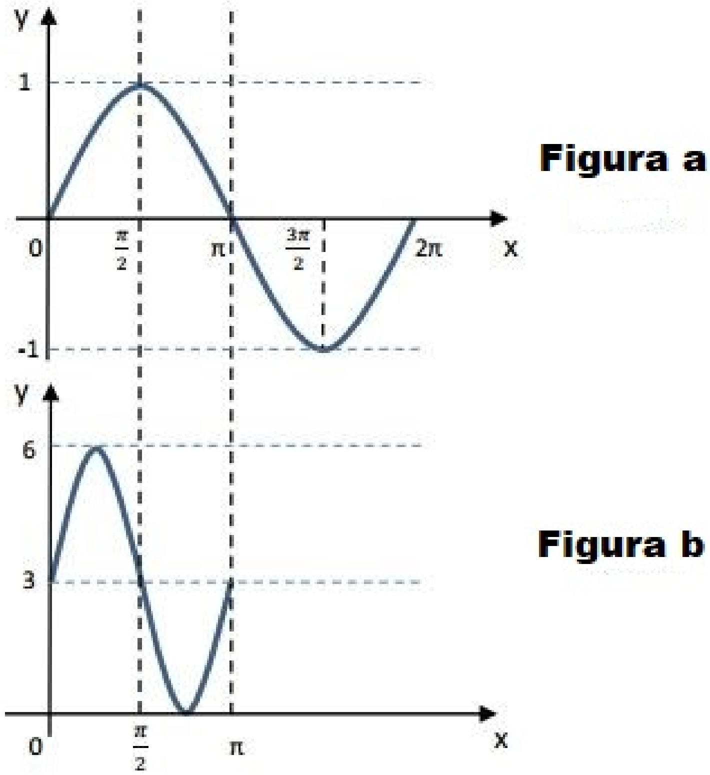
A função seno, por exemplo, é uma função trigonométrica que pode ser escrita, de maneira generalizada, como

$$F(x) = A + B\,\mathrm{sen}(Cx + D), \tag{4.1}$$

em que cada parâmetro A, B, C e D, que pertencem ao conjunto dos números reais, provoca alteração no valor da função $F(x)$ e, consequentemente, no gráfico. O parâmetro A modifica a imagem da função, podendo deslocar o gráfico da mesma para cima ou para baixo; o parâmetro B modifica a imagem e a amplitude da função; o parâmetro C modifica o período da função; e o parâmetro D pode fazer o gráfico da função se deslocar para a esquerda ou para a direita.

A Figura 44a ilustra o esboço do gráfico da função seno quando $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 0$, ou seja, $F(x) = \mathrm{sen}(x)$, em que $x \in [0, 2\pi]$. Qual a lei de formação da função cujo o esboço do gráfico está apresentado na Figura 44b? Responda aos itens para encontrar os valores dos parâmetros A, B, C e D.

Figura 44 – Figura do problema 1.



Fonte: Plataforma Plurall: Anglo

(a) Calcule o parâmetro A analisando o quanto a linha média se moveu em relação ao gráfico da Figura 44-a.

(b) Calcule a amplitude do gráfico para encontrar o valor do parâmetro B.

(c) Sabendo que o período da função é determinado pela fórmula $P = \dfrac{2\pi}{C}$, calcule o valor do parâmetro C.

(d) Use um ponto pertencente ao gráfico para mostrar que $D = 0$.

4.1.1 Solução comentada do problema 1

(a) Esse item tem o objetivo de mostrar para o aluno que para calcular o parâmetro A ele deve descobrir por onde passa a linha média do gráfico. Para isso, deve calcular a média aritmética entre o ponto de máximo e mínimo do gráfico. O valor encontrado será o ponto na reta ordenada por onde passa a linha media do gráfico.

$$A = \frac{6+0}{2} \tag{4.2}$$

$$A = 3. \tag{4.3}$$

Analisando pelo gráfico da Figura 44-b, basta ver a linha pontilhada passando pelo ponto $(0,3)$. O aluno deve perceber que em relação ao gráfico $F(x) = sen(x)$, a linha média transladou 3 unidades para cima, concluindo que $A = 3$.

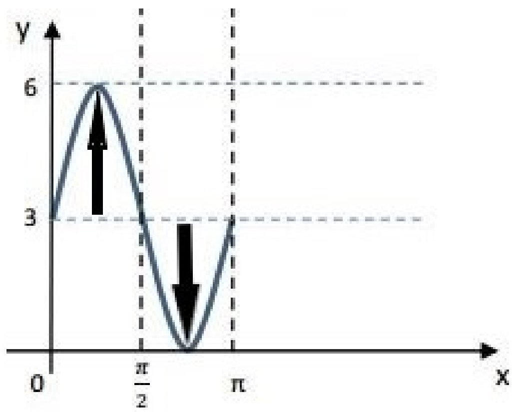
(b) Este item tem como objetivo mostrar que o parâmetro B está relacionado com a amplitude do gráfico. Para calcular a amplitude, bastar tomar a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função.

$$Amplitude = \frac{6-0}{2} \tag{4.4}$$

$$Amplitude = 3. \tag{4.5}$$

Analisando pelo gráfico da Figura 45, podemos ver que amplitude é a distância da linha média até o ponto de máximo, ou ponto de mínimo da função.

Figura 45 – Gráfico que mostra a amplitude da função analisada.



Fonte: Plataforma Plurall: Anglo - modificado pelo autor

Como o parâmetro B altera a amplitude do gráfico, o aluno deve concluir que $B = 3$.

(c) Este item tem como objetivo relacionar o período da função com o parâmetro C usando a fórmula $P = \dfrac{2\pi}{|C|}$. Para encontrar o valor de C, basta aplicar a fórmula.

Analisando o gráfico da Figura 44-b, percebemos que o período é π. Assim, aplicando na fórmula e resolvendo a equação temos:

$$\pi = \frac{2 \cdot \pi}{|C|} \tag{4.6}$$

$$\pi \cdot C = 2 \cdot \pi \tag{4.7}$$

$$C = 2 \tag{4.8}$$

Ao final desse item temos nossa lei de formação completa já que o enunciado diz que $D = 0$. Portanto a lei de formação é

$$G(x) = 3 + 3\,\mathrm{sen}(2x + 0) \tag{4.9}$$

(d) Nesse item o aluno deve mostrar que $D = 0$, portanto queremos que o aluno entenda que deve partir da função $G(x) = 3 + 3\,\mathrm{sen}(2x + D)$, escolher um ponto no gráfico e aplicar na função. Esse item tem como principal objetivo avaliar a habilidade do aluno em resolver equações trigonométricas.

O aluno pode escolher qualquer ponto, mas deve tomar cuidado para não se complicar, aqui cabe ao professor mediar nessa escolha, caso o aluno esteja com dificuldade, lembrando-o de que conhecemos os valores de seno dos arcos notáveis.

Vamos escolher o ponto $(0,3)$ para facilitar nossos cálculos. Aplicando esse ponto na função $G(x)$ e resolvendo a equação, temos:

$$3 = 3 + 3\,\mathrm{sen}(2 \cdot 0 + D) \tag{4.10}$$

$$\frac{3-3}{3} = \mathrm{sen}(D) \tag{4.11}$$

$$\mathrm{sen}(D) = 0 \tag{4.12}$$

Como $\mathrm{sen}(D) = 0$, temos que $D = 0$ ou $D = 2\pi$, como o gráfico da função termina em π, concluímos que $D = 0$.

4.2 Problema 2 - Fluxo de ar nos pulmões

Como mencionado anteriormente, este problema deve ser aplicado em laboratório de informática, para que o aluno aprenda a utilizar o software GeoGebra em seu desenvolvimento. Esperamos que essa atividade seja muito atrativa para os alunos, pois além de sair da sala de aula, mostra uma função trigonométrica sendo aplicada na área de ciências médicas e biológicas.

(UFF, 2004) No processo de respiração do ser humano, o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, pode ser modelado pela função F, definida, em cada instante t, por

$$F(t) = B\,\mathrm{sen}(Ct). \tag{4.13}$$

Com base nessa informação e na Tabela 9 abaixo, em que o tempo é dado em segundos e o volume do fluxo de ar em litros, responda, com o auxílio do software GeoGebra, as questões a seguir para modelar uma função que descreva o fluxo de ar dessa pessoa.

Tempo	Fluxo de ar
1,25	0,6
3,75	-0,6
6,25	0,6
8,75	-0,6

Tabela 9 – Fluxo de ar em função do tempo.

a) Com o auxílio do GeoGebra plote os pontos da tabela. Como se comporta a posição dos pontos?

b) Mostre que o parâmetro $A = 0$.

c) Calcule a amplitude e determine o valor do parâmetro B

d) Plote o gráfico da função obtida até o momento considerando $D = 0$. O gráfico passou pelos pontos?

e) Sabendo que o período é o tempo que se demora entre o movimento de inspiração e outro, ou o tempo que se demora entre o movimento de uma expiração e outra, calcule o valor do parâmetro C.

f) Mostre que o parâmetro $D = 0$.

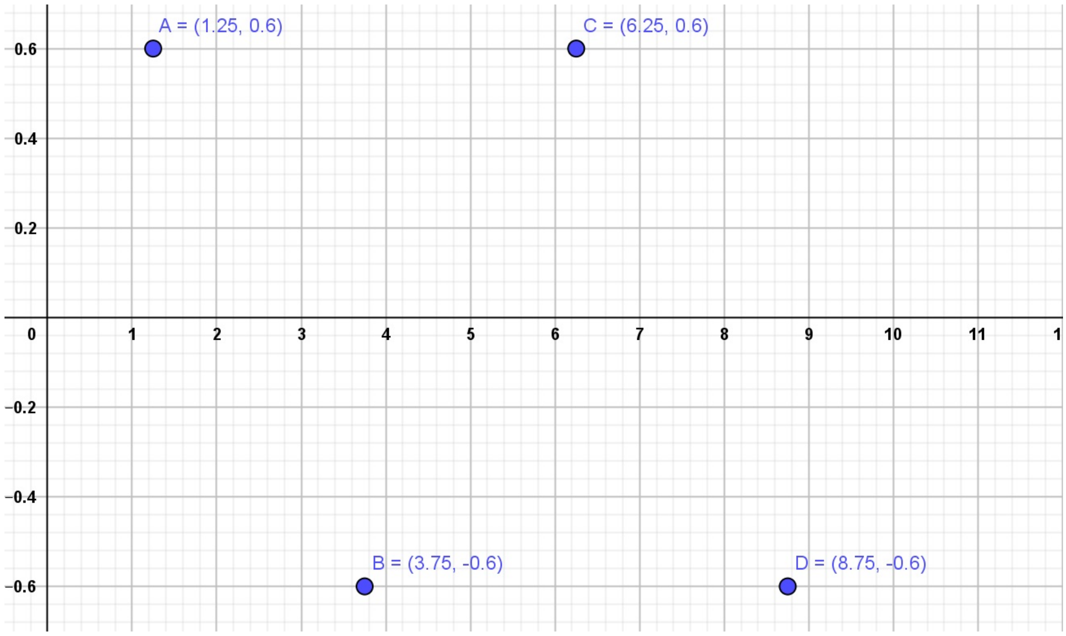
g) Plote a função encontrada no GeoGebra e verifique se o gráfico passa pelos pontos iniciais.

4.2.1 Solução comentada do problema 2

(a) Análise dos pontos no plano cartesiano

Com o auxílio do software GeoGebra vamos analisar como os pontos dados no problema estão posicionados no plano cartesiano, como mostra a Figura 46.

Figura 46 – Pontos dados no problema do fluxo do ar na traqueia.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o gráfico 46 o aluno deve perceber, que pela posição dos pontos, a função seno seria uma forte candidata a modelar esse problema, pois a posição dos pontos está de forma cíclica.

(b) Cálculo do parâmetro A.

Vamos verificar que $A = 0$, como o enunciado afirma.

Para isso sabemos que a amplitude é a variação do ponto médio ao ponto máximo, ou ao ponto mínimo, da função. O parâmetro A translada a função verticalmente e é também o ponto médio de nossa função. Podemos calcular o ponto A fazendo a média aritmética entre o máximo e o mínimo, ou seja,

$$A = \frac{0,6 + (-0,6)}{2} \tag{4.14}$$

$$A = 0. \tag{4.15}$$

(c) Amplitude

Como a amplitude do gráfico de uma função seno é 1, devemos construir uma função para que os pontos extremos estejam ajustados aos dados fornecidos pela nossa tabela. Como da função genérica $F(t) = A + B\,\text{sen}(Ct + D)$, B é o parâmetro que influencia na amplitude, devemos primeiramente determinar seu valor. Vamos, então, calcular B.

Veja que, pelos pontos da Figura 46, a amplitude da função procurada tem que variar de 0 até 0,6. Assim para calcular B basta fazer $A = 0$ e $F(t) = 0,6$.

$$F(t) = A + B\,\mathrm{sen}(Ct + D) \tag{4.16}$$

$$0,6 = 0 + B\,\mathrm{sen}(Ct + D) \tag{4.17}$$

Como 0,6 é o máximo de F, temos que $\mathrm{sen}(Ct + D) = 1$.

$$0,6 = 0 + B \cdot 1 \tag{4.18}$$

$$B = 0,6 \tag{4.19}$$

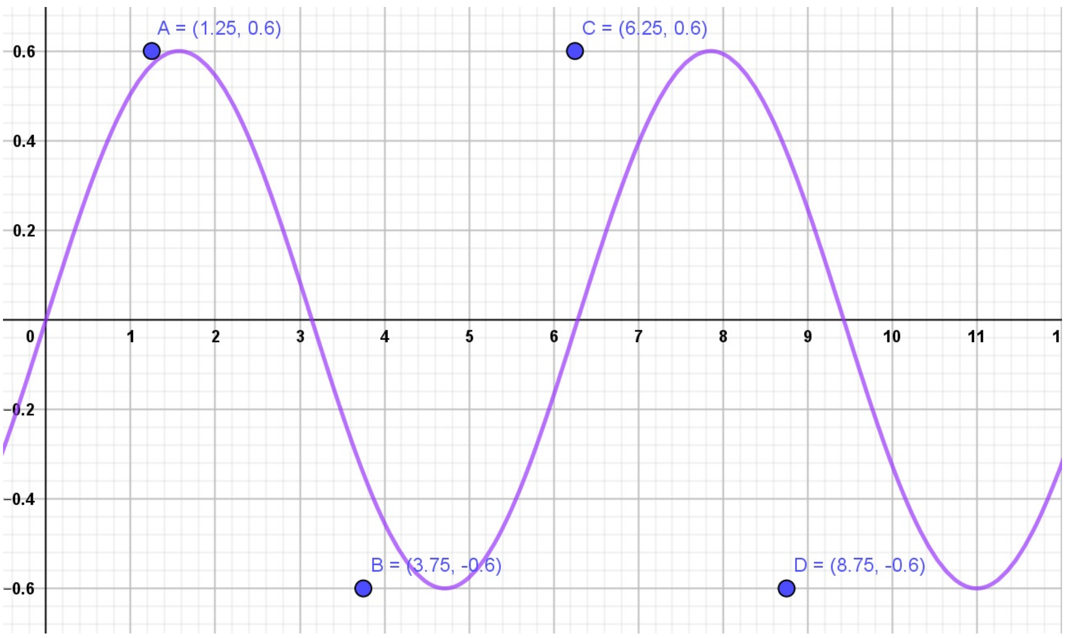
Até agora obtemos a função

$$F(t) = 0,6\,\mathrm{sen}(Ct + D). \tag{4.20}$$

(d) Gráfico da função obtida até o momento.

Vamos plotar os pontos da Tabela 9 no Geogebra, considerando que $C = 1$ e comparar com o gráfico da função obtida até agora, considerando $D = 0$, como mostra a Figura 47.

Figura 47 – Função $F(t) = 0,6\,\mathrm{sen}(Ct + D)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que o gráfico não passou pelos pontos, isso indica que ainda não terminamos nossa modelagem.

(e) Período e cálculo do parâmetro C.

Analisando o gráfico e os pontos percebemos que o gráfico precisa ser comprimido horizontalmente, para que este se alinhe a todos os pontos.

Sabemos que o parâmetro C define o período da função seno e que esse período é igual a 2π.

O período é a distância de um ponto máximo ao outro, ou de um ponto mínimo ao outro. Essas distâncias em nosso problema, entre os pontos máximos, é o tempo que se demora entre um movimento de inspiração e outro, já quando se trata da distâncias entre os pontos mínimos, é o tempo que demora entre o um movimento de expiração e outro.

Assim calculando o período, usando os pontos máximos, temos:

$$P = 6,25 - 1,25 \tag{4.21}$$

$$P = 5 \tag{4.22}$$

Como sabemos $P = \dfrac{2\pi}{C}$, então podemos calcular C resolvendo a equação a seguir:

$$5 = \frac{2\pi}{C} \tag{4.23}$$

$$C = \frac{2\pi}{5} \tag{4.24}$$

$$C = 0,4\pi \tag{4.25}$$

Portanto, a função procurada fica

$$F(t) = 0,6\,\mathrm{sen}(0,4\pi t + D). \tag{4.26}$$

(f) Cálculo do parâmetro D.

Vamos provar que $D = 0$ aplicando $F(1,25)$ na função 4.26 e resolvendo a equação:

$$0,6 = 0,6sen(0,4\pi \cdot 1,25 + D) \tag{4.27}$$

$$1 = sen(0,5\pi + D) \tag{4.28}$$

Como $\mathrm{sen}(0,5\pi) = 1$, temos

$$0,5\pi = 0,5\pi + D \tag{4.29}$$

$$D = 0 \tag{4.30}$$

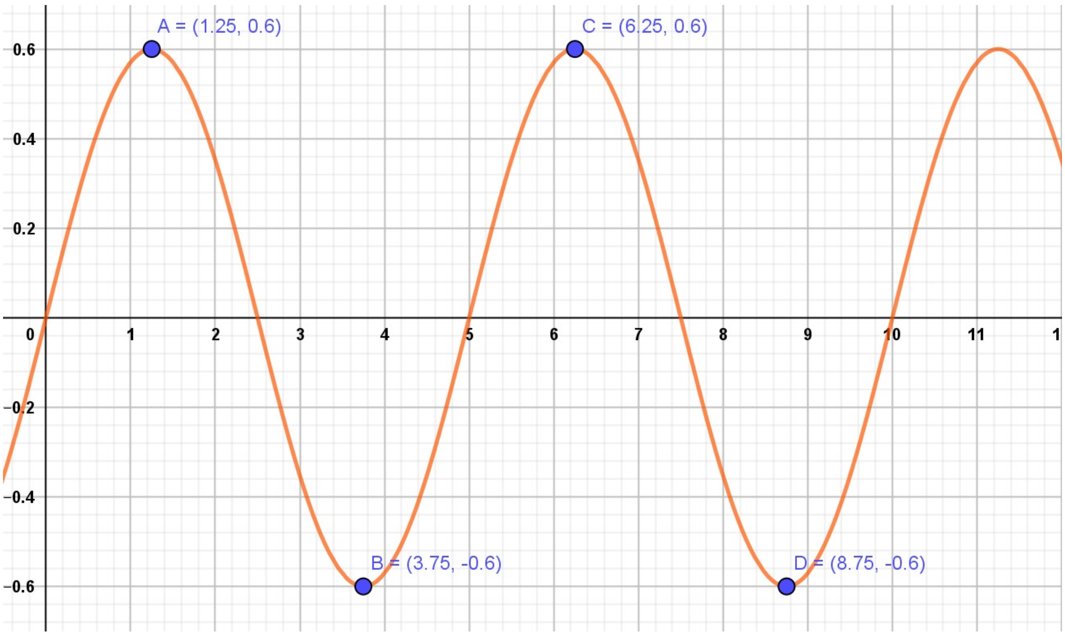
Logo, a função que modela o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, em cada instante t, é dada por

$$F(t) = 0,6\,\text{sen}(0,4\pi t) \tag{4.31}$$

(g) Gráfico da função que modela o fluxo de ar através da traqueia.

Vamos plotar o gráfico da função 4.31 no Geogebra.

Figura 48 – Função $F(t) = 0,6\,\text{sen}(0,4\pi t)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após plotar a função no Geogebra, como mostra a Figura 48, notamos que a mesma se alinhou aos pontos dados inicialmente na Tabela 9.

4.3 Problema 3 - Temperatura diária na cidade de Jaú-SP

Em Jaú-SP, no dia 02 de março de 2021, a temperatura mínima foi de aproximadamente 21°C e a máxima foi de aproximadamente 30°C. A temperatura média do dia ocorreu por volta das 8 horas e às 20 horas. As temperaturas mais baixas ocorrem durante a noite. Considerando essas informações responda os itens abaixo. As informações foram retiradas do site (JAHU, 2021).

(a) Escreva uma função trigonométrica que modela a temperatura F em Jaú t horas após às 8 da manhã.

(b) Escreva uma função trigonométrica que modela a temperatura T em Jaú t horas após a meia – noite.

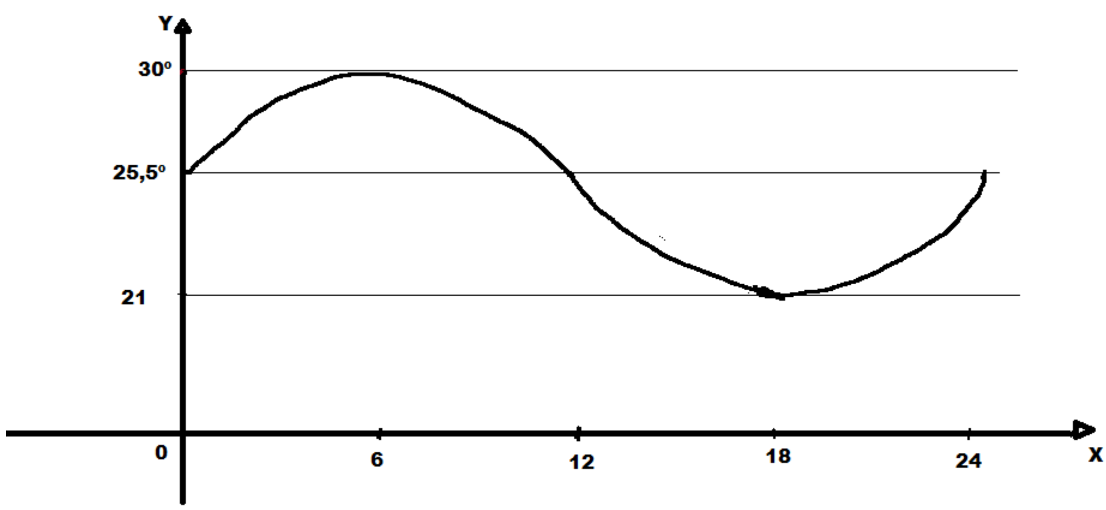
4.3.1 Solução comentada do problema 3

(a) Para encontrar uma função trigonométrica que modela a temperatura F em Jaú t horas após às 8 da manhã, o aluno deverá começar esboçando um gráfico no plano cartesiano em que o eixo das ordenadas é a temperatura e o eixo das abscissas representa as horas do dia.

Em seguida, ele deverá marcar as temperaturas máxima de 30° C e a mínima de 21° C e encontrar a temperatura média, calculando a média aritmética entre 30° C e 21° C que é igual à 25,5°C. Por esse ponto, o aluno deverá traçar a linha média da função procurada, lembrando que a linha média é a linha que divide o gráfico da função ao meio horizontalmente.

O gráfico deve começar no ponto 25,5 da ordenada, pois é onde função F(t), que representa a temperatura t horas após as 8 horas da manhã, tem a abscissa igual a zero, ou seja, t = 0. Note que o período dessa função será 24 horas, portanto é bom dividir esse período em quatro partes, para entender melhor como o gráfico se comportará. Na metade do período, ou seja, 12 horas após as 8 horas da manhã, a temperatura atinge a média novamente, e como a temperatura mais baixa ocorre no período da noite, concluímos que a mais alta ocorre no período da tarde, 6 horas após às 8 horas da manhã. Veja um possível esboço do gráfico na Figura 49.

Figura 49 – Esboço do gráfico com as temperaturas máxima, mínima e média.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Repare que a temperatura mais baixa ocorre 18 horas após as 8 da manhã, ou seja, às 2 horas da manhã, conforme o enunciado.

Para escolher uma função trigonométrica que modela esse gráfico, basta observar que, como o gráfico começa na sua linha média quando o argumento é igual a zero, então a função que melhor se encaixa é a função seno.

O aluno deve ter em mente que a função para modelar esse problema é da forma

$$F(t) = A + B\,\mathrm{sen}(Ct) \tag{4.32}$$

e encontrar os parâmetros A, B e C.

Para encontrar o parâmetro A, basta calcular a média aritmética entre a temperatura máxima e miníma, que será o ponto em que a linha média passa, ou seja,

$$A = \frac{30+21}{2} \tag{4.33}$$

$$A = 25,5 \tag{4.34}$$

Para calcular o parâmetro B, basta verificar a amplitude do gráfico, que é a distância entre a linha média e o máximo do gráfico, ou a distância da linha média e o mínimo do gráfico.

$$B = 30 - 25,5 = 4,5 \tag{4.35}$$

Para calcular o parâmetro C, o aluno pode usar a fórmula do parâmetro $P = \frac{2\pi}{C}$, ou simplesmente pensar que como o período de um dia é de 24 horas basta dividir o período da função seno que é 2π, por 24. Assim o aluno vai chegar em $C = \frac{\pi}{12}$. Veja como fica o cálculo usando a fórmula.

$$P = \frac{2\pi}{C} \tag{4.36}$$

$$24 = \frac{2\pi}{C} \tag{4.37}$$

$$C = \frac{2\pi}{24} \tag{4.38}$$

$$C = \frac{\pi}{12} \tag{4.39}$$

Definidos os parâmetros A, B e C, a função que modela a temperatura F na cidade de Jaú t horas após às 8 horas da manhã é dada por

$$F(t) = 25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{12}t). \tag{4.40}$$

(b) Com a função do item (a) modelada, o aluno poderá responder ao item(b), que pede a função $T(t) = 25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{12}t + D)$, usando o conceito do parâmetro D, que translada a função horizontalmente.

Para isso, ele deverá fazer $T(8) = F(0)$, pois $F(0)$ representa a temperatura F às 8 horas da manhã, e como a função T começará em meia-noite, temos que $T(8)$ também representa a temperatura às 8h da manhã.

$$T(8) = F(0) \tag{4.41}$$

$$25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{12} \cdot 8 + D) = 25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{12} \cdot 0) \tag{4.42}$$

$$25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{3} \cdot 2 + D) = 25,5 \tag{4.43}$$

$$4,5\,\text{sen}(\frac{2\pi}{3} + D) = 0 \tag{4.44}$$

$$\text{sen}(\frac{2\pi}{3} + D) = 0 \tag{4.45}$$

Como $\text{sen}(0) = 0$, então

$$\frac{2\pi}{3} + D = 0 \tag{4.46}$$

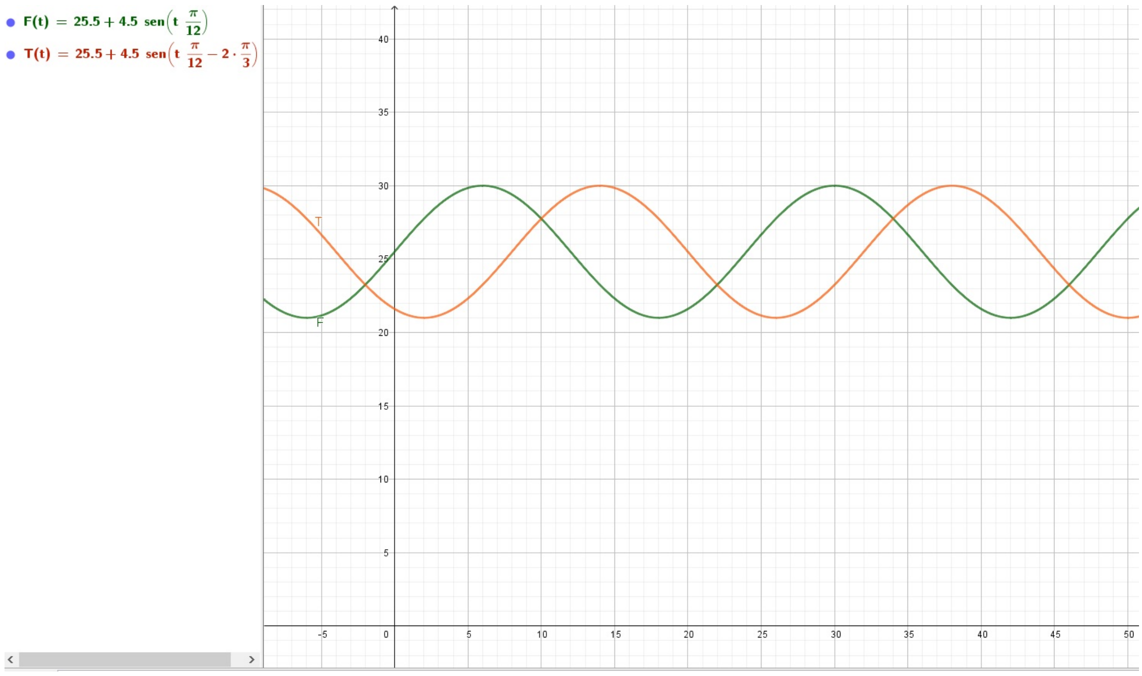
$$D = -\frac{2\pi}{3} \tag{4.47}$$

A função que modela a temperatura T em Jaú t horas após a meia-noite é dada por

$$T(t) = 25,5 + 4,5\,\text{sen}(\frac{\pi}{12}t - \frac{2\pi}{3}). \tag{4.48}$$

Veja o gráfico da Figura 50 com as funções $T(t)$ e $F(t)$.

Figura 50 – Gráfico das temperaturas F e T.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 Problema 4 - Temperatura anual na cidade de Jaú-SP

O dia mais quente do ano em Jaú-SP, calculado nos últimos 30 anos, é o dia 15 de fevereiro com temperatura média de 30°C. O dia mais frio do ano tem uma temperatura média de 13° C. (CLIMA-TEMPO, 2021)

(a) Use uma função trigonométrica para modelar a temperatura em Jaú, usando 365 dias como duração de um ano e considerando que em 15 de fevereiro em Jaú é verão.

(b) Quantos dias, após o dia 15 de fevereiro, será o primeiro dia da primavera quando a temperatura alcança os 25°C?

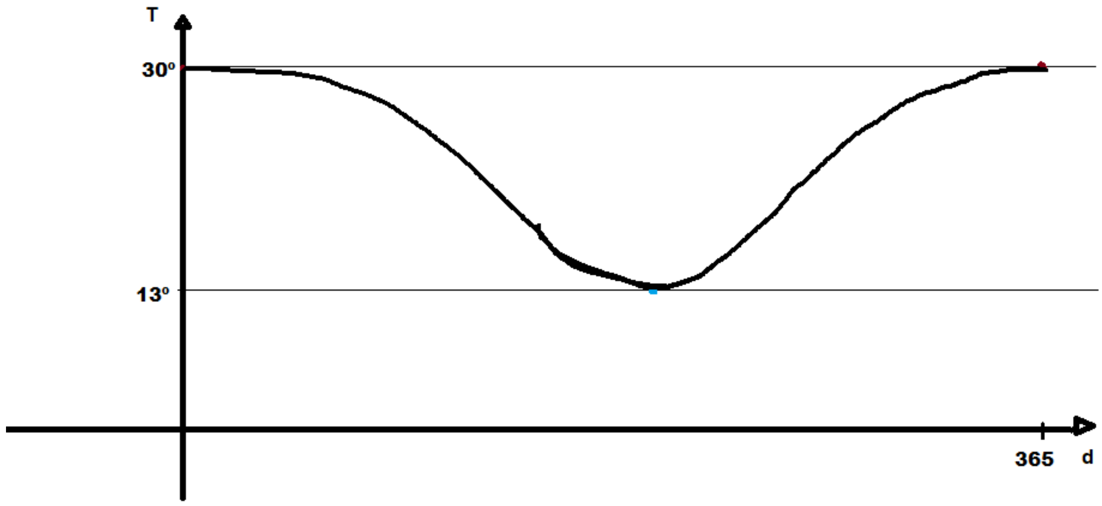
4.4.1 *Solução comentada do problema 4*

(a) Para responder essa questão, primeiramente o aluno deve analisar qual função se aproxima melhor da curva procurada, seno ou cosseno. Para isso basta esboçar um gráfico com o eixo das abscissas em dias e o eixo das ordenadas em graus Celsius, que representará a variação da temperatura, de modo que a origem do plano cartesiano seja no dia 15 de fevereiro .

A escolha de uma função trigonométrica se deve ao fato de que a temperatura anual é cíclica. Assim, se a temperatura máxima no dia 15 de fevereiro é de 30°C, após 365 dias, será novamente 30°C. A temperatura mínima média de 13°C ocorre no meio das duas temperaturas mais altas.

Assim, o aluno deverá esboçar um gráfico como o da Figura 51, marcar as temperaturas 30°C e 13°C no eixo das ordenadas e traçar 2 linhas retas de forma que uma passe pelo ponto 30°C e a outra pelo ponto 13° C, afim de limitar a região onde gráfico estará. Agora basta traçar uma curva que parta do ponto 30°C e vai descendo até chegar em 13°C, o que acontece mais ou menos na metade do caminho entre zero e 365 dias e novamente sobe até atingir os 30°C no 365° dia.

Figura 51 – Esboço da temperatura ao longo de um ano em Jaú.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esse esboço, espera-se que fique evidente que a função que mais se aproxima dessa curva é a função cosseno, pois ela começa no seu ponto máximo. Portanto, é mais simples modelar a temperatura usando a função cosseno.

Para que o aluno tenha essa percepção é necessário que esteja claro o conceito do parâmetro D, pois para o gráfico começar na temperatura máxima é necessário que a abscissa 0 represente o dia 15 de fevereiro e portanto $D = 0$. Dessa forma a função temperatura T terá uma lei de formação da forma

$$T(d) = A + B\cos(Cd). \tag{4.49}$$

em que d representa os dias do ano.

Definida a lei de formação agora o aluno deve começar a descobrir os parâmetros. Para calcular o parâmetro A deve-se encontrar o ponto médio das temperaturas máxima e mínima, pois se fosse a função $T(d) = \cos(d)$, esse ponto seria na coordenada zero para a ordenada.

$$A = \frac{(30+13)}{2} \tag{4.50}$$

$$A = 21,5 \tag{4.51}$$

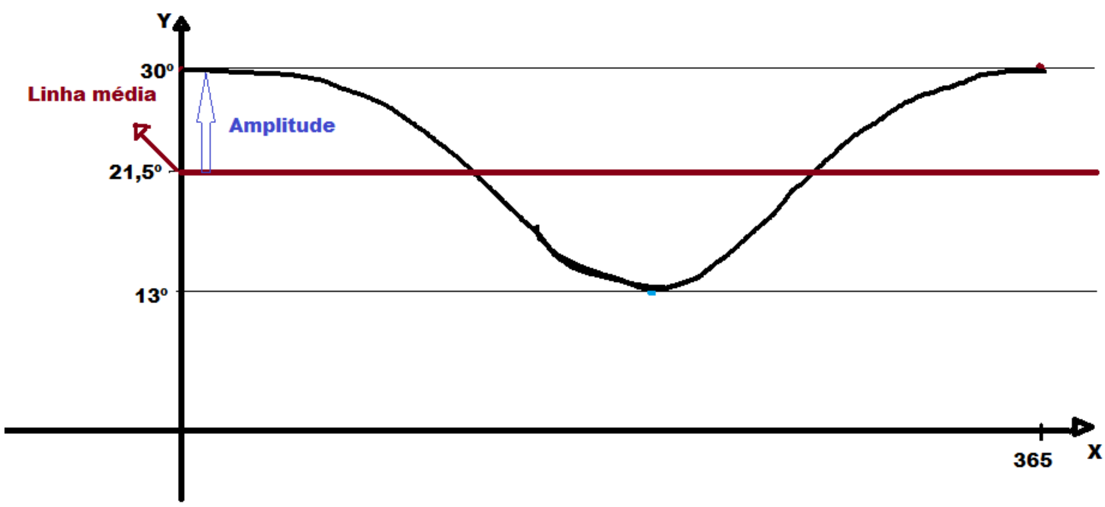
Como o valor do parâmetro A tem -se o ponto exato em que passa a linha média desse gráfico, com essa informação o aluno deve pensar na amplitude do gráfico, para assim calcular o valor do parâmetro B. Amplitude nada mais é que a distância entre a linha média e o ponto máximo ou mínimo, desse gráfico, ou seja,

$$B = 30 - 21,5 \tag{4.52}$$

$$B = 8,5 \tag{4.53}$$

Um possível esboço desse gráfico com a linha média e a amplitude pode ser visto na Figura 52.

Figura 52 – Esboço da temperatura T com a linha média e a amplitude.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função que tem-se até o momento é

$$T(d) = 21,5 + 8,5\cos(Cd) \tag{4.54}$$

Para encontrar o parâmetro C deve-se usar o fato de que a função cosseno tem o período 2π, e como esses 2π estão divididos em 365 dias no gráfico, tem -se

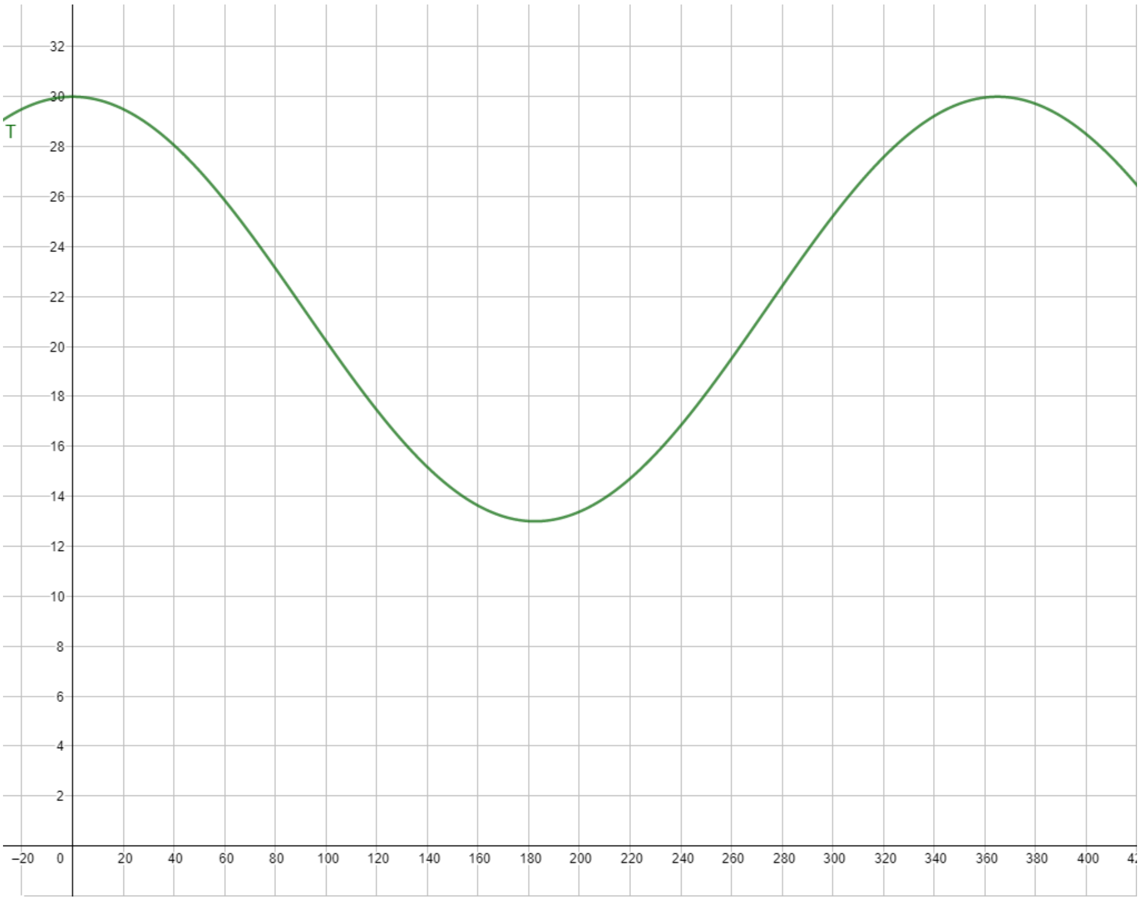
$$C = \frac{2\pi}{365} \tag{4.55}$$

Agora tem-se a função modelada com todos os seus parâmetros e o aluno pode responder ao problema. Em outras palavras, a temperatura na cidade de Jaú ao longo de um ano pode ser modelada pela função

$$T(d) = 21,5 + 8,5cos(\frac{2\pi}{365}d). \tag{4.56}$$

Veja, na Figura 53, como o gráfico da função fica parecido com o esboço.

Figura 53 – Temperatura T na cidade de Jaú.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(b) Neste item pede-se para encontrar em quantos dias, após o dia 15 de fevereiro, será o primeiro dia da primavera quando a temperatura alcança os 25ºC.

Para encontrar a resposta, o aluno precisa aplicar a temperatura dada no problema na função e resolver a equação trigonométrica, com o auxilio de uma calculadora científica, da seguinte forma:

$$25 = 21,5 + 8,5\cos(\frac{2\pi}{365}d) \tag{4.57}$$

$$\frac{25-21,5}{8,5} = \cos(\frac{2\pi}{365}d) \tag{4.58}$$

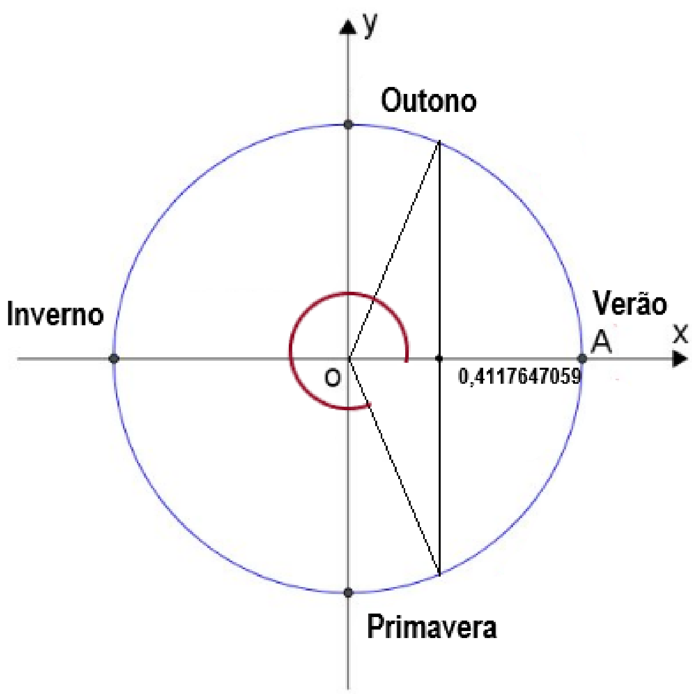
$$\frac{3,5}{8,5} = \cos(\frac{2\pi}{365}d) \tag{4.59}$$

$$0,4117647059 = \cos(\frac{2\pi}{365}d) \tag{4.60}$$

Nesse momento é preciso ter cuidado, pois, ao se calcular o inverso do cosseno nos dois membros da equação anterior, o aluno deve saber qual será o ângulo correto.

Para isso é interessante notar que as estações do ano se encaixam perfeitamente no ciclo trigonométrico, no lugar dos arcos notáveis 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Veja figura 54.

Figura 54 – Ciclo trigonométrico das estações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O valor encontrado de cosseno tem dois ângulos correspondentes, que são simétricos. O primeiro refere-se ao verão e o segundo a primavera. Com o auxílio de uma calculadora, aluno deve calcular $\cos^{-1}(0,4117647059)$.

$$\cos^{-1}(0,4117647059) = 1,1464066182 \tag{4.61}$$

O valor encontrado em radiano, pertence ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, ou seja, esse valor é no verão, como o item pede a temperatura na primavera, o aluno deve usar os conceitos do ciclo trigonométrico, para encontrar o valor simétrico no quarto quadrante, que se refere a primavera. Para isso basta fazer

$$2\pi - 1,14640661282 = 5,136778694 \tag{4.62}$$

Com esse valor encontrado, o aluno deve agora igualar o argumento a esse valor, para assim encontrar o valor de d.

$$\frac{2\pi}{365}d = 5,136778694 \tag{4.63}$$

$$2\pi d = 1874,92422331 \tag{4.64}$$

$$d = \frac{1874,92422331}{2\pi} \tag{4.65}$$

$$d = 298,403458 \tag{4.66}$$

$$d \approx 298 \tag{4.67}$$

Portanto, a resposta do problema é 298 dias após o dia 15 de fevereiro, que é o dia 9 de novembro.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos esse trabalho, tínhamos em mente propor e aplicar uma sequência didática a uma turma de segundo ano do ensino médio da escola pública, na cidade de Jaú, com o objetivo de auxiliar no ensino de funções trigonométricas. Porém, com a pandemia ocasionada pela Covid-19, as aulas se tornaram online e não foi possível a aplicação, pois os alunos se evadiram das aulas.

Diante do problema supracitado, o foco desse trabalho ficou totalmente voltado para a preparação das atividades da sequência didática, utilizando a modelagem matemática como ferramenta pedagógica, e contando também com o uso da tecnologia para intensificar os resultados na aprendizagem das funções trigonométricas, a fim de transformar os problemas da realidade em problemas de matemática e, com isso, incentivar os alunos a se interessarem pelo estudo da matemática em geral.

Para isso sugerimos uma sequência com quatro atividades, que podem ou não serem adaptadas para a realidade da turma, ou servir de base para o desenvolvimento de outras atividades. Por exemplo, é possível criar um problema aplicado a área da sustentabilidade, como geração de energia solar durante o ano, já que o sol emite radiação maior nos meses de verão, decaindo no outono, atingindo seu menor valor nos meses de inverno e voltando a subir na primavera até atingir seu valor máximo novamente do verão, o que claramente descreve uma função cosseno.

A expectativa desse trabalho é abrir a mente do educador para a possibilidade de novas alternativas para se ensinar matemática, e não somente funções trigonométricas. É despertar a curiosidade sobre o estudo e uso da modelagem matemática, para o ensino, em qualquer conteúdo de qualquer ano. Assim, esperamos que este trabalho possa servir de apoio aos professores do Ensino Médio e que contribua para que a aprendizagem de matemática tenha mais significado e seja mais atraente para os alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 17, n. 22, p. 6, 2004. Citado na página 53.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado nas páginas 19, 20 e 25.

____. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. [S.l.]: Editora Contexto, 2013. Citado nas páginas 52 e 53.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. 850 paulo—sp: Contexto. 2005. Citado na página 53.

BISOGIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 2, p. 1–19, 2021. Citado na página 21.

BRASIL, M. Base nacional comum curricular. **Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica**, 2017. Citado nas páginas 20 e 21.

CLIMA-TEMPO. **Clima tempo**. 2021. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/>. Citado nas páginas 74 e 86.

(ESTADO), S. P. Currículo do estado de são paulo: Matemática e suas tecnologias - secretaria da educação. **Coordenadora Estadual SEDUC-SP, Maria Adriana Pagan; coordenação de área, João dos Santos Vitalino. - São Paulo**, 2020. Citado na página 73.

GALBRAITH, P.; CLATWORTHY, N. Beyond standard models—meeting the challenge of modelling. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v. 21, n. 2, p. 137–163, 1990. Citado na página 52.

GEOGEBRA. **Geogebra**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 25 de julho 2020. Citado na página 41.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria**. [S.l.]: Atual, 2013. Citado na página 25.

INEP. **Enem 2017-Prova cinza-Questão 175**. 2017. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_6_prova_cinza_12112017.pdf>. Acesso em: 30 Novembro 2021. Citado na página 69.

JAHU, C. tempo. **Clima tempo**. 2021. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/cidade/801/jau-sp/>. Citado na página 82.

MAGNUS, M. C. M.; CALDEIRA, A. D. Espreitando a emergência da modelagem matemática na educação matemática. **Revista BOEM**, v. 8, n. 17, p. 17–33, 2020. Citado na página 21.

MATOS, G. M. F.; SANTOS, M. A modelagem matemática como estratégia de ensino para aulas de matemática no ensino médio. **MIRANDA, SC: FERREIRA, JRR F; SANTOS, ML (Org.). A educação profissional na sociedade do conhecimento e seus reflexos no Ensino de Ciências**, v. 1, p. 187–210, 2018. Citado na página 21.

PASINATO, N. M.; VOSGERAU, D. S. Proposta para avaliação dos estágios de integração das tic na escola. In: **Congresso nacional de educação**. [S.l.: s.n.], 2011. v. 10. Citado na página 40.

PORTALBRASIL. **Pressão arterial**. 2020. Disponível em: <www.portalbrasil.net/medicina_pressao/>. Acesso em: 25 de julho 2020. Citado na página 69.

SIQUIERE, D. C.; QUARTIERI, M. T. Modelagem matemática e o tema pecuária: investigando os custos para cercar uma propriedade. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 248–258, 2021. Citado na página 21.

SOUZA, F. D. T. **Trigonometria no ensino médio e suas aplicações**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado na página 25.

TABUADEMARES. **tabua de mares**. 2019. Disponível em: <https://tabuademares.com/br/so-paulo/santos>. Acesso em: 24 de Agosto 2019. Citado na página 62.

UFF. **uff-2004**. 2004. Disponível em: <http://www.vestibular.uff.br/vest2004/provas/Etapa1/Vest2004_Etapa1.PDF>. Acesso em: 30 Novembro 2021. Citado na página 77.

WALKER, J.; HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de física: volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. [S.l.]: LTC, 2009. Citado nas páginas 55, 56, 57 e 60.

ANEXO

A

PRÉ-TESTE

1. Indique os valores reais de k, para os quais $\operatorname{sen} x = \dfrac{2k+4}{3}$.

2. Determine o menor valor de $k \in \mathbb{R}$, tal que $\dfrac{\operatorname{sen}(2k\pi)}{9}$ assuma valor negativo.

3. Num sistema de eixos cartesianos, trace o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen} x$. Nesse mesmo sistema, trace o gráfico da função $f(x) = 2\operatorname{sen} x$.

4. Num sistema predador-presa, o número de ambos tende a variar periodicamente. Numa região onde os leões são predadores, e zebras são presas, a população de zebras vem variando de acordo com esta função:

$$z(t) = 850 + 40\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

O tempo t, medido em anos, tem inicio $(t = 0)$ em janeiro de 2000.

(a) Qual era a população de zebras em janeiro de 2000?

(b) Se a população máxima de zebras alcançou 1250 cabeças, determine a primeira vez em que isso ocorreu.

5. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica

$$f(x) = 900 - 800\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right),$$

em que $f(x)$ é o número de clientes dentro do supermercado, e x, a hora da observação (x é um número inteiro, tal que $0 \le x \le 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

(a) 600

(b) 800

(c) 900

(d) 1500

(e) 1600

6. Uma endemia de doença viral vem apresentando comportamento cíclico de acordo com a função

$$v(t) = 3 - 2\left|\cos\left(\frac{5\pi t}{6}\right)\right|.$$

O tempo t, medido em horas, decorre depois de o medicamento ser administrado; $v(t)$ é a contagem de vírus em milhares por cm^3 de sangue. De quanto em quanto tempo a contagem de vírus alcança o valor mínimo?

7. Obter o domínio, a imagem, o período e a amplitude de $f(x) = -4 + 4\,\text{sen}(3x)$.

8. Se a função definida por $f(x) = a\,\text{sen}(bx)$ tem período 4π e conjunto imagem $[-6, 6]$, calcule os valores de a e b.

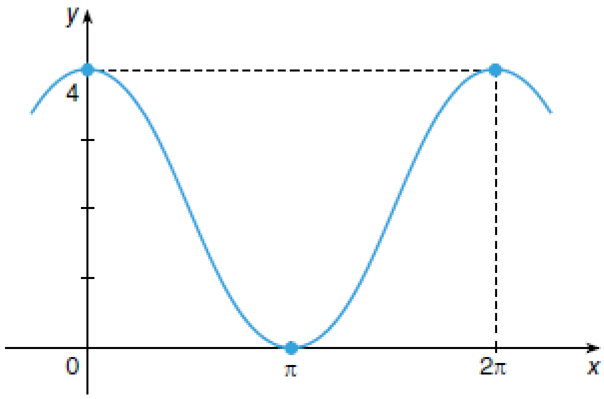
9. Uma endemia variou periodicamente de acordo com a função

$$n(t) = 5900\cos(13t) + 6380,$$

da qual t é o tempo, medido em anos, a partir de janeiro de 1990. Calcule a amplitude, o período e as traslações vertical e horizontal e interprete os resultados dessa função.

10. O gráfico a seguir representa a função $f(x) = a + b\cos(x)$. Calcule os valores de a e b.

Figura 55 – Gráfico da função $f(x) = a + b\cos(x)$



ANEXO

B

PÓS-TESTE

1. Considerando ângulos com medidas entres 0 e 2π, determine o maior valor de $k \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3k\pi}{7}\right)$ seja negativo.

2. Determinar os valores reais de m, para os quais $\cos x = 2m+4$

3. Num sistema de eixos cartesianos, trace o gráfico da função $g(x) = \cos x$. Nesse mesmo sistema, trace o gráfico da função $f(x) = 2\cos x$.

4. Em certa baía, as toneladas de algas variam periodicamente de acordo com a função $A(x) = 850 + 200\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$. O tempo t, medido em anos, tem início em ($t = 0$) em janeiro de 1990. Quantas toneladas de algas havia nessa baía em janeiro de 2005?

5. Em alguns trechos do rio Tietê (SP) formam-se consideráveis concentrações de espuma. Certo dia, essa concentração variou de acordo com a função $f(t) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, em que $f(t)$ é a quantidade de espuma, em m^3 por metro de rio, o t, o tempo, em horas contadas da meia-noite em diante. Determine o momento do dia em que a concentração de espuma alcança $5/m^3$ por metro de rio.

6. Numa cidade litorânea, da meia noite em diante, a altura h da maré (em metros), em função do tempo t (em horas), corresponde à expressão $h(t) = 2 + 0,5\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$. Esboçar o gráfico da função, determinando os respectivos períodos e conjunto imagem.

7. Construa o gráfico de $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ e indique o domínio, a imagem, o período e a amplitude.

8. Numa onda senoidal que se propaga em uma corda, sua fonte realiza, na vertical, um movimento harmônico simples cuja posição y, em função do tempo t, é dada pela lei $y(t) = 3\cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)\right]$. Identifique a amplitude, o período e o deslocamento horizontal dessa onda.

9. (FGV-SP) Uma empresa prevê para os próximos 24 meses (a partir de janeiro de 2001) a quantidade mensal vendida de determinado produto através da função $Q(t) = 30 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$, da qual Q é a quantidade e t vale 1 para janeiro de 2001, t vale 2 para fevereiro de 2001, e assim por diante.

a. Qual o período da função?

b. Para que valores de t a quantidade é máxima? Para que valores de t a quantidade mínima?

10. Considere o gráfico abaixo que representa a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx)$. Calcule os valores de a, b e c.

Figura 56 – Gráfico da função $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx)$