Universidade Federal do ABC

Profmat - Mestrado Profissional em Matemática

Viviane Maria Fernandes dos Santos

Linearidade

Santo André-SP

2013

VIVIANE MARIA FERNANDES DOS SANTOS

LINEARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso do Profmat - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. JOÃO CARLOS DA MOTTA FERREIRA
Coorientador: Prof.^{a} Dr. VIRGÍNIA CARDIA CARDOSO

Santo André - SP
2013

Dedico este trabalho a minha família que sempre me deu suporte na vida. Ao meu pai José Ivo que me ensinou que sem trabalho e dedicação não construimos nada, a minha mãe Rosa Maria (in memorian)que sempre acreditou na minha capacidade sendo a minha maior incentivadora, aos meus irmãos Vivian e Vinicíus que me auxiliaram nesses anos de estudo. Ao meu namorado Luiz Otávio pelo suporte emocional.

Agradecimentos

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática que com a implantação do programa PROFMAT possibilitou a realização de um sonho que antes parecia impossível. À CAPES pelo auxilio financeiro que contribuiu para que meus estudos pudessem ser concluidos. À UFABC que acreditou e implantou o PROFMAT . Aos meus professores e coordenadores pelos ensinamentos e aprofundamentos necessários para a conclusão do curso, em especial ao professor João Carlos pela paciência, dedicação e carinho que demonstrou ao longo de todo percurso e a professora Virgínia que foi de fundamental importância para elaboração do meu trabalho, pela sua atenção e auxilio. Aos meus colegas de curso que fizeram parte da minha vida nesses dois anos de estudo compartilhando de todas as vitorias e conquistas. E por fim agradeço à minha família, meu alicerce.

Resumo

O trabalho foi desenvolvido usando a Revista do Professor de Matemática (RPM) como referencial didático, por ser uma publicação específica para professores da Educação Básica. O foco principal deste trabalho é a verificação de como a linearidade é apresentada nas edições da RPM e fazer um breve estudo dos conteúdos matemáticos necessários para a elaboração de atividades diferenciadas que envolvam a ideia de linearidade para o ensino da matemática no nível básico.

Palavras-chaves:Linearidade; Função; Matrizes; Transformações Lineares; Matemática

Abstract

The paper wasdeveloped using the "Revista do Professor de Matemática"*RPM*as a didactic referential, becauseit is a specitic magazine to basic education teachers. The main aim is the examination of now the linearity appears in RPM editions and do brief survey of the mathematical content needed to prepare differentiated activities that envolves the linearity i dea to mathematic teaching in basic level.

Key-words: Linearity;Function;Matrix;Linear Map;Mathematics.

Sumário

Agradecimentos **v**

1 Introdução **1**

2 A linearidade na Revista do Professor de Matemática: uma análise. **7**

3 Noções fundamentais **33**

3.1 Corpos 33

3.2 Matrizes sobre um corpo 34

3.2.1 Definições e operações binárias 35

3.2.2 Matriz inversa 37

3.3 Sistemas de Equações Lineares 38

3.4 Representação matricial de um sistema 39

3.5 Forma escalonada de uma matriz 40

4 O espaço vetorial $\mathcal{K}^n$ **41**

4.1 O conjunto $\mathcal{K}^n$ 41

4.2 Subespaços gerados 43

4.3 Dependência e indepência linear 44

4.4 Bases 45

5 Funções Lineares **49**

5.1 O espaço vetorial das funções lineares 49

5.2 O núcleo de uma função linear 53

5.3 A imagem de uma função linear 54

5.4 O teorema do núcleo e da imagem 54

5.5 Função inversa de uma função linear 55

5.6 Caracterização de funções lineares por matrizes 56
5.7 Funções Afim 60
5.8 Funções lineares sobre $\mathcal{K}$ 62

6 Transformações Matemáticas **63**

6.1 Transformações Isométricas 63
6.1.1 Reflexões 63
6.1.2 Rotações 68
6.2 Transformações preservando semelhanças 73
6.2.1 Homotetia 73
6.3 Transformações mais gerais 75
6.4 Cisalhamento 75
6.4.1 Cisalhamento em $\mathbb{R}^2$ 75
6.4.2 Cisalhamento em $\mathbb{R}^3$ 77
6.5 Transformações sobre o corpo $\mathbb{C}$ 81

7 Explorando outras situações envolvendo linearidade na sala de aula **83**

7.1 Determinação da representação matricial de uma função linear 83
7.2 Caracterização de problemas de proporcionalidade por meio de funções lineares envolvendo um ou vários parâmetros 88
7.3 Criptografia 91
7.3.1 Usando a matriz inversa como chave de codificação 92

Referências Bibliográficas **99**

Capítulo 1

Introdução

A educação no Brasil consta na Constituição Federal desde 1934, mas somente em 1961 foi elaborada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que tem a função de normatizar a educação nacional. Mesmo tendo um currículo comum em todo território Nacional, a LDB atual, de 1996, é uma lei democrática já que reserva uma parte diversificada no currículo tornando-o flexível para que possa atender as diferenças e necessidades existentes no país. Para dar um respaldo a LDB de 1996 e indicar os parâmetros para uma educação de qualidade, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que servem de apoio para os professores brasileiros com sugestões curriculares que apresentam propostas e sugestões para a elaboração de suas aulas. Esse conteúdo não é obrigatório, podendo ser adaptado de acordo com a realidade de cada local e comunidade tornando o ensino mais significativo. Cada estado tem proposto seu currículo em concordâncias com a Legislação, em particular o Estado de São Paulo que alem de apresentar sua proposta para os professores fornece o material em forma de apostila para os alunos.

Os PCN sugerem uma educação baseada na realidade do indivíduo com um real significado para a aprendizagem fazendo com que a educação deixe de ser algo mecanizado. Essa proposta afeta diretamente os professores que sentem a necessidade de mudar para poder acompanhar a real necessidade de seus alunos, ou seja, anteriormente os educadores eram detentores do conhecimento e tinham a função de transmitir o conteúdo para seus alunos sem a preocupação em trabalhar com o concreto, fazendo com que muitas vezes a escola e o ensino ficassem distantes da realidade do dia a dia, tornando a aprendizagem abstrata e sem significado.

Hoje o professor é visto como um facilitador do processo de ensino aprendizagem, fornecendo ao aluno as ferramentas para que consigam desenvolver o raciocínio e dessa forma criar uma aprendizagem efetiva. Essa mudança está relacionada com a necessidade de apresentar ao aluno e a sociedade uma nova abordagem de ensino fundamentada nos estudos acadêmicos.

Para que essa aprendizagem ocorra é necessário trabalhar com situações problemas onde o aluno tem a possibilidade de visualizar, entender e muitas vezes se colocar como personagem do problema facilitando dessa forma a criação do raciocínio. Com a necessidade cada vez maior de demonstrar o uso da matemática na vida em sociedade, seja no mercado de trabalho, no avanço da tecnologia ou até mesmo na execução de uma receita culinária, percebemos que a escola ainda está distante de estabelecer um vínculo com a sociedade visto que muitos dos conteúdos matemáticos ainda são tratados de forma desvinculada seja da sociedade ou até mesmo em relação a conteúdos relacionados. Pensando nessa integração da escola com a realidade resolvemos escolher um assunto que estivesse presente em diversos setores da vida, com aplicabilidade que pode envolver situações cotidanas como uma receita de bolo feita por uma dona de casa a uma aplicação mais complexa como na segurança de informações bancáras. Além disso, o assunto a ser trabalhado está presente em todos os anos do ensino fundamental e médio.

Depois de analisar algumas possibilidades e verificar que seria possível unir alguns conteúdos que, geralmente não são relacionados para o aluno e, muitas vezes, para o próprio professor chegamos a escolha do tema. A escolha da linearidade como tema de trabalho se dá exatamente pela possibilidade de reunir conteúdos como as proporções, funções e matrizes, conteúdos que começam a ser trabalhados do início ao final da educação básica. Outro fato fundamental para tal escolha foi o descaso com que o tema é tratado ao longo de todo o ensino, mesmo sendo um conteúdo que está presente em diversas situações do cotidiano como na alocação de recursos de uma empresa, na rede elétrica de uma casa ou em situações comuns em sala de aula como um exercício que envolva proporcionalidade ou no balanceamento de uma equação química.

Em nossa experiência profissional com alunos do Ensino Fundamental e Médio pudemos perceber que muitas vezes a dificuldade na interpretação de problemas é agravada pela falta de conexão entre os conteúdos matemáticos. Ao longo dos anos poucas mudanças ocorreram nas salas de aula. Os conteúdos ainda são ensinados de forma expositiva, sem que haja a necessidade do aluno desenvolver um raciocínio, exatamente como acontecia em épocas passadas, mantendo a escola conteudista enfatizando os problemas mecânicos, trabalhando com a repetição e aplicação de fórmulas. Onde os métodos para a resolução de problemas são deixados de lado o que acarreta na falta de estratégia e na tendência do aluno tentar resolver problemas, não recorrendo ao conhecimento adquirido anteriormente, não estabelecendo desta forma uma relação com o que foi estudado. Essa situação é agravada quando se chega ao Ensino Médio e surge a necessidade de aplicar a matemática em outras disciplinas como a Física e a Química. O que a princípio é uma contextualização dos conteúdos aprendidos e a demonstração de aplicações da matemática em situações cotidianas ou comprovar fatores químicos e físicos acaba sendo um problema pela falta de ligação entre o conteúdo e a realidade.

O objetivo dessa dissertação é fazer uma análise de artigos matemáticos que servem de apoio para que os professores solucionem suas dúvidas ou ampliem seus conhecimentos. Além disso, faremos um breve estudo sobre os temas que são importantes para a compreensão da linearidade e trabalharemos sugestões de atividades onde os conceitos são aplicados.

Essa dissertação foi iniciada com os artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM) que apresentam as proporções, regra de três, funções, matrizes e sistemas lineares. A escolha da publicação se deu pela importância na comunidade matemática atestando sua credibilidade na educação. Os artigos foram analisados para a verificação de como os assuntos ligados à linearidade estão sendo tratados ao longo de trinta anos da publicação. Em seguida foi feito um estudo sobre a linearidade, trabalhando nos três capítulos seguintes as noções principais de espaços vetoriais, matrizes e funções lineares. Para finalizar serão feitas sugestões de atividades que podem ser aplicadas ao ensino para apresentar aplicações interessantes e acessíveis ao ensino médio. A RPM serviu como ponto de partida para a análise por ser uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática destinada a professores do ensino básico ou mesmo estudantes de Licenciatura com o intuito de publicar: artigos, trocas de experiências, sugestões de exercícios, aperfeiçoamento e curiosidades a partir de uma leitura agradável. Sua veiculação ocorre ininterruptamente a mais de 30 anos, tornando-a uma das mais antigas publicações do gênero. Além disso, sua importância na comunidade matemática e a credibilidade de suas publicações tornam seus artigos referência para professores de todo país.

Para entender melhor a importância da linearidade no desenvolvimento da matemática, ou mesmo, para o desenvolvimento de setores importantes da vida cotidiana, como, por exemplo, a computação, as artes, a análise de dados, é necessário conhecer um pouco da história para que se possa compreender que os conceitos foram sendo utilizados, desenvolvidos e aperfeiçoados ao longo de séculos e que as atuais aplicações são resultados de observações e deduções. Para descrever a história dos conteúdos relevantes para a linearidade não será utilizada a ordem cronológica, mas sim um pequeno resumo de como cada um dos itens foram aplicados e desenvolvidos para que pudéssemos utilizá-los, melhorá-los e enfim interligá-los.

Durante o Renascimento a proporção foi ativamente utilizada, principalmente na arte, fato que é apreciado ainda hoje através de grandes obras como a Mona Lisa de Leonardo da Vinci(1506). Nessa obra, se exibe a divina proporção (razão áurea) a relação entre base e altura de um retângulo, com valor aproximadode 1,618. Tal constante está presente em diversos estudos na natureza, como no crescimento das plantas, das espirais do caracol e no corpo humano. Por outro lado, o relato mais antigo sobre a resolução de problemas utilizando algo semelhante a função ocorreu na Babilônia através de tabelas que relacionavam grandezas. Na Grécia antiga, os pitagóricos utilizaram relações entre o tamanho das cordas e a altura do som produzido por elas. Mas é na Idade Moderna que se tem um relato mais extenso e aprofundado das funções. Nesta época a Matemática passou a descrever as realidades físicas e do cotidiano e contou com as descobertas de matemáticos como Descartes (1595 - 1650), que introduziu os eixos numerados (retas ortogonais) que permitiu a representação gráfica da relação de duas variáveis ,Newton (1643-1727) que introduziu as variáveis independentes, Galileu (1564 -1642) com seu estudo da queda dos corpos em que trabalhou com a relação espaço e tempo, Leibniz (1646-1716) que foi o primeiro a utilizar a palavra função para representar relações entre grandezas e Euler (1707-1783), que contribuiu com a notação de funções f(x) e definiu função de forma analítica. As noções de função foram desenvolvidas ao longo de séculos e até hoje apresentam grande importância para diversas áreas do conhecimento.

Matrizes, determinantes e sistemas lineares também tem uma origem antiga. Por volta de 2800 a.C , os chineses já conheciam o quadrado mágico , o que pode ser interpretado como uma matriz. Mais tarde, os chineses utilizam as matrizes para a resolução de um problema que se assemelha ao sistema linear no livro K'ui Ch'ang Suanshu (Nove capítulos sobre a arte da Matemática). Somente em 1683, o matemático japonês Seki

Kowa, desenvolveu a resolução de sistemas lineares com a utilização de determinantes baseada no livro. Em 1693 as matrizes chegam ao Oriente através de um estudo de Leibniz, que utilizou uma matriz de ordem 3 para a resolução de sistemas. Outros matemáticos continuaram o trabalho com as matrizes entre eles Cramer (1704-1752) que desenvolveu um método para resolver um sistema linear com n equações e n incógnitas; Cauchy (1789-1857) matemático que mais contribuiu com a teoria dos determinantes através de matrizes, o matemático Arthur Cayley (1821 -1895) desenvolveu, entre outros assuntos, a álgebra das matrizes que foi publicada no livro Memoir on the Theory of Matrizes(1858) além de contribuições de geometria analítica e teoria das transformações. Atualmente as matrizes são utilizadas por arquitetos, engenheiros, economistas e programadores entre outros profissionais.

O conceito de função, permitiu um considerável desenvolvimento e generalização, do conceito de proporção e, atualmente, a idéia de proporção pode ser compreendida por meio de uma familia de funções, denominadas de funções lineares, que podem ser caracterizadas por matrizes.

O desenvolvimento dessa introdução foi baseada nas referências [1],[7],[8],[12],[17],[40] e [41].

Capítulo 2

A linearidade na Revista do Professor de Matemática: uma análise.

Nesta dissertação, nosso interesse é verificar como são tratados os assuntos relacionados ao estrudo da proporcionalidade, funções e matrizes. Nossa opinião é a de que atual forma de enfocar e ensinar esse tema não está adequado a atual realidade. Entendemos que o conceito que melhor substituiria seria o conceito de linearidade.

Conhecendo um pouco a evolução da matemática ao longo dos séculos e percebendo as aplicações utilidades até os dias atuais em diferentes áreas do conhecimento e a necessidade de verificar como vem sendo tratada dentro das escolas e do seu meio matemático foi elaborada uma análise textual discursiva, nos artigos selecionados da Revista do Professor de Matemática (RPM), tomando como base o entendimento, segundo GALIAZZI e MORAIS (2006):

> "... análise textual discursiva como procedimento de pesquisa que permite quatro reconstruções concomitantes: 1. do entendimento de ciência e de seus caminhos de produção; 2. do objeto da pesquisa e de sua compreensão; 3. da competência de produção escrita; 4. do sujeito pesquisador. Argumenta-se que a análise textual discursiva cria espaços de reconstrução, envolvendo-se nisto diversificados elementos, especialmente a compreensão da produção de significados sobre os fenômenos investigados e a transformação do pesquisador."

A análise dos artigos da revista RPM será feita pelo conteúdo comum, no caso a regra de três, a proporção, funções afim e matrizes conteúdos escolhidos para representar a Linearidade.O segundo capítulo está destinado a descontrução e reconstrução do texto com o intuito de verificar a forma com que os temas são abordados e a frequência com que são tratados.

Após a seleção dos artigos, foi elaborada a desconstrução deles. Os artigos foram analisados e separados por meio de fichas, respeitando a ordem das publicações, coletando os dados: autores, o tema, assunto referente ao artigo (o que representa separando a ideia principal). Em seguida foi feito um resumo relatando a forma como o assunto foi abordado, a conclusão a que o autor chegou e finalmente um comentário pessoal do que foi compreendidos. Esse comentário tem o intuito de aprofundar a interpretação, para se obter dados que não seria possível em uma leitura habitual, ou seja um resumo que contém as ideias principais do artigo para em seguida ser feita a relação entre eles. Finalmente, foi feita uma análise de como a relação entre os conceitos de proporções, funções e matrizes representando a linearidade, foi feita nos artigos analisados.

Os artigos foram selecionados de todas as revistas publicadas até o final de 2012, sendo que o critério de seleção se deu pela importância que as proporções e regras de três apresentam para algumas áreas do conhecimento e até mesmo no dia a dia de pessoas que nunca estudaram Matemática. O intuito é verificar as mudança no ensino das proporções durante essas três décadas da publicação da revista.

Os artigos e números da RPM selecionados foram:

Revista do Professor de Matemática, $n^0$2, 1982;

Revista do Professor de Matemática, N^0 8, 1^0 semestre de 1986;

Revista do Professor de Matemática, N^0 9, 2^0 semestre de 1986;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$10, 1^0 semestre de 1987.

Revista do Professor de Matemática, N^0 12, 1^0 semestre de 1988;

Revista do Professor de Matemática, N^0 14, 1^0 semestre de 1989;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$21, 2^0 quadrimestre de 1992;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$23, 1^0 semestre de 1993;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$31, 2^0 quadrimestre de 1996;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$32, 3^0 quadrimestre de 1996;

Revista do Professor de Matemática, $N^0$33, 1^0 quadrimestre de 1997;

Revista do Professor de Matemática, $N^0 40$, 2^0 quadrimestre de 1999;

Revista do Professor de Matemática, $N^0 45$, 1^0 quadrimestre de 2001;

Revista do Professor de Matemática, $N^0 47$, 3^0 quadrimestre de 2001;

Revista do Professor de Matemática, N^0 54, 1^0 quadrimestre de 2004;

Revista do Professor de Matemática, $N^0 59$, 1^o quadrimestre de 2006;

Revista do Professor de Matemática, N^0 60, 2^0 quadrimestre de 2006;

Revista do Professor de Matemática, N^0 62, 1^0 quadrimestre de 2007;

Revista do Professor de Matemática, N^0 63, 2^0 quadrimestre de 2007;

Revista do Professor de Matemática, N^0 64, 3^0 quadrimestre de 2007 ;

Revista do Professor de Matemática, $N^0 76$, 3^0 quadrimestre de 2011.

Esses artigos foram selecionados através do CD que contem da 1^a a 65^a edição e as escolha ocorreu pelo índice em que os artigos aparecem separados por assunto, escolhendo os que representam conteúdos relacionados a Linearidade. As demais edições da revista até o número 79 foram selecionadas através da leitura dos artigos buscando os que apresentavam relevância ao trabalho. Apenas os artigos que tratavam de forma direta as proporções, regra de três,funções afim e matrizes foram utilizados.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^0 2,1982.

AUTOR (ES): Luiz Márcio P. Imenes , José Jakubovic

TÍTULO DO ARTIGO: Considerações Sobre o Ensino da Regra de Três Composta.

ASSUNTO: Destinado ao ensino da regra de três composta através da resolução de alguns problemas.

OBJETIVOS DO AUTOR: Apresentar uma nova abordagem para o ensino da Regra de Três composta já que o conteúdo aparece, na maioria dos livros, de forma mecânica, reduzindo o ensino a uma simples aplicação de flechas sem significado aparente.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra, primeiramente, a resolução de problemas de regra de três composta através de sucessões de regra de três simples para em seguida trabalhar o mesmo problema usando a proporção e finalizando com a resolução pelo método das flechas.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Independente do método escolhido pelo professor o aluno deve saber qual o significado da regra de três para que a resolução não seja uma simples aplicação de formula sem sentido.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O autor procura, através da resolução de problemas, mostrar uma nova alternativa de aprendizagem diferente do que ocorre muitas vezes tanto nos livros como no dia a dia. A aprendizagem não deve ser feita através de fórmulas e receitas sem que se tenha noção do conteúdo a ser tratado.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, $N^0 08,1^0$ semestre de 1986.
AUTOR (ES): Geraldo Ávila
TÍTULO DO ARTIGO: Razões, Proporções e Regra de Três
ASSUNTO: Destinado ao ensino da proporção que se inicia na 6^a série (7^o ano).
OBJETIVOS DO AUTOR: Tratar de forma didática as proporções e regras de três, mostrando a aplicação em outras áreas do ensino.
RESUMO DO ARTIGO: Inicia com a parte histórica dando os devidos créditos a teoria de Eudoxo, que levava em conta a geometria para verificar e comprovar as proporções em seguida mostra a proporção direta e inversa somente de modo algébrico, usando a razão.
CONCLUSÕES DO AUTOR: A ideia de usar termos como "quarta proporcional", "terceira proporcional", ou mesmo antecedente ou precedente só dificulta o ensino. Para facilitar é propicio trabalhar com números reais, igualdade e equações.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O autor monstrou seu trabalho com proporção e regra de três dando ênfase as equações, uma vez que resolveu todos os exemplos a partir de "fórmulas", deduzidas dos problemas, entre elas a fórmula dos gases perfeitos aplicada na Física.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, $N^0$09, 2^0 semestre de 1986.

AUTOR (ES): Geraldo Ávila

TÍTULO DO ARTIGO: Ainda sobre a Regra de Três

ASSUNTO: Análise de textos de livros didáticos Americanos que tratam a regra de três como variáveis diretamente ou inversamente proporcionais

OBJETIVOS DO AUTOR: Trabalhar com problemas contextualizado separa facilitar a assimilação e fixação do conhecimento.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo trabalha a resolução de problemas concretos com o intuito de despertar o interesse do aluno mostrando que a aplicação das regras de três não se resume apenas as aulas de Matemática.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Professores de outras ciências muitas vezes precisam trabalhar a regra de três em sua área, por isso é necessário que, não só o aluno,mas também os professores conheçam e saibam aplicá-la.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O autor demonstra um apreço pelos livros Americanos, ou melhor, pela forma com que a Matemática vem sendo tratada nesses livros já que termos antigos que dificultavam o entendimento do aluno deixam de ser usados para em seu lugar trabalhar com as frações e equações. Esse artigo é anterior a LDB de 1996, o fato descrito vem sendo modificado com o tempo.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0$09, 2^0 semestre de 1986 .

AUTOR (ES): Elon Lages Lima

TÍTULO DO ARTIGO: Que são grandezas proporcionais?

ASSUNTO: Destinado ao ensino de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

OBJETIVOS DO AUTOR: Demonstrar como reconhecer uma grandeza proporcional.

RESUMO DO ARTIGO: O autor faz um complemento ao texto do professor Geraldo Ávila da RPM08 onde justifica as fórmulas utilizadas anteriormente.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Para se chegar a uma fórmula devemos saber quando e porque aplicar cada forma de proporcionalidade.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo dá significado às formulas facilitando o entendimento já que as proporções são analisadas em cada caso. Desta forma o ensino se torna mais dinâmico e eficiente.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, $N^0 10$, 1^0 semestre de 1987.
AUTOR (ES): Flávio Wagner Rodrigues
TÍTULO DO ARTIGO: As "cadeias"do professor Bloch - Histórias que ficam na memória
ASSUNTO: Demontonstrar a necessidade do conhecimento do conteúdo a ser trabalhado por parte do professor.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar que o professor deve, além de entender os conceitos,gostar do que ensina para que o aluno tenha motivação para aprender.
RESUMO DO ARTIGO: Conta a história de um professor que devido a falta de tempo transmitiu o conteúdo relativo aos determinantes de forma mecânica sem despertar o interesse do aluno. Dois anos mais tarde o mesmo professor teve a oportunidade de lançar um desafio à turma transformando a aula mais interessante despertando a curiosidade e a vontade de aprender .
CONCLUSÕES DO AUTOR: O autor acredita que o professor deve possuir duas qualidades essenciais para transmitir o conhecimento, o conhecimento da teoria e o entusiasmo pela profissão fazendo com que, dessa forma, algum entusiasmo seja despertado no aluno.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: A ideia de despertar o interesse do aluno é uma prática que deve ser levada sempre em consideração já que desta forma o próprio aluno buscará informações, transformando o professor em facilitador deste processo.

PUBLICAÇÂO:Revista Professor de Matemática, $N^0 10$, 1^0 semestre de 1987.
AUTOR (ES): Katia Cristina Stocco Smole, Marília Ramos Centurión, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz.
TÍTULO DO ARTIGO: A interpretação gráfica e o ensino das funções.
ASSUNTO: O ensino das funções através dos gráficos.
OBJETIVOS DO AUTOR: Sugerir atividades diferenciadas onde o aluno participe do aprendizado.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo sugere 8 atividades que podem ser aplicadas para se iniciar o conceito de funções. Em todas elas são trabalhados gráficos que possibilitam a classificação, a ordenação e visualizações das operações que fornecem oportunidades para a construção dos conceitos, fazendo com que o aluno descubra as formulas e propriedades.
CONCLUSÕES DO AUTOR: O aluno deve ser ser orientados a trabalhar com gráficos já nas séries iniciais do ensino fundamental, para desta forma começar a introduzir intuitivamente o conceito de funções.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: As autoras sugerem atividades que despertam a atenção dos alunos , explorando o raciocínio lógico e dedutivo criando desta forma um aluno responsável por seu aprendizado e um professor facilitador deste processo.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática , $N^0 12$, 1^0 semestre de 1988.

AUTOR (ES): Elon Lages Lima

TÍTULO DO ARTIGO: Novamente a proporcionalidade

ASSUNTO: Destinado aos professores que enviaram textos adotados em escolas brasileiras.

OBJETIVOS DO AUTOR: Sanar dúvidas em relação ao significado de grandezas proporcionais em relação a outras e divisão diretamente proporcional.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo trata da noção de grandeza proporcional e divisão proporcional mostrando que, em alguns textos atuais, ocorrem erros de conceito.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Os autores atuais devem rever as terminologias utilizadas em seus textos já que para muitos professores é o único material de auxilio para preparar suas aulas.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA : Com a grande quantidade de livros e autores, o professor deve ficar atento a qualidade, já que muitos apresentam erros de conceitos. Os autores por sua vez devem prestar atenção ao que escrevem já que esses livros servirão para que muitos professores e alunos aprendam determinado conteúdo. Esses erros vem sendo corrigidos com a elaboração do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, $N^0$14, 1^0 semestre de 1989.

AUTOR (ES): Lúcia A. de A. Tinoco

TÍTULO DO ARTIGO: Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade

ASSUNTO: Destinado ao ensino das proporções para alunos de 7^a serie (8^o ano).

OBJETIVOS DO AUTOR: Trabalhar com alunos situações do cotidiano para que desenvolvam o conceito de proporcionalidade.

RESUMO DO ARTIGO: O trabalho é realizado com atividades diferenciadas e faz com que os alunos tirem suas próprias conclusões antes de trabalhar diretamente com a proporcionalidade, tanto que a autora faz uma relação do conteúdo com as funções.

CONCLUSÕES DO AUTOR: O importante não é impor um método ao aluno e sim deixá-lo escolher a melhor forma de resolver um problema, compreendendo a resolução.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: A autora propõe um ensino em que o aluno compreenda a regra de três e para isso trabalha com desenhos e tabelas. É importante que o aluno construa o conhecimento para que compreenda o sentido do que é feito.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^{0}21, 2^0 quadrimestre de 1992.

AUTOR (ES): Claudio Possani

TÍTULO DO ARTIGO: O produto das matrizes

ASSUNTO: Responder porque na multiplicação de matrizes as linhas são multiplicadas pelas colunas.

OBJETIVOS DO AUTOR: Tentar responder a uma pergunta feita por um aluno sobre a multiplicação de matrizes.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo faz um breve relato sobre a história e evolução dos conceitos de matrizes, relata o trabalho de Cayley sobre transformações no plano e mostra dois exemplos de aplicações do produto matricial.

CONCLUSÕES DO AUTOR: O produto matricial fica mais fácil de ser compreendido quando trabalhado de forma geométrica, além disso a teoria das matrizes mostra que a teoria pode ganhar maior importância com o passar dos anos, abrindo caminho para novas descobertas.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo aborda um assunto importante para o estudo da linearidade dando uma iniciação ao estudo das transformações lineares.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^{0}23, 1^0 semestre de 1993.

AUTOR (ES): Elon Lages Lima

TÍTULO DO ARTIGO: Sobre o ensino de Sistemas Lineares

ASSUNTO: Sugestões a serem aplicadas em aula.

OBJETIVOS DO AUTOR: Corrigir possíveis erros matemáticos encontrados principalmente em relação à Regra de Cramer, fato que foi relatado por um professor por carta.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra as diferentes interpretações e os diferentes métodos de resolução de sistemas lineares. Tais métodos foram analisados como se tivessem valores operacionais para se descobrir qual o mais eficaz.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Com o uso dos computadores surgiram novos métodos de resolução de sistemas lineares e não lineares.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo aborda diferentes formas de resolução de sistemas, mostrando a eficácia de cada um. Além disso os métodos sugeridos representam uma importante ferramenta para a correção de conceitos errôneos já que demonstra erros que aparecem em livros sobre a resolução de sistemas pelo método de Cramer.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0 31$, 2^0 quadrimestre de 1996.
AUTOR (ES): Nelson Tunala
TÍTULO DO ARTIGO: Um procedimento Geométrico para Otimização Linear no Plano.
ASSUNTO: Problemas de otimização
OBJETIVOS DO AUTOR: Demonstrar a resolução de problemas de otimização no plano pelo método geométrico.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo começa com uma questão que foi aplicada no Concurso Público ao Magistério Estadual do Rio de Janeiro realizado em 1990. O autor sugere uma pequena alteração no enunciado servindo, desta forma, de ponto de partida para o estudo da programação linear.
CONCLUSÕES DO AUTOR: A geometria é utilizada como instrumento importante na resolução de problemas de otimização.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo é um exemplo da aplicação linear em situações em que as desigualdades lineares podem ser resolvidas de forma geométrica.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0 32$, 3^0 quadrimestre de 1996.
AUTOR (ES): Maria Cristina Costa Ferreia, Maria Laura Magalhães Gomes
TÍTULO DO ARTIGO: Sobre o ensino de sistemas lineares
ASSUNTO: Interpretação geométrica dos sistemas lineares.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar que interpretação geométrica pode contribuir para a compreesão de alguns conceitos.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo relata um caso de dois professores que ao adotar o método de resolução geométrico para a resolução de sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas se sentiram mais seguros e confiantes em relação ao assunto. Mostra, também, a correção de conceitos relacionadaos à resolução pelo método de Cramer que era apresentado aos alunos. Relatam dois outros professores. Esses métodos geométricos foram representados gráficamente no texto.
CONCLUSÕES DO AUTOR: A geometria pode servir como recurso para o ensino de temas algébricos.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo inova ao demonstrar que é possível resolver graficamente sistemas linearea 3x3, mostrando mais uma possibilidade para a resolução de problemas.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^{0}33, 1^0 quadrimestre de 1997.
AUTOR (ES): Elon Lages Lima
TÍTULO DO ARTIGO: Crescimento Linear e Crescimento Exponencial
ASSUNTO: Modelos lineares e Modelos exponenciais
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar dois modelos utilizados para a resolução de problemas elementares.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo trabalha com exemplos de modelos lineares sendo feita uma apresentação dos principais conceitos de função com teoremas e demonstrações. Esse mesmo tratamento é dado as funções exponenciais. Para que com esse conhecimento o aluno seja capaz de escolher o melhor modelo matemático para ser utilizado na resolução de problemas.
CONCLUSÕES DO AUTOR: Na modelagem matemática temos que conhecer pelo menos dois casos de funções as lineares e as exponenciais, que são as mais utilizadas em problemas elementares.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo é um bom ponto de partida para o estudo da linearidade começando pela ligação que faz da proporção com a função linear e aprofundando o assunto com a demonstração dos principais conceitos de funções.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^{0}40, 2^0 quadrimestre de 1999.
AUTOR (ES): Antonio Carlos Tomarozzi
TÍTULO DO ARTIGO: Matrizes em Blocos
ASSUNTO: Forma triangular em blocos
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar uma forma diferente de trabalhar a matriz triangular separando-a em blocos facilitando o calculo do determinante.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra como transformar uma matriz em bloco e em seguida faz o calculo do determinante. Para finalizar é feita uma demonstração do Teorema de Binet.
CONCLUSÕES DO AUTOR:A forma generalizada da forma triangular das matrizes facilita a resolução de determinantes.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA:É uma boa alternativa para a resolução de determinantes derivados de matrizes de ordem acima de 4.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0$45, 1^0 quadrimestre de 2001.

AUTOR (ES): Antonio Carlos Tamarozzi

TÍTULO DO ARTIGO: Codificando e Decifrando Mensagens

ASSUNTO: O uso da criptografia no ensino.

OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar uma atividade diferenciada que ajude o aluno a fixar conteúdos.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo faz um breve relato da história da criptografia e de como, mesmo ao longo do tempo, continua sendo utilizada para manter dados em sigilo. Em seguida demonstra uma aplicação das funções no uso da codificação de dados mostrando um exemplo utilizando função e outro usando matrizes.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Esse tipo de criptografia pode não servir para codificar dados que devem ser mantidos em sigilo, mas pode instruir o aluno para que serve a codificação.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo demosntra que a matemática pode ser trabalhada de forma divertida, utilizando o conceito de funções no primeiro caso, e de matrizes no segundo, conteúdos que estão ligados a linearidade.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0$47, 3^0 quadrimestre de 2001.

AUTOR (ES): Antônio Luiz Pereira, Sergio D. Assumpção, Renata M. Ehlers, Júlio C.S.Sanches

TÍTULO DO ARTIGO: Transformações no Plano e Sistemas Articulados

ASSUNTO: Translação e rotação.

OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar a ampliação, rotação e reflexão de figuras.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra a ampliação de figuras utilizando um pantógrafo trabalhando desta forma a homotetia, e demonstra a utilização do rotor de Sylvester.

CONCLUSÕES DO AUTOR: É possível realizar rotação, ampliação e reflexão utilizando técnicas antigas que podem ser provadas usando a axiomática atual.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo trata de transformações lineares e as diferentes formas de linguagem: geométrica e algébrica.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0$47, 3^0 quadrimestre de 2001.
AUTOR (ES): Darlan Moutinho
TÍTULO DO ARTIGO: Ainda os sistemas lineares
ASSUNTO: A correção do teorema de Cramer na resolução de sistemas lineares.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar onde ocorre o erro e corigi-lo.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo trata de um assunto que já foi abordado em duas revistas anteriores, mas ainda representa um problema no ensino, uma vez que os livros e professores continuam a trabalhar com erros conceituais.
CONCLUSÕES DO AUTOR: Podemos utilizar a interpretação geométrica para facilitar o entendimento do sistema o que ajudaria a corrigir o erro conceitual que encontramos na regra de Cramer.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo repete um assunto que já foi visto em edições anteriores, mas desta vez foi explicado o passo a passo demonstrando onde costuma ocorrer o erro o que auxilia na correção dos conceitos.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0$54, 1^0 quadrimestre de 2004.
AUTOR (ES): Eduardo Colli
TÍTULO DO ARTIGO: Imposto Progressivo
ASSUNTO: Destinado ao ensino da proporção.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar que a proporção está associada a situações cotidianas, dando como exemplo o imposto pago.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo trata da proporcionalidade que pode ser precebida no pagamento de impostos explicando como funciona a regra de desconto do salário e mostrando que quem ganha mais paga uma porcentagem maior, já que a porcentagem descontada depende do valor recebido.
CONCLUSÕES DO AUTOR: Podemos tratar de conceitos matemáticos dentro da realidade Brasileira, no caso com o pagamento de impostos.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo é um bom ponto de partida para se falar de impostos e faz com que o aluno tenha uma noção de quanto o governo arrecada em determinadas transações, mostrando uma aplicabilidade da matemática em conteúdos do dia a dia.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, N^{0}59, 1^0 quadrimestre de 2006.

AUTOR (ES): Adalberto A. Dornelles Filho

TÍTULO DO ARTIGO: Montando uma Dieta Alimentar com Sistema Lineares

ASSUNTO: Mostrar uma aplicação para os sistemas lineares.

OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar que os sistema lineares podem ser utilizados para resolver problemas nutricionais.

RESUMO DO ARTIGO:O artigo demonstra o uso de sistemas lineares na composição de uma dieta alimentar, utilizando para isso uma tabela com os principais nutrientes de alguns alimentos que é transformada em equações lineares. Os dados também são expostos de forma gráfica.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Podemos tratar de conceitos matemáticos oferencendo ao aluno uma oportunidade de refletir sobre outros temas como a fome, a desigualdade social.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo apresenta uma utilização prática da matemática o que pode ser considerado importante uma vez que poderá criar uma conecção entre a escola e o dia a dia.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0 60$, 2^0 quadrimestre de 2006.

AUTOR (ES): Ana Carolina P. Hellmeister

TÍTULO DO ARTIGO: Jornal na sala de aula

ASSUNTO: Aplicação do jornal na sala de aula.

OBJETIVOS DO AUTOR: Utilização do jornal como ferramenta de ensino.

RESUMO DO ARTIGO: Depois de perceber que os professores não sabiam como trabalhar com recortes de jornais para incentivar e motivar os alunos a estudarem matemática, a autora resolver mostrar alguns exemplos que podem ser aplicados em sala.

CONCLUSÕES DO AUTOR: A utilização de reportagens permite ao professor inserir o aluno no mundo em que vive, ou seja, ensina o aluno a ler e entender algumas reportagens e mostra a matéria contextualizada o que auxilia no aprendizado.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O autor demonstra que é possível trabalhar a proporção e a regra de três de forma dinâmica com notícias atuais e com material simples de ser adquirido.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, N^{0}62, 1^0 quadrimestre de 2007.

AUTOR (ES): José Carlos Magossi

TÍTULO DO ARTIGO: Gasolina versus álcool

ASSUNTO: Comparação entre o custo e o beneficio da gasolina e do álcool no abastecimento.

OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar ao leitor como deve ser feito os cálculos para verificar qual o mais vantajoso para o consumidor.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra os cálculos que devem ser aplicados para que se verificar se compensa abastecer o carro com álcool ou gasolina mostrando a relação quilômetros por litro e verificando em qual dos casos o custo para abastecimento é menor.

CONCLUSÕES DO AUTOR: Na resolução dos exemplos o autor verificou a diferença de valores existente entre o uso da gasolina e o uso do álcool.

COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo mostra a matemática sendo aplicada em uma situação real o que ajuda a despertar o interesse do aluno já que mostra uma aplicabilidade na escolha da melhor opção de combustível.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, $N^0$63, 2^0 quadrimestre de 2007.

AUTOR (ES): Ricardo Avelar Sotomaior Karam

TÍTULO DO ARTIGO: Grandezas Físicas para exemplificar a Função afim

ASSUNTO: Aplicações das funções afim na Física.

OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar ao leitor que a função afim é aplicada na Física em áreas como a Cinemática e na Estática.

RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra a aplicação do modelo matemático com aplicação na Física. Os exemplos trabalhados representam situações que são estudadas por alunos do ensino Médio. No primeiro caso mostra como é calculada a relação entre a posição em que o carro se encontra e o tempo. No segundo exemplo é feita a relação entre a deformidade de molas e seu Peso.

CONCLUSÕES DO AUTOR: O autor mostrou duas aplicações possíveis de serem trabalhadas com alunos do ensino médio e que mostram a relação existente entre a Matemática e a Física.

COMENTÁRIO DO ANALISTA : As aplicações podem ser levadas para a sala de aula favorecendo o entendimento do aluno o que facilita o conhecimento.

PUBLICAÇÃO: Revista Professor de Matemática, N^{0}64, 3^0 quadrimestre de 2007
AUTOR (ES): Robinson Nelson dos Santos
TÍTULO DO ARTIGO: Contagens de Multidões: Quantas Pessoas Cabem na Avenida Paulista
ASSUNTO: O calculo de pessoas que podem estar presentes ao mesmo tempo na Avenida Paulista e mostrar como esse calculo pode ser efetuado para qualquer local.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar ao leitor como é calculado o número de pessoas que cabem em um determinado local para a realização de eventos e a importância desse conhecimento que não é restrito apenas a Matemática.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo mostra como deve ser feito o cálculo para estimar o número de participantes previstos em determinados locais para que se consiga estipular as medidas de segurança que devem ser tomada como a quantidade de policiais ou ambulância. O artigo também relata que o assunto não é só importante para a matemática uma vez que cita o sociólogo Clark McPhail que adotou o método de Jacob, mesmo que com algumas modificações, para a estimativa da população.
CONCLUSÕES DO AUTOR: O autor demonstrou que a matemática não fica restrita apenas a sala de aula, nem tem aplicação apenas para matemáticos, podendo ser usada em situações cotidianas.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo mostra a matemática como ferramenta importante para a realização de eventos onde são esperados um número elevado de pessoas. Além disso, são demonstrados os cálculos o que acaba incentivando uma pesquisa mais ampla e até mesmo um trabalho feito em sala usando funções para se trabalhar com dimensões diferentes.

PUBLICAÇÃO: Revista do Professor de Matemática, $N^0 76$, 3^0 quadrimestre de 2011.
AUTOR (ES): Rogério César dos Santos
TÍTULO DO ARTIGO: Função Afim e Festa
ASSUNTO: Uso da função para preparação de uma festa.
OBJETIVOS DO AUTOR: Mostrar o uso da função em situações do cotidiano.
RESUMO DO ARTIGO: O artigo trabalha a função afim a partir de um problema que envolve um cha de bebe e quantas pessoas poderão ser convidadas para que a festa caiba dentro do orçamento. Além disso faz uma comparação com a quantidade de fraldas que se pode comprar com a mesma quantia para se verificar qual das opções é mais vantajosa.
CONCLUSÕES DO AUTOR:O autor verificou que na comparação feita a compra de fraldas seria a opção mais vantajosa.
COMENTÁRIOS DO ANALISTA: O artigo trata de uma situação que pode ser utilizada pelos alunos, o que auxilia no processo de aprendizagem.

Elaboraremos agora uma análise geral dos artigos seleconados.

Com exceção do artigo de Elon Lages Lima,1988, os artigos analisados apresentam a matemática de forma contextualizada, demonstrando que a matemática deve ser trabalhada, sempre que possível, aplicada ao dia a dia demonstrando a aplicabilidade em situações como na cobrança de impostos ou na escolha de combustível de modo a economizar. Outra preocução que aparece nos artigos é o ensino equivocado das proporções e regra de três, fato que ficou explicito no artigo de Elon Lages Lima, 1988, que tenta minimizar os erros que comumente apareciam em livros brasileiros, o que já esta sendo corrigido nos livros americanos como mostra a análise feita pelo profenssor Geraldo Ávila que os avalia de forma positiva.

Poucos são os artigos que abordam as funções afim, matrizes e sistemas lineares .Em dois desses artigos os autores comentam os erros que ocorrem na resolução de sistema utilizando o método de Cramer.

A preocupação do professor Lima(1988) é fundamentada na falta de material específico para preparação de aula dos professores, já que para muitos o livro didático ainda é a única fonte de consulta. Mesmo nos dia atuais com o avanço da Internet e com conteúdos espalhados pela rede esse problema ainda persiste.

No aspecto positivo dessas análises, encontramos a matemática voltada para a realidade do educando, uma vez que é possível notar a preocupação em fazer uma relação com outras áreas do conhecimento. Isso favorece a aprendizagem,pois favorece a desmistificação (a matemática foi feita somente para poucos é um mito). No aspecto desfavorável, notamos a falta de ligação entre os diferentes conteúdos. Em particular, observamos que em nenhum artigo foi tratado a relação do conceito de proporção com o de funções, no nosso caso com as funções afim, ou mesmo de que foi demonstrada uma relação gráfica.

Atualmente, vivemos num mundo profundamente transformado e em processo de transformação, pelos mais variados avanços científicos. Vivemos cada vez mais numa sociedade tecnológica. Assim, repensar alguns conteúdos de matemática no ensino fundamental e médio é motivo de extrema urgência, em nossa sociedade. Devemos ser ousados, pois os tempos atuais exigem um novo tipo de abordagem. Um enfoque de uma forma mais globalizada, a fim de atender as exigências dessas transformações que cada vez mais se diversificam e se complexificam, nos mais variados setores da vida, e em decorrência desses fatos, atender a uma formação mais adequada dos nossos alunos, visando prepara-los para os futuros desafios com que eles se defrontarão. A linearidade é a generalização do conceito de proporção. Ela pode ser encontrada em uma ampla variedade de fenômenos. Além disso, esse conceito tem trazido muitas aplicações na ciência em geral.

Considerando que o conceito de linearidade é de fácil compreensão, pois não requer conceitos matemáticos elaborados, mas somente de uma boa dose de intuição, acreditamos que a introdução adequada dele, nos níveis do ensino fundamental e médio, não venha causar nenhum tipo de prejuízo a formação, mas sim a de uma conscientização de uma transformação presente em vários fenômenos da natureza e possuindo várias aplicações nos mais variados ramos científicos. O tema da linearidade poderá ser mais bem aproveitado em sala de aula, pois os exemplos que poderão ser apresentados estarão atualizados, ao nosso momento presente, permitindo aos alunos compreenderem certos avanços tão importantes e de tão simples compreensão, que a ciência vem realizando.

No ensino fundamental a ideia de linearidade pode começar a ser abordada juntamente com as proporções, demonstrando através de gráficos e tabelas. Ao trabalhar com sistema de duas equações novamente surge a ideia de ligar os conteúdos mostrando uma continuidade no assunto para que ao chegar ao final do ensino fundamental o aluno consiga associar essa ideia à aplicações do Teorema de Tales e noções de funções afim. No ensino médio esses conceitos podem ser ampliados para problemas que envolvam vários parametros, utilizando as funções lineares, permitindo a construção de novos tipos de problemas, aplicações e novos métodos de obtenção de soluções. Para melhor compreensão da linearidade, no seu contexto mais geral, devemos conhecer as noções fundamentais de corpo, espaço vetorial, matrizes e a classe das funções lineares e afins. Assim, nos capítulos que se seguem, vamos apresentar um estudo aprofundado destes conceitos.

Neste capítulo, foram usadas as referências [4],[5],[6],[10],[11],[13],[15],[18],[19],[20], [21],[22],[23],[25],[25],[26],[27],[28],[29],[31],[32],[33],[35],[36],[37] e [38].

Capítulo 3

Noções fundamentais

Nesse capítulo, apresentamos todas as noções que serão usadas nessa dissertação que servem de fundamento para as resoluções das atividades propostas.. Trabalhamos com a noção geral de um corpo tendo em vista as aplicações ao ensino médio, sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e dos números complexos $\mathbb{C}$.

3.1 Corpos

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{K}$ um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{K}$ é um corpo se existem duas operações binárias sobre $\mathcal{K}$*

$$+ : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \text{ (operação de adicão)}$$

e

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K} \text{ (operação de multiplicação)},$$

verificando as seguintes propriedades: para quaisquer elementos a, b e c em $\mathcal{K}$ temos

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (lei associativa);

2) $a + b = b + a$ (lei comutativa);

3) existe um único elemento em $\mathcal{K}$, denotado por 0 e denominado de elemento neutro da adição ou simplesmente o zero de $\mathcal{K}$, tal que

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ para todo } a \in \mathcal{K};$$

4) para todo elemento $a \in \mathcal{K}$, existe um único elemento em $\mathcal{K}$, denotado por $-a$ e denominado de oposto aditivo de a ou simétrico de a, tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

5) $(ab)c = a(bc)$ *(lei associativa);*

6) $ab = ba$ *(lei comutativa);*

7) existe um único elemento em $\mathcal{K}$*, denotado por* 1 *e denominado de elemento neutro da multiplicação ou simplesmente a unidade de* $\mathcal{K}$ *tal que*

$$a1 = 1a = a, \text{ para todo elemento } a \in \mathcal{K};$$

8) para todo elemento $a\ (\neq 0) \in \mathcal{K}$*, existe um único elemento em* $\mathcal{K}$*, denotado por* a^{-1} *e denominado de inverso de* a*, tal que*

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$$

9) $a(b + c) = ab + ac$ *(lei distributiva).*

Observação 3.1.2. *Escreveremos* $a - b = a + (-b)$*, quaisquer que sejam os elementos* $a, b \in \mathcal{K}$*.*

Proposição 3.1.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $0a = 0$*, para todo elemento* $a \in \mathcal{K}$*;*

(ii) $ab = 0$ *se, e somente se,* $a = 0$ *ou* $b = 0$*, para quaisquer* $xa, b \in \mathcal{K}$*.*

Demonstração. (i) Para todo elemento $a \in \mathcal{K}$, temos que $0a = (0+0)a = 0a + 0a$. Assim, somando em ambos os lados, na última igualdade, o simétrico de $0a$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 = 0a + \big(-(0a)\big) &= (0a + 0a) + \big(-(0a)\big) \\ &= 0a + \big(0a + \big(-(0a)\big)\big) = 0a + 0 = 0a. \end{aligned}$$

(ii) Se $a = 0$, então não há o que demonstrar. Agora, se $a \neq 0$, então $b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$, pelo item (i).

3.2 Matrizes sobre um corpo

Nesse parágrafo, apresentaremos o conceito de matriz, amplamente utilizado em organizações de dados númericos, na resolução de sistemas de equações lineares entre outras finalidades.

3.2.1 Definições e operações binárias

Definição 3.2.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e números naturais m e n. Definimos uma $m \times n$ matriz sobre $\mathcal{K}$ como uma função definida no produto cartesiano $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ com valores no corpo $\mathcal{K}$.*

Usualmente denotamos as $m \times n$ matrizes sobre $\mathcal{K}$ pelas letras latinas maiúsculas $(A, B, \ldots, Z)$ e as representamos na forma, abaixo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

onde $a_{ij} \in \mathcal{K}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

Denotaremos o conjunto de todas as $m \times n$ matrizes sobre $\mathcal{K}$ por

$$\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n}.$$

Sobre o conjunto $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n}$ podemos definir duas operações, conforme abaixo:

$$+ : \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n} \times \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n} \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n} \text{ (adicão)},$$

onde quaisquer que sejam as $m \times n$ matrizes sobre $\mathcal{K}$ $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}],$$

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n} \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n} \text{ (multiplicação por um escalar)},$$

onde qualquer que seja o elemento c de $\mathcal{K}$ e uma $m \times n$ matriz sobre $\mathcal{K}$ $A = [a_{ij}]$,

$$cA = [ca_{ij}].$$

Proposição 3.2.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então, as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas sobre $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m \times n}$ satisfazem as seguintes propriedades: para quaisquer* *elementos* $a, b \in \mathcal{K}$ *e matrizes* A, B *e* C *em* $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$ *temos*

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(lei associativa);*

2) $A+B = B+A$ *(lei comutativa);*

3) existe uma única matriz em $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*, denotada por* 0 *e denominada de matriz nula de* $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*, tal que*

$$A+0 = 0+A = A, \text{ para todo } A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n};$$

4) para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*, existe uma única matriz em* $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*, denotada por* $-A = [-a_{ij}]$*, e denominada de matriz simétrica de* A*, tal que*

$$A+(-A) = (-A)+A = 0;$$

5) $1A = A$*, para tod matriz* $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*;*

6) $(a+b)A = aA + bA$*;*

7) $a(A+B) = aA + aB$*;*

8) $(ab)A = a(bA)$*.*

Observação 3.2.3. *Escreveremos* $A - B = A + (-B)$*, quaisquer que sejam as matrizes* $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$*.*

O conjunto das matrizes sobre $\mathcal{K}$ admite uma terceira operação binária do tipo

$$\cdot : \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n} \times \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{n\times p} \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times p} \text{ (multiplicação)},$$

onde quaisquer que seja a $m \times n$ matriz $A = [a_{ij}]$ e a $n \times p$ matriz $B = [b_{jk}]$,

$$AB = [c_{ik}],$$

onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots p)$.

Proposição 3.2.4. *Seja* $\mathcal{K}$ *um corpo. Então, a operação de multiplicação satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer matrizes* A, B *e* C*, sempre que os produtos estejam definidos temos*

10) $(AB)C = A(BC)$ *(lei associativa);*

11) $A(B+C) = AB + AC$ *(lei distributiva a esquerda);*

12) $(A+B)C = AC + BC$ *(lei distributiva a direita).*

Observamos que a multiplicação de matrizes nem sempre é comutativa. De fato, dada as matrizes A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, a partir de um cálculo direto verificamos que o produto AB está bem definido, conforme abaixo,

AB = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7+1.1 \\ 5.7+6.1 \\ 1.7+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 41 \\ 7 \end{bmatrix}$. Entretanto, é de fácil verificação que o mesmo não ocorre para o produto BA.

Mesmo quando é possível ambos os produtos, ainda assim não está garantida a comutatividade. De fato, dado A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se que $AB \neq BA$, pois

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.2 & 1.5+2.1 \\ 3.1+4.2 & 3.5+4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+5.3 & 1.2+5.4 \\ 2.1+1.3 & 2.2+1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 22 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Matriz inversa

Em analogia ao conceito de elemento inverso de um corpo, o conceito de matriz inversa envolve os de matriz quadrada e matriz identidade.

Definição 3.2.5. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e m um número natural. Uma matriz quadrada de ordem m é toda matriz cujo o número de linhas coincide com o número de colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Definimos a matriz unidade multiplicativa ou simplesmente a unidade de $\mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times m}$ como a matriz $I_m = [\iota_{ij}]$, onde

$$\iota_{ij} = 1, \ \ se\ i = j, \ \ e\ \iota_{ij} = 0, \ \ se\ i \neq j.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 3.2.6. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times m}$. Dizemos que A é invertível se existe uma matriz $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times m}$ tal que*

$$AB = BA = I_m.$$

Nesse caso, a matriz B é chamada de matriz inversa de A.

Proposição 3.2.7. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times m}$. Se A é invertível, então sua matriz inversa B é única.*

Demonstração. Suponhamos B_1 e B_2 duas matrizes inversas de A. Então, $AB_i = B_iA = I_m$ $(i = 1, 2)$. Assim, $B_1 = B_1I_m = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_mB_2 = B_2$.

Proposição 3.2.8. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e matrizes $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times m}$. As afirmações são verdadeiras:*

(i) Se A é invertível, então A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(ii) Se as matrizes A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração. (i) Imediato.
(ii) Basta observar que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\big(A^{-1}(AB)\big) = B^{-1}\big((A^{-1}A)B\big) = B^{-1}(I_mB) = B^{-1}B = I_m$.

3.3 Sistemas de Equações Lineares

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Um sistema de m equações com n incógnitas*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3.1}$$

onde a_{ij}, b_i $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ *são elementos do corpo* $\mathcal{K}$*, é chamado de sistema de equações lineares.*

Uma *solução* de (3.1) é uma n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{K}^n$ que satisfaz cada uma das suas equações constituintes. O *conjunto solução* de (3.1) é a coleção de todas as suas soluções.

Se $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, dizemos que o sistema é *homogêneo.* Caso contrário dizemos que o sistema é *não-homogêneo.*

3.4 Representação matricial de um sistema

Todo sistema de equações lineares (3.1) pode ser representado sob a forma matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos coeficientes,*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz das incógnitas* e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos termos independentes.* A matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ ou } \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

associada ao sistema de equações lineares (3.1), é chamada de *matriz ampliada do sitema.*

3.5 Forma escalonada de uma matriz

Definição 3.5.1. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$. Dizemos que A está na forma escalonada se A é a matriz nula ou se:*

i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é o escalar 1;

ii) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv) se as linhas $A_1, \ldots, A_p$ são as linhas não nulas da matriz, e se o primeiro elemento não nulo da linha A_i $(1 \leq i \leq p)$ ocorre na coluna k_i $(1 \leq k_i \leq n)$, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$.

Definição 3.5.2. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$. Definimos o posto de A como o número de linhas não nulas de sua matriz forma escalonada.*

Teorema 3.5.3. Teorema do Posto. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times 1}$ e o sistema de equações lineares $AX = B$. Seja p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema $[A|B]$ e p_A o posto da matriz dos coeficientes de A. Então:*

i) $p_{AB} = p_A$ se, e somente se, o sistema de equações lineares admite solução;

ii) Se $p_{AB} = p_A = n$, então o sistema de equações lineares possui única solução;

iii) Se $p_{AB} = p_A < n$, então o sistema de equações lineares possui infintas soluções com $n - p_A$ incógnitas livres e p_A incógnitas dependentes das anteriores.

Capítulo 4

O espaço vetorial $\mathcal{K}^n$

Nesse capítulo, apresentamos a noção de espaço vetorial $\mathcal{K}^n$ tendo em vista desenvolver os conceitos necessários envolvendo linearidade, a partir do conceito de função linear, para os casos onde as suas variáveis envolvam vários parâmetros.

4.1 O conjunto $\mathcal{K}^n$

Definição 4.1.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e n um número natural. Definimos o conjunto*

$$\mathcal{K}^n = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i\ (1 \leq i \leq n) \in \mathcal{K}\},$$

denominado de conjunto das n-uplas de $\mathcal{K}$.

Sobre o conjunto $\mathcal{K}^n$ podemos definir duas operações binárias, conforme abaixo:

$$+ : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n \text{ (adicão)},$$

onde quaisquer que sejam as n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathcal{K}^n$,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n \text{ (multiplicação por um escalar)},$$

onde qualquer que seja o elemento c de $\mathcal{K}$ e a n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{K}^n$,

$$cx = (cx_1, \ldots, cx_n).$$

Na Proposição abaixo, as demonstrações não apresentam dificuldades e por isso serão omitidas.

Proposição 4.1.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então, as operações de adição e multiplicação por um escalar, definidas sobre $\mathcal{K}^n$ satisfazem as seguintes propriedades: para quaisquer elementos $a, b \in \mathcal{K}$ e n-uplas x, y e z em $\mathcal{K}^n$ temos*

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (lei associativa);

2) $x + y = y + x$ (lei comutativa);

3) existe uma única n-upla em $\mathcal{K}^n$, denotada por $0 = (0, \ldots, 0)$ e denominada de n-upla zero de $\mathcal{K}^n$, tal que

$$x + 0 = 0 + x = x, \text{ para todo } x \in \mathcal{K}^n;$$

4) para toda n-upla $x \in \mathcal{K}^n$, existe uma única n-upla em $\mathcal{K}^n$, denotada por $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$, e denominada de n-upla simétrica de x, tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

5) $1x = x$, para toda n-upla $x \in \mathcal{K}^n$;

6) $(a + b)x = ax + bx$;

7) $a(x + y) = ax + ay$;

8) $(ab)x = a(bx)$.

Observação 4.1.3. *Escreveremos $x - y = x + (-y)$, quaisquer que sejam as n-uplas $x, y \in \mathcal{K}^n$.*

Proposição 4.1.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $0x = 0$, para toda n-upla $x \in \mathcal{K}^n$;

(ii) $a0 = 0$, para todo elemento $a \in \mathcal{K}$;

(ii) $ax = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $x = 0$, para qualquer elemento $a \in \mathcal{K}$ e n-upla $x \in \mathcal{K}^n$.

Demonstração. Todas as demonstrações são idênticas as da Proposição 3.1.3 e por isso as omitiremos.

Definição 4.1.5. *O conjunto $\mathcal{K}^n$ munido das operações de adição e multiplicação por um escalar é chamado de espaço vetorial das n-uplas sobre o corpo $\mathcal{K}$.*

A partir de agora consideraremos o conjunto $\mathcal{K}^n$ sempre como um espaço vetorial sobre o corpo $\mathcal{K}$, relativo as operações de adição e multiplicação definidas acima.

Definição 4.1.6. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\mathcal{J}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{K}^n$. Dizemos que o subconjunto $\mathcal{J}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$ se $\mathcal{J}$ é um espaço vetorial sobre $\mathcal{K}$ com as operações de $\mathcal{K}^n$ induzidas sobre si mesmo.*

Proposição 4.1.7. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\mathcal{J}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{K}^n$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $\mathcal{J}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{K}^n$*;*

(ii) para quaisquer elementos $a, b \in \mathcal{K}$ e n-uplas $x, y \in \mathcal{J}$, temos que $ax + by \in \mathcal{J}$;

(iii) para qualquer elemento $a \in \mathcal{K}$ e n-uplas $x, y \in \mathcal{J}$, temos que $ax + y \in \mathcal{J}$.

4.2 Subespaços gerados

Nesse parágrafo, apresentamos uma importante ferramenta de construção de novos espaços vetoriais, conforme a definição abaixo.

Definição 4.2.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ um conjunto constituido por r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Um elemento $u \in \mathcal{K}^n$ é chamado de combinação linear do conjunto α ou das n-uplas $u_1, \ldots, u_r$ se existem escalares $a_1, \ldots, a_r$ de $\mathcal{K}$ tais que*

$$u = a_1u_1 + \ldots + a_ru_r.$$

Denotaremos por $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}(\alpha)$ ou ainda $\mathcal{G}(u_1, \ldots, u_r)$ o conjunto de todas as combinações lineares das n-uplas $u_1, \ldots, u_r$.

Segue abaixo, um importante resultado, de fácil demonstração.

Proposição 4.2.2. *Seja $\mathcal{K}$ e α um conjunto constituido por r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Então, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\alpha)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$.*

4.3 Dependência e indepência linear

A independência ou depêndencia linear, de um conjunto de vetores, analisa a relação que existe entre os vetores desse conjunto, segundo a definição abaixo.

Definição 4.3.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ um conjunto de r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Dizemos que o conjunto α é linearmente independente (li), se a equação em $\mathcal{K}^n$*

$$a_1u_1 + \ldots + a_ru_r = 0$$

admite uma única solução.

Caso contrário, tal conjunto é chamado de linearmente dependente (ld).

Observação 4.3.2. *Diremos também que as n-uplas $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes (li) ou caso contrário de linearmente dependentes (ld).*

Proposição 4.3.3. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ um conjunto de r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Então, α é um conjunto linearmente dependente (ld) se, e somente se, existe uma n-upla em α que é combinação linear das outras restantes.*

Corolário 4.3.4. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ um conjunto de r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Então, α é um conjunto linearmente dependente (ld) se, e somente se, a equação*

$$a_1u_1 + \ldots + a_ru_r = 0,$$

admite mais de uma solução $a = (a_1, \ldots, a_n)$, em $\mathcal{K}^n$.

Corolário 4.3.5. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ um conjunto de r n-uplas de $\mathcal{K}^n$. Então, α é um conjunto linearmente independente (li) se, e somente se, a equação*

$$a_1u_1 + \ldots + a_ru_r = 0,$$

admite uma única solução, em $\mathcal{K}^n$.

Proposição 4.3.6. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$ e α um conjunto de $\mathcal{K}^n$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha)$. Então, todo subconjunto β de $\mathcal{K}^n$, contendo um número de elementos maior do que o do subconjunto α, é linearmente dependente (ld).*

Demonstração. Consideremos $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\beta = \{u'_1, \ldots, u'_r\}$ dois subconjuntos de $\mathcal{K}^n$ tais que $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha)$ e $r < s$. Para cada j $(1 \leq j \leq s)$, existem escalares $a_{ij} \in \mathcal{K}$ $(i = 1, \ldots, r)$ tais que

$$u'_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} u_i.$$

Assim, para escalares $x_1, \ldots, x_s$ em $\mathcal{K}$, temos que

$$\sum_{j=1}^{s} x_j u'_j = \sum_{j=1}^{s} x_j \big(\sum_{i=1}^{r} a_{ij} u_i \big) = \sum_{i=1}^{r} \big(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j \big) u_i.$$

Como $r < s$, então o sistema de equações lineares

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j = 0 \ (i = 1, \ldots, r)$$

possui soluções não todas nulas, dentre as quais, obtemos

$$\sum_{j=1}^{s} x_j u'_j = 0.$$

Logo, o conjunto β é linearmente dependente.

Corolário 4.3.7. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então, todo subconjunto β de $\mathcal{K}^n$, contendo um número de elementos maior do que n é linearmente dependente (ld).*

Demonstração. De fato, é de fácil verificação que o subconjunto $\mathcal{K}^n$, formado pelas n n-uplas $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ gera $\mathcal{K}^n$.

4.4 Bases

Definição 4.4.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$. Uma base de $\mathcal{S}$ é qualquer subconjunto não vazio α de $\mathcal{K}^n$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) α é um conjunto linearmente independente;

(ii) $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha)$.

Nesse caso, o número de n-uplas do conjunto α é chamado de dimensão do subespaço $\mathcal{S}$ e denotado por $\dim \mathcal{S}$.

Teorema 4.4.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$. Se α e α' são duas bases de $\mathcal{S}$ possuindo p e q elementos, respectivamente, então $p = q$.*

Demonstração. Sejam α e α' duas bases de $\mathcal{K}^n$ possuindo p e q elementos, respectivamente. Como $\mathcal{G}(\alpha) = \mathcal{K}^n$ e α' é um conjunto linearmente independente, então devemos ter $q \leq p$, pelo Teorema 4.3.6. Pelo mesmo argumento, obtemos $p \leq q$. Assim, $p = q$.

O Teorema acima nos permite definir o conceito de base de um subespaço vetorial.

Definição 4.4.3. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$ e α uma base de $\mathcal{S}$. Definimos o número de n-uplas do conjunto α como a dimensão do subespaço $\mathcal{S}$ e o denotamos por* $\dim \mathcal{S}$.

Corolário 4.4.4. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então,* $\dim \mathcal{K}^n = n$.

Demonstração. De fato, é de fácil verificação que o subconjunto $\mathcal{K}^n$, formado pelas n n-uplas $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ é uma base de $\mathcal{K}^n$.

Teorema 4.4.5. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$ e α um subconjunto de $\mathcal{S}$ linearmente independente. Então, existe um subconjunto α' de $\mathcal{S}$, tal que o conjunto $\alpha \cup \alpha'$ é uma base de $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.6, suponhamos que $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ $(r \leq n)$. Se $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha)$, então o conjunto α é uma base de $\mathcal{S}$ e nesse caso, temos $\alpha' = \emptyset$. Agora, se $\mathcal{S} \supsetneq \mathcal{G}(\alpha)$, então existe uma n-upla u_{r+1} em $\mathcal{S}$ não pertencente a $\mathcal{G}(\alpha)$. Segue disso que o conjunto $\alpha_1 = \alpha \cup \{u_{r+1}\}$ é linearmente independente. De fato, consideremos escalares $c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}$ de $\mathcal{K}$ verificando a equação $\sum_{i=1}^{r+1} c_i u_i = 0$. Se $c_{r+1} \neq 0$, então temos em particular que $u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} (c_i/c_{r+1})\, u_i$ o que é um absurdo. Logo, devemos ter $c_{r+1} = 0$ o que implica em $\sum_{i=1}^{r} c_i u_i = 0$ acarretando em $c_1 = \ldots = c_r = 0$, pois o conjunto α é linearmente independente. Em seguida, se $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha_1)$, então o conjunto α_1 é uma base de $\mathcal{S}$ e nesse caso, temos $\alpha' = \{u_1\}$. Caso contrário, repetindo o argumento anterior com o conjunto α_1, obtemos uma n-upla u_{r+2} em $\mathcal{S}$ tal que o conjunto $\alpha_2 = \alpha \cup \{u_{r+1}, u_{r+2}\}$ é linearmente independente. Pela Proposição 4.3.6, esse processo deve parar em um conjunto $\alpha \cup \{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots\}$ linearmente independente tal que $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha \cup \{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots\})$, isto é, numa base de $\mathcal{S}$. Tomemos então $\alpha' = \{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots\}$.

Teorema 4.4.6. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $\mathcal{S}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$ e α um subconjunto de $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{G}(\alpha) = \mathcal{S}$. Então, podemos extrair um subconjunto $\alpha' \subset \alpha$ tal que α' é uma base do subespaço vetorial $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ $(r \in \mathbb{N})$. Se α é um conjunto linearmente independente, então α é uma base de $\mathcal{S}$ e nesse caso temos $\alpha' = \alpha$. Agora, se α é um conjunto linearmente dependente, então, sem perda de generalidade, podemos escrever $u_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i u_i$, pela Proposição 4.3.3. Segue disso que o conjunto $\alpha_1 = \{u_2, \ldots, u_r\}$ gera $\mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{S} = \mathcal{G}(\alpha_1)$. De fato, para todo elemento $u \in \mathcal{S}$, temos que

$$\begin{aligned} u &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_r u_r \\ &= c_1 \left(\sum_{i=2}^{r} a_i u_i \right) + c_2 u_2 + \ldots + c_r u_r \\ &= \sum_{i=2}^{r} (c_1 a_i + c_i) u_i. \end{aligned}$$

Em seguida, se o conjunto α_1 é linearmente independente, então α_1 é uma base de $\mathcal{S}$ e nesse caso temos $\alpha' = \alpha_1$. Caso contrário, repetindo o argumento anterior com o conjunto α_1, obtemos um subconjunto α_2 de α_1 tal que $\mathcal{G}(\alpha_2) = \mathcal{S}$. Como o conjunto α é finito, então esse processo deve parar em um subconjunto α' linearmente independente, isto é, numa base de $\mathcal{S}$.

Corolário 4.4.7. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e α um subconjunto de $\mathcal{K}^n$. Se $\mathcal{G}(\alpha) = \mathcal{K}^n$, entãopodemos extrair um subconjunto $\alpha' \subset \alpha$ tal que α' é uma base do subespaço vetorial $\mathcal{K}^n$.*

Capítulo 5

Funções Lineares

Esse capítulo trata do tema central dessa dissertação, o de apresentar as noções relacionadas ao conceito de linearidade, a partir da linguagem das funções lineares de várias variáveis, que serão aplicados nos exemplos de aplicações de Linearidade na sala de aula.

É conhecido, do ensino fundamental e médio, que as noções de proporcionalidade ou linearidade podem ser tratadas sob o ponto de vista da noção de função linear ou mais geralmente da função afim. Além disso, sabemos que a classe das funções lineares pode ser determinada a partir de um único parametro, o chamado coeficiente angular. Também, que a classe das funções afins podem ser determinada a partir de segundo parametro, o chamado coeficiente linear. O nosso objetivo, nesse capítulo, é o de generalizar esse fato, mostrando que funções lineares envolvendo vários parâmetros estão completamente caracterizadas a partir da determinação de uma matriz, de uma forma similar ao caso unidimensional bem como funções afins, envolvendo vários parâmetros, estão completamente caracterizadas a partir da determinação de um segundo parâmetro de $\mathcal{K}^n$. Isso nos orientará saber quais problemas poderemos explorar, em sala de aula, envolvendo problemas ou situações de maior generalidade, relativo ao número de parâmetros.

5.1 O espaço vetorial das funções lineares

Definição 5.1.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função. Dizemos que f é uma função linear de $\mathcal{K}^n$ em $\mathcal{K}^m$ se as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$,

(ii) $f(cu_1) = cf(u_1)$,

para todos os elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ *e* $c \in \mathcal{K}$.

Observação 5.1.2. *É de fácil verificação que as condições (i) e (ii) são equivalentes a condição:*

(iii) $f(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1f(u_1) + c_2f(u_2)$,

para todos os elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ *e* $c_1, c_2 \in \mathcal{K}$, *ou ainda, equivalente a condição:*

(iv) $f(cu_1 + u_2) = cf(u_1) + f(u_2)$,

para todos os elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ *e* $c \in \mathcal{K}$.

Lema 5.1.3. *Seja* $\mathcal{K}$ *um corpo e* $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ *uma função linear. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $f(0) = 0$,

(ii) $f(-u) = -f(u)$, *para todo* $u \in \mathcal{K}^n$.

Demonstração. A demonstração é uma consequência direta da Definição 5.1.1.

Proposição 5.1.4. *Seja* $\mathcal{K}$ *um corpo,* $f, g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ *duas funções lineares e um escalar* $c \in \mathcal{K}$. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) a função soma $f + g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$, *definida por* $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$, *para todo* $u \in \mathcal{K}^n$, *é uma função linear;*

(ii) a função multiplicação por uma escalar $cf : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$, *definida por* $(cf)(u) = cf(u)$, *para todo* $u \in \mathcal{K}^n$, *é uma função linear.*

Demonstração. Para todas n-uplas $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ e escalar $c_1 \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
(f+g)(c_1u_1 + u_2) &= f(c_1u_1 + u_2) + g(c_1u_1 + u_2) \\
&= c_1f(u_1) + f(u_2) + c_1g(u_1) + g(u_2) \\
&= c_1(f+g)(u_1) + (f+g)(u_2),
\end{aligned}$$

Assim, $f + g$ é uma função linear. Similarmente, provamos que a função cf é linear.

Denotemos por $\mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$ o conjunto de todas as funções lineares $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$. A Proposição 5.1.4, nos permite definir duas operações binárias, a saber:

$$+ : \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \times \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \to \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \text{ (adicão)}$$

e

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \to \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \text{ (multiplicação por um escalar)},$$

Proposição 5.1.5. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então, as operações de adição e multiplicação por um escalar, definidas sobre $\mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$ satisfazem as seguintes propriedades: para quaisquer elementos $a, b \in \mathcal{K}$ e funções lineares f, g e h em $\mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$ temos*

1) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (lei associativa);

2) $f + g = g + f$ (lei comutativa);

3) existe uma função linear em $\mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$, denotada por 0 e denominada de função nula de $\mathcal{K}^n$, tal que

$$f + 0 = 0 + f = f, \text{ para todo } f \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m);$$

4) para toda função linear $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$, existe uma única função linear em $\mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$, denotada por $-f$, e denominada de função simétrica de f, tal que

$$f + (-f) = (-f) + f = 0;$$

5) $1f = f$, para toda função linear $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$;

6) $(a + b)f = af + bf$;

7) $a(f + g) = af + ag$;

8) $(ab)f = a(bf)$.

Demonstração. Observamos apenas que as funções lineares citadas nas propriedades 3) e 4) são as funções definidas por $0(u) = 0$ e $(-f)(u) = -f(u)$, para toda n-upla $u \in \mathcal{K}^n$.

Observação 5.1.6. *Escreveremos $f - g = f + (-g)$, quaisquer que sejam as funções lineares $f, g \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$.*

A Proposição, abaixo, define uma terceira operação sobre funções lineares da forma seguinte:

Proposição 5.1.7. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e funções lineares $f \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m)$ e $g \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^m, \mathcal{K}^l)$. Então a função composta $g \circ f \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^l)$ é uma função linear.*

Demonstração. Para todas n-uplas $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ e escalar $c_1 \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(c_1u_1 + u_2) &= g\big(f(c_1u_1 + u_2)\big)\\ &= g\big(c_1 f(u_1) + f(u_2)\big)\\ &= c_1 g\big(f(u_1)\big) + g\big(f(u_2)\big)\\ &= c_1(g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

Assim, $g \circ f$ é uma função linear.

Proposição 5.1.8. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $\mathcal{K}^n$. Então, para quaisquer elementos $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathcal{K}^m$ existe uma única função linear $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ tal que $f(u_i) = v_i$, para todo i $(1 \leq i \leq n)$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ definida como segue. Para todo elemento $u = \sum_{i=1}^n c_iu_i$ tomemos $f(u) = \sum_{i=1}^n c_iv_i$. Certamente, f está bem definida e, para quaisquer elementos $u = \sum_{i=1}^n c_iu_i$ e $u' = \sum_{i=1}^n c_i'u_i$ de $\mathcal{K}^n$, temos que

$$\begin{aligned}f(u + u') &= f\big(\sum_{i=1}^n (c_i + c_i')u_i\big)\\ &= \sum_{i=1}^n (c_i + c_i')v_i = \sum_{i=1}^n (c_iv_i + c_i'v_i)\\ &= \sum_{i=1}^n c_iv_i + \sum_{i=1}^n c_i'v_i\\ &= f(u) + f(u').\end{aligned}$$

Ainda, para todo $c \in \mathcal{K}$, temos que

$$\begin{aligned}f(cu) &= f\big(c(\sum_{i=1}^n c_iu_i)\big) = f\big(\sum_{i=1}^n c(c_iu_i)\big) = f\big(\sum_{i=1}^n (cc_i)u_i\big)\\ &= \sum_{i=1}^n (cc_i)v_i = \sum_{i=1}^n c(c_iv_i) = c(\sum_{i=1}^n c_iv_i)\\ &= cf(u).\end{aligned}$$

Logo, f é uma função linear.

Agora, seja uma função linear $g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ tal que $g(u_i) = v_i$, para todo i $(1 \leq$

$i \leq n$). Então, para todo elemento $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ de $\mathcal{K}^n$ temos que $f(u) = f(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i g(u_i) = g(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i) = g(u)$. Isso mostra que $f = g$.

5.2 O núcleo de uma função linear

Definição 5.2.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Definimos o núcleo de f como o conjunto*

$$\ker(f) = f^{-1}\big(\{0\}\big) = \{u \in \mathcal{K}^n \mid f(u) = 0\}.$$

Proposição 5.2.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Então,* $\ker(f)$ *é um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^n$.*

Demonstração. De fato, como $f(0) = 0$ então $\ker(f) \neq \emptyset$. Além disso, para todos os elementos $u_1, u_2 \in \ker(f)$ e $c \in \mathcal{K}$, temos que $f(cu_1 + u_2) = cf(u_1) + f(u_2) = 0$. Assim, $cu_1 + u_2 \in \ker(f)$ o que nos mostra que $\ker(f)$ é um subespaço vetorial sobre $\mathcal{K}$.

Proposição 5.2.3. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Então, f é uma função injetora se, e somente se,* $\ker(f) = \{0\}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\{0\} \subset \ker(f)$, pois $f(0) = 0$. Em seguida, se f é injetora, então $\ker(f) = \{0\}$, pois se $u \in \mathcal{K}^n$ é tal que $f(u) = 0$, então $f(u) = 0 = f(0)$ o que implica em $u = 0$. Agora, se $\ker(f) = \{0\}$, então para quaisquer elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ tais que $f(u_1) = f(u_2)$, temos que $f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = 0$, o que implica em $u_1 - u_2 = 0$, isto é, $u_1 = u_2$. Logo, f é injetora.

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear injetora. Para todo conjunto linearmente independente $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ o conjunto $\beta = \{f(u_1), \ldots, f(u_r)\}$ é linearmente independente em $\mathcal{K}^m$.*

Demonstração. Sejam escalares $c_1, \ldots, c_r \in \mathcal{K}$ e consideremos a combinação linear nula $\sum_{i=1}^{r} c_i f(u_i) = 0$ em $\mathcal{K}^m$. Segue disso que, $f(\sum_{i=1}^{r} c_i u_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i f(u_i) = 0$ o que implica em $\sum_{i=1}^{r} c_i u_i \in \ker(f)$. Como f é injetora, então $\sum_{i=1}^{r} c_i u_i = 0$ que acarreta em $c_1 = \ldots = c_r = 0$, pois o conjunto α é linearmente independente. Logo β é um conjunto linearmente independente em $\mathcal{K}^m$.

5.3 A imagem de uma função linear

Definição 5.3.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Definimos a imagem de f como o conjunto*

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{K}^n) = \{v \in \mathcal{K}^m \mid v = f(u), \text{ para algum } u \in \mathcal{K}^n\}.$$

Proposição 5.3.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Então,* $\mathrm{Im}(f)$ *é um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^m$.*

Demonstração. De fato, como $f(0) = 0$ então $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$. Além disso, para todos os elementos $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ e $c \in \mathcal{K}$, temos que existem elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ tais que $cv_1 + v_2 = cf(u_1) + f(u_2) = f(cu_1 + u_2)$. Assim, $cv_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(f)$ o que nos mostra que $\mathrm{Im}(f)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{K}^m$.

Proposição 5.3.3. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Seja $\alpha = \{u_1, \ldots, u_r\}$ é um conjunto de elementos de $\mathcal{K}^n$ e $\beta = \{f(u_1), \ldots, f(u_r)\}$ o conjunto de elementos de $\mathcal{K}^m$, derivados de α e f. Então, se $\mathcal{K}^n = \mathcal{G}(\alpha)$, então* $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{G}(\beta)$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\mathcal{G}(\beta) \subset \mathrm{Im}(f)$, pois para quaisquer elementos $c_1, \ldots, c_r$ de $\mathcal{K}$, temos que $\sum_{i=1}^r c_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^r c_i u_i) \in \mathrm{Im}(f)$. Assim, seja um elemento $v \in \mathrm{Im}(f)$ e tomemos $u \in \mathcal{K}^n$ tal que $v = f(u)$. Por hipótese, existem escalares $c_1, \ldots, c_r$ de $\mathcal{K}$ tais que $u = \sum_{i=1}^r c_i u_i$ o que implica em $v = f(u) = f(\sum_{i=1}^r c_i u_i) = \sum_{i=1}^r c_i f(u_i)$. Segue disso que, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{G}(\beta)$. Assim, concluímos que $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{G}(\beta)$.

5.4 O teorema do núcleo e da imagem

Teorema 5.4.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Então,*

$$\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = n.$$

Demonstração. Consideremos $\alpha' = \{u_1, \ldots, u_r\}$ uma base para $\ker(f)$. Existe um conjunto $\alpha'' = \{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ tal que $\alpha = \alpha' \cup \alpha''$ é uma base para $\mathcal{K}^n$. Consideremos o conjunto $\beta = \{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$. Pela Proposição 5.3.3, temos que $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{G}(\beta)$. Mostremos que β é uma base para $\mathrm{Im}(f)$. Para isso, é sificiente mostramos que β é um conjunto linearmente independente. De fato, sejam escalares $c_1, \ldots, c_r$ de $\mathcal{K}$ tais que

$\sum_{i=r+1}^{n} c_i f(u_i) = 0$. Segue disso que $f(\sum_{i=r+1}^{n} c_i u_i) = 0$ o que implica em $\sum_{i=r+1}^{n} c_i u_i \in \ker(f)$. Assim, existem únicos escalares $b_1, \ldots, b_r$ tais que $\sum_{i=r+1}^{n} c_i u_i = \sum_{j=1}^{r} b_j u_j$ o que implica em $\sum_{j=1}^{r} b_j u_j + \sum_{i=r+1}^{n} (-c_i) u_i = 0$. Como α é uma base de $\mathcal{K}^n$, então $b_1 = \ldots = b_r = -c_{r+1} = \ldots = -c_n = 0$. Segue disso, $c_{r+1} = \ldots = c_n = 0$ e portanto o conjunto β é linearmente independente. Logo, β é uma base de $\mathcal{K}^m$. Consequentemente,

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = r + (n - r) = n.$$

5.5 Função inversa de uma função linear

Proposição 5.5.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear. Se f é uma função bijetora, então a função inversa $f^{-1} : \mathcal{K}^m \to \mathcal{K}^n$ é uma função linear.*

Nesse caso, temos $n = m$.

Demonstração. Sejam elementos $v_1, v_2 \in \mathcal{K}^m$ e $c_1, c_2 \in \mathcal{K}$. Como f é sobrejetora, então existem únicos elementos $u_1, u_2 \in \mathcal{K}^n$ tais que $v_i = f(u_i)$ para todo i $(1 \leq i \leq 2)$, isto é, $f^{-1}(v_i) = u_i$. Segue disso que $c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2) = f(c_1 u_1 + c_2 u_2)$ e portanto $f^{-1}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 f^{-1}(v_1) + c_2 f^{-1}(v_2)$. Assim, a função f^{-1} é linear.

Agora, se α é uma base $\mathcal{K}^n$, então $f(\alpha)$ é um conjunto linearmente independente em $\mathcal{K}^m$, pois f é uma função injetora. Além disso, $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{G}\big(f(\alpha)\big)$, pela Proposição 5.3.3. Por outro lado, como f é sobrejetora, então $\mathcal{K}^m = \operatorname{Im}(f)$ o que implica em $\mathcal{K}^m = \mathcal{G}\big(f(\alpha)\big)$. Isso nos mostra que $f(\alpha)$ é uma base de$\mathcal{K}^m$. omo o conjunto $f(\alpha)$ possui n n-uplas, então concluímos que $n = m$.

Teorema 5.5.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ uma função linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é bijetora;*

(ii) $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{K}^n$*;*

(iii) *Se $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathcal{K}^n$, então $\beta = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ é uma base de $\mathcal{K}^n$;*

(iv) *Existe uma base $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathcal{K}^n$ tal que $\beta = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ é uma base de $\mathcal{K}^n$.*

Demonstração. $(i) \to (ii)$ Se f é bijetora, então f é sobrejetora o que implica em $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{K}^n$.

$(ii) \to (iii)$ Para todo elemento $v \in \mathcal{K}^n$, existe um elemento $u \in \mathcal{K}^n$ tal que $v = f(u)$. Segue disso que existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ de $\mathcal{K}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ o que implica em $v = \sum_{i=1}^{n} c_i f(u_i)$. Assim, concluímos que $\mathcal{G}(\beta) = \mathcal{K}^n$, onde β possui no máximo n elementos. Se o conjunto β não é linearmente independente, então existe um subconjunto próprio β' de β tal que β' é uma base de $\mathcal{K}^n$, o que um absurdo. Isso implica que β é linearmente independente e portanto uma base de $\mathcal{K}^n$.

$(iii) \to (iv)$ Tomemos a base canonica $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$, onde

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 0, 1).$$

$(iv) \to (i)$ Se $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathcal{K}^n$ tal que $\beta = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ é uma base de $\mathcal{K}^n$, então f é sobrejetora, pois para todo elemento $v \in \mathcal{K}^n$, existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ de $\mathcal{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} c_i f(u_i)$ o que implica em $v = f(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i)$. Agora, seja $u \in \mathcal{K}^n$ tal que $f(u) = 0$. Como $u = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, para escalares $c_1, \ldots, c_n$ de $\mathcal{K}$, então $\sum_{i=1}^{n} c_i f(e_i) = 0$ o que implica em $c_1 = \ldots = c_n = 0$, isto é, $u = 0$. Assim, f é injetora. Consequentemente, f é bijetora.

5.6 Caracterização de funções lineares por matrizes

Teorema 5.6.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo, $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $\mathcal{K}^n$, e $\beta = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de $\mathcal{K}^m$. Então, para toda função linear $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ existe uma única matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, tal que*

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i, \tag{5.1}$$

para todo j $(1 \leq j \leq n)$.

Além disso, a função $\varphi : \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, definida por $\varphi(f) = A$, para todo $f \in \mathcal{K}^n$ é bijetora e verifica as seguintes propriedades:

(i) $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$;

(ii) $\varphi(cf) = c\varphi(f)$.

Demonstração. Seja $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ uma função linear arbitrária. Então para cada j $(1 \leq j \leq n)$ o elemento $f(u_j)$ pode ser expresso de modo único como uma combinação linear da base β. Com isso, para cada j $(1 \leq j \leq n)$, existem únicos escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ em $\mathcal{K}$ tais que

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i,$$

Assim, f determina uma única matriz $A = [a_{ij}] \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, verificando a expressão (5.1).

Do que acabamos de ver, a função $\varphi : \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, definida por $\varphi(f) = A$, para todo $f \in \mathcal{K}^n$, verificando a expressão (5.1), está bem definida. Mostremos que φ é bijetora. Para isso, consideremos uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, e definamos a função $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$, dada por, para todo elemento $u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$

$$f(u) = f(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) v_i.$$

Mostremos que f é uma função linear. Sejam $u, u' \in \mathcal{K}^n$ e um escalar $c \in \mathcal{K}$. Existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ e $c'_1, \ldots, c'_n$ de $\mathcal{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$ e $u' = \sum_{j=1}^{n} c'_j u_j$. Segue disso que

$$\begin{aligned}
f(cu + u') &= f\big(c(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j) + \sum_{j=1}^{n} c'_j u_j\big) = f\big(\sum_{j=1}^{n} (cc_j + c'_j) u_j\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(cc_j + c'_j) \right) v_i \\
&= c\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) v_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c'_j \right) v_i \\
&= cf(u) + f(u').
\end{aligned}$$

Da definição de f, segue também que

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i,$$

para todo j $(1 \leq j \leq n)$. Portanto φ é sobrejetora.

Finalmente, sejam duas funções lineares f, g tais que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Denotemos por $\varphi(f) = \varphi(g) = A = [a_{ij}]$. Então, para todo $u \in \mathcal{K}^n$, existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ de $\mathcal{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$. Segue disso que

$$\begin{aligned}
f(u) &= f(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j g(u_j) = g(\sum_{j=1}^{n} c_j u_j) \\
&= g(u).
\end{aligned}$$

Portanto φ é injetora. Consequentemente, φ é bijetora.

Corolário 5.6.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Então, para toda função linear*

$$f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$$

existe uma única matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, tal que

$$f(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} c_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} c_j).$$

para todo elemento $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{K}^n$.

Além disso, a função $\varphi : \mathfrak{L}(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^m) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, definida por $\varphi(f) = A$, para todo $f \in \mathcal{K}^n$ é bijetora.

Demonstração. Seja $\alpha = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathcal{K}^n$ e $\beta = \{f_1, \ldots, f_m\}$ a base canônica de $\mathcal{K}^m$. Pelo Teorema 5.6.1 existe uma única matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, tal que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \tag{5.2}$$

para todo j $(1 \leq j \leq n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f(c_1, \ldots, c_n) &= f(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) f_i \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} c_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} c_j).
\end{aligned}$$

para todo elemento $c = (c_1, \dots, c_n)$ de $\mathcal{K}^n$.

Observação 5.6.3. *É de fácil veririficação constatar que as coordenadas do elemento imagem $f(c_1, \dots, c_n)$ podem ser determinadas pelo produto das matrizes, conforme abaixo:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j \end{bmatrix}.$$

Teorema 5.6.4. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e funções lineares $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ e $g : \mathcal{K}^m \to \mathcal{K}^l$. Então, a função composta $g \circ f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^l$ é linear.*

Demonstração. Se f e g são funções lineares, então

$$f(c_1, \dots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j)$$

e

$$g(x_1, \dots, x_m) = (\sum_{k=1}^{m} p_{1k}x_k, \sum_{k=1}^{m} p_{2k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^{m} p_{lk}x_k).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \big(g \circ f\big)(c_1, \dots, c_n) \\ = \; & g\big(f(c_1, \dots, c_n)\big) \\ = \; & g\big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j\big) \\ = \; & \left(\sum_{k=1}^{m} p_{1k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j\right), \dots, \sum_{k=1}^{m} p_{lk}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j\right)\right) \\ = \; & \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{1k}a_{kj}\right)c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{lk}a_{kj}\right)c_j\right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.6.1, $g \circ f$ é uma função linear.

5.7 Funções Afim

Definição 5.7.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e b um elemento de $\mathcal{K}$. Definimos a função translação de $\mathcal{K}^n$ induzida por b, como sendo a função $t_b : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ dada por*

$$t_b(u) = u + b,$$

para todo $u \in \mathcal{K}^n$.

Uma função $g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ é denominada de função afim se ela é a composição de uma função linear $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ com uma função translação de $\mathcal{K}^m$ induzida por um elemento b.

Observação 5.7.2. *É de fácil verificação que a função linear citada na Definição 5.7.1 é univocamente determinada.*

Teorema 5.7.3. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo. Uma função $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ é afim se, e somente se, existe uma única matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, e um elemento $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathcal{K}_m$ tal que*

$$f(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j + b_m).$$

Demonstração. Se f é uma função afim, então existe uma única função linear $g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ e b um elemento de $\mathcal{K}^m$ tal que $f = t_b \circ g : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$. Por outro lado, pelo Teorema , existe uma única matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{m\times n}$, onde $A = [a_{ij}]$, tal que

$$g(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j).$$

para todo elemento $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{K}^n$. Assim,

$$\begin{aligned} f(c_1, \ldots, c_n) &= \big(t_b \circ g\big)(c_1, \ldots, c_n) \\ &= t_b\big(g(c_1, \ldots, c_n)\big) = g(c_1, \ldots, c_n) + b \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j) + b \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j + b_m). \end{aligned}$$

para todo elemento $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{K}^n$. Portanto,

$$f(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j + b_m), \tag{5.3}$$

para todo elemento $c = (c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{K}^n$. Reciprocamente, se a função f possui a forma 5.3, então

$$f(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j) + (b_1, \ldots, b_m) \tag{5.4}$$

o que nos mostra que $f = t_b \circ g$, onde g é uma função linear, pelo Corolário 5.6.2. Logo f é uma função afim.

Teorema 5.7.4. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e funções afim $f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ e $g : \mathcal{K}^m \to \mathcal{K}^l$. Então, a função composta $g \circ f : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^l$ é afim.*

Demonstração. Se f e g são funções afim, então

$$f(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j + b_m)$$

e

$$g(x_1, \ldots, x_m) = (\sum_{k=1}^{m} p_{1k}x_k + q_1, \sum_{k=1}^{m} p_{2k}x_k + q_2, \ldots, \sum_{k=1}^{m} p_{lk}x_k + q_l).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \big(g \circ f\big)(c_1, \ldots, c_n) \\
= \; & g\big(f(c_1, \ldots, c_n)\big) \\
= \; & g\big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j + b_1, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j + b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_j + b_m\big) \\
= \; & \left(\sum_{k=1}^{m} p_{1k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + b_k\right) + q_1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} p_{lk}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + b_k\right) + q_l\right) \\
= \; & \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{1k}a_{kj}\right)c_j + \sum_{k=1}^{m} p_{1k}b_k + q_1, \ldots\right. \\
& \left.\ldots, \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} p_{lk}a_{kj}\right)c_j + \sum_{k=1}^{m} p_{lk}b_k + q_l\right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.7.3, $g \circ f$ é uma função afim.

5.8 Funções lineares sobre $\mathcal{K}$

Finalizamos esse capítulo apresentando um resultado, que caracteriza as funções lineares, para o caso de um corpo qualquer. Assim, em particular para os casos dos numeros reais e dos números complexos.

Teorema 5.8.1. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ uma função linear. Então, f é bijetora ou f é a função identicamente nula.*

Demonstração. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 1.$$

Segue disso que, se $\dim \ker(f) = 0$, então $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$. Assim, $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{K}$ e portanto f é bijetora. Se $\dim \ker(f) = 1$, então $\ker(f) = \mathcal{K}$ e portanto f é a função nula.

Teorema 5.8.2. *Seja $\mathcal{K}$ um corpo e $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ uma função. As afirmações são equivalentes:*

i) Se $a = f(1)$, então $f(c) = ac$, para todo $c \in \mathcal{K}$;

ii) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in \mathcal{K}$.

Demonstração. $i) \to ii)$ É de fácil verificação.

$ii) \to i)$ Como f é uma função linear, existe uma única matriz $[a] \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})_{1\times 1}$ tal que $f(c) = ac$, para todo $c \in \mathcal{K}$. Certamente, $a = f(1)$.

Capítulo 6

Transformações Matemáticas

Transformações são correspondências estabelecidas entre pares de pontos de um conjunto onde um é o transformado do outro.

6.1 Transformações Isométricas

Definição 6.1.1. *São transformações que não alteram as medidas das figuras, isto é, quando aplicadas alteram somente as suas posições. Assim, funções lineares bijetoras preservando as distâncias entre seus pontos.*

Devido a dificuldade de interpretação geométrica que os espaçõs vetoriais $\mathbb{R}^n (n \geq 4)$ apresentam, retringiremos o estudo de transformações isométricas, somente aos casos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

6.1.1 Reflexões

Nessa seção, apresentamos o conceito geral de reflexão, a partir do contexto da geometria plana e o caracterizamos no contexto das funções lineares.

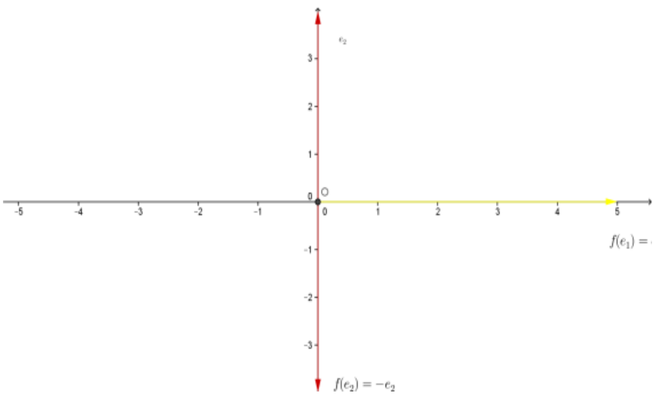
Definição 6.1.2. *Seja π um plano e h um eixo desse plano. Uma transformação plana é denominada de reflexão se a correspondência estabelecida é de tal maneira que os pares de pontos correspondentes definem segmentos que admitem a mesma mediatriz, em relação ao eixo h.*

Essa correspondência se carateriza como uma simetria axial, pois os pontos associados são simétricos em relação ao eixo h.

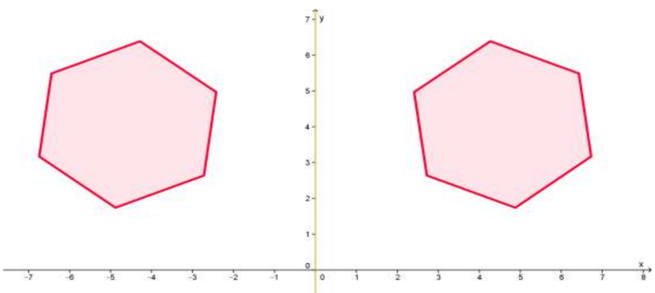
Pela definição da transformação plana reflexão, podemos ver que tal correspondência é do tipo linear. Assim, pela Proposição 5.1.8, basta conhecermos seus efeitos sobre uma base de $\mathbb{R}^2$. Tomando a base canônica $\{e_1, e_2\}$ e considerando a reflexão em relação ao eixo $0x_2$, vemos que $f(e_1) = -e_1$ e $f(e_2) = e_2$. Assim, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1\big(-e_1\big) + x_2e_2 = (-x_1, x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$. As figuras 6.1(a) e 6.1(b), nos mostram os efeitos da reflexão em relação ao eixo $0x_2$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e sobre uma figura geométrica, respectivamente.



(a)



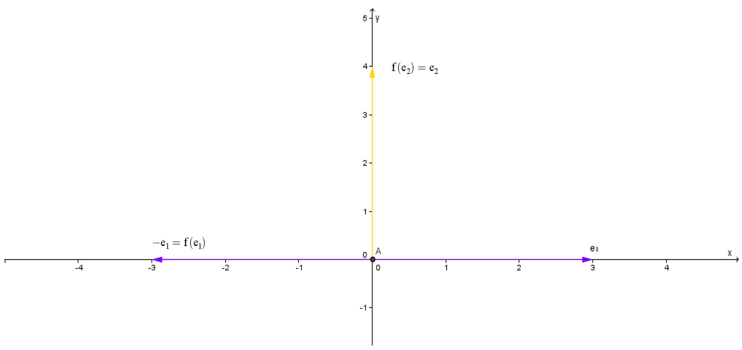
(b)

Figura 6.1: Reflexão em relação a $0x_2$

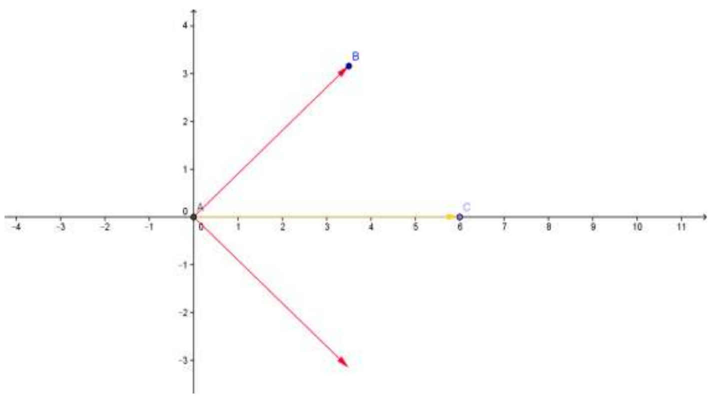
Agora, considerando a reflexão em relação ao eixo $0x_1$, vemos que $f(e_1) = e_1$ e $f(e_2) = -e_2$. Assim, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + x_2\big(- e_2\big) = (x_1, -x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$. As figuras 6.2(a) e 6.2(b), nos mostram os efeitos da reflexão em relação ao eixo $0x_1$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e sobre uma 2-upla de $\mathbb{R}^2$, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 6.2: Reflexão em relação a $0x_1$

Definição 6.1.3. *Seja π um plano. Uma transformação espacial é denominada de Reflexão se a correspondência estabelecida é de tal maneira que os pares de pontos cor-*

respondentes definem segmentos que admitem a mesma mediatriz, em relação ao plano π.

Essa correspondência se carateriza como uma simetria plana, pois os pontos associados são simétricos em relação ao palno π.

Pela definição da transformação espacial reflexão, podemos ver que tal correspondência também é do tipo linear. Novamente, pela Proposição 5.1.8, basta conhecermos seus efeitos sobre uma base de $\mathbb{R}^3$. Tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e considerando a reflexão em relação ao plano $x_1 0 x_2$, vemos que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ e $f(e_3) = -e_3$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3\big(- e_3\big) = (x_1, x_2, -x_3), \end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 6.3, no mostra o efeito da reflexão em relação ao plano $x_1 0 x_2$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

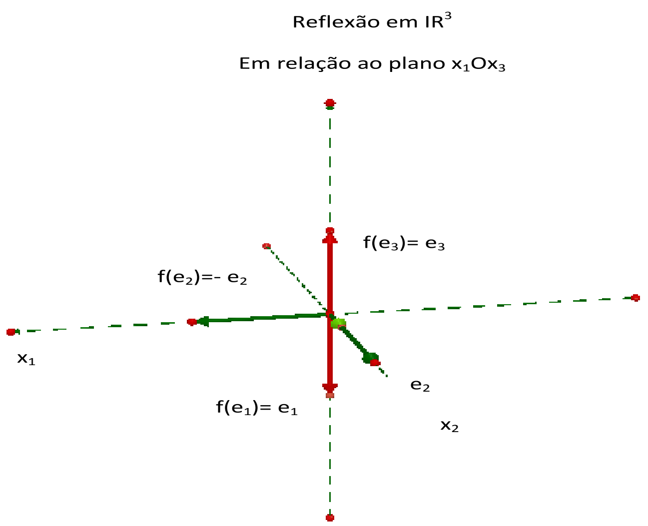


Figura 6.3:

Agora, considerando a reflexão em relação ao plano $x_1 0 x_3$, vemos que $f(e_1) = e_1$,

$f(e_2) = -e_2$ e $f(e_3) = e_3$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= x_1e_1 + x_2\big(-e_2\big) + x_3e_3 = (x_1, -x_2, x_3), \end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 6.4(a) e 6.4(b), no mostra o efeito da reflexão em relação ao plano x_10x_3, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

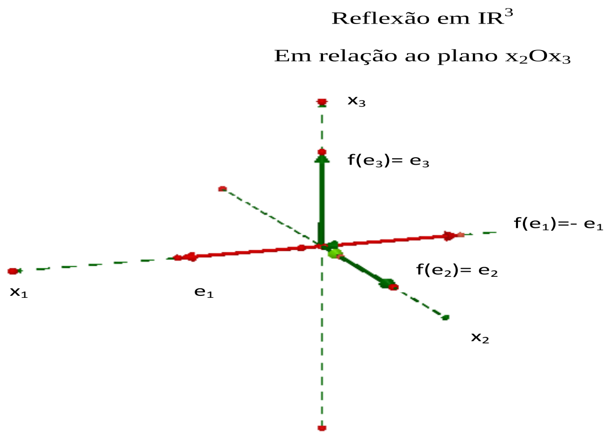


Figura 6.4:

Ainda, considerando a reflexão em relação ao plano x_20x_3, vemos que $f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = e_2$ e $f(e_3) = e_3$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= x_1\big(-e_1\big) + x_2e_2 + x_3e_3 = (-x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 1111 e 1112, no mostra o efeito da reflexão em relação ao plano x_20x_3, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

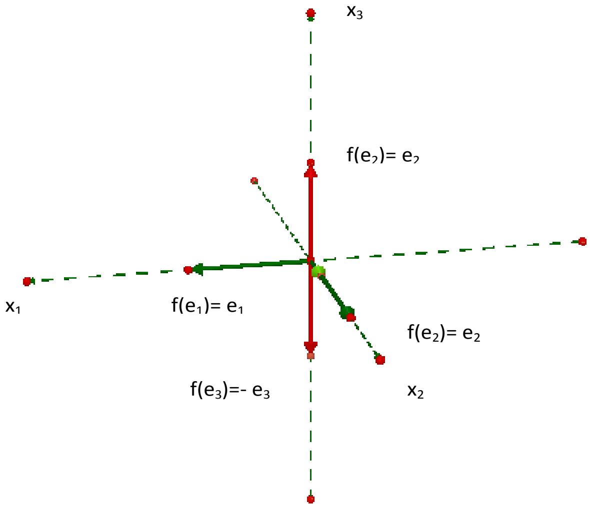


Figura 6.5:

6.1.2 Rotações

Nessa seção, apresentamos o conceito geral de rotação, a partir do contexto da geometria plana, e o caracterizamos dentro do contexto de funções lineares. Na rotação a figura "gira"em torno de um ponto ou eixo se deslocando no plano (resp., no espaço), mantendo o centro da figura sempre a uma distância constante do centro da rotação.

Definição 6.1.4. *Seja π um plano e P um ponto desse plano. Uma transformação plana é denominada de Rotação se a correspondência estabelecida é de tal maneira que os pares de pontos correspondentes estão unidos por arcos concêntricos de mesma amplitude e mesmo sentido, relativo ao centro P.*

Pela definição da transformação plana rotação, podemos ver que tal correspondência também é do tipo linear. Novamente, pela Proposição 5.1.8, basta conhecermos seus efeitos sobre uma base de $\mathbb{R}^2$. Tomando a base canônica $\{e_1, e_2\}$ e considerando a rotação de angulo θ, no sentido anti-horário em relação a origem, vemos que

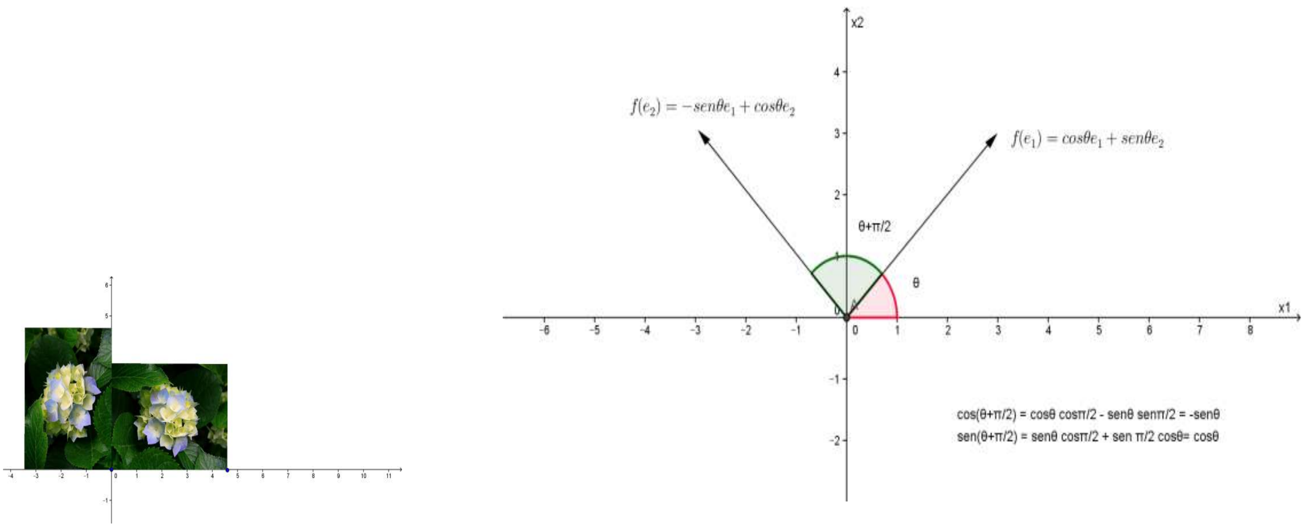
$f(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ e $f(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_1, x_2) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\
&= x_1\big(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\big) + x_2\big(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2\big) \\
&= \big(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2\big)e_1 + \big(\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2\big)e_2 \\
&= \big(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2\big)
\end{aligned}
$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Agora, considerando a rotação de angulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, no sentido anti-horário em relação a origem, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$. A figura 6.6(a)e 6.6(b), no mostra o efeito da rotação plana, no sentido anti-horário e em relação a origem, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e sobre uma figura geométrica, respectivamente.



(a) (b)

Figura 6.6: Rotação

Definição 6.1.5. *Seja P um ponto do espaço. Uma transformação espacial é denominada de Rotação se a correspondência estabelecida é de tal maneira que os pares de pontos* *correspondentes estão unidos por arcos concêntricos, paralelos, de mesma amplitude e mesmo sentido, relativo ao centro P.*

Pela definição da transformação espacial rotação, podemos ver que tal correspondência ainda é do tipo linear. Novamente, pela Proposição 5.1.8, basta conhecermos seus efeitos sobre uma base de $\mathbb{R}^3$. Tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e considerando a a rotação de angulo θ, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_1 0 x_2$, vemos que $f(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ e $f(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$ e $f(e_3) = e_3$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
& f(x) \\
= \;& f(x_1, x_2, x_3) \\
= \;& f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\
= \;& x_1\big(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\big) + x_2\big(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2\big) + x_3 e_3 \\
= \;& \big(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2\big)e_1 + \big(\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2\big)e_2 + x_3 e_3 \\
= \;& \big(\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2, \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2, x_3\big),
\end{aligned}
$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 6.7, no mostra o efeito da rotação espacial, de angulo θ, no sentido anti-horário e em relação a origem e ao plano $x_1 0 x_2$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

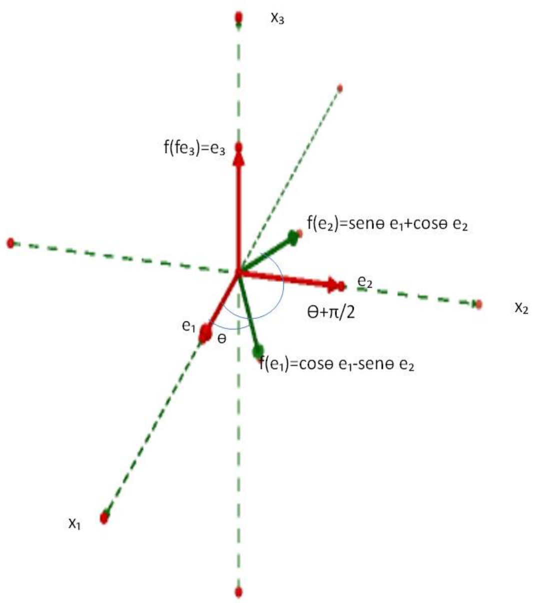


Figura 6.7: Rotação em relação ao plano $x_1 0 x_2$

Considerando a rotação de ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_1 0 x_2$, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \big(-x_2, x_1, x_3\big),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Agora, considerando a a rotação de angulo θ, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_2 0 x_3$, vemos que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = \cos\theta e_2 + \sin\theta e_3$ e $f(e_3) = -\sin\theta e_2 + \cos\theta e_3$ e . Assim, temos

$$\begin{aligned}
& f(x) \\
= \;& f(x_1, x_2, x_3) \\
= \;& f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\
= \;& x_1 e_1 + x_2\big(\cos\theta e_2 + \sin\theta e_3\big) + x_3\big(-\sin\theta e_2 + \cos\theta e_3\big) \\
= \;& x_1 e_1 + \big(\cos\theta x_2 - \sin\theta x_3\big)e_2 + \big(\sin\theta x_2 + \cos\theta x_3\big)e_3 \\
= \;& \big(x_1, \cos\theta x_2 - \sin\theta x_3, \sin\theta x_2 + \cos\theta x_3\big),
\end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 6.8, no mostra o efeito da rotação espacial, de angulo θ, no sentido anti-horário e em relação a origem e ao plano $x_2 0 x_3$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

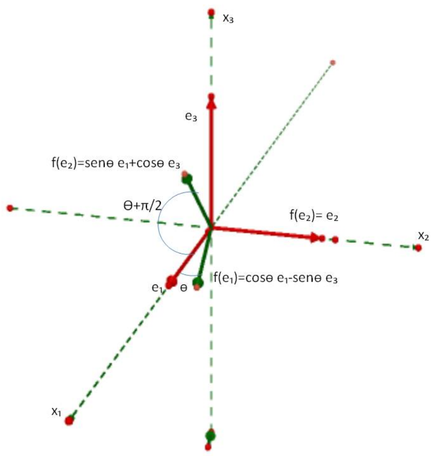


Figura 6.8: Rotação em relação ao plano $x_2 0 x_3$

Considerando a rotação de angulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_2 0 x_3$, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_3, x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Ainda, considerando a a rotação de angulo θ, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_1 0 x_3$, vemos que $f(e_1) = \cos\theta e_1 - \sin\theta e_3$, $f(e_2) = e_2$ e $f(e_3) = \sin\theta e_1 + \cos\theta e_3$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
& f(x) \\
= \ & f(x_1, x_2, x_3) \\
= \ & f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \\
= \ & x_1\big(\cos\theta e_1 - \sin\theta e_3\big) + x_2 e_2 + x_3\big(\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3\big) \\
= \ & \big(\cos\theta x_1 + \sin\theta x_3\big)e_1 + x_2 e_2 + \big(-\sin\theta x_1 + \cos\theta x_3\big)e_3 \\
= \ & \big(\cos\theta x_1 + \sin\theta x_3, x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_3\big)
\end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. A figura 6.9, no mostra o efeito da rotação espacial, de angulo θ, no sentido anti-horário e em relação a origem e ao plano $x_1 0 x_3$, sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

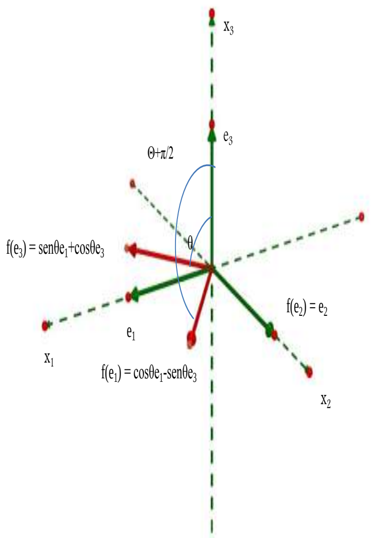


Figura 6.9:

Considerando a rotação de ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, no sentido anti-horário em relação a origem e ao plano $x_3 0 x_1$, temos

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, -x_1)$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

6.2 Transformações preservando semelhanças

Definição 6.2.1. *São transformações que alteram proporcionalmente as dimensões do objeto, enquanto os ângulos são mantidos.*

6.2.1 Homotetia

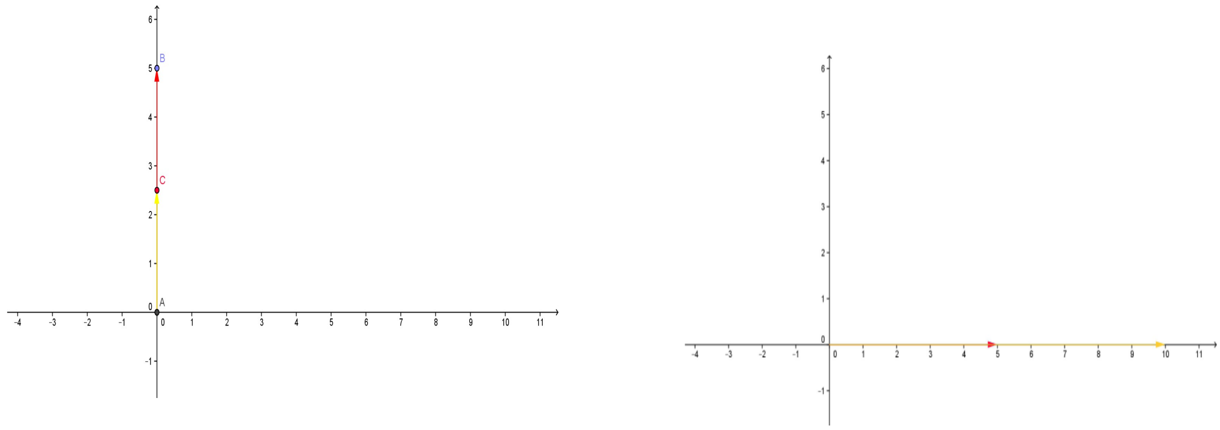
Definição 6.2.2. *Seja P um ponto de um plano ou do espaço. Uma transformação é denominada de homotetia se a correspondência estabelecida é de tal maneira que os pares de pontos correspondentes ficam proporcionalmente alinhados com o ponto P, denominado de centro da homotetia.*

A homotetia preserva alinhamentos e razões de seção, ângulos e paralelismo, direções e orientação, mas não preserva distância.

Pela definição da transformação homotetia, podemos ver que tal correspondência é também do tipo linear. Assim, pela Proposição 5.1.8, basta conhecermos seus efeitos sobre uma base de $\mathbb{R}^2$. Em $\mathbb{R}^2$, tomando a base canônica $\{e_1, e_2\}$ e considerando o centro da homotetia a origem, relativo a um escalar $a \in \mathbb{R}$, vemos que $f(e_1) = ae_1$ e $f(e_2) = ae_2$. Assim, temos

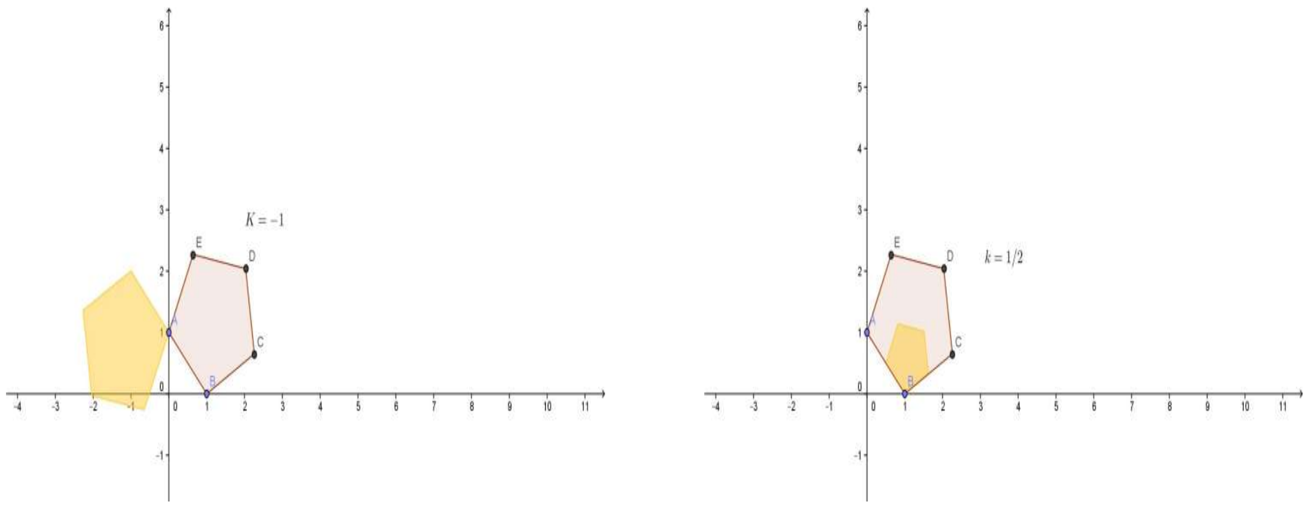
$$f(x) = f(x_1, x_2) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 a e_1 + x_2 a e_2 = a(x_1, x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$. As figuras 6.10(a), 6.10(b), 6.11(a), 6.11(b), mostram exemplos de homotetias, em $\mathbb{R}^2$.



(a) (b)

Figura 6.10:



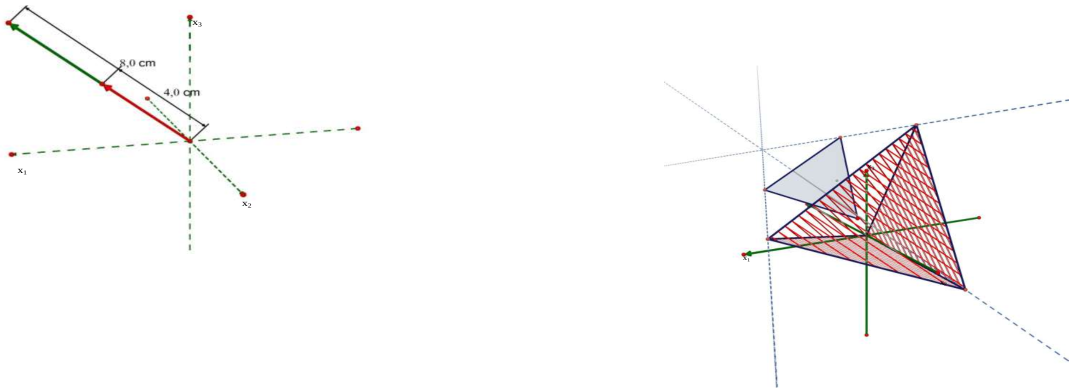
(a) (b)

Figura 6.11:

Em $\mathbb{R}^3$, tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e considerando o centro da homotetia a origem, relativo a um escalar $a \in \mathbb{R}$, vemos que $f(e_1) = ae_1$, $f(e_2) = ae_2$ e $f(e_3) = ae_3$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \\ &= x_1ae_1 + x_2ae_2 + x_3ae_3 = a(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. As figuras 6.12(a) e 6.12 (b), mostram exemplos de homotetias, em $\mathbb{R}^3$.



(a) (b)

Figura 6.12:

6.3 Transformações mais gerais

6.4 Cisalhamento

6.4.1 Cisalhamento em $\mathbb{R}^2$

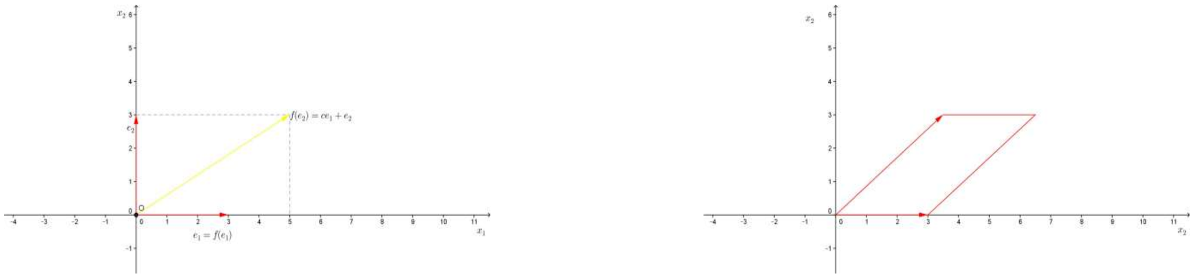
Paralela ao eixo $0x_1$.

$$f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + x_2(ce_1 + e_2) = (x_1 + cx_2)e_1 + x_2e_2.$$

Logo,

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + cx_2, x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



(a) (b)

Figura 6.13:

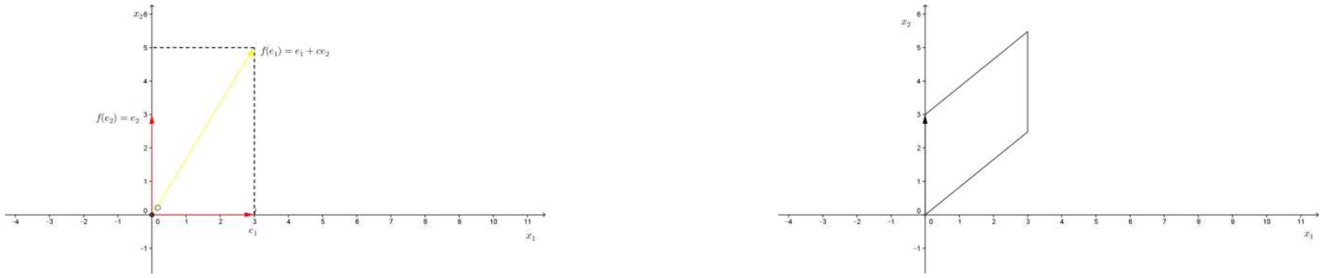
Paralela ao eixo $0x_2$.

$$f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1(e_1 + ce_2) + x_2e_2 = x_1e_1 + (cx_1 + x_2)e_2.$$

Logo,

$$f(x_1, x_2) = (x_1, cx_1 + x_2),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



(a) (b)

Figura 6.14:

6.4.2 Cisalhamento em $\mathbb{R}^3$

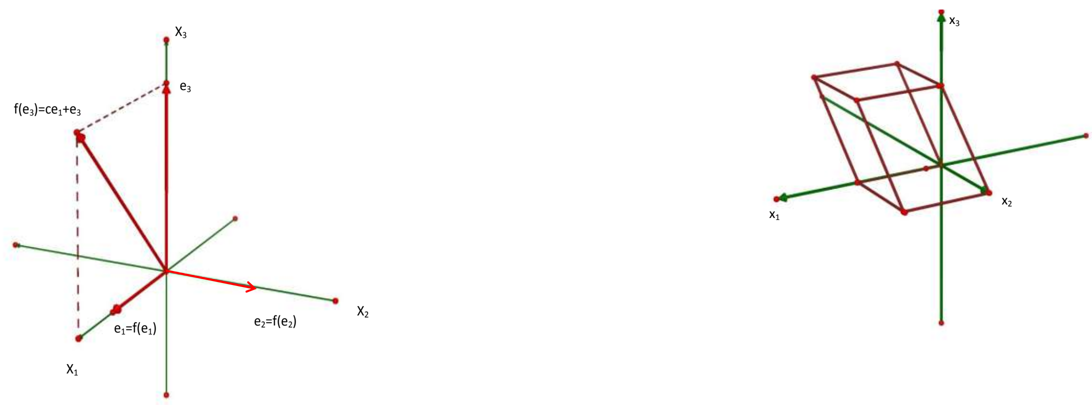
Paralela ao plano $x_1 0 x_2$ e paralelo ao eixo $0x_1$.

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3(ce_1 + e_3) \\ &= (x_1 + cx_3)e_1 + x_2e_2 + x_3e_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + cx_3, x_2, x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



(a) (b)

Figura 6.15: Cisalhamento paralelo ao eixo $0x_1$

Paralela ao plano $x_1 0 x_2$ paralelo ao eixo $0x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3(ce_2 + e_3) \\ &= x_1e_1 + (x_2 + cx_3)e_2 + x_3e_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + cx_3, x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (b)

Figura 6.16: Cisalhamento paralelo ao eixo $0x_2$.

Paralela ao plano $x_2 0 x_3$ paralelo ao eixo $0x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1(e_1 + ce_2) + x_2e_2 + x_3e_3 \\ &= x_1e_1 + (cx_1 + x_2)e_2 + x_3e_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, cx_1 + x_2, x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (b)

Figura 6.17: Cisalhamento paralelo ao eixo $0x_2$

Paralela ao plano $x_2 0 x_3$ paralelo ao eixo $0x_3$.

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1(e_1 + ce_3) + x_2e_2 + x_3e_3 \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + (cx_1 + x_3)e_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, cx_1 + x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (b)

Figura 6.18: paralelo ao eixo $0x_3$

Paralela ao plano $x_1 0 x_3$ paralelo ao eixo $0x_1$.

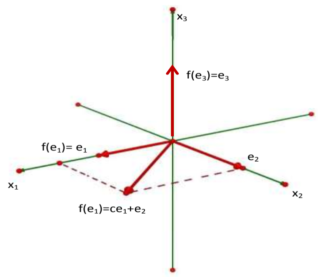
$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1e_1 + x_2(ce_1 + e_2) + x_3e_3 \\ &= (x_1 + cx_2)e_1 + x_2e_2 + x_3e_3. \end{aligned}$$

Logo,

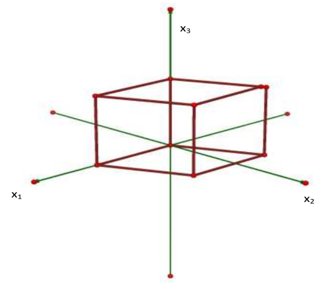
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + cx_2, x_2, x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Paralela ao plano $x_1 0 x_3$ paralelo ao eixo $0x_3$.



(a)



(b)

Figura 6.19: Cisalhamento paralelo ao eixo $0x_3$

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1e_1 + x_2(e_2 + ce_3) + x_3e_3 \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + (cx_2 + x_3)e_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, cx_2 + x_3),$$

para todo elemento $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (b)

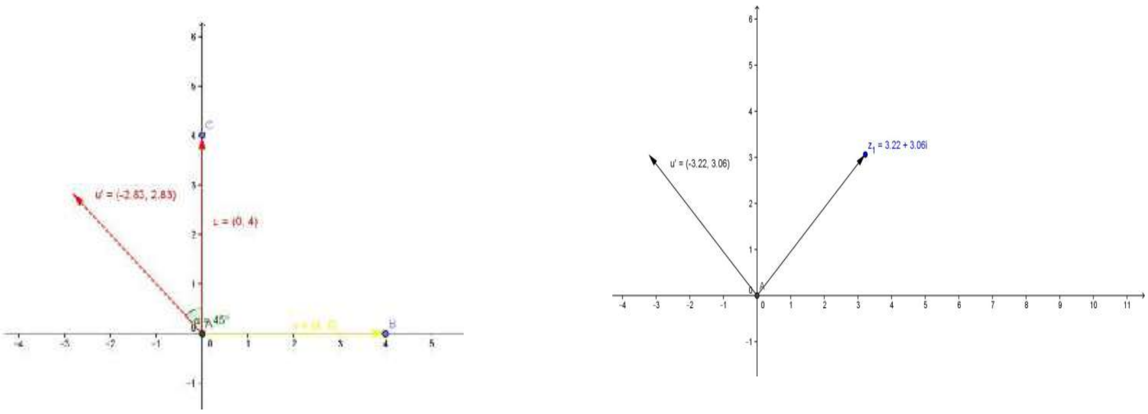
Figura 6.20: Cisalhamento paralelo ao eixo $0x_1$

6.5 Transformações sobre o corpo $\mathbb{C}$

Pelo Teorema 5.8.1, toda transformação linear $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sobre o corpo dos números complexos, é dada por

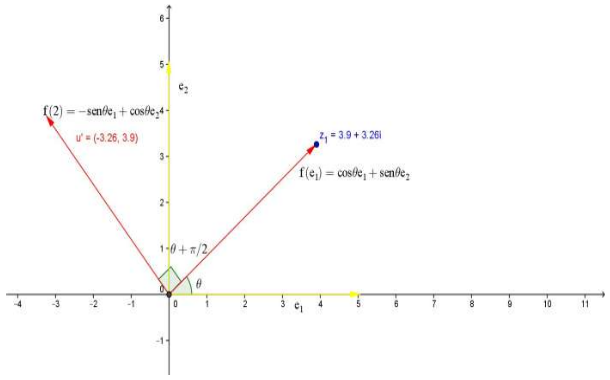
$$f(z) = az, \ (a \in \mathbb{C} \text{ fixo}),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. A partir da propriedade da multiplicação dos números complexos, podemos ver que $f(z)$ é um número complexo complexo de comprimento igual a $||a||\,||z||$ rotacionado a partir de z de um ângulo igual ao ângulo do número complexo a.

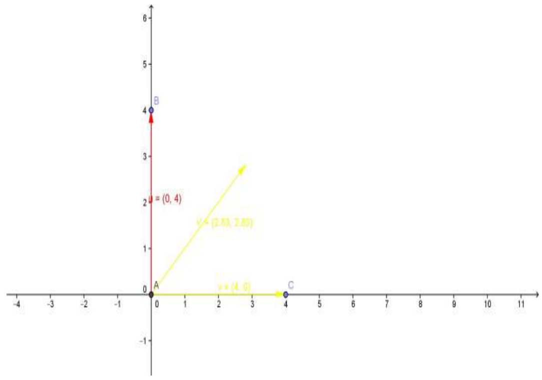


(a) (b)

Figura 6.21: Reflexão nos Complexos



(a) Figura 6.2.1



(b) Figura 6.2.2

Figura 6.22: Rotação nos Complexos

Capítulo 7

Explorando outras situações envolvendo linearidade na sala de aula

Nesse capítulo, apresentamos alguns exemplos de aplicação da linearidade, como proposta de atividades em sala de aula. Alguns deles são mais técnicos, porém outros mais concretos. O Objetivo aqui é o de mostrar ao aluno como a linearidade se apliaca, em situações reais.

7.1 Determinação da representação matricial de uma função linear

Nesse parágrafo, a partir da identidade 5.1, do Teorema 5.6.1, e da Observação 5.6.3, determinamos as matrizes que representam algumas funções lineares, bem como as coordenadas dos seus elementos imagens, a partir dessa representação. Mostramos as transfrmações associadas, utilizando a computação gráfica, através de uma atividade que pode ser realizada com alunos do Ensino Médio.

Para começar monstraremos a Reflexão em torno do eixo ox. Usando a base canônica, como foi visto no capítulo 6, pela identidade 5.1, do Teorema 5.6.1, temos

$$f(x) = f(x_1, y_1) = (x_1, -y_1),$$

e portanto

$$f(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1) \text{ e } f(0,1) = (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1).$$

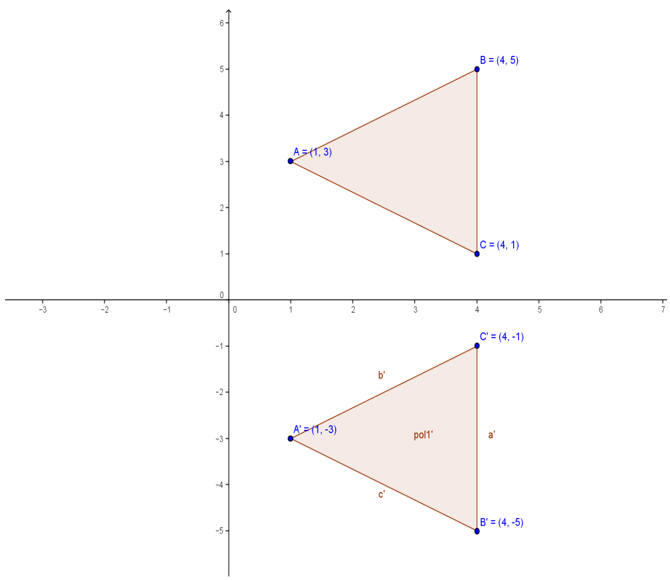
A matriz que representa a função linear reflexão, em relação ao eixo ox, é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As coordenadas da reflexão $x' = (x_2, y_2)$, de um ponto qualquer $x = (x_1, y_1)$, de $\mathbb{R}^2$, podem ser obtidas a partir do produto

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

A figura, abaixo, nos mostra gráficamente um exemplo de como podemos visualizar a figura geométrica refletida, em relação ao eixo ox, em particular um triângulo, a partir do cálculo das coordenadas dos vértices do triângulo original.



Para a reflexão, em torno do eixo oy, temos a função linear

$$f(x) = f(x_1, y_1) = (-x_1, y_1),$$

onde

$$f(1,0) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1) \text{ e } f(0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1).$$

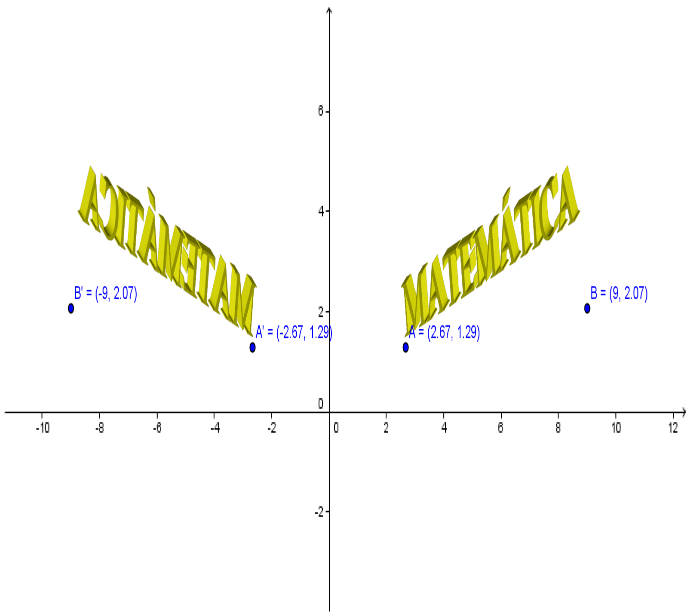
A matriz que representa a função linear reflexão, em relação ao eixo oy, é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As coordenadas da reflexão $x' = (x_2, y_2)$, de um ponto qualquer $x = (x_1, y_1)$, de $\mathbb{R}^2$, podem ser obtidas a partir do produto

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

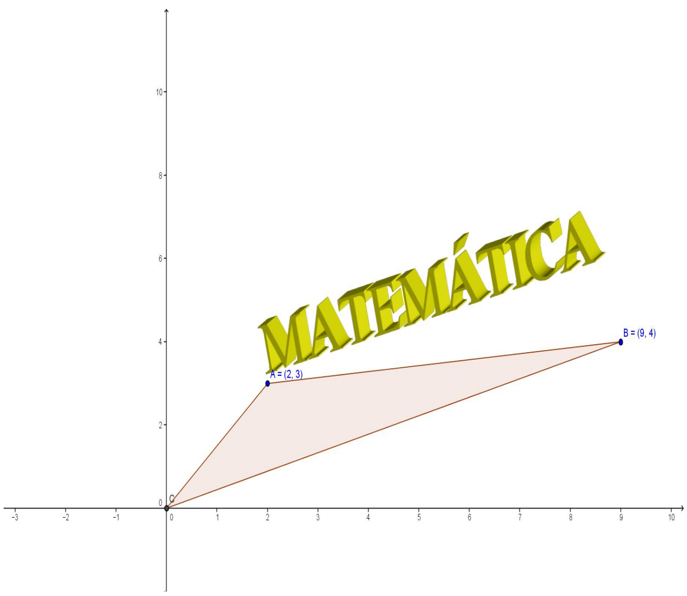
A figura, abaixo, nos mostra gráficamente um exemplo de como podemos visualizar a figura geométrica refletida, em relação ao eixo oy, em particular a palavra MATEMÁTICA, a partir do cálculo das coordenadas de alguns pontos.



Similarmente, aos dois exemplos apresentados acima, podemos determinar as coordenadas da rotação plana $x' = (x_2, y_2)$, de um ponto qualquer $x = (x_1, y_1)$, de $\mathbb{R}^2$, a partir do produto

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Para a visialização de um exemplo gráfico, consideremos duas figuras geométricas planas, a saber: a de um triângulo e da palavra MATEMÁTICA, conforme abaixo,



Se tomarmos uma rotação dessas figuras, de um ângulo de 90^o, as figuras rotacionadas poderão ser determinadas, a partir dos cálculos das coordenadas dos vértices do triângulo original. Assim, nomeando e localizando tais vértices, temos $A = (2, 3)$, $B = (9, 4)$ e $C = (0, 0)$. Como

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ 90^o & -sin\ 90^o \\ sin\ 90^o & cos\ 90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

obtemos as coordenadas dos pontos rotacionados, a partir do produto

$$A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ 90^o & -sin\ 90^o \\ sin\ 90^o & cos\ 90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

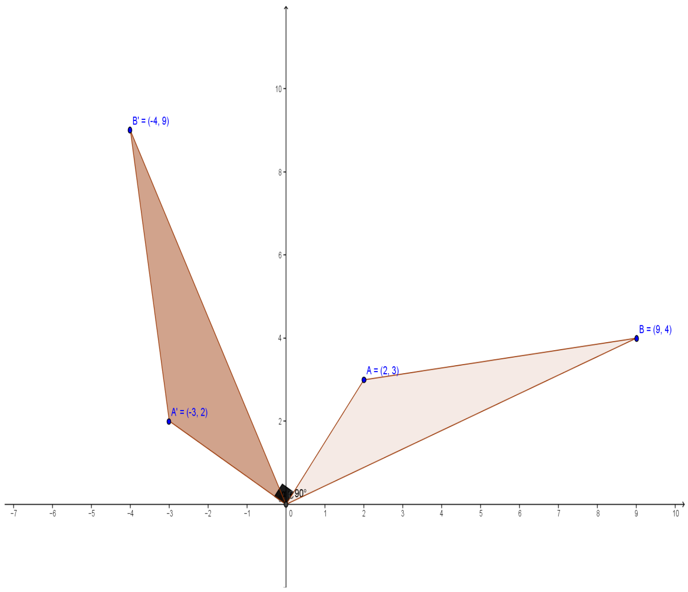
Similarmente, obtemos

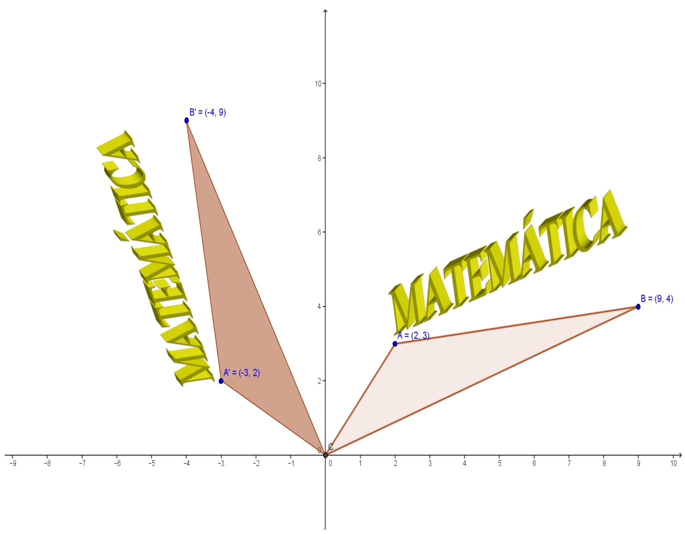
$$B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

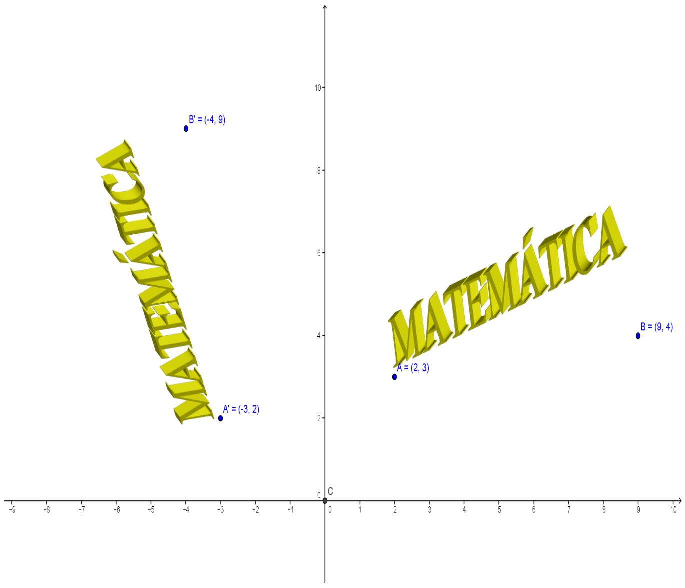
e

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Graficamente, poderemos visualizsar as seguintes figuras rotacionadas







7.2 Caracterização de problemas de proporcionalidade por meio de funções lineares envolvendo um ou vários parâmetros

Nessa seção, usaremos a função linear, envolvendo uma ou várias variáveis ou parâmetros, como exemplo de caracterização de problemas envolvendo proporcionalidade. Para demonstrarmos uma atividade dessa natureza, no ensino médio, usaremos o cereal flocos, para o caso de um parâmetro, e uma receita de granola, para o caso de vários parâmetros, onde cada um de seus ingredientes será representado na forma de um parâmetro. Nesse caso, a escolha dos valores nutricionais aconteceu devido a sua importância no dia a dia, já que os alimentos que compramos cotidianamente sempre são acompanhados dessas tabelas e desta forma além do estudo matemático poderiam ser trabalhados outros conteúdos.

Consideremos a função $C(x) = 3500x$, onde C representa a quantidade de calorias e x a quantidade de flocos de aveia. Podemos representar essa função graficamente, conforme a figura 7.1. Verificando as propriedades das funções, temos:

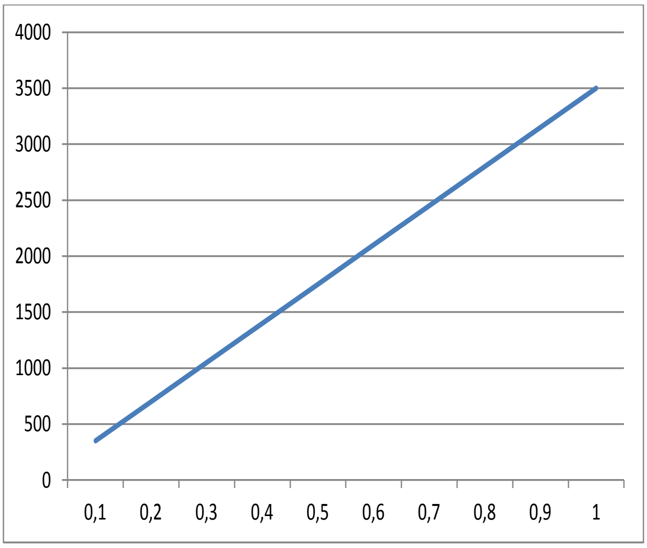


Figura 7.1: Quantidade de calorias X Quantidade por kg

Mostremos que tal função é do tipo função linear. Para isto, mostremos primeiramente que:

(i) $C(x_1 + x_2) = C(x_1) + C(x_2)$,

para quaisquer que sejam os valores x_1, x_2. De fato, para calcular a quantidade de calorias contida em $(x_1 + x_2)$ kg de flocos de aveia devemos multiplicar, essa quantidade, por um fator que represente a quantidade de calorias em 1kg, neste caso 3500kcal, sendo representada por

$$C(x_1 + x_2) = 3500(x_1 + x_2) = 3500x_1 + 3500x_2.$$

Logo,

$$C(x_1 + x_2) = C(x_1) + C(x_2).$$

Agora vejamos que a função C satisfaz também a condição:

(ii) $C(kx) = kC(x)$,

para quaisquer que sejam os valores k e x. De fato, se a quantidade de flocos de aveia for multiplicado por um fator qualquer, a produção também será multiplicada, isto é,

$$C(kx) = 3500(kx) = (3500kx) = k(3500x) = kC(x).$$

Verificamos assim, um exemplo de proporcionalidade caracterizado por meio de uma função linear, de uma variável ou com apenas um parâmetro.

Consideremos agora, uma tabela indicando as quantidades de calorias, de fibras e de gastos para elaboração de uma receita de granola, envolvendo cinco tipos de produtos.

	flocos de aveia	*flocos de trigo*	*passas*	*nozes*	*amêndoas*
calorias p/kg	*3500*	*3600*	*3020*	*6940*	*6190*
fibras (g/kg)	*29*	*93*	*53*	*38*	*120*
Preço(kg)	*6,40*	*7,00*	*17,40*	*87,60*	*55,60*

Com o uso desta tabela é possível quantificar a quantidade de calorias presentes quando utilizado x kg de flocos de aveia, y kg de floco de trigo, z kg de amendoas, t kg de nozes e w kg de passas, o mesmo ocorrendo com as quantidades de fibras e o valores gastos para a produção da receita, à partir das relações abaixo:

$$\begin{aligned} C(x,y,z,t,w) &= 3500x + 3600y + 3020z + 6940t + 6190w, \text{ (calorias)} \\ F(x,y,z,t,w) &= 29x + 93y + 53z + 38t + 120w, \text{ (fibras)} \\ P(x,y,z,t,w) &= 6,40x + 7,00y + 17,40z + 87,60t + 55,60w, \text{ (valores gastos)} \end{aligned}$$

Tratando-se pois de um problema do tipo linear, a partir do Teorema 5.6.1, podemos escrever esses valores "na forma de uma 3-upla de $\mathbb{R}^3$", por meio da função

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t,w) &= \big(C(x,y,z,t,w), F(x,y,z,t,w), P(x,y,z,t,w)\big) = \\ &= \big(3500x + 3600y + 3020z + 6940t + 6190w, \\ &\quad 29x + 93y + 53z + 38t + 120w, \\ &\quad 6,40x + 7,00y + 17,40z + 87,60t + 55,60w\big), \end{aligned}$$

a partir das quantidades utilizadas, expressas "na forma de uma 5-upla de $\mathbb{R}^5$", de cada ingrediente.

Podemos verificar com valores como seriam as possibilidades encontradas em sala de aula:

$$
\begin{aligned}
& f(0,40;\ 0,30;\ 0,09;\ 0,08;\ 0,13) \\
= & \big(3500.0,40 + 3600.0,30 + 3020.0,09 + 6940.0,08 + 6190.0,13; \\
& 29.0,40 + 93.0,30 + 53.0,09 + 38.0,08 + 120.0,13 \\
& 6,40.0,40 + 7,00.0,30 + 17,40.0,09 + 87,60.0,08 + 55,60.0,13\big) \\
= & \big(1400 + 1080 + 271,8 + 555,2 + 804,7; \\
& 11,6 + 27,9 + 4,77 + 3,04 + 15,6; \\
& 2,56 + 2,10 + 1,566 + 7,008 + 7,228\big) \\
= & \big(4111,7;\ 62,91;\ 20,462\big).
\end{aligned}
$$

Analisando os valores, encontramos $4111,7$ kcal por cada quilo do produto, ou $411,17$ kcal por 100gramas; $62,91$ gramas de fibra em cada quilo do produto, ou $6,29$ gramas em cada 100 gramas e finalmente o valor por quilo é equivalente a $R\$20,46$ ou $R\$2,46$ por cada 100 gramas.

7.3 Criptografia

A criptografia teve origem na China antiga e sua história se confunde com a invenção da escrita. Surgiu da necessidade de transportar informações e planos de guerra sem que fossem lidos e entendidos quando interceptados, daí a origem da palavra que deriva do grego e significa "escrita escondida"(Kryptós - escondido e gráphein - escrita).

Os primeiros registros encontrados datam de 2000 a.C nos hieróglifos egípcios. Júlio César, imperador romano (100 a.C - 44 a.C), usava a criptografia para enviar mensagens de guerra, a cifra de César, como é conhecida, consistia em trocar a letra do alfabeto pela terceira seguinte, como na tabela abaixo:

Alfabeto	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
cifrado	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

Leonardo da Vinci também usou o artifício da criptografia para proteger seus escritos, mas utilizava um método diferente, escrevia da direita para a esquerda e para que a mensagem pudesse ser lida era necessário o uso de um espelho. Outro importante uso da criptografia ocorreu na 1ª Guerra Mundial a criptografia foi utilizada em 1917 para a adesão dos Estados Unidos a guerra por uma mensagem que foi interceptada e decodificada pelos ingleses.

Na 2ª Guerra a criptografia foi novamente de suma importância para a transmissão de dados e estratégias, abreviando a guerra em uns 2 anos aproximadamente segundo historiadores.

A partir da 2ª guerra a matemática começou a fazer parte da criptografia, principalmente com o avanço da computação que permitiu que outras operações, além das habituais, fossem realizadas a longas distâncias. Esse avanço tecnológico possibilitou uma expansão da criptografia, o que antes era restrito apenas aos governos e empresas de grande porte.

A Criptografia é um exemplo de como a linearidade pode se trabalhada com alunos do ensino médio uma vez que trabalhamos os conceitos de multiplicação de matrizes e matrizes inversa, além disso, é uma forma divertida de abordar o assunto e demonstrar a necessidade para preservar dados sigilosos em transações bancárias e outras atividades em que haja a necessidade da utilização de senhas ou a preservação da privacidade e de dados pessoais.

7.3.1 Usando a matriz inversa como chave de codificação

A Criptografia foi desenvolvida na edição n^o 5 de 2001 da RPM e por representar um bom exemplo da linearidade, trabalharemos com esses exemplo.

É necessário escolher uma matriz que possua uma inversa para se começar a criptografia, essa matriz funcionará como a chave codificadora (C) e a matriz inversa (C^{-1}) como a chave decodificadora. O segundo passo é trabalhar com uma tabela onde todos os caracteres são representados por caracteres númericos, que servirão para transformar a mensagem em uma matriz (A). Para codificar a palavra escolhida é necessário multiplicar a matriz chave pela matriz A, encontrando dessa forma a matriz mensagem codificada M. Para decodificar a mensagem basta multiplicar a matriz chave decodificadora pela matriz mensagem. Assim, para codificar teremos $M = CA$ e para decodificar teremos $C^{-1}M = C^{-1}(CA) = (C^{-1}C)A = IA = A$.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	A	B	C	D	E	F	G
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	S	T	U	V	W	X	Y
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Z	à	á	â	ã	ç	é	ê	í	ó	ô	õ	ú	À	Á	Â	Ã
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
É	Ê	Í	Ó	Ô	Õ	Ú	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
,	.	;	/	<	>	:	?	°	[	]	º	{	}	ª	\	|
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102
-	=	+	_	‘	“	!	@	#	$	¹	²	³	(	)	&	%
103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

Usando a palavra codificada PnJt e trocando os caracteres pelos números da tabela encontramos a matriz $M = \begin{bmatrix} 42 & 14 \\ 35 & 19 \end{bmatrix}$ Usando uma matriz como código de conversão, nesse caso usaremos a matriz C;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar a decodificação é necessário encontrar C^{-1} que é a inversa de C

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar a decodificação é necessário multiplicar a matriz M pela inversa:

$$\begin{bmatrix} 42 & 14 \\ 35 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.1 + 14.(-1) & 42.0 + 14.1 \\ 35.1 + 19.(-1) & 35.0 + 19.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 - 14 & 0 + 14 \\ 35 - 19 & 0 + 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 14 \\ 16 & 19 \end{bmatrix} = A$$

Trocando os números pelos códigos temos a palavra Amor.

Outro exemplo de Criptografia, desta vez, trabalhando com a matiz $3x3$.

A palavra escolhida: SoDutbwde.

Trocando os caracteres pelos números temos:

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 45 & 16 & 31 \\ 22 & 21 & 3 \\ 24 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Conhecendo a matiz C, usada na codificação e encontrando a sua inversa C^{-1} podemos encontrar a palavra de origem

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$C^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz codificada pela inversa da matriz C;

$$\begin{bmatrix} 45 & 16 & 31 \\ 22 & 21 & 3 \\ 24 & 5 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 45.1+16.(-1)+31.0 & 45.0+16.1+31.0 & 45.(-1)+16.1+31.1 \\ 22.1+21.(-1)+3.0 & 22.0+21.1+3.0 & 22.(-1)+21.1+3.1 \\ 24.1+5.(-1)+25.0 & 24.0+5.1+25.0 & 24.(-1)+5.1+25.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 45-16+0 & 0+16+0 & -45+16+31 \\ 22-21+0 & 0+21+0 & -22+21+3 \\ 24-5+0 & 0+5+0 & -24+5+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 16 & 2 \\ 1 & 21 & 2 \\ 19 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Trocando os números pelos caracteres temos a palavra: Boa tarde.

Os exemplos foram elaborados utilizando as referências [2],[3],[9],[36]e [40]

Conclusão

Esse trabalho tem como proposta apresentar uma ferramenta de atualização e troca de experiências, sobre o conceito de proporção, a partir da análise de artigos, sobre o tema, que foram escritos, analisados e comentados por diferentes profissionais da área, da importante revista RPM, que demonstraram interesse em corrigir conceitos, trocar informações e se divertir de uma forma inteligente com curiosidades e desafios. Essa fórmula se mostrou tão eficaz que a resvista é publicadas há três décadas.

Depois de uma analise dos referidos artigos, da Revista do Professor de Matemática, foi possível verificar que apesar de apresentar o conteúdo necessário para o estudo da proporção, no ensino básico, e apresentá-los não só da forma teórica mas com situações problemas, foi percebido que os assuntos foram trabalhados de forma desvinculada, não apresentando conecção entre eles. A regra de três foi o tema mais abordado, mas sempre da mesma forma, utilizando situações problemas, sem acrescentar novidades ou uma forma diferenciada de se trabalhar como por exemplo estabelecer relações com as funções ou uma demonstração gráfica.

As funções e matrizes também foram trabalhadas da forma convencional, em alguns casos os artigos corrigiram erros que são comumente encontrados em livros didáticos e repassados em sala por professores e desta forma repetido pelos alunos, mas com excessão do artigo que relacionava a criptografia e matrizes os outros não apresentaram mudanças significativas ao longo desses trinta anos.

Esse trabalho vem de encontro com essa questão. Tem a proposta de ampliar o estudo do conceito de proporção para o conceito de linearidade, para o nível do ensino fundamental e médio, a fim de atualizar esse conteúdo às necessidades do mundo atual. Para isso, foram utilizadas feramentas matemáticas mais avançadas, mas que poderão ser adaptadas a esses níveis. Com isso, o conceito de linearidade permitirá ao aluno, uma melhor compreensão de outras áreas do conhecimento e também de aplicações, pois a atual tecnologia se utiliza dela para vários fins.

Os exemplos sugeridos, nesse trabalho, podem facilmente serem trabalhados, pois abordam realidades de nossos dias como alimentação equilibrada, as necessidades nutricionais dos seres humanos, a necessidade da matemática na computação, seguranças das informações e cálculos de possibilidades para prever situações futuras.

A matemática deve estar cada vez mais vinculada a realidade e a utilidade, demonstrando desta forma sua importância para a sociedade. Assim, cabe a nós professores mostrarmos sua importância e aplicabilidade.

Referências Bibliográficas

[1]A Brief History of Linear Algebra and Matrix Theory. Disponível em: <http //pages.uoregon.edu/vitulli/441.sp04/LinAlgHistory.html>. Acesso em: Abril de 2013.

[2]Anton, H.;Rorres,C.. *Álgebra linear com aplicações,oitava edição*,Ed. Bookman, São Paulo, 2001.

[3]Anton, H.;Busby,R.C.. *Álgebra linear Contemporânea*,Ed. Bookman, São Paulo, 2006.

[4] Ávila, Geraldo. Razões, Proporções e Regra de Três. Revista Professor de Matemática, N^{0}8, 1986.

[5] Ávila, Geraldo. Ainda sobre a Regra de Três.Revista Professor de Matemática, N^{0}9,1986.

[6]Bardin,Laurence. *Análise de Conteúdoa, 5^a Edição* , Editora Unicamp., 2011.

[7] BRASIL. Lei NÔ 9.394, de 20 de dezembro de 1996 Lex: Leis de Diretrizes e Bases da educação Brasileira (LDB), Brasília, 1996.

[8] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.

[9]Boldrini,José Luiz;et al. *Álgebra Linear, 3 ^{a} Edição* , Editora Harbra ltda., 1986.

[10] Colli, Eduardo. Imposto Progressivo.Revista do Professor de Matemática, N^0 54,2004.

[11] Dornelles Filho, Adalberto A..Montando uma Dieta Alimentar com Sistema Lineares.Revista do Professor de Matemática, N^0 59,2006.

[12]Eves,Howard. *Introdução à história da matemática, 5ª Edição* , Editora Unicamp., 2011.

[13]Ferreira,Maria Cristina Costa;Gomes,Maria Laura Magalhães.Sobre o ensino de sistemas lineares. Revista do Professor de Matemática, N⁰32, 1996.

[14]Hefez, Abramo. *Introdução à Álgebra Linear*, Coleção Profmat, 2012.

[15]Hellmeister,Ana Carolina P..Jornal na sala de aula.Revista do Professor de Matemática, N⁰ 60,2006.

[16]Hoffman, K ; Kunze, R.A.. *Linear algebra, Second Ed*,Prentice-Hall, 1986. .

[17]História da Matemática: A origem dos sitemas lineares e determinantes.Disponível em:<www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php> Acesso em: Abril de 2013

[18]Imenes, Luiz Márcio P.; Jakubovic,José. Considerações Sobre o Ensino da Regra de Três Composta. Revista do Professor de Matemática, N⁰ 2,1982.

[19]Karam,Ricardo Avelar Sotomaior.Grandezas Físicas para exemplificar a Função afim.Revista do Professor de Matemática, N⁰ 63,2007.

[20]Lima, Elon. Que são grandezas proporcionais?Revista Professor de Matemática, N⁰9,1986.

[21]Lima, Elon. Novamente a Proporcionalidade.Revista Professor de Matemática, N⁰12,1988.

[22]Lima, Elon. Sobre o ensino de Sistemas Lineares.Revista Professor de Matemática, N⁰23,1993.

[23]Lima, Elon. Crescimento Linear e Crescimento Exponencial.Revista Professor de Matemática, N⁰33,1997.

[24]Magossi, José Carlos.Gasolina versus álcool.Revista do Professor de Matemática, N⁰62, 2007.

[25] Morais, Roque.UMA TEMPESTADE DE LUZ: A COMPREENSÃO POSSIBILITADA PELA ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA .Ciência & Educação, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003

[26] Moraes, R.; Galiazzi, M. C.ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA: PROCESSO RECONSTRUTIVO DE MÚLTIPLAS FACES.Ciência & Educação, v. 12, n. 1, p. 117-128, 2006

[27]Moutinho, Darlan. Ainda os sistemas lineares.Revista do Professor de Matemática $n^0$47,2001.

[28]Passani,Claudio.O produto das matrizes. Revista do Professor de Matemática, $N^0$21, 1992.

[29]Pereira, Antônio Luiz;Assumpção,Sergio D.; Ehlers,Renata M.;Sanches,Júlio C.S. Transformações no Plano e Sistemas Articulados.Revista do Professor de Matemática, $N^0$47, 2001.

[30]Poole, D;Salerno,D.P.M.;Salerno,M.. *Álgebra Linear*Pioneira Thomson Learning, Inc., São Paulo, Cengage Learning Editores, 2004

[31]Rodrigues, Flavio Wagner. As "cadeias"do professor Bloch - Histórias que ficam na memória. Revista do Professor de Matemática, N^0 10,1987.

[32]Santos,Robinson Nelson dos.Contagens de Multidões: Quantas Pessoas Cabem na Avenida Paulista.Revista do Professor de Matemática, N^0 64,2007.

[33]Santos, Rogério César dos.Função Afim e Festa. Revista Professor de Matemática, $N^0$76, 2011.

[34]Smole,Katia Cristina Stocco;Centurión,Marília Ramos;Diniz,Maria Ignez de Souza Vieira. A interpretação gráfica e o ensino das funções.Revista Professor de Matemática, $N^0$10, 1987.

[35]Tomarozzi,Antonio Carlos. Matrizes em Blocos.Revista Professor de Matemática, $N^0$40, 1999.

[36]Tomarozzi,Antonio Carlos. Codificando e Decifrando Mensagens.Revista Professor de Matemática, $N^0$45, 2001.

[37]Tinoco,Lúcia A. de A.Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. Revista Professor de Matemática, $N^0$14,1989.

[38]Tunala, Nelson. Um procedimento Geométrico para Otimização Linear no Plano.Revista Professor de Matemática, $N^0$31,1996.

[39]Williamson,R.E.; Crowell, R.H.; Trotter,H.F. .*Calculus of Vector Funtions, Second Ed*, New Jersey, 1968.

[40]http://www.ipg.pt/user/m̃ateb1.eseg/doc/16semana/Quadrados_m%C3%A1gicos.pdf.Acesso em: Abril de 2013

[41]http://www.ime.usp.br/b̃rolezzi/disciplinas/20062/mat341/fibonacci.pdf. Acesso em: Abril de 2013.