



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

Gieely Cerqueira Rodrigues Filho

**A MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NA
TRIGONOMETRIA NUMA ESCOLA ESTADUAL DE
CÂNDIDO SALES - BA**

Vitória da Conquista – Ba

2022

Giely Cerqueira Rodrigues Filho

**A MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NA
TRIGONOMETRIA NUMA ESCOLA ESTADUAL DE CÂNDIDO
SALES - BA**

Dissertação apresentada
ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional-
PROFMAT, oferecido pela
Universidade Estadual do
Sudoeste da Bahia – UESB, como
requisito necessário para
obtenção do grau de Mestre em
Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a
Alexsandra Oliveira Andrade.

Vitória da Conquista – Ba

2022

R613m Rodrigues Filho, Geely Cerqueira.

A modelagem matemática aplicada na trigonometria numa escola estadual de Cândido Sales - Ba. / Geely Cerqueira Rodrigues Filho, 2022.

63f. il.

Orientador (a): Dra Alessandra Oliveira Andrade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2022.

Inclui referências. 58 - 60.

1. Trigonometria. 2. Triângulos. 3. Modelagem Matemática. I. Andrade, Alessandra Oliveira. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 516.24

Geely Cerqueira Rodrigues Filho

**A MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZADA APLICADA NA
TRIGONOMETRIA NUMA ESCOLA ESTADUAL DE CÂNDIDO
SALES - BA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Alexandra Oliveira Andrade

Prof.^a Dr.^a Alexandra Oliveira Andrade - UESB

Jonson Ney Dias da Silva

Prof. Dr. Jonson Ney Dias da Silva - UESB

Robson Aldrin Lima Mattos

Prof. Dr. Robson Aldrin Lima Mattos - UNEB

Vitória da Conquista – Ba, 02 de Dezembro de 2022

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Papiro de Rhind.	11
Figura 2: Plimpton 322.	12
Figura 3: Almagesto	13
Figura 4: Ângulos Complementares.	15
Figura 5: Relações métricas no triângulo retângulo.	15
Figura 6 : Relações Métricas no Triângulo Retângulo.	16
Figura 7: Relações Métricas no Triângulo Retângulo.	16
Figura 8: Triângulos Formados sob um ângulo θ	18
Figura 9 : Triângulo retângulo formado sob um ângulo θ	19
Figura 10: Relação Fundamental da Trigonometria.	21
Figura 11: Medida dos arcos AB e $A'B'$	22
Figura 12: Arco de 5 rad.	23
Figura 13: Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.	24
Figura 14: Tangente no Círculo Trigonométrico.	25
Figura 15: Terceiro Quadrante $\text{tg } \theta > 0$	26
Figura 16: Segundo Quadrante $\text{tg } \theta < 0$	26
Figura 17: Quarto Quadrante $\text{tg } \theta < 0$	26
Figura 18: Função seno	27
Figura 19: Função cosseno.....	28
Figura 20: Função tangente	29
Figura 21: Esquema de uma modelagem.....	32
Figura 22: Esquema de processo de Modelagem Matemática	42
Figura 23: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo	46
Figura 24: Resolução resolvida com êxito.....	46
Figura 25: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo.	47
Figura 26: Questão resolvida de maneira correta.....	48
Figura 27: Questão resolvida de maneira correta.....	49
Figura 28: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo	49
Figura 29: Desistência pelo aluno de resolução da questão.....	49
Figura 30: Alunos medindo a altura dos degraus da escada da praça	51
Figura 31: Alunos medindo a sombra que o poste de madeira fazia no solo.	51
Figura 32: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo.	52
Figura 33: Questão resolvida de maneira correta.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis	20
Tabela 2: Unidades de Medidas da Circunferência	23
Tabela 3: O aluno e o professor nos casos de Modelagem.....	39

Agradecimentos:

Agradeço primeiramente a Deus pela sabedoria e paciência que me concedeu a cada manhã.

Agradeço a minha família, em especial meus pais, Gieely e Vilma, pelas palavras de incentivo e por não pouparem esforços para a minha educação, a eles o meu respeito, admiração e o meu muito obrigado pelo amor e incentivo que sempre me deram, não poderia deixar de citar também os meus agradecimentos aos meus amigos Bruno, Matheus, Wadson, João Vitor e João Victor pela paciência e pelo auxílio na revisão deste trabalho e ajuda ao longo dessa jornada, e também o meu muito obrigado a minha esposa Jhessyca que sempre esteve comigo ao longo dessa caminhada. Por fim agradeço aos meus professores, pelo apoio, pela dedicação e esforço despendidos durante as aulas, bem como, por sua preocupação com nossa formação ética, moral e técnica, um agradecimento especial a minha orientadora professora Dra. Alexandra Oliveira, por todo suporte oferecido, e pela contribuição para que esse trabalho fosse desenvolvido da maneira mais plena e prazerosa possível.

Resumo

A partir da observação das dificuldades apresentadas, ao ministrar o conteúdo de trigonometria, a uma turma do 2º ano do ensino médio, da rede pública estadual do município de Cândido Sales–BA, foi possível perceber que a maioria dos alunos não compreendiam o conteúdo ministrado pela falta de metodologias adequadas e a ausência de recursos que facilitassem a aprendizagem dos discentes. Logo, o objetivo da dissertação é buscar metodologias inovadoras as quais despertem a atenção dos alunos. O presente trabalho aborda as principais concepções sobre a Modelagem Matemática, bem como o contexto histórico e a fundamentação teórica da Trigonometria. Foi feita uma análise do potencial da modelagem matemática bem como sua importância no processo de ensino-aprendizagem. Nesta pesquisa, destacou-se a atividade realizada pelos alunos em uma praça próxima a escola, sendo todo o processo relatado e resumido por meio de uma sequência didática contida no corpo deste texto. A atividade consistiu na elaboração de problemas, a partir das medições dos objetos presentes na praça. A percepção de que a trigonometria está presente no cotidiano do aluno, a exemplo da praça, que eles sempre visitam ao sair da escola, traz um novo olhar para a absorção desse conteúdo, capaz de despertar o interesse dos estudantes, tornando a aula mais atrativa. Por fim, verificou-se que ao trabalhar com a modelagem matemática ocorreu uma maior assimilação dos conteúdos por parte dos alunos, possibilitando que eles passassem a ser mais ativos e colaboradores junto ao professor na construção do conhecimento, tornando as aulas mais dinâmicas e descontraídas.

Palavras-Chave: Trigonometria. Triângulos. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

From the observation of the difficulties presented, when teaching the trigonometry content, to a class of the 2nd year of high school, from the state public network of the Municipality of Cândido Sales-BA, it was possible to perceive that most students did not understand the content taught. due to the lack of adequate methodologies and the absence of resources that would facilitate the learning of the students, being necessary the search for innovative methodologies which would call the attention of the apprentices. The present work approaches the main conceptions about Mathematical Modeling, as well as the historical context and the theoretical foundation of Trigonometry. An analysis was made of the potential of mathematical modeling as well as its importance in the teaching-learning process. In this research, we highlight the activity carried out by the students in a square near the school. The activity consisted in the elaboration of problems, from the measurements of the preset objects in the square. The perception that trigonometry is present in the student's daily life, such as the square, which they always visit when leaving school, brings a new look at the absorption of this content, capable of arousing students' interest, making the class more attractive. Finally, it was found that when working with mathematical modeling there was a greater assimilation of the contents by the students, allowing them to become more active and collaborating with the teachers in the construction of knowledge, making the classes more dynamic and relaxed.

Keywords: Trigonometry. triangles. Mathematical Modeling.

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	9
2. BREVE HISTÓRICO SOBRE A TRIGONOMETRIA.....	11
2.1 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E SUAS RELAÇÕES MÉTRICAS	14
2.1.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo	17
2.1.2 A Trigonometria no Círculo Unitário	22
2.1.3 Gráficos das Funções Trigonométricas Seno, Cosseno e Tangente	27
3. MODELAGEM MATEMÁTICA	30
3.1 ORIGEM E HISTÓRIA DA MODELAGEM	30
3.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONCEPÇÃO DE ALGUNS PESQUISADORES	31
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DIDÁTICA.....	34
3.5 A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA.....	37
4. A MATEMATIZAÇÃO COMO APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA.....	43
4.1 METODOLOGIA	43
4.2 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA	45
4.3 FORMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	54
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
6. REFERÊNCIAS	58
APÊNDICE A.....	61
ATIVIDADE DIAGNOSTICA.....	61
APÊNDICE B.....	62

1. INTRODUÇÃO

A maneira de ensinar matemática com base nos moldes do ensino tradicional da Matemática torna-se cada vez mais ineficientes, para alcançar o interesse do aluno, principalmente, porque abordam conceitos alheios ao cotidiano dos estudantes, o que implica no distanciamento dos estudantes com a matéria. Por essa razão, devem ser trazidas para sala de aula novas metodologias e tecnologias, que aproximem os conteúdos matemáticos de suas aplicabilidades e, conseqüentemente, dos alunos.

A presente pesquisa aborda a modelagem matemática como uma alternativa para o ensino da trigonometria que se dá através de uma concepção na qual permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes, permitindo o protagonismo do aluno na construção de seu conhecimento, através da busca por modelos matemáticos que representem as situações da vida real. Todavia, o estudo da matemática pode tornar-se desinteressante e desestimulante, o que dificulta a aprendizagem do aluno, sendo a Modelagem Matemática uma metodologia de ensino que aborda situações reais e as traduzem para linguagem matemática.

Para Mendes (2013), a trigonometria é um dos tópicos da Matemática que possuem muitas aplicações práticas em diversas áreas da atuação humana, ao se trabalhar trigonometria em sala de aula, os alunos geralmente apresentam grandes dificuldades na compreensão. Falando-se em ensino-aprendizagem não apenas da trigonometria, mas da matemática de um modo geral, é necessário que o professor seja inovador e que busque metodologias dinâmicas, que ofereçam um leque de possibilidades para despertar no aluno um novo olhar para aquele tema abordado.

Segundo Vianna (2006), a educação é indispensável para se entender qual o caminho os alunos deverão seguir e onde eles podem chegar. Em seu sentido mais amplo, significa que o professor deverá ter a capacidade de contribuir com o direcionamento dos educandos para seu desenvolvimento.

A realização deste trabalho foi motivada pelo fato de o pesquisador possuir vários anos de experiência no ensino de trigonometria, e baseado nisso, perceber uma certa dificuldade por parte dos alunos na assimilação dos seus conceitos, assim como em relação à aplicabilidade. Dessa forma, a Modelagem

Matemática se apresentou como uma possibilidade de contornar essa situação e tornar a trigonometria um conhecimento mais acessível aos alunos.

Logo, a presente dissertação foi desenvolvida com o intuito de mostrar à importância da modelagem matemática utilizada como metodologia ativa no ensino-aprendizagem da trigonometria. O objetivo geral da dissertação é buscar metodologias inovadoras as quais despertem a atenção dos alunos.

Tendo como base o objetivo geral, foram estabelecidos como objetivos específicos: utilizar a modelagem matemática como estratégia de ensino; analisar o potencial da modelagem matemática bem como a sua importância no processo de ensino-aprendizagem; desenvolver metodologias ativas para o aprendizado da trigonometria no ensino médio.

Por conseguinte, para atender aos objetivos citados, no capítulo 2 foi feito um breve histórico da Trigonometria. No capítulo 3 foi apresentado a teoria necessária para a compreensão do trabalho, e realizadas algumas definições sobre a modelagem Matemática. Apresentamos resultados envolvendo semelhança de triângulos; a relação fundamental da trigonometria; relações de seno; cosseno e tangente, que posteriormente vão ser utilizados no capítulo 5. O capítulo 4 faz uma abordagem da metodologia e a maneira que foi desenvolvida a pesquisa, assim como apresenta a sequência didática que foi aplicada com os alunos, e no capítulo 5 a aplicação da modelagem matemática em campo.

Nas Considerações Finais, apresenta-se uma análise da sequência didática utilizando a modelagem matemática na trigonometria aplicada na Colégio Estadual de Cândido Sales com 35 alunos do 2º ano do ensino médio, como ela pode contribuir para a melhoria do ensino da Trigonometria e as propostas de trabalhos futuros.

2. BREVE HISTÓRICO SOBRE A TRIGONOMETRIA

Neste capítulo será abordado um breve histórico sobre a trigonometria, bem como as relações trigonométricas existentes no triângulo retângulo. O desenvolvimento da humanidade histórica e culturalmente foi marcado por estudos e investigações, nos quais o conhecimento matemático é um deles, a exemplo da trigonometria que desenvolveu-se a partir das necessidades existentes nos estudos de astronomia, navegação e geografia, no qual surgiram problemas em que houve a necessidade de comparar um triângulo qualquer a outro semelhante, motivo que fez surgir o círculo trigonométrico onde se tem todos os triângulos possíveis com cateto unitário ou hipotenusa unitária.

Não se sabe ao certo quando os estudos da trigonometria foram iniciados, mas em alguns papiros existem registros de problemas envolvendo a trigonometria. EVES, (1992), afirma que no papiro de Rhind é possível encontrar problemas envolvendo cotangente, sendo este o mais antigo registro que sobreviveu ao tempo e foi copiado por Ahmes, por volta de 1650 a.C., de outro escrito ainda mais antigo provindo do Reino Médio entre 2000 a.C. e 1800 a.C.

O papiro de Rhind foi publicado em 1927 em um rolo com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, o escrito encontra-se, quase na sua totalidade, no museu British Museum, em Londres, mas alguns fragmentos estão no Brooklyn Museum, em Nova York. Um fragmento do papiro de Rhind pode ser visualizado na Figura 1.

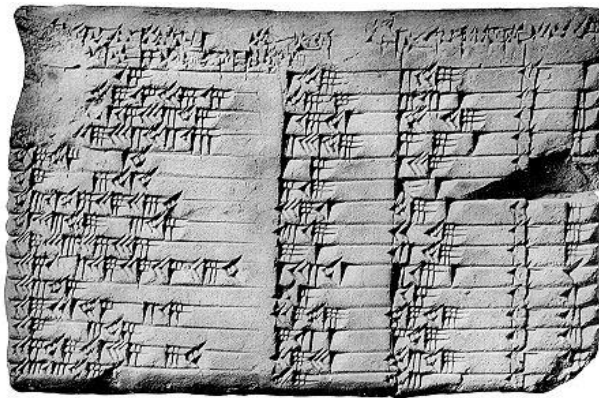
Figura 1: Papiro de Rhind.



Fonte: Mol, Rogério S. (2013), p.22.

Conforme (BICUDO, 2010) e (USP, 2000), outro documento importante é a tábula Plimpton 322 que leva esse nome por se tratar de uma tabula da coleção G. A. Plimpton da universidade de A Plimpton 322 é, talvez, a mais notável tábula matemática babilônica, e foi escrita no período Babilônico Antigo, aproximadamente entre 1900.a.C. e 1600 a.C. Esta pedra se encontra na Universidade de Columbia, em Nova York. Na figura 2 pode se observar a tábula.

Figura 2: Plimpton 322.



Fonte: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/32275.jpg>, 2022.

A construção da trigonometria inicia-se com uma matemática eminentemente prática para determinar distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Graças ao desenvolvimento da trigonometria o homem pode fazer as grandes viagens marítimas, pois, com ela, e mais a posição das estrelas, os navegadores podiam se orientar. O aprofundamento dos estudos na Astronomia, pelos egípcios e gregos, deu-se um grande impulso ao desenvolvimento da trigonometria, podendo-se destacar grandes nomes nessa época. O grego Hiparco de Nicéia (190 a.C – 125 a.C), considerado pai da trigonometria, nascido em Nicéia, na Bitínia, foi astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático.

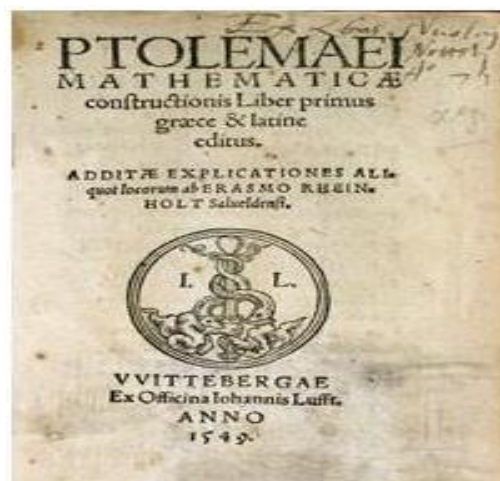
Segundo EVES, (1992), Hiparco viveu em Alexandria e em Rodes, e se dedicou ao estudo das estrelas até a data da sua morte. Entre os feitos de Hiparco está o fato de ter sido a primeira pessoa a relacionar as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo através de uma tabela de cordas. A trigonometria de Hiparco era baseada no estudo da relação entre a corda de um círculo e o ângulo entre os segmentos que ligam as extremidades dessa corda ao centro das cordas de uma circunferência. Através de um estudo sistemático das relações entre o ângulo e o comprimento da

corda correspondente, construiu uma tabela trigonométrica de cordas dos ângulos de 0° a 180° . Provavelmente a divisão do círculo em 360° teve origem a partir da tabela de cordas de Hiparco.

Outro extraordinário matemático foi Ptolomeu nascido possivelmente em Ptolemaida Hérmia por volta de 90 d.C., no Egito. Morreu em Canopo, também no Egito, por volta do ano 168 d.C., que ficou conhecido por seus trabalhos em astrologia, astronomia e cartografia e foi um dos primeiros cartógrafos, se não o primeiro, a usar escala em mapas, foi autor da mais importante obra da trigonometria da Antiguidade, surgida no século dois de nossa era, em Alexandria. Composta de treze volumes ela ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe “a maior = Al magest”, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época em Astronomia.

Para Eves (2004), a obra o Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até Copérnico, no século XVI. Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e que a maior parte da obra é baseada no trabalho de Hiparco, suas obras foram indispensáveis para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega que contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da trigonometria. A figura 3 ilustra a capa da obra.

Figura 3: Almagesto



Fonte: <https://www.zenite.nu/historia-das-constelacoes-ocidentais>.

Outros grandes matemáticos da antiguidade que teve grande contribuição para o desenvolvimento da trigonometria foram, Tales de Mileto (624 – 546 a. C.) e Pitágoras (570 – 495 a. C.). Segundo Mol (2013), Tales de Mileto, é considerado o criador da geometria dedutiva, em que são atribuídas a ele as primeiras

demonstrações matemáticas, sendo admitidos como seus resultados sobre figuras planas: “Os lados dos triângulos semelhantes são proporcionais”, “Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro”, “Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”, “O ângulo inscrito em um semicírculo é reto”, dentre outros.

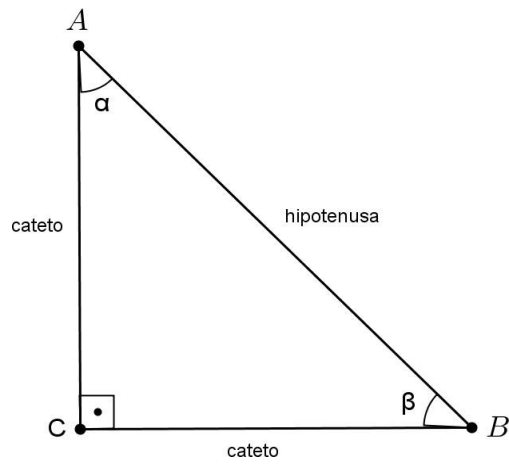
Já na Escola Pitagórica, fundada no século V a. C. por Pitágoras, ultrapassou a Escola Iônica, fundada por Tales de Mileto, que uniu o estudo da geometria a astronomia e a teoria dos números. Segundo Bell (1945), atribuímos a Escola Pitagórica a criação da lei de intervalos musicais, que relaciona os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais aos comprimentos de corda. Considera-se essa lei um presságio do aparecimento das funções seno e cosseno para auxiliar o estudo das ondas sonoras.

Segundo Eves (2004), a tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos, hoje universalmente conhecidos pelo seu nome, em que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos, satisfazem a equação $a^2 = b^2 + c^2$, onde as medidas c e b dos catetos e a medida a da hipotenusa de um triângulo retângulo, com esse teorema foi possível demonstrar a relação trigonométrica fundamental.

2.1 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E SUAS RELAÇÕES MÉTRICAS

A Geometria Plana, também conhecida como Geometria Euclidiana, é a parte da Matemática que estuda as figuras bidimensionais. Atribui-se o nome de triângulo retângulo ao que tem um ângulo igual a 90 graus (ângulo reto). Em um triângulo retângulo, os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de “Catetos” e o lado em frente ao ângulo reto é a “Hipotenusa”, sendo os ângulos agudos complementares ($\alpha + \beta = 90^\circ$). Na figura 4 pode-se observar um triângulo retângulo com seus ângulos complementares α, β .

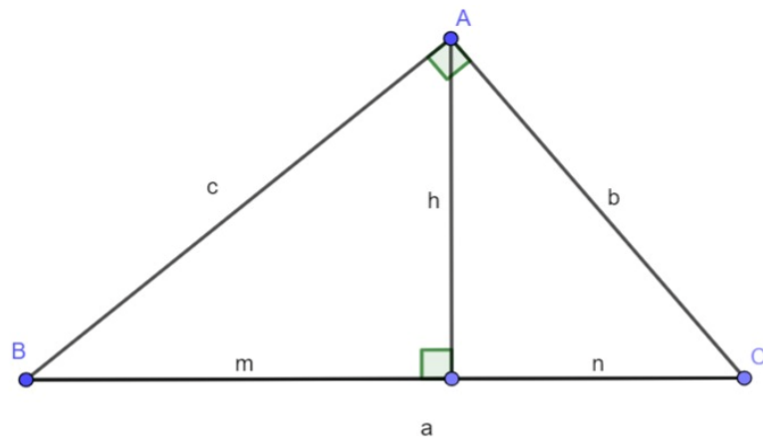
Figura 4: Ângulos Complementares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se observar o triângulo ABC, que é retângulo em A na figura 5.

Figura 5: Relações métricas no triângulo retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definido os seguintes elementos do ΔABC :

c e b são os catetos;

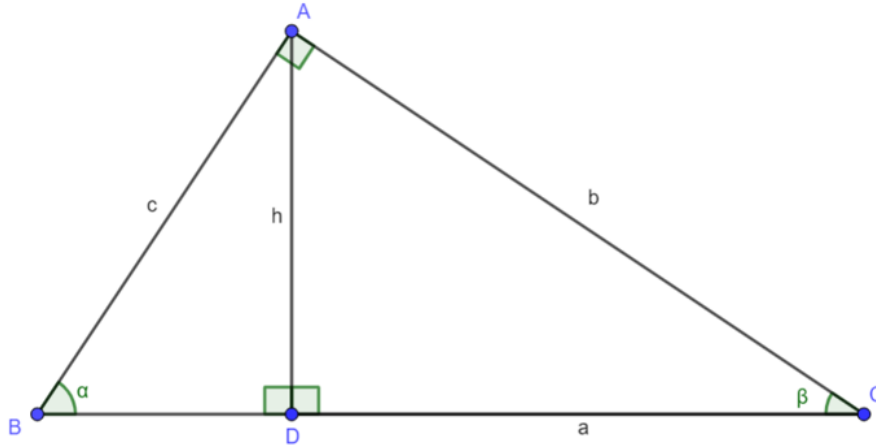
a é a hipotenusa;

h é a altura relativa à hipotenusa;

m e n são as projeções ortogonais dos catetos c e b , respectivamente.

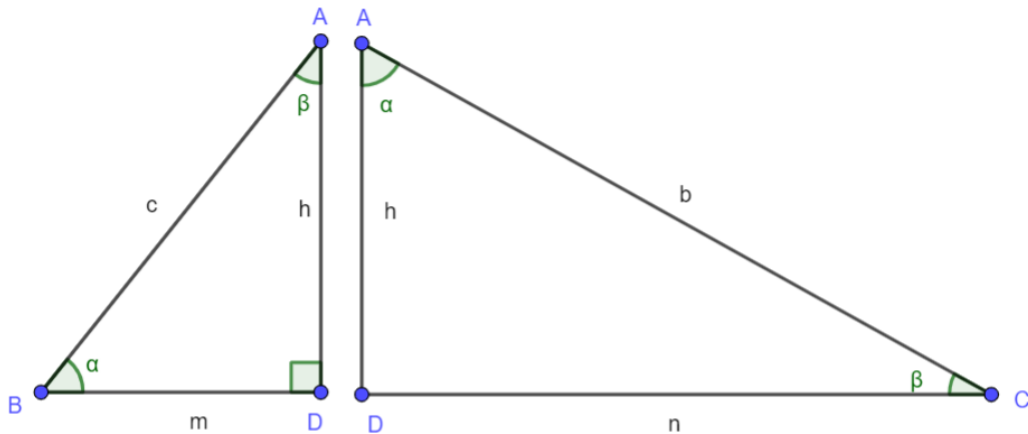
Observa-se que nas figuras 6 e 7, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si.

Figura 6 : Relações Métricas no Triângulo Retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7: Relações Métricas no Triângulo Retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, pelo 1º caso (AAA) de semelhança, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

Pela semelhança entre ΔABC e ΔDBA , segue-se;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am \quad (I)$$

Pela semelhança entre ΔABC e ΔDAC , segue-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \quad (II)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an \quad (III)$$

Pela semelhança entre ΔDBA e ΔDAC , segue-se:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (IV)$$

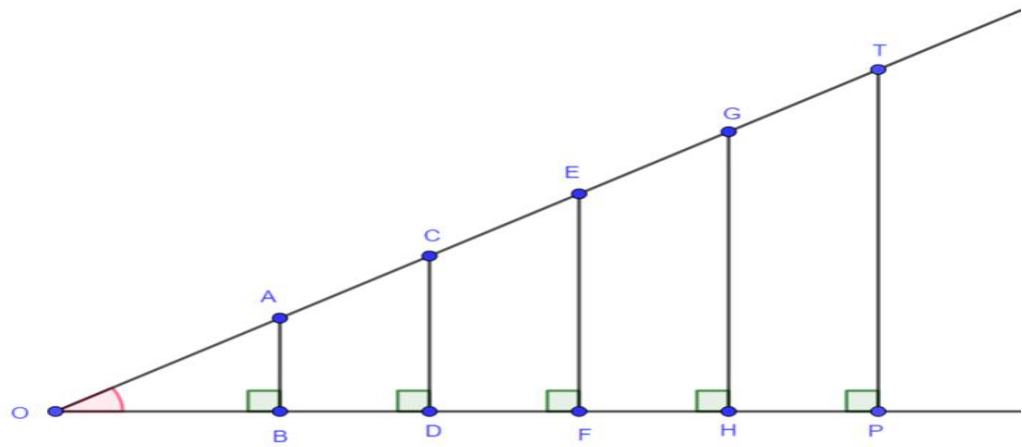
Portanto ao somar membro a membro as equações I e III, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 . \quad (V)$$

Logo, tem-se a relação que expressa o “Teorema de Pitágoras”.

2.1.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considerando um ângulo qualquer de medida θ , a partir dos pontos $A, C, E, G, (\dots)$ da semirreta OT , as perpendiculares CD, EF, GH , etc., à semirreta OP , e considerando 4 (quatro) dentre uma infinidade de triângulos retângulos que podem ser formados de medida θ de um de seus ângulos que são representados pela Figura 8.

Figura 8: Triângulos Formados sob um ângulo θ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível observar que os triângulos OAB, OCD, OEF, OGH são semelhantes, portanto, a razão entre os dois lados quaisquer de um dos triângulos é igual a razão de dois lados correspondentes dos demais, como segue:

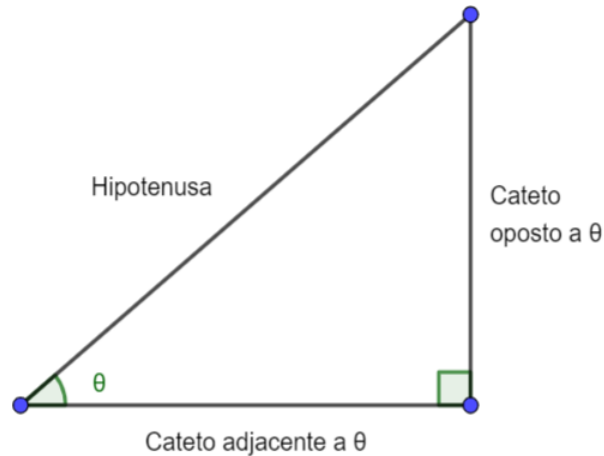
$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = k_1 \quad (1)$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = k_2 \quad (2)$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = k_3 \quad (3)$$

As constantes k_1, k_2, k_3 dependem do ângulo θ para serem obtidos. Assim, como os infinitos triângulos criados sob o ângulo θ são semelhantes, tomando apenas um dentre os infinitos, pode-se encontrar as constantes. Essa relação depende apenas do ângulo θ (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual θ é um dos ângulos agudos). Ela é chamada Seno de θ , conforme se pode observar na Figura 9.

Figura 9 : Triângulo retângulo formado sob um ângulo θ



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos as seguintes relações:

$$k_1 = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

De modo análogo, da semelhança de triângulos obtemos as relações:

$$k_2 = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$k_3 = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

As razões trigonométricas mostradas, k_1 , k_2 , k_3 são respectivamente, seno do ângulo θ ($\text{sen}\theta$), cosseno de θ ($\text{cos}\theta$) e tangente de θ ($\text{tg}\theta$).

2.1.1.1 Tabela do Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos Notáveis.

Os ângulos de 30° , 45° e 60° são chamados ângulos notáveis, ou seja, ângulos que merecem atenção especial. Para os estudos de trigonometria, é essencial que tais valores sejam memorizados. A tabela 1 resume esses valores:

Tabela 1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que na Tabela 1, os valores da linha do seno aparecem invertidos na linha do cosseno. Isso não é coincidência. Ocorre porque 30° e 60° são complementares, e 45° é complementar a si mesmo. Dessa forma, nos cálculos que envolvem ângulos notáveis, para fins didáticos deve-se usar os valores memorizados e, nos demais, usar uma calculadora científica ou consultar uma tabela trigonométrica.

2.1.1.2 Relações entre Seno, Cosseno e Tangente.

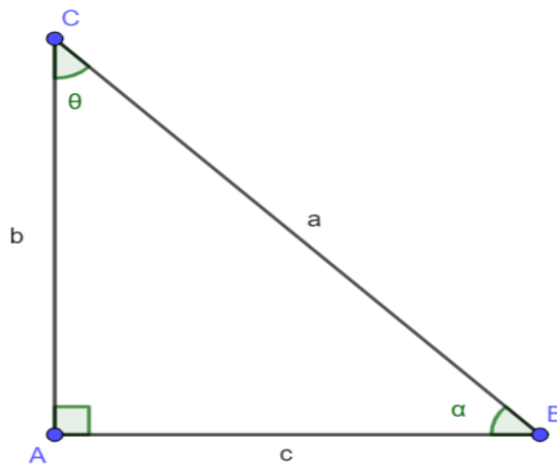
As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente relacionam-se de várias maneiras, uma delas é a chamada Relação fundamental do triângulo retângulo, em que:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 ; \text{ para } (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

Então, utilizando o teorema de Pitágoras $c^2 + b^2 = a^2$ é possível demonstrar a relação fundamental do triângulo retângulo.

Consideremos um ângulo θ de vértice C e um triângulo CAB , retângulo em A , como mostra a Figura10.

Figura 10: Relação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = 1$$

Outra relação que pode ser demonstrada é a relação da razão entre o seno e cosseno de um ângulo;

Demonstração:

$$\tan \theta = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c},$$

Assim:

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

■

Com base nas definições anteriores, pode-se demonstrar, a relação entre o cosseno de um ângulo agudo que é igual ao seno do seu complemento ou vice-versa.

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo da Figura 10, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{c}{a} = \cos \alpha; \text{ portanto } \text{sen } \theta = \cos \alpha$$

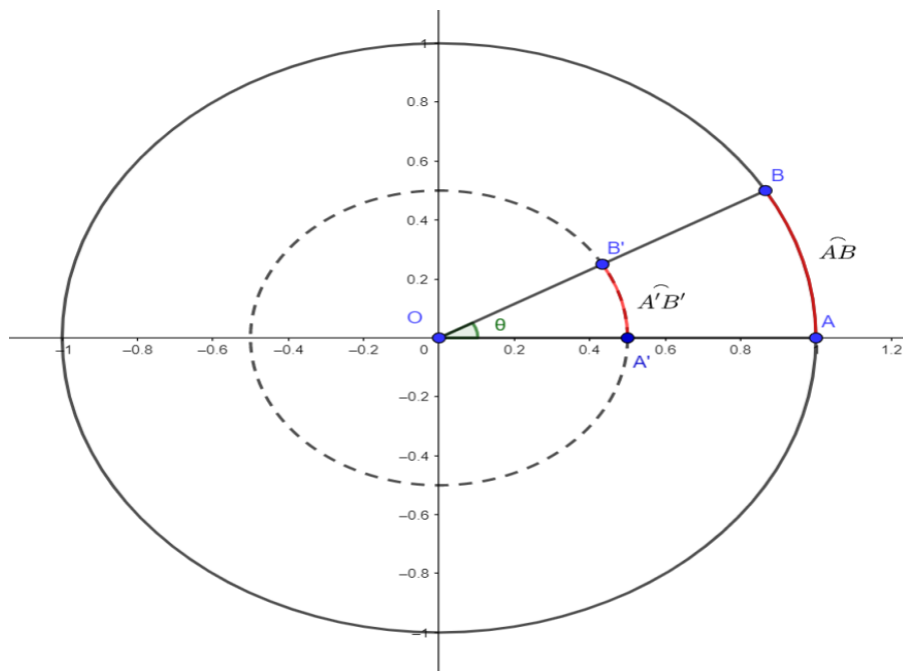
$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \cos \theta; \text{ portanto } \text{sen } \alpha = \cos \theta$$

2.1.2 A Trigonometria no Círculo Unitário

A circunferência trigonométrica pode ser representada em um plano cartesiano, onde o Centro da circunferência encontra-se no centro dos eixos coordenados, sendo o raio da circunferência unitário, ou seja, o raio é 1. Para o estudo do círculo trigonométrico é importante compreender qual o significado matemático para o arco de uma circunferência e o ângulo central da circunferência. Imaginando-se uma circunferência de centro O , sobre a qual tomamos dois pontos.

Esse comprimento definido pelos pontos A e B é chamado de arco de circunferência, e a medida do grau de um arco é igual a medida de seu ângulo central. Observa-se que de fato o arco tem a mesma medida do ângulo central de 30° , ou seja, $AB = A'B' = 30^\circ$, como pode ser observado na Figura 11.

Figura 11: Medida dos arcos AB e $A'B'$.



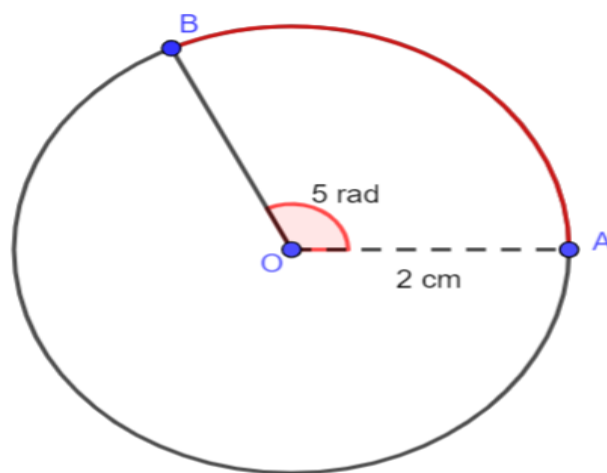
Fonte: Elaborado pelo autor

Um ângulo pode ser medido em graus ou radiano. O grau é um arco unitário

igual a $1/360^\circ$ da circunferência que contém o arco a ser medido, já o radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Para determinar a medida de um arco basta dividir o comprimento do arco (l) pela medida do raio da circunferência que o contém (r). Para exemplificar considere $l = 10$ e $r = 2$, então temos que:

$$(\overline{AB}) = \frac{l}{r} = \frac{10}{2} = 5 \text{ rad}$$

Figura 12: Arco de 5 rad.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 2 mostra um comparativo entre as medidas em graus e radiano

Tabela 2: Unidades de Medidas da Circunferência

Unidade de Medida	Amplitudes				
Grau	0°	90°	270°	180°	360°
Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

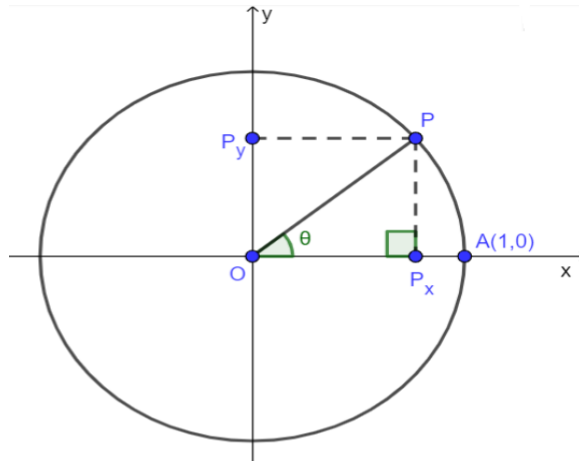
Fonte: Elaborado pelo autor

2.1.2.1 Seno, Cosseno e Tangente no Círculo Trigonométrico.

A extensão do domínio das funções trigonométricas a toda reta real faz-se recorrendo ao círculo trigonométrico. Considerando um círculo trigonométrico de raio

1, centrado na origem dos eixos coordenados, seja um ponto P, que a imagem do número real x , conforme indica a Figura 13.

Figura 13: Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando, o arco (\overline{AP}) , que corresponde ao ângulo central de medida θ . Seja OP o raio da circunferência e P_y e P_x as projeções do ponto P nos eixos y e x . Do triângulo retângulo OP_xP , tem-se:

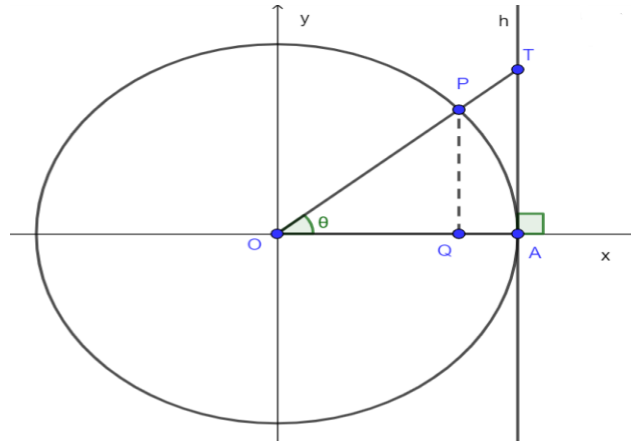
$$\text{sen } \theta = \frac{P_xP}{OP} \text{ portanto } \text{sen } \theta = OP_x$$

$$\text{cos } \theta = \frac{OP_y}{OP} \text{ portanto } \text{cos } \theta = OP_y$$

Assim, pode-se concluir que: O $\text{sen}\theta$ é a ordenada do ponto P, ou seja, o eixo Y é o eixo dos senos, e o $\text{cos}\theta$ é a abscissa do ponto P, ou seja, o eixo X é o eixo dos cossenos. Essas definições do estudo trigonométrico, podem ser utilizadas para ângulos de qualquer medida.

Analisando outro ciclo trigonométrico da Figura 14 tendo T a intersecção da reta OP com o eixo das tangentes (reta perpendicular ao eixo X, que passa pelo ponto A), temos que:

Figura 14: Tangente no Círculo Trigonométrico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando o triângulo retângulo ΔOTA , em que:

$$\Delta OPQ \sim \Delta OTA, \text{ portanto } \frac{OQ}{AO} = \frac{PQ}{TA}$$

Logo temos,

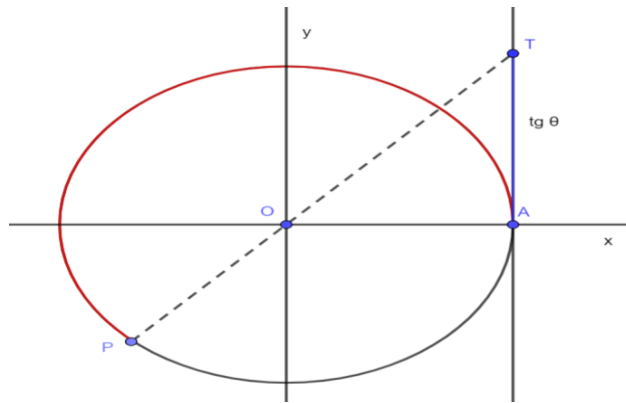
$$\frac{\cos\theta}{1} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{tg}\theta} \therefore \text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}, \text{ com } \cos\theta \neq 0, \text{ i.e., } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A partir desse resultado conclui-se que a tangente do ângulo θ (ou do arco \overline{AP}) é a ordenada do ponto T .

$$\text{Tg}(\theta) = AT \tag{4}$$

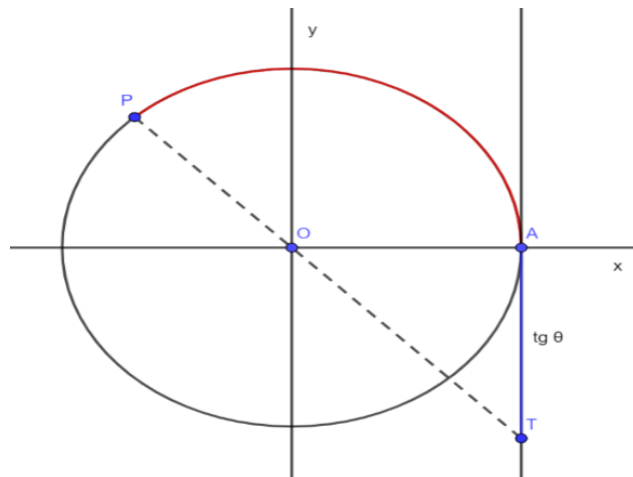
Se θ é um ângulo do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\text{tg}\theta$ é positiva. De fato, neste caso o ponto T está acima de A e AT é positiva, ou seja, $AT > 0$, já se θ é do segundo ou do quarto quadrante, então $\text{tg}\theta$ é negativa. De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e AT é negativa, ou seja, $AT < 0$. Pode-se observar esses comportamentos nas figuras 15,16 e 17.

Figura 15: Terceiro Quadrante $tg \theta > 0$



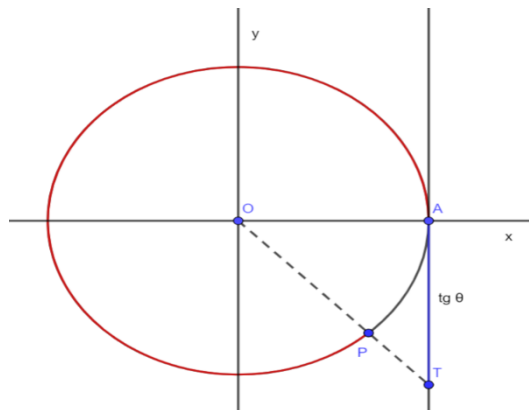
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16: Segundo Quadrante $tg \theta < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

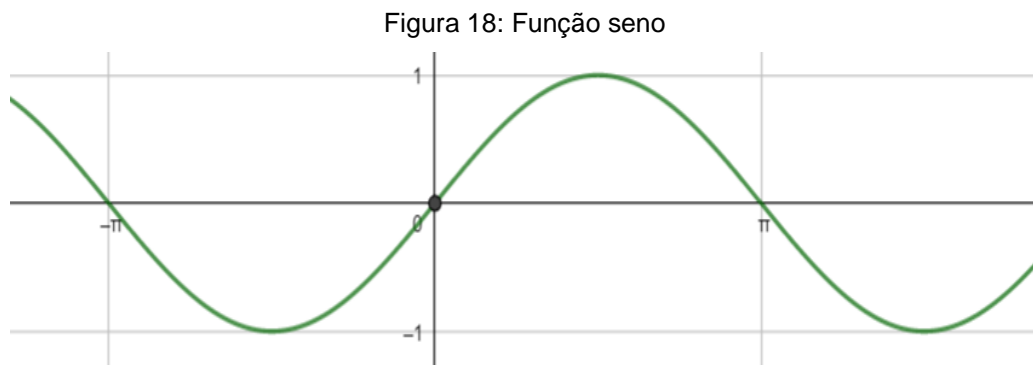
Figura 17: Quarto Quadrante $tg \theta < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.3 Gráficos das Funções Trigonômicas Seno, Cosseno e Tangente

Para entender o comportamento das funções é importante construir os seus respectivos gráficos, para poder analisar tais funções trigonométricas. Considerando a $f(x) = \text{sen}(x)$, ao fazer x variar no intervalo $[0, 2\pi]$, sendo o gráfico da função seno formado por todos os pontos do plano de coordenada $(x, \text{sen } x)$, obtêm-se uma curva denominada senóide conforme a Figura 18.



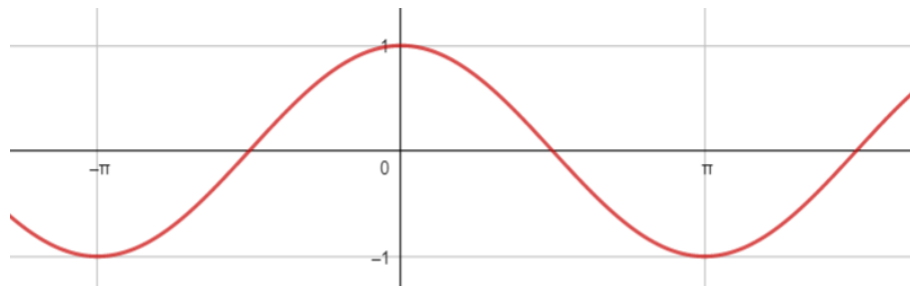
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando o gráfico pode-se concluir que:

- I. A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, para todo x real;
- II. Se x pertencer ao primeiro ou segundo quadrante, então $\text{sen}(x)$ é positivo;
- III. Se x pertencer ao terceiro ou quarto quadrante, então $\text{sen}(x)$ é negativo;
- IV. Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $\text{sen}(x)$ é crescente;
- V. Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $\text{sen}(x)$ é decrescente;
- VI. A função seno é periódica e seu período é 2π .

Da mesma maneira para analisar a função cosseno consideramos a função $f(x) = \text{cos}(x)$. A função cosseno é composta por todos os pontos do plano de coordenada $(x, \text{cos } x)$. Atribuindo valores a x , no intervalo $[0, 2\pi]$ obtêm-se uma curva chamada cossenóide.

Figura 19: Função cosseno.



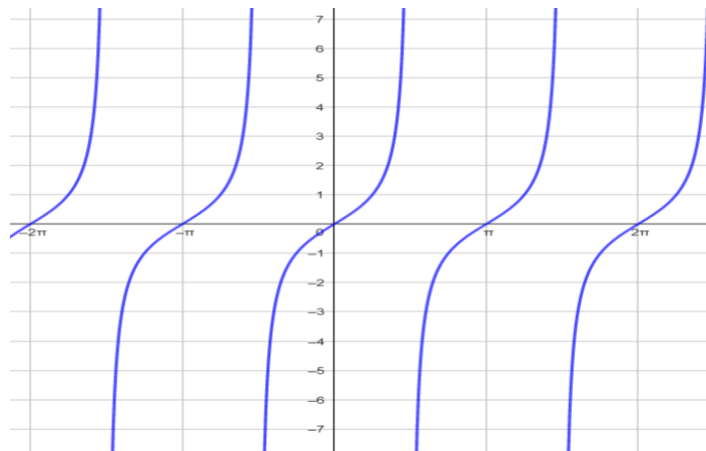
Fonte: Elaborado pelo autor

Observando o gráfico conclui-se que:

- I. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para todo x real;
- II. Se x pertencer ao primeiro ou quarto quadrante, então $\cos(x)$ é positivo;
- III. Se x pertencer ao segundo ou terceiro quadrante, então $\cos(x)$ é negativo;
- IV. Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos(x)$ é crescente;
- V. Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos(x)$ é decrescente.

A função tangente, assim como a função seno e função cosseno, é uma função periódica, mesmo que não esteja definida para todo número real \mathbb{R} . Atribuindo valores ao arco x da função $f(x) = \text{tg}(x)$, obtivemos uma curva denominada tangenóide. Através do gráfico da figura 20 é possível verificar que a função tangente apresenta período igual a π , tal que $\text{tg } x = (\text{tg } x + \pi)$ para todo x no domínio da função.

Figura 20: Função tangente



Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o gráfico da função tangente temos que:

- I. A imagem da função tangente é \mathbb{R} , isto é, para todo y real existe um x real tal que $tg(x) = y$;
- II. Se x pertencer ao primeiro ou terceiro quadrante, então $tg(x)$ é positivo;
- III. Se x pertencer ao segundo ou quarto quadrante, então $tg(x)$ é negativo;
- IV. Se x percorre qualquer um dos 4 quadrantes, então $tg(x)$ é crescente;
- V. A função tangente é periódica e seu período é π .

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentados os conceitos da Modelagem Matemática com o auxílio de definições dadas por teóricos e estudiosos da Educação Matemática global. Será retratada a Modelagem como uma possibilidade de ruptura com o currículo linear e sua aplicação prática em sala de aula.

3.1 ORIGEM E HISTÓRIA DA MODELAGEM

Desde os tempos mais remotos da humanidade, sempre que existia algum trabalho no qual envolvia problemas matemáticos, o homem buscava a solução deste. Stocco e Diniz (2010) expõem que a partir de observações sucessivas aos fenômenos naturais, o homem percebeu que alguns deles seguiam princípios constantes, e então havia a possibilidade de descrever esses fenômenos por meio de expressões matemáticas. A modelagem pode ser compreendida como um fenômeno de perceber a matemática em situações reais das mais variadas áreas da ciência e da atividade humana.

Para Biembengut e Hein (2003), a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos. Grande parte do currículo abordado em matemática se desenvolveu, e ainda se desenvolve, na tentativa de se resolver algum tipo de situação problema, dessa forma, não seria exagero afirmar que o processo de modelagem matemática já é praticado desde o início da própria matemática, sendo que o termo modelagem matemática, aparece no início do século XX na literatura sobre Engenharia e Ciências Econômicas, embora as aplicações da modelagem no ensino da matemática tiveram início no século XX, quando matemáticos puros e aplicados discutiram métodos para ensinar matemática.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a modelagem matemática teve seu surgimento no Brasil tomando-se por base as ideias e os trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrosio, no final da década de 1970 e começo da década de 1980, os quais valorizam aspectos sociais em sala de aula, onde na década de 1970 surgiram os primeiros trabalhos a respeito da modelagem e nesses trabalhos foram apresentados sua relação com a educação matemática.

Conforme Andrade (2008), as primeiras pesquisas que versaram sobre a Modelagem no Ensino Médio foram realizadas por Biembengut (1990) e Burak (1992), sendo sua consolidação na Educação Matemática brasileira atribuída a vários grupos de pesquisadores, dentre os quais destacam-se três: Aristides Camargos Barreto, Ubirata D'Ambrosio e Rodney Carlos Bassanezi, sendo este último o que obteve maior destaque para a disseminação da modelagem matemática no Brasil, que ao assumir em 1980 a coordenação de um curso oferecido pela UNICAMP para professores de cálculo diferencial integral, no qual ele mudou a forma de ensino tradicional e conduziu os participantes a trazerem problemas de situações reais do cotidiano para serem investigados, com isso, ele pôde realizar o primeiro curso de pós-graduação em Modelagem Matemática no Brasil 1982, na Universidade de Guarapuava-PR.

3.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONCEPÇÃO DE ALGUNS PESQUISADORES

A modelagem matemática surgiu com o objetivo de tornar a matemática clássica ensinada na sala de aula mais acessível aos alunos, uma matemática aplicada na resolução de problemas reais, ou seja, uma matemática mais prática. Segundo Bean (2007), a utilização da Modelagem Matemática está baseada em premissas e pressupostos que mostram um processo norteado pelo objetivo da transformação da realidade. Por meio do processo de modelagem, os modelos são construídos e sofrem modificações para se adaptarem à realidade dos alunos, sendo a motivação e a compreensão de conteúdos matemáticos os alicerces desse processo.

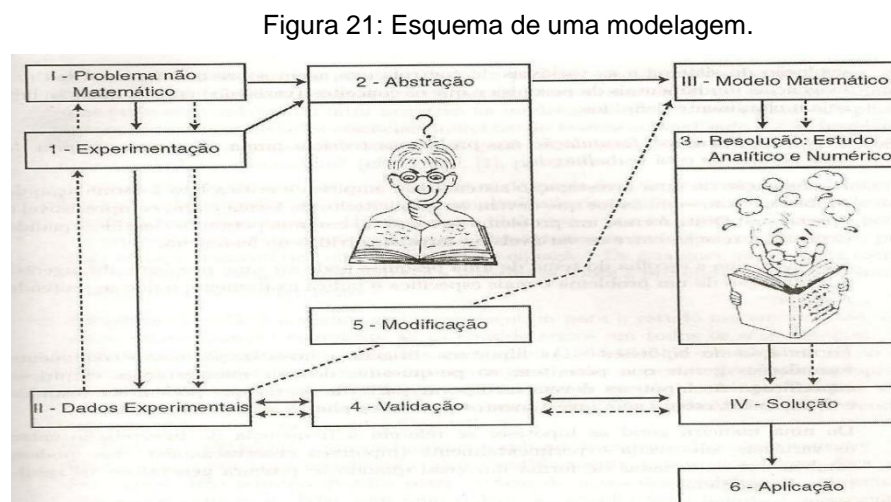
De acordo com Fiorentini (1995), os objetivos de modernizar o ensino de matemática impulsionaram seis movimentos filosóficos teóricos: construtivista, sócio etnocultural, formalista moderna, formalista clássica, empírico-ativista e tecnicista. Carvalho (2010), afirma que ao conhecer as características específicas dessas tendências, nota-se que não ocorrem em períodos delimitados, pois umas se entrecruzam com as outras. Essas tendências podem ser assim especificadas:

- Formalista clássica – terá ênfase nos conteúdos estruturados, enciclopédicos, ensino livre concentrado no professor e aluno passivo;
- Empírico-ativista - surge no Brasil a partir da década de 1920 com ênfase

no aprender com materiais lúdicos, jogos com observação e manipulação. Através dos sentidos, o aluno terá o papel ativo e o professor irá orientá-lo numa aprendizagem com base em assuntos e interesses do mundo real;

- Formalista Moderna – a formação do matemático é a prioridade, ensino centrado no professor e o aluno considerado passivo com ênfase na memorização;
- Tecnicista – surgiu no final da década de 1960 - ênfase no uso dos livros didáticos, no planejamento, organização e técnicas de aprendizagem no rigor e no formalismo;
- Construtivismo – surgiu na década de 1980 - o aluno é o foco, sendo o objeto central da aprendizagem e respeito ao conhecimento tácito trazido e praticado pelo estudante e sua família, a aprendizagem se dava pela ação interativa do homem com o meio ambiente por meio de atividades;
- Tendência Socio Etnocultural – possui uma “visão de matemática e de Educação Matemática com feição antropológica, social e política, e essas áreas de conhecimento passam a ser vistas como atividades humanas, determinadas socioculturalmente pelo contexto em que são realizadas”.

Segundo Bassanezi (2006), a modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas, simplificada visualizadas no esquema da figura abaixo.



Fonte: BASSANEZI, 2006, p.27

O autor descreve cada uma das etapas do processo de modelagem da seguinte maneira:

- **Experimentação:** É uma atividade essencialmente laboratorial na qual se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa, ou seja, a obtenção de dados experimental ou empírico que ajudam na compreensão do problema, na modificação do modelo e na decisão de sua validade.
- **Abstração:** É o processo de seleção das variáveis essenciais e formulação em linguagem “natural” do problema ou da situação real. É o procedimento que deve levar a formulação dos Modelos Matemáticos nesta fase, procura-se estabelecer: Seleção das variáveis; Problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando; Formulação de hipóteses e a Simplificação.
- **Resolução:** O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. O estudo do modelo depende de sua complexidade que pode ser um processo numérico. A modelagem vem a ser o fator responsável para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas quando os argumentos conhecidos não são eficientes para fornecer soluções dos modelos que consiste a riqueza do uso da modelagem, em se tratando de pesquisa no campo próprio da Matemática.
- **Validação:** É o processo de aceitação ou não do modelo proposto, ou seja, é a comparação entre a solução obtida via resolução do modelo matemático e os dados reais. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. É um processo de decisão e aceitação ou não do modelo inicial. O grau de aproximação desejado será o fator predominante da decisão.

- **Modificação:** Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não condizem com as previsões corretas e definitivas, deve-se modificar as variáveis, ou a lei de formação, e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.
- **Aplicação:** Pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática, sendo está uma modelagem eficiente que permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com a capacidade de influenciar e fazer mudanças.

3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DIDÁTICA

A Matemática está presente no cotidiano das pessoas e pode aparecer de forma explícita ou implícita nas diferentes situações. Muitas vezes, serve de apoio a outras áreas do conhecimento, fornece dados e estatísticas que abrangem informações de como trabalhar as situações diárias, constituindo assim, uma forma de desenvolver o pensamento, contribuir na construção de visão de mundo, tornar o aprendiz em um ser capaz de refletir, criticar e agir diante das práticas sociais.

Para Sadovsky (2010, p. 22), a matemática é também um produto social, porque resulta da interação entre pessoas que se reconhecem como membros de uma mesma comunidade. As respostas dadas por alguns geram novos problemas que outros visualizam, e as demonstrações produzidas são validadas segundo as regras aceitas na comunidade matemática em certo momento. Por ser um produto social, a Matemática permite a interação entre as pessoas seja na resolução de problemas ou nas demonstrações que produzem em momentos de suas vidas. Pode-se considerar uma estratégia para o ensino ou um método, pois a modelagem matemática possibilita o resgate das vivências trazidas pelo homem que se alinham a sua realidade.

Conforme afirma Bassanezi (2006), a modelagem serve como fonte de entendimento do seu próprio processo, também pode ser utilizada para facilitar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática, ao mesmo tempo

em que estuda a sua prática na perspectiva de melhorar as suas ações, também, serve como estratégia que pode ser explorada perante o ensino por se colocar na condição de recurso para a compreensão da realidade dos estudantes.

É importante aprender Matemática desde as primeiras relações da criança com o ensino formalizado, no entanto, no processo de ensino os alunos têm várias dificuldades que podem continuar refletindo no seu processo de aprendizagem, muitas vezes essas dificuldades que o cercam, faz com que os estudantes não entendam e criam um bloqueio para obter o conhecimento necessário para compreender os conceitos e as práticas do ramo da Matemática.

Segundo Bassanezi (2006), a aprendizagem é influenciada por diversos fatores externos, e a Matemática não foge deste contexto, em que o ambiente escolar será o meio em que gere em cada aluno o gosto pela Matemática e cabe ao professor oferecer métodos que desenvolvam o pensar matemático de cada aluno. O ensino da matemática não terá importância para vida dos estudantes se durante o processo de obtenção do conhecimento não ficar claro a sua utilidade mediante a realidade, com efeito, a escola não apenas deve ensinar os conteúdos de trigonometria, mas tem que levar a percepção do sentido e do significado de se aprender.

No pensamento de Biembengut & Hein, partindo desse princípio, pode-se perceber que a modelagem matemática se conecta ao dia a dia e, geralmente, isso não é considerado em sala de aula, ficando a aprendizagem da matemática com uma lacuna e não auxiliando os alunos a resolverem seus problemas do cotidiano.

A matemática utilizada em várias áreas do conhecimento, ou mais especificamente em todas, cabe ao professor encontrar formas e meios possíveis que façam com que os alunos aprendam a criar, resolver raciocínios matemáticos, e para isso, elaborando meios que desenvolva a capacidade de ler e interpretar situações problemas no campo da Matemática. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) afirmam que o que se objetiva com a modelagem é ensinar Matemática de uma maneira que os estudantes, a partir das ações para esse ensino, também criem mecanismos de reflexão e de ação.

Segundo Burak (2004), ao utilizar a Modelagem Matemática como uma alternativa metodológica, o professor tem a oportunidade de transformar sua própria prática através da motivação dos alunos, com a participação e a vontade de aprender e crescer cada vez mais, e com a possibilidade de refletirem e criticarem acerca das

atividades. Nessa perspectiva, deixa-se de lado o processo usual e formal e parte-se para um ambiente que favorece o estabelecimento de relações afetivas mais fortes entre os alunos e entre professores e alunos.

3.4 MODELAGENS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Ao buscar novos caminhos para a educação, utilizam-se práticas diferenciadas dos habituais, e diante dos êxitos em sala de aula, esses caminhos vão cada vez mais se consolidando e tornando-se tendências. Com a perspectiva da utilização da Modelagem Matemática no contexto educacional, a modelagem é uma tendência no ensino da matemática que apresenta um grande leque de aplicabilidade dentro de outros ramos da educação.

Conforme Bastos (2018), o declínio da Matemática Moderna e os novos desafios educacionais da atualidade, fizeram com que pesquisadores voltassem seus olhares ao ensino da matemática, propondo novas “metodologias que contribuíssem com a formação de cidadãos críticos e que percebessem relações interdisciplinares”. No século XIX, o ensino de matemática passou por grandes transformações sendo a primeira delas a expansão da escolaridade e o abandono de um sistema arcaico, seletivo e aristocrático de educação, havendo a necessidade de uma reestruturação da matemática e do ensino de matemática, onde novos currículos foram reformulados dentro das universidades, de modo a aproximar a nova linguagem matemática adquirida no século XX com a matemática do ensino médio.

Ao buscar novos rumos para educação, faz-se necessário a utilização de prática diferenciadas dos habituais, e diante dos êxitos em sala de aula, esses caminhos vão cada vez mais se consolidando e tornando-se tendências. Com a perspectiva da utilização da Modelagem Matemática no contexto educacional, ela é considerada uma tendência na Educação Matemática.

Conforme afirma Bassanezi, (2006), no processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações, e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, tem sido defendida por vários profissionais envolvidos com o ensino de matemática. Isso significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional. Segundo o autor, para conseguir tal inclusão,

alguns pontos são necessários. Vejamos:

1. **Argumento formativo** – enfatiza aplicações matemáticas, onde a performance da modelagem matemática é na resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas;
2. **Argumento de competência crítica** – seu foco é na preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos;
3. **Argumento de utilidade** – afirma que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas;
4. **Argumento intrínseco** – considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas;
5. **Argumento de aprendizagem** – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados e valorizar a própria matemática.

3.5 A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Segundo Barbosa (2004), a modelagem pode ser entendida em termos mais específicos. Do nosso ponto de vista, trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento.

Sadovsky (2010) considera que frequentemente os professores afirmam que “a matemática está em toda parte” para convencer seus alunos da importância e relevância de seu estudo, no entanto, essa frase “soa” distante da experiência dos estudantes, que dificilmente enxergam a matemática dessa maneira. Logo, a necessidade de se aplicar a modelagem com os educandos em sala de aula, faz com que novas estratégias de ensino sejam possíveis e os aprendizes sentem-se mais motivados para construir seu conhecimento.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), afirmam que ensinar Matemática com a

modelagem faz com que os estudantes partam das ações para criarem mecanismos de reflexão e de ação. Portanto, nessa perspectiva não irá mais existir um currículo neutro, descontextualizado ao contrário, o currículo é dinâmico, flexível, e constantemente reconstruído pelos professores e estudantes.

Para Biembengut e Hein (2011), só é possível implementar a modelagem matemática se o professor tiver o desejo de modificar suas práticas de ensino, buscando novos métodos e se embasar em modelos clássicos e outras experiências de ensino.

Segundo Burak (2004), a Modelagem deve ser prioritariamente voltada para a Educação Básica, e organiza o processo em cinco etapas básicas: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s) ou situações problema; resolução do(s) problema(s) e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema; análise crítica das soluções.

Quanto à escolha do tema, o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse no grupo, e os alunos também podem sugerir temas, que em seguida serão orientados a procurar informações, via pesquisa de campo ou bibliográfica para o desenvolvimento do tema escolhido – pesquisa exploratória. De posse dos materiais e dos dados da pesquisa desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturar sobre tudo que pode ter relação com a Matemática. Os estudantes são incitados a elaborar conjuntamente com o professor, problemas ou situações que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou aprender conteúdos matemáticos.

Já na resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos no contexto do tema, os alunos buscarão responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático que foi requisitado em virtude da necessidade de respostas às questões. O conteúdo matemático primeiro é aplicado para posteriormente ser sistematizado, tomando um caminho inverso do usual, onde primeiro se ensina o conteúdo para depois aplicar.

Burak e Klüber (2006), afirmam que diferente também do usual o processo não se encerra com a obtenção de uma resposta para o problema proposto, haverá ainda a necessidade da análise crítica das soluções – etapa esta que é marcada pela criticidade, não apenas em relação à Matemática, mas também em relação a outros aspectos, em que são analisadas a viabilidade e coerência das resoluções apresentadas, que muitas vezes são resolvíveis matematicamente, mas que são

inviáveis para tal situação estudada e para situações reais do cotidiano.

Para Barbosa (2001), a Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem baseado na indagação e investigação, que se diferencia da forma que o ensino tradicional – visivelmente hegemônico nas escolas - busca estabelecer relações com outras áreas e o dia-dia, procurando trazer situações idealizadas que podem ser diretamente abordadas por ideias e algoritmos sugeridos pela exposição anterior do professor, envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente e discente e a adoção de outros.

Este conceito defendido por Barbosa, é de extrema importância para o trabalho em sala de aula, pois relaciona a matemática a outras áreas do conhecimento, com essa visão, Barbosa define três casos no trabalho com Modelagem Matemática que serão demonstrados na Tabela 3

Tabela 3: O aluno e o professor nos casos de Modelagem.

Caracterização	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da Situação/ Problema	Professor	Professor	Professor/Aluno
Simplificação	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Dados Qualitativos e Quantitativos	Professor	Professor/ Aluno	Professor/ Aluno
Resolução	Professor/ Aluno	Professor/ Aluno	Professor/ Aluno

Fonte: Barbosa (2001, p. 9).

O autor aponta que uma tarefa de Modelagem Matemática pode ser desenvolvida de acordo com esses três casos, sendo que em cada um deles, em ordem crescente, a responsabilidade da condução das tarefas vai sendo cada vez mais compartilhada com os estudantes, podendo perceber uma comunicação entre professor e aluno divergindo do ensino tradicional da matemática, no qual o professor é o protagonista de todo o processo.

A seguir, têm-se, de forma resumida, os três casos do avanço de um trabalho com o auxílio da Modelagem Matemática segundo Barbosa (2001):

- **Caso 1.** O professor retrata a situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e a questão gerada, competindo aos alunos à fase de resolução. Uma experiência de Franchi (1993) pode ilustrar este caso, o professor retrata a situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e a questão gerada. Não foi preciso que eles procurassem dados fora da sala de aula; todo o trabalho se deu a partir da situação e do problema oferecido pelo professor.
- **Caso 2.** O professor carrega para a sala uma situação de uma realidade diferente, competindo aos alunos à coleta dos dados necessários para efetivar a resolução. Ilustremos com uma experiência de Biembengut (1999). Ela apresentou aos alunos o problema “*O que é preciso para construir uma casa?*”. Eles tiveram que buscar dados fora da sala de aula e fazer algumas simplificações que ajudassem a resolver o problema.
- **Caso 3.** Com os temas fora da matemática, os alunos elaboram e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. É via do trabalho de projetos. Devido à falta de espaço, limitamo-nos a remeter às experiências relatadas em Bassanezi (1990), Borba, Meneghetti e Hermeni (1997), Biembengut (1990, 1999) e Franchi (1993).

Existem na literatura várias concepções acerca do tema, modelagem matemática cabe ao docente analisar esses conceitos e interpretá-los a fim de fundamentar suas aulas. Além disso, a Modelagem Matemática, por se tratar de uma prática que exige contextualização, interdisciplinaridade, conhecimentos históricos, entre outras habilidades, é de fundamental importância, o contínuo aperfeiçoamento por parte do professor, sabendo que muitas vezes as barreiras naturais do ensino tradicional têm influência significativa no despreparo por parte dos educadores, no emprego da modelagem em suas metodologias propostas em plano

de aula, pois assim como os alunos, alguns professores vivem em uma zona de conforto, preferindo as situações previsíveis que o ensino tradicional oferece.

Conforme afirma Hermínio (2009), para professores que nunca trabalharam com essa estratégia pedagógica, é difícil dar o passo inicial, pois o trabalho com a Modelagem em sala de aula exige que o docente esteja preparado para possíveis imprevistos, principalmente quando o tema escolhido para o desenvolvimento do trabalho parte do aluno. Dessa forma, ao se decidir trabalhar com a Modelagem, o professor estará migrando para a zona de risco.

Segundo Biembengut e Hein (2009), a modelagem Matemática é vista em 3 etapas:

- Etapa 1 – INTERAÇÃO – é feita inicialmente uma breve exposição sobre o tema permitindo certa delimitação do aluno com uma área em questão, é o contato primário entre os alunos e a situação problema, o que envolve maior estudo da situação para levantamento de informações para familiarização com o tema;
- Etapa 2 – MATEMATIZAÇÃO – em geral subdivide-se em formulação do problema e resolução. É aqui que ocorre a “tradução” da situação – problema para a linguagem matemática. Experiência, criatividade e intuição são elementos indispensáveis ao processo. Seleciona-se e formulam-se umas das questões levantadas a fim de levar os alunos a proporem respostas e a delimitação do problema, construção de um modelo matemático (expressões algébricas, fórmulas, gráficos, tabelas).
- Etapa 3 – CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO – A questão formulada que permite a resolução da questão e de outras similares pode ser considerada um modelo matemático, é a validação do modelo construído na etapa 2, validando-o, corrigindo-o, aprimorando-o, ou retornando à 2ª etapa para revisão do modelo, até chegar a um modelo que atenda às necessidades daquela situação a ser resolvida

Em suas pesquisas Biembengut (2006), afirma que a modelagem matemática é vantajosa, pois o uso dessa metodologia pode ser usado para a aprendizagem dos alunos envolvidos em todos os níveis de escolaridade e que os pesquisadores da educação continuem a investigar processos e métodos que possam instigar os

educadores a buscarem novos caminhos referentes às práticas pedagógicas e que possa incorporar recursos pedagógicos que auxiliem em mudanças significativas na formação dos estudantes.

Mesmo, Biembengut, que trata da modelagem matemática voltada para o aprendiz – o aluno, e Bassanezi (voltada para a formação dos professores), convergem para uma Modelagem Matemática necessária no ambiente escolar, quando incentivam o aluno a buscar o entendimento de problemas comuns da comunidade. Esta busca gera novos conhecimentos, não só matemáticos, mas também de outras disciplinas, mobilizando a comunidade escolar (professores e alunos) a criarem estratégias de reflexão e resolução de problemas a serem resolvidos. O esquema do processo de Modelagem Matemática proposto por Biembengut, pode ser observado na Figura 22.

Figura 22: Esquema de processo de Modelagem Matemática



Fonte: [HTTPS://docplayer.com.br/84300959-O-uso-da-modelagem-matematica-no-ensino.html](https://docplayer.com.br/84300959-O-uso-da-modelagem-matematica-no-ensino.html)

Existem outros métodos, propostos por diversos autores, porém, o modelo de Biembengut e Hein, será aquele utilizado no capítulo que trata das propostas de Modelagem Matemática.

4. A MATEMATIZAÇÃO COMO APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA.

Neste capítulo são apresentadas algumas propostas de Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria, e como foi elaborado o projeto de pesquisa. Além disso, foi explanada a metodologia utilizada, assim como os meios utilizados para execução e coleta de dados.

4.1 METODOLOGIA

Esta pesquisa tem como ponto central da metodologia, proporcionar aos discentes um novo olhar para o ensino da trigonometria, permitindo que eles encontrem na modelagem matemática um meio para solucionar as possíveis dificuldades advindas do processo de ensino e aprendizagem.

Um dos objetivos da pesquisa é a análise dos resultados obtidos durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de trigonometria. Apresentar novas técnicas, de maneira que rompa com o modelo tradicional aplicado em aula, constituído por: professor, aluno e quadro. Uma frase muito recorrente, em sala de aula, dita por parte dos alunos é: “Professor, para que serve esse assunto?” ou “como posso inserir esse conteúdo em minha vida?”. Tais questionamentos reafirmam a necessidade de um modelo inovador capaz de levar o aluno a compreender o sentido da disciplina.

Assim, essa pesquisa busca técnicas que melhorem o processo de ensino e aprendizagem, e a modelagem matemática é uma delas, visto que, vários autores já demonstraram a eficácia do método, ratificando a necessidade por renovação e adaptação à nova realidade do aluno, tornando mais prazeroso aprender conteúdos tido como difíceis e complexos.

A pesquisa se desenvolve pelo método qualitativo, cujo objetivo final é desenvolver um entendimento profundo de uma questão, assunto ou problema da perspectiva de um indivíduo. Ao se trabalhar com uma análise qualitativa o foco não deve ser necessariamente só a solução final da pesquisa, mas em todo o processo do desenvolvimento do trabalho. Segundo Medeiros et. al. (2002), a abordagem qualitativa, através das suas técnicas de análise de conteúdo e ênfase nas percepções dos atores envolvidos, pode fornecer importantes subsídios aos avanços dessa compreensão, especificamente quando se trata de estudo no campo da cognição e mais especificamente da teoria implícita.

Conforme Burak e Klüber (2006), a utilização da pesquisa qualitativa permite analisar e trabalhar as problemáticas sobre um novo ponto de vista, no qual não se trabalha as informações por meio de números, mas se dá como uma permuta de informações entre os indivíduos participantes da pesquisa. Durante o desenvolvimento da pesquisa não houve apenas a preocupação em registrar e apresentar os resultados, mas também com a interpretação e compreensão desses resultados coletados em cada uma das etapas que constituem a Modelagem.

Este trabalho foi realizado em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual localizada na cidade de Cândido Sales – Bahia. Para obtenção dos dados coletados e o contato com os fenômenos que ocorriam no ambiente da sala de aula, utilizou-se como técnicas a pesquisa de campo exploratória e a observação dos participantes. A análise dos resultados obtidos deu-se em caráter de transcrição textual com exposição de imagens e gráficos.

O objeto da pesquisa é a modelagem matemática aplicada no estudo da Trigonometria: seno, cosseno e tangente. Os sujeitos dessa pesquisa foram 35 (trinta e cinco) alunos de uma turma do segundo ano do ensino médio do turno matutino, do Colégio Estadual de Cândido Sales.

Inicialmente, foi utilizado o caso 3 conforme Barbosa (2001), pois era o primeiro contato dos sujeitos com a modelagem matemática. Nesse caso o professor direciona o aluno na escolha de um tema fora do ambiente matemático, onde os alunos elaboram e resolvem problemas, tornando-os responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema, realizando, assim, todas as etapas do trabalho com a Modelagem. Também foi utilizada a etapa 2 que é a matematização. Essa etapa subdivide-se em formulação do problema e resolução. Aqui que ocorre a “tradução” da situação – problema para a linguagem matemática. Seleciona-se e formula-se umas das questões levantadas a fim de levar os alunos a proporem respostas e a delimitação do problema, construção de um modelo matemático (expressões algébricas, fórmulas, gráficos, tabelas).

Portanto, esses foram os procedimentos utilizados ao longo do estudo sobre a temática, sendo eles de extrema importância para encontrar as respostas pretendidas, assim como, para o alcance dos objetivos traçados, dessa maneira, os caminhos tomados pela pesquisa sempre estiveram acompanhados de excelentes procedimentos estabelecidos na metodologia aderida.

4.2 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Nessa seção é apresentado como se desenvolveu a aplicação das etapas da modelagem matemática, descritas por meio de uma sequência didática aqui exposta. Foram realizados alguns encontros com a turma.

O primeiro encontro ocorreu em sala de aula, onde foi demonstrado aos alunos, através de slides, qual o objetivo da modelagem, bem como a sua aplicação. Ainda neste encontro, foram apresentados alguns conceitos sobre modelagem conforme alguns pesquisadores, como por exemplo, Barbosa, “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6).

Através de slides, foi passado aos alunos uma breve explicação a respeito das fases de desenvolvimento do trabalho com a modelagem: Levantamento dos problemas; resolução dos problemas e análise crítica das soluções. Nos slides continham algumas imagens de trabalho e atividades feitas utilizando a modelagem matemática. Nesse momento foi possível notar uma mudança na postura de interesse dos alunos quanto ao tema abordado, e motivação na realização da atividade.

No segundo encontro, iniciou-se a **1ª etapa da modelagem: INTERAÇÃO** - que permite ao aluno contato prévio com o tema. Foi realizada uma revisão dos conteúdos de trigonometria, a exemplo de seno, cosseno, tangente e seus ângulos notáveis. O objetivo da revisão foi reforçar o conteúdo já ministrado anteriormente, pois os alunos ainda apresentavam grande dificuldade na aprendizagem do tema. Após, foi solicitado, com base no primeiro encontro, que os discentes manifestassem às suas opiniões a respeito de como poderia ser utilizada a modelagem matemática dentro do tema abordado. Porém, foram notórias as dificuldades que eles tiveram em opinar. A maioria da turma optou por delimitar o tema, quanto ao estudo do cálculo da altura de figuras planas, pois o assunto de trigonometria é muito amplo.

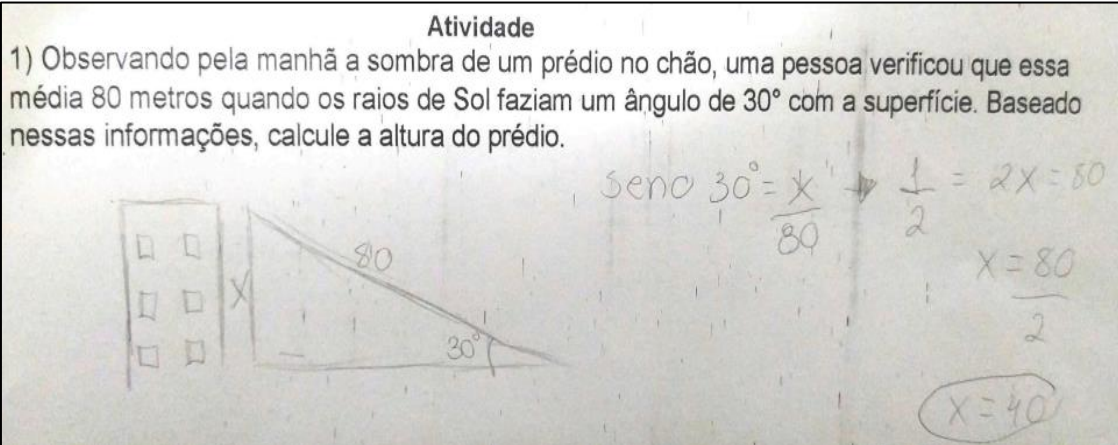
A escolha do tema é algo muito importante no andamento do trabalho com modelagem matemática, conforme afirma Jacobini (2004), a opção pela escolha do tema pelos próprios alunos é recomendada por muitos autores, pois refletem interesses, ansiedades e relações com seu cotidiano, o que é muito importante, pois permite ao estudante fazer parte dessa escolha, permitindo que se sintam importantes dentro do processo de construção do conhecimento matemático.

No terceiro encontro, deu-se início a **2ª etapa da modelagem: MATEMATIZAÇÃO** - que em geral subdivide-se em: Formulação do problema e resolução. Foi feita uma atividade diagnóstica, contendo três problemas que foram entregues aos alunos para que resolvessem de forma individual. A atividade continha questões que envolviam o cálculo da altura de um prédio, para a resolução do cálculo era necessário conhecimento prévio da relação de tangente, a exemplo do que era observado nas questões 1 e 3. Na segunda questão era necessário calcular quantos degraus existiam em uma escada, usando a relação de seno. Muitos chegaram à solução correta dos problemas e os que não conseguiram foram por diversos motivos, que pode ser visto na Figura 23 e na Figura 24.

Figura 23: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo

Atividade

1) Observando pela manhã a sombra de um prédio no chão, uma pessoa verificou que essa média 80 metros quando os raios de Sol faziam um ângulo de 30° com a superfície. Baseado nessas informações, calcule a altura do prédio.



$$\text{seno } 30^\circ = \frac{x}{80} \rightarrow \frac{1}{2} = 2x = 80$$

$$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40$$

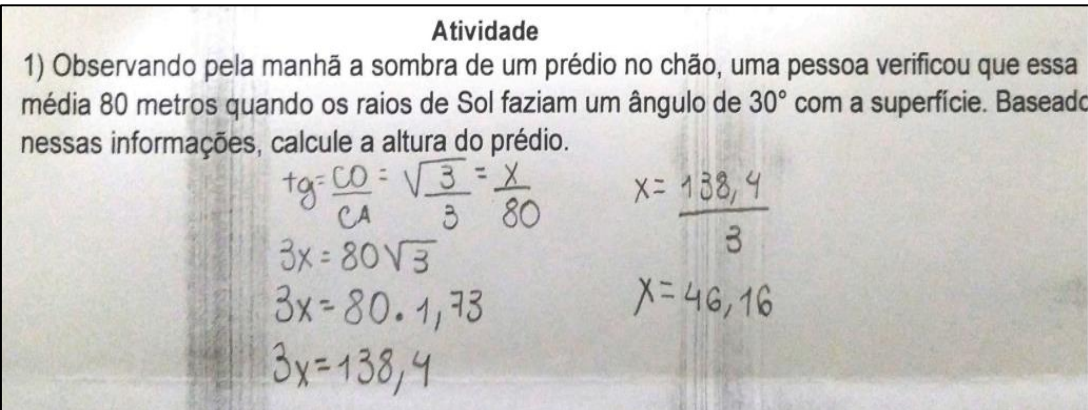
Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 23 é possível observar certo entendimento do aluno na resolução da questão nº 01, mas era necessário usar a tangente e não o seno, conforme os dados da questão. Já na Figura 24 observa-se uma resolução com êxito.

Figura 24: Resolução resolvida com êxito.

Atividade

1) Observando pela manhã a sombra de um prédio no chão, uma pessoa verificou que essa média 80 metros quando os raios de Sol faziam um ângulo de 30° com a superfície. Baseado nessas informações, calcule a altura do prédio.



$$\text{tg} = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{80}$$

$$3x = 80\sqrt{3}$$

$$3x = 80 \cdot 1,73$$

$$3x = 138,4$$

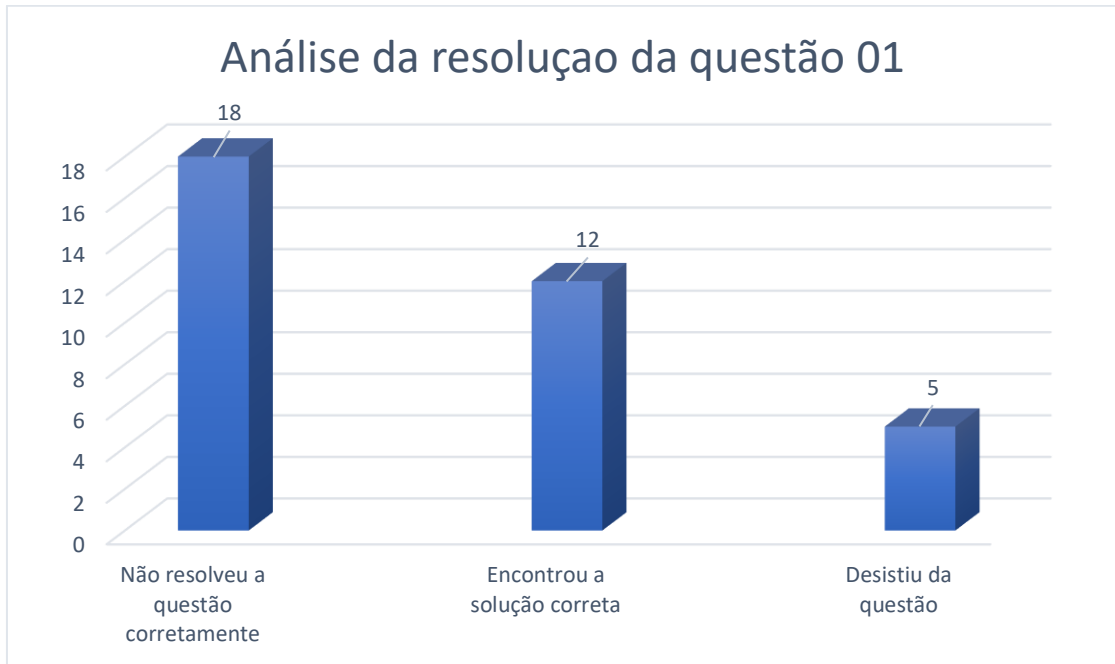
$$x = \frac{138,4}{3}$$

$$x = 46,16$$

Fonte: Elaborado pelo autor

No Gráfico 1, é possível fazer uma análise do número de acertos, erros e desistências na resolução da questão 01. Nessa atividade participaram ao todo 35 alunos.

Gráfico 1: Análise da resolução da questão 01



Fonte: Elaborado pelo autor

No problema de nº 2, um dos erros mais encontrados foi na utilização equivocada do uso da fórmula necessária para a resolução da questão, muitos alunos trocaram seno por tangente, como pode ser observado na Figura 25, já na Figura 26 observa-se uma resolução com êxito quanto ao uso correto da fórmula.

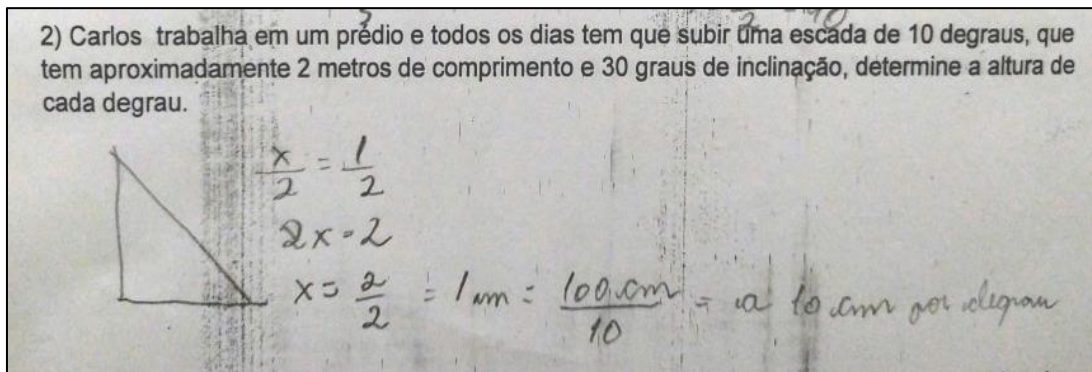
Figura 25: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo.

2) Carlos trabalha em um prédio e todos os dias tem que subir uma escada de 10 degraus, que tem aproximadamente 2 metros de comprimento e 30 graus de inclinação, determine a altura de cada degrau.

$$\begin{aligned} \text{tg} &= \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2} & CO &= \frac{1,13}{10} \\ 3x &= 2\sqrt{3} & x &\approx 0,113 \\ 3x &= 2 \cdot 1,7 & & \\ x &= \frac{3,4}{3} = 1,13 & & \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

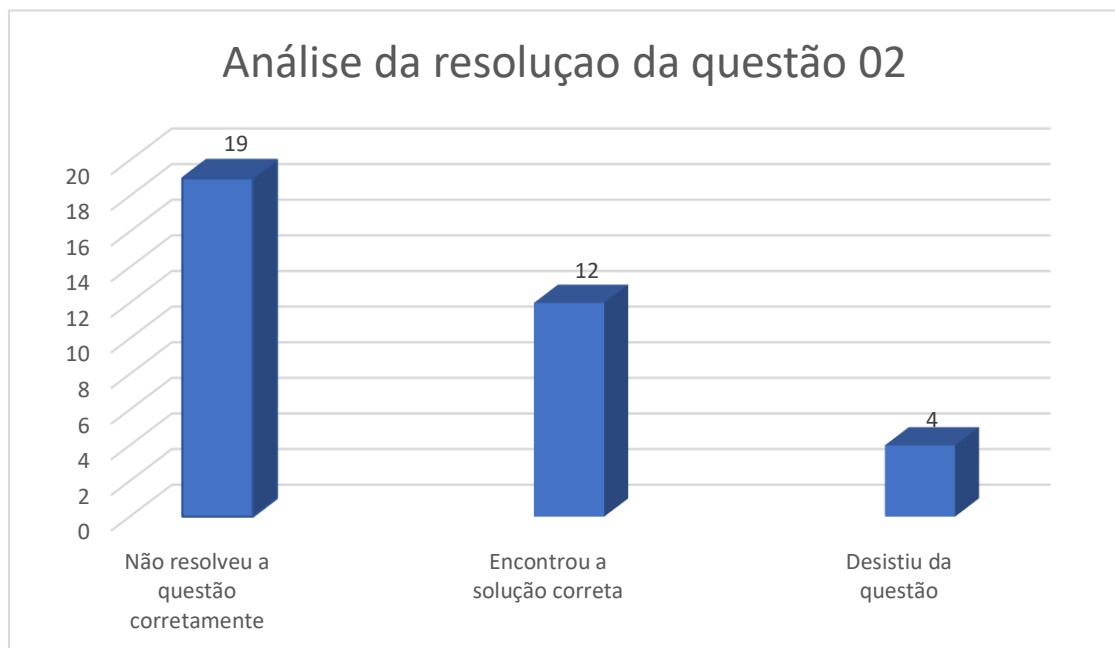
Figura 26: Questão resolvida de maneira correta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No Gráfico 2, pode-se fazer uma análise do número de acertos, erros e desistências na resolução da questão de nº 02.

Gráfico 2: Análise da resolução da questão 02



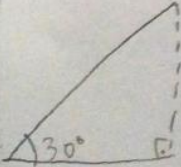
Fonte: Elaborado pelo autor

Na resolução do problema nº 3, a maioria dos alunos resolveu de maneira correta como pode ser observado na Figura 27, porém, alguns se equivocaram quanto ao uso da propriedade correta, ou desistiram da resolução da questão, como pode ser observado respectivamente na Figura 28 e na Figura 29.

Figura 27: Questão resolvida de maneira correta.

3) Um estudante de engenharia foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. Aproximando do prédio ele mediu sua distância, que era de 40 metros, podemos afirmar que a altura do prédio é de, aproximadamente:

(Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$)



$$\text{Tg}(30) = \frac{H}{40}$$

$$H = 40 \cdot \text{Tg}(30)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{40}$$

$$H = 40 \cdot \frac{1,7}{3}$$

$$H = \frac{68}{3}$$

$$H = 22,6666\dots$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 28: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo

3) Um estudante de engenharia foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. Aproximando do prédio ele mediu sua distância, que era de 40 metros, podemos afirmar que a altura do prédio é de, aproximadamente:

(Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$)

$$\text{SEN } 60^\circ = \frac{x}{40}$$

$$\frac{1,7}{2} \times \frac{x}{40}$$

$$2x = 68$$

$$x = \frac{68}{2}$$

$$x = 34$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29: Desistência pelo aluno de resolução da questão.

3) Um estudante de engenharia foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. Aproximando do prédio ele mediu sua distância, que era de 40 metros, podemos afirmar que a altura do prédio é de, aproximadamente:

(Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$)

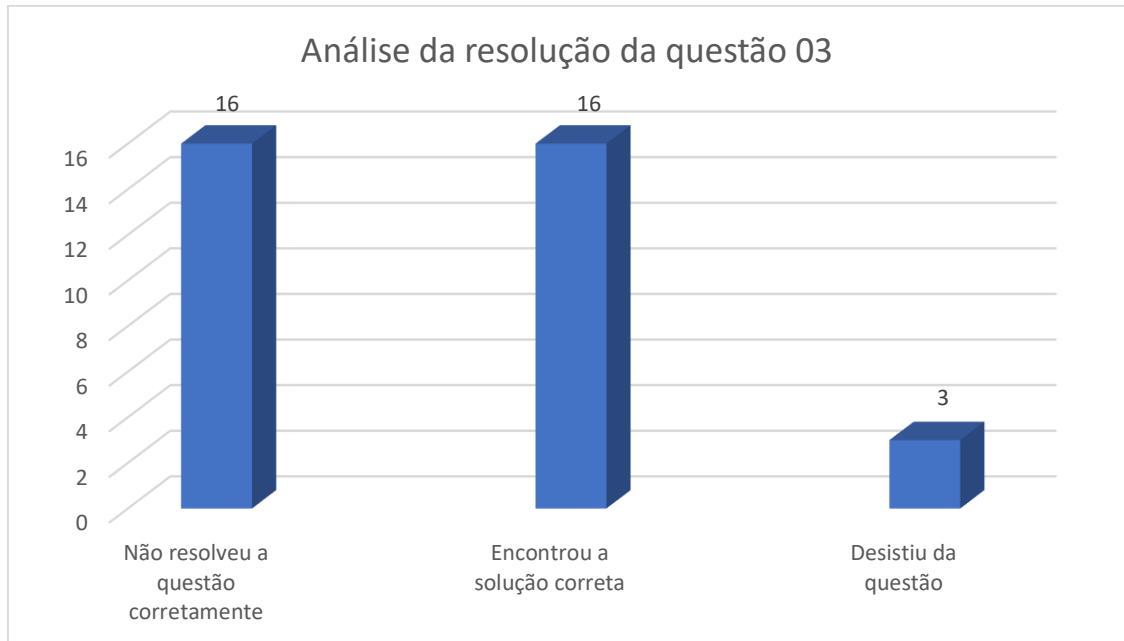
Aproximadamente

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 17} \\ 60 \\ \underline{90} \\ 50 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

No Gráfico 3, pode-se fazer uma análise do número de acertos, erros e desistências na resolução da questão de nº 03.

Gráfico 3: Análise da resolução da questão 03.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No quarto encontro, ainda na **2ª etapa da modelagem**, os alunos foram direcionados a realizar **levantamentos dos problemas em campo**, a fim de colher mais informações e visualizarem as problemáticas feitas na atividade diagnóstica de maneira prática. Assim, os estudantes foram levados até uma praça próxima da escola e chegando lá, separados em grupos, exploraram o local e formularam duas questões as quais foram aplicadas posteriormente em sala de aula. Foi dada a liberdade aos alunos em relação às medições *in loco* nas coletas de dados para elaboração dos problemas. A Figura 30 e a Figura 31 mostram um pouco desse encontro.

Figura 30: Alunos medindo a altura dos degraus da escada da praça



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 31: Alunos medindo a sombra que o poste de madeira fazia no solo.



Fonte: Elaborado pelo autor

No quinto e último encontro, a **3ª etapa da modelagem: CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO** - é a construção e formulação do problema que permite a resolução da questão e de outras similares. Em sala de aula, após a visita à praça, os alunos responderam uma atividade que foi formulada a partir dos problemas elaborados por eles. As questões escolhidas para essa atividade possuíam o mesmo nível de dificuldade das respondidas na diagnóstica. Posteriormente, foi feita uma

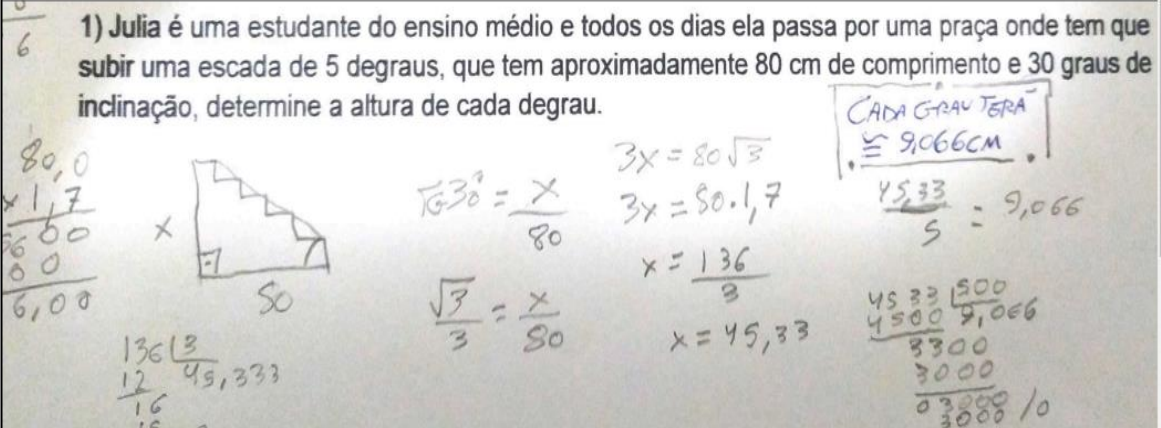
comparação da evolução dos alunos após a aplicação da modelagem matemática em relação à atividade diagnóstica.

Todavia, alguns alunos encontraram dificuldades na solução das questões. Observa-se na Figura 32 e na Figura 33 a resolução de uma questão correta e outra incorreta, respectivamente.

Figura 32: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo.

6

1) Julia é uma estudante do ensino médio e todos os dias ela passa por uma praça onde tem que subir uma escada de 5 degraus, que tem aproximadamente 80 cm de comprimento e 30 graus de inclinação, determine a altura de cada degrau.



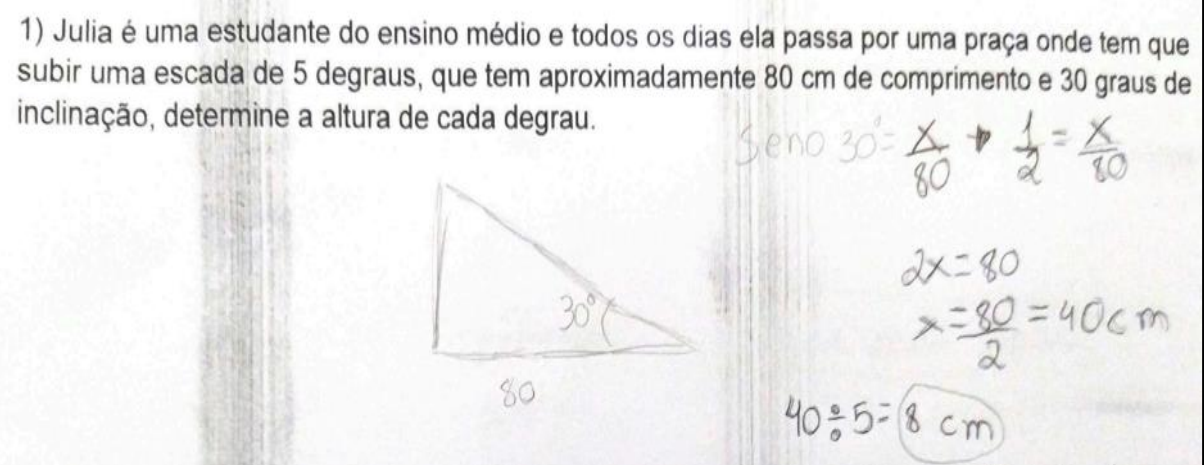
Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram: A right-angled triangle with hypotenuse 80 and angle 30° . The height is labeled x .
- Equations: $\text{Tg } 30^\circ = \frac{x}{80}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{80}$, $3x = 80\sqrt{3}$, $3x = 80 \cdot 1,7$, $x = \frac{136}{3}$, $x = 45,33$.
- Final result: $\frac{45,33}{5} = 9,066$. A box contains: "CADA GRAU TERÁ $\cong 9,066 \text{ cm}$ ".
- Other calculations: $80,0 \times 1,7 = 136,0$; $\frac{136,0}{3} = 45,333$; $\frac{45,33}{5} = 9,066$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 33: Questão resolvida de maneira correta

1) Julia é uma estudante do ensino médio e todos os dias ela passa por uma praça onde tem que subir uma escada de 5 degraus, que tem aproximadamente 80 cm de comprimento e 30 graus de inclinação, determine a altura de cada degrau.



Handwritten calculations and diagrams:

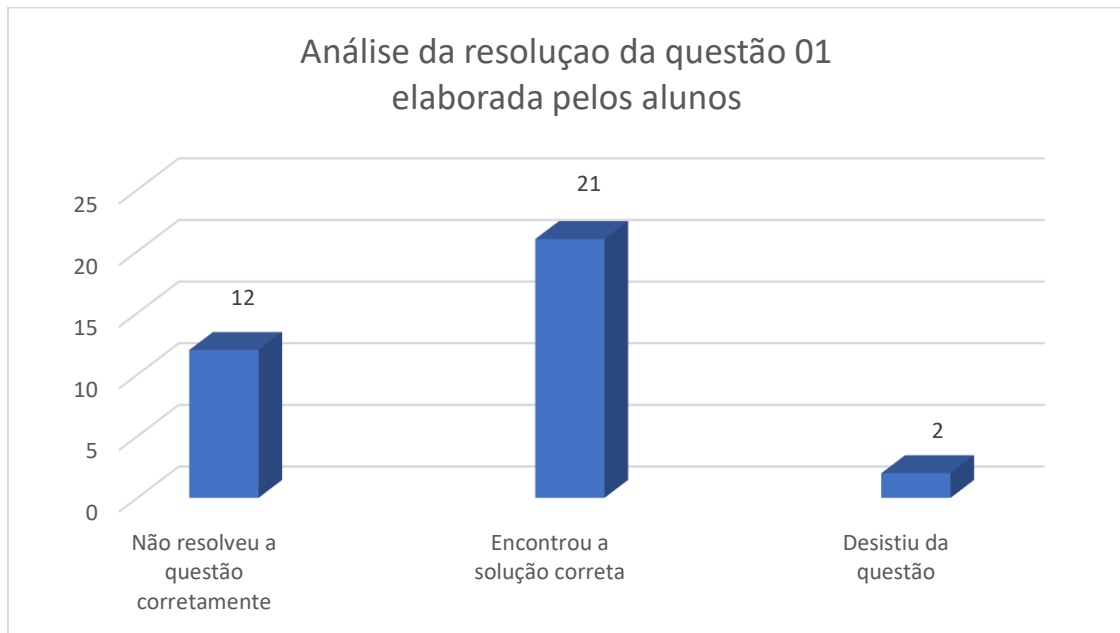
- Diagram: A right-angled triangle with hypotenuse 80 and angle 30° . The height is labeled x .
- Equations: $\text{seno } 30^\circ = \frac{x}{80} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{80}$, $2x = 80$, $x = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}$, $40 \div 5 = 8 \text{ cm}$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao comparar as questões resolvidas pelos alunos no uso da modelagem matemática - atividade desenvolvida na praça - com primeira atividade diagnóstica, foi possível observar um maior número de acertos naquela. Importante ressaltar que o nível de aprendizagem também foi maior.

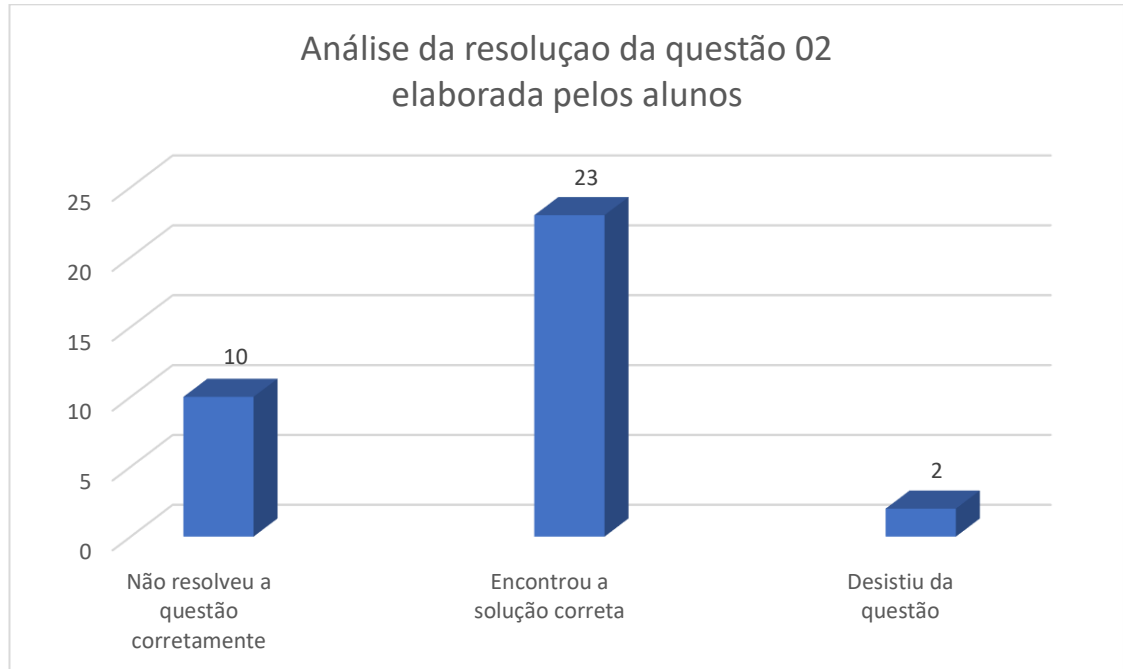
Através do Gráfico 5 e do Gráfico 6 pode-se observar essa evolução.

Gráfico 5: Análise da resolução da questão 01 elaborada pelos alunos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 6: Análise da resolução da questão 02 elaborada pelos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor

Durante a realização desse projeto observou-se que os alunos não estão acostumados a realizarem atividades em campo. Isso é devido às raízes de um ensino tradicional que faz dos alunos sujeitos passivos que apenas decoram fórmulas e

reproduzem exercícios repassados pelo professor no quadro branco dentro de sala de aula.

Porém, mesmo em meio a essas dificuldades, foi possível realizar a atividade com bastante êxito, e ficou claro que os alunos perceberam a importância de se aplicar no nosso dia-a-dia o conhecimento matemático adquirido em sala de aula. Arrancando assim as raízes fixadas pelo ensino tradicional da matemática, e mudando a forma como alguns alunos pensam sobre essa disciplina quando afirmam que é um “amontoado de fórmulas sem utilidade para suas vidas”.

Por conseguinte, fica evidente que com os projetos de modelagem, os alunos poderão perceber a aplicabilidade da matemática nas mais variadas formas do nosso cotidiano. Ao observar o Gráfico 5 e o Gráfico 6 percebe-se a evolução dos alunos após a aplicação da modelagem matemática, evidenciando a importância em trabalhar com a modelagem no ensino de matemática, pois gera a possibilidade de os alunos serem os agentes ativos na construção de seus próprios conhecimentos, não apenas como espectadores em sala de aula, mas como contribuintes juntos ao professor.

4.3 FORMULAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. Apresentação dos conteúdos

Nesse primeiro momento, foram trabalhados com os alunos conteúdos relacionados à trigonometria.

2. Conceitos sobre Modelagem Matemática

Trabalhou-se, nesse momento, a respeito de conceitos referentes à Modelagem Matemática.

3. Atividade diagnóstica

Questionário composto de questões sobre trigonometria de autoria do pesquisador que se encontra no apêndice A

4. Aula de campo

Os alunos foram conduzidos para o espaço onde foram realizadas as coletas dos dados.

5. Construção das questões

Com os dados em mãos, os alunos elaboraram questões que envolviam conhecimentos trigonométricos

6. Resolução das questões elaboradas pelos alunos

Questionário composto de questões sobre trigonometria cuja autoria foram os alunos e se encontra exposto no apêndice B

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha do tema se deu quando, ao ministrar aulas da maneira tradicional sobre trigonometria pude observar que os alunos apresentavam muitas dificuldades, alguns alunos questionavam o porquê e para que servissem tais assuntos nas vidas deles. Assim, surgiu a necessidade de inserir alguma metodologia que chamasse à atenção deles, onde eles passassem a ser agentes ativos, colaboradores na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos. Com as particularidades da modelagem matemática foi possível desmistificar o que hoje é tido por muitos discentes como uma das piores disciplinas do currículo escolar.

A modelagem se apresenta de várias maneiras, mas uma delas se destaca mais: a Modelagem Matemática como metodologia ou estratégia de ensino, focada mais no processo de ensino e sempre buscando despertar o senso reflexivo dos alunos e educadores, fazendo da Modelagem Matemática uma ferramenta pedagógica que desafia os alunos, tirando-os da sua comodidade, conduzindo-os na construção de novos saberes, sem definições decoradas e com atividades não mecanizadas.

Por se tratar de uma forma diferente de ensinar a matemática, a modelagem vai na contramão do ensino tradicional, a maior dificuldade nesse projeto foi mostrar aos alunos que eles podem ser colaboradores do ensino e não só agentes passivos, pois a modelagem exige uma participação ativa dos alunos.

A atividade realizada na praça, com o uso de fita métrica e trenas, foi significativo pois houve o uso de material concreto na prática pedagógica. Muitas vezes os professores se limitam aos livros didáticos, por exemplo, trabalham apenas a aplicação da trigonometria com o cálculo da altura do objeto, com base no ângulo, na altura do observador e distância do objeto, de maneira tradicional. Nesse caso a atividade não é sólida, então o aluno parte para cálculos mecânicos, que por vezes não têm significados, justamente por não despertam o interesse do aluno. Com a utilização do material concreto, e o aluno como agente ativo da atividade, tornando-a palpável e as dúvidas e discussões sobre o tema vão surgindo no decorrer do processo, gerando maior interesse do aluno, e proporcionando mais sentido e dinamismo à atividade.

Assim, vale ressaltar que se algum professor se sentir à vontade em trabalhar

com essa metodologia será importante que sempre continue aprimorando seus conhecimentos e experiências para poderem dividir com seus alunos, pois uma das principais motivações para os professores utilizem a Modelagem Matemática como quebra de paradigma do ensino tradicional da Matemática é ver a mudança real na atitude dos alunos, observando o entusiasmo deles, e como assimilam às aulas.

Como trabalhos futuros, pretendo aplicar a modelagem matemática à aqui apresentada, mas relacionada a outros conhecimentos matemáticos, à exemplo de sistemas lineares, análise combinatória e probabilidade.

6. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?** Veritati, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais. Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BASTOS, A.V. e COSTA, F. **Múltiplos comprometimentos no trabalho: articulando diferentes estratégias de pesquisa.** Revista de Psicologia Organizacional. Vol.1, nº 2, 2001

BASTOS, J. F. **Modelagem Matemática na Educação Básica: uma proposta para a formação inicial dos professores do magistério.** 125 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2018.

BICUDO, P. I. **Geometria Grega.** 2010. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=xTKu7FgaMts>>. Acesso em: 03.03.2022.

BIEMBENGUT, Marias.; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo; Contexto, 2011.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Monica. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.** v. 39, New York: Springer, 2005.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher (Editora Da Universidade de São Paulo), 1996.

BURAK, D. **Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em**

sala de aula. Revista de Modelagem Na Educação Matemática, Blumenal, v. 1, n. 1, p.10-27, 2010.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série.** 1987. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

EVES, H. **História da Geométrica.** São Paulo: Atual Editora, 1992

FLEMMING, D. M., LUZ, E. F., WAGNER, R. **Equações Diferenciais na Engenharia Civil: uma proposta didática** In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 28., 2000, Ouro Preto. Anais eletrônicos... Brasília: ABENGE, 2000. 7p. 1CD-ROM.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E.; MELLO, A. C.C. **Tendências em educação matemática.** Palhoça, Rio Grande do Sul: Unisul Virtual, 2005.

JACOBINI, OTÁVIO Roberto. **A Modelação Matemática Aplicada no Ensino de Estatística em Cursos de Graduação.** Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP-Rio Claro, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MENDES, Juliana Elvira. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** 2013. 144 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais.

MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA, Ademir Donizete; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MOL, Rogerio S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOREIRA, Marco Antônio. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. São Paulo: Centauro Editora, 2010.

OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicações da trigonometria nas ciências**. 2015. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Federal de Roraima-RR, 2015.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes de. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 2013.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino da Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. São Paulo: Ática, 2010.

SANCHES, Isabel. **Compreender, agir, mudar, incluir: da investigação-ação à educação inclusiva**. Revista Lusófona de Educação, v. 5, n. 5, p. 127-147, 2005.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. **O uso da modelagem para o ensino da Função seno no ensino médio**. 2014. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SEE, 2011.

STOCCO, Katia Cristina Smole; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**, volume 2, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

VIANNA, C. E. S. **Evolução histórica do conceito de educação e os objetivos constitucionais da educação brasileira**. Janus, v. 3, n. 4, p.128-38, 2006.

APÊNDICE A

ATIVIDADE DIAGNOSTICA



Colégio Estadual de Cândido Sales

Professor- Gieely Cerqueira Rodrigues filho

Disciplina: Matemática

Turma: A Série: 2º

Aluno: _____

Atividade

1) Observando pela manhã a sombra de um prédio no chão, uma pessoa verificou que essa média 80 metros quando os raios de Sol faziam um ângulo de 30° com a superfície. Baseado nessas informações, calcule a altura do prédio.

2) Carlos trabalha em um prédio e todos os dias têm que subir uma escada de 10 degraus, que tem aproximadamente 2 metros de comprimento e 30° de inclinação, determine a altura de cada degrau.

3) Um estudante de engenharia foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. Aproximando do prédio ele mediu sua distância, que era de 40 metros, podemos afirmar que a altura do prédio é de, aproximadamente:

(Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$)

APÊNDICE B

Atividade elaborada pelos alunos



Colégio Estadual de Cândido Sales

Professor- Gieely Cerqueira Rodrigues filho

Disciplina: Matemática

Turma: A Série: 2º

Aluno: _____

Atividade

1) Julia é uma estudante do ensino médio e todos os dias ela passa por uma praça onde tem que subir uma escada de 5 degraus, que tem aproximadamente 80 cm de comprimento e 30° de inclinação, determine a altura de cada degrau.

2) Um eletricista foi chamado na igreja para concertar a energia, porém para subir nela, só era possível por escada, é para isso ele precisa saber quantos metros de escada ele vai precisar para subir na igreja. E então, ele mediu aproximadamente a sombra que o edifício estava fazendo (10 metros) e o grau de inclinação (30° graus) do chão até a igreja. Calcule a altura necessária de escada que ele vai precisar.

(Dados: use $\sqrt{3} = 1,7$).

ANEXO A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO



COLÉGIO ESTADUAL DE CANDIDO SALES

Rua Sete de Setembro, 438 – Centro – CÂNDIDO SALES – BA
 FONE/FAX: (77) 3438-2757 EMAIL: ce.candidosales@educacao.ba.gov.br

CÓD. SEC/BA 1178438 /CÓDIGO INEP 29434734

Portaria de Criação nº 040/2011 D.O.E. de 05/01/2011

Portaria de Mudança de Denominação nº 4052/2017 D.O.E. de 13 /06/2017.

Portaria de Autorização de Educação Profissional nº 8408/2017 D.O.E de 18/11/2017

Portaria de Autorização de Ensino Médio nº 05/2018 D.O.E. 15/03/2018

Portaria de Autorização de Educação de Jovens e Adultos – Tempo Formativo III nº 01/2020 D.O.E. de 08/02/2020

AUTORIZAÇÃO

Eu, _____, RG de nº _____, Órgão Expedidor
 _____, CPF de nº _____, residente na
 _____, Cândido Sales/Bahia, telefone (77)
 _____, **AUTORIZO** meu(minha) filho
 (a) _____, data de
 nascimento _____ a participar do PROJETO MODELAGEM MATEMÁTICA para
 facilitar o aprendizado das RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO da
 disciplina de MATEMÁTICA, ministrada pelo professor **Giely Cerqueira Rodrigues Filho**. Me
 responsabilizo isentando o Colégio Estadual de Cândido Sales, e seus responsáveis de qualquer
 dano que por ventura meu (minha) filho(a) venha a sofrer durante o passeio.

Observação:

- Início às 10h:20m – Praça Dom Climério de Andrade;
- Previsão de término às 11h:50m.

Assinatura do pai ou responsável