

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Roberta Mastrochirico

**CONDIÇÕES PARA UM QUADRILÁTERO
CONVEXO SER UM QUADRILÁTERO PIPA**

Dissertação de Mestrado

Santo André – SP

2013

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado

Roberta Mastrochirico

**CONDIÇÕES PARA UM QUADRILÁTERO CONVEXO SER UM
QUADRILÁTERO PIPA**

Trabalho apresentado à Pró-Reitoria de Pós-graduação da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Santo André - SP
2013

Este trabalho é dedicado principalmente aos meus pais, *Bartolomeu Mastrochirico*
e *Sílvia Valdívia Mastrochirico* e, especialmente, ao *Ricardo Ivassaki*.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, *Bartolomeu e Sílvia*, aos meus irmãos, *Renata e Marcelo*, aos meus cunhados, *Rodrigo e Sirleide*, as minhas sobrinhas, *Kathleen e Kauani*, e ao meu amado *Ricardo*, por entenderem os momentos em que me ausentei por causa do estudo, por acreditarem em mim e nos meus sonhos, por me apoiarem em todas as minhas decisões, incentivando-me a seguir adiante em busca de meus objetivos. Em especial, agradeço ao meu amado *Ricardo*, que esteve ao meu lado nos dias de mau humor, pessimismo e cansaço.

Aos meus avós *João, Eliza, Victore e Maria*, por terem incentivado meus pais a buscar uma melhor educação e, por consequência, estes me fizeram acreditar que tudo é possível.

Ao meu orientador, professor *Márcio Fabiano da Silva*, que teve paciência, dedicação, empenho e, em nenhum momento, deixou de transmitir o conhecimento necessário para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos da turma do mestrado, *Aguinaldo, Alexandre, Antônio, Carlos, Cintia, Clayton, Guilherme, Jeovah, João, Marcelo, Mariane, Nilson, Samuel e Tadeu* que foram companheiros de conversas, risadas e, principalmente, de árduas horas de estudo. Aos professores, *Armando Caputi, Daniel Miranda Machado, João Carlos de Motta Ferreira, Rafael Grisi, Rodney C. Bassanezi e Sinuê Dayan Barbero Lodovici*, pela oportunidade de ampliar meus conhecimentos durante todo o curso.

E por último, mas não menos importante, agradeço à Deus, por sempre estar presente em minha vida através da fé e da esperança.

Cada um de vocês teve um papel importante nesta etapa da minha vida.

A todos, o meu muito obrigado!

“É justamente a possibilidade de realizar um sonho que torna a vida interessante.”

Paulo Coelho

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar condições para que um quadrilátero convexo seja um quadrilátero pipa e algumas propriedades deles. A abordagem que será utilizada é acessível aos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: definições fundamentais da geometria, quadrilátero convexo, quadrilátero pipa

ABSTRACT

This work study aims to present conditions for a convex quadrilateral is a quadrilateral kite and some properties of them. The approach we will use here is accessible to high school students.

Keywords: fundamental definitions of geometry, convex quadrilateral, quadrilateral kite

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	ix
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - QUADRILÁTEROS CONVEXOS NA GEOMETRIA PLANA	3
1.1 Quadriláteros Convexos	3
1.2 Quadriláteros de Saccheri	5
1.3 Teoremas sobre Quadriláteros Convexos	10
CAPÍTULO 2 - QUADRILÁTEROS PIPAS	17
2.1 Quadriláteros Pipas	17
CAPÍTULO 3 - QUADRILÁTEROS TANGENCIAIS	23
3.1 Quadriláteros Tangenciais que são Pipas	23
3.2. Condições para que o um quadrilátero tangencial seja uma pipa	33
CAPÍTULO 4 - APÊNDICE	43
4.1 Geometria de Incidência.....	43
4.2 Relação Estar-Entre	44
4.3 Segmentos, Raios, Ângulos e Triângulos.....	45
4.4 Congruência de Segmentos	48
4.5 Convexidade.....	49
4.6 Teoremas de Separação	51
4.7 Medida Angular	54
4.8 Congruência de Triângulos.....	58
4.9 Desigualdades Geométricas.....	63
4.10 Condições Suficientes para o Paralelismo	66
4.11 Desigualdade Básica para Soma dos Ângulos de um Triângulo	70
4.12 Postulado das Paralelas	70
4.13 Proporcionalidades	73
4.14 Semelhanças de Triângulos	73
4.15 Teorema de Pitágoras	76
4.16 Lugares Geométricos	77
CONCLUSÃO	81
REFERÊNCIA	82

LISTA DE FIGURAS

1.1.1	Quadriláteros $ABCD$	3
1.1.2	Quadriláteros Convexos	4
1.1.3	Encontro das Diagonais de um Quadrilátero Convexo	5
1.2.1	Retângulo $ABCD$	6
1.2.2	Quadrilátero de Saccheri	6
1.2.3	Diagonais de um Quadrilátero de Saccheri	7
1.2.4	Congruência das Bases Superiores e Ângulos das Bases Superiores de dois Quadriláteros de Saccheri	8
1.2.5	Congruência dos Ângulos da Base Superior de um Quadrilátero de Saccheri	9
1.2.6	Seqüência de n Quadriláteros de Saccheri	9
1.3.1	Os Quadriláteros de Saccheri são Retângulos	10
1.3.2	Trapézios $ABCD$	11
1.3.3	Paralelogramo $ABCD$	12
1.3.4	Losango $ABCD$	13
1.3.5	Triângulos Congruentes	13
1.3.6	Lados Opostos Congruentes	14
1.3.7	Todo Trapézio é Convexo	15
1.3.8	Prova por absurdo: Todo Trapézio é Convexo	16
2.1.1	Quadrilátero Pipa	17
2.1.2	Diagonais de um Quadrilátero Pipa	18
2.1.3	Ângulos Opostos Congruentes de um Quadrilátero Pipa	18
2.1.4	Quadrilátero Pipa formado por um Trapézio Isósceles	19
2.1.5	Quadrilátero Pipa formado por um Retângulo	22
3.1.1	Quadrilátero Tangencial	23
3.1.2	Cordas Tangentes: \overline{RT} e \overline{QS}	24
3.1.3	Comprimentos Tangentes: \overline{CQ} , \overline{QD} , \overline{DR} , \overline{RA} , AS , \overline{SB} , \overline{BT} e \overline{TC}	24
3.1.4	Bimedias: \overline{PN} e \overline{MO}	25
3.1.5	Quadrilátero Tangencial, Lados e Comprimentos Tangentes	25
3.1.6	Quadrilátero Pipa e suas Bissetrizes	26
3.1.7	Quadrilátero que não é Pipa	27
3.1.8	Teorema de Stewart	28
3.1.9	Teorema das Bimedias	29
3.2.1	Alturas dos Subtriângulos h_1 , h_2 , h_3 e h_4 ,	38

3.2.2 O Incentro de um Quadrilátero Tangencial pertence a maior Diagonal	39
3.2.3 Circunferência Inscrita em um Triângulo	40
3.2.4 Circunferências Inscritas aos Subtriângulos	41
4.1.1 Reta L	43
4.1.2 Segmento de A para B	43
4.1.3 Raio \overrightarrow{AB}	44
4.2.1 Ponto B que está entre os pontos A e C	45
4.2.2 Ponto B que está entre os pontos C e A	45
4.3.1 Segmento \overline{AB} pertence à reta \overleftrightarrow{AB}	45
4.3.2 Raio \overrightarrow{AB} pertence à reta \overleftrightarrow{AB}	46
4.3.3 Ângulo $\angle BAC$	46
4.3.4 Triângulo ΔABC	47
4.3.5 Ângulo $\angle BAC$ é o mesmo que o Ângulo $\angle B_1AC_1$	47
4.4.1 Figuras Congruentes	48
4.4.2 Segmentos Congruentes	48
4.4.3 Ponto Médio M de um Segmento \overline{AB}	49
4.5.1 Figuras Convexas.....	49
4.5.2 Figuras Não Convexas	50
4.5.3 Semiplanos H_1 e H_2	50
4.5.4 O Postulado de <i>Pash</i>	51
4.6.1 Pontos de um mesmo lado de uma reta	51
4.6.2 Pontos de lados opostos de uma reta	52
4.6.3 Raios Opostos	52
4.6.4 Pontos de um raio em relação a uma reta.....	52
4.6.5 Interior e Exterior do ângulo $\angle BAC$	53
4.6.6 Lado pertencente ao interior do ângulo oposto.....	53
4.6.7 Raio pertencente ao interior de um ângulo	54
4.6.8 Teorema Trave	54
4.7.1 Par Linear	55
4.7.2 Ângulos Congruentes	55
4.7.3 Ângulo Reto.....	56
4.7.4 Raios Perpendiculares \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}	56
4.7.5 Ângulo Agudo	57
4.7.6 Ângulo Obtuso	57
4.7.7 Par Vertical	57

4.7.8 Ângulos Congruentes de um Par Vertical	58
4.8.1 Triângulos Congruentes.....	59
4.8.2 Triângulos Congruentes (LAL)	59
4.8.3 Triângulo Isósceles	60
4.8.4 Triângulo Escaleno	60
4.8.5 Triângulo Equilátero.....	60
4.8.6 Teorema do Triângulo Isósceles.....	61
4.8.7 Triângulos Congruentes (ALA)	61
4.8.8 Triângulos Congruentes (LLL)	62
4.8.9 Bissetriz de um Ângulo	62
4.9.1 Ângulo Externo de um Triângulo.....	63
4.9.2 Ângulos Externos de um Triângulo	63
4.9.3 Ângulo Externo maior que os Ângulos Internos de um Triângulo	64
4.9.4 Segmento Perpendicular é o menor	64
4.9.5 Triângulos Congruentes (LAA)	65
4.9.6 Triângulo Retângulo.....	66
4.9.7 Triângulos Retângulos Congruentes	66
4.10.1 Retas Paralelas L_1 e L_2	67
4.10.2 Retas Perpendiculares a uma mesma reta T	67
4.10.3 Reta Transversal T	68
4.10.4 Ângulos Alternos Internos.....	68
4.10.5 Ângulos Correspondentes	69
4.11.1 Pé da Perpendicular	70
4.12.1 Postulado das Paralelas Euclidianas	70
4.12.2 Ângulos Alternos Internos Congruentes	71
4.12.3 Ângulos Correspondentes Congruentes	71
4.12.4 Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo	72
4.12.5 A medida do Ângulo Externo é a Soma das medidas dos ângulos Internos Opostos de um Triângulo.....	72
4.14.1 Triângulos Semelhantes (AAA).....	74
4.14.2 Triângulos Semelhantes (LLL)	75
4.14.3 Triângulos Semelhantes (LAL).....	75
4.15.1 Triângulos Retângulos Semelhantes	76
4.15.2 Teorema de <i>Pitágoras</i>	76
4.16.1 Mediatriz do segmento \overline{AB}	77

4.16.2 Ponto Médio M e Perpendicularidade.....	77
4.16.3 Bissetriz do Ângulo $\angle BAC$	78
4.16.4 Circunferência de raio r e centro A	79
4.16.5 Interior e Exterior da Circunferência de raio r e centro A	79
4.16.6 Reta Tangente à Circunferência	79
4.16.7 Propriedades das Tangentes por um Ponto Exterior	80

INTRODUÇÃO

A importância do conhecimento geométrico é ressaltada em (PCNEM BRASIL, 2000, p.96) [4]:

(...) identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade (...)

Neste trabalho, estudaremos uma classe especial de quadriláteros convexos, que são os chamados quadriláteros pipas. Obteremos propriedades e condições necessárias para que um quadrilátero convexo seja um quadrilátero pipa. Para obter estes resultados, baseamo-nos em dois artigos de M. Josefsson [2] e [3], em um artigo da Revista do Professor de Matemática [4] e em um artigo de A. I. Fetsov e Y. S. Dubnov [5].

Esta escolha mostra-se adequada, pois um dos objetivos de um trabalho de conclusão no Programa de Mestrado Profissional em Matemática é produzir um material que esteja de certa forma, voltado à realidade do professor em sala de aula. Nossa proposta pode ser perfeitamente adaptada a esta realidade, uma vez que podem ser elaboradas atividades, a respeito do assunto aqui tratado, para serem aplicadas em sala de aula com alunos da educação básica. Por exemplo, usando-se um software de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, pode-se determinar um quadrilátero pipa formado pelas bissetrizes internas de um trapézio isósceles, e fazendo as alterações na medida dos lados do trapézio isósceles na mesma tela, o aluno poderá visualizar e perceber as semelhanças e as mudanças ocorridas de um quadrilátero pipa para o outro.

A dissertação está dividida em 4 capítulos.

No capítulo 1, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros convexos.

No capítulo 2, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros pipas.

No capítulo 3, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros tangenciais.

O capítulo 4 é, na verdade, um Apêndice, no qual apresentaremos uma construção para o modelo de Geometria que nos interessa nesta dissertação. Todos os resultados deste capítulo podem ser encontrados em E. E. Moise [1].

CAPÍTULO 1 - QUADRILÁTEROS CONVEXOS NA GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros convexos.

1.1 Quadriláteros Convexos

Nesta seção estudaremos os chamados quadriláteros convexos.

Os resultados obtidos nesta seção independem do Postulado das Paralelas.

Começaremos definindo quadrilátero:

Definição 1.1.1: Dados quatro pontos A , B , C e D distintos que pertençam ao mesmo plano, sendo três a três não colineares, se os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} se intersectarem apenas nos seus pontos de extremidade, então a sua união é chamada de quadrilátero $ABCD$.

A figura 1.1.1 exibe três representações geométricas distintas de um quadrilátero.

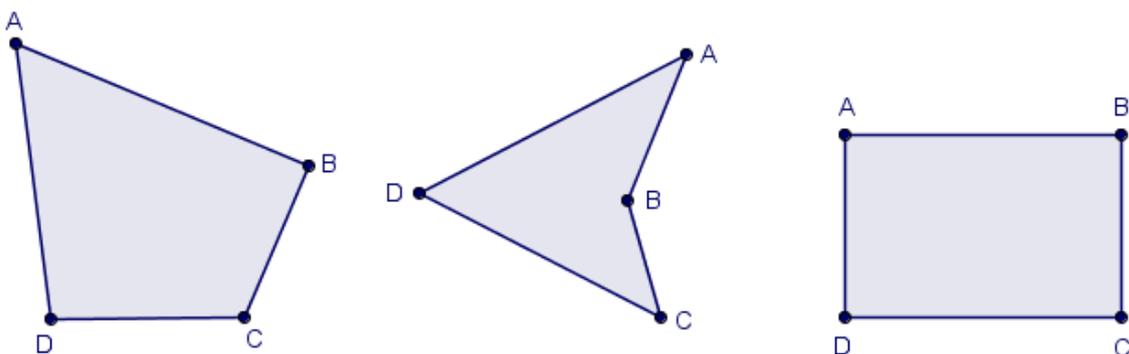


Figura 1.1.1 – Quadriláteros $ABCD$

O símbolo para indicar um quadrilátero formado pelos pontos A , B , C e D é $\square ABCD$.

Os ângulos do quadrilátero $\square ABCD$ são os ângulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$.

Os lados do quadrilátero $\square ABCD$ são os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} .

As diagonais do quadrilátero $\square ABCD$ são os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} .

Dois lados que têm uma extremidade em comum são chamados adjacentes e dois lados que não são adjacentes são chamados de opostos.

Se dois ângulos de um quadrilátero forem adjacentes, a sua intersecção contém um lado, e se não forem, então são ângulos opostos.

A seguir, definiremos quadrilátero convexo:

Definição 1.1.2: Um quadrilátero $\square ABCD$ é chamado convexo se, e somente se, garantir as quatro seguintes condições:

- (1) A e B estão no mesmo lado do segmento \overline{CD} .
- (2) B e C estão no mesmo lado do segmento \overline{DA} .
- (3) C e D estão no mesmo lado do segmento \overline{AB} .
- (4) D e A estão no mesmo lado do segmento \overline{BC} .

A figura 1.1.2 exibe três representações geométricas distintas de um quadrilátero convexo.

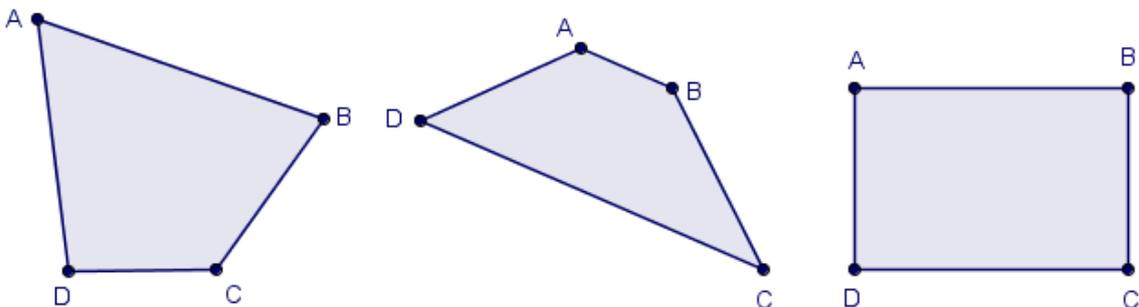


Figura 1.1.2 – Quadriláteros Convexos

A seguir, apresentaremos um teorema sobre os quadriláteros convexos:

Teorema 1.1.1: As diagonais de um quadrilátero convexo sempre se cruzam.

A figura 1.1.3 exibe uma representação geométrica do encontro das diagonais de um quadrilátero convexo.

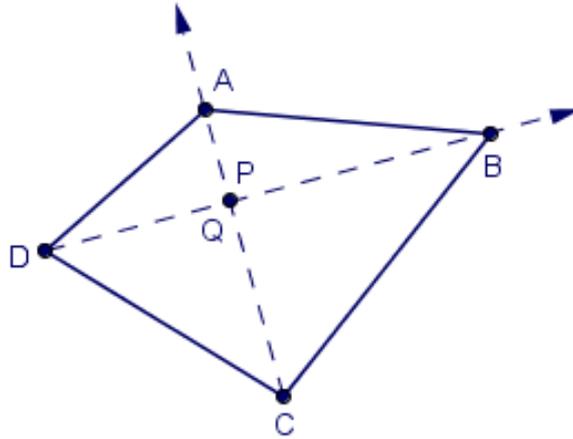


Figura 1.1.3 – Encontro das Diagonais de um Quadrilátero Convexo

Prova: Sendo $\square ABCD$ um quadrilátero convexo, precisamos mostrar que o segmento \overline{AC} intersecta o segmento \overline{BD} .

Como os pontos A e B estão no mesmo lado de \overleftrightarrow{DC} , e como os pontos B e C estão no mesmo lado de \overleftrightarrow{DA} , pela definição 4.6.2, podemos concluir que B se encontra no interior do ângulo $\angle ADC$. Logo, considerando o $\triangle ADC$, pelo teorema 4.6.6, o raio \overrightarrow{DB} intersecta o segmento \overline{AC} em um ponto P , entre A e C .

Analogamente, como os pontos A e B estão no mesmo lado de \overleftrightarrow{CD} , e como os pontos A e D estão no mesmo lado de \overleftrightarrow{CB} , pela definição 4.6.2, podemos concluir que A se encontra no interior do ângulo $\angle BCD$. Logo, considerando o $\triangle BDC$, pelo teorema 4.6.6, o raio \overrightarrow{CA} intersecta o segmento \overline{DB} em um ponto Q , entre D e B .

Assim, \overrightarrow{DB} intersecta a reta \overleftrightarrow{AC} em P e também em Q . Portanto, $P = Q$.

Portanto, uma vez que P está em \overline{AC} e Q está em \overline{BD} , segue-se que \overline{AC} e \overline{BD} têm um ponto em comum, concluindo a prova.

1.2 Quadriláteros de Saccheri

Nesta seção, estudaremos os chamados quadriláteros de Saccheri.

Os resultados obtidos nesta seção independem do Postulado das Paralelas.

Começaremos definindo retângulo:

Definição 1.2.1: Se todos os quatro ângulos de um quadrilátero $\square ABCD$ são ângulos retos, então o quadrilátero é um retângulo.

A figura 1.2.1 exibe o uma representação geométrica de um retângulo.

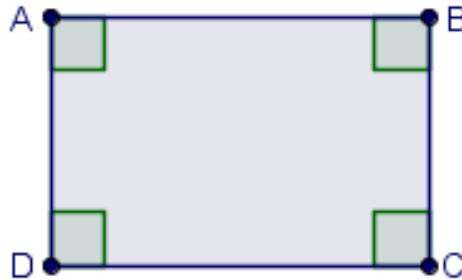


Figura 1.2.1 – Retângulo $ABCD$

Abaixo, definiremos quadrilátero de Saccheri:

Definição 1.2.2: O quadrilátero $\square ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, se $\angle BAD$ e $\angle ADC$ são ângulos retos, B e C estão no mesmo lado de \overline{AD} , e $AB = CD$.

A figura 1.2.2 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero de Saccheri.



Figura 1.2.2 – Quadrilátero de Saccheri

O segmento \overline{AD} é chamado de base inferior.

O segmento \overline{BC} é chamado de base superior.

Os ângulos da base inferior são $\angle BAD$ e $\angle ADC$.

Os ângulos da base superior são $\angle ABC$ e $\angle BCD$.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades sobre os quadriláteros de Saccheri.

Consequência: Todo quadrilátero de Saccheri é convexo. De fato, como $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ e $\overline{BC} \perp \overline{DC}$ então $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Logo, A e D estão do mesmo lado de \overline{BC} , e B e C estão do mesmo lado de \overline{AD} . Por definição, A e B estão do mesmo lado de \overline{CD} , de modo que C e D estão do mesmo lado de \overline{AB} .

Teorema 1.2.1: As diagonais dos quadriláteros de Saccheri são congruentes.

A figura 1.2.3 exibe uma representação geométrica das diagonais de um quadrilátero de Saccheri.

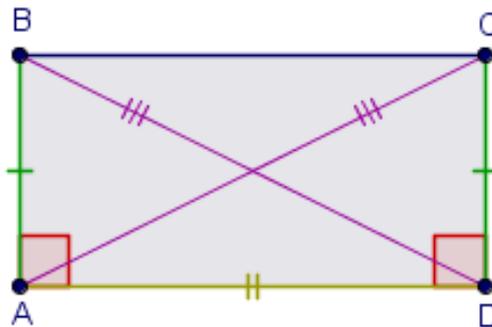


Figura 1.2.3 – Diagonais de um Quadrilátero de Saccheri

Prova: Sendo $\square ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, precisamos mostrar que os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} são congruentes.

Considerando os triângulos $\triangle BAD$ e $\triangle CDA$, como $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\angle BAD \cong \angle ADC$ e \overline{AD} é um lado comum aos triângulos, pelo postulado 4.8.1, temos que $\triangle BAD \cong \triangle CDA$.

Portanto, segue-se que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, concluindo a prova.

Teorema 1.2.2: Dados os quadriláteros de Saccheri $\square ABCD$ e $\square EFGH$, com bases inferiores \overline{AD} e \overline{EH} , respectivamente, se $\overline{AD} \cong \overline{EH}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ então $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, $\angle ABC \cong \angle EFG$, e $\angle BCD \cong \angle FGH$.

A figura 1.2.4 exibe uma representação geométrica de dois quadriláteros de Saccheri.

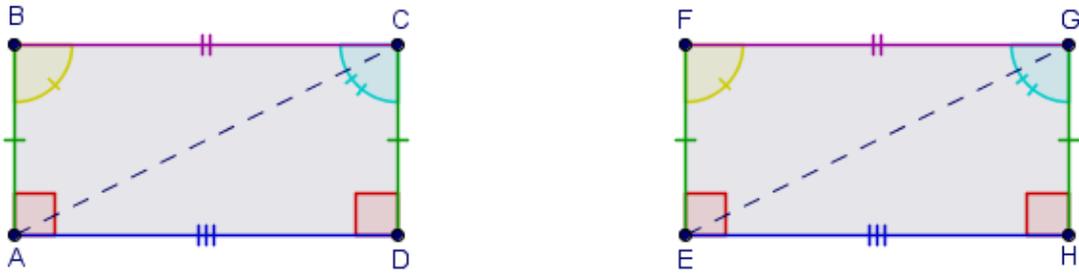


Figura 1.2.4 – Congruência das Bases Superiores e Ângulos das Bases Superiores de dois Quadriláteros de Saccheri

Prova: Como o quadrilátero $\square ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, pela definição 1.2.2, sabemos que $\angle BAD$ e $\angle ADC$ são ângulos retos e $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. E como o quadrilátero $\square EFGH$ também é um quadrilátero de Saccheri, pela definição 1.2.2, sabemos que $\angle FEH$ e $\angle EHG$ são ângulos retos e $\overline{EF} \cong \overline{HG}$.

Desta forma, temos que $\angle BAD \cong \angle FEH$ e $\angle ADC \cong \angle EHG$. **(1.2.1)**

Considerando os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle EGH$, como $\overline{AD} \cong \overline{EH}$, $\overline{DC} \cong \overline{HG}$ e $\angle ADC \cong \angle EHG$, pelo postulado 4.8.1, temos que os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle EGH$ são congruentes, isto é, $\triangle ACD \cong \triangle EHG$.

Segue-se que os lados e os ângulos destes triângulos são congruentes, isto é, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, $\angle CAD \cong \angle GEH$ e $\angle ACD \cong \angle EGH$. **(1.2.2)**

Como $\angle BAD \cong \angle FEH$ **(1.2.1)**, e o ponto C se encontra no interior do ângulo $\angle BAD$, e o ponto G se encontra no interior do ângulo $\angle FEH$, e sabemos que $\angle CAD \cong \angle GEH$ **(1.2.2)**, então temos que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle FEG$ são congruentes, isto é, $\angle BAC \cong \angle FEG$. **(1.2.3)**

Considerando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, como $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\angle BAC \cong \angle FEG$ **(1.2.3)**, pelo postulado 4.8.1, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são congruentes, isto é, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Segue-se que os lados e os ângulos destes triângulos são congruentes, isto é, $\angle ABC \cong \angle EFG$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ e $\angle BCA \cong \angle FGE$. **(1.2.4)**

E como $\angle BCA \cong \angle FGE$ **(1.2.4)** e $\angle ACD \cong \angle EGH$ **(1.2.2)**, temos que $\angle BCD \cong \angle FGH$, pois A está no interior do ângulo $\angle BAD$ e E está no interior do ângulo $\angle FEH$, concluindo a prova.

Teorema 1.2.3: Em todo quadrilátero de Saccheri, os ângulos da base superior são congruentes.

A figura 1.2.5 exibe uma representação geométrica da congruência dos ângulos da base superior de um quadrilátero de Saccheri.



Figura 1.2.5 – Congruência dos Ângulos da Base Superior de um Quadrilátero de Saccheri

Prova: Considerando os quadriláteros de Saccheri $\square ABCD$ e $\square DCBA$, basta aplicarmos o teorema 1.2.2, obtendo $\angle ABC \cong \angle BCD$, concluindo a prova.

Teorema 1.2.4: Em todo quadrilátero Saccheri, a base superior é congruente ou maior do que a base inferior.

A figura 1.2.6 exibe uma representação geométrica de uma seqüência de n quadriláteros de Saccheri.

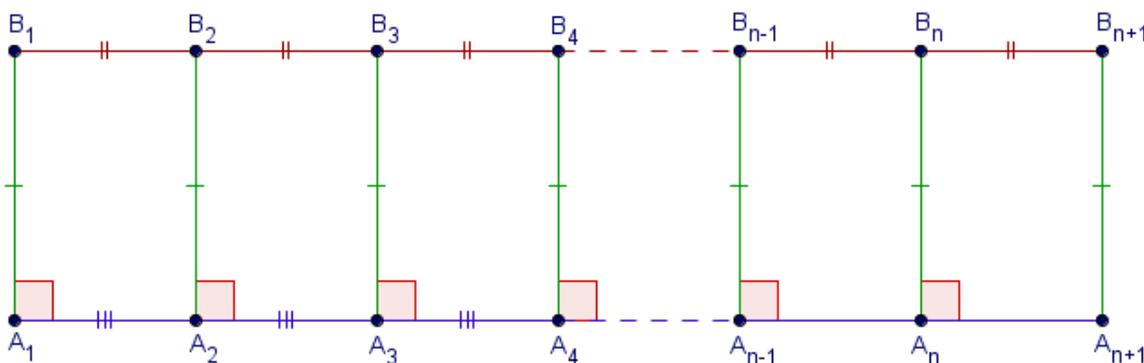


Figura 1.2.6 – Seqüência de n Quadriláteros de Saccheri

Reformulando: Dado um quadrilátero Saccheri $\square A_1B_1B_2A_2$, com base inferior $\overline{A_1A_2}$, então $B_1B_2 \geq A_1A_2$.

Prova: Considerando a seqüência de n quadriláteros de Saccheri lado-a-lado, a partir de $\square A_1B_1B_2A_2$ de modo que A_3, A_4, \dots, A_{n+1} são pontos da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, e $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_{n+1}$. Pelo teorema 1.2.2, temos:

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots = B_{n-1}B_n = B_nB_{n+1}$$

Não sabemos se os pontos B_1, B_2, \dots, B_{n+1} são colineares. Mas, pela desigualdade poligonal, que $B_1B_{n+1} \leq B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nB_{n+1}$.

Uma vez que todas as distâncias à direita são iguais a B_1B_2 , temos:

$$B_1B_{n+1} \leq n \cdot B_1B_2$$

Também, $A_1A_{n+1} \leq A_1B_1 + B_1B_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \leq A_1B_1 + n B_1B_2 + A_1B_1$.

Como $A_1A_{n+1} = n A_1A_2$, temos $n A_1A_2 \leq n B_1B_2 + 2A_1B_1$ **(1.2.5)**, e esta conclusão vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos supor que o nosso teorema é falso e que $A_1A_2 > B_1B_2$, de modo que $A_1A_2 - B_1B_2$ é um número positivo. Obviamente, $2A_1B_1$ é um número positivo. Sendo $\varepsilon = A_1A_2 - B_1B_2 > 0$ e $M = 2A_1B_1 > 0$, temos por **(1.2.5)**, $n\varepsilon \leq M$, para todo n inteiro positivo. Isto contradiz o princípio arquimediano, concluindo a prova.

1.3 Teoremas sobre Quadriláteros Convexos

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades dos quadriláteros convexos. Para isto, admitiremos o Postulado das Paralelas.

Teorema 1.3.1: Todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo.

A figura 1.3.1 exibe uma representação geométrica do teorema 1.3.1.

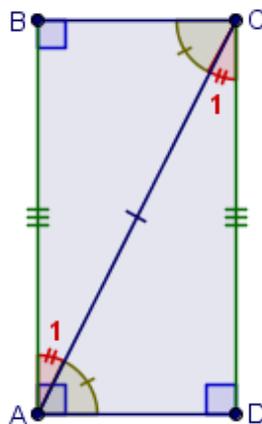


Figura 1.3.1 – Os Quadriláteros de Saccheri são Retângulos

Prova: Sendo $\square ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, precisamos mostrar que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são ângulo retos.

Como os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são perpendiculares ao segmento \overline{AD} , então, pelo teorema 4.10.1, os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos.

Desta forma, pelo teorema 4.12.1, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACD$ são alternos internos congruentes, isto é, $\angle BAC \cong \angle ACD$ **(1.3.1)**.

Considerando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$, como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\angle BAC \cong \angle ACD$ **(1.3.1)** e \overline{AC} é um lado comum aos dois triângulos, pelo postulado 4.8.1, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ são congruentes, isto é, $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ **(1.3.2)**.

Segue-se que os lados e os ângulos destes triângulos são congruentes, isto é, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\angle ADC \cong \angle ABC$ e $\angle ACB \cong \angle CAD$.

Como o ângulo $\angle ADC$ é um ângulo reto, então, por **(1.3.2)**, o ângulo $\angle ABC$ também é reto. **(1.3.3)**

Como, pelo teorema 1.2.3, os ângulos da base superior de um quadrilátero de Saccheri são congruentes, isto é, $\angle ABC \cong \angle BCD$, por **(1.3.3)**, temos que o ângulo $\angle BCD$ também é reto, concluindo a prova.

A seguir, definiremos trapézio:

Definição 1.3.1: Um quadrilátero $\square ABCD$ que possui pelo menos um par de lados opostos paralelos é chamado de trapézio.

A figura 1.3.2 exibe uma representação geométrica de três trapézios distintos.

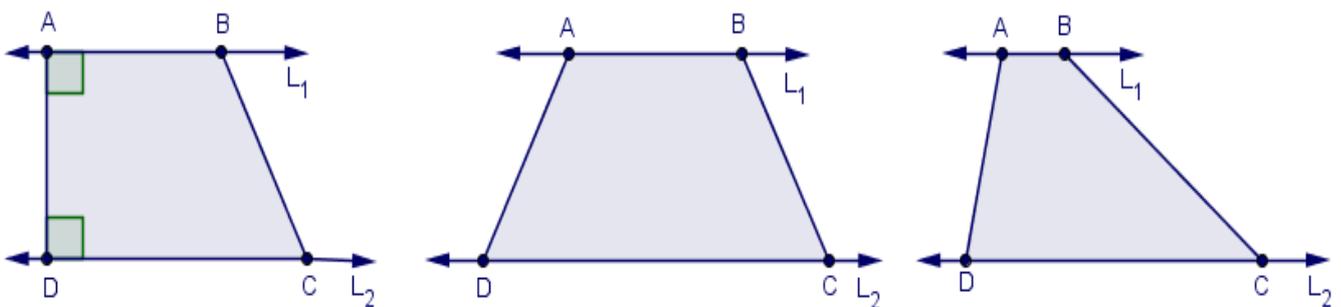


Figura 1.3.2 – Trapézios $ABCD$

Em todas as representações anteriores, a reta L_1 , que contém o segmento \overline{AB} , é paralela a reta L_2 , que contém o segmento \overline{DC} .

Os segmentos paralelos do trapézio $\square ABCD$ são chamados de bases do trapézio.

A seguir, definiremos paralelogramo:

Definição 1.3.2: Se ambos os pares de lados opostos de um quadrilátero $\square ABCD$ são paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

A figura 1.3.3 exibe uma representação geométrica de um paralelogramo.

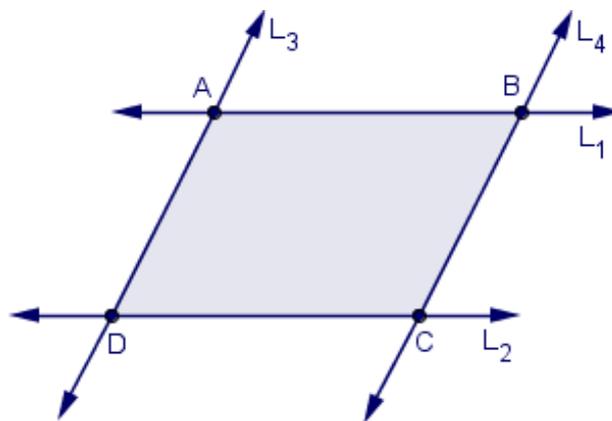


Figura 1.3.3 – Paralelogramo $ABCD$

A reta L_1 , que contém o segmento \overline{AB} , é paralela a reta L_2 , que contém o segmento \overline{DC} .

Da mesma forma, a reta L_3 , que contém o segmento \overline{DA} , é paralela a reta L_4 , que contém o segmento \overline{CB} .

Os segmentos \overline{AB} , \overline{CB} , \overline{DC} e \overline{DA} são chamados de lados do paralelogramo $ABCD$.

A seguir, definiremos losango:

Definição 1.3.3: Se dois lados adjacentes de um paralelogramo $\square ABCD$ são congruentes, então o quadrilátero é um losango.

A figura 1.3.4 exibe uma representação geométrica de um losango.

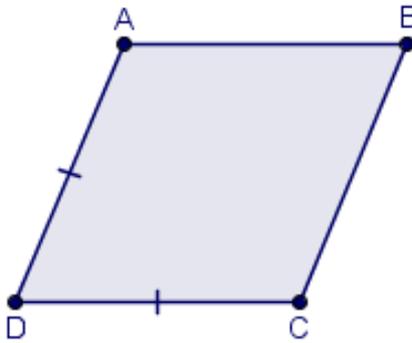


Figura 1.3.4 – Losango $ABCD$

O lado \overline{AB} é congruente ao lado \overline{DC} , assim, todos os lados do paralelogramo são congruentes.

A seguir, continuaremos apresentando algumas propriedades dos quadriláteros convexos:

Teorema 1.3.2: A diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes.

A figura 1.3.5 exibe uma representação geométrica do teorema 1.3.2.

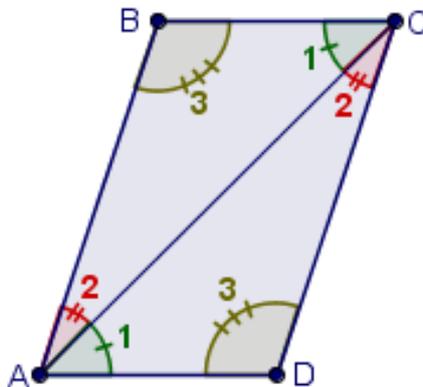


Figura 1.3.5 – Triângulos Congruentes

Prova: Sendo o quadrilátero $\square ABCD$ um paralelogramo, precisamos mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

Como os lados \overline{AD} e \overline{BC} são paralelos, então, a diagonal \overline{AC} é uma transversal dos segmentos \overline{AD} e \overline{BC} . Logo, os ângulos $\angle DAC$ e $\angle BCA$ são alternos internos e, pelo teorema 4.12.1, são congruentes, isto é, $\angle DAC \cong \angle BCA$ (**1.3.4**).

Analogamente, como os lados \overline{AB} e \overline{DC} são paralelos, então, a diagonal \overline{AC} é uma transversal dos segmentos \overline{AB} e \overline{DC} . Logo, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACD$ são alternos internos e, pelo teorema 4.12.1, são congruentes, isto é, $\angle BAC \cong \angle ACD$ **(1.3.5)**.

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$ possuem a diagonal \overline{AC} em comum, e $\angle DAC \cong \angle BCA$ **(1.3.4)** e $\angle BAC \cong \angle ACD$ **(1.3.5)**, pelo teorema 4.8.2, os triângulos são congruentes, isto é, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, concluindo a prova.

Teorema 1.3.3: Em um paralelogramo, cada par de lados opostos são congruentes.

A figura 1.3.6 exibe uma representação geométrica do teorema 1.3.3.

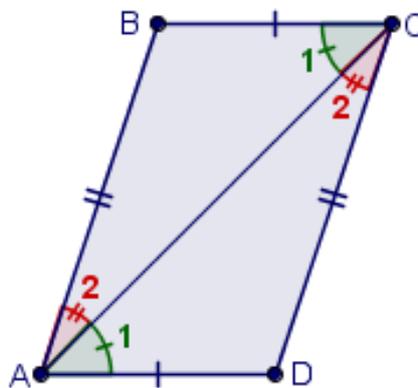


Figura 1.3.6 – Lados Opostos Congruentes

Prova: Sendo o quadrilátero $\square ABCD$ um paralelogramo, precisamos mostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.

Como os segmentos \overline{BC} e \overline{DA} são paralelos, pelo teorema 4.12.1, os ângulos $\angle BCA$ e $\angle DAC$ são alternos internos congruentes, isto é, $\angle BCA \cong \angle DAC$.

Como sabemos pelo teorema 1.3.2, a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes, isto é, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, em relação à correspondência $ABC \leftrightarrow CDA$.

Assim, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{DA} \cong \overline{BC}$.

Portanto, em um paralelogramo, cada par de lados opostos são congruentes, concluindo a prova.

Uma consequência imediata deste teorema é que um losango é um quadrilátero cujos lados são congruentes.

Teorema 1.3.4: Todo trapézio é um quadrilátero convexo.

Prova: Sendo o quadrilátero $\square ABCD$ um trapézio com $\overline{AD} // \overline{BC}$, precisamos mostrar que os pontos A e B estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{CD} , os pontos B e C estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AD} , os pontos C e D estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} e os pontos A e D estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} .

A figura 1.3.7 exibe uma representação geométrica do teorema 1.3.4.

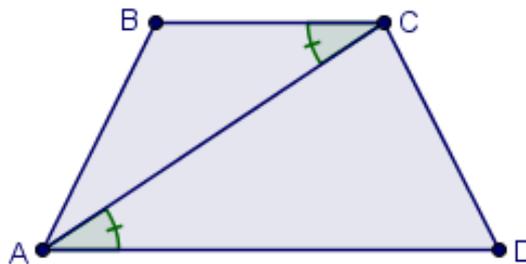


Figura 1.3.7 – Todo Trapézio é Convexo

Como $\overline{AD} // \overline{BC}$ então os pontos A e D estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} e os pontos B e C estão num mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AD} .

Como $\overline{AD} // \overline{BC}$ e \overleftrightarrow{AC} é uma transversal comum, pelo teorema 4.12.1, os ângulos $\angle CAD$ e $\angle ACB$ são ângulos alternos internos congruentes, isto é, $\angle CAD \cong \angle ACB$. **(1.3.6)**

Supondo, por absurdo, que os pontos A e B estão de lados opostos da reta \overleftrightarrow{CD} . Assim, como $\square ABCD$ é um quadrilátero, pode ocorrer:

$$(i) \exists X \in \overleftrightarrow{CD} \text{ com } X - C - D$$

$$(ii) \exists X \in \overleftrightarrow{CD} \text{ com } C - D - X$$

O caso (ii) é análogo ao caso (i).

Analisemos o caso (i).

A figura 1.3.8 exibe uma representação geométrica do teorema 1.3.4.

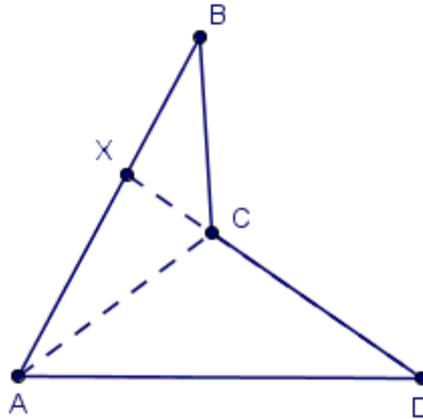


Figura 1.3.8 – Trapézio cujos pontos A e B estão de lados opostos da reta \overleftrightarrow{CD}

Como A , C e D não são colineares, pois $\square ABCD$ é um quadrilátero, então podemos considerar o triângulo $\triangle ACD$.

Como $X - C - D$ então o ângulo $\angle ACX$ é externo ao triângulo $\triangle ACD$. Logo, pelo teorema 4.9.1, temos que $\angle ACX > \angle CAD$ **(1.3.7)**.

Além disso, como $A - X - B$, $X \in \overleftrightarrow{CD}$, e pontos A e B estão de lados opostos da reta \overleftrightarrow{CD} , então, pelo teorema 4.6.6, o ponto X pertence ao interior do ângulo $\angle ACB$. Assim, pelo postulado 4.7.1, $m\angle ACX + m\angle XCB = m\angle ACB$ **(1.3.8)**.

Assim, por **(1.3.7)** e **(1.3.8)**, temos:

$$m\angle CAD < m\angle ACX < m\angle ACB \Rightarrow m\angle CAD < m\angle ACB.$$

Isto é um absurdo porque $\angle CAD \cong \angle ACB$, por **(1.3.6)**.

Portanto, os pontos A e B estão no mesmo lado que a reta \overleftrightarrow{CD} .

Analogamente, C e D estão no mesmo lado que a reta \overleftrightarrow{AB} , concluindo a prova.

CAPÍTULO 2 - QUADRILÁTEROS PIPAS

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros pipas.

2.1 Quadriláteros Pipas

Nesta seção estudaremos os chamados quadriláteros pipas.

Os resultados obtidos nesta seção dependem do Postulado das Paralelas.

Começaremos definindo quadrilátero pipa:

Definição 2.1.1: Um quadrilátero convexo que tem dois pares de lados consecutivos congruentes é chamado de quadrilátero pipa.

A figura 2.1.1 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero pipa e de seus lados.

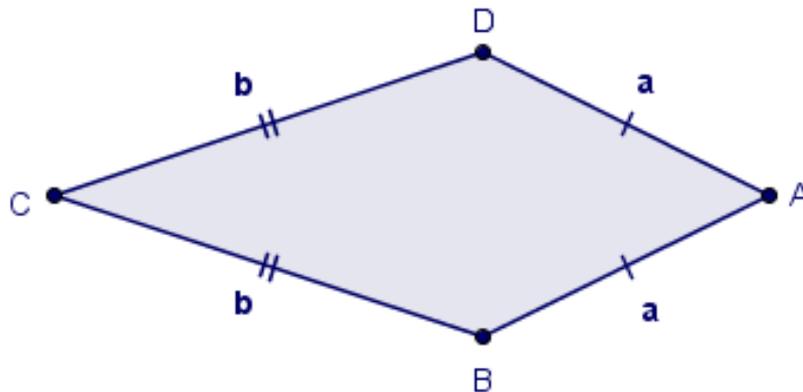


Figura 2.1.1 – Quadrilátero Pipa

A seguir, apresentaremos uma proposição sobre as diagonais dos quadriláteros pipas:

Proposição 2.1.1: As diagonais do quadrilátero pipa são perpendiculares entre si.

A figura 2.1.2 exibe uma representação geométrica da proposição 2.1.1.

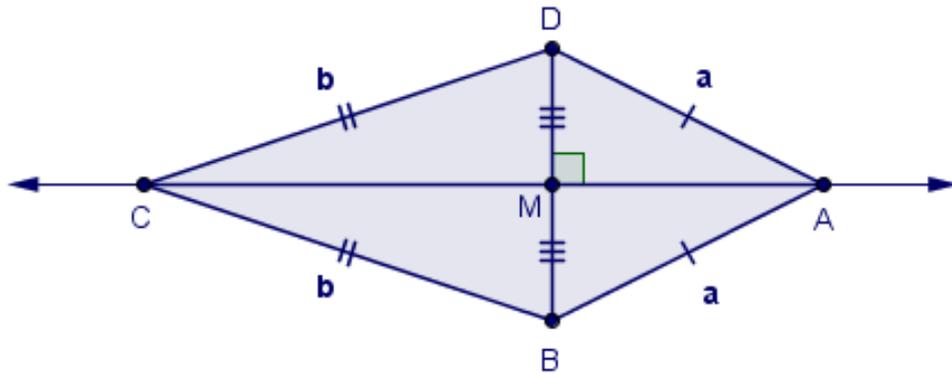


Figura 2.1.2 – Diagonais de um Quadrilátero Pipa

Demonstração: Sendo o quadrilátero $\square ABCD$ um quadrilátero pipa, precisamos mostrar que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Como existe uma única reta que passa pelos pontos A e C , e como, pela definição 4.16.1, A e C pertencem à mediatriz do segmento \overline{BD} , então, a reta \overleftrightarrow{AC} é a mediatriz do segmento \overline{BD} , isto é, $\overleftrightarrow{AC} = mtz(\overline{BD})$.

Logo, pela proposição 4.16.1, o segmento \overline{AC} é perpendicular ao segmento \overline{BD} e passa pelo seu ponto médio M .

Proposição 2.1.2: Seja $\square ABCD$ um quadrilátero pipa com $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ e $\overline{CB} \cong \overline{CD}$. Então, $\angle ADC \cong \angle ABC$.

A figura 2.1.3 exibe uma representação geométrica da proposição 2.1.2.

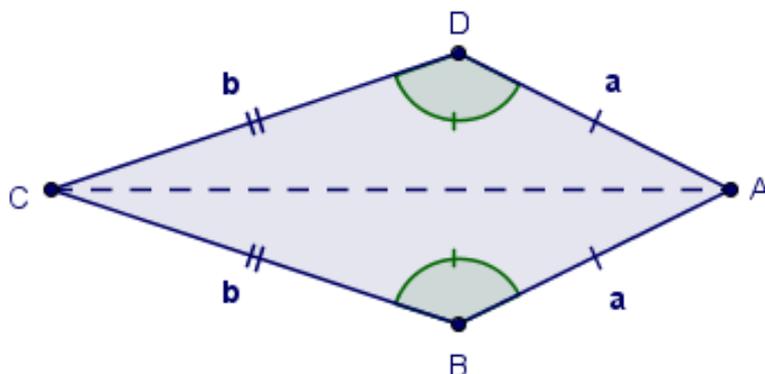


Figura 2.1.3 – Ângulos Opostos Congruentes de um Quadrilátero Pipa

Demonstração: Considerando os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABC$, sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, pois o quadrilátero $\square ABCD$ é um quadrilátero pipa, e como a diagonal \overline{AC} é

comum aos dois triângulos, pelo teorema 4.8.3, os triângulos ΔADC e ΔABC são congruentes, isto é, $\Delta ADC \cong \Delta ABC$.

Segue-se que os ângulos destes triângulos são congruentes, isto é, $\angle ADC \cong \angle ABC$.

A seguir, determinaremos um quadrilátero pipa formado pelas bissetrizes internas de um trapézio isósceles:

Proposição 2.1.3: Considerando um trapézio isósceles não retângulo, o quadrilátero determinado pelas bissetrizes de seus ângulos internos é um quadrilátero pipa.

A figura 2.1.4 exibe uma representação geométrica da proposição 2.1.3.

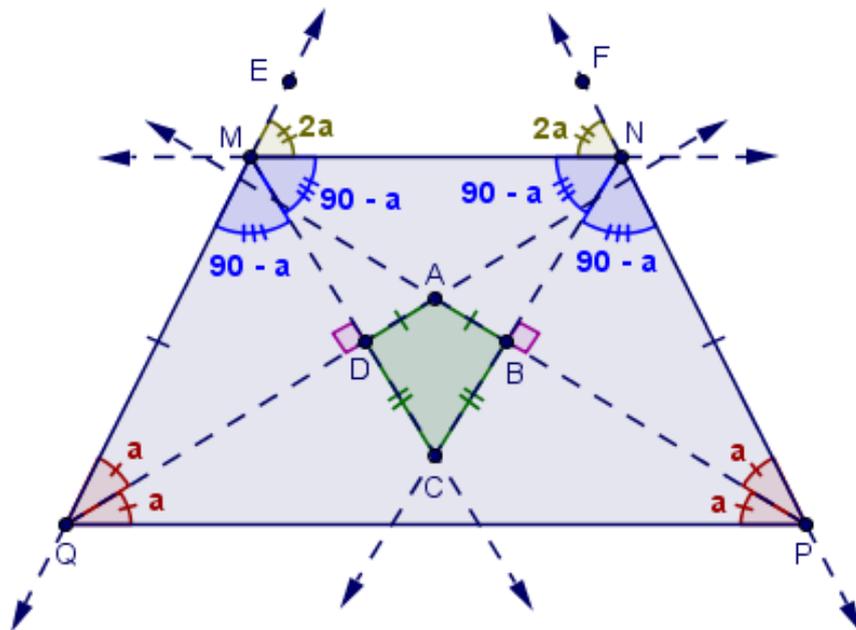


Figura 2.1.4 – Quadrilátero Pipa formado por um Trapézio Isósceles

Prova: Considerando um trapézio isósceles $\square MNPQ$ de lados congruentes \overline{MQ} e \overline{NP} , e suas bissetrizes internas, mostraremos que existe um quadrilátero $\square ABCD$ formado por suas bissetrizes onde $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ e $\overline{CD} \cong \overline{CB}$.

Como o quadrilátero $\square MNPQ$ é um trapézio isósceles, com $\overline{MQ} \cong \overline{NP}$ (consequência do critério cateto-hipotenusa de congruência), então os ângulos $\angle MQP$ e $\angle NPQ$ são congruentes, isto é, $\angle MQP \cong \angle NPQ$. Vamos considerar a medida angular desses ângulos por $m\angle MQP = m\angle NPQ = 2a$ (2.1.1).

Sejam A , B , C e D as intersecções das bissetrizes dos ângulos $\angle MQP$ com $\angle NPQ$, $\angle MNP$ com $\angle NPQ$, $\angle MNP$ com $\angle NMQ$, respectivamente. A existência dos pontos A , B , C e D é garantida pela natureza do trapézio isósceles e pelo fato de que a é um ângulo agudo.

Como o raio \overrightarrow{QD} é a bissetriz do ângulo $\angle MQP$, então, os ângulos $\angle DQM$ e $\angle PQD$ são congruentes, isto é, $\angle DQM \cong \angle PQD$, de modo que $m\angle DQM = m\angle PQD = a$ **(2.1.2)**.

Sejam E e F pontos tais que $Q - M - E$ e $P - N - F$.

Como o quadrilátero $\square MNPQ$ é um trapézio isósceles, as bases \overline{MN} e \overline{QP} são paralelas, e \overline{MQ} é uma transversal comum. Pelo teorema 4.12.2, os ângulos $\angle EMN$ e $\angle MQP$ são ângulos correspondentes congruentes, isto é, $\angle EMN \cong \angle MQP$.

Logo, $m\angle EMN = m\angle MQP = 2a$ **(2.1.3)**.

Como os raios \overrightarrow{MQ} e \overrightarrow{ME} são opostos, e sendo \overrightarrow{MN} um terceiro raio, então, pela definição 4.7.2, os ângulos $\angle EMN$ e $\angle NMQ$ formam um par linear. Pelo postulado 4.7.2, se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas angulares de dois ângulos é 180, isto é, $m\angle EMN + m\angle NMQ = 180$.

Como, por **(2.1.3)**, $m\angle EMN = 2a$, temos que $2a + m\angle NMQ = 180$.

Logo, $m\angle NMQ = 180 - 2a$.

Como o raio \overrightarrow{MD} é a bissetriz do ângulo $\angle NMQ$, então, o ângulo $\angle DMQ$ mede metade do ângulo $\angle NMQ$, isto é, $m\angle DMQ = 90 - a$ **(2.1.4)**.

Como, pelo teorema 4.12.3, $m\angle MDQ + m\angle DQM + m\angle DMQ = 180$.

Logo, por **(2.1.2)** e **(2.1.4)**, temos $m\angle MDQ + a + 90 - a = 180$.

Logo, $m\angle MDQ = 90$, isto é, o ângulo $\angle MDQ$ é reto.

Como o raio \overrightarrow{PB} é a bissetriz do ângulo $\angle NPQ$, então, os ângulos $\angle NPB$ e $\angle QPB$ são congruentes, isto é, $\angle NPB \cong \angle QPB$. Vamos considerar a medida angular desses ângulos por $m\angle NPB = m\angle QPB = a$ **(2.1.5)**.

Como o quadrilátero $\square MNPQ$ é um trapézio isósceles, as bases \overline{MN} e \overline{QP} são paralelas, e \overline{NP} é uma transversal comum, pelo teorema 4.12.2, os ângulos $\angle FNM$ e $\angle NPQ$ são ângulos correspondentes congruentes, isto é, $\angle FNM \cong \angle NPQ$.

Logo, $m\angle FNM = m\angle NPQ = 2a$ **(2.1.6)**.

Como os raios \overline{NP} e \overline{NF} são opostos, e sendo \overline{NM} um terceiro raio, então, pela definição 4.7.2, os ângulos $\angle FNM$ e $\angle MNP$ formam de par linear. Pelo postulado 4.7.2, se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares, ou seja, a soma das medidas angulares de dois ângulos é 180, isto é, $m\angle FNM + m\angle MNP = 180$.

Como, por **(2.1.6)**, $m\angle FNM = 2a$, temos que $2a + m\angle MNP = 180$.

Logo, $m\angle MNP = 180 - 2a$.

Como o raio \overline{NB} é a bissetriz do ângulo $\angle MNP$, então, o ângulo $\angle BNP$ mede metade do ângulo $\angle MNP$, isto é, $m\angle BNP = 90 - a$ **(2.1.7)**.

Como, pelo teorema 4.12.3, $m\angle NBP + m\angle BPN + m\angle BNP = 180$.

Logo, por **(2.1.5)** e **(2.1.7)**, temos $m\angle NBP + a + 90 - a = 180$.

Logo, $m\angle NBP = 90$, isto é, o ângulo $\angle NBP$ é reto.

Por **(2.1.1)**, **(2.1.2)** e **(2.1.5)**, os ângulos $\angle MQD$ e $\angle NPB$ são congruentes **(2.1.8)**.

Considerando os triângulos $\triangle MDQ$ e $\triangle NBP$, como $\overline{MQ} \cong \overline{NP}$, $\angle MQD \cong \angle NPB$ **(2.1.8)** e $\angle DMQ \cong \angle BNP$, então, pelo teorema 4.8.2, os triângulos $\triangle MDQ$ e $\triangle NBP$ são congruentes, isto é, $\triangle MDQ \cong \triangle NBP$.

Segue-se que os lados destes triângulos são congruentes, então, os catetos \overline{QD} e \overline{PB} são congruentes e os catetos \overline{MD} e \overline{NB} também são congruentes, isto é, $\overline{QD} \cong \overline{PB}$ e $\overline{MD} \cong \overline{NB}$.

Como A é equidistante de Q e P , pois os ângulos da base do triângulo $\triangle PAQ$ isósceles são congruentes, então $\overline{AQ} \cong \overline{AP}$. Então $AD = AQ - QD = AP - PB = AB$.

Logo, os segmentos \overline{AD} e \overline{AB} são congruentes, isto é, $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.

Como C é equidistante de M e N , pois o triângulo ΔMCN é isósceles, então $\overline{CM} \cong \overline{CN}$. Então $CD = CM - MD = CN - BN = CB$.

Logo, os segmentos \overline{CD} e \overline{CB} são congruentes, isto é, $\overline{CD} \cong \overline{CB}$.

Portanto, como $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ e $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. Pela definição 2.1.1, o quadrilátero $\square ABCD$ é um quadrilátero pipa.

A seguir, determinaremos um quadrilátero pipa formado pelas bissetrizes internas de um retângulo:

Corolário 2.1.1: Dado um retângulo, o quadrilátero determinado pelas bissetrizes de seus ângulos internos é um quadrilátero pipa que possui todos os lados congruentes.

A figura 2.1.5 exibe uma representação geométrica do corolário 2.1.1.

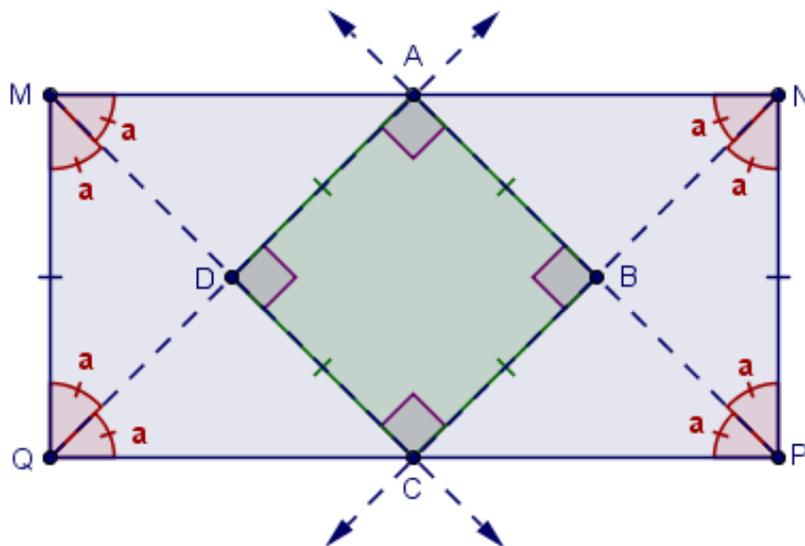


Figura 2.1.5 – Quadrilátero Pipa formado por um Retângulo

Prova: Considerando um retângulo $\square MNPQ$ e suas bissetrizes internas, precisamos mostrar que existe um quadrilátero $\square ABCD$ formado pelas bissetrizes dos ângulos internos do retângulo $\square MNPQ$, onde $\overline{AD} \cong \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{CB}$.

A prova é análoga a prova da proposição 2.1.3, porém, neste caso, os catetos \overline{QD} e \overline{MD} são congruentes, logo, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ e os catetos \overline{PB} e \overline{NB} são congruentes, logo, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. Portanto, $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{CB}$, assim, o quadrilátero pipa possui todos os lados congruentes.

CAPÍTULO 3 - QUADRILÁTEROS TANGENCIAIS

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos da geometria dos quadriláteros tangenciais.

3.1 Quadriláteros Tangenciais que são Pipas

Nesta seção estudaremos os chamados quadriláteros tangenciais e seus principais elementos.

Os resultados obtidos nesta seção dependem do Postulado das Paralelas.

Começaremos definindo quadrilátero tangencial:

Definição 3.1.1: Um quadrilátero tangencial é um quadrilátero cujos lados são tangentes a uma circunferência, ou seja, é um quadrilátero que possui uma circunferência inscrita.

A figura 3.1.1 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero tangencial, de seus lados e de suas diagonais.

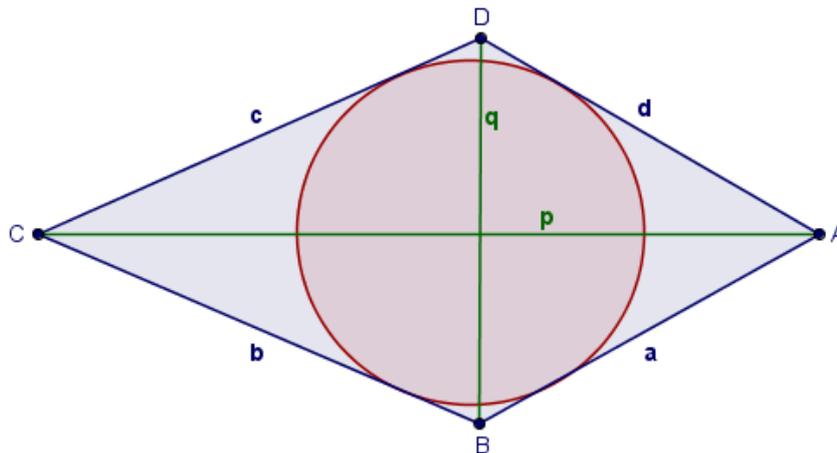


Figura 3.1.1 – Quadrilátero Tangencial

Seguem abaixo alguns elementos presentes em um quadrilátero tangencial:

Definição 3.1.2: Sejam $\square ABCD$ um quadrilátero tangencial e \mathcal{C} a circunferência inscrita neste quadrilátero. Uma corda tangente é um segmento de reta que liga dois pontos de tangência de \mathcal{C} ao quadrilátero $\square ABCD$, que pertencem a lados opostos do quadrilátero.

A figura 3.1.2 exibe uma representação geométrica das cordas tangentes de um quadrilátero tangencial.

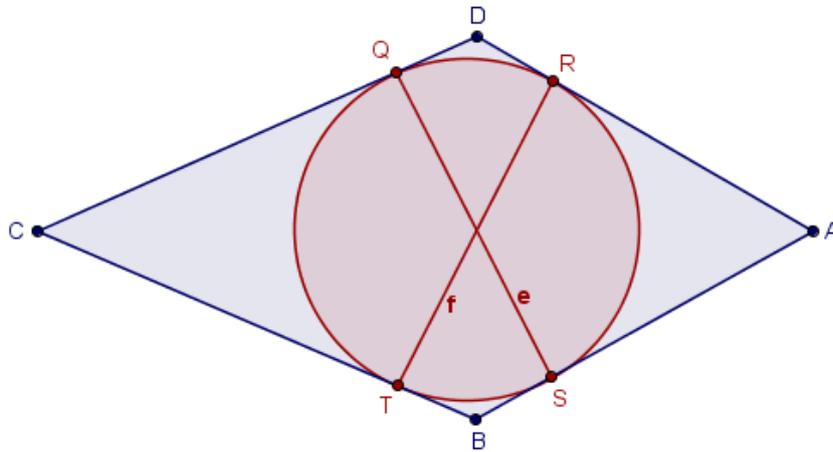


Figura 3.1.2 – Cordas Tangentes: \overline{RT} e \overline{QS}

Definição 3.1.3: Os comprimentos tangentes são as distâncias a partir dos quatro vértices aos pontos de tangência de \mathcal{C} ao quadrilátero $\square ABCD$.

A figura 3.1.3 exibe uma representação geométrica dos comprimentos tangentes de um quadrilátero tangencial.

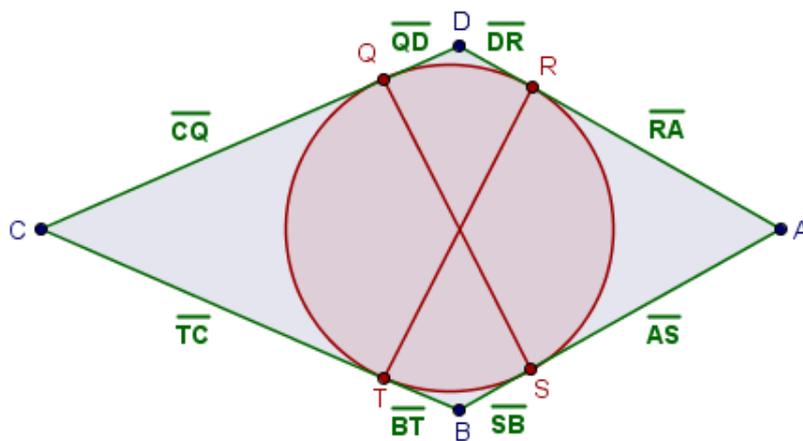


Figura 3.1.3 – Comprimentos Tangentes: \overline{CQ} , \overline{QD} , \overline{DR} , \overline{RA} , \overline{AS} , \overline{SB} , \overline{BT} e \overline{TC}

Definição 3.1.4: As bimedias de um quadrilátero são os segmentos de reta que ligam os pontos médios de dois lados opostos do quadrilátero.

A figura 3.1.4 exibe uma representação geométrica das bimedias de um quadrilátero tangencial.

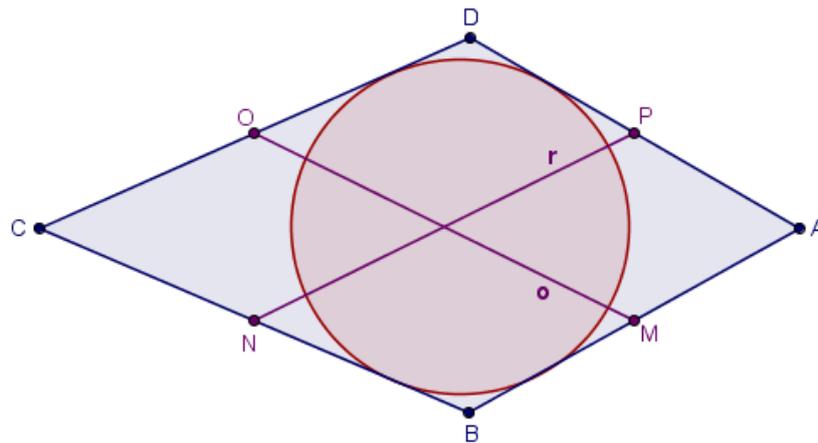


Figura 3.1.4 – Bimedias: \overline{PN} e \overline{MQ}

A seguir, apresentaremos algumas propriedades sobre os quadriláteros tangenciais:

Teorema 3.1.1: Teorema de Pitot. Seja $\square ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Então, o quadrilátero $\square ABCD$ é tangencial se, e somente se, $a + c = b + d$.

Prova:

(\Rightarrow) Suponha que o quadrilátero $\square ABCD$ seja tangencial. Sejam \mathcal{C} a circunferência inscrita ao quadrilátero e S, T, Q, R , os pontos de tangência de \mathcal{C} aos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente.

A figura 3.1.5 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero tangencial, seus lados e seus comprimentos tangentes.

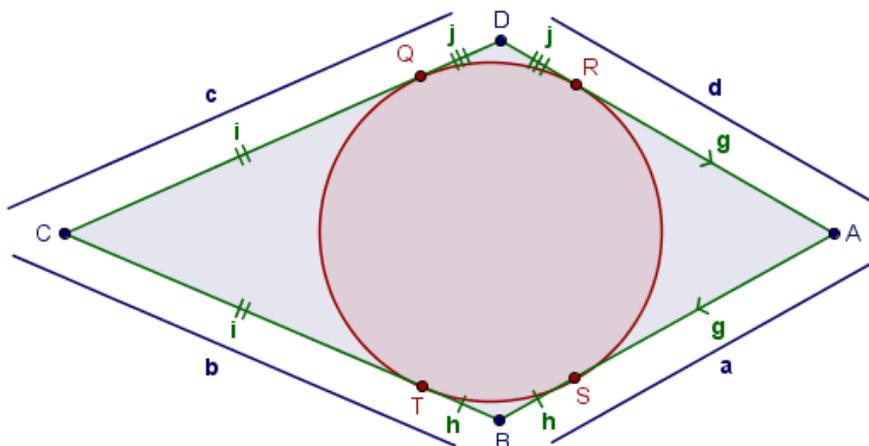


Figura 3.1.5 – Quadrilátero Tangencial, Lados e Comprimentos Tangentes

Pela proposição 4.16.3, como \overline{AR} e \overline{AS} são tangentes a \mathcal{C} , temos que $AR = AS = g \in \mathbb{R}$.

Analogamente, como \overline{BT} e \overline{BS} são tangentes a \mathcal{C} , temos que $BR = BS = h$, como \overline{CT} e \overline{CQ} são tangentes a \mathcal{C} , temos que $CT = CQ = i$, e como \overline{DQ} e \overline{DR} são tangentes a \mathcal{C} , temos que $DQ = DR = j$.

$$\text{Assim,} \quad a = AB = AS + BS \Leftrightarrow a = g + h$$

$$b = BC = BT + CT \Leftrightarrow b = h + i$$

$$c = CD = CQ + DQ \Leftrightarrow c = i + j$$

$$d = AD = AR + DR \Leftrightarrow d = g + j$$

$$\text{Logo,} \quad a + c = (g + h) + (i + j) \Leftrightarrow a + c = g + h + i + j$$

$$b + d = (h + i) + (g + j) \Leftrightarrow b + d = g + h + i + j$$

Portanto, $\boxed{a + c = b + d}$.

(\Leftarrow) Primeiramente, mostraremos que um quadrilátero pipa é tangencial. Para isto, suponha que $a = d$ e $b = c$.

A figura 3.1.6 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero pipa e suas bissetrizes internas.

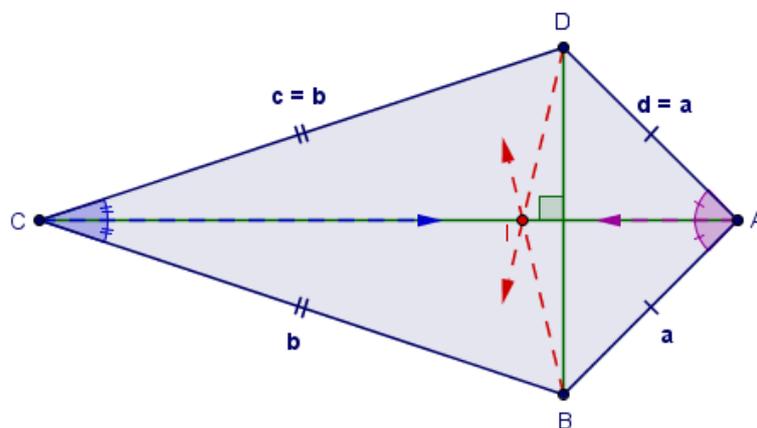


Figura 3.1.6 – Quadrilátero Pipa e suas Bissetrizes

Neste caso, a diagonal \overline{BD} divide o quadrilátero $\square ABCD$ em dois triângulos isósceles $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$. Desta forma, a diagonal \overline{AC} é também bissetriz dos ângulos

$\angle ADB$ e $\angle CDB$, de modo que o incentro I procurado pertence à maior diagonal. Pelo teorema 2.1.2, temos que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são congruentes. Consequentemente, as bissetrizes de $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são concorrentes em um ponto sobre a diagonal \overline{AC} , que é o centro da circunferência inscrita ao quadrilátero $\square ABCD$.

Agora, suponha que o quadrilátero $\square ABCD$ não seja pipa. Então, $d > c$ ou $c > d$. Suponha que $d > c$. Como, por hipótese, $a + c = b + d$, isto implica que $a > b$.

A figura 3.1.7 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero pipa e suas bissetrizes internas.

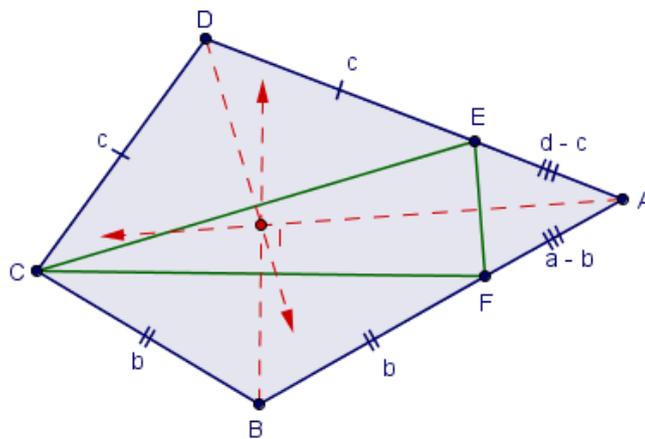


Figura 3.1.7 – Quadrilátero que não é Pipa

Neste caso, existem pontos $E \in \overline{AD}$ e $F \in \overline{AB}$ tais que $ED = c$ e $FB = b$. Então, $a + c = b + d$ pode ser reescrita como $AF + FB + c = b + AE + ED$, de onde temos que $AE = AF$. Consequentemente, os triângulos $\triangle CBF$, $\triangle EDC$ e $\triangle FAE$ são isósceles, de modo que as bissetrizes dos ângulos $\angle CBF$, $\angle EDC$ e $\angle FAE$ são perpendiculares às bases \overline{CF} , \overline{CE} e \overline{FE} , respectivamente, sendo, portanto, concorrentes em um ponto I . Como I é encontro das bissetrizes dos ângulos formados entre os quatro lados do quadrilátero $\square ABCD$, temos que I equidista de tais lados, sendo assim o incentro procurado.

Teorema 3.1.2: A medida das cordas tangentes e e f , em um quadrilátero tangencial são, respectivamente, $e = \frac{2(ihg+hgj+gji+jih)}{\sqrt{ac(i+g)(h+j)}}$ e $f = \frac{2(ihg+hgj+gji+jih)}{\sqrt{bd(i+g)(h+j)}}$.

Prova: A prova do teorema 3.1.2 se encontra em [4, p.120 e 121].

Teorema 3.1.3: Teorema de Stewart. Sendo a , b e c , a medida dos lados de um triângulo, e d a medida da ceviana do lado a , isto é, a medida do segmento cujas extremidades são

A e um ponto do lado \overline{BC} . Se a ceviana divide o lado a em dois segmentos de medidas m e n , então, $b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$.

A figura 3.1.8 exibe uma representação geométrica do teorema 3.1.3.

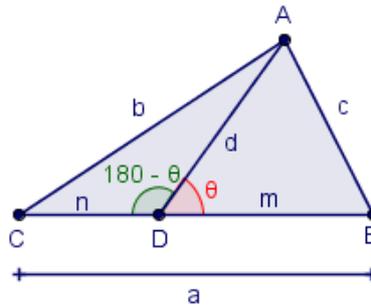


Figura 3.1.8 – Teorema de Stewart

Prova: Usando a lei dos cossenos nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$, e considerando que $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$, temos:

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd \cos(180 - \theta) = n^2 + d^2 + 2nd \cos \theta$$

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md \cos \theta$$

Multiplicando b^2 por m e c^2 por n , temos:

$$b^2m = mn^2 + md^2 + 2mnd \cos \theta$$

$$c^2n = nm^2 + nd^2 - 2mnd \cos \theta$$

Somando b^2m com c^2n , temos:

$$b^2m + c^2n = mn^2 + md^2 + 2mnd \cos \theta + nm^2 + nd^2 - 2mnd \cos \theta$$

$$b^2m + c^2n = mn^2 + nm^2 + md^2 + nd^2$$

$$b^2m + c^2n = mn(n + m) + d^2(m + n)$$

$$b^2m + c^2n = (n + m)(d^2 + mn)$$

$$\boxed{b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)}$$

Teorema 3.1.4: A medida das bimedias r e o , em um quadrilátero tangencial são, respectivamente $r = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$ e $o = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$.

Prova: Usaremos o teorema 3.1.3, porém, neste caso, como estaremos tratando de medianas e não de cevianas, a ceviana dividirá o lado em segmentos congruentes, ou seja, $m = n = \frac{a}{2}$ e a fórmula ficará:

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn) \Leftrightarrow b^2 \frac{a}{2} + c^2 \frac{a}{2} = a \left(d^2 + \frac{a}{2} \frac{a}{2} \right) \Leftrightarrow a \left(\frac{b^2 + c^2}{2} \right) = a \left(d^2 + \frac{a^2}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} = d^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = d^2 \Leftrightarrow \boxed{d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}}$$

A figura 3.1.9 exibe uma representação geométrica do teorema 3.1.4.

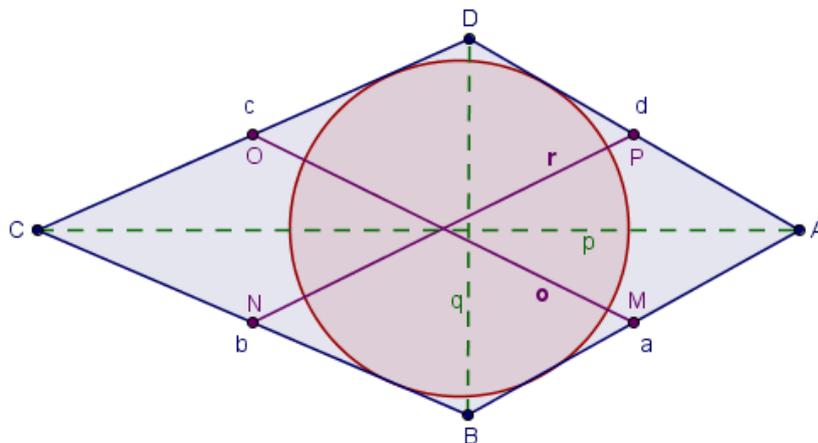


Figura 3.1.7 – Teorema das Bimedias

Considerando o triângulo ΔBPC e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$r^2 = \frac{2(PC^2 + PB^2) - b^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.1)}$$

Considerando o triângulo ΔACD e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$PC^2 = \frac{2(p^2 + c^2) - d^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.2)}$$

Considerando o triângulo ΔABD e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$PB^2 = \frac{2(q^2 + a^2) - d^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.3)}$$

Substituindo (3.1.2) e (3.1.3) em (3.1.1), temos:

$$r^2 = \frac{1}{4} \left[2 \cdot \left(\frac{2(p^2 + c^2 + q^2 + a^2) - 2d^2}{4} \right) - b^2 \right]$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \left[4 \cdot \left(\frac{p^2 + c^2 + q^2 + a^2 - d^2}{4} \right) - b^2 \right]$$

$$r^2 = \frac{1}{4} [p^2 + c^2 + q^2 + a^2 - d^2 - b^2]$$

$$r^2 = \frac{p^2 + q^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{4}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}}$$

Considerando o triângulo ΔABO e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$o^2 = \frac{2(OB^2 + OA^2) - a^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.4)}$$

Considerando o triângulo ΔBCD e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$OB^2 = \frac{2(b^2 + q^2) - c^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.5)}$$

Considerando o triângulo ΔAcD e aplicando a fórmula anterior, temos:

$$OA^2 = \frac{2(p^2 + d^2) - c^2}{4} \quad \mathbf{(3.1.6)}$$

Substituindo **(3.1.5)** e **(3.1.6)** em **(3.1.4)**, temos:

$$o^2 = \frac{1}{4} \left[2 \cdot \left(\frac{2(b^2 + q^2 + p^2 + d^2) - 2c^2}{4} \right) - a^2 \right]$$

$$o^2 = \frac{1}{4} \left[4 \cdot \left(\frac{b^2 + q^2 + p^2 + d^2 - c^2}{4} \right) - a^2 \right]$$

$$o^2 = \frac{1}{4} [b^2 + q^2 + p^2 + d^2 - c^2 - a^2]$$

$$o^2 = \frac{p^2 + q^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{4}$$

$$\boxed{o = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2}}$$

Portanto a prova está concluída.

Lema 3.1.1: Seja um quadrilátero convexo $\square ABCD$ cujas medidas dos lados são $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Sejam \overline{AC} e \overline{BD} suas diagonais, cujas medidas são $AC = p$ e $BD = q$. Então, a área S do quadrilátero $\square ABCD$, em termos de p e q , é igual a:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Prova: Como o quadrilátero $\square ABCD$ é convexo, então, pelo teorema 1.1.1, suas diagonais interceptam-se em um ponto, digamos P , tal que $A - P - C$ e $B - D - P$.

Considere $AP = p_1$, $PC = p_2$, $DP = q_1$ e $PB = q_2$ e seja θ a medida angular do ângulo $\angle DPC$, isto é, um ângulo entre as diagonais do quadrilátero.

Como os ângulos $\angle APB$ e $\angle DPC$, formam um par vertical, ou seja, seus lados formam pares de raios opostos, então, pelo teorema 4.7.1, eles são congruentes, logo, a medida angular de $\angle APB$ também é θ .

Além disto, como os ângulos $\angle APD$ e $\angle DPC$ formam um par linear, então, pelo postulado 4.7.2, eles são suplementares, de modo que a medida do ângulo $\angle APD$ é $180 - \theta$.

Como os ângulos $\angle BPC$ e $\angle APD$, formam um par vertical, ou seja, seus lados formam pares de raios opostos, então, pelo teorema 4.7.1, eles são congruentes, logo, a medida angular de $\angle BPC$ também é $180 - \theta$.

Sendo as áreas dos triângulos $\triangle APD$, $\triangle APB$, $\triangle BPC$ e $\triangle CPD$, A_1 , A_2 , A_3 e A_4 , respectivamente, e usando que $\text{sen}(180 - \theta) = \text{sen}(\theta)$, temos que:

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 q_1 \text{sen}(180 - \theta) = \frac{1}{2} p_1 q_1 \text{sen}(\theta) \quad (3.1.7)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} p_1 q_2 \text{sen}(\theta) \quad (3.1.8)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} p_2 q_2 \text{sen}(180 - \theta) = \frac{1}{2} p_2 q_2 \text{sen}(\theta) \quad (3.1.9)$$

$$A_4 = \frac{1}{2} p_2 q_1 \text{sen}(\theta) \quad (3.1.10)$$

Assim, por (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.10), temos:

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} p_1 q_1 \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} p_1 q_2 \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} p_1 (q_1 + q_2) \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} p_1 q \text{sen}(\theta) \quad (3.1.11)$$

$$A_3 + A_4 = \frac{1}{2} p_2 q_2 \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} p_2 q_1 \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} p_2 (q_1 + q_2) \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} p_2 q \text{sen}(\theta) \quad (3.1.12)$$

Finalmente, pela aditividade de áreas e por (3.1.11) e (3.1.12), a área do quadrilátero $\square ABCD$ é:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} p_1 q \text{sen}(\theta) + \frac{1}{2} p_2 q \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) q \text{sen}(\theta)$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}pq\text{sen}(\theta)$$

Consequentemente,

$$S^2 = \frac{1}{4}p^2q^2\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{4}p^2q^2(1 - \cos^2(\theta)) = \frac{1}{4}(p^2q^2 - p^2q^2\cos^2(\theta))$$

$$S^2 = \frac{1}{4}[p^2q^2 - (pq \cos(\theta))^2] \quad \mathbf{(3.1.13)}$$

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos ΔAPB , ΔBPC , ΔCPD e ΔAPD , e usando que $\cos(180 - \theta) = \cos(\theta)$, temos que:

$$a^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.14)}$$

$$b^2 = p_2^2 + q_2^2 - 2p_2q_2\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.15)}$$

$$c^2 = p_2^2 + q_1^2 - 2p_2q_1\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.16)}$$

$$d^2 = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.17)}$$

Por **(3.1.14)**, **(3.1.15)**, **(3.1.16)** e **(3.1.17)**, temos:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2\cos(\theta) + p_2^2 + q_1^2 - 2p_2q_1\cos(\theta) = \\ &= p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - 2(p_1q_2 + p_2q_1)\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.18)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 + d^2 &= p_2^2 + q_2^2 - 2p_2q_2\cos(\theta) + p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1\cos(\theta) = \\ &= p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2(p_1q_1 + p_2q_2)\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.19)} \end{aligned}$$

Assim, por, **(3.1.18)** e **(3.1.19)**, temos:

$$\begin{aligned} b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) &= 2[(p_1(q_1 + q_2) + p_2(q_1 + q_2)]\cos(\theta) = 2(p_1q + p_2q)\cos(\theta) = \\ &= 2q(p_1 + p_2)\cos(\theta) \Leftrightarrow b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2pq\cos(\theta) \quad \mathbf{(3.1.20)} \end{aligned}$$

Consequentemente, aplicando **(3.1.20)** em **(3.1.13)**, temos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}[p^2q^2 - (pq \cos(\theta))^2] = \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{4}(pq \cos(\theta))^2 = \\ &= \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{b^2 + d^2 - (a^2 + c^2)}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{4}\frac{(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}p^2q^2 - \frac{1}{16}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 \\ S^2 &= \frac{1}{16}[4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2] \end{aligned}$$

Assim,

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Teorema 3.1.5. Um quadrilátero tangencial $\square ABCD$ com lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, e diagonais $AC = p$, $BD = q$ tem a área

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}.$$

Prova: Pelo teorema 3.1.1, $a + c = b + d$. Logo,

$$(a + c)^2 = (b + d)^2$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + d^2 + 2bd$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2bd - 2ac$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(bd - ac)$$

Substituindo em $S = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$, temos:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - (2(bd - ac))^2}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - 4(bd - ac)^2}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4[p^2q^2 - (bd - ac)^2]}$$

$$S = \frac{2}{4} \sqrt{(pq)^2 - (bd - ac)^2}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \sqrt{(pq)^2 - (bd - ac)^2}}$$

Portanto a prova está concluída.

3.2. Condições para que o um quadrilátero tangencial seja um quadrilátero pipa

Nesta seção estudaremos algumas condições para que um quadrilátero tangencial seja um quadrilátero pipa.

Os resultados obtidos nesta seção dependem do Postulado das Paralelas.

Teorema 3.2.1: Considerando um quadrilátero tangencial, temos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O quadrilátero tangencial é um quadrilátero pipa.
- (ii) A área do quadrilátero tangencial é a metade do produto das medidas das suas diagonais.
- (iii) As diagonais do quadrilátero tangencial são perpendiculares.
- (iv) As cordas tangentes do quadrilátero tangencial são congruentes.
- (v) Um par de comprimentos tangentes opostos do quadrilátero tangencial é congruente.
- (vi) As bimedias do quadrilátero tangencial são congruentes.
- (vii) Os produtos das medidas das alturas em relação aos lados opostos nos triângulos não sobrepostos formados pelas diagonais do quadrilátero tangencial são iguais.
- (viii) O produto das medidas dos lados opostos do quadrilátero tangencial é igual.
- (ix) O incentro do quadrilátero tangencial encontra-se na maior diagonal.

Prova: Considerando o quadrilátero $\square ABCD$ tangencial com lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, diagonais $AC = p$ e $BD = q$, θ o ângulo entre as diagonais, comprimentos das cordas tangentes e , f e comprimentos das bimedias r e o , mostraremos que cada um dos subitens (i) a (vii) são equivalentes a (viii), em seguida, que (i) e (ix) são equivalentes.

(i) \Rightarrow (viii)

Pela definição 2.1.1, o quadrilátero pipa tem dois pares de lados consecutivos congruentes, então $a = d$ e $b = c$.

Logo, $\boxed{ac = bd}$.

Logo, o quadrilátero tangencial é um quadrilátero pipa se o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

(viii) \Rightarrow (i)

Se $ac = bd$, pelo teorema 3.1.1 $a + c = b + d$, então:

$$c(a + c) = c(b + d)$$

$$ac + c^2 = bc + cd$$

$$bd + c^2 = bc + cd$$

$$bd - bc = cd - c^2$$

$$b(d - c) = c(d - c)$$

Se $d \neq c$ então $b = c$, logo, de $a + c = b + d$ temos $a = d$ e o quadrilátero é pipa.

Se $d = c$ então $a + c = b + d$ temos $a = b$ e o quadrilátero é pipa.

Logo, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual se o quadrilátero tangencial é um quadrilátero pipa.

(ii) \Leftrightarrow (viii)

Pelo teorema 3.1.2, a área do quadrilátero $\square ABCD$ tangencial é $S = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}$.

$$\text{Assim, } S = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2} = \frac{1}{2}pq \Leftrightarrow \boxed{ac = bd}.$$

Logo, a área do quadrilátero tangencial é a metade do produto das suas diagonais se, e somente se, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

(iii) \Leftrightarrow (viii)

A área do quadrilátero convexo $ABCD$ é $S = \frac{1}{2}pq \operatorname{sen} \theta$. Pelo teorema 3.1.2, $S = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}$.

$$\text{Assim, } S = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2} = \frac{1}{2}pq \operatorname{sen} \theta.$$

$$\text{Obtemos } \boxed{ac = bd} \Leftrightarrow \boxed{\theta = 90}.$$

Logo, as diagonais do quadrilátero tangencial são perpendiculares se, e somente se, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

(iv) \Leftrightarrow (viii)

Pelo teorema 3.1.2, segue que:

$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 = \left(\frac{2(ihg+hgj+gji+jih)}{\sqrt{ac(i+g)(h+j)}} \cdot \frac{\sqrt{bd(i+g)(h+j)}}{2(ihg+hgj+gji+jih)}\right)^2$$

$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{bd(i+g)(h+j)}}{\sqrt{ac(i+g)(h+j)}}\right)^2$$

$$\left(\frac{e}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ac}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{e}{f}\right)^2 = \frac{bd}{ac}$$

$$\text{Então, } \boxed{e = f} \Leftrightarrow \boxed{ac = bd}.$$

Logo, as cordas tangentes do quadrilátero tangencial são congruentes se, e somente se, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

Considerando os comprimentos tangentes g, h, i e j do quadrilátero tangencial, de acordo com as anotações do teorema 3.1.1, $a = g + h$, $b = h + i$, $c = i + j$ e $d = j + g$.

(viii) \Rightarrow (v)

$$\text{Temos que: } \boxed{ac = bd} \Leftrightarrow (g + h)(i + j) = (h + i)(j + g) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow gj - hg - ij + ih = 0 \Leftrightarrow (j - h)(g - i) = 0,$$

o que é verdade quando (pelo menos) um par de comprimentos tangentes opostos do quadrilátero tangencial é congruente.

Logo, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual se pelo menos um par de comprimentos tangentes opostos do quadrilátero tangencial é congruente.

(v) \Rightarrow (viii)

Se $j = h$,

$$a = g + h$$

$$b = h + i$$

$$c = i + j = i + h$$

$$d = j + g = h + g$$

Então, $a = d$ e $b = c$.

Assim, $\boxed{ac = bd}$.

Analogamente para $g = i$.

Logo, um par de comprimentos tangentes opostos do quadrilátero tangencial é congruente se o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

(vi) \Leftrightarrow (viii)

Pelo teorema 3.1.4 os comprimentos das bimedias são r e o , do quadrilátero tangencial $\square ABCD$, são $r = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$ e $o = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$.

$$r = o \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = -a^2 + b^2 - c^2 + d^2$$

$$r = o \Leftrightarrow a^2 + a^2 - b^2 - b^2 + c^2 + c^2 - d^2 - d^2 = 0$$

$$r = o \Leftrightarrow 2a^2 - 2b^2 + 2c^2 - 2d^2 = 0$$

$$r = o \Leftrightarrow 2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) = 0$$

$$r = o \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

Como o quadrilátero é tangencial, então, pelo teorema 3.1.1, $a + c = b + d$.

Temos que:

$$(a + c)^2 = (b + d)^2$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + d^2 + 2bd$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2bd - 2ac,$$

Logo,

$$r = o \Leftrightarrow 2bd - 2ac = 0$$

$$r = o \Leftrightarrow 2(bd - ac) = 0$$

$$\boxed{r = o} \Leftrightarrow \boxed{ac = bd}$$

Logo, as bimedias do quadrilátero tangencial são congruentes se, e somente se, o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual.

(vii) \Leftrightarrow (viii)

Seja P o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero tangencial $\square ABCD$, que as dividem em partes w, x e y, z , e considerando as alturas dos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$, em relação aos lados a, b, c, d por h_1, h_2, h_3, h_4 respectivamente, de acordo com a figura 3.2.1.

Expressando duas vezes a área destes triângulos de duas maneiras diferentes, onde θ é o ângulo entre as diagonais, obtemos:

$$ah_1 = wy \operatorname{sen}(180 - \theta) = wy \operatorname{sen} \theta \quad (3.2.1)$$

$$bh_2 = xy \operatorname{sen} \theta \quad (3.2.2)$$

$$ch_3 = xz \operatorname{sen}(180 - \theta) = xz \operatorname{sen} \theta \quad (3.2.3)$$

$$dh_4 = wz \operatorname{sen} \theta \quad (3.2.4)$$

A figura 3.2.1 exibe uma representação geométrica das alturas dos subtriângulos de um quadrilátero tangencial.

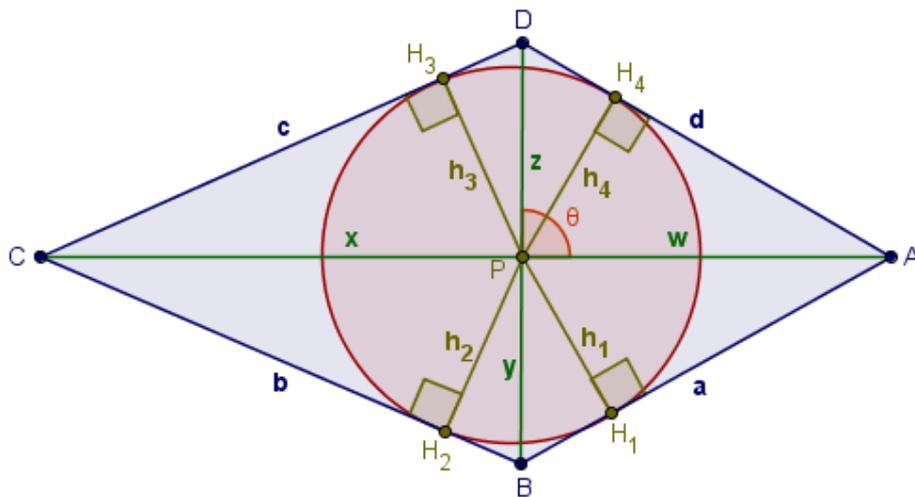


Figura 3.2.1 – Alturas dos subtriângulos h_1, h_2, h_3, h_4

Multiplicando (3.2.1) por (3.2.3) e (3.2.2) por (3.2.4), temos:

$$ach_1h_3 = wxyz \operatorname{sen}^2 \theta = bdh_2h_4.$$

Assim,

$$\boxed{h_1h_3 = h_2h_4} \Leftrightarrow \boxed{ac = bd}.$$

Logo, o produto das medidas dos lados opostos do quadrilátero tangencial é igual, se, e somente se, os produtos das medidas das alturas do quadrilátero tangencial em relação aos lados opostos nos triângulos não sobrepostos formados pelas diagonais do quadrilátero tangencial são iguais.

(i) \Rightarrow (ix)

Na prova da recíproca do teorema 3.1.1, vimos que no caso de um quadrilátero pipa o incentro encontra-se sobre a maior diagonal do quadrilátero.

(ix) \Rightarrow (i)

Como o incentro encontra-se na maior diagonal de um quadrilátero tangencial então, pelo teorema 4.8.2, esta divide o quadrilátero em dois triângulos congruentes, de modo que dois pares de lados adjacentes são congruentes.

A figura 3.2.2 exibe uma representação geométrica de um quadrilátero tangencial e de seu incentro.

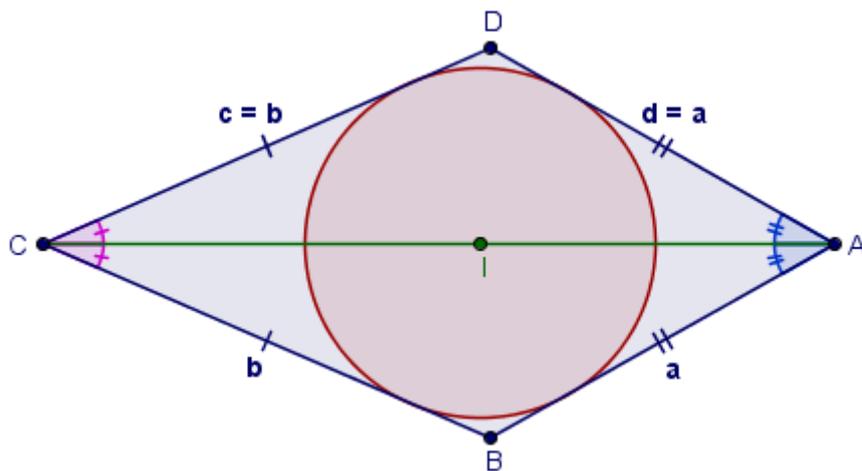


Figura 3.2.2 – O Incentro de um Quadrilátero Tangencial pertence a maior Diagonal

Portanto, a prova está concluída.

Lema 3.2.2. A circunferência inscrita no triângulo ΔABC com lados a, b, c tem o raio $r = \frac{a+b-c}{2} \tan\left(\frac{\angle BCA}{2}\right)$.

A figura 3.2.3, exibe uma representação geométrica de uma circunferência inscrita em um triângulo.

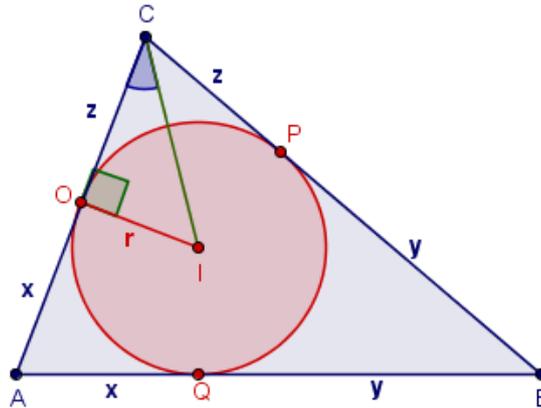


Figura 3.2.3 – Circunferência Inscrita em um Triângulo

Prova: Sendo uma circunferência inscrita no triângulo ΔABC com lados a, b, c , precisamos mostrar que o raio é $r = \frac{a+b-c}{2} \tan\left(\frac{\angle BCA}{2}\right)$.

Considerando um triângulo ΔABC com lados a, b, c que possui uma circunferência inscrita de centro I e raio r .

Sendo x, y e z , os comprimentos tangentes em cada vértice. Temos que os lados medem: $a = y + z, b = x + z$ e $c = x + y$.

$$\text{Então, } a + b - c = (y + z) + (x + z) - (x + y) = y + z + x + z - x - y = 2z.$$

$$\text{Logo, } z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Considerando o triângulo retângulo ΔCOI , onde o cateto r é o raio da circunferência inscrita que é tangente ao lado b , temos que o ângulo $\angle ICO$ mede a metade do ângulo $\angle BCA$.

$$\text{Logo, a tangente do ângulo } \angle ICO \text{ é dada por: } \tan \angle ICO = \frac{r}{z}.$$

$$\text{Assim, } \tan\left(\frac{\angle BCA}{2}\right) = \frac{r}{z} \text{ e, portanto, } r = z \tan\left(\frac{\angle BCA}{2}\right).$$

$$\text{Como } z = \frac{a+b-c}{2}, \text{ então temos que } r = \frac{a+b-c}{2} \tan\left(\frac{\angle BCA}{2}\right), \text{ concluindo a prova.}$$

Teorema 3.2.2: Considerando que as diagonais de um quadrilátero $\square ABCD$ tangencial cruzam em P e considerando os raios inscritos aos triângulos $\Delta ABP, \Delta BCP, \Delta CDP, \Delta DAP$, por r_1, r_2, r_3, r_4 , respectivamente. Então, o quadrilátero é um quadrilátero pipa se, e somente se, $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

A figura 3.2.4, exibe uma representação geométrica dos circunferências inscritas aos subtriângulos de um quadrilátero tangencial.

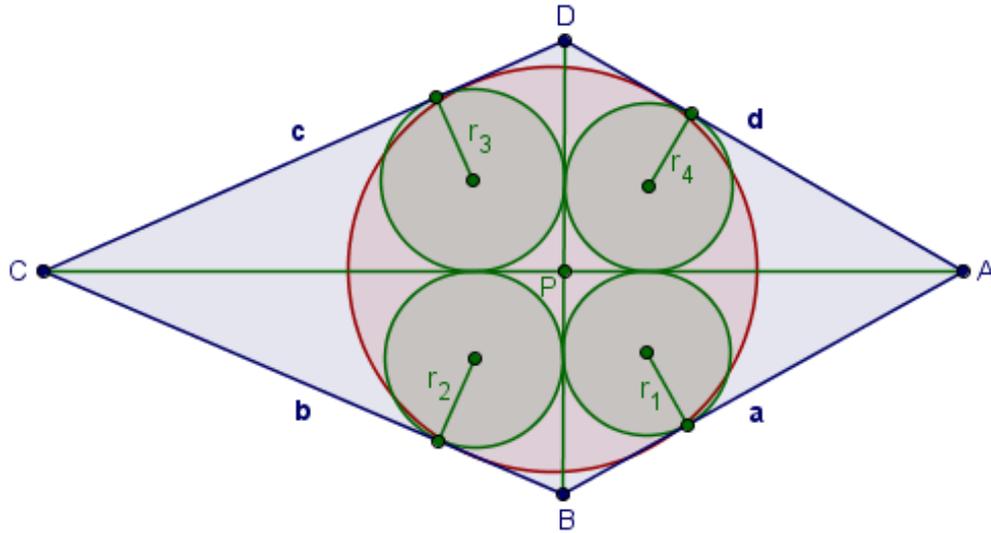


Figura 3.2.4 – Circunferências Inscritas aos subtriângulos

Prova: Vamos considerar a figura 3.2.1, sendo P o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero, que as dividem em partes w, x e y, z , e considerando as alturas dos triângulos $\Delta ABP, \Delta BCP, \Delta CDP, \Delta DAP$, em relação aos lados a, b, c, d por h_1, h_2, h_3, h_4 respectivamente. Sendo $\tan\left(\frac{180-\theta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$, onde θ é o ângulo entre as diagonais, o lema 3.2.2 resulta em:

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

$$\frac{w + y - a}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{x + z - c}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x + y - b}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{w + z - d}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(w + x + y + z - a - c) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = (w + x + y + z - b - d) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Pelo teorema 3.1.1, $a + c = b + d$, então, temos:

$$(w + x + y + z - a - c) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = (w + x + y + z - a - c) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(w + x + y + z - a - c) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - (w + x + y + z - a - c) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$(w + x + y + z - a - c) \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = 0$$

De acordo com a desigualdade triangular aplicada aos triângulos ΔABP e ΔCDP , temos que $w + y > a$ e $x + z > c$.

Logo, $w + x + y + z > a + c$.

Assim, respeitando-se as restrições para θ , temos

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = 45 \Leftrightarrow \theta = 90$$

Logo, as diagonais são perpendiculares.

De acordo com o teorema 3.2.1, **(iii)**, um quadrilátero tangencial tem diagonais perpendiculares se, e somente se, for um quadrilátero pipa, concluindo a prova.

CAPÍTULO 4 - APÊNDICE

Neste capítulo, apresentaremos uma construção para o modelo de Geometria que nos interessa nesta dissertação, de acordo com E. Moise [1].

4.1 Geometria de Incidência

Vamos considerar o espaço como um conjunto S , os pontos do espaço serão os elementos deste conjunto. Vamos também considerar uma coleção de subconjuntos de S , chamada de retas, e outra coleção de subconjuntos de S , chamada de planos. Assim, a estrutura será uma tripla $[S, L, P]$, onde os elementos de S , L e P são chamados de pontos, retas e planos, respectivamente.

A apresentação acima é equivalente a dizermos que os termos ponto, reta e plano são tomados como indefinidos.

Na matemática formal, as únicas afirmações sobre pontos, retas e planos, são as declaradas nos postulados. Informalmente, no entanto, vamos nos lembrar de possíveis representações das retas e dos planos.

A reta se estica infinitamente para longe em ambos os sentidos. As pontas de seta são usadas para indicar que a reta não termina onde a representação geométrica mostra que ela para.

A figura 4.1.1 exibe uma representação geométrica da reta, descrita acima.



Figura 4.1.1 – Reta L

O segmento de reta apresenta pontos finais no lugar das setas.

A figura 4.1.2 exibe uma representação geométrica do segmento de reta, descrito acima.



Figura 4.1.2 – Segmento de A para B

Se os pontos finais são A e B , então esta figura será chamada de segmento de A para B .

O raio é uma "reta" que se estica infinitamente longe em uma só direção.

A figura 4.1.3 exhibe uma representação geométrica do raio, descrito acima.



Figura 4.1.3 – Raio \overrightarrow{AB}

Vamos relembrar alguns postulados:

- i) Toda reta e todo plano possuem infinitos pontos. Pontos situados em uma mesma reta são chamados de pontos colineares. Pontos situados em um mesmo plano são chamados de pontos coplanares.
- ii) Dados quaisquer dois pontos diferentes, há exatamente uma única reta que os contenham.
- iii) Dados quaisquer três pontos não colineares diferentes, há exatamente um único plano que os contenham.
- iv) Se dois pontos pertencem a um plano, então a reta que os contém se situa no plano.
- v) Se dois planos se intersectam, então a sua intersecção é uma reta.

Teorema 4.1.1: Duas retas diferentes se cruzam, no máximo, em um ponto.

A prova do teorema 4.1.1 se encontra em [1,p.45].

4.2 Relação Estar-Entre

Uma das ideias mais simples em geometria é a da relação estar-entre pontos em uma reta.

A figura 4.2.1 exhibe uma representação geométrica para a relação estar-entre onde B está entre A e C , sobre a reta L .



Figura 4.2.1 – Ponto B que está entre os pontos A e C

A figura 4.2.2 exibe uma representação geométrica para a relação estar-entre onde B está entre C e A , sobre a reta L .



Figura 4.2.2 – Ponto B que está entre os pontos C e A

Definição 4.2.1: Sejam A , B e C três pontos colineares. Se $AB + BC = AC$, então B está entre A e C . Neste caso, podemos escrever $A - B - C$.

Seguem algumas propriedades básicas da relação estar-entre:

- i) Se $A - B - C$, então, $C - B - A$.
- ii) De quaisquer três pontos de uma reta, exatamente um deles está entre os outros dois.
- iii) Se $A - B - C$, então A , B e C são três pontos diferentes, de uma mesma reta.

4.3 Segmentos, Raios, Ângulos e Triângulos

Definição 4.3.1: Se A e B são dois pontos, então o segmento entre A e B é o conjunto formado pelos pontos A e B e por todos os pontos entre A e B .

A figura 4.3.1 exibe uma representação geométrica do segmento entre A e B , que pertence a reta \overleftrightarrow{AB} .



Figura 4.3.1 – Segmento \overline{AB} pertence à reta \overleftrightarrow{AB}

O símbolo para indicar o segmento entre A e B é \overline{AB} . O comprimento do segmento \overline{AB} é a distância entre os pontos A e B .

Definição 4.3.2: Se A e B são dois pontos, então o raio de A e B é o conjunto de todos os pontos C da reta \overleftrightarrow{AB} tal que A não está entre C e B . O ponto A é chamado de ponto de

extremidade do raio \overrightarrow{AB} . Ou ainda, \overrightarrow{AB} é a união do segmento \overline{AB} com o conjunto de todos os pontos de C tal que $A - B - C$.

A figura 4.3.2 exibe uma representação geométrica do raio de A e B .



Figura 4.3.2 – Raio \overrightarrow{AB} pertence à reta \overline{AB}

Como indicado, o símbolo para indicar o raio de A a B é \overrightarrow{AB} .

Definição 4.3.3: Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são dois raios que têm o mesmo ponto inicial, mas não se encontram na mesma linha, então um ângulo é a figura que representa a união destes raios.

A figura 4.3.3 exibe uma representação geométrica do ângulo formado pelos raios \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

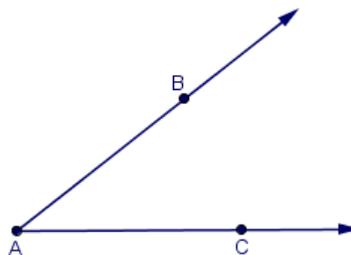


Figura 4.3.3 – Ângulo $\angle BAC$

O símbolo para indicar o ângulo formado pelos raios \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} é $\angle BAC$.

Os raios \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são chamados de lados do ângulo e o ponto A é chamado de vértice do ângulo. Sempre temos $\angle BAC = \angle CAB$.

Definição 4.3.4: Se A , B , e C são três pontos não colineares, então o conjunto $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ é chamado de triângulo.

A figura 4.3.4 exibe uma representação geométrica do triângulo formado pelos pontos A , B , e C .

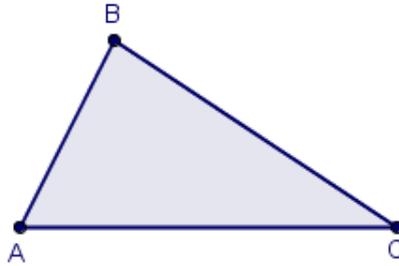


Figura 4.3.4 – Triângulo ΔABC

O símbolo para indicar o triângulo formado pelos pontos A , B , e C é ΔABC .

Os três segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são chamados de lados do triângulo e os pontos A , B , e C são os vértices do triângulo. Os ângulos do ΔABC são $\angle BAC$, $\angle ACB$ e $\angle ABC$.

Seguem alguns teoremas importantes:

Teorema 4.3.1: Se A e B são dois pontos quaisquer, então $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Teorema 4.3.2: Se C é um ponto de \overline{AB} , diferente de A , então $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Teorema 4.3.3: Se B_1 e C_1 são pontos de \overline{AB} e \overline{AC} , diferentes de A , então $\angle BAC = \angle B_1AC_1$.

A figura 4.3.5 exibe uma representação geométrica para $\angle BAC = \angle B_1AC_1$.

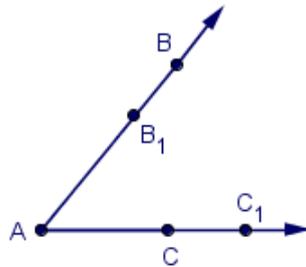


Figura 4.3.5 – Ângulo $\angle BAC$ é o mesmo que o Ângulo $\angle B_1AC_1$

Teorema 4.3.4: Se $\overline{AB} = \overline{CD}$, então os pontos A e B , são os mesmos que os pontos C e D , em alguma ordem. Ou seja, os pontos de extremidade de um segmento são unicamente determinados pelo segmento.

Teorema 4.3.5: Se $\Delta ABC = \Delta DEF$, então os pontos A , B , e C são os mesmos que os pontos D , E , e F , em alguma ordem. Ou seja, os vértices de um triângulo são unicamente determinados pelo triângulo.

4.4 Congruência de Segmentos

A ideia intuitiva de congruência, para quaisquer duas figuras em geral, é sempre a mesma. Duas figuras F e G são congruentes, se uma pode ser movida de modo a coincidir com a outra.

A figura 4.4.1 exibe uma representação geométrica de figuras congruentes.

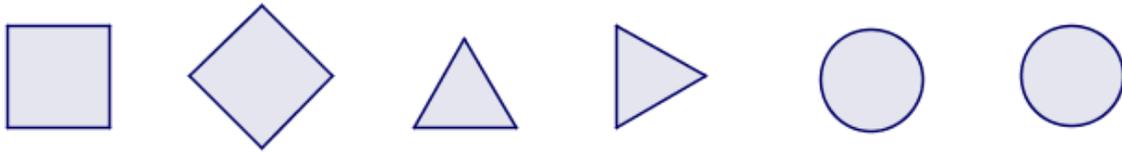


Figura 4.4.1 – Figuras Congruentes

Definição 4.4.1: Dois segmentos com o mesmo comprimento são sempre congruentes, ou seja, sendo os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , se $AB = CD$, então estes segmentos são congruentes e escrevemos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

A figura 4.4.2 exibe uma representação geométrica de dois segmentos congruentes.



Figura 4.4.2 – Segmentos Congruentes

Com base nesta definição, é fácil provar os fatos conhecidos e bastante triviais sobre congruência de segmentos. A relação \sim , definida no espaço S , é chamada de uma relação de equivalência, se garantir as seguintes condições:

- i) Reflexividade: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$, para cada \overline{AB} .
- ii) Simetria: Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, então $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.
- iii) Transitividade: Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Definição 4.4.2: Se $A - M - B$, e $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, então M é o ponto médio de \overline{AB} .

Teorema 4.4.1: Todo segmento tem exatamente um ponto médio.

A figura 4.4.3 exibe uma representação geométrica do ponto médio de um segmento.



Figura 4.4.3 – Ponto Médio M de um Segmento \overline{AB}

A prova do teorema 4.4.1 se encontra em [1,p.71].

4.5 Convexidade

Definição 4.5.1: Um conjunto A é chamado convexo, se para cada dois pontos P e Q de A , o segmento \overline{PQ} está contido em A .

A figura 4.5.1 exibe três representações geométricas de figuras convexas.

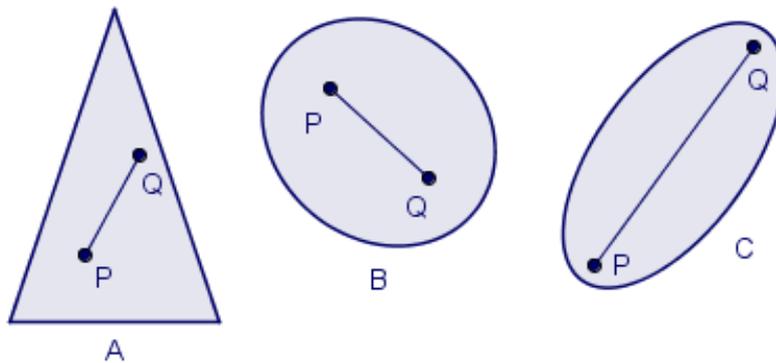


Figura 4.5.1 – Figuras Convexas

Cada um dos conjuntos A , B , e C , mostrados acima, são uma região no plano. Por exemplo, o conjunto A é a união de um triângulo com todos os pontos que se encontram no interior do mesmo.

Ilustramos a convexidade dos conjuntos A , B , e C , desenhando alguns dos segmentos \overline{PQ} .

Para mostrar que um conjunto, digamos D , não é convexo, temos que mostrar que existem dois pontos P e Q , ambos pertencentes a D , tais que o segmento \overline{PQ} não está em D .

A figura 4.5.2 exibe três representações geométricas de figuras não convexas.

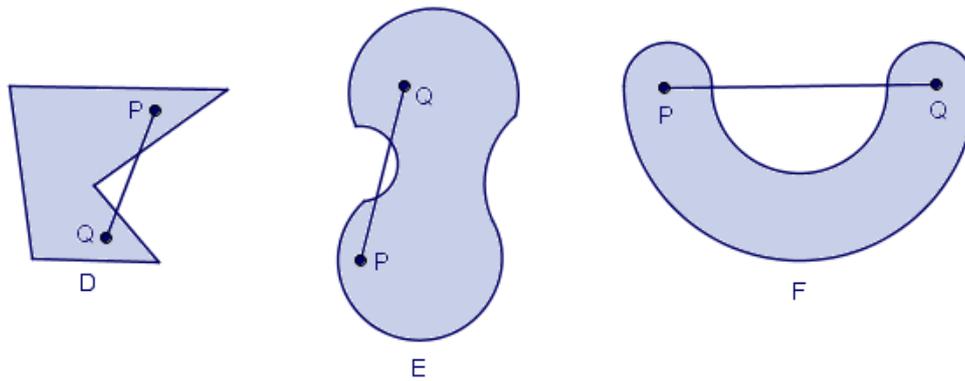


Figura 4.5.2 – Figuras Não Convexas

Um conjunto convexo pode ser "fino e pequeno", como por exemplo, cada segmento \overline{PQ} é um conjunto convexo e um conjunto com um único ponto também é convexo.

Considerando um plano E e uma reta L pertencente ao plano, as partes de E , que se encontram dos dois lados da reta L , são ambas convexas.

A figura 4.5.3 exibe uma representação geométrica de um plano E dividido, pela reta L , em dois semiplanos H_1 e H_2 .

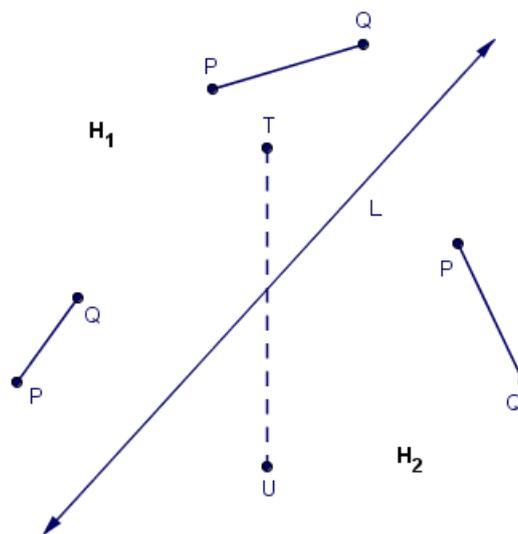


Figura 4.5.3 – Semiplanos H_1 e H_2

Definição 4.5.2: Os conjuntos H_1 e H_2 são chamados de semiplanos do plano E . Onde, H_1 é a parte do plano que se encontra em cima e à esquerda da reta L , e H_2 é a parte do plano que se encontra em baixo e à direita da reta L .

Como já foi visto, para ilustrar a convexidade de cada semiplano, basta mostrar a existência de dois pontos P e Q , ambos pertencentes ao mesmo semiplano de E , tais que o segmento \overline{PQ} também pertence ao mesmo semiplano de E .

Note-se, evidentemente, que se T pertence a H_1 e U pertence a H_2 , então, o segmento \overline{TU} sempre intersecta a linha.

Teorema 4.5.1: *O postulado de Pasch:* Dado um triângulo ΔABC , e uma reta L no mesmo plano. Se L contém um ponto E , entre A e C , então L intersecta ou \overline{AB} ou \overline{BC} .

A figura 4.5.4 exibe uma representação geométrica do postulado de Pasch.

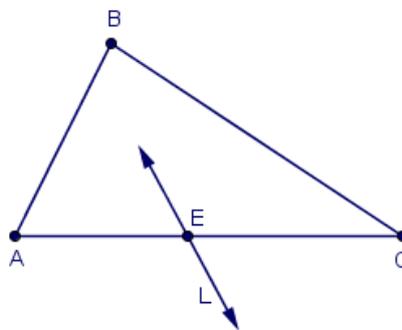


Figura 4.5.4 – O Postulado de Pasch

A prova do teorema 4.5.1 se encontra em [1,p.74].

4.6 Teoremas de Separação

Teorema 4.6.1: Se os pontos P e Q encontram-se em lados opostos da reta L , e os pontos Q e T também encontram-se em lados opostos de L , então P e T encontram-se no mesmo lado da reta L .

A figura 4.6.1 exibe uma representação geométrica do teorema 4.6.1.

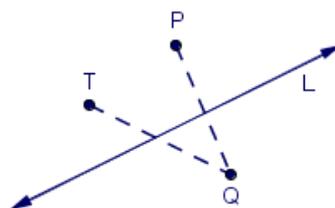


Figura 4.6.1 – Pontos de um mesmo lado de uma reta

Teorema 4.6.2: Se os pontos P e Q encontram-se em lados opostos da reta L , e os pontos Q e T encontram-se no mesmo lado de L , então P e T encontram-se em lados opostos da reta L .

A figura 4.6.2 exibe uma representação geométrica do teorema 4.6.2.

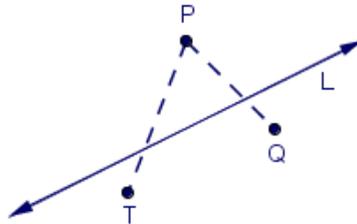


Figura 4.6.2 – Pontos de lados opostos de uma reta

Definição 4.6.1: Sejam A , B e C três pontos colineares, se $A - B - C$, então, os raios \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são chamados de raios opostos.

A figura 4.6.3 exibe uma representação geométrica de dois raios opostos.



Figura 4.6.3 – Raios Opostos

Teorema 4.6.3: Sejam uma reta e um raio que não se encontra sobre a reta, mas cujo ponto extremo pertence a reta. Então todos os pontos do raio, exceto o ponto extremo, encontram-se do mesmo lado da reta.

A figura 4.6.4 exibe uma representação geométrica do teorema 4.6.3.

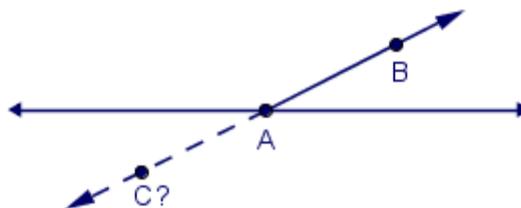


Figura 4.6.4 – Pontos de um raio em relação a uma reta

Definição 4.6.2: Dado um ângulo $\angle BAC$, o interior deste ângulo é a intersecção do lado de \overrightarrow{AB} que contém C , com o lado de \overrightarrow{AC} que contém B . Desse modo, um ponto D encontra-se no interior do ângulo $\angle BAC$, se D e B estão no mesmo lado de \overrightarrow{AC} , e se D e C

estão no mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} . O exterior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto de todos os pontos do plano que não se encontram nem no ângulo, nem no seu interior.

A figura 4.6.5 exibe uma representação geométrica do interior e do exterior de um ângulo $\angle BAC$.

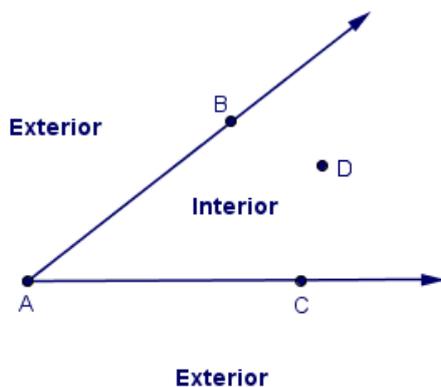


Figura 4.6.5 – Interior e Exterior do ângulo $\angle BAC$

Teorema 4.6.4: Cada lado do triângulo encontra-se, exceto para os pontos de extremidade, no interior do ângulo oposto.

A figura 4.6.6 exibe uma representação geométrica do teorema 4.6.4.

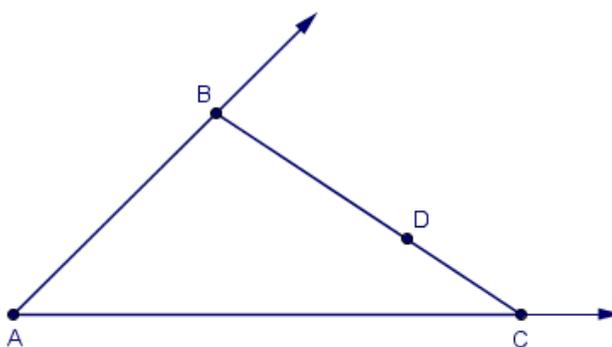


Figura 4.6.6 – Lado pertencente ao interior do ângulo oposto

No triângulo $\triangle ABC$, o ângulo $\angle BAC$ é oposto ao lado \overline{BC} .

Teorema 4.6.5: Se o ponto F encontra-se no interior do ângulo $\angle BAC$, então $\overrightarrow{AF} - F$ pertence ao interior do do ângulo $\angle BAC$.

A figura 4.6.7 exibe uma representação geométrica do teorema 4.6.5.

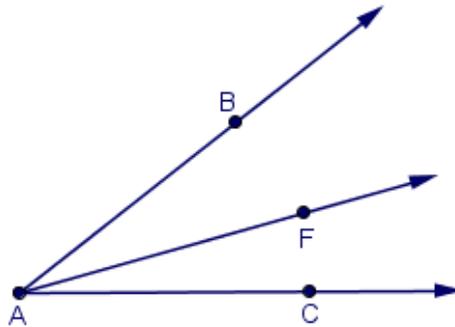


Figura 4.6.7 – Raio pertencente ao interior de um ângulo

No triângulo ΔABC , o ângulo $\angle BAC$ é oposto ao lado \overline{BC} .

Teorema 4.6.6: *O Teorema da Barra Transversal.* Se D encontra-se no interior de $\angle BAC$, então, \overline{AD} intersecta \overline{BC} , em um ponto entre B e C .

A figura 4.6.8 exibe uma representação geométrica do teorema trave.

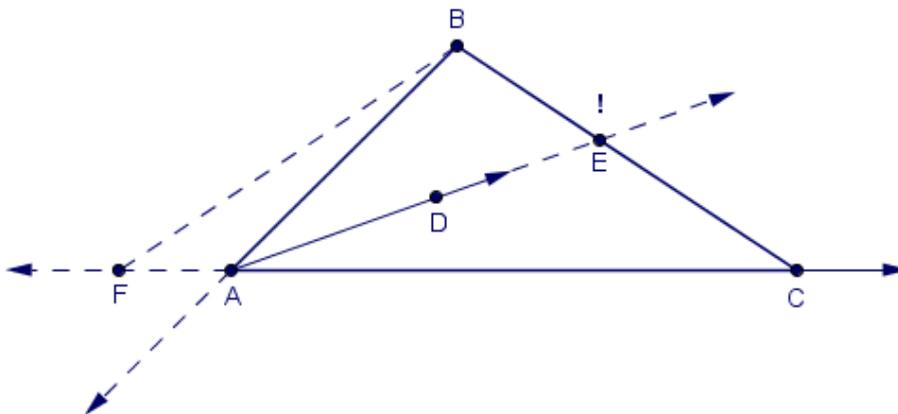


Figura 4.6.8 – Teorema Trave

A prova do teorema 4.6.6 se encontra em [1,p.82].

4.7 Medida Angular

Definição 4.7.1: A medida de um ângulo é dada por uma função m , definida para os ângulos, com números reais como valores da função.

O símbolo para indicar a medida do ângulo $\angle ABC$ é $m\angle ABC$.

Postulado 4.7.1: *O Postulado da Adição de ângulos.* Se D está no interior do ângulo $\angle BAC$, então $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

Definição 4.7.2: Se dois raios \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são opostos, e sendo \overrightarrow{AD} um terceiro raio, então os ângulos $\angle DAB$ e $\angle DAC$ formam de par linear.

A figura 4.7.1 exibe uma representação geométrica de um par linear.

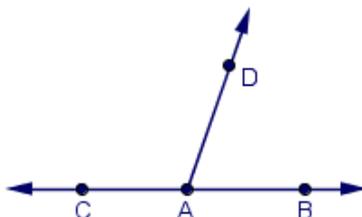


Figura 4.7.1 – Par Linear

Definição 4.7.3: Se a soma das medidas angulares de dois ângulos é 180, então, os dois ângulos são chamados de ângulos suplementares.

Postulado 4.7.2: O *Postulado Suplementar*. Se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares.

Definição 4.7.4: Dados dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$, se $m\angle ABC = m\angle DEF$, então os ângulos são chamados de ângulos congruentes, e podemos escrever $\angle ABC \cong \angle DEF$.

A figura 4.7.2 exibe uma representação geométrica de dois ângulos congruentes.

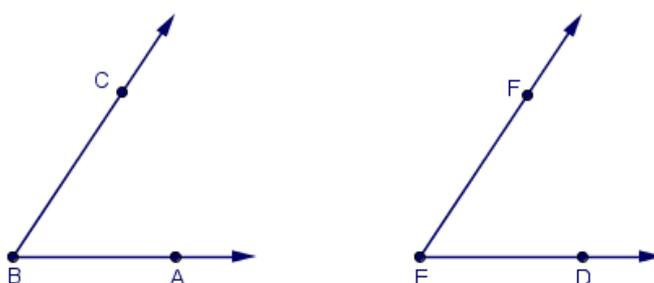


Figura 4.7.2 – Ângulos Congruentes

Definição 4.7.5: Se os ângulos de um par linear são congruentes, então cada um deles é chamado de ângulo reto.

A figura 4.7.3 exibe uma representação geométrica de um ângulo reto.

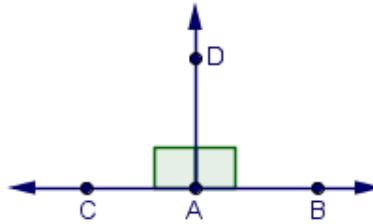
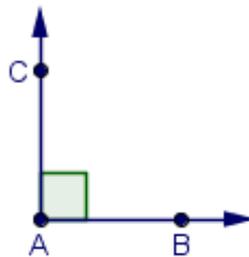


Figura 4.7.3 – Ângulo Reto

Usando o postulado 4.7.1 e as definições 4.7.2 e 4.7.4, que dizem que os ângulos que formam um par linear são suplementares e que a soma de suas medidas angulares é 180 e que os ângulos são congruentes, temos que a medida angular de um ângulo reto é 90, ou seja, metade da medida angular de dois ângulos suplementares.

Definição 4.7.6: Se a união de dois raios é um ângulo reto, então, os raios são chamados de raios perpendiculares.

A figura 4.7.4 exibe uma representação geométrica de dois raios perpendiculares.

Figura 4.7.4 – Raios Perpendiculares \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}

O símbolo para indicar que os raios \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são perpendiculares, é $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Neste caso, nós podemos dizer também que as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} são perpendiculares e, assim, temos que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são perpendiculares se as retas que os contêm são perpendiculares. Logo, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, e por sua vez, a união de duas retas contém um ângulo reto.

Definição 4.7.7: Um ângulo que possui medida angular menor que 90 é chamado de ângulo agudo.

A figura 4.7.5 exibe uma representação geométrica de um ângulo agudo.

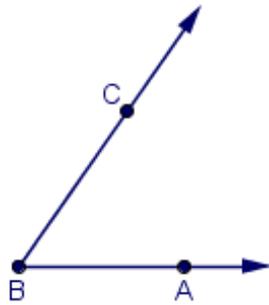


Figura 4.7.5 – Ângulo agudo

Definição 4.7.8: Um ângulo que possui medida angular maior que 90 é chamado de ângulo obtuso.

A figura 4.7.6 exibe uma representação geométrica de um ângulo obtuso.

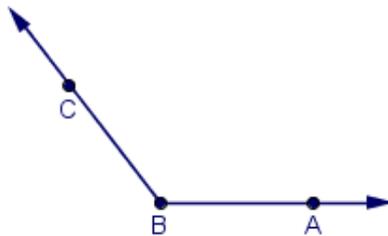


Figura 4.7.6 – Ângulo Obtuso

Definição 4.7.9: Se a soma das medidas angulares de dois ângulos é 90, então, os dois ângulos são chamados de ângulos complementares.

Definição 4.7.10: Se $B - A - E$, $C - A - D$ e as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AD} são diferentes, então $\angle BAC$ e $\angle DAE$ formam um par vertical, ou seja, dois ângulos formam um par vertical se seus lados formam pares de raios opostos.

A figura 4.7.7 exibe uma representação geométrica de um par vertical.

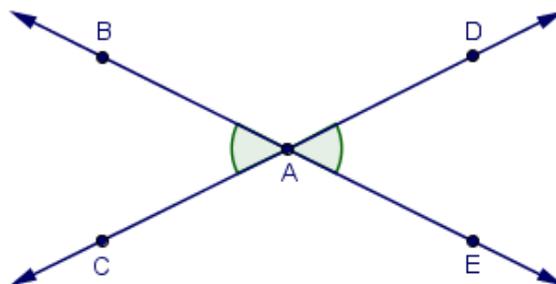


Figura 4.7.7 – Par Vertical

Teorema 4.7.1: *O Teorema do Ângulo Vertical.* Se dois ângulos formam um par vertical, então, eles são congruentes, ou seja, Se $B - A - E$, $C - A - D$ e as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AD} são diferentes, então $\angle BAC \cong \angle DAE$.

A figura 4.7.8 exibe uma representação geométrica dos ângulos congruentes de um par vertical.

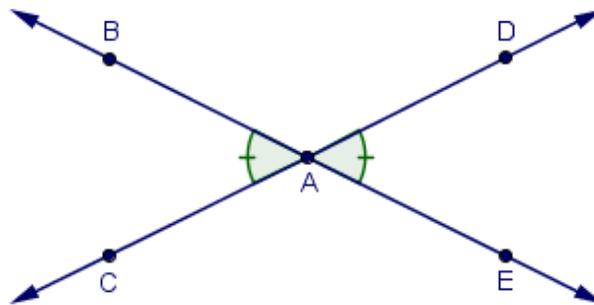


Figura 4.7.8 – Ângulos Congruentes de um Par Vertical

A prova do teorema 4.7.1 se encontra em [1,p.99].

Teorema 4.7.2: Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, então elas formam quatro ângulos retos entre elas.

4.8 Congruência de Triângulos

Dois triângulos são chamados congruentes se há alguma correspondência entre seus vértices, seus lados e seus ângulos.

Definição 4.8.1: Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, e uma correspondência de um-para-um $ABC \leftrightarrow DEF$ entre os seus vértices. Se cada par de lados correspondentes são congruentes, e cada par de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma congruência. Ou seja, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência se atender a todos as seis seguintes condições: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle CBA \cong \angle FED$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Se $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência, então nós escrevemos: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

A figura 4.8.1 exibe uma representação geométrica de dois triângulos congruentes.

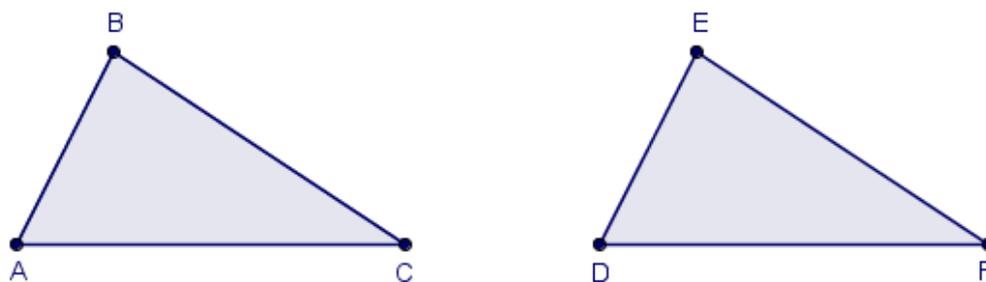


Figura 4.8.1 – Triângulos Congruentes

Para verificar se uma determinada correspondência é uma congruência, não é preciso verificar todos os seis pares de partes correspondentes, para isso, temos o postulado básico da congruência:

Postulado 4.8.1: LAL: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois lados e o ângulo entre estes lados, do primeiro triângulo, são congruentes, com as partes correspondentes do segundo triângulo, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência. Este caso é chamado de LAL, que significa Lado-Ângulo-Lado.

A figura 4.8.2 exibe uma representação geométrica de dois triângulos congruentes, pelo caso LAL.

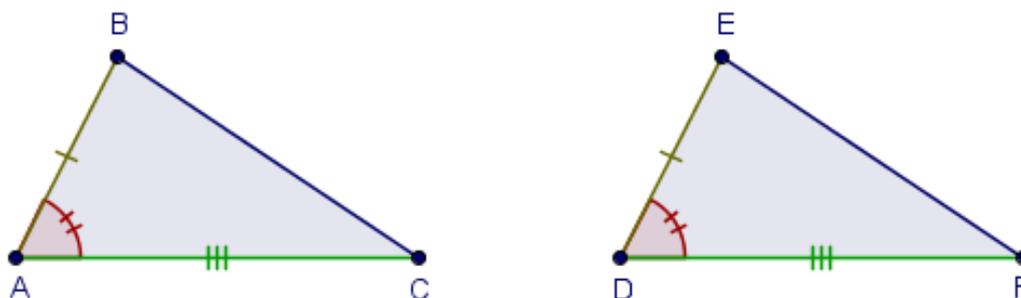


Figura 4.8.2 – Triângulos Congruentes (LAL)

Neste caso, temos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Definição 4.8.2: Um triângulo que possui dois lados congruentes é chamado de triângulo isósceles.

A figura 4.8.3 exibe uma representação geométrica de um triângulo isósceles.

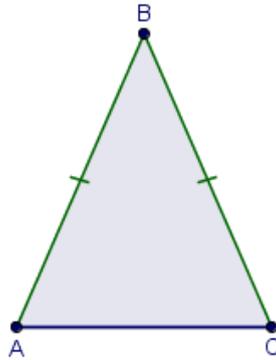


Figura 4.8.3 – Triângulo Isósceles

Definição 4.8.2: Um triângulo que não é isósceles é chamado de triângulo escaleno.

A figura 4.8.4 exibe uma representação geométrica de um triângulo escaleno.

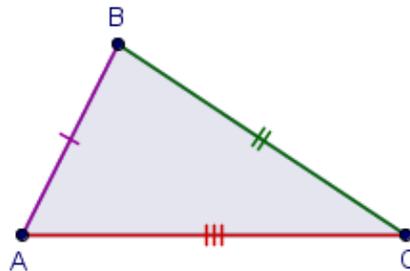


Figura 4.8.4 – Triângulo Escaleno

Definição 4.8.3: Um triângulo que possui três lados congruentes é chamado de triângulo equilátero.

A figura 4.8.5 exibe uma representação geométrica de um triângulo equilátero.

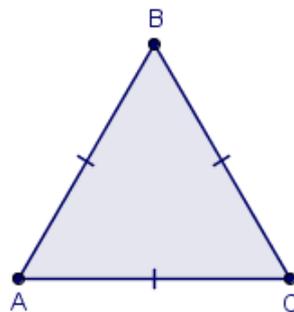


Figura 4.8.5 – Triângulo Equilátero

Teorema 4.8.1: *O Teorema do Triângulo Isósceles.* Se dois lados de um triângulo são congruentes, então, os ângulos opostos aos lados congruentes são congruentes. Ou seja, os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

A figura 4.8.6 exibe uma representação geométrica do teorema do triângulo isósceles.

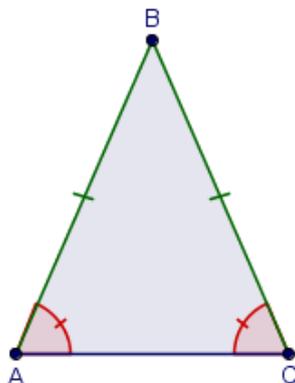


Figura 4.8.6 – Teorema do Triângulo Isósceles

Temos que, dado um triângulo ΔABC , se $\overline{BA} = \overline{BC}$, então, $\angle BAC \cong \angle BCA$.

A prova do teorema 4.8.1 se encontra em [1,p.105].

Corolário 4.8.1: Todo triângulo equilátero é equiângulo, ou seja, em um triângulo equilátero, todos os três ângulos são congruentes.

Teorema 4.8.2: O Teorema ALA: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois ângulos e o lado entre estes ângulos, do primeiro triângulo, são congruentes com as partes correspondentes do segundo triângulo, então, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência. Este caso é chamado de ALA, que significa Ângulo-Lado-Ângulo.

A figura 4.8.7 exibe uma representação geométrica de dois triângulos congruentes, pelo caso ALA.

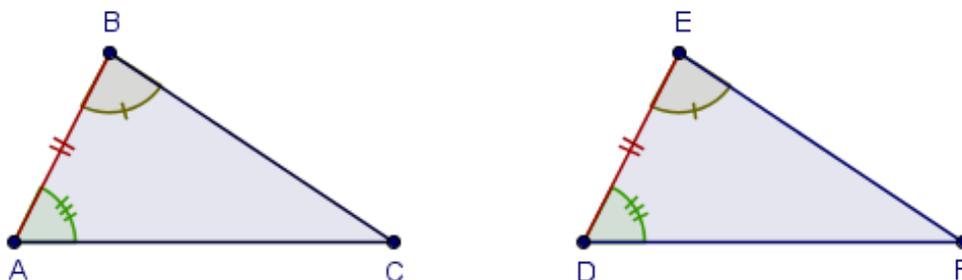


Figura 4.8.7 – Triângulos Congruentes (ALA)

Neste caso, temos que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\angle CBA \cong \angle FED$.

A prova do teorema 4.8.2 se encontra em [1,p.107].

Corolário 4.8.2: Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos são congruentes.

Corolário 4.8.3: Todo triângulo equiangular é equilátero.

Teorema 4.8.3: O Teorema LLL: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se todos os três pares de lados correspondentes são congruentes, então, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência. Este caso é chamado de LLL, que significa Lado-Lado-Lado.

A figura 4.8.8 exibe uma representação geométrica de dois triângulos congruentes, pelo caso LLL.

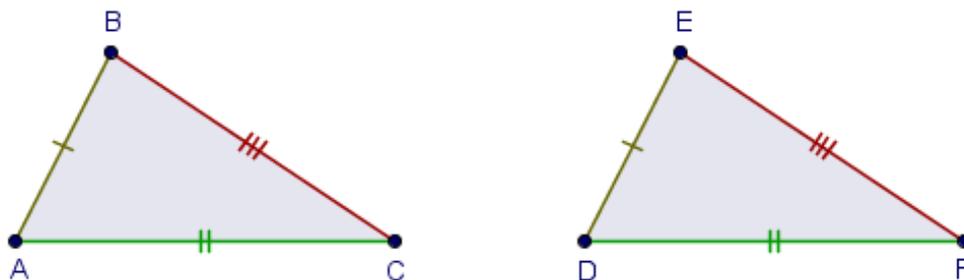


Figura 4.8.8 – Triângulos Congruentes (LLL)

Neste caso, temos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

A prova do teorema 4.8.3 se encontra em [1,p.108].

Definição 4.8.4: Dado o ângulo $\angle BAC$, se D for um ponto do interior do $\angle BAC$ tal que $\angle BAD \cong \angle CAD$, dizemos que \overrightarrow{AD} é a bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

A figura 4.8.9 exibe uma representação geométrica de uma bissetriz de um ângulo.

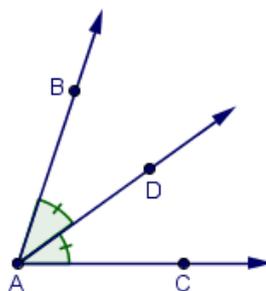


Figura 4.8.9 – Bissetriz de um Ângulo

Teorema 4.8.4: Cada ângulo tem exatamente uma bissetriz.

A prova do teorema 4.8.4 se encontra em [1,p.109 e 110].

4.9 Desigualdades Geométricas

Definição 4.9.1: Se $A - C - D$, então o ângulo $\angle BCD$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$.

A figura 4.9.1 exibe uma representação geométrica de um ângulo externo de triângulo.

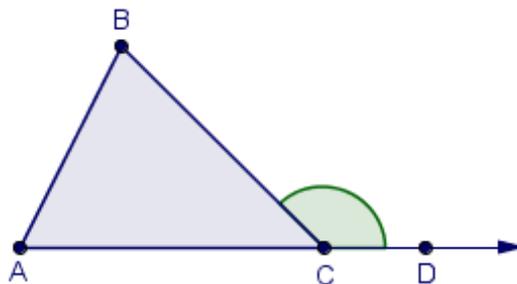


Figura 4.9.1 – Ângulo Externo de um Triângulo

Definição 4.9.2: Todo triângulo tem seis ângulos externos e estes seis ângulos formam três pares verticais.

A figura 4.9.2 exibe uma representação geométrica dos ângulos externos de triângulo.

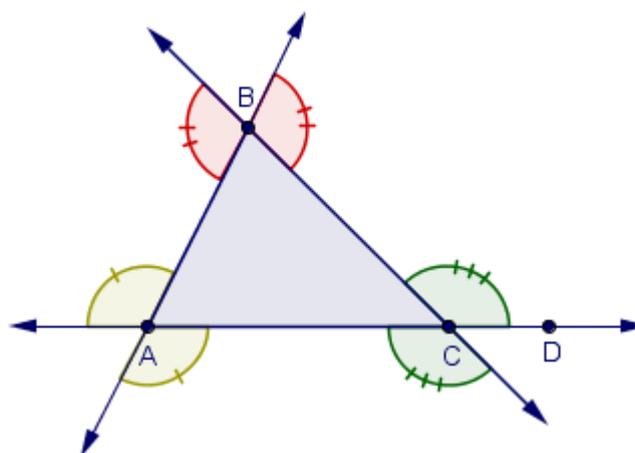


Figura 4.9.2 – Ângulos Externos de um Triângulo

Teorema 4.9.1: Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior do que cada um dos seus ângulos internos, ou seja, dado o triângulo $\triangle ABC$, se $A - C - D$, então $\angle BCD > \angle ABC$.

A figura 4.9.3 exibe uma representação geométrica do teorema 4.9.1.

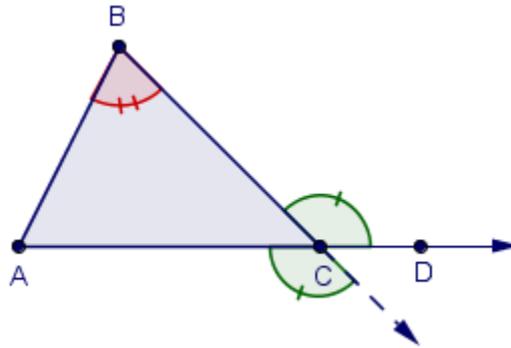


Figura 4.9.3 – Ângulo Externo maior que os Ângulos Internos de um Triângulo

A prova do teorema 4.9.1 se encontra em [1,p.117 e 118].

Corolário 4.9.1: A reta perpendicular a uma reta dada, através de um determinado ponto externo, é única. Ou seja, dada uma reta L , e seja P um ponto não pertencente a L , então, há apenas uma reta que passa por P que é perpendicular a L .

A prova do corolário 4.9.1 se encontra em [1,p.118].

Teorema 4.9.2: O menor segmento que liga um ponto a uma reta é o segmento perpendicular. Ou seja, dada uma reta L , seja P um ponto não pertencente a L , seja Q o pé da perpendicular a L em relação a P , e seja R qualquer outro ponto de L . Então $\overline{PQ} < \overline{PR}$.

A figura 4.9.4 exibe uma representação geométrica do teorema 4.9.2.

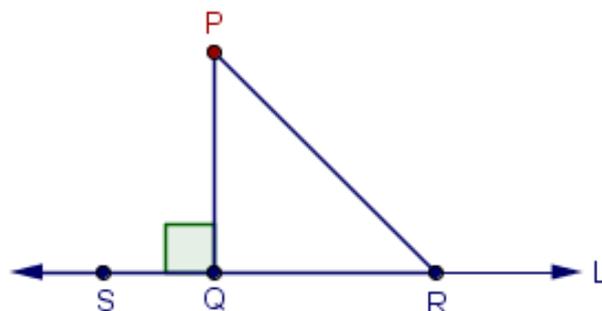


Figura 4.9.4 – Segmento Perpendicular é o menor

A prova do teorema 4.9.2 se encontra em [1,p.120].

Teorema 4.9.3: *A Desigualdade Triangular.* Em qualquer triângulo, a soma dos comprimentos de quaisquer dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado. Ou seja, Se A, B e C são pontos não colineares, então $AB + BC > AC$.

A prova do teorema 4.9.3 se encontra em [1,p.120 e 121].

Teorema 4.9.4: O Teorema LAA: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois ângulos e um lado do primeiro triângulo são congruentes com as partes correspondentes do segundo, então, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência. Este caso é chamado de LAA, que significa Lado-Ângulo-Ângulo.

A figura 4.9.5 exibe uma representação geométrica de dois triângulos congruentes, pelo caso LAA.

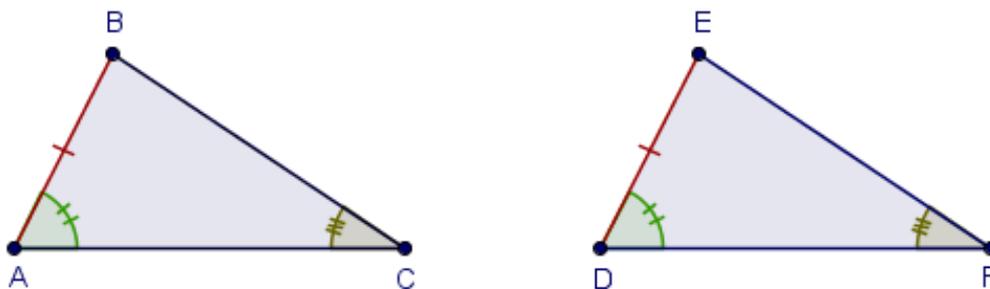


Figura 4.9.5 – Triângulos Congruentes (LAA)

Neste caso, temos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$.

A prova do teorema 4.9.4 se encontra em [1,p.123].

Definição 4.9.3: Um triângulo é chamado de triângulo retângulo se um dos seus ângulos é um ângulo reto.

Definição 4.9.4: Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, e os outros dois lados são chamados de catetos.

A figura 4.9.6 exibe uma representação geométrica de um triângulo retângulo e de seus lados.

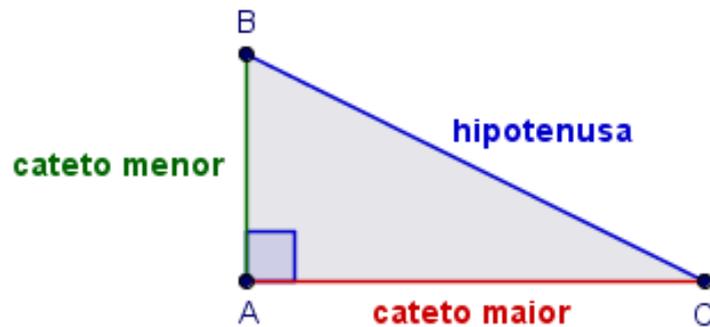


Figura 4.9.6 – Triângulo Retângulo

Teorema 4.9.5: O Teorema Hipotenusa-Cateto: Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se a hipotenusa e um cateto de um triângulo são congruentes com as partes correspondentes do segundo, então, a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência.

A figura 4.9.7 exibe uma representação geométrica de dois triângulos retângulos congruentes.



Figura 4.9.7 – Triângulos Retângulos Congruentes

Neste caso, temos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\angle BAC \cong \angle EDF = 90$.

A prova do teorema 4.9.5 se encontra em [1,p.124].

4.10 Condições Suficientes para o Paralelismo

Definição 4.10.1: Duas retas são paralelas se elas se encontram no mesmo plano, mas não se cruzam.

A figura 4.10.1 exibe uma representação geométrica de duas retas paralelas.



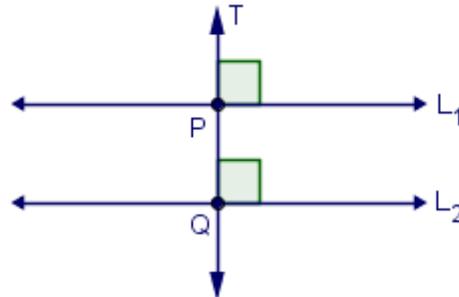
Figura 4.10.1 – Retas Paralelas L_1 e L_2

O símbolo que indica que duas retas são paralelas é $//$. Assim, temos que $L_1 // L_2$.

Por uma questão de conveniência, diremos que dois segmentos são paralelos se as retas que os contêm são paralelas. Vamos aplicar o mesmo termo para uma reta e um segmento, um segmento e um raio, e assim por diante.

Teorema 4.10.1: Se duas retas se encontram no mesmo plano, e são perpendiculares à mesma reta, então elas são paralelas. Ou seja, sendo L_1 e L_2 , e T três retas, de tal modo que $L_1 \perp T$ e $L_2 \perp T$. Então, $L_1 // L_2$.

A figura 4.10.2 exibe uma representação geométrica de duas retas perpendiculares a uma mesma reta.



Figuras 4.10.2 – Retas perpendiculares a uma mesma reta T

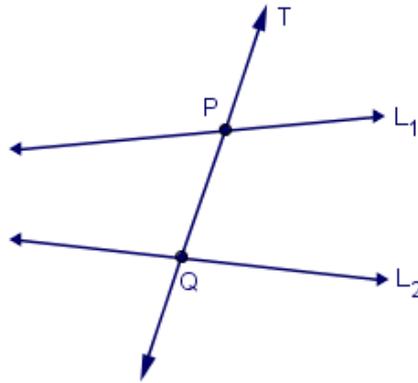
A prova do teorema 4.10.1 se encontra em [1,p.149].

Teorema 4.10.2: Dados uma reta e um ponto, não pertencente à reta, sempre existe pelo menos uma reta que passa pelo ponto dado que é paralela à reta dada.

A prova do teorema 4.10.2 se encontra em [1,p.149].

Definição 4.10.3: Se L_1 , L_2 e T são três retas em um mesmo plano, e T intersecta L_1 e L_2 em dois pontos diferentes P e Q , respectivamente, então T é a transversal de L_1 e L_2 .

A figura 4.10.3 exibe uma representação geométrica de uma reta transversal.

Figura 4.10.3 – Reta Transversal T

Definição 4.10.4: Se T é uma reta transversal às retas L_1 e L_2 , que intersecta L_1 e L_2 nos pontos P e Q , respectivamente, e A e D são pontos de L_1 e L_2 , respectivamente, e se encontram em lados opostos de T , então os ângulos $\angle APQ$ e $\angle PQD$ são chamados de ângulos alternos internos.

A figura 4.10.4 exibe uma representação geométrica de ângulos alternos internos.

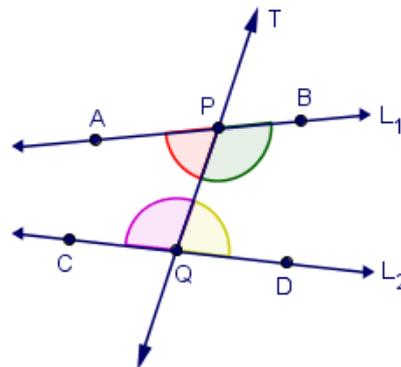


Figura 4.10.4 – Ângulos Alternos Internos

Analogamente, se os pontos B e C são pontos de L_1 e L_2 , respectivamente, e se encontram em lados opostos de T , então os ângulos $\angle CQP$ e $\angle QPB$ são chamados de ângulos alternos internos.

Teorema 4.10.3: Dadas duas retas e uma transversal, se um par de ângulos alternos internos é congruente, então, as retas são paralelas.

A prova é feita utilizando o teorema 4.12.5.

Definição 4.10.5: Sendo T uma reta transversal às retas L_1 e L_2 , que intersecta L_1 e L_2 nos pontos P e Q , respectivamente, se A é um ponto de L_1 e C é um ponto de L_2 , que se

encontram no mesmo lado de T , e o ponto E é um ponto da reta T , que se encontra no lado oposto de Q relação à P , então os ângulos $\angle APE$ e $\angle CQP$ são chamados de ângulos correspondentes.

A figura 4.10.5 exibe uma representação geométrica de ângulos correspondentes.

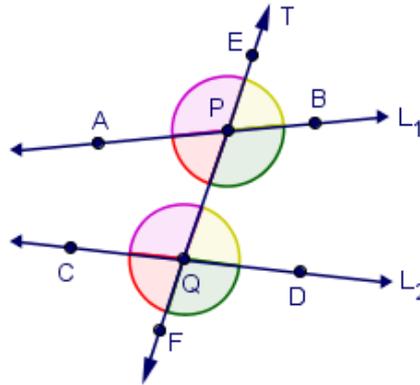


Figura 4.10.5 – Ângulos Correspondentes

Analogamente, se A é um ponto de L_1 e C é um ponto de L_2 , que se encontram no mesmo lado de T , e o ponto F é um ponto da reta T , que se encontra no lado oposto de P em relação à Q , então os ângulos $\angle APQ$ e $\angle CQF$ são chamados de ângulos correspondentes.

Analogamente, se B é um ponto de L_1 e D é um ponto de L_2 , que se encontram no mesmo lado de T , e o ponto E é um ponto da reta T , que se encontra no lado oposto de Q em relação à P , então os ângulos $\angle BPE$ e $\angle DQP$ são chamados de ângulos correspondentes.

Analogamente, se B é um ponto de L_1 e D é um ponto de L_2 , que se encontram no mesmo lado de T , e o ponto F é um ponto da reta T , que se encontra no lado oposto de P em relação à Q , então os ângulos $\angle BPQ$ e $\angle DQF$ são chamados de ângulos correspondentes.

Teorema 4.10.4: Dadas duas retas e uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é congruente, então, um par de ângulos alternos internos é congruente.

A prova é feita utilizando o teorema 4.11.6.

Teorema 4.10.5: Dadas duas retas e uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é congruente, então, as retas são paralelas.

A prova é feita utilizando o teorema 4.11.6.

4.11 Desigualdade Básica para Soma dos Ângulos de um Triângulo

Teorema 4.11.1: Todo triângulo retângulo possui apenas um ângulo reto e os outros dois ângulos agudos.

Teorema 4.11.2: A hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que qualquer um dos catetos.

Teorema 4.11.3: No triângulo $\triangle ABC$, sendo D o pé da perpendicular de B em relação à \overleftrightarrow{AC} . Se \overline{AC} é o maior lado do triângulo $\triangle ABC$, então $A - D - C$.

A figura 4.11.1 exibe uma representação geométrica do teorema 4.11.3.

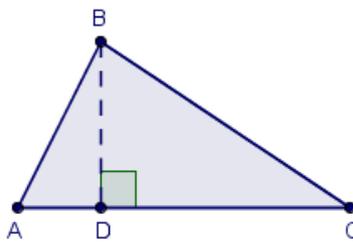


Figura 4.11.1 – Pé da Perpendicular

4.12 Postulado das Paralelas

Postulado 4.12.1: *Postulado das Paralelas Euclidianas.* Dada uma reta L e um ponto P , externo a ela, existe apenas uma reta que passa pelo ponto dado e que é paralela à reta dada.

A figura 4.12.1 exibe uma representação geométrica do *Postulado das Paralelas Euclidianas*.

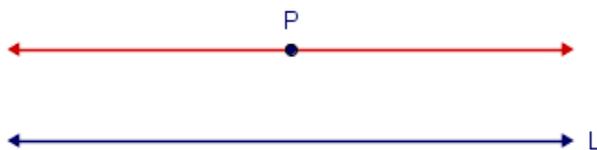


Figura 4.12.1 – Postulado das Paralelas Euclidianas

Sobre as retas paralelas, temos os seguintes teoremas:

Teorema 4.12.1: Considerando duas retas e uma transversal, se as retas dadas são paralelas então cada par de ângulos alternos internos é congruente.

A figura 4.12.2 exibe uma representação geométrica do teorema 2.4.1.

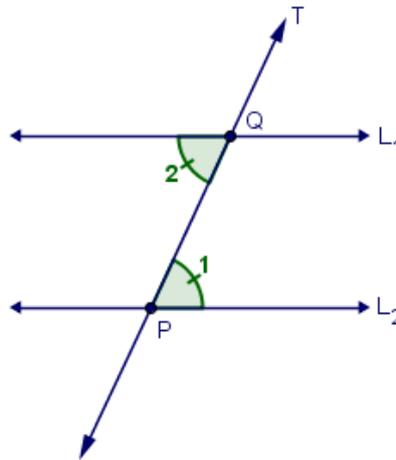


Figura 4.12.2 – Ângulos Alternos Internos Congruentes

A prova do teorema 4.12.1 se encontra em [1,p.160].

Teorema 4.12.2: Considerando duas retas e uma transversal, se as retas dadas são paralelas então cada par de ângulos correspondentes é congruente.

A figura 4.12.3 exibe uma representação geométrica do teorema 4.12.2.

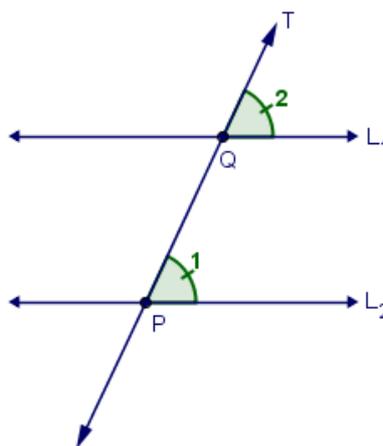


Figura 4.12.3 – Ângulos Correspondentes Congruentes

A prova do teorema 4.12.2 é análoga a prova do teorema 4.12.1.

Teorema 4.12.3: Em qualquer triângulo ΔABC temos: $m\angle CAB + m\angle ABC + m\angle BCA = 180$.

A figura 4.12.4 exibe uma representação geométrica do teorema 4.12.3.

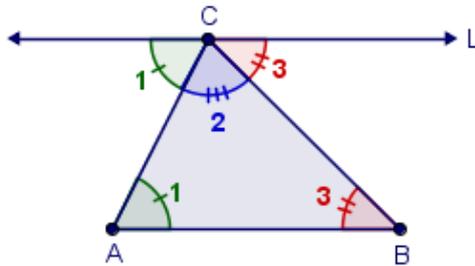


Figura 4.12.4 – Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

A prova do teorema 4.12.3 se encontra em [1,p.161].

Teorema 4.12.4: Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

A prova é feita utilizando o teorema 4.12.3.

Teorema 4.12.5: Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos seus dois ângulos internos opostos.

A figura 4.12.5 exibe uma representação geométrica do teorema 4.12.5.

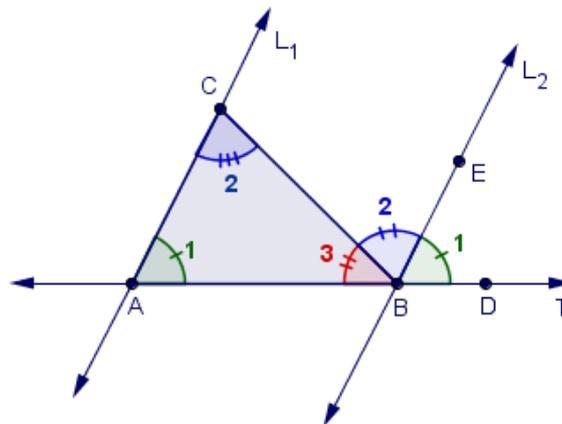


Figura 4.12.5 – A medida do Ângulo Externo é a Soma das medidas dos ângulos Internos Opostos de um Triângulo

Teorema 4.12.6: No plano, duas retas paralelas a uma terceira reta, são paralelas umas às outras.

Teorema 4.12.7: Se uma transversal é perpendicular a uma das duas retas paralelas, então ela é perpendicular à outra reta.

4.13 Proporcionalidades

Definição 4.13.1: Dadas duas seqüências de números positivos a_1, b_1, c_1, \dots e a_2, b_2, c_2, \dots .

Se é verdade que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \dots$, então dizemos que as duas seqüências são proporcionais, e escrevemos:

$$a_1, b_1, c_1, \dots \sim a_2, b_2, c_2, \dots .$$

Definição 4.13.2: A proporção constante,

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \dots,$$

é chamada de constante de proporcionalidade.

Podemos notar que uma relação de proporcionalidade é simétrica. Isto é, se $a_1, b_1, c_1, \dots \sim a_2, b_2, c_2, \dots$, então $a_2, b_2, c_2, \dots \sim a_1, b_1, c_1, \dots$.

Podemos notar também, que a constante de proporcionalidade, depende da ordem em que as seqüências são escritas. Se invertermos a ordem, temos uma nova constante que é o inverso da antiga.

Teorema 4.13.1: Se $a, b \sim c, d$, então $a, c \sim b, d$, e reciprocamente.

Prova: A primeira proporcionalidade significa que $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, e a segunda significa que $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Trivialmente, estas equações são equivalentes.

4.14 Semelhanças de Triângulos

Definição 4.14.1: Dados os triângulos ΔABC e ΔDEF e a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$, se $a, b, c \sim d, e, f$, então podemos dizer que os lados correspondentes são proporcionais. Se os lados correspondentes são proporcionais, e todo par de ângulos correspondentes são congruentes, então nós podemos dizer que a correspondência é uma semelhança e que os triângulos são semelhantes.

Se $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança, então nós escrevemos: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Sabemos que a expressão $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ diz que os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes e temos que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ACB \cong \angle DFE$ e $\angle CBA \cong \angle FED$, temos

também que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Da mesma forma, a partir da expressão $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ que diz que os triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes, temos que $AB, AC, BC \sim DE, DF, EF$.

Intuitivamente falando, dois triângulos são semelhantes, se eles têm a mesma forma, embora não necessariamente o mesmo tamanho. Parece que a forma deve ser determinada pelos ângulos sozinhos, e isto é verdade.

Teorema 4.14.1: *O Teorema da Semelhança AAA.* Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança. Este caso é chamado de AAA, que significa Ângulo- Ângulo- Ângulo.

A figura 4.14.1 exibe uma representação geométrica de dois triângulos semelhantes, pelo caso AAA.

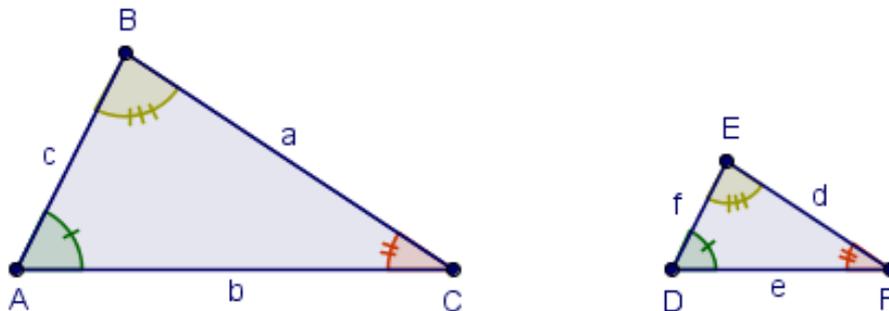


Figura 4.14.1 – Triângulos Semelhantes (AAA)

Neste caso, temos que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ACB \cong \angle DFE$ e $\angle CBA \cong \angle FED$.

A prova do teorema 4.14.1 se encontra em [1,p.175].

Teorema 4.14.2: *O Teorema da Semelhança AA.* Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança. Este caso é chamado de AA, que significa Ângulo- Ângulo.

A prova do teorema 4.14.2 é análoga a prova do teorema 2.6.1.

Teorema 4.14.3: *O Teorema da Semelhança LLL.* Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois lados correspondentes são proporcionais, então os ângulos

correspondentes são congruentes, e a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança. Este caso é chamado de LLL, que significa Lado-Lado-Lado.

A figura 4.14.2 exibe uma representação geométrica de dois triângulos semelhantes, pelo caso LLL.

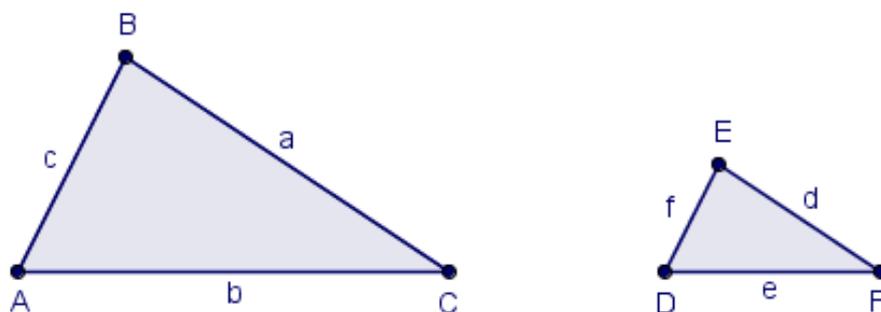


Figura 4.14.2 – Triângulos Semelhantes (LLL)

Neste caso, temos que $AB, AC, BC \sim DE, DF, EF$.

A prova do teorema 2.6.3 se encontra em [1,p.176 e 177].

Teorema 4.14.4: O Teorema da Semelhança LAL. Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais, e o ângulo entre estes pares são congruentes, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma semelhança. Este caso é chamado de LAL, que significa Lado-Ângulo-Lado.

figura 4.14.3 exibe uma representação geométrica de dois triângulos semelhantes, pelo caso LAL.

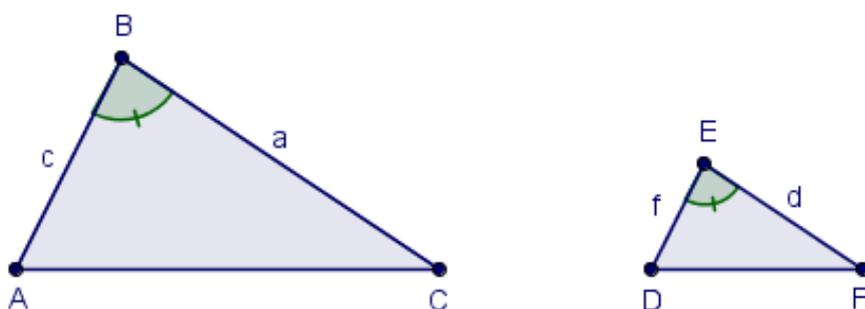


Figura 4.14.3 – Triângulos Semelhantes (LAL)

Neste caso, 4.14.4 se encontra em [1,p.178].

Teorema 4.14.5: Dada uma semelhança entre dois triângulos. Se um par de lados correspondentes é congruente, então a correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é uma congruência.

4.15 Teorema de Pitágoras

Teorema 4.15.1: A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo divide o triângulo em dois triângulos dos quais cada um é semelhante ao primeiro. Isto é, seja um triângulo retângulo ΔABC , com o ângulo reto em A , e seja D o pé da perpendicular de A em relação a \overline{BC} . Então $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$.

A figura 4.15.1 exibe uma representação geométrica do teorema 4.15.1.

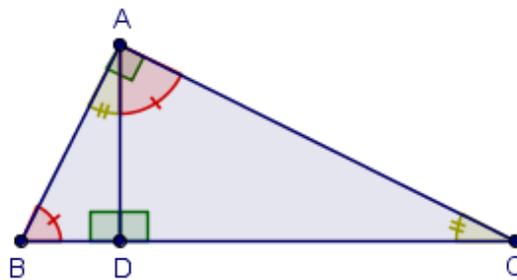


Figura 4.15.1 – Triângulo Retângulos Semelhantes

Neste caso, temos que $\angle ABC \cong \angle CAD$, $\angle BCA \cong \angle DAB$ e $\angle CAB \cong \angle ADC \cong \angle ADB$.

Teorema 4.15.2: *Teorema de Pitágoras.* Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Isto é, Seja o triângulo retângulo ΔABC com o ângulo reto em A , com catetos de comprimento b e c , e hipotenusa a , então, o teorema de Pitágoras diz que $a^2 = b^2 + c^2$.

A figura 4.15.2, exibe uma representação geométrica do teorema de Pitágoras.

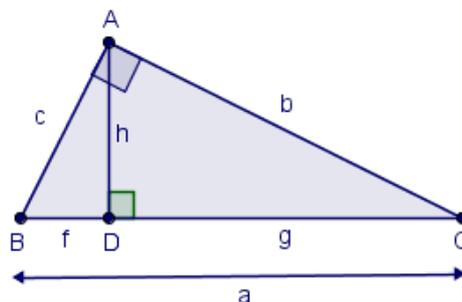


Figura 4.15.2 – Teorema de Pitágoras

Prova: Pelo teorema 4.15.1, temos que $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$. Então, $h, f, c \sim b, c, a \sim g, h, b$. Vamos calcular f, g em termos de a, b , e c , e, em seguida, usar o fato de que $f + g = a$.

De $\frac{f}{c} = \frac{c}{a}$, temos $f = \frac{c^2}{a}$. De $\frac{g}{b} = \frac{b}{a}$, temos $g = \frac{b^2}{a}$. Portanto, $f + g = \frac{c^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{b^2 + c^2}{a} = a$. Logo, $b^2 + c^2 = a^2$, que era para ser provado.

4.16 Lugares Geométricos

Definição 4.16.1: Dado o segmento \overline{AB} , contido em um plano do espaço, a mediatriz do segmento \overline{AB} é o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

A figura 4.16.1 exibe uma representação geométrica de uma mediatriz.

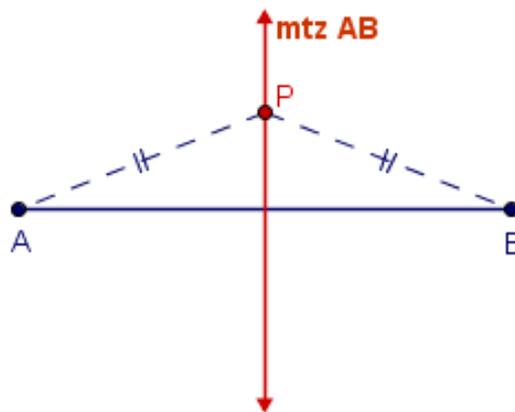


Figura 4.16.1 – Mediatriz do segmento \overline{AB}

Proposição 4.16.1: A mediatriz de um segmento \overline{AB} , contido em um plano do espaço, é a reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} , que passa pelo ponto médio M do segmento \overline{AB} .

A figura 4.16.2 exibe uma representação geométrica da proposição 4.16.1.

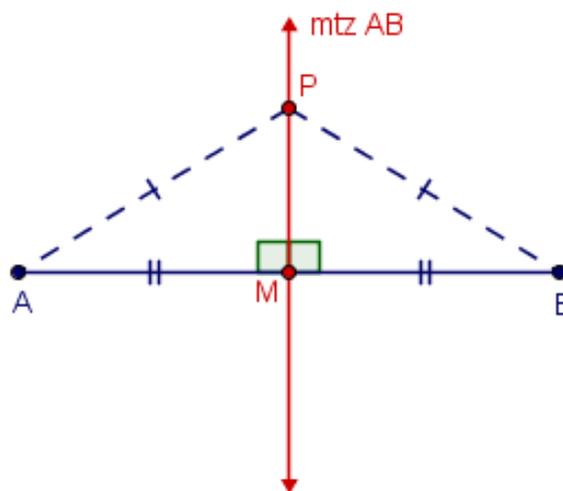


Figura 4.16.2 – Ponto Médio M e Perpendicularidade

Demonstração: Seja M o ponto médio do segmento \overline{AB} , pela definição 4.4.2, temos que $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. Logo, M pertence a mediatriz do segmento \overline{AB} . Seja um ponto P qualquer, pertencente a mediatriz do segmento \overline{AB} , então, pela definição 4.16.1, temos que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Considerando também o segmento \overline{PM} , pelo teorema 4.8.3, temos que os triângulos ΔPAM e ΔPBM são congruentes (caso LLL). Como os ângulos $\angle PMA$ e $\angle PMB$ são congruentes e formam um par linear, então, pela definição 4.7.5, os ângulos são retos.

Proposição 4.16.2: Se P é um ponto qualquer pertencente à bissetriz de um ângulo $\angle BAC$, então as distâncias de P aos raios \overline{AB} e \overline{AC} são congruentes.

A figura 4.16.3 exibe uma representação geométrica da proposição 4.16.2.

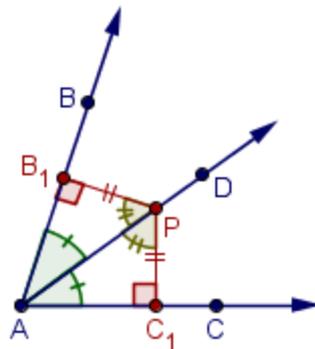


Figura 4.16.3 – Bissetriz do Ângulo $\angle BAC$

Demonstração: Dados o ângulo $\angle BAC$ e sua bissetriz \overline{AD} , pela definição 4.8.4, temos que $\angle BAD \cong \angle DAC$ e o ponto D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$. Sendo P um ponto qualquer pertencente à bissetriz de um ângulo $\angle BAC$, e sendo B_1 o pé da perpendicular de P em relação a \overline{AB} e C_1 o pé da perpendicular de P em relação a \overline{AC} , então os ângulos $\angle PB_1A$ e $\angle PC_1A$ são ângulos retos. Logo, pelo teorema 4.12.3, os ângulos $\angle B_1PA$ e $\angle C_1PA$ são congruentes. Como o segmento \overline{AP} é comum aos triângulos ΔB_1PA e ΔC_1PA , então, pelo teorema 4.8.2, os triângulos são congruentes e, portanto, $\overline{PB_1} \cong \overline{PC_1}$.

Definição 4.16.2: Dado um ponto A , contido em um plano do espaço, a circunferência de centro A e raio r é o lugar geométrico dos pontos P tais que $PA = r$.

A figura 4.16.4 exibe uma representação geométrica de uma circunferência.

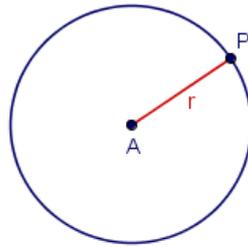


Figura 4.16.4 – Circunferência de raio r e centro A

Definição 4.16.3: Dado uma circunferência de centro A e raio r , o interior desta circunferência é o conjunto de todos os pontos cuja distância ao centro A é menor ou igual à distância r do raio. O exterior desta circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano que não se encontram nem na circunferência, nem no seu interior.

A figura 4.16.5 exibe uma representação geométrica do interior e do exterior de uma circunferência.

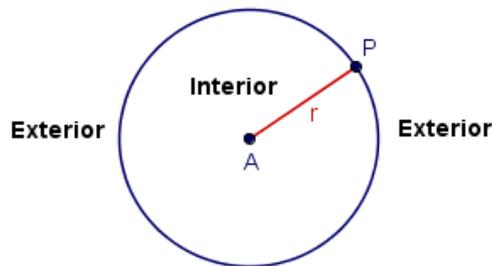


Figura 4.16.5 – Interior e Exterior da Circunferência de centro A e raio r

Definição 4.16.4: Se uma reta é perpendicular ao raio de uma circunferência, então, a reta é chamada de reta tangente à circunferência.

A figura 4.16.6 exibe uma representação geométrica da reta tangente a uma circunferência.

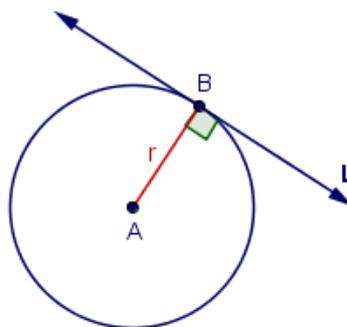


Figura 4.16.6 – Reta Tangente à Circunferência

Proposição 4.16.3: Considerando uma circunferência de centro A , e P um ponto exterior a mesma. Considerando os pontos B e C , pertencentes à circunferência, tais que as retas \overline{PB} e \overline{PC} são tangentes à circunferência, então temos que $PB = PC$ e a reta \overline{PA} é a mediatriz do segmento \overline{BC} .

A figura 4.16.7 exibe uma representação geométrica da proposição 4.16.1.

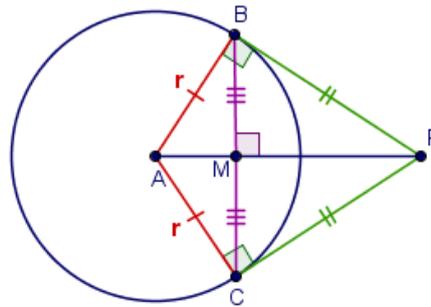


Figura 4.16.7 – Propriedades das Tangentes por um Ponto Exterior

Demonstração: Como os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} são raios da circunferência, então $AB = AC = r$ e como os ângulos $\angle PBA$ e $\angle PCA$ são retos, porque as retas \overline{PB} e \overline{PC} são tangentes à circunferência, então os triângulos ΔPAB e ΔPAC são congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, em particular, se a reta \overline{PA} é perpendicular à reta \overline{BC} , então, $\overline{PB} \cong \overline{PC}$. Como P e A equidistam de B e C , segue que \overline{PA} é a mediatriz do segmento \overline{BC} .

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos uma classe especial de quadriláteros convexos que são os chamados quadriláteros pipas.

Vimos, por exemplo, que as diagonais de um quadrilátero pipa são perpendiculares.

Determinamos um quadrilátero pipa formado pelas bissetrizes internas de um trapézio isósceles e, também, determinamos um quadrilátero pipa formado pelas bissetrizes internas de um retângulo.

Além disso, estudamos os quadriláteros tangenciais e conseguimos algumas condições necessárias para que um quadrilátero convexo tangencial seja um quadrilátero pipa, como por exemplo:

- A área de um quadrilátero tangencial é a metade do produto das suas diagonais;
- As cordas tangentes de um quadrilátero tangencial são congruentes;
- Um par de comprimentos tangentes opostos de um quadrilátero tangencial são congruentes;
- As bimedias de um quadrilátero tangencial são congruentes;
- Os produtos das alturas em relação aos lados opostos nos triângulos não sobrepostos formados pelas diagonais de um quadrilátero tangencial são iguais;
- O produto dos lados opostos de um quadrilátero tangencial é igual;
- O incentro de um quadrilátero tangencial encontra-se na maior diagonal.

REFERÊNCIA

- [1] MOISE Edwin E., **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. United States of America: The Book Company, 1990.
- [2] JOSEFSSON Martin, **When is a Tangential Quadrilateral a Kite?** Sweden: Forum Geometricorum, Volume 11, 2011.
- [3] JOSEFSSON Martin, **Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilateral**. Sweden: Forum Geometricorum, Volume 10, 2010.
- [4] JAHN Ana P., BONGIOVANNI VINCENZO, **“Pipa” ou “papagaio”: Um quadrilátero também notável**. São Paulo: Revista do professor de matemática: nº 80, 2013.
- [5] FETSOV A. I., DUBNOV Ya. S., **Proof in Geometry: With Mistakes in Geometry Proofs**. Dover, 2006.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf> >.