UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DEVENIR SOUSA MAIA

ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM ANIMAÇÃO DE OBJETOS MATEMÁTICOS NO SOFTWARE GEOGEBRA

CASTANHAL/PA
2022

DEVENIR SOUSA MAIA

ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM ANIMAÇÃO DE OBJETOS MATEMÁTICOS NO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal.

CASTANHAL/PA
2022

DEVENIR SOUSA MAIA

ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM ANIMAÇÃO DE OBJETOS MATEMÁTICOS NO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal.

Data de Defesa: 14/12/2022

Banca examinadora:

Profª. Dra. Roberta Modesto Braga - Orientadora
Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal

Profº. Dr. Alan Gonçalves Lacerda - Examinador externo
Universidade Federal do Pará - Campus Marajó - Breves

Profº. Dr. Edilberto Oliveira Rozal - Examinador Interno
Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M217e Maia, Devenir Sousa.
Ensino de Áreas e Volumes com animação de objetos matemáticos no software Geogebra / Devenir Sousa Maia. — 2022.
81 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Roberta Modesto Braga
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2022.

1. Tecnologias. 2. Objetos matemáticos. 3. Software Geogebra. I. Título.

CDD 516

Dedico este trabalho especialmente a meus pais, que apesar das dificuldades nunca deixaram que eu me afastasse da escola e tiveram um papel importantíssimo na minha vida acadêmica. É graças a seus esforços, dedicação, amor e carinho de toda vida, que passo por mais essa etapa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar forças e saúde para cumprir mais esta etapa da minha vida.

A meus pais que apesar das dificuldades nunca desistiram de minha educação, sempre me incentivaram a estudar mais e mais, sem vocês eu não seria nada, a meus irmãos e filhas, esposa (Kelli Oceanny), que são minhas inspirações, que me dão forças para enfrentar todos os desafios.

A meus amigos que levo no coração desde a infância e as amizades conquistadas durante o curso, pessoas que sempre estarão no meu coração.

Respeitosamente agradeço aos docentes do curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT – Campus Castanhal, que compartilharam de seus conhecimentos, em especial a Profa. Dra. Roberta Modesto Braga.

A geometria existe por toda a parte. [...] É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Malba Tahan, O homem que calculava

RESUMO

MAIA, Devenir Sousa. **Ensino de Áreas e Volumes com animação de objetos matemáticos no software Geogebra.** Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2022.

As tecnologias digitais são recursos que podem colaborar com a prática docente. Assim, com o objetivo de discutir uma proposta de sequência didática com uso de objetos matemáticos dinâmicos com uso do software Geogebra, descreve-se a elaboração de objetos matemáticos e aplicações de animação. Os objetos matemáticos foram construídos no software Geogebra para auxiliar na aplicação de uma sequência didática envolvendo áreas e volumes de alguns sólidos geométricos, a fim de facilitar a compreensão desses conceitos e permitir aos alunos o desenvolvimento de processos de exploração e visualização. Trata-se de uma pesquisa de natureza básica, exploratória de cunho bibliográfico. Considera-se que utilizar a exploração de objetos matemáticos com auxílio do Geogebra potencializa a demonstração de áreas e volumes de figuras geométricas, despertando assim a atenção e o interesse dos alunos, podendo contribuir com o ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Tecnologias. Objetos matemáticos. Software Geogebra.

ABSTRACT

Digital technologies are resources that can collaborate with teaching practice. Thus, with the aim of discussing a proposal for a didactic sequence using dynamic mathematical objects using the Geogebra software, the elaboration of mathematical objects and animation applications are described. Mathematical objects were built in the Geogebra software to assist in the application of a didactic sequence involving areas and volumes of some geometric solids, in order to facilitate the understanding of these concepts and allow students to develop exploration and visualization processes. This is a research of a basic, exploratory bibliographical nature. It is considered that using the exploration of mathematical objects with the aid of Geogebra enhances the demonstration of areas and volumes of geometric figures, thus arousing the attention and interest of students, and may contribute to teaching and learning.

Keywords: Technologies. Mathematical objects. Geogebra Software.

Lista de Figuras, quadros e gráficos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa se deu pela dificuldade que os alunos possuem na visualização de conceitos envolvendo áreas e volumes, motivado pela procura de maneiras para atrair a atenção e o interesse dos estudantes em sala de aula, além de estimular o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação - TDIC's possibilitando uma atuação diferente na sala de aula permitindo uma participação ativa do estudante enquanto sujeito da sua aprendizagem.

Além disso, entende-se que a apropriação de objetos matemáticos no contexto de sala de aula por meio do uso de softwares interativos, estimulam o interesse dos alunos por conceitos matemáticos e sua aplicabilidade, pode facilita o entendimento do conteúdo tratado, dando mobilidade e praticidade, bem como auxilia na visualização de gráficos e de figuras geométricas, contribuindo para um ensino mais atraente e essencial para otimizar a aprendizagem. Inquietações advindas dessa possibilidade descrita, nos levaram à seguinte questão de pesquisa: *Que possibilidades de atividades com uso de objetos matemáticos e aplicações de animações com uso do softwares Geogebra podem proporcionar para o ensino de alguns tópicos de áreas e volumes?*

A partir dessa questão, nos interessa enquanto objetivo *discutir uma proposta de sequência didática com uso de objetos matemáticos dinâmicos com uso do Geogebra*. Tais atividades foram elaboradas do ponto de vista da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, com o uso de software educativo Geogebra a partir da construção de objetos matemáticos e aplicações de animações para estudantes do ensino médio.

O trabalho está organizado por capítulos. No capítulo I, serão apresentadas as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, sua importância para a educação, para que são utilizadas, as competências e habilidades relacionadas ao uso de acordo com a BNCC, o que propõe a BNCC na área de Matemática e suas Tecnologias e Objetos Matemáticos. Apresenta-se os softwares educacionais e sua classificação de acordo com seus objetivos pedagógicos, em especial o software Geogebra que é utilizado na construção de alguns objetos matemáticos.

No capítulo II, define-se algumas figuras geométricas espaciais como prisma, pirâmide, cilindro e esfera. Apresenta-se seus elementos, classificação, áreas da superfície, volumes e demonstração das fórmulas para obtenção das áreas e volumes desses sólidos.

No capítulo III, descreve-se um passo a passo da construção de um objeto matemático e a aplicação de animação utilizando o software Geogebra. No capítulo IV, determina-se a metodologia da pesquisa, define-se sequência didática e descreve-se uma proposta de sequência didática que compreende um conjunto de três atividades que envolvem conceitos de Geometria Espacial que fazem parte do Currículo do Ensino Médio e finaliza-se com a conclusão.

CAPÍTULO I - TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO

1.1 - Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação

Tendo em conta que a matemática desempenha um papel fundamental na formação do indivíduo, que o uso acelerado das tecnologias na sociedade atual exige um ensino de matemática que contribua para que os alunos se tornem cidadãos capazes, criativos e críticos, torna-se importante que se crie novos meios, novas metodologias para o seu ensino (ROCHA, 2018). Este ambiente de aprendizagem pode ser potencializado com o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) para melhorar a aprendizagem da Matemática.

As TDICs podem ser utilizadas na busca da informação de que o aprendiz necessita. Elas apresentam um dos mais eficientes recursos tanto para a busca, quanto para o acesso à informação, tornando possível utilizar sofisticados mecanismos de busca que permitem encontrar, de modo muito rápido, a informação existente em banco de dados ou na Web. A Internet está ficando cada vez mais interessante, possibilitando a exploração de um número incrível de assuntos (VALENTE, 2014).

São exemplos das TDICs todas as ferramentas tecnológicas digitais que utilizam-se para fins de criação, publicação e consumo de informação, além dos diversos componentes físicos e suas soluções que são utilizadas para nos comunicar. Para compreensão da diferença entre os componentes e as soluções, pode-se pensar em um smartphone e nos aplicativos de comunicação instantânea que ele oferece.

O domínio das características das TDICs e do panorama em que elas estão inseridas pode abrir um leque de oportunidades para os professores, como ferramenta ou como suporte básico, no sentido de reconhecer nesses aparatos características e possibilidades que poderão auxiliar seus estudantes ao longo de suas vidas.

Compreender as Tecnologias que estão à disposição dos docentes e dos estudantes favorece o processo de identificação de suas funcionalidades, facilitando a seleção das melhores opções tecnológicas existentes evitando que a tecnologia em si se sobressaia no processo didático em relação ao conhecimento que está sendo trabalhado ou aos reais objetivos pedagógicos existentes.

Quase sempre, essas tecnologias são fruto das necessidades de soluções de áreas diferentes da educação e, cabe aos professores, identificar como essas soluções podem ser adaptadas às suas necessidades, considerando também suas limitações e os conhecimentos prévios que os estudantes têm em relação a elas. Nessa perspectiva, encontraremos as TDICs para responder questões pedagógicas de “Como fazer”, seja utilizando-as na preparação da aula, seja no desenvolvimento de materiais didáticos, durante exposições, ao realizar atividades, nas avaliações etc. (SILVA, 2020).

No âmbito escolar, as formas de ensinar tendem a alterações que acompanhem as mudanças sociais contemporâneas, principalmente a partir de março de 2020, com a chegada da pandemia, houve uma ressignificação na educação, de forma que as tecnologias mais do que nunca foram inseridas no processo de ensino-aprendizagem, tornando-se ferramentas imprescindíveis para a continuidade do ensino na atualidade, fornecendo alternativas que, quando adequadamente aplicadas, podem auxiliar os professores, as escolas e os alunos no processo de ensino e aprendizagem, ao mesmo tempo que a pandemia mostrou essa necessidade de adequação e apropriação dos usos das tecnologias.

O ato de ensinar não dispensa ferramentas que revelam as competências dos estudantes, bem como aquelas que diversificam as estratégias do ensino. Assim, se faz necessário considerar a possibilidade das ferramentas e recursos disponíveis, bem como na capacitação daqueles que farão uso, para nortear a prática educativa implementada por essas novas tecnologias (PALAVISSINI, 2021).

Os avanços tecnológicos apresentam vantagens inestimáveis em todos os campos do conhecimento, desde a simples integração com o mundo, que a internet proporciona, até as descobertas científicas, as quais ganharam novas dimensões, facilitando a vida das pessoas (MARQUES, 2017). As TDIC’s correspondem a um conjunto de recursos digitais, apoiados em hardware (equipamentos físicos) e softwares (produtos lógicos), que visam tratar, organizar e disseminar as informações através de variadas formas, flexibilizando as maneiras como a comunicação pode ocorrer, seja a comunicação homem-homem, seja a comunicação homem-máquina (SILVA, 2020).

Ao longo das últimas décadas, as TDICs, têm alterado as formas de se trabalhar, de se comunicar, de se relacionar e de aprender. Na educação, elas têm sido incorporadas às práticas docentes como meio para promover aprendizagens mais significativas, com o objetivo de apoiar os professores na implementação de metodologias de ensino ativas, alinhando o processo de ensino-aprendizagem à realidade dos estudantes e despertando maior interesse e engajamento dos alunos em todas as etapas da Educação Básica (BRASIL, s.p.)

A Base Nacional Comum Curricular contempla o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais tanto de forma transversal – presentes em todas as áreas do conhecimento e destacadas em diversas competências e habilidades com objetos de aprendizagem variados – quanto de forma direcionada – tendo como fim o desenvolvimento de competências relacionadas ao próprio uso das tecnologias, recursos e linguagens digitais, ou seja, para o desenvolvimento de competências de compreensão, uso e criação de TDIC's em diversas práticas sociais, como destaca a competência geral 5 da BNCC:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p.9)

Incorporar as TDICs nas práticas pedagógicas e no currículo como objeto de aprendizagem requer atenção especial e não pode mais ser um fator negligenciado pelas escolas. É preciso repensar os projetos pedagógicos com o olhar de utilização das tecnologias e recursos digitais como apoio e suporte à implementação de metodologias ativas e à promoção de aprendizagens significativas, promovendo a democratização ao acesso e incluindo os estudantes no mundo digital (BRASIL, s.p.)

Além do uso das tecnologias para apoio à prática do ensino, como apresentações digitais, mostras de vídeos, etc e para o desenvolvimento de pesquisas, as TDIC's podem ser usadas para promover a criação de conteúdos digitais e uma possibilidade para isso é o uso de *softwares.*

Outra característica das TDICs que fundamenta seu uso na Educação está na possibilidade de utilizar esses recursos para diversificar as linguagens empregadas no processo de ensino-aprendizagem, a partir da integração de elementos multimidiáticos, possibilidade de animação de objetos na tela, com esse recurso, torna-se uma ferramenta essencial para complementar ou mesmo substituir muitas atividades desenvolvidas para o lápis e o papel. Na Matemática, por exemplo, muitos fenômenos podem ser simulados através de Softwares que são encontrados facilmente na Internet, o que viabiliza que sejam baixados e usados livremente.

A disseminação e a facilidade de uso dessas tecnologias criam condições para que a interação professor-aprendiz seja intensa, permitindo o acompanhamento do estudante e a criação de condições para o professor “estar junto”, vivenciando seus problemas e auxiliando-o a resolvê-los (VALENTE, 2014)

O uso dessas tecnologias digitais na educação cria caminhos, possibilidades para novas formas de aprender e de ensinar. Quando esses recursos interativos são inseridos no processo educacional, ocorrem transformações significativas no ensino, pois as ferramentas virtuais favorecem a construção de múltiplos conhecimentos (BALBINO et al., 2020)

Utilizar desses recursos é pensar em educação além das quatro paredes de uma sala de aula, visto que as tecnologias digitais potencializam o aprendizado dos alunos e aperfeiçoam a prática dos professores, podendo servir como ferramentas de suporte à educação (BALBINO et al., 2020).

Dada a importância das tecnologias no contexto educacional, as TDIC’s estão inseridas no campo das chamadas tecnologias da inteligência e por meio da linguagem digital essas tecnologias possibilitam ao ser humano expandir o seu conhecimento. Dessa forma, quando articuladas de forma adequada a uma prática formativa, representam ferramentas significativas no processo de ensino-aprendizagem, pois proporcionam estratégias de ensino que superam uma proposta tradicional para se tornarem estratégias essenciais para a construção dos saberes (BALBINO et al., 2020).

1.2 - BNCC e a tecnologia

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC - é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo de todas as etapas da Educação Básica. Engloba a política nacional da Educação Básica e contribui para a composição de outras políticas e ações, em cada esfera de governo, no que se refere à formação de professores, à avaliação da aprendizagem, ao desenvolvimento de conteúdos educacionais e aos critérios definidores de infraestrutura apropriada para o pleno desenvolvimento da oferta de educação (BRASIL, 2018).

Dessa forma, a BNCC almeja superar a fragmentação das políticas educacionais, possibilitando a consolidação do regime de colaboração nas três esferas de governo e a delimitação da qualidade da educação. Durante a Educação Básica, as aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC devem contribuir para garantir que o aluno desenvolva as dez competências gerais, que consolidam os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. É importante enfatizar que as dez competências gerais comunicam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores (BRASIL, 2018).

O documento deve ser interpretado como um conjunto de orientações para nortear a elaboração dos currículos pedagógicos em escolas particulares e públicas. Um dos propósitos da BNCC é formar estudantes com conhecimentos (conceitos e procedimentos) e habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais) consideradas essenciais para o século XXI. Na prática, incentiva a modernização dos recursos e práticas pedagógicas, com o uso da tecnologia.

Diante disso, a tecnologia presentifica a BNCC como um todo. Entretanto, as competências gerais, especialmente as de número 4 e 5, trazem mais detalhes de como aplicar a tecnologia na prática:

> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo (BRASIL, 2018, p.9).
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p.9).

Na competência 4, o documento prevê a utilização de diversas linguagens para a expressão e partilha de informações, entre elas a digital. Ou seja, o objetivo é diversificar as linguagens utilizadas em sala de aula, com o ensinamento delas para os outros alunos, e levar ao entendimento de todos. Já na competência 5, o assunto é o protagonismo do estudante durante as práticas escolares. Para isso, a (BNCC, 2018) orienta a criação e utilização de tecnologias digitais para a comunicação.

A BNCC explicita diferentes dimensões tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e a valores. O conceito atribuído a elas aparece especialmente no que concerne à distinção entre mundo digital e cultura digital, conforme segue:

> Pensamento Computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BRASIL, 2018, p. 474);
>
> Mundo Digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação (BRASIL, 2018, p. 474);
>
> Cultura Digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica (BRASIL, 2018, p. 474).

Na BNCC, são definidas competências e habilidades a serem desenvolvidas com o uso de tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho, nas diferentes áreas, que permitem aos estudantes:

> Buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais (BRASIL, 2018, p.474);
>
> Apropriar-se das linguagens da cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdos em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho (BRASIL, 2018, p. 475);
>
> Usar diversas ferramentas de software e de aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das

> diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática (BRASIL, 2018, p. 475);
>
> Utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p.475).

As versões digitais de objetos matemáticos geram uma noção de existência material, dada a possibilidade para alteração, exploração e produção de conteúdos em diversas mídias. Nesse sentido, os recursos digitais podem ser inseridos nas atividades dos alunos, transformando-os em instrumentos matemáticos, que facilitam o pensamento matemático. Desse modo, torna-se cada vez mais necessário considerar a importância da tecnologia na Educação Matemática.

Alguns problemas, pela dificuldade de abordagem com lápis e papel, exigem do aluno realizar experiências com objetos matemáticos para facilitar a observação diante da manipulação de seus elementos. Essas atividades devem ser planejadas de modo a proporcionar situações que ajudem os alunos a pensar matematicamente, através de atividades matemáticas com objetivos além do "aprender matemática", em direção ao "fazer matemática". Esses objetos podem ser explorados com o auxílio das tecnologias digitais através de software como o Geogebra, que pode ajudar na construção de conceitos matemáticos.

1.3 - A área de Matemática e suas tecnologias

A BNCC divide o currículo do Ensino Médio em cinco diferentes itinerários formativos, que são: Linguagens e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias; Ciências da natureza e suas tecnologias; Ciências humanas e sociais aplicadas; Formação técnica e profissional. Nos interessa pontuar nesse texto sobre a área de Matemática e suas tecnologias.

"A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p. 527). Para isso, propõe colocar em jogo, "os conhecimentos explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade" (Id. Ibidem).

O aluno terá como foco a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Sendo o aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018)

O aluno obterá uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em conta a realidade dos alunos do Ensino Médio, que são impactados de várias maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (BRASIL, 2018)

Diante disso, os alunos deverão desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para isso, devem instigar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Inclui-se, ainda, o desenvolvimento de competências que envolve o raciocinar, que será necessário em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática (BRASIL, 2018).

1.4 - Objetos Matemáticos

Uma das principais discussões no campo de pesquisa sobre ensino e aprendizagem de matemática é a dificuldade dos alunos em compreender seus conteúdos, à vista disso, inúmeras vertentes do campo da Educação matemática vêm buscando meios para solucionar ou minimizar este problema. Recursos didáticos e metodológicos têm sido utilizados como meios de promoção do aprendizado dos alunos. A exploração de objetos matemáticos, têm ganhado força e receptividade nos ambientes escolares, seja pela ludicidade e motivação para os alunos, como pela oportunidade de se trabalhar temas a respeito de conteúdos Matemáticos de maneira atrativa (CRUZ, 2019).

Um objeto matemático é, por natureza, abstrato. Pode ser uma representação ou qualquer situação que possa ser formalmente definida e com a qual se pode fazer raciocínio dedutivo e provas matemáticas. Normalmente, um objeto matemático inclui números, conjuntos, funções, expressões, objetos geométricos, transformações de outros objetos matemáticos e espaços. Desse modo, os objetos de estudo da Matemática não são objetos manipuláveis, acessíveis aos sentidos. Porém, o estudo da matemática consiste num contínuo processo de representação, de objetos concretos ou de situações concretas aonde se “dá vida” a essas entidades matemáticas. Sendo esse processo que favorece a compreensão do objeto matemático, dando-lhe sentido, fazendo-o relevante e importante para as situações do cotidiano (COSTA, 2016).

Pela definição, está evidente que os objetos matemáticos estão presentes no ambiente escolar, no entanto, explorá-los adequadamente é trampolim para a sua compreensão. Nesse sentido é que tecnologias digitais podem se fazer presente nesse contexto para a partir de interfaces interativas, animações que permitam a compreensão dos objetos matemáticos possam provocar no aluno motivação para compreender tais objetos matemáticos, por suas propriedades, relações, etc.

Os objetos geométricos, em específico, podem ser naturalmente explorados com recursos de geometria dinâmica, como é o caso do software Geogebra, permitindo com recursos de animação visualizar os processos desde a construção até a análise dos elementos que constituem o objeto geométrico.

1.5 - Demonstrações visuais

Demonstrações visuais são imagens ou esquemas que contribuem para o entendimento do por que uma afirmação matemática específica pode ser verdadeira, e a percepção de como começar a provar a veracidade de tal afirmação. Tais demonstrações podem ser pensadas como uma "prova" que utiliza de representações visuais, como, imagens ou outros meios visuais para expressar uma definição matemática, equação ou teorema (MATHIAS, 2019).

A demonstração matemática é fundamental para desenvolver, criar e comunicar os conhecimentos matemáticos. Então, a introdução tardia em sala de aula pode dificultar o desenvolvimento do pensamento matemático em atividades que necessitem de raciocínio dedutivo ou não. Dessa forma, a demonstração precisa integrar a experiência de todos os alunos em todos os níveis de ensino (Amado, 2015).

As dificuldades dos alunos podem ocorrer a partir da leitura do enunciado da atividade de demonstração, por isso, faz-se necessário iniciar com a apresentação de figuras, para facilitar o entendimento do que se pretende demonstrar, nesse caso dar ênfase aos objetos geométricos. Diante disso, a utilização das ferramentas tecnológicas como computador e os ambientes de geometria dinâmica podem oferecer importantes contribuições, tais como a possibilidade de construção e manipulação de figuras geométricas, com agilidade e perfeição, que é uma vantagem proporcionada pela possibilidade de utilização de softwares como o Geogebra que pode estruturar os raciocínios e potencializar a utilização da lógica dedutiva através da visualização de figuras geométricas e análise das propriedades, enquanto estruturas dinâmicas (Amado, 2015).

> A criação de figuras em ambientes de geometria dinâmica, como o Geogebra, é um fator promotor de conhecimento, na medida em que durante a construção os alunos estão a utilizar conceitos geométricos, permitindo que as figuras mantenham as propriedades durante a manipulação e desta forma observam resultados que se tornam invariantes e formulam conjeturas. (Amado, 2015, p. 645)

Desse modo, a promoção de construção e manipulação de objetos matemáticos, nesse caso, em específico os objetos geométricos por meio de demonstrações visuais podem favorecer interação e compreensão dos conceitos matemáticos, formulação e discussão de conjecturas.

1.6 - Softwares educacionais e classificação

Software educacional, “é todo aquele software que possa ser usado com algum objetivo educacional, pedagogicamente defensável, por professores e alunos, qualquer que seja o objetivo para o qual ele foi criado” (TAVARES, 2017, p.19). Ou seja, qualquer software pode ser utilizado para fins educacionais, mesmo não sendo explicitamente projetado para tal objetivo, entretanto, para que um software seja considerado educacional, ele deve atender aos objetivos que estão sendo propostos no contexto educacional, independente dos objetivos para qual foram projetados (TAVARES, 2017).

Os softwares educacionais contribuem para a construção do conhecimento dependendo dos objetivos, do planejamento e do momento em que forem aplicados pelo educador (DE PAULA, 2014). Contudo, os alunos aprendem quando lhe são oferecidos um ambiente familiar ao seu cotidiano, vocabulário adequado e liberdade para descobrir a relação entre aquilo que se aprende e a realidade onde vive. Com isto, o uso de softwares educacionais é considerado uma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem. (TAVARES, 2017).

Assim sendo, o uso de softwares educacionais pode propiciar experiências educacionais novas e ricas, ou pelo menos tornará muito mais eficiente o ensino efetivado nos moldes tradicionais. Para que isto ocorra, o software deve possuir características específicas, como ser de fácil utilização, favorecer a compreensão e a assimilação dos conteúdos, deve despertar o interesse e manter a atenção do usuário (TAVARES, 2017).

Os diversos softwares educacionais podem ser classificados de acordo com seus objetivos pedagógicos, são eles: software de exercitação, software de simulação, software de modelagem, software aplicativos, software de jogos educacionais, software tutoriais, software de linguagem de programação, software de investigação.

Os softwares de exercitação apresentam exercícios para a revisão de conteúdos, buscam reforçar fatos e conhecimentos e têm como principais características a memorização e a repetição, não tendo a preocupação de como o aluno está compreendendo o que está fazendo.

Esse tipo de software, além de apresentar o exercício, faz um apanhado das respostas, de modo a verificar o desempenho do usuário. Então, o professor terá à sua disposição dados importantes sobre como a aprendizagem é realizada a partir do ensino dos conteúdos curriculares. Um exemplo de software de exercitação é o Math Master - Brain Quizzes.

Os softwares de simulação permitem realizar atividades que não são possíveis de simular na realidade (orçamento financeiro, inexistência de laboratório, periculosidade da experiência, etc.), mas que os resultados visuais e/ou experimentais são satisfatórios e, em muitos casos, podem substituir o experimento real, ou seja, por meio da simulação, é criada uma situação que se assemelha com a realidade, onde o aluno pode testar, tomar decisões, analisar, sintetizar e aplicar conhecimentos.

A utilização desse software na educação é proveitosa para tomar decisões, testar diferentes hipóteses, e assim, ter um contato mais "real" com os conceitos envolvidos no problema em estudo. Um exemplo desses softwares é o Virtual Laboratory IrYdium.

Software de modelagem, o usuário pode simular um determinado acontecimento por meio do software. Entretanto, o software de modelagem e o software de simulação são distintos.

Na simulação, cabe ao usuário a alteração de certos parâmetros e a observação do comportamento do fenômeno, de acordo com os valores atribuídos. Na modelagem, o modelo do fenômeno é criado pelo aprendiz, que utiliza recursos de um sistema computacional para implementá-lo. Uma vez implementado, o aprendiz pode utilizá-lo como se fosse uma simulação. (TAVARES, 2017). Um exemplo desses softwares é o Modellus.

Softwares aplicativos são voltados para aplicações em atividades específicas como: processadores de texto, planilhas eletrônicas, de apresentação. Eles não foram desenvolvidos para uso educacional, porém, vem sendo adaptados com esse objetivo". Exemplo de Software Aplicativo: Excel, Word, Power point.

Jogos educativos é outro tipo de softwares que têm o objetivo de ensinar às pessoas sobre determinado assunto ou conceito de forma lúdica. Os jogos educativos possibilitam ao aluno aprender de maneira prazerosa e dinâmica, porque possuem desafios que despertam interesse e a motivação no processo de ensino aprendizagem (TAVARES, 2017). Um exemplo de jogo educativo é o Vrum Aprendendo sobre o trânsito.

Softwares tutoriais, utilizados para apresentar informações novas aos seus usuários, direcionar o aprendizado. As atividades são organizadas de acordo com uma sequência pedagógica particular e apresentadas aos usuários, seguindo essa sequência. Geralmente, contam com um grande número de recursos informativos, tornando-os auto suficientes, sem que haja a necessidade de os alunos recorrerem a outros recursos como enciclopédias, dicionários e sites de busca.

As mensagens de erro que aparecem têm o intuito de conduzir o aluno às respostas corretas, desejadas ou adequadas, ou seja, direcionar o aprendizado. Ao final de cada atividade, os softwares tutoriais dão feedback imediato e avaliam o desempenho do usuário. Um exemplo de software tutorial é a tabela periódica virtual.

Softwares de linguagem de programação, que segundo TAVARES (2017) "são softwares que permitem que as pessoas, professores ou alunos, criem seus próprios protótipos de programas". Com eles, é possível a criação de diferentes softwares, sem precisar de conhecimentos avançados sobre programação, com a implementação de várias mídias (som, vídeo, movimento etc.) que favoreçam a interação do usuário com o software projetado. Scratch é um exemplo de software de programação.

Resolução de problemas: são softwares que estimulam habilidades nos alunos como a capacidade de resolução de problemas e tomada de decisões. Possuem, normalmente, caráter lógico-matemático.

Por fim, os softwares de investigações: nesta categoria enquadram-se todos os softwares capazes de localizar informações complementares, são as versões computadorizadas de materiais utilizados nas pesquisas escolares, como dicionários, enciclopédias, atlas, entre outros. A vantagem desses softwares em relação à versão impressa é a rapidez na busca, o uso de recursos multimídia (vídeos, sons, imagens, textos) para auxiliar nas explicações e a facilidade de atualização desses dados. São exemplos deles, as Enciclopédias e os Dicionários.

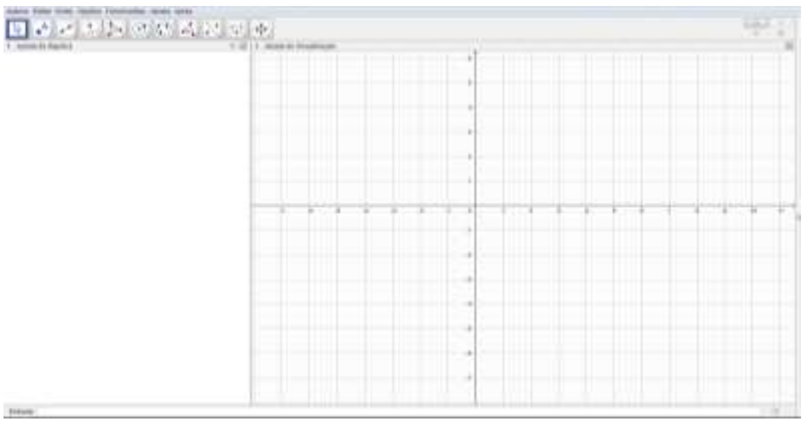
1.7 - Software Geogebra

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (Interface Gráfica do Utilizador). É um software livre, disponível gratuitamente em www.geogebra.org, escrito em linguagem Java.

É um software educacional de simulação, criado por Markus Hohenwarter, em 2001, para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino com o objetivo de auxiliar o professor no ensino e aprendizagem de matemática, em diferentes temas.

O GeoGebra possui uma interface intuitiva que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros, proporcionando aos educandos uma investigação, interação, testagem e conclusão das atividades que eles mesmos construíram. Com isso, o aluno constrói seu conhecimento interagindo com a ferramenta através da construção e resolução das atividades. Ao abrir o software GeoGebra, tem-se a seguinte tela inicial, conforme figura 1, que inclui a barra de ferramentas, janela de álgebra, caixa de entrada e janela de visualização.

Figura 1: Tela inicial do Geogebra (interface)

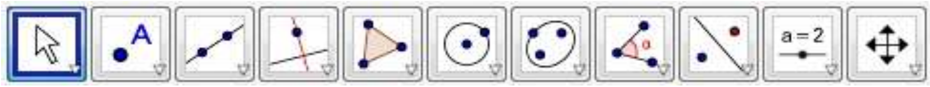


Fonte: Do autor.

Cada uma das janelas do GeoGebra possibilita diferentes representações de conceitos matemáticos ou formas de explorações, por exemplo, na “Janela de Visualização” podem-se realizar construções geométricas usando apenas o mouse e as ferramentas disponíveis na “Barra de Ferramentas” ou comandos digitados no campo “Entrada”.

A figura 2 mostra a “Barra de Ferramentas” onde encontra-se inúmeras ferramentas para construção de diferentes conceitos geométricos, cada ícone representa uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma dessas caixas, deve-se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone. Cada uma das ferramentas pode ser utilizada na janela de visualização, respeitando conceitos matemáticos, depois de inseridos nesta janela, o GeoGebra converte a construção realizada na forma algébrica e apresenta os resultados na “Janela de Álgebra”, como a lei das funções, que são inseridas no campo “Entrada”, as equações das figuras geométricas inseridas na Janela Gráfica ou coordenadas de localização de um ponto, quando for o caso, etc.

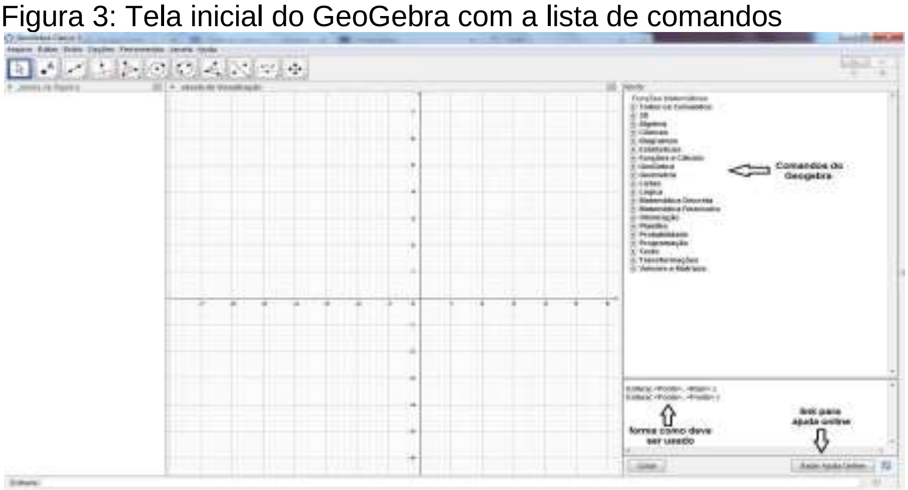
Figura 2: Barra de ferramentas



Fonte: Do autor.

As mesmas construções criadas utilizando o mouse e as ferramentas podem ser criadas usando a “Caixa de Entrada”, nesta é possível inserir comandos que, após confirmados com um “Enter”, aparecem na “Janela de Álgebra”, dependendo do tipo de informação digitada também é representada na “Janela de Visualização", como pontos, funções, etc. Caso o usuário não conheça os comandos que executam determinadas tarefas, é possível visualizá-los clicando no botão “Ajuda”, localizado no canto inferior direito da tela do GeoGebra, ao clicar nesse ícone é aberta uma lista, como mostra a figura 3, contendo todos os comandos disponíveis no software e a forma como cada um deve ser usado, além de um link para ajuda online sobre cada um dos comandos nele listado.

Figura 3: Tela inicial do GeoGebra com a lista de comandos



Fonte: Do autor.

O GeoGebra conta ainda com a “Janela de Cálculo”, que é similar às planilhas de cálculos das plataformas Office e BrOffice, respectivamente o “Excel” e o “Calc”. Na “Janela de Cálculo” do GeoGebra cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente e ser utilizada como incógnita nas expressões algébricas, por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1. Nas células, além dos valores numéricos, podem ser inseridos todo tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (por exemplo, coordenadas de pontos, expressões, funções, comandos), os quais podem ser plotados na “Janela Gráfica". A janela de cálculos também permite a manipulação de dados e sua posterior análise estatística.

Em se tratando de um software dinâmico, gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente, ou seja, cada elemento que é alterado na janela de álgebra, também sofre alteração na janela gráfica e na de cálculo e vice-versa. Este fato o torna um software com grande potencial para favorecer o processo de ensino e aprendizagem, por possibilitar o trabalho com diferentes representações e aspectos matemáticos (algébricos, geométricos e aritméticos) simultaneamente e de forma dinâmica, ele possibilita a elaboração de tarefas exploratórias que proporcionam ao aluno pensar e fazer matemática, de modo a construir e significar ideias matemáticas com certa autonomia, rompendo com o ensino pautado na “transmissão de conhecimento”. Contudo, isso envolve necessariamente uma mudança na percepção do professor sobre o processo didático e sobre sua função em meio ao processo de ensino e aprendizagem, já que ele passa a ter a função de estruturar tarefas desafiadoras e que ofereçam as condições para o engajamento do aluno na atividade, enquanto o professor media e provoca esse aluno para que as ideias sejam desencadeadas e articuladas (BASNIAK, 2014).

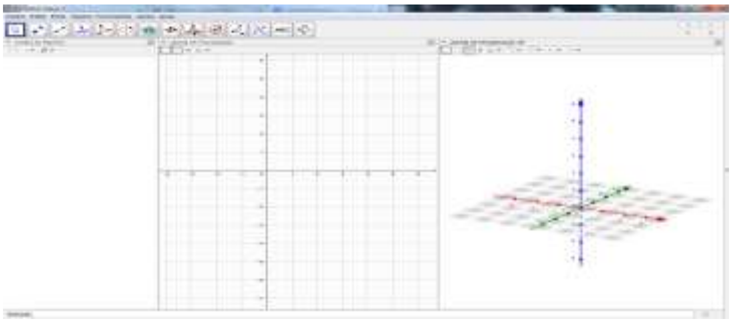
Na Janela de Visualização 3D, são realizadas as construções de objetos tridimensionais, que pode ser exibida tanto clicando na barra de menu: “Exibir → Janela de Visualização 3D”, conforme apresentado na Figura 4, quanto pressionando-se simultaneamente as teclas “Ctrl + Shift + 3”.

Figura 4: Menu Exibir

Fonte: Do autor.

O GeoGebra carrega esta janela ao lado das janelas já carregadas no Software, quando exibe-se as duas janelas, 2D e 3D, existem elementos que se relacionam por meio do plano XOY, comum às duas janelas, conforme mostra a Figura 5.

Figura 5: Tela inicial do GeoGebra com a Janela de visualização 3D



Fonte: Do autor.

A vantagem desta nova janela na área de trabalho do GeoGebra não está apenas em novas possibilidades de construção de objetos tridimensionais, mas em sua integração com as Janelas de Álgebra e Janela de Visualização (2D).

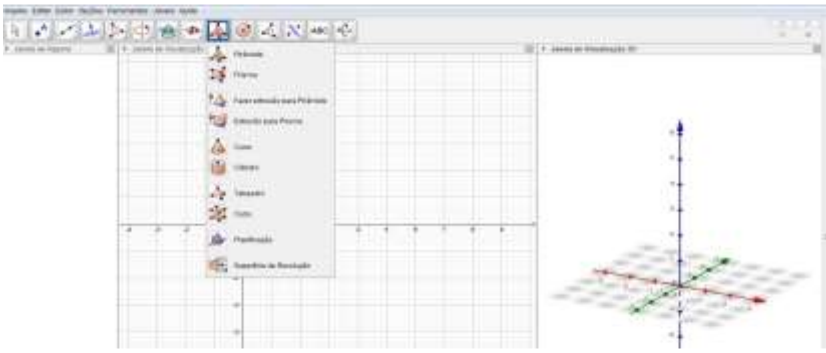
Com a janela de visualização 3D carregada, a barra de ferramentas mostrada na figura 6, apresenta novos ícones de fundamental importância na construção de alguns sólidos e suas respectivas planificações.

Figura 6: Barras de Ferramentas da Janela de Visualização 3D

Fonte: Do autor.

Ao clicar sobre a seta no canto inferior do ícone, tem-se acesso a outras opções que possibilita a construção e planificação de objetos 3D, evidenciado na Figura 7.

Figura 7: Opções de construção e planificação de objetos 3D

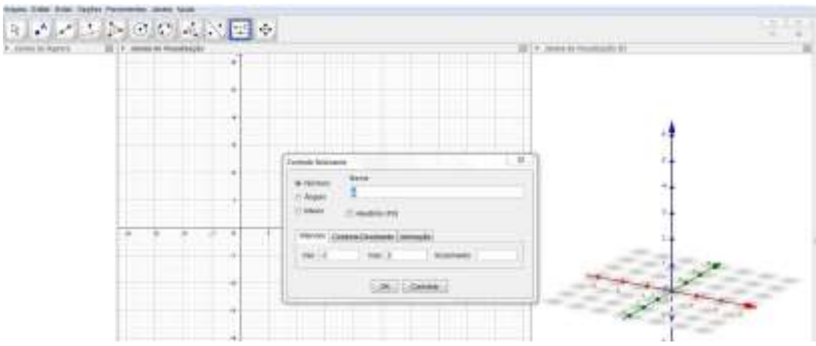


Fonte: Do autor.

Em geral, o software GeoGebra oferece duas opções para construir os diversos objetos tridimensionais: usando os menus da barra de ferramentas ou digitando-se comandos na janela de entrada. Os objetos construídos recebem rótulos e suas expressões matemáticas ficam visíveis na Janela de Álgebra.

Existe ainda, a possibilidade de animar controles deslizantes favorecendo a visão do movimento, para isso precisamos criar um controle deslizante, ativando a ferramenta “Controle deslizante” , situado na barra de ferramentas e clicar sobre o local desejado na janela de visualização. Em seguida, aparecerá uma janela com opções para nomear, especificar o intervalo e incremento e alterar as propriedades do controle deslizante, conforme mostra a figura 8.

Figura 8: Controle deslizante



Fonte: Do autor.

O uso de um controle deslizante possibilita visualizar as variações em objetos (manualmente ou automaticamente). Isto é, o indivíduo que manipula o software tem a possibilidade de perceber a ação de planificação, por exemplo, e caso queira parar a planificação, em algum momento particular, há a alternativa de fazê-lo.

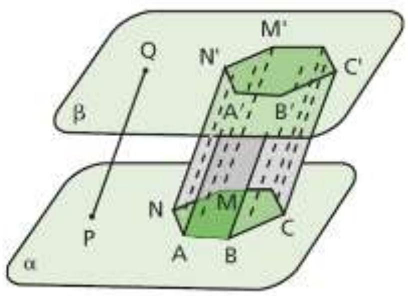
CAPÍTULO II - GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo, é apresentado o conteúdo matemático discutido nas três atividades propostas na sequência didática, onde define-se alguns tipos de sólidos geométricos, como: prisma, cilindro, pirâmide e esfera. Apresenta-se seus elementos, classificações, suas áreas e volumes.

2.1 - Prisma: Definição

Considera-se um polígono convexo (região poligonal convexa) ABCD... MN situado num plano α e um segmento de reta $\underline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α, como mostra a figura 9. Chama-se prisma (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\underline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi espaço dos determinados por α.

Figura 9: Prisma Convexo



Fonte: Dolce, 2013

2.1.1 - Elementos do prisma

Em um prisma temos os seguintes elementos:

Bases: são os polígonos congruentes e que estão situados nos planos paralelos entre si.

Arestas das bases: são os lados dos polígonos das bases paralelas entre si.

Arestas das bases: são os lados dos polígonos das bases.

Faces laterais: são as demais faces do prisma, exceto as bases.

Arestas laterais: são as demais arestas do prisma, exceto as das bases.

Altura: é a distância entre os planos das bases.

2.1.2 - Superfícies

Superfície lateral é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada de área lateral e é indicada por A_l.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada de área total e é indicada por A_t.

2.1.3 - Classificação de um prisma

Um prisma pode ser reto ou oblíquo.

Prisma reto: é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares às bases, e a altura h corresponde ao comprimento da aresta lateral.

Prisma oblíquo: é aquele cujas arestas laterais são oblíquas em relação às bases, e a altura está relacionada ao comprimento l da aresta e ao ângulo α de inclinação. Esse é o ângulo entre a aresta lateral e sua projeção ortogonal no plano da base.

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

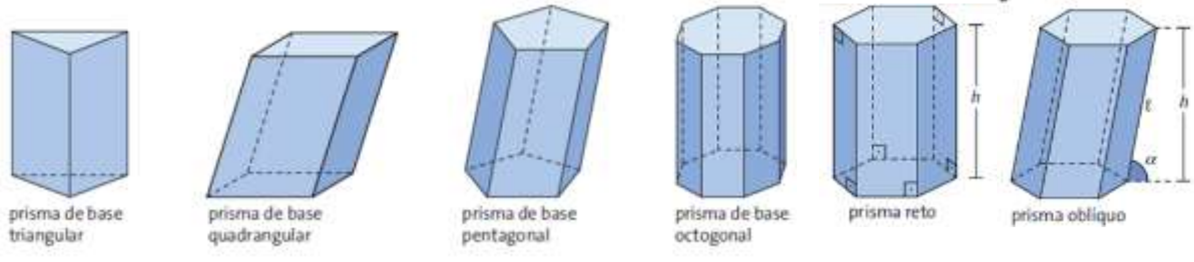
De acordo com o polígono da base, um prisma pode ser denominado:

Triangular, se a base for um triângulo;

Quadrangular, se a base for um quadrilátero;

Pentagonal, se a base for um pentágono; e assim por diante. A figura 10 mostra algumas dessas denominações.

Figura 10: Prismas



Fonte: ANDRADE, 2020

2.1.4 - Paralelepípedo

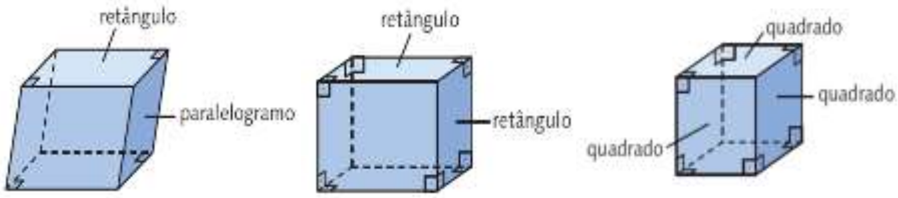
Alguns prismas quadrangulares recebem nomes especiais de acordo com suas características, um deles é o paralelepípedo, prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. Um paralelepípedo também pode ser reto ou oblíquo, como mostra a figura 11.

Dentre os paralelepípedos, temos:

Paralelepípedo retângulo: as bases são retângulos.

Paralelepípedo reto retângulo: as bases e as faces laterais são retângulos. Se um paralelepípedo reto retângulo tem todas as faces quadradas, recebe o nome de cubo.

Figura 11: Paralelepipedos

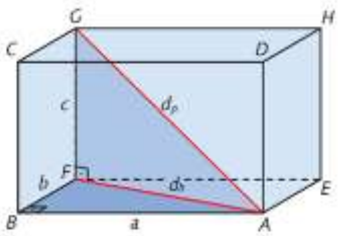


Fonte: ANDRADE, 2020

2.1.5 - Diagonal do paralelepípedo reto retângulo

Observe o paralelepípedo reto retângulo representado na figura 12:

Figura 12: Diagonal do paralelepipedo



Fonte: ANDRADE, 2020

a , b e c são as dimensões do paralelepípedo.

d_p é o comprimento da diagonal do paralelepípedo.

d_b é o comprimento da diagonal da base do paralelepípedo.

Note que o ΔABF é retângulo e que d_b corresponde ao comprimento de sua hipotenusa.

Note que o ΔAFG também é retângulo e que d_p corresponde ao comprimento de sua hipotenusa.

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos que, no ΔABF o comprimento da diagonal da base é:

$$(d_b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se um paralelepípedo reto retângulo é um cubo, temos $a = b$, nesse caso teremos:

$$d_b = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

No ΔAFG, teremos o comprimento da diagonal do paralelepipedo é:

$$\left(d_p\right)^2 = (d_b)^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

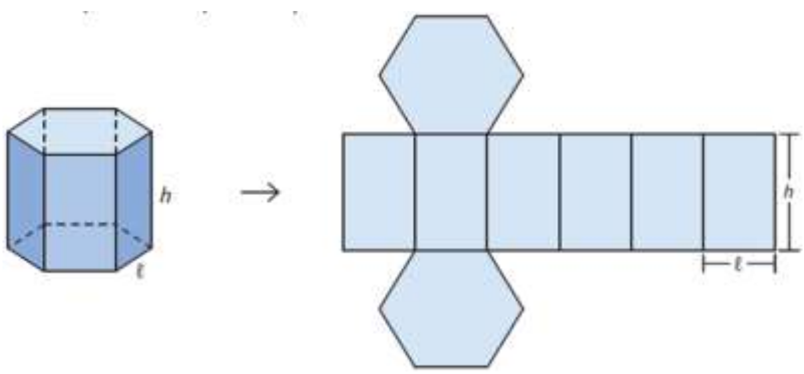
Se um paralelepípedo reto retângulo é um cubo, temos $a = b = c$, nesse caso teremos:

$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d_p = a\sqrt{3}$$

2.1.6 - Área da superfície de um prisma

Na figura 13 está representado um prisma regular de base hexagonal e a planificação da respectiva superfície.

Figura 13: Planificação de um prisma



Fonte: ANDRADE, 2020

A superfície lateral de um prisma é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada área lateral do prisma A_l.

No caso do prisma apresentado, a área lateral é 6 vezes a área de uma face lateral (retângulo), isto é:

$A_l = 6hl$, onde $h.l$ é a área de uma face lateral

A área da base corresponde à área do polígono que constitui sua base A_b.

No caso do prisma apresentado, a área da base é a área do hexágono regular, isto é, 6 triângulos equiláteros.

$$A_b = 6.\frac{l^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

A superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada área total do prisma A_t.

A área total de um prisma é a área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = A_l + 2.A_b$

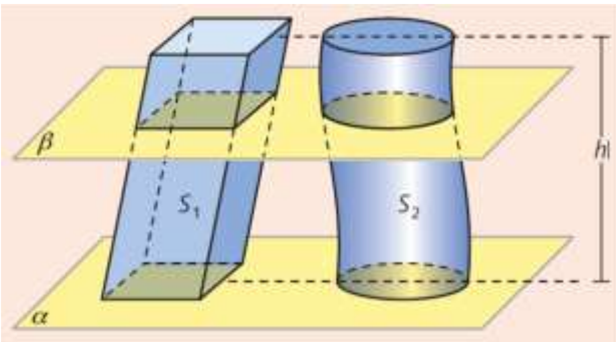
No caso do prisma apresentado, teremos:

$$A_t = A_l + 2.A_b \Rightarrow A_t = 6hl + 2.\frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = 6hl + 3l^2\sqrt{3}$$

2.2 - Princípio de Cavalieri

Sejam dois sólidos, S_1 e S_2, de mesma altura h, apoiados em um mesmo plano horizontal α, como mostra a figura 14. Se todo plano paralelo a α cortar um dos sólidos e cortar também o outro, determinando duas regiões planas de mesma área, então esses sólidos têm volumes iguais.

Figura 14: Princípio de Cavalieri



Fonte: ANDRADE, 2020

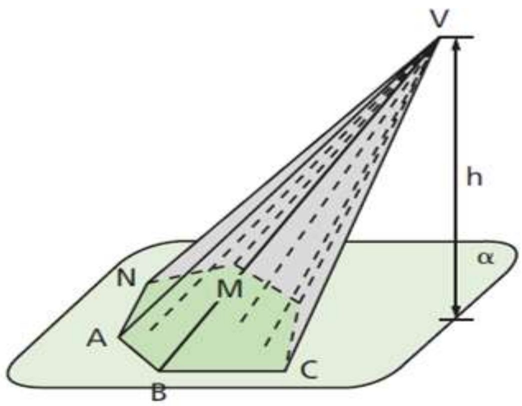
O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado; no entanto, não será demonstrado, apenas considera-se verdadeiro.

2.3 - Pirâmide: Definição

Considera-se um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC... MN situado num plano α e um ponto V fora de α, conforme mostra a figura 15. Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

V é o vértice, e o polígono ABC ... MN é a base da pirâmide.

Figura 15: Pirâmide



Fonte: DOLCE, 2013

2.3.1 - Elementos de uma pirâmide

Em uma pirâmide, temos os seguintes elementos:

Base: é o polígono ABC…MN;

Vértice: é o ponto V.

Arestas da base: são os lados do polígono da base: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$,…

Arestas laterais: são as demais arestas da pirâmide, exceto as da base: $\overline{AV}$, $\overline{BV}$,…

Faces laterais: são os triângulos: ΔABV, ΔBCV, ...

Altura: é a distância entre o plano da base e o vértice V.

Apótema da pirâmide: é a altura de uma face lateral relativa à aresta da base.

Apótema da base: é a distância entre o centro do polígono da base e sua respectiva aresta da base.

Altura da pirâmide: é a distância entre o plano da base e o vértice V da pirâmide.

2.3.2 - Classificação

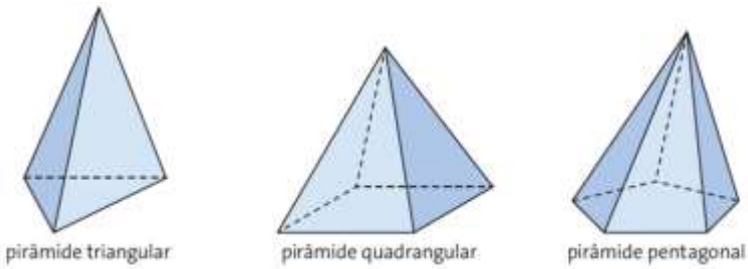
De acordo com o polígono da base, uma pirâmide pode ser denominada:

Triangular (ou tetraedro), se a base for um triângulo;

Quadrangular, se a base for um quadrilátero;

Pentagonal, se a base for um pentágono; e assim por diante, como mostra a figura 16.

Figura 16: Tipos de pirâmides



Fonte: ANDRADE, 2020

Pirâmide reta: a altura é perpendicular ao plano da base.

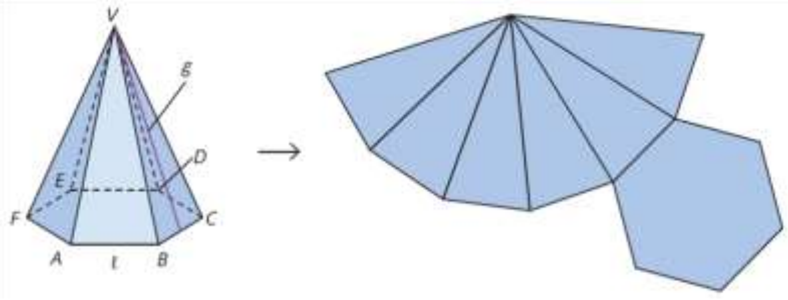
Pirâmide oblíqua: a altura é oblíqua ao plano da base.

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice no plano que contém sua base coincide com o centro do polígono da base. Em uma pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Vale destacar que toda pirâmide regular é, necessariamente, uma pirâmide reta, mas nem toda pirâmide reta é regular.

2.3.3 - Área da Superfície de uma Pirâmide

A figura 17 representa uma pirâmide regular de base hexagonal e a planificação de sua superfície.

Figura 17: Planificação de uma pirâmide



Fonte: ANDRADE, 2020

A superfície lateral de uma pirâmide é a reunião de todas as suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada área lateral da pirâmide e é indicada por A_l. No caso da pirâmide representada na figura xx, a área lateral é 6 vezes a área de uma face.

$A_l = 6.\left(\frac{l.g}{2}\right) = 3lg$, onde $\left(\frac{l.g}{2}\right)$ é a área de uma face lateral.

A área da base de uma pirâmide corresponde à área do polígono que a constitui A_b. No caso da pirâmide apresentada, a área da base é a área do hexágono regular, isto é, de 6 triângulos equiláteros:

$$A_b = 6.\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3.\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

Superfície total de uma pirâmide é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada de área total e é indicada por A_t.

A área total de uma pirâmide é a área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_l + A_b$, no caso da pirâmide apresentada, teremos:

$$A_t = A_l + A_b = 3lg\ + 3.\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

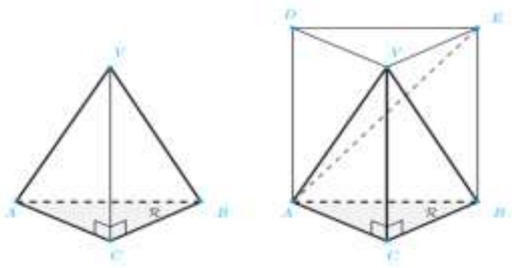
2.3.4 - Volume de uma pirâmide.

O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Ou seja, se *B* é a base da pirâmide, e *h* sua altura então seu volume é:

$$V = \frac{AB.h}{3}$$

Demonstração: assume-se que uma pirâmide ABCV é triangular com uma de suas arestas laterais perpendicular ao plano da base. Agora constrói-se um prisma triangular reto sobre a pirâmide ABCV, como apresentado na figura 18.

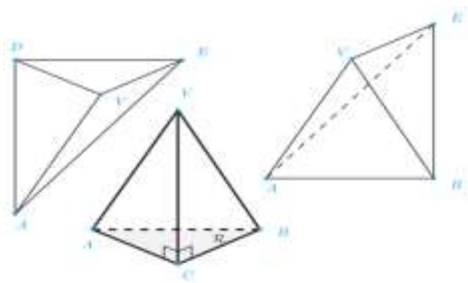
Figura 18: Prisma triangular reto



Fonte: MACHADO, 2013

Em seguida desmembra-se o prisma em três pirâmides, como mostra a figura 19. As três pirâmides são ADEV , ABEV e ABCV. Mostra-se agora que estas três pirâmides possuem o mesmo volume.

Figura 19: desmembramento da pirâmide



Fonte: MACHADO, 2013

I. As pirâmides ADEV e ABEV possuem o mesmo volume:

Considera-se △ADE e △AEB como bases, respectivamente, destas duas pirâmides. Assim, a distância do vértice (V) ao plano determinado pelos triângulos △ADE e △AEB é a altura (h) das duas pirâmides. Então, △ADE ≡ △AEB pelo caso de congruência LAL, logo:

$Área(\triangle \text{ADE}) = Área(\triangle \text{AEB})$.

Como as duas pirâmides possuem bases de mesma área e alturas iguais, Teremos:

$Volume$(ADEV) $=$ $Volume$(ABEV)

II. As pirâmides ADEV e ABCV possuem o mesmo volume:

Considera-se △DEV e △ABC como bases, respectivamente, das duas pirâmides. Como estes triângulos são as bases do prisma reto construıdo, então △DEV ≡ △ABC. Além disso, a altura destas duas pirâmides relativa às bases escolhidas é exatamente a distância entre os planos das bases. Assim são pirâmides com mesma área da base e mesma altura, então:

$Volume$(ADEV) $=$ $Volume$(ABCV).

Concluı-se então que:

$Volume$(ADEV) $=$ $Volume$(ABEV) $=$ $Volume$(ABCV).

Como o volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua base pela sua altura, tem-se que:

$Volume$(ABCVDE) $= A_b . h$, ou seja

$V_{prisma} = A_b . h$, onde h é a distância entre os planos das bases do prisma.

Tem-se ainda que

$V_{prisma} = Volume$(ADEV) $+ Volume$(ABEV) $+ Volume$(ABCV)

$V_{prisma} = 3. Volume$(ABCV) $\Rightarrow Volume$(ABCV) $= \frac{V_{prisma}}{3}$

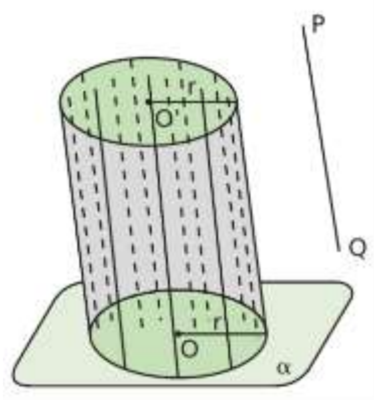
portanto, o volume da pirâmide é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_b . h}{3}$$

2.4 - Cilindro: Definição

Considera-se um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano a, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α, como mostra a figura 20. Chama-se cilindro circular ou cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α.

Figura 20: Cilindro



Fonte: DOLCE, 2013

2.4.1 - Elementos de um cilindro

Em um cilindro, podemos destacar alguns elementos. No cilindro ao lado, temos:

Bases: são os círculos paralelos de centros O e O’ e raio cuja medida do comprimento é r.

Altura: é a distância entre os planos que contêm as bases.

Eixo: é a reta que contém os centros dos círculos das bases.

Geratriz: é cada segmento de reta paralelo ao eixo com extremidades

nos pontos da circunferência das bases.

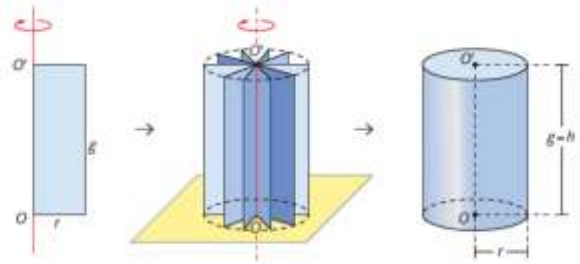
Superfície lateral: é a reunião de todas as geratrizes do cilindro.

2.4.2 - Classificação

Um cilindro pode ser reto ou oblíquo.

Cilindro reto: é aquele cujo eixo é perpendicular aos planos que contêm as bases. A figura 21 mostra um cilindro reto também chamado de cilindro de revolução, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

Figura 21: Cilindro de revolução

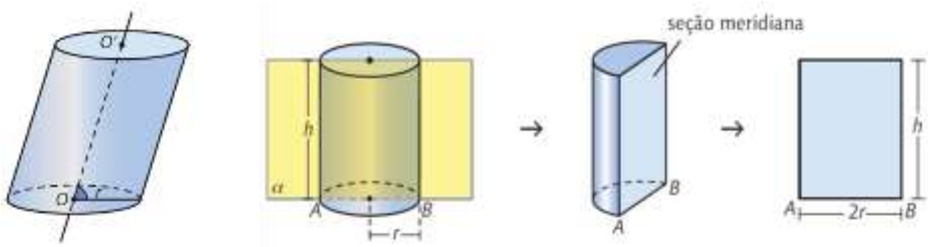


Fonte: ANDRADE, 2020

Cilindro oblíquo: é aquele cujo eixo é oblíquo aos planos que contêm as bases.

A figura 22 mostra a interseção de um cilindro e um plano que passa por seu eixo que é denominada seção meridiana do cilindro. A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo, caso seja um quadrado, diz-se que esse cilindro é equilátero.

Figura 22: Cilindro oblíquo e seção meridiana



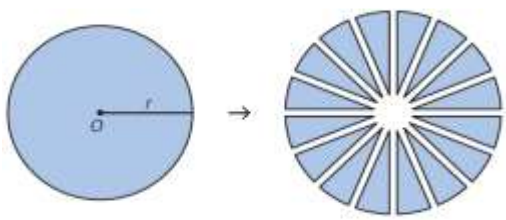
Fonte: ANDRADE, 2020

2.4.3 - Área do círculo

Antes de se calcular a área total de um cilindro, é preciso estudar como se calcula a área de um círculo, que é a base do cilindro.

Inicialmente, decompõe-se um círculo de raio r e centro O em 16 partes iguais, conforme figura 23.

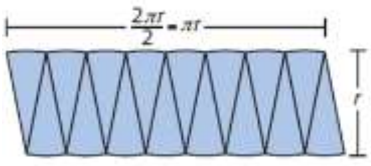
Figura 23: Circulo



Fonte: ANDRADE, 2020

Em seguida, organiza-se essas partes conforme representado na figura 24.

Figura 24: Partes do círculo



Fonte: ANDRADE, 2020

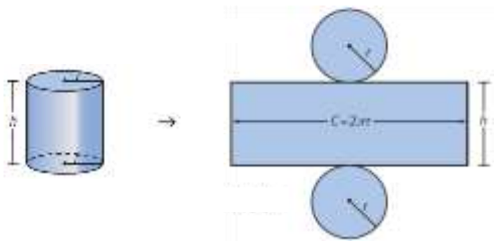
Note que a figura obtida lembra um paralelogramo de altura r e comprimento πr . Quanto maior a quantidade de partes em que o círculo for dividido, mais a figura obtida se aproximará de um paralelogramo. Como a área de um paralelogramo pode ser calculada multiplicando-se o comprimento da base pela altura, tem-se que:

$A_P = b.h = \pi r.r \Rightarrow A_P = \pi r^2$, como o paralelogramo é composto de todas as partes do círculo, a área do círculo é igual a πr^2, tem-se que a área de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$.

2.4.4 - Área da superfície de um cilindro reto

A figura 25 mostra a representação de um cilindro reto e a planificação de sua superfície.

Figura 25: Planificação do cilindro



Fonte: ANDRADE, 2020

A área da base de um cilindro é a área do círculo que é sua base, ou seja, $A_b = \pi r^2$.

A superfície lateral de um cilindro reto é a reunião de todas as suas geratrizes. Planificada, essa superfície corresponde a um retângulo de dimensões $2\pi r$, referente ao comprimento da circunferência da base, e h, que é a altura do cilindro. A área dessa superfície é chamada área lateral do cilindro (A_l).

$$A_l = 2\pi r.h$$

A superfície total de um cilindro é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada área total do cilindro (A_t).

$A_t = A_l + 2.A_b$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_t = 2\pi r.h + 2.\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h + r)$$

2.4.5 - Volume do cilindro

Considera-se um cilindro qualquer e um prisma de base quadrangular, ambos de altura h, apoiados em um plano horizontal α, de modo que suas bases tenham áreas iguais. Se um plano β qualquer paralelo a α cortar os dois sólidos determinando duas regiões planas de mesma área, então, pelo Princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais. Logo:

$V_c = V_p$, como $V_p = A_b.h$, teremos

$V_c = A_b.h$, onde A_b é a área da base do cilindro, assim

$$V_c = \pi r^2.h$$

2.5 - Esfera: Definição

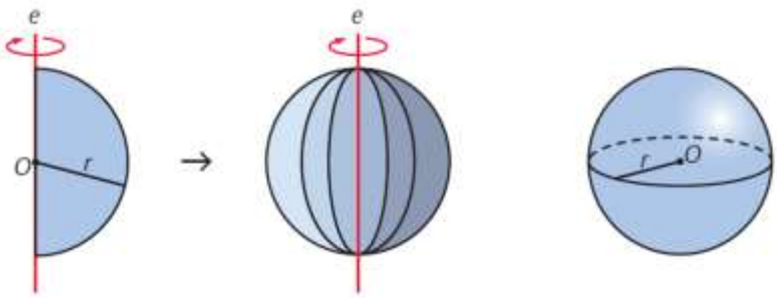
Pode-se definir esfera da seguinte maneira:

Sejam um ponto *O* e um número real positivo *r*. O conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação a O são iguais a *r* denomina-se superfície esférica de centro *O* e raio *r*.

O sólido limitado por uma superfície esférica é chamado esfera. Uma esfera de centro *O* e raio *r* é o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação a *O* são menores ou iguais a *r*.

A esfera também pode ser definida como um sólido de revolução, obtido da rotação completa de um semicírculo em torno da reta que contém o seu diâmetro, conforme mostra a figura 26.

Figura 26: Esfera



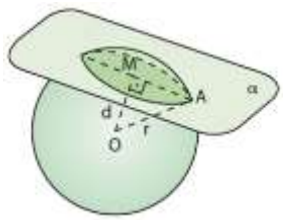
Fonte: ANDRADE, 2020

2.5.1 - Seção Esférica

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Sendo *r* o raio da esfera, *d* a distância do plano secante ao centro e *s* o raio da seção, conforme figura 27, tem-se que :

Figura 27: Seção esférica



Fonte: DOLCE, 2013

Teorema de Pitágoras no ΔOMA:

$$r^2 = d^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = r^2 - d^2$$

2.5.2 - Elementos da esfera

Em uma esfera, pode-se destacar alguns elementos, como mostra a figura 28.

Eixo: é uma reta que passa pelo centro *O* da esfera, no caso da figura 28, a reta *e*. Em relação a esse eixo, define-se os pólos, o equador, os paralelos e os meridianos.

Polos: são as interseções do eixo com a superfície esférica P_1 e P_2.

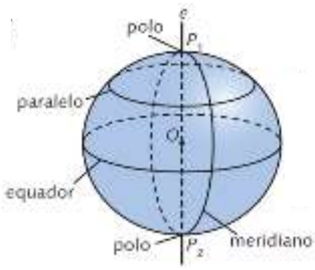
Equador: é a circunferência obtida pela interseção da superfície esférica e o plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro *O*.

Paralelo: é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo.

Meridiano: é qualquer seção (circunferência) cujo plano que a contém passa pelo eixo.

Seção da esfera: é o círculo obtido pela interseção da esfera e um plano secante a ela. Se o plano secante contém o centro *O* da esfera, tem-se um círculo máximo.

Figura 28: Elementos da esfera



Fonte: ANDRADE, 2020

2.5.3 - Cálculo do volume de uma esfera

Conforme figura 29, considera-se um cilindro equilátero de raio da base *r* (a altura é 2*r*) e seja *S* o ponto médio do eixo do cilindro. Considera-se ainda, dois cones tendo como bases as do cilindro e *S* como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra). Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido *X* (este sólido *X* é chamado anticlépsidra).

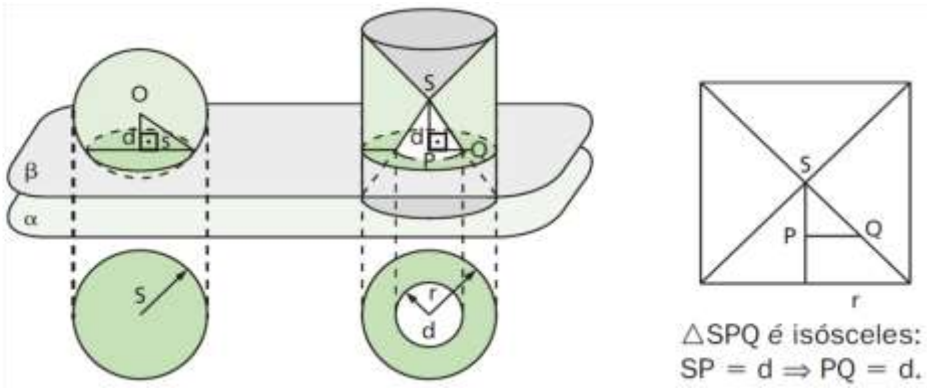
Figura 29: Clépsidra e anticlépsidra

Fonte: DOLCE, 2013

Considera-se agora uma esfera de raio *r* e o sólido *X* descrito.

Supõe-se que a esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semi espaço dos determinados por α, como mostra a figura 30.

Figura 30: Volume da esfera



Fonte: DOLCE, 2013

Qualquer plano secante β, paralelo a α, distando *d* do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X. Temos:

Área da seção na esfera = $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$

Área da seção no sólido X = $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$

As áreas das seções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$$V_{esfera} = V_{sólido\ X}$$

como:

$V_{sólido\ X} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$, tem-se que:

$V_{sólido\ X} = \pi r^2 . 2r - 2.\left(\frac{\pi r^2}{3}.r\right)$, pois $h = 2r$. Então:

$$V_{sólido\ X} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow V_{sólido\ X} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Portanto, o volume de uma esfera de raio *r* é: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

CAPÍTULO III - CONSTRUÇÃO DOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Buscando colaborar com a prática docente, construiu-se alguns objetos matemáticos com o uso do Geogebra para auxiliar na aplicação de uma sequência didática envolvendo áreas e volumes de alguns sólidos geométricos, a fim de facilitar a compreensão desses conceitos e permitir aos alunos o desenvolvimento de processos de exploração e visualização, apropriando-se de demonstrações visuais.

A seguir descreve-se o passo a passo dessa construção e a aplicação de animação utilizando o software Geogebra.

3.1 - Área da superfície de um prisma

A superfície lateral de um prisma é a reunião de todas as suas faces laterais, que é denominada de área lateral do prisma (A_l); a área da base corresponde à área do polígono que constitui sua base (A_b) e a superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases, denominada de área total do prisma (A_t).

Com as janelas de álgebra, de visualização e visualização 3D exibidas, será necessário construir um prisma, cuja quantidade de lados da base e o comprimento desses lados variam de acordo com os controles deslizantes “l” e “c”, respectivamente, e a altura do prisma variando de acordo com o controle deslizante “h”, para isso cria-se os controles deslizantes “c” e “h”, selecionando a ferramenta “Controle Deslizante” localizado na barra de ferramentas da “Janela de Visualização” e clicando nesta janela de visualização, uma caixa de opções será exibida. Para o campo “Nome” preencher “c” e nos campos “min:”, “max:” e “incremento:” preencher “1”, “6” e “1”, respectivamente. Na aba “Animação” preencher “2” no campo “Velocidade”, prosseguir de maneira análoga para o controle deslizante “h”. Para o controle deslizante “l” deve-se preencher “3”, “6” e “1” os campos “min:”, “max:” e “incremento:” respectivamente e na aba “Animação” preencher “2” no campo “Velocidade”. É possível posicionar os controles deslizantes em qualquer lugar da “Janela de Visualização” bastando clicar no controle deslizante e segurar o clique para arrastá-lo até o local desejado.

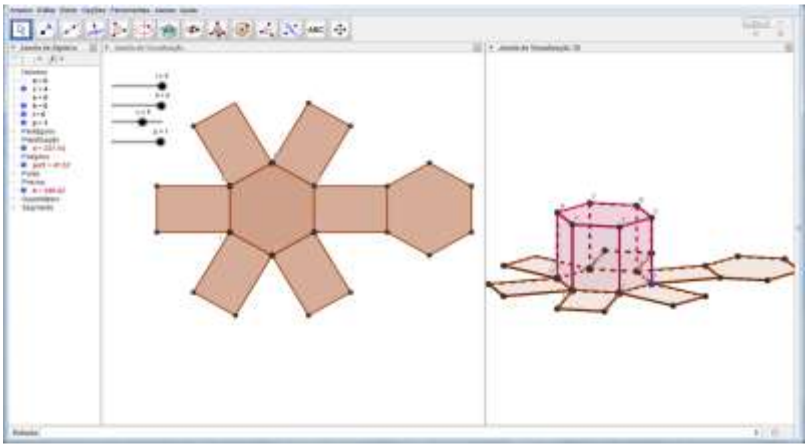
Na sequência, cria-se os pontos A e B inserindo, no campo “Entrada”, os comandos (0,0,0) e (0,c,0), respectivamente. Em seguida constrói-se um polígono, inserindo no campo “Entrada”, os comandos “Polígono(A,B,l)” e ao clicar “Enter” o polígono “pol1” será exibido. Observa-se que ao movimentar o controle deslizante “l”, a quantidade de lados do polígono varia de 3 a 6, assim como o comprimento dos lados varia de acordo com o movimento do controle deslizante “c”.

Para melhorar a visualização ocultam-se os eixos e o plano XYZ da “Janela de Visualização 3D” e os eixos e malhas da “Janela de Visualização”, com o botão direito do mouse clique na janela de visualização 3D e em seguida, nas opções “Eixos” e “Plano” para desativá-los. Processo análogo para desativar eixos e malhas da janela de visualização

Para construir o prisma é preciso inserir, no campo “Entrada”, o comando “Prisma(pol1,h)” e ao clicar “Enter” o prisma “b” será exibido. Em seguida será preciso planificá-lo, para isso cria-se um controle deslizante e na caixa de opções que será exibida, preencher “p” para o campo “Nome” e nos campos “min:”, “max:” e “incremento:” preencher “0”, “1” e “0.1”, respectivamente e na aba “Animação” preencher “2” no campo “Velocidade”.

Agora, no campo Entrada, será necessário inserir o comando “Planificação(plo1,p)”, após clicar “Enter”, basta movimentar o controle deslizante “p” para obter a planificação do prisma “b” conforme figura 31.

Figura 31: Planificação do prisma.



Fonte: Do autor.

A partir das construções, basta movimentar os controles deslizantes “l”, “c” e “h”, para obter prismas de diferentes bases, comprimento dos lados da base e alturas distintas e o controle deslizante “p” para a planificação desse prisma.

3.2 - Demonstração do volume da pirâmide

O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura.

Primeiramente, é necessário exibir as janelas de álgebra, de visualização e visualização 3D do software Geogebra, em seguida, é preciso construir um prisma de base triangular. Para isso, crie os pontos A, B e C inserindo no campo “Entrada” os seguintes comandos: (0,0,0), (4,0,0) e (0,4,0). Ative a ferramenta “Polígono” localizada na barra de ferramentas da “Janela de Visualização” e clique nos pontos A, B e C para criar um triângulo, que será exibido nas janelas de visualizações e na janela de álgebra será nomeado o triângulo “t1”.

A construção do prisma se dará inserindo, no campo “Entrada”, o comando “Prisma(t1, 6)”, ao pressionar “Enter” o prisma “d” será exibido na “Janela de Visualização 3D”.

Na janela de álgebra, com um clique duplo no prisma “d” será exibida a janela “Redefinição”, clique em “Propriedades...” e a janela de preferências será exibida, essa janela permite alterar componentes estéticos e propriedades do prisma. Na aba “Cor”, seleciona-se uma cor e altera-se a transparência para um valor de 0 a 100 para melhorar a visualização do objeto. Na aba “Estilo” altera-se a espessura da linha para um valor de 0 a 13.

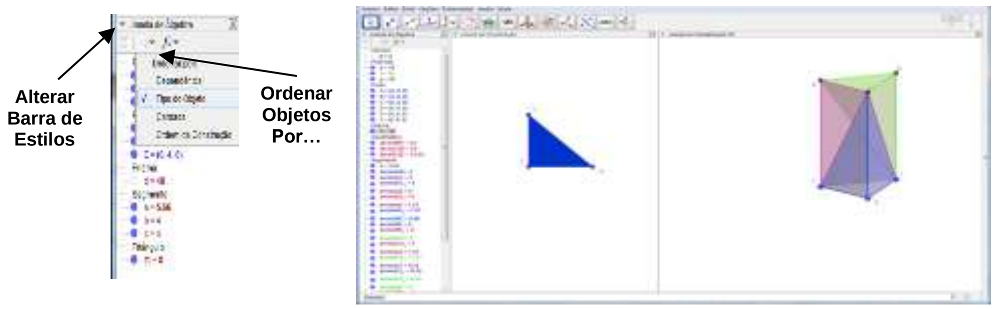
Agora, será necessário construir três pirâmides dentro do prisma. Essa construção se dará inserindo, no campo “Entrada”, os comandos: “Pirâmide(A,B,C,F)”, “Pirâmide(E,F,D,C)” e “Pirâmide(A,C,F,E)”, ao pressionar “Enter” as pirâmides “e”, “f” e “g” serão exibidas na “Janela de Visualização 3D” e os respectivos volumes na “Janela de Álgebra”.

Na janela de álgebra, com um clique duplo na pirâmide “e” será exibida a janela “Redefinir”, clique em “Propriedades...” e a janela de preferências será exibida, essa janela permite alterar componentes estéticos e propriedades da pirâmide. Na aba

“Cor”, seleciona-se uma cor e altera-se a transparência para um valor de 0 a 100 para melhorar a visualização do objeto. Na aba “Estilo” altera-se a espessura da linha para um valor de 0 a 13. Segue de modo análogo para as pirâmides “f” e “g”.

Para melhorar a visualização ocultam-se os eixos e o plano XYZ da “Janela de Visualização 3D” e os eixos e malhas da “Janela de Visualização”, com o botão direito do mouse clique na janela de visualização 3D e em seguida, nas opções “Eixos” e “Plano” para desativá-los. Processo análogo para desativar eixos e malhas da janela de visualização. Na “Janela de Álgebra”, com um clique em “Alterar Barra de Estilos” e “Ordenar Objetos Por…” ative a opção “Tipo de Objeto”, isso organizará a janela de álgebra por objeto construído. Como ainda existem listas ocultas nessa janela, é preciso clicar com o botão direito do mouse na “Janela de Álgebra” e ativar a opção “Objetos Auxiliares”, isso fará com que todos os objetos sejam exibidos na “Janela de Álgebra”, conforme figura 32.

Figura 32: Construção das pirâmides.



Fonte: Do autor.

Em seguida, será necessário criar um controle deslizante, selecionando a ferramenta “Controle Deslizante” localizado na barra de ferramentas da “Janela de Visualização” e clicando nesta janela de visualização, uma caixa de opções será exibida. Para o campo “Nome” preencher “p” e nos campos “min:”, “max:” e “incremento:” preencher “0”, “4” e “0.1”, respectivamente. Na aba “Animação” preencher “2” no campo “Velocidade”.

Agora, constrói-se três pontos inserindo, no campo “Entrada”, os seguintes comandos: “G=(-4,-2,0)”; “H=(-4+p,-2,0)” e “I=(-4-p,-2,0)”. Com a ferramenta “Vetor”  ativada, localizada na barra de ferramentas da “Janela de Visualização”, seleciona-se o ponto G como origem e o ponto H para a outra extremidade, assim o vetor “u” será construído. Ainda com a ferramenta “Vetor” ativada seleciona-se o ponto

G como origem e o ponto I para a outra extremidade, assim o vetor “v” será construído. Na janela de álgebra, dando clique duplo no vetor “u” será exibida a janela “Redefinição”. Clique em “Propriedades...” e a janela de preferências será exibida, essa janela permite alterar componentes estéticos como: cor, espessura da linha, etc. Prosseguir de modo análogo para o vetor “v”.

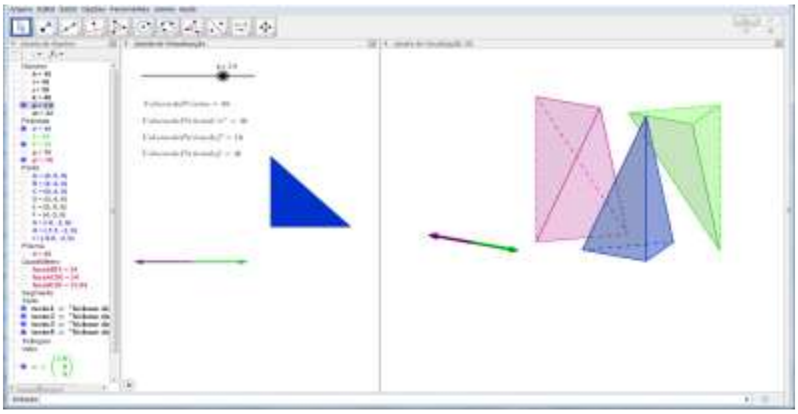
Na barra de ferramentas da “Janela de Visualização 3D”, ativa-se a ferramenta “Translação por um Vetor” , em seguida, na “Janela de Álgebra”, seleciona-se a pirâmide “f” e o vetor “u”, da mesma forma, seleciona-se a pirâmide “g” e o vetor “v”. Com isso, será construído as pirâmides (f’) e (g’) vinculadas aos vetores “u” e “v”, respectivamente. Em seguida, verifica-se que ao movimentar o controle deslizante “p” as pirâmides “f” e “g” acompanharam o movimento dos vetores “u” e “v”.

A figura 33 mostra que é possível obter uma melhor visualização do objeto, ocultando os pontos, o prisma “d” e as pirâmides “f” e “g”. Na janela de álgebra, clica-se na lista “Ponto” e todos os pontos serão selecionados, deve-se clicar com o botão direito na seleção da janela de álgebra e desativar as opções “Exibir Objeto” e “Exibir rótulo”, isso fará com que os pontos e seus nomes sejam ocultados. Em seguida, com o botão direito do mouse deve-se clicar no prisma “d” e desativar a opção “Exibir Objeto”, assim o prisma “d” ficará oculto. Prosseguir de modo análogo para as pirâmides “f” e “g”.

Verifica-se que os valores dos volumes das pirâmides e do prisma “d” estão listados na “Janela de Álgebra”, mas é possível exibi-los na “Janela de Visualização”. Para isso, será necessário ativar a ferramenta “Texto”  e clicar na referida janela, será exibida a caixa “Texto”, para o campo “Editar” preencher “Volume da Pirâmide “e” = e” e ativar a “Fórmula Latex”, ao clicar “OK” o texto será exibido na “Janela de Visualização”. Prosseguir de forma análoga para exibir os volumes das pirâmides f’, g’ e do prisma “d”. As expressões *e, f’, g’, d*, inseridas após a igualdade devem ser selecionadas como objetos disponíveis no ícone “Objetos” da caixa “Texto”.

Na “Janela de Álgebra” clica-se com o botão direito do mouse no número “p” referente ao controle deslizante para ativar a opção “Animar”, isso fará com que o controle deslizante inicie movimentos, variando de 0 a 4, fazendo com que o prisma “d” divida-se em três pirâmides. A animação poderá ser interrompida ou iniciada, clicando no botão “Pausa/Reproduzir”, que será exibido no canto inferior esquerdo da “Janela de Visualização”.

Figura 33: Animação das pirâmides.



Fonte: Do autor.

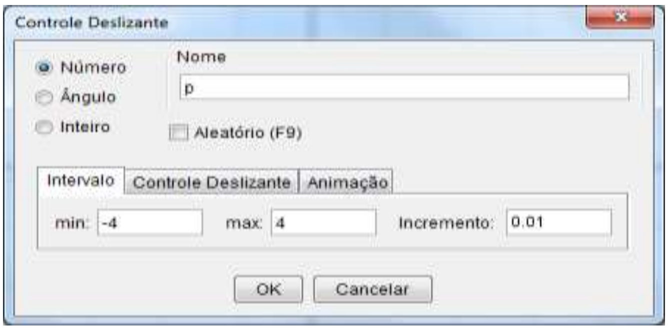
Com isso, verifica-se que o volume de cada pirâmide é igual a um terço do volume do prisma “d”.

3.3 - Construção da Esfera e do cilindro

Com a interface do software Geogebra carregada, clica-se na barra de menu “exibir” e ativa-se a “Janela de Visualização 3D”, em seguida, na barra de ferramentas clica-se em controle deslizante 

, com a ferramenta “controle deslizante” ativada clique no local desejado da “Janela de Visualização” que será exibida a janela controle deslizante. Para o campo “Nome” preencher “p”, defina o intervalo para mínimo: -4 e máximo : 4 e incremento: 0.01 e em seguida clique em OK, conforme figura 34:

Figura 34: Controle Deslizante.



Fonte: Do autor.

No campo “Entrada”, localizado no canto inferior esquerdo, cria-se o ponto A digitando a seguinte coordenada: A(2,2,p), pressionado “Enter” o ponto A será exibido na “Janela de Visualização 3D”. Observando-se, que ao movimentar o controle deslizante “p” verifica-se que o ponto A também movimenta na horizontal. Feito isso, constrói-se uma esfera com centro em A e raio 4.

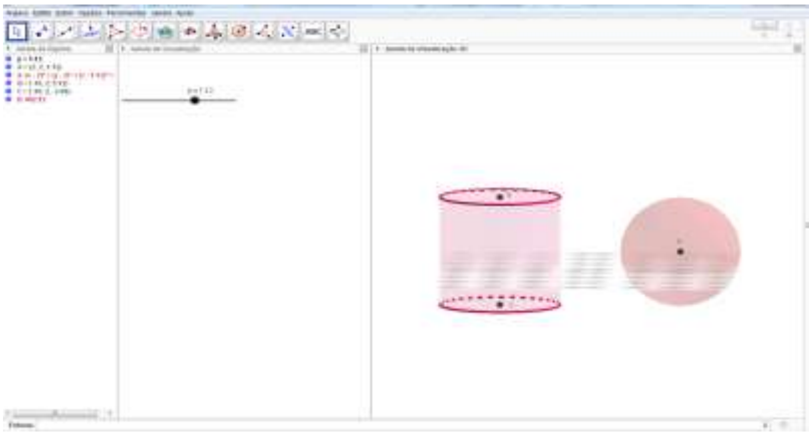
Ao clicar na “Janela de Visualização 3D”, observa-se que na “Barra de Ferramentas” será exibida as ferramentas necessárias para a construção de objetos tridimensionais, então clique na “seta” localizada no canto inferior direito da décima ferramenta, será exibida outras ferramentas para construção de esfera, ative a ferramenta Esfera: Centro e Raio e clique no ponto A, em seguida insira o raio igual a 4, clicando em “OK” a esfera “a” será exibida. Observa-se, que assim como o ponto A, a esfera também acompanha o movimento do controle deslizante “p”. Para melhor visualização das construções, oculta-se o eixo XYZ, clicando com o botão direito do mouse na “Janela de Visualização 3D” será exibida uma nova janela, então desativa-se a opção “eixos”. De maneira análoga, oculta-se o Eixo XY e a “Malha” da “Janela de Visualização” e assim obtém-se a figura 35.

Figura 35: Construção da esfera.

Fonte: Do autor.

No campo “Entrada”, insere-se as coordenadas do B e C, respectivamente, (-10,2,4 + p) e (-10,2,-4 + p). Em seguida, será necessário construir um cilindro, cujos centros de suas bases serão os pontos B e C. Para isso, insere-se o comando “cilindro(B,C,4)” e pressionando “Enter”, o cilindro será exibido conforme a figura 36.

Figura 36: Construção do cilindro.

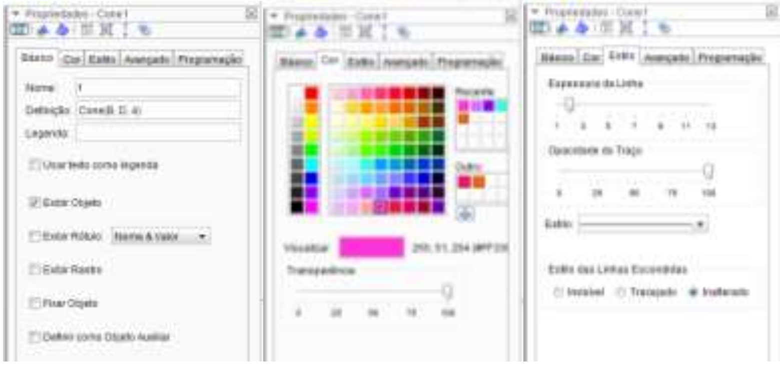


Fonte: Do autor.

No campo “Entrada”, insere-se o comando “PontoMédio(B,C)” ao pressionar “Enter”, o ponto médio D será exibido na “Janela de Visualização 3D”. Isso é necessário para a construção de dois cones opostos pelos vértices cujas bases coincidem com as bases do cilindro.

Para a construção dos cones insere-se, no campo “Entrada”, os comandos “Cone(B, D, 4)” e pressiona-se “Enter”, “Cone(C, D, 4)” em seguida “Enter”. Tais cones serão exibidos na “Janela de Visualização 3D”. Clique na “seta” localizada ao lado esquerdo da expressão janela de álgebra, e ative a opção “ordenar Objetos Por” → “Tipo de Objeto”, esta ação facilitará a visualização dos objetos nessa janela. Acesse as propriedades dos cones e altere as cores para melhor visualização. Para isso, na “Janela de Álgebra”, será necessário um clique duplo no cone “f”, na janela “Redefinir” clique na aba “Propriedades”, então a barra de propriedades do cone “f” será exibida e assim pode-se renomear, alterar cor, estilo, etc, de acordo com a figura 37. Prossegue-se de maneira análoga para o cone “i”.

Figura 37: Propriedades do cone "f".



Fonte: Do autor.

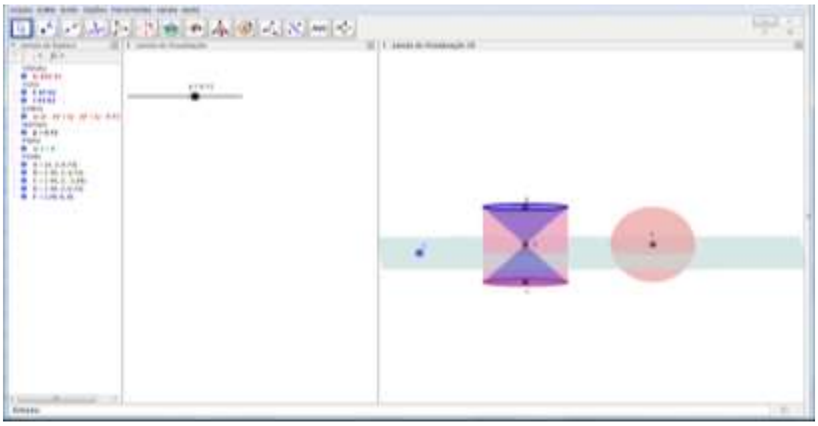
No campo “Entrada”, insere-se o comando “E(-20,0,0)” para criar um ponto E, em seguida constrói-se um plano “q” paralelo ao plano XYZ, tal que o ponto E ∈ q, para tal, clica-se na “seta” localizada no canto inferior direito da oitava ferramenta da “Barra de Ferramentas” correspondente a “Janela de Visualização 3D” e ativa-se a ferramenta Plano Paralelo, então clique no ponto E e no plano XYZ que o plano “q” será criado e exibido sua forma algébrica na “Janela de Álgebra". A construção do plano “q” facilitará as próximas construções.

Para melhor visualização das construções oculta-se o plano XYZ e altera-se o visual do plano “q”. Então, na “Janela de Visualização 3D” clica-se com o botão direito do mouse, em seguida na opção “plano” para desativá-lo.

Para alteração do visual do plano “q” será necessário um clique duplo em sua forma algébrica localizada na “Janela de Álgebra” e prosseguir de maneira análoga ao mostrado na figura 37.

Na “Janela de Visualização 3D” clique com o botão direito do mouse, será exibida uma nova “janela” com uma lista de opções, então clique na opção “Janela de Visualização” que exibirá uma caixa que permite configurar a “janela de visualização 3D” da maneira que desejarmos. Ative a barra “Básico” e marque o ícone “Usar Clipping” e o ícone “Grande”, em seguida clique em fechar localizado no canto superior direito. Com isso a interface do software Geogebra será exibida de acordo com a figura 38:

Figura 38: interface do software Geogebra.

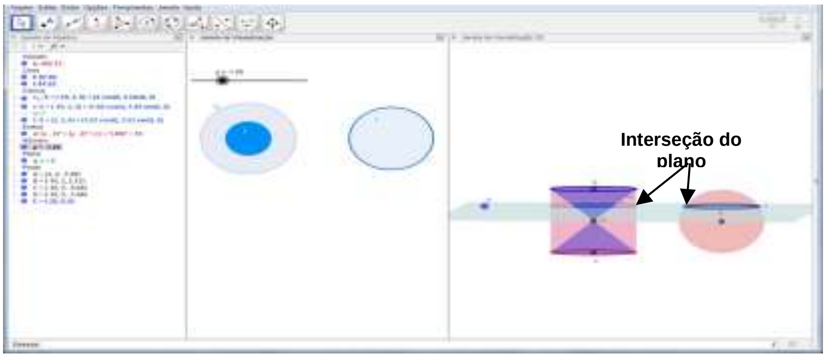


Fonte: Do autor.

Agora deve-se determinar as interseções do plano “q” com o cilindro, cones e a esfera. No campo “Entrada” insere-se os comandos “Interseção(q,b)”; “Interseção(q,f)”; “Interseção(q,i)” e “Interseção(q,a)”, pressiona-se “Enter” após cada inserção. Feito isto, observa-se na “Janela de Visualização” que as interseções serão exibidas em forma de círculo, na “Janela de Visualização 3D” serão exibidos contornos em volta do cilindro, dos cones e da esfera e na “Janela de Álgebra” será exibida as expressões (cônicas) “r”, “s”, “t” e “c_1” determinadas pela interseção do plano “q” com os cones “f”, “i”, com a esfera “a” e com o cilindro “b”, respectivamente.

A figura 39 mostra que na medida que o controle deslizante “p” é acionado, observa-se a movimentação dos círculos e dos contornos referentes às interseções construídas. Em tais construções podem ser realizadas algumas alterações em seus visuais, como trocar a cor, estilo de linhas, exibir o nome do objeto, etc. Bastando um clique duplo nas cônicas “r”, “s”, “t” e “c_1” localizada na “Janela de Álgebra” e prosseguir de maneira análoga ao mostrado na figura 37.

Figura 39: Interseção do plano com os sólidos.



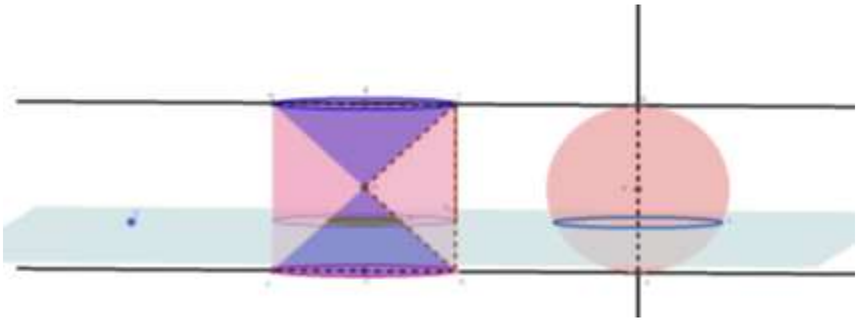
Fonte: Do autor.

3.3.1 - Construção da anticlepsidra

Primeiramente, constrói-se uma reta perpendicular ao plano “q” passando pelo ponto A. Para isso, no campo “Entrada” insere-se o comando “Perpendicular(A,q)”, ao pressionar “Enter”, a reta “l” será exibida na “Janela de Visualização 3D”. Em seguida determina-se os pontos de interseção da reta “l” com a esfera “a”, inserindo o comando “Interseção(a,l)”, ao pressionar “Enter” será exibido os pontos de interseção G e F, para então construir outras duas retas, uma passando pelos pontos B e G e outra passando pelos pontos C e F. Inserindo, no campo “Entrada”, os comandos “Reta(B, G)” e “Reta(C, F)” ao pressionar “Enter” será exibido as retas “m” e “n”, respectivamente. Então define-se os pontos de interseção das retas “m” e “n” com o cilindro “b”, na seta localizada no canto inferior direito da segunda ferramenta da “Barra de Ferramentas” ativa-se “Interseção de dois Objetos”, na sequência seleciona-se com um clique, a reta “m” localizada na “Janela de Álgebra” e o cilindro “b”, com isso os pontos de interseção H e I serão exibidos. De modo análogo obtém-se os pontos J e K definidos pela interseção da reta “n” com o cilindro “b”.

Inserindo, no campo “Entrada”, o comando “Polígono(I,D,K)” constrói-se um Triângulo cujos vértices pertencem aos pontos I, D e K, como mostra a figura 40.

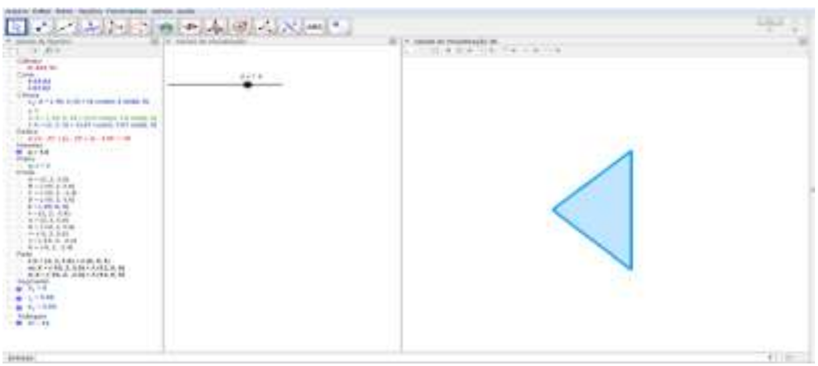
Figura 40: Construções na “Janela de Visualização 3D”.



Fonte: Do autor.

Deve-se ocultar todos os objetos construídos, com exceção dos segmentos do triângulo IDK, como mostra a figura 41. Para isso, “Janela de Álgebra”, selecione todos os objetos que devem ser ocultados, em seguida deve-se clicar com o botão direito na seleção e desmarcar a opção “Exibir Objeto”.

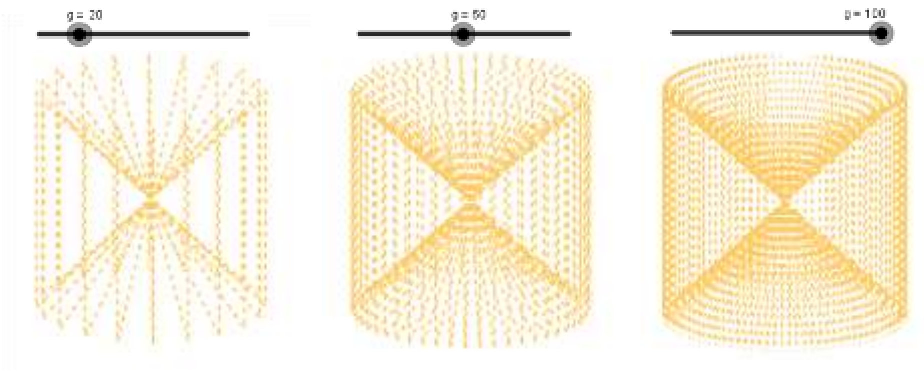
Figura 41: Objetos ocultos.



Fonte: Do autor.

Define-se um controle deslizante “g” com intervalo mínimo: 1, máximo: 100 e incremento: 1. Em seguida, insere-se no campo “Entrada”, o comando “Sequência(Girar(t1,f*2π / g, D),f, 1,g)”, ao clicar em “Enter” será exibido a anticlepsidra, que será representada na “Janela de Álgebra” como “Lista I1”. Na “Janela de Álgebra”, com um clique duplo na lista “I1” será exibida a janela “Redefinir”, clicando em “Propriedades...” a janela de preferências será exibida, essa janela permite alterar componentes estéticos conforme mostrado na figura 37. Ao movimentar o controle deslizante “g”, tem-se a figura 42:

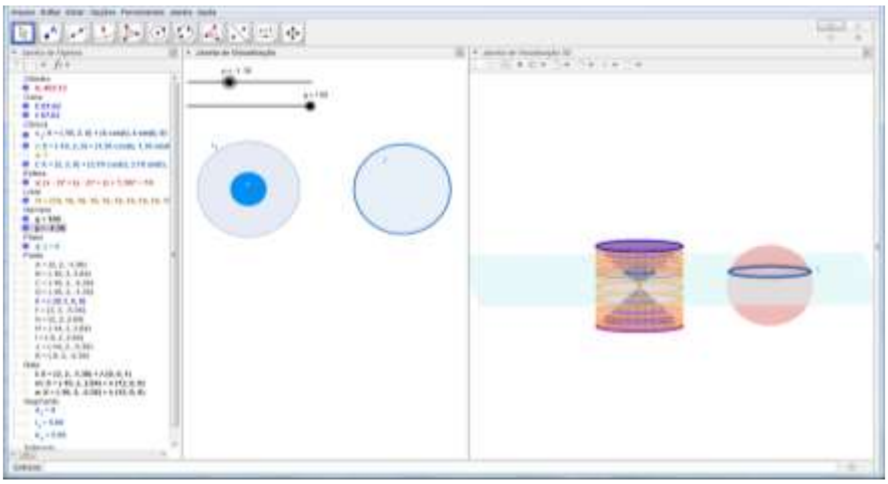
Figura 42: Anticlepsidra.



Fonte: Do autor.

Da mesma forma que ocultou-se os objetos, deve-se exibir o cilindro, os cones a esfera, as cônicas e o plano “q”, como mostra a figura 43:

Figura 43: Exibição dos sólidos (anticlépsidra cilindro e esfera).



Fonte: Do autor.

3.3.2 - Determinação do volume da esfera

Deve-se mostrar que o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra. Para isso, determina-se a área das seções circulares formadas pela interseção do plano com os sólidos, conforme mostrado na “Janela de Visualização”.

No campo “Entrada”, insere-se o comando “Área(c_1)” ao pressionar “Enter” será exibido, na “Janela de Álgebra”, o número “o” igual a àrea do círculo c_1, para a área dos círculos r, s e t inserimos os comandos “Área(r)”; “Área(s)” e “Área(t)”, cujas áreas serão exibidas na “Janela de Álgebra” como “u”, “v” e “w”, respectivamente.

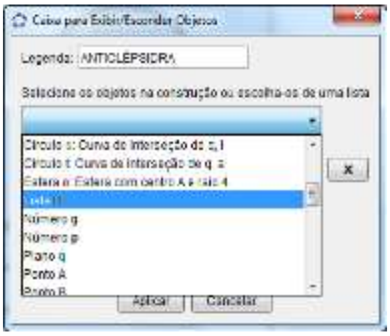
Determina-se a área da coroa circular na anticlépsidra, (A1) para $p \leq 0$ e (A2) para $p \geq 0$, inserindo os comandos “A1=o-u” e “A2=o-v”, que serão exibidas na “Janela de Álgebra”. Cria-se também, textos com os valores de cada área calculada, para exibição na “Janela de Visualização”. Para isso ativa-se a ferramenta “Texto”, localizada em um conjunto de ferramentas contido no penúltimo ícone da “Barra de Ferramentas” da “Janela de Visualização”, com a ferramenta “Texto” ativada clica-se na “Janela de Visualização”, onde exibirá uma caixa para edição de texto, então insere-se o seguinte texto: “área da coroa circular anticlépsidra $(-4 \leq p \leq 0) =$ A1”, ativa-se a guia Fórmula Látex, em seguida “OK”. Prosseguir de maneira análoga para os textos: “área da coroa circular anticlépsidra $(0 \leq p \leq 4) =$ A2” e “área da coroa circular na esfera = w”, sendo que A1, A2 e w deverão ser inseridos clicando na guia “objetos” contida na caixa de texto, conforme figura 44.

Figura 44: Caixa para edição de textos.

Fonte: Do autor.

Para facilitar a manipulação das construções, cria-se "Botões" que permitem exibir e esconder objetos. No mesmo conjunto de ferramentas da construção anterior ativa-se a ferramenta “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”, clica-se no local desejado da “janela de Visualização” para que a referida caixa seja exibida, então no campo legenda insere-se o texto “ANTICLÉPSIDRA” e seleciona-se o objeto referente a anticlépsidra, então deve-se clicar no botão “Aplicar”, conforme figura 45. Prosseguir da mesma forma para o cilindro, cones e esfera.

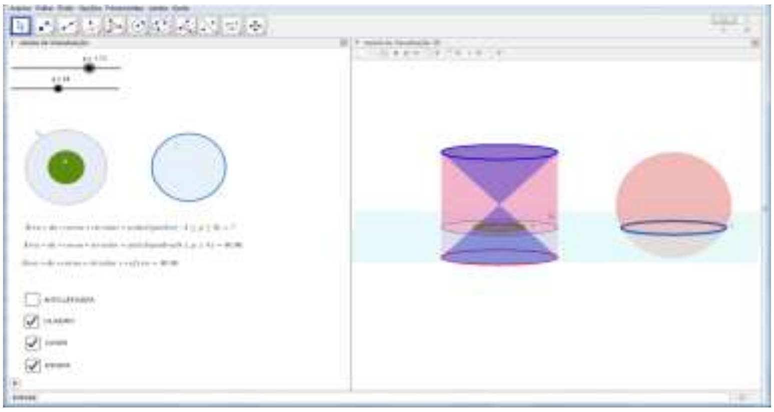
Figura 45: Caixa para Exibir/Esconder Objetos.



Fonte: Do autor.

Após as construções, deve-se clicar com o botão direito do mouse nas caixas de exibir/esconder para desativar a opção “Fixar a Caixa”, assim será possível mudar suas posições na “Janela de Visualização”. Em seguida, a “Janela de Álgebra” deverá ser desativada a fim de melhorar a visualização da construção, como mostra a figura 46, na sequência deve-se clicar com o botão direito do mouse no controle deslizante “p” e ativar a opção “animar” dando início a animação da construção. Também será exibido no canto inferior esquerdo da “Janela de Visualização” o botão “Reproduzir” .

Figura 46: Visualização Final.



Fonte: Do autor.

Assim, verifica-se que a área do setor circular na anticlépsidra é igual a área do setor circular na esfera, portanto, pelo Princípio de Cavalieri o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra.

CAPÍTULO IV – SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREAS E VOLUMES COM ANIMAÇÃO DE OBJETOS MATEMÁTICOS

4.1 - Metodologia da Pesquisa

Este estudo trata-se de uma pesquisa de natureza básica, exploratória de cunho bibliográfico e descritiva. A presente pesquisa teve duas fases: a primeira referente a pesquisa bibliográfica na qual nos inteiramos sobre a temática e foi baseada em obras publicadas em revistas (do Instituto Geogebra, UNIFESO, Ágora, Ciências & Ideias), artigos científicos e dissertações disponíveis nas bibliotecas universitárias virtuais, Portal de Periódicos da CAPES e Google Acadêmico.

A segunda fase refere-se à construção da sequência didática de matemática que levou em consideração a construção dos objetos matemáticos e os descritores da BNCC para o ensino médio. Ainda na segunda fase, foi preciso definir sequência didática, assim como suas características e vantagens.

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano (PERETTI; TONIN, 2013, p. 6).

Dessa forma, é possível dizer que uma sequência didática é um planejamento, de conteúdos a serem ministrados, objetivos a serem atingidos, metodologia e recursos necessários para a realização das tarefas estabelecidas, bem como em um plano de aula. Com a diferença que a sequência didática é um planejamento mais amplo, um guia, no qual auxilia o professor através do uso de uma metodologia, na exposição de conteúdos e atividades que guiam o processo de ensino e aprendizagem a longo prazo.

É fundamental para a elaboração de uma sequência didática:

> [...] efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão. Aos poucos, faz-se necessário aumentar a complexidade dos desafios e orientações permitindo um aprofundamento do tema proposto. (PERETTI; TONIN, 2013, p. 6)

Deste modo, a elaboração de uma sequência didática requer do professor, conhecimento prévio da turma acerca do grau de entendimento dos tópicos a serem abordados, de modo a elaborar atividades adequadas.

Com relação às vantagens, pode-se mencionar: a possibilidade de fortalecimento do trabalho com a interdisciplinaridade e a modelagem, experimentando novas metodologias, técnicas e abordagens de ensino, e também possibilitar uma avaliação mais precisa do processo de ensino aprendizagem, observando avanços, facilidades, dificuldades e retrocessos.

Assim, uma vez definido os passos para as construções dos objetos matemáticos no Geogebra, como descrito no capítulo IV e definido os descritores da BNCC para o ensino médio, foi possível descrever a proposta de Sequência didática, constituída de 03 atividades, a saber: Atividade I – Prisma e Paralelepípedo; Atividade II – Pirâmide e Atividade III - Cilindro e Esfera.

4.2 - Proposta de Sequência Didática

A proposta descrita neste trabalho apresenta um conjunto de três atividades que envolvem conceitos de Geometria Espacial: Prisma, Pirâmide, Cilindro e Esfera, que fazem parte do Currículo do 2º ano do Ensino Médio. Os encaminhamentos para construção dos objetos matemáticos no Geogebra foram descritos no capítulo III e compõem o material necessário para desenvolver as atividades apresentadas a seguir.

Atividade I – Prisma e Paralelepípedo

Conteúdo: Conceito formal de um prisma; Elementos do prisma; Classificação de um prisma; Paralelepipedos e suas diagonais; Área da superfície de um prisma e Princípio de Cavalieri.

Habilidade de acordo com a BNCC: (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivo da atividade: Reconhecer a definição matemática de prisma, seus elementos e as diferentes classificações e compreender o processo de demonstração da fórmula de área da superfície de um prisma.

Tempo de execução estimado: Duas aulas de 50 minutos.

Recursos necessários: Notebook ou tablet, projetor ou TV, quadro, pincel, objetos em forma de prisma e planificação dos mesmos.

Primeiramente, apresenta-se o conceito de prisma utilizando construções no quadro, objetos do cotidiano em forma desse sólido (uma caixa de bombons, por exemplo) ou fazer uma construção no software GeoGebra. Na sequência será solicitado que os alunos citem exemplos desse sólido que podem ser encontrados no cotidiano. Posteriormente, serão apresentados os elementos do prisma e sua classificação: quanto ao número de lados do polígono da base; prisma reto, oblíquo e regular.

Observar que alguns prismas recebem nomes especiais como o paralelepípedo, que é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos e que também pode ser reto ou oblíquo. Em seguida, determina-se o comprimento da diagonal do paralelepípedo e o comprimento da diagonal da base do paralelepípedo através de demonstração, para isso pode ser utilizado desenhos no quadro e/ou utilizar material concreto e, caso seja possível, utilizar construções no software Geogebra.

Logo após, questiona-se os alunos acerca de como calcular a área um paralelepípedo reto retângulo. Então, com auxílio de construções no quadro e/ou de objetos disponíveis em sala de aula (por exemplo, uma caixa de sapato), propõe-se que eles determinem a área desse sólido, destacando que é formado por retângulos.

Após verificar as possíveis soluções para o questionamento, apresenta-se as fórmulas para o cálculo das áreas laterais e totais de um prisma, de acordo com o polígono da base, e assim, fazer comparações entre os resultados obtidos pelos alunos e as soluções encontradas com a utilização das fórmulas apresentadas. Nesse momento, as planificações de objetos concretos serão utilizadas para auxiliar nas demonstrações das áreas laterais e totais, assim como a utilização de uma construção no software GeoGebra. Sendo que tal construção poderá ser construída no momento da aula e junto com os alunos, a depender das possibilidades, ou em momento anterior pelo professor.

A fim de orientar na construção, é apresentado, no tópico 3.1 do capítulo III, um passo a passo da planificação de um prisma no software Geogebra.

Na sequência é proposto o seguinte problema: Em uma empresa, para a elaboração de uma embalagem são considerados vários aspectos entre os quais está a busca por melhores formas, a fim de maximizar a quantidade de produto embalado e minimizar a quantidade de material utilizado diminuindo, assim, os gastos da empresa e os resíduos gerados pela sua produção. Embalagens em formato de prisma são exemplos observados atualmente que visam a atender esses critérios. Diante disso, faça uma pesquisa em sua residência, a fim de verificar a quantidade de papel/papelão que é descartado durante o mês. Ou seja, verifique as embalagens que possuem a forma de prisma e determine a área de cada uma e faça uma estimativa da área total desse material que é descartado no período de um mês.

Nesse caso o aluno deverá detalhar todo o processo de cálculo, devendo identificar as medidas da embalagem, quantidade total estimada dessa embalagem, área de cada embalagem e área total.

Na sequência, é apresentado o princípio de Cavalieri. É importante frisar que tal princípio possui demonstração, mas apenas será considerado verdadeiro sem fazer sua demonstração. Como forma de facilitar o entendimento e a visualização do princípio de Cavalieri, sugere-se a utilização de uma construção no software GeoGebra.

A avaliação pode se dar através de observações, interações e participação dos alunos durante a aula e posteriormente, através de atividades propostas.

Atividade II - Pirâmide

Conteúdo: Conceito formal de uma pirâmide; Elementos de uma pirâmide; Classificação de uma pirâmide; Área da superfície de uma pirâmide e Volume de uma pirâmide.

Habilidade conforme BNCC: (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivo da atividade: Reconhecer a definição matemática de pirâmide, seus elementos e as diferentes classificações e compreender o processo de demonstração das fórmulas de área da superfície e do volume de uma pirâmide.

Tempo de execução estimado: Duas aulas de 50 minutos.

Recursos necessários: Notebook ou tablet, projetor ou TV, quadro, pincel, objetos em forma de pirâmide e suas planificações.

Primeiramente, apresenta-se o conceito de pirâmide utilizando construções no quadro, objetos do cotidiano em forma desse sólido (alguns frascos de perfume, por exemplo) e/ou fazer uma construção no GeoGebra. Na sequência é solicitado que os alunos citem exemplos desse sólido que podem ser encontrados no cotidiano. Posteriormente, serão apresentados os elementos de uma pirâmide e sua classificação quanto ao polígono da base, pirâmides retas e oblíquas, pirâmide regular e irregular.

Logo após, questiona-se os alunos acerca de como calcular a área uma pirâmide. Então, com auxílio de construções no quadro e/ou de objetos disponíveis em sala de aula (por exemplo, objetos de papelão), propõe-se que eles determinem a área desse sólido, destacando que os lados são formados por triângulos e a base dependerá do tipo do polígono que à determina.

Após verificar as possíveis soluções para o questionamento, apresenta-se as fórmulas para o cálculo das áreas laterais e totais de um pirâmide, de acordo com o polígono da base, e assim, fazer comparações entre os resultados obtidos pelos alunos e as soluções encontradas com a utilização das fórmulas apresentadas. Nesse momento, as planificações de objetos concretos serão utilizadas para auxiliar nas demonstrações das áreas laterais e totais e/ou a utilização de uma construção no software GeoGebra como forma de facilitar o entendimento e a visualização. Sendo que tal construção poderá ser construída no momento da aula e junto com os alunos, a depender das possibilidades, ou em momento anterior pelo professor.

Em seguida, é apresentada a demonstração do volume de uma pirâmide. Para a demonstração, considera-se uma pirâmide triangular e um prisma triangular reto deverá ser construído sobre essa pirâmide e então desmembra-se o prisma em três pirâmides para mostrar que elas possuem o mesmo volume.

Para a compreensão e a visualização, deve-se utilizar um objeto animado construído no software Geogebra. Com o fim de orientar na construção desse objeto, segue um passo a passo no tópico 3.2 do capítulo III, sendo que tal construção poderá ser construída no momento da aula e junto com os alunos, a depender das possibilidades, ou em momento anterior pelo professor.

Após separar as pirâmides (ADEV , ABEV e ABCV), deve-se mostrar de duas a duas que possuem o mesmo volume.

Primeiramente as pirâmides ADEV e ABEV, utilizando o fato de que os △ADE ≡ △AEB pelo caso de congruência LAL, chegar a conclusão que: $Volume\ (ADEV) = Volume\ (ABEV)$.

Na sequência as pirâmides ADEV e ABCV, utiliza-se o fato de que os △DEV ≡ △ABC, por serem bases do prisma construído, e que a altura das pirâmides é exatamente a distância entre os planos das bases, concluir que $Volume\ (ADEV) = Volume\ (ABCV)$.

Assim, concluir que: $Volume(\text{ADEV}) = Volume(\text{ABEV}) = Volume(\text{ABCV})$.

Logo, a partir do volume de um prisma tem-se que o volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Ou seja:

Como o volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua base pela sua altura, tem-se que:

$$Volume(\text{ABCVDE}) = A_b . h$$

$V_{prisma} = A_b . h$, onde h é a distância entre os planos das bases do prisma.

E ainda

$V_{prisma} = Volume$(ADEV) $+Volume$(ABEV) $+Volume$(ABCV)

$V_{prisma} = 3. Volume$(ABCV) $\Rightarrow Volume$(ABCV) $= \frac{V_{prisma}}{3}$

portanto, o volume da pirâmide é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_b . h}{3}$$

A avaliação pode se dar através de observações, interações e participação dos alunos durante a aula e posteriormente, através de atividades propostas.

Atividade III - Cilindro e Esfera

Conteúdo: Conceito formal do Cilindro e da Esfera; seus elementos; suas classificações; Área das superfícies e Volume de uma pirâmide.

Habilidade conforme BNCC: (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivo da atividade: Reconhecer a definição matemática de cilindro e esfera, seus elementos e as diferentes classificações, compreender o processo de demonstração das fórmulas de área da superfície e do volume.

Tempo de execução estimado: Três aulas de 50 minutos.

Recursos necessários: Notebook ou tablet, projetor ou TV, quadro, pincel, objetos em forma de cilindro e esfera e suas planificações.

Primeiramente, apresenta-se o conceito de cilindro utilizando construções no quadro, objetos do cotidiano em forma desse sólido (lata de refrigerante, por exemplo) e/ou fazer uma construção no GeoGebra. Na sequência é solicitado que os alunos citem exemplos desse sólido que podem ser encontrados no cotidiano. Posteriormente, serão apresentados os elementos de um cilindro e sua classificação, que pode ser reto ou oblíquo.

Logo após, será preciso mostrar como se calcula a área de um círculo, que é a base do cilindro. Para isso, decompõe-se um círculo de raio r e centro O em 16 partes iguais, utilizando uma construção no quadro e/ou uma construção no software GeoGebra. Em seguida organiza-se as partes do círculo de modo a formar um paralelogramo de altura *r* e comprimento πr e assim mostrar através da área do paralelogramo que a área de um círculo de raio *r* é $A = \pi r^2$, ou seja, a área da base de um cilindro é $A_b = \pi r^2$.

Através de uma planificação representada em uma construção no quadro ou no software Geogebra e através de objetos concretos mostra-se como determinar a área da superfície lateral de um cilindro, que corresponde a um retângulo de dimensões $2\pi r$, referente a circunferência da base e a altura do cilindro, e assim concluir que a área da superfície lateral de um cilindro é: $A_l = 2\pi r. h$.

Na sequência determina-se a área total de um cilindro, que é a reunião da superfície lateral com as bases, ou seja: $A_t = A_l + 2. A_b$

Neste momento, determina-se o volume de um cilindro utilizando o Princípio de Cavalieri. Para melhor compreensão e visualização da demonstração, poderá ser utilizada uma construção no software Geogebra.

Para essa demonstração, considera-se um cilindro qualquer e um prisma de base quadrangular, ambos de altura *h* e área das bases iguais apoiadas em um plano horizontal α e um plano β qualquer paralelo a α cortando os dois sólidos determinando duas regiões planas de mesma área, mostrando assim, pelo Princípio de Cavalieri, que o cilindro e o prisma têm volumes iguais. logo

$V_c = V_p$, como $V_p = A_b. h$, teremos

$V_c = A_b. h$, onde A_b é a área da base do cilindro, assim

$$V_c = \pi r^2 . h$$

Em seguida, apresenta-se o conceito de esfera e seus elementos, para isso utiliza-se de construções no quadro e objetos do cotidiano em forma desse sólido. Na sequência é solicitado que os alunos citem exemplos desse sólido que podem ser encontrados no cotidiano. Posteriormente, é apresentada a demonstração do volume de uma esfera.

Para isso, considera-se um cilindro equilátero de raio da base *r* e *S* como ponto médio do eixo do cilindro e constrói-se dois cones tendo como bases as do cilindro e *S* como vértice comum, que será denominado de clépsidra e ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones, que será denominado de anticlépsidra.

Considera-se agora uma esfera de raio *r* tangente a um plano α e um cilindro com base em α. E ainda, que a esfera e a anticlépsidra, estejam num mesmo semi espaço dos determinados por α. Assim, qualquer plano paralelo a α, com distância *d* do centro da esfera também secciona a anticlépsidra. A partir disso, far-se-á as seguintes deduções:

Área da seção na esfera = $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$

Área da seção no sólido X = $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$

As áreas das seções na esfera e na anticlépsidra são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e a anticlépsidra têm volumes iguais.

$$V_{esfera} = V_{sólido\ X}$$

como:

$V_{sólido\ X} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$, teremos:

$V_{sólido\ X} = \pi r^2 . 2r - 2.\left(\frac{\pi r^2}{3} . r\right)$, pois $h = 2r$. Então:

$$V_{sólido\ X} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow V_{sólido\ X} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Portanto, o volume de uma esfera de raio *r* é:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para facilitar o entendimento e a visualização, deve-se utilizar um objeto animado construído no software Geogebra. Com o fim de orientar na construção desse objeto, segue um passo a passo no tópico 3.3 do capítulo III, sendo que tal construção poderá ser desenvolvida no momento da aula e junto com os alunos, a depender das possibilidades, ou em momento anterior pelo professor.

A avaliação pode ser realizada através de observações, interações e participação dos alunos durante a aula e posteriormente, através de atividades propostas.

CONCLUSÃO

Com este trabalho, conclui-se que a utilização do software Geogebra como recurso didático para apoiar as atividades realizadas em salas aulas, permite ao professor mostrar situações que seriam difíceis e demoradas de expor com apenas lousa, além de possibilitar aos alunos a compreensão dos conteúdos trabalhados, otimiza o tempo, contribuiu na visualização e conforme as iterações aumenta a exatidão dos traçados facilitando a compreensão.

Acredita-se na importância e necessidade de proporcionar experiências que possibilitem ao aluno ampliar sua capacidade de compreensão dos objetos tridimensionais e uma forma de fazer isso é através do uso de recursos digitais como o software GeoGebra.

As construções abordadas neste trabalho buscam contribuir com o ensino e aprendizagem de áreas e volumes de alguns sólidos geométricos, que através do software Geogebra, envolve animações aplicadas aos objetos construídos.

Considera-se que, ao explorar esses recursos em sala de aula, o professor despertará a atenção e o interesse dos alunos para o estudo de áreas e volumes, contribuindo assim para o ensino e aprendizagem na medida em que permite a exploração dos objetos matemáticos, especificamente os geométricos dinamicamente.

Portanto, a construção e planificação de sólidos geométricos, demonstrações de áreas e volumes com animação no software Geogebra são possibilidades de atividades com uso de objetos matemáticos, que podem desenvolver no aluno um olhar diferenciado acerca dos conteúdos matemáticos, possibilitando o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Neste trabalho descreve-se a construção de objetos geométricos utilizando o software GeoGebra para favorecer a compreensão de áreas e volumes de alguns sólidos geométricos estudados no Ensino Médio. Logo, construiu-se objetos que facilitam a demonstração do volume da esfera através do Princípio de Cavalieri, do volume da pirâmide construída dentro de um prisma e das áreas de um prisma.

O uso do software Geogebra contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho, na medida em que foi possível discutir demonstrações visuais de objetos geométricos e espera-se que esse tipo de atividade provoque possibilidades de uso em sala de aula. Reforça-se que o Geogebra possui uma interface simples, de fácil entendimento e manuseio de suas ferramentas permitindo a exploração de conteúdos e realização das construções propostas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, T. D. de. **Geometria Espacial e Plana**. 1.ed. São Paulo: Editora Scipione, 2020. 276 p.

Amado, N.; Sanchez, J.; Pinto, J. **A Utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler**. Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2015, v. 29, n. 52, p. 637-657. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11. Acesso em: 29 dez. 2022.

BALBINO, V. S. da. et al. **Tdics na Educação: Possibilidades e limites no cenário educacional atual**. Anais do V CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/73160. Acesso em: 12 maio. 2022.

BASNIAK. M. I. (ORG.); ESTEVAM. E. J. G. (ORG.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014. *E-book*. 130 p. Disponível em: https://pibid.unespar.edu.br/sobre/livros-pibid/geogebra-livro-do-professor.pdf. Acesso em 29 maio. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular** - BNCC Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 09 maio. 2022.

COSTA, C. E. C; SILVA, M. A. B. da; NETO, J. S. **A Matemática e seus Objetos de Estudo. IX EPBEM**. Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/26390>. Acesso em: 02 dez. 2022.

CRUZ, J. V. da; SILVA, P. V. da. **Jogos e Objetos Matemáticos como Recurso Pedagógico: terapia wittgensteiniana dos conceitos psicológicos.** Revista BOEM, Florianópolis, v. 7, n. 14, p. 43-59, 2019. DOI: 10.5965/2357724X07142019043. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/16814. Acesso em: 2 dez. 2022.

DE PAULA, A. et al. **Softwares Educacionais para o Ensino de Física, Química e Biologia**. Revista Ciências & Ideias ISSN: 2176-1477, *[S. l.]*, v. 5, n. 1, p. 106-121, out. 2014. Disponível em: https://revistascientificas.ifrj.edu.br/revista/index.php/reci/article/view/332. Acesso em: 15 maio. 2022.

MACHADO, P. A. F. **Fundamentos de Geometria Espacial**. 2. Ed. Belo Horizonte: EDITORA CAED-UFMG, 2013. 120 p.

MARQUES, M. C. P. D.; GOMES, J. P. S. B. A.; GOMES ALVES, A. J. **A Integração das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (Tdic) no Ambiente Escolar**. Ágora - A revista científica da FaSaR, *[S. l.]*, v. 1 n. 01, 2017. Disponível em: https://www.fasar.com.br/revista/index.php/agora/article/view/21. Acesso em: 15 maio. 2022.

MATHIAS, C. V.; DA SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. **Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, *[S. l.]*, v. 8, n. 2, p. 062–077, 2019. DOI: 10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/44701. Acesso em: 29 dez. 2022.

PERETTI, L; TONIN, G. M. C. **Sequência Didática na Matemática**. Revista de Educação do Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai., v. 17, n. 8, Jan./jun. 2013. Disponível em: https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf. Acesso em: 26 set. 2022.

PALAVISSINI, C. F. C. et al. **Digital information and communication technologies on the acquisition of scientific knowledge to deaf students: an integrative literature review**. Research, Society and Development, *[S. l.]*, v. 10, n. 16, p. e383101623998, 2021. DOI: 10.33448/rsd-v10i16.23998. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/23998. Acesso em: 19 may. 2022.

ROCHA, R. F.; ROCHA, S. C. P. **Sólidos Geométricos: área e volume de sólidos geométricos**. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, *[S. l.],* v. 7, n. 1, p. 84–98, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/34777. Acesso em: 18 maio. 2022.

SAE DIGITAL. **BNCC na prática: Como aplicar a tecnologia na Educação Básica**. 11 ago. 2020. Disponível em: https://sae.digital/bncc-na-pratica/. acesso em : 06 jun. 2022.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. **Geometria Espacial com o Software GeoGebra 3D: uma sequência didática para o ensino sobre poliedros, prismas e pirâmides**. Boa Vista: UERR, 2019. E-book. 40 p. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/572563. Acesso em 29 maio. 2022.

SILVA, L. V. da. **Tecnologias digitais de informação e comunicação na educação: três perspectivas possíveis**. Revista de Estudos Universitários - REU, [S. l.], v. 46, n. 1, p. 143–159, 2020. DOI: 10.22484/2177-5788.2020v46n1p143-159. Disponível em: http://periodicos.uniso.br/ojs/index.php/reu/article/view/3955. Acesso em: 11 maio. 2022.

TAVARES, J. L. **Modelos, Técnicas e Instrumentos de Análise de Softwares Educacionais**, 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Educação, João Pessoa, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/2563. Acesso em: 16 maio. 2022.

Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Contexto Escolar: Possibilidades. basenacionalcomum, Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades. Acesso em: 09 maio. 2022.

VALENTE, J. A. **A Comunicação e a Educação baseada no uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação**. Revista Universo-Humanas e Sociais, *[S. l.],* v. 1, n. 1, p. 141-166, 2014. Disponível em:https://www.unifeso.edu.br/revista/index.php/revistaunifesohumanasesociais/article/view/17/24. Acesso em 19 maio. 2022