Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

CARLOS HENRIQUE DE CARVALHO

Triângulo de Pascal e Análise Combinatória: Observando Padrões e Fazendo Conjecturas

Orientadora: Profa Dra MIRIAM DEL MILAGRO ABDÓN

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
DEZ/2O22

CARLOS HENRIQUE DE CARVALHO

Triângulo de Pascal e Análise Combinatória: Observando Padrões e Fazendo Conjecturas

Dissertação apresentada por **Carlos Henrique de Carvalho** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Profa Dra MIRIAM DEL MILAGRO ABDÓN

Niterói

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C331t Carvalho, Carlos Henrique de
Triângulo de Pascal e Análise Combinatória: Observando Padrões e Fazendo Conjecturas / Carlos Henrique de Carvalho. - 2022.
88 f.: il.

Orientador: Miriam Del Milagro Abdon.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2022.

1. Análise Combinatória. 2. Triângulo de Pascal. 3. Binômio de Newton. 4. Produção intelectual. I. Abdon, Miriam Del Milagro, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

CARLOS HENRIQUE DE CARVALHO

Triângulo de Pascal e Análise Combinatória: Observando Padrões e Fazendo Conjecturas

Dissertação apresentada por **Carlos Henrique de Carvalho** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 20/12/2022

Banca Examinadora

Profa. MIRIAM DEL MILAGRO ABDÓN - Orientadora

Doutora – Universidade Federal Fluminense

Profa. ANNE MICHELLE DYSMAN GOMES - Membro

Doutora – Universidade Federal Fluminense

Gladson Octaviano Antunes

Prof. GLADSON OCTAVIANO ANTUNES - Membro

Doutor – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

NITERÓI

2022

DEDICATÓRIAS

Aos meus pais: Luiz Carlos (in memoriam) e Terezinha de Jesus (in memoriam) que sempre me educaram e incentivaram nesta caminhada.

À minha esposa Cíntia e a minha filha Maria Luísa, meus amores.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me guiado durante este curso, sendo meu refúgio e fortaleza, e me dando coragem para finalizá-lo.

A minha orientadora neste trabalho, Professora Miriam del Milagro Abdón, pela confiança, carinho, amizade e por toda a ajuda prestada ao longo de sua realização. Estendo também minha gratidão a Coordenadora Dirce Uesu Pesco e a todos os Professores do PROFMAT-UFF e, em especial, a Professora Anne Michelle Dysman Gomes por ter sugerido o tema do TCC, ter sido uma inspiração para o seu desenvolvimento e ainda fazer parte da banca; ao Professor Gladson Octaviano Antunes (UNIRIO) pela disponibilidade, atenção e contribuições ao fazer parte da banca.

Tenho de agradecer muito aos meus queridos colegas de mestrado, pelo espírito de companheirismo durante os dois anos de curso e, em especial, às colegas Clarissa Santarém, Kíssia Ferreira, Luisa Mara e Mariana Aparecia, cuja parceria nos trabalhos e discussões em grupo foi de valor incomensurável.

Agradeço de forma especial ao amigo Prof. Me. Luiz Carlos de Andrade pelo incentivo e apoio para eu ingressar no PROFMAT e por todas as contribuições para a finalização deste trabalho.

Resumo

Este trabalho foi inspirado nos padrões observados numa churrascaria rodízio, onde tudo que é oferecido pelos garçons tem como respostas: **Sim, por favor!** ou **Não, obrigado!**

O que isso tem a ver com análise combinatória?

R.: Tudo. Pois, o **"Sim = aceito"** significa que o elemento pertence ao agrupamento e o **"Não = não aceito"** significa que o elemento não pertence ao agrupamento.

Utilizando a ideia do sim e do não e o princípio multiplicativo construímos tabelas coloridas com **verde (sim)** e **vermelho (não)** para fazer com que os alunos percebam resultados importantes da análise combinatória, triângulo de Pascal e binômio de Newton sem o uso de fórmulas, ou seja, fazendo conjecturas a partir de padrões observados.

Esperamos que o presente trabalho seja mais uma alternativa para o ensino desses conteúdos tão ricos e interessantes e, também, sirva para inspirar Professores a criarem alternativas para ensinar esses e outros conteúdos de Matemática.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal.

Abstract

This work was inspired by the patterns observed in a rodízio steakhouse, where everything that is offered by the waiters has as responses: **Yes, please!** or **No, thank you!**

What does this have to do with combinatorial analysis?

A.: Everything. Because, the **"Yes = accepted"** means that the element belongs to the cluster and the **"No = not accepted"** means that the element does not belong to the cluster.

Using the idea of yes and no and the multiplicative principle we built colored tables with **green (yes)** and **red (no)** to make students realize important results of combinatorial analysis, Pascal's triangle and Newton's binomial without the use of formulas, that is, making conjectures from observed patterns.

We hope that this work will be another alternative for the teaching of these rich and interesting contents, and that it will inspire teachers to create alternatives to teach these and other mathematical contents.

Keywords: Combinatorial Analysis, Newton's Binomial, Pascal's Triangle.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O ato de contar está presente na evolução do homem desde os primórdios e na contagem aparecem os coeficientes binomiais ou números binomiais presentes em conteúdos da matemática como, por exemplo, a análise combinatória, o triângulo de Pascal, binômio de Newton e em outras áreas como probabilidade, teoria dos números.

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (LIMA et al., 2006)

A matemática tem papel fundamental para o desenvolvimento do raciocínio e tem uma enorme importância para a formação do cidadão. Assim, a aprendizagem matemática se apresenta como fundamental para a formação da cidadania, pois o raciocínio faz com que o sujeito enfrente melhor os problemas do dia-a-dia.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (BRASIL, 1997)

Análise Combinatória e o Triângulo de Pascal são conteúdos interligados que devem ser trabalhados de maneira que os alunos não necessitem decorar fórmulas de forma mecânica, mas sim encontrar formas, através de experimentos e deduções, para a resolução de problemas que estão presentes no cotidiano dos alunos e dessa forma fica mais simples que eles entendam o conteúdo através de suas próprias experiências práticas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), traz como competência para o aluno a capacidade de raciocinar através de experiências e investigações para resolução de problemas.

> Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se

> restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. (BRASIL, 2018)

Sendo assim, com a necessidade de alterar o pensamento a respeito dos conteúdos de análise combinatória para que o assunto desperte mais o interesse e a imaginação dos alunos, temos como objetivo geral do presente trabalho apresentar a análise combinatória, o triângulo de Pascal e o binômio de Newton expondo algumas de suas propriedades e propor algumas atividades de investigação e conjecturas utilizando tabelas, visto que temos como competências específicas de matemática para o ensino médio,

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018)

Considerando os objetivos traçados, o trabalho foi organizado em capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 1, são apresentadas atividades onde os alunos fazem conjecturas a partir das tabelas preenchidas com as respostas **sim** ou **não**. Dessa forma o aluno chega a resultados importantes do triângulo de Pascal e binômio de Newton sem o uso de fórmulas e consegue concluir que para formar comissões, subconjuntos ou qualquer agrupamento é necessário saber se cada "elemento (objeto)" pertencerá ou não ao agrupamento.

Através das tabelas, também se chega ao triângulo de Pascal, a propriedade da coluna, a propriedade da diagonal, propriedade da linha, binomiais complementares e a relação de Stifel.

No Capítulo 2, é apresentado o desenvolvimento do binômio de Newton também utilizando-se de tabelas tanto para o desenvolvimento do binômio como para calcular combinações simples sem o uso de fórmulas.

No Capítulo 3, são dadas algumas sugestões de atividades e suas soluções para que sejam aplicadas junto aos alunos de maneira que eles possam resolvê-las utilizando-se de experimentos práticos.

No Capítulo 4, são feitas as demonstrações matemáticas das fórmulas necessárias para estudo da análise combinatória, triângulo de Pascal e binômio de Newton.

Esperamos que o presente trabalho estimule a prática da investigação para o aprendizado de conteúdos matemáticos sem deixar de lado o rigor que a matemática exige.

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do

conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016)

1 Atividades lúdicas e conjecturas

A partir de exemplos e tabelas que serão preenchidas com as respostas **sim** ou **não**, vamos chegar a resultados importantes da Análise Combinatória, do Triângulo de Pascal e Binômio de Newton sem o uso de fórmulas.

O presente trabalho é fruto da experiência em sala de aula e foi motivado pelos padrões observados numa churrascaria rodízio, onde tudo que é oferecido pelos garçons tem como respostas: **Sim, por favor!** ou **Não, obrigado!**; o que tem tudo a ver com a formação de comissões, pois para formarmos comissões, subconjuntos ou qualquer agrupamento não ordenado, precisamos saber se cada "elemento (objeto)" pertencerá ou não ao agrupamento.

- O uso das cores é essencial neste trabalho. Use e abuse das cores;
- Criem situações e estimulem os alunos a perceberem os padrões e fazerem conjecturas.

Vamos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e a notação:

$\binom{n}{p} \rightarrow$ número de agrupamentos (não ordenados) de p elementos escolhidos num universo de n elementos. ($p, n \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$). Conhecemos como "binomial de n sobre p".

Exemplo 1.1. Considere um grupo de 2 pessoas (Ana e Bia). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem (PFC) ou princípio multiplicativo chegamos ao total de 4, pois cada pessoa tem duas possibilidades: "**participar**" ou "**não participar**" do agrupamento.

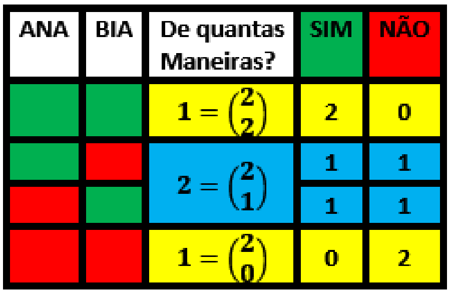
Figura 1 – agrupamentos de Até Duas Pessoas

ANA	BIA	
2	2	$2.2 = 2^2 = 4$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 2 estão representadas todas as possibilidades de participação: Ana e Bia, somente Ana, somente Bia e nenhuma das duas.

Figura 2 – Possibilidades das duas Pessoas Participarem ou Não dos agrupamentos



Fonte: Produzido pelo Autor

Observação 1.2. Se considerarmos somente uma pessoa, teremos apenas duas possibilidades: **participa** ou **não participa**. Como podemos observar na figura 3.

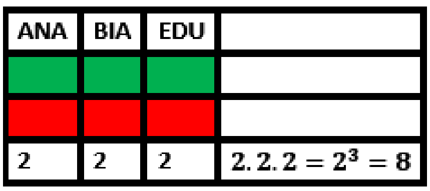
Figura 3 – Possibilidades de uma Pessoa Participar ou Não dos agrupamentos

Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 1.3. Considere um grupo de três pessoas (Ana, Bia e Edu). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 8 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: **participar** ou **não participar** do agrupamento.

Figura 4 – agrupamentos de Até Três Pessoas



Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 5, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 5 – Possibilidades das Três Pessoas Participarem dos agrupamentos

	ANA	BIA	EDU	De quantas Maneiras?	Sim	Não
1.				$1 = \binom{3}{3}$	3	0
2.				$3 = \binom{3}{2}$	2	1
3.					2	1
4.					2	1
5.				$3 = \binom{3}{1}$	1	2
6.					1	2
7.					1	2
8.				$1 = \binom{3}{0}$	0	3

Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 1.4. Considere um grupo de quatro pessoas (Ana, Bia, Edu e Téo). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 16 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: **participar** ou **não participar** do agrupamento.

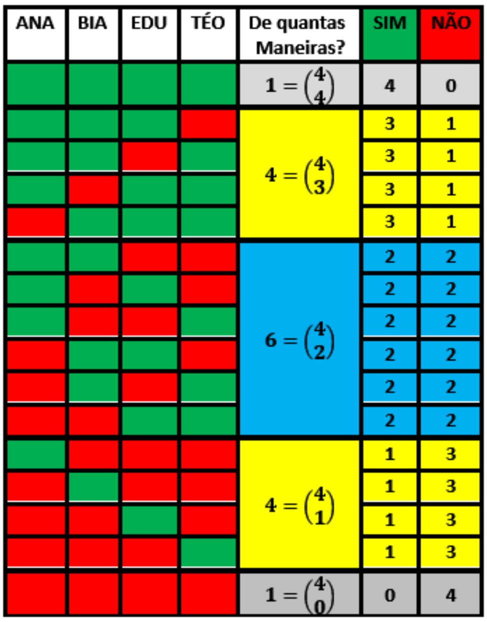
Figura 6 – agrupamentos de Até Quatro Pessoas

ANA	BIA	EDU	TÉO	
2	2	2	2	$2.2.2.2 = 2^4 = 16$

Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 7, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 7 – Possibilidades das Quatro Pessoas Participarem dos agrupamentos

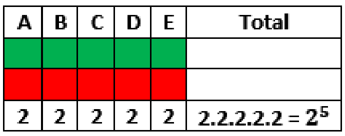


Fonte: Produzido pelo Autor

Exemplo 1.5. Considere um grupo de cinco pessoas (A, B, C, D e E). Vamos calcular o número de possibilidades dessas pessoas participarem de um agrupamento.

Pelo princípio fundamental da contagem chegamos ao total de 32 agrupamentos, pois cada pessoa tem duas possibilidades: "**participar**" ou "**não participar**" do agrupamento.

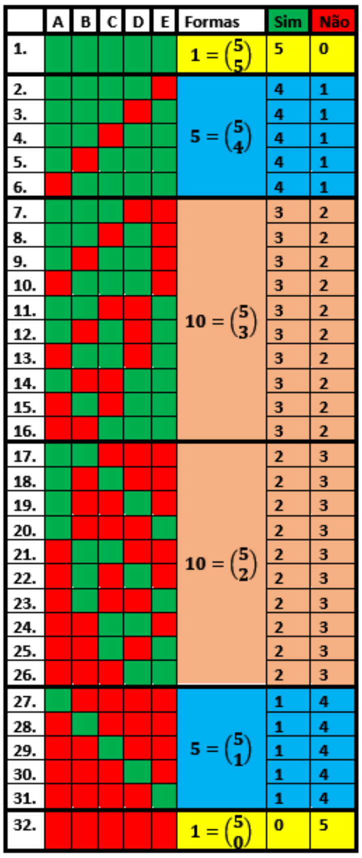
Figura 8 – agrupamentos de Até Cinco Pessoas



Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 9, estão representadas todas as possibilidades de participação nos agrupamentos.

Figura 9 – Possibilidades das Cinco Pessoas Participarem dos agrupamentos



Fonte: Produzido pelo Autor

1.1 Observando Padrões e Fazendo Conjecturas

Analisando os resultados nas figuras 2, 3, 5, 7 e 9, podemos chegar a alguns resultados importantes.

1.1.1 Casos Particulares

- Ninguém participa do agrupamento:

  $$\binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \binom{3}{0} = \binom{4}{0} = \binom{5}{0} = 1.$$

  Qual o padrão observado?

  $\binom{n}{0} = 1$. Só existe 1 maneira de ninguém participar do agrupamento;

- Todos participam do agrupamento:

$$\binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \binom{4}{4} = \binom{5}{5} = 1.$$

Qual o padrão observado?

$\binom{n}{n} = 1$. Só existe 1 maneira de todos participarem do agrupamento;

- Apenas um participa do agrupamento:
  - $\binom{1}{1} = 1$. Existe 1 maneira de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{2}{1} = 2$. Existem 2 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{3}{1} = 3$. Existem 3 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{4}{1} = 1$. Existem 4 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento;
  - $\binom{5}{1} = 5$. Existem 5 maneiras de apenas 1 participar do agrupamento.

Qual o padrão observado?

$\binom{n}{1} = n$. Quando apenas 1 pessoa participa do agrupamento, o total de agrupamentos é igual ao número de pessoas.

1.1.2 Propriedade da Linha

- $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1$
- $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 = 2^2$
- $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$
- $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16 = 2^4$
- $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32 = 2^5$

Qual o padrão observado?

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \qquad \text{(PROPRIEDADE DA LINHA).}$$

1.1.3 Binomiais Complementares

- O número de maneiras de escolher "3 sins" e "nenhum não" é igual ao número de maneiras de escolher "3 nãos" e "nenhum sim", ou seja, $\binom{3}{3}=\binom{3}{0}$.
- O número de maneiras de escolher "2 sins" e "1 não" é igual ao número de maneiras de escolher "2 nãos" e "1 sim", ou seja, , $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}$.
- O número de maneiras de escolher "4 sins" e "nenhum não" é igual ao número de maneiras de escolher "4 nãos" e "nenhum sim", ou seja $\binom{4}{4}=\binom{4}{0}$.
- O número de maneiras de escolher "3 sins" e "1 não" é igual ao número de maneiras de escolher "3 nãos" e "1 sim", ou seja, $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$.
- O número de maneiras de escolher "5 sins" e "nenhum não" é igual ao número de maneiras de escolher "5 nãos" e "nenhum sim", ou seja, , $\binom{5}{5}=\binom{5}{0}$.
- O número de maneiras de escolher "4 sins" e "1 não" é igual ao número de maneiras de escolher "4 nãos" e "1 sim", ou seja, $\binom{5}{4}=\binom{5}{1}$.
- O número de maneiras de escolher "3 sins" e "2 nãos" é igual ao número de maneiras de escolher "3 nãos" e "2 sins", ou seja, $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$.

Qual o padrão observado?

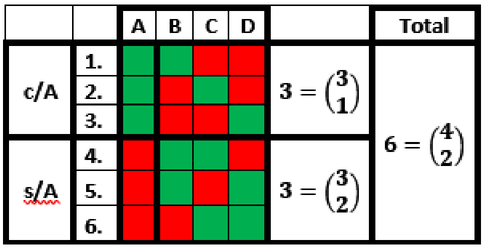
$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} \qquad \text{(BINOMIAIS COMPLEMENTARES).}$$

1.1.4 Relação de Stifel

Observando os exemplos 1.6, 1.7 e 1.8, chegaremos a um resultado importantíssimo.

Exemplo 1.6. Vamos considerar quatro pessoas (A, B, C e D) para formar agrupamentos de 2 pessoas

Figura 10 – Possibilidades de Escolher duas Pessoas entre Quatro



Fonte: Produzido pelo Autor

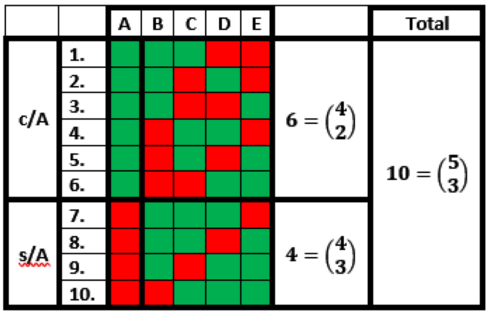
De acordo com a figura 10, podemos observar que é possível formar 6 agrupamentos de 2 pessoas. Observe que: "3 tem a pessoa **A**" e "3 não tem a pessoa **A**".

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: se tenho **A** no agrupamento de 2 pessoas, devo escolher mais 1 pessoa das 3 que sobraram e se não tenho **A** no agrupamento de 2 pessoas, devo escolher 2 pessoas das 3 que sobraram.

$$3 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.7. Vamos considerar cinco pessoas (A, B, C, D e E) para formar agrupamentos de 3 pessoas de 5 pessoas?

Figura 11 – Possibilidades de Escolher Três Pessoas entre Cinco



Fonte: Produzido pelo Autor

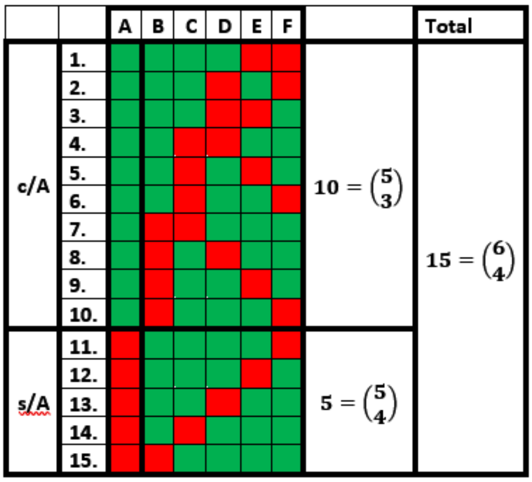
De acordo com a figura 11, podemos observar que é possível formar 10 agrupamentos de 3 pessoas. Seis agrupamentos com a pessoa **A** (**c/A**) e quatro sem a pessoa **A** (**s/A**).

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: Se tenho **A** no agrupamento de 3 pessoas, devo escolher mais 2 pessoas das 4 que sobraram e se não tenho **A** no agrupamento de 3 pessoas, devo escolher 3 pessoas das 4 que sobraram.

$$6 + 4 = 10 \quad \rightarrow \quad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.8. Vamos considerar seis pessoas (A, B, C, D, E e F) para formar agrupamentos de 4 pessoas.

Figura 12 – Possibilidades de Escolher Quatro Pessoas entre Seis



Fonte: Produzido pelo Autor

De acordo com a figura 12, podemos observar que é possível formar 15 agrupamentos de 3 pessoas. Dez agrupamentos com a pessoa **A** (**c/A**) e cinco não tem a pessoa **A** (**s/A**).

Podemos fazer essa contagem da seguinte maneira: Se tenho A no agrupamento de 4 pessoas, devo escolher mais 3 pessoas das 5 que sobraram e se não tenho A no agrupamento de 4 pessoas, devo escolher 4 pessoas das 5 que sobraram.

$$10 + 5 = 15 \quad \rightarrow \quad \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}. \tag{1.3}$$

Qual o padrão observado?

Das igualdades 1.1, 1.2 e 1.3, temos:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \qquad \text{(RELAÇÃO DE STIFEL).}$$

1.1.5 Propriedade da Coluna

Utilizando a relação de Stifel recursivamente chegaremos a outro resultado que chamaremos de Propriedade da Coluna.

Considere um agrupamento com 5 pessoas, dentre elas as pessoas A, B e C.

Todos os agrupamentos com 3 pessoas:

$$\binom{5}{3} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\textit{com o A}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\textit{sem o A}} \qquad \text{(RELAÇÃO DE STIFEL).}$$

$\binom{4}{3} = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{com o } B} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{sem o } B}$ (RELAÇÃO DE STIFEL).

$\binom{3}{3} = \binom{2}{2}$, fixando o C, sobram 2 para escolher 2.

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \tag{1.4}$$

Da relação de Stifel, sabemos que $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$. Substituindo $\binom{5}{3}$ pela igualdade 1.4, temos

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Da mesma forma, temos que

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Qual o padrão observado?

$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (PROPRIEDADE DA COLUNA).

Visualizando a propriedade da coluna através de um problema.

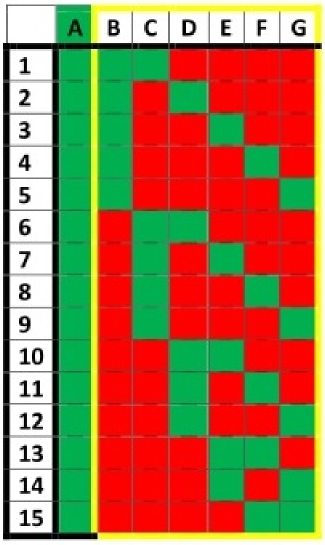
Problema 1.9. Ana, Beto, Cléo, Dinho e Eloá fazem parte de um agrupamento de 7 pessoas.

Nas respostas de cada item a seguir, considere como escolhido os quadrados verdes e não escolhido os quadrados vermelhos.

a) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana** estará entre os escolhidos?

Resposta:

Figura 13 – Resposta exemplo 1.9 a



Fonte: Produzido pelo Autor

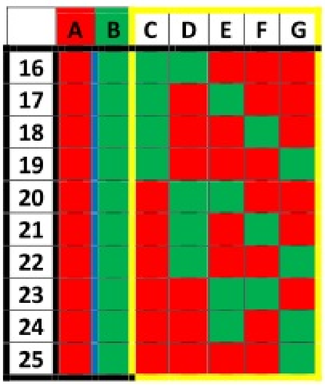
Observe na figura 13, que fixando **Ana**, sobram 6 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{6}{2} = 15.$$

b) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana não estará** entre os escolhidos e **Beto, sim**?

Resposta:

Figura 14 – Resposta exemplo 1.9 b



Fonte: Produzido pelo Autor

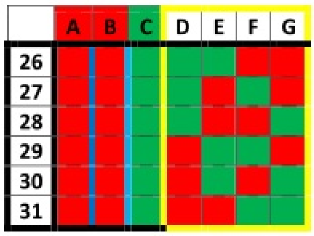
Na figura 14 podemos notar que excluindo **Ana** e fixando **Beto**, sobram 5 para escolher 2, ou seja,

$$\binom{5}{2} = 10.$$

c) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana e Beto não estarão** entre os escolhidos e **Cléo, sim**?

Resposta:

Figura 15 – Resposta exemplo 1.9 c



Fonte: Produzido pelo Autor

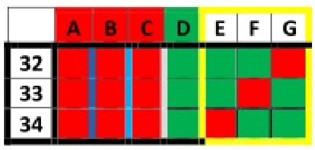
Excluindo **Ana e Beto** e fixando **Cléo**, como observado na figura 15, sobram 4 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{4}{2} = 6.$$

d) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana, Beto e Cléo não estarão** entre os escolhidos e **Dinho, sim**?

Resposta:

Figura 16 – Resposta exemplo 1.9 d



Fonte: Produzido pelo Autor

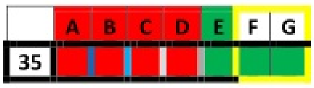
Observamos na figura 16 que, excluindo **Ana, Beto e Cléo** e fixando **Dinho**, sobram 3 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{3}{2} = 3.$$

e) Quantas são as possíveis formas de montar uma comissão de 3 pessoas, supondo que **Ana, Beto, Cléo e Dinho não estarão** entre os escolhidos e **Eloá, sim**?

Resposta:

Figura 17 – Resposta exemplo 1.9 e



Fonte: Produzido pelo Autor

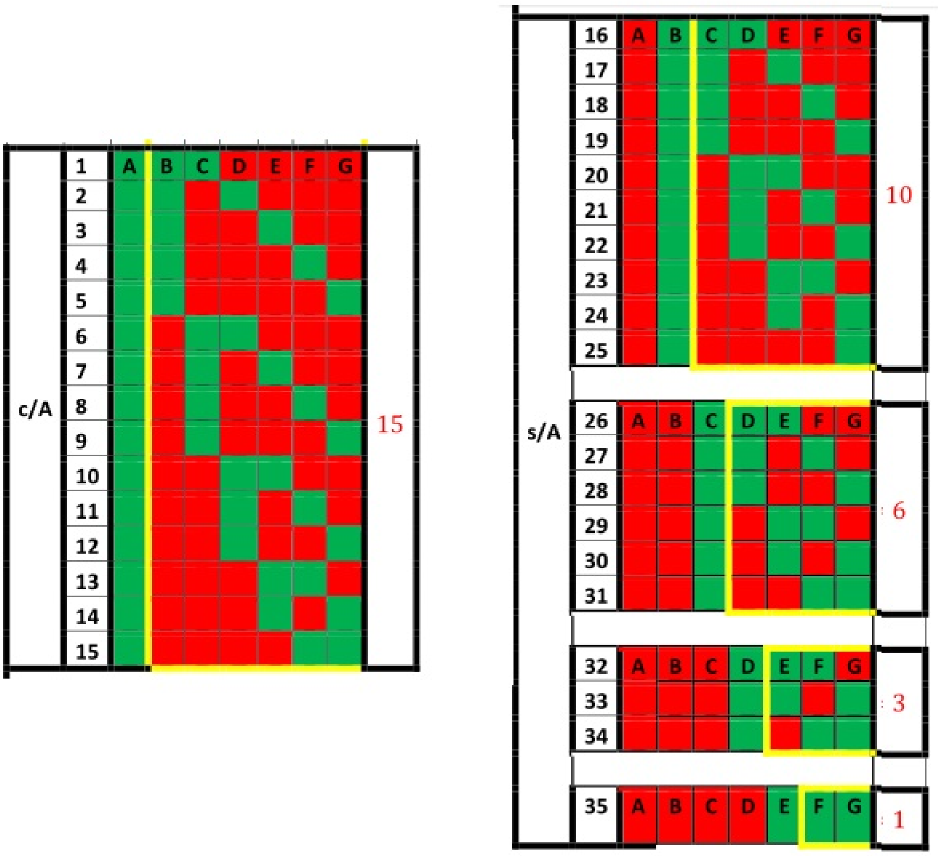
Na figura 17 podemos notar que excluindo **Ana, Beto, Cléo e Dinho** e fixando **Eloá**, sobram 2 pessoas para escolher 2, ou seja,

$$\binom{2}{2} = 1.$$

f) No total, de quantas formas diferentes podemos montar uma comissão de 3 pessoas escolhidas dentre um grupo de 7?

Resposta:

Figura 18 – Resposta exemplo 1.9 f



Fonte: Produzido pelo Autor

Na figura 18 temos um total de 35 possibilidades de montar uma comissão de 3 pessoas dentre um grupo de 7 pessoas, ou seja,

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Somando os resultados dos itens a, b, c, d e e, temos:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35. \tag{1.5}$$

Notamos que o resultado do item f é

$$\binom{7}{3} = 35. \tag{1.6}$$

Dessa forma, da soma 1.5 e do resultado 1.6, temos

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$$

Chegando assim na propriedade da coluna

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

1.1.6 Propriedade da Diagonal

Depois de conhecermos a propriedade da coluna, basta fazermos os complementares de todos os binomiais que surgirá um outro resultado intrigante conhecido como Propriedade da Diagonal.

Observe os complementares dos binomais na propriedade da coluna.

$$\underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{7}{4}} = \underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}}$$

Dessa forma, temos:

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}.$$

Qual o padrão observado?

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

(PROPRIEDADE DA DIAGONAL).

Visualizando a propriedade da Diagonal através de um problema.

Problema criado por um grupo de estudos MA12 PROFMAT-UFF 2022 formado por Carlos Henrique, Clarissa, Luisa e Mariana.

Problema 1.10. Em uma festa infantil há três tipos de docinhos: brigadeiro, beijinho de coco e cajuzinho. De acordo com o organizador da festa, cada convidado poderá escolher até seis docinhos dentre as três opções oferecidas.

De quantas maneiras cada convidado poderá fazer essa escolha?

Resposta:

Considere a o número de brigadeiros, b o número de beijinhos de coco e c o número de cajuzinhos.

O número total de maneiras de cada convidado escolher os docinhos é dado por:

$a + b + c \leq 6$, ou seja, é igual a soma dos resultados abaixo:

$a + b + c = 6 \quad \rightarrow \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \rightarrow$ O número total de soluções é dado por $\binom{8}{6}$, pois temos 8 espaços (||||||++) para escolher 6, onde colocaremos os 6 traços que representam as 6 unidades da igualdade. Ao escolhermos as posições dos 6 traços, sobrarão 2 espaços para as cruzes (adição).

Para um melhor entendimento, observe os exemplos 1.11 e 1.12.

Exemplo 1.11. Uma das soluções é 3 + 1 + 2 que pode ser representada assim: |||+|+||.

Observe que os traços ocupam 6 das 8 posições. Neste exemplo, as posições: 1, 2, 3, 5, 7 e 8.

Exemplo 1.12. Uma outra solução é 0 + 2 + 4 que pode ser representada assim: +||+||||.

Observe que os traços ocupam 6 das 8 posições. Neste exemplo, as posições: 2, 3, 5, 6, 7 e 8.

Vejamos outras somas, pois $a + b + c \leq 6$:

- $a+b+c=5 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{7}{5}$
- $a+b+c=4 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{6}{4}$
- $a+b+c=3 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{5}{3}$
- $a+b+c=2 \rightarrow \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{4}{2}$

- $a+b+c=1 \;\rightarrow\; \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{3}{1}$
- $a+b+c=0 \;\rightarrow\; \underline{\square} \quad \underline{\square}$. O total de soluções é dado por $\binom{2}{0}$

Logo, o número de maneiras que cada convidado pode escolher seus docinhos é dado por:

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6} \tag{1.7}$$

Trabalhoso, não? Vamos contar de outra forma?

Vamos considerar os três docinhos iniciais e vamos acrescentar um quarto docinho, de creme de avelã, cuja quantidade chamaremos de d, tal que cada convidado possa escolher, dentre as quatro opções oferecidas, exatamente 6.

Logo, teremos que:

$a+b+c+d=6$,onde $d \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, o que implica em $a+b+c \leq 6$, pois:

$d=0 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=6$

$d=1 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=5$

$d=2 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=4$

$d=3 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=3$

$d=4 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=2$

$d=5 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=1$

$d=6 \quad \Rightarrow \quad a+b+c=0$

$a+b+c+d=6 \quad \rightarrow \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square} \quad \underline{\square}$. Temos nove espaços para escolher 6, então número total de soluções da equação $a+b+c+d=6$ é dado por

$$\binom{9}{6} \tag{1.8}$$

De 1.7 e 1.8, podemos concluir que

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}+\binom{8}{6}=\binom{9}{6} \tag{1.9}$$

com a igualdade em 1.9 chegamos na propriedade da diagonal

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Observação 1.13. Se, ao invés de escolhermos os lugares para os traços (unidades), escolhermos os lugares para as cruzes (adição), chegaremos aos complementares de todos os binomiais da igualdade em 1.9 e, consequentemente, chegaremos à propriedade da coluna:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}=\binom{9}{3}$$

IMPORTANTE:

Se aplicarmos a relação de STIFEL recursivamente, chegaremos à propriedade da COLUNA e se, fizermos os complementares de todos os binomiais na propriedade da coluna, chegaremos à propriedade da DIAGONAL.

Exemplo 1.14.

$$\begin{aligned}
\binom{9}{3} &= \binom{8}{2}+\underbrace{\binom{8}{3}}_{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}} \quad \text{STIFEL}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\underbrace{\binom{6}{3}}_{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\underbrace{\binom{5}{3}}_{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\underbrace{\binom{4}{3}}_{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\underbrace{\binom{3}{3}}_{\binom{2}{2}}\\
&= \binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2} \quad \text{COLUNA}
\end{aligned}$$

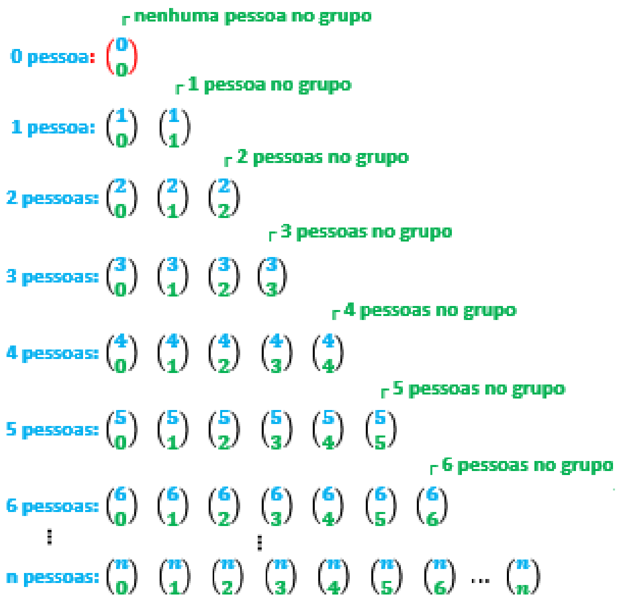
Fazendo os complementares de todos os binomiais, temos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\binom{9}{3}}_{\binom{9}{6}} &= \underbrace{\binom{8}{2}}_{\binom{8}{6}} + \underbrace{\binom{7}{2}}_{\binom{7}{5}} + \underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}} \\
\binom{9}{6} &= \binom{8}{6} + \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{0} \quad \text{DIAGONAL}
\end{aligned}$$

1.1.7 Triângulo de Pascal

Organizando, em ordem crescente, o número total de pessoas disponíveis para formar os agrupamentos, de cima para baixo e, também em ordem crescente, o número de pessoas de cada agrupamento, da esquerda para a direita, temos:

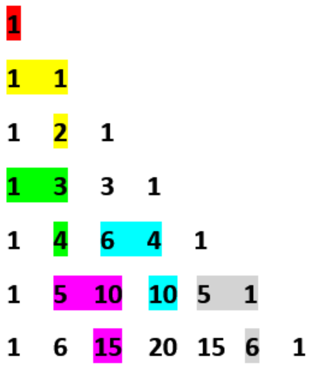
Figura 19 – Organização de Cada Agrupamento



Fonte: Produzido pelo Autor

De acordo com os resultados observados nas figuras 2, 3, 5, 7, 9 e na Relação de Stifel, podemos reescrever o triângulo da figura 19 da seguinte forma:

Figura 20 – Organização com os Resultados do Cada Agrupamento



Fonte: Produzido pelo Autor

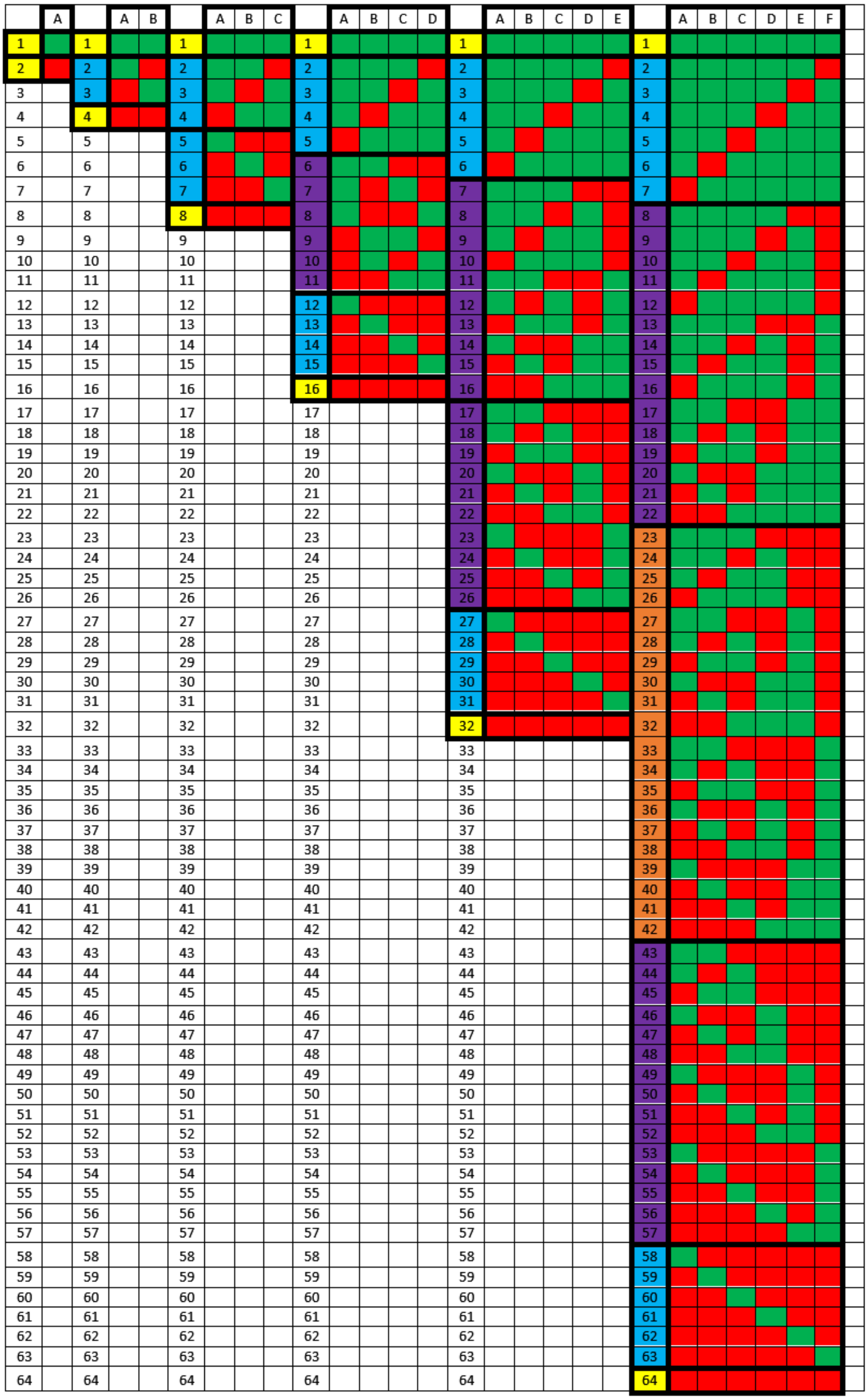
As figuras 19 e 20, representam uma organização de números conhecida como triângulo de Pascal.

Observação 1.15. Utilizando a relação de Stifel e os casos particulares, podemos construir o Triângulo de Pascal até a linha que quisermos através de recorrências, ou seja, podemos chegar aos valores de todos os números da forma $\binom{n}{p}$ sem o uso de fórmulas.

Ao final, deduziremos uma fórmula para calcular $\binom{n}{p}$, pois para "n e p grandes" ficará muito trabalhoso o cálculo usando apenas o triângulo de Pascal.

Para uma melhor percepção e contagem, observe a tabela abaixo e compare com o triângulo acima.

Figura 21 – Tabela Construção do Triângulo



Fonte: Produzido pelo Autor

2 Binômio de Newton: Desenvolvendo Potências do Tipo $(a+b)^n$

O que significa $(a+b)^2$?

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= aa+ab+ba+bb \\
&= 1aa+2ab+1bb \\
&= \binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2 \\
&= \binom{2}{0}a^2b^0+\binom{2}{1}a^1b^1+\binom{2}{2}a^0b^2
\end{aligned}
$$

O quadrado de $(a+b)$ é $(a+b)(a+b)$. Quando aplicamos a distributiva, estamos, na verdade, formando todos os possíveis agrupamentos de 2 elementos, sendo um elemento do primeiro parênteses e o outro do segundo parênteses.

Figura 22 – Coeficientes de $(s+n)^2$

ANA	BIA	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
		$1 = \binom{2}{0}$	2	0
		$2 = \binom{2}{1}$	1	1
			1	1
		$1 = \binom{2}{2}$	0	2

Fonte: Produzido pelo Autor

Considere o expoente 2 como sendo duas pessoas e a essas pessoas vamos perguntar se elas gostariam de fazer parte de um agrupamento. As possíveis respostas seriam:

ss, sn, ns e nn, ou seja, $1ss + 2sn + 1nn$.

$$\begin{aligned}(s+n)^2 &= (s+n)(s+n)\\ &= ss + sn + ns + nn\\ &= 1ss + 2sn + 1nn\\ &= \binom{2}{0}s^2 + \binom{2}{1}sn + \binom{2}{2}n^2\\ &= \binom{2}{0}s^2n^0 + \binom{2}{1}s^1n^1 + \binom{2}{2}s^0n^2\end{aligned}$$

Vejamos agora $(s+n)^3$

$(s+n)^3 = (s+n)(s+n)(s+n)$

Aplicando a distributiva, temos:

$sss + ssn + sns + snn + nss + nsn + nns + nnn$

Observe que foram gerados 8 produtos de 3 letras cada, uma de cada parênteses.

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$1sss + 3ssn + 3snn + 1nnn$

Escrevendo os produtos como potências, temos:

$1s^3 + 3s^2n + 3sn^2 + 1n^3$

Substituindo os coeficientes pelos binomiais correspondentes e completando as potências, temos:

$\binom{3}{0}s^3n^0 + \binom{3}{1}s^2n^1 + \binom{3}{2}s^1n^2 + \binom{3}{3}s^0n^3$

Vejamos um exemplo contextualizado.

Exemplo 2.1. Considere que o garçom **Stifel** da Churrascaria **New Bin** tenha três opções de carne (A = alcatra, B = Baby Beef e C = costela) para oferecer ao seu cliente **Pascal**. Ao passar com as três opções e oferecê-las a Pascal, ele poderá responder **sim** ou **não** para cada uma delas. Na figura 23, temos as possíveis respostas de Pascal para cada um dos itens oferecidos por Stifel.

Stifel, além de excelente garçom é um aluno muito dedicado e criativo. Observando a tabela com as possibilidades de respostas de Pascal, fez um link com a aula de Binômio de Newton* que assistiu com o Professor Carlos Henrique.

* $(s+n)^3 = 1s^3 + 3s^2n + 3sn^2 + 1n^3 = \binom{3}{0}s^3n^0 + \binom{3}{1}s^2n^1 + \binom{3}{2}s^1n^2 + \binom{3}{3}s^0n^3$

Ele percebeu que o expoente (3) é o número de opções $(A, B$ e $C)$ de carnes disponíveis e o desenvolvimento é a soma do número de maneiras de Pascal responder **sim (s)** ou **não (n)**.

Figura 23 – Coeficientes de $(s+n)^3$

A	B	C	Sim	Não			Sim + Não
s	s	s	3	0	1sss	$\binom{3}{3}.s^3.n^0$	3
s	s	n	2	1	3ssn	$\binom{3}{2}.s^2.n^1$	3
s	n	s	2	1			3
n	s	s	2	1			3
s	n	n	1	2	3snn	$\binom{3}{1}.s^1.n^2$	3
n	s	n	1	2			3
n	n	s	1	2			3
n	n	n	0	3	1nnn	$\binom{3}{0}.s^0.n^3$	3

Fonte: Produzido pelo Autor

A percepção do garçom e aluno Stifel nos permite escrever o desenvolvimento binomial para qualquer expoente natural sem muito esforço.

Vejamos o exemplo para expoente (4).

Exemplo 2.2. $(s+n)^4 = \binom{4}{0}s^4n^0 + \binom{4}{1}s^3n^1 + \binom{4}{2}s^2n^2 + \binom{4}{3}s^1n^3 + \binom{4}{4}s^0n^4$

Figura 24 – Coeficientes de $(s+n)^4$

A	B	C	D	SIM	NÃO		
				4	0	1ssss	$\binom{4}{4}.s^4.n^0$
				3	1	4sssn	$\binom{4}{3}.s^3.n^1$
				3	1		
				3	1		
				3	1		
				2	2	6ssnn	$\binom{4}{2}.s^2.n^2$
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				2	2		
				1	3	4snnn	$\binom{4}{1}.s^1.n^3$
				1	3		
				1	3		
				1	3		
				0	4	1nnnn	$\binom{4}{0}.s^0.n^4$

Fonte: Produzido pelo Autor

Generalizando, temos:

$$(s+n)^k = \binom{k}{0}s^k n^0 + \binom{k}{1}s^{k-1}n^1 + \binom{k}{2}s^{k-2}n^2 + \binom{k}{3}s^{k-3}n^3 + \ldots + \binom{k}{k}s^0 n^k.$$

Ou

$$(s+n)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}s^{k-p}n^p.$$

Observação 2.3. Vejamos que:

1 - Substituindo n por (- n), chegamos ao desenvolvimento

$$(s+(-n))^k = (s-n)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}s^{k-p}(-n)^p$$

2 - Substituindo s e n por 1, temos:

$$(1+1)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^{k-p}\times 1^p = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} = 2^k.$$

2.1 Deduzindo uma fórmula para calcular combinações simples

A partir de agora, vamos conjecturar uma fórmula para calcular todos os números da forma $\binom{n}{p}$ (Números binomiais ou número de combinações simples).

Exemplo 2.4. Como calcular $\binom{4}{3}$?

Quatro jovens apostam uma corrida. De quantas maneiras o pódio pode ser formado com os 1º, 2º e 3º lugares? (Observe que a ordem é levada em consideração)

Os mesmos quatro jovens formarão agrupamentos de três alunos. Quantos agrupamentos podem ser formados? (Observe que a ordem não é levada em consideração)

Como desconsiderar a ordem a partir do agrupamento ordenado?

Figura 25 – Formação de agrupamento de três Jovens

	A	B	C	D			A	B	C	D
	1º	2º	3°				1	2	3	
1	A	B	C			1	A	B	C	
2	A	C	B							
3	B	A	C							
4	B	C	A							
5	C	A	B							
6	C	B	A							
7	A	B	D			2	A	B	D	
8	A	D	B							
9	B	A	D							
10	B	D	A							
11	D	A	B							
12	D	B	A							
13	A	C	D			3	A	C	D	
14	A	D	C							
15	C	A	D							
16	C	D	A							
17	D	A	C							
18	D	C	A							
19	B	C	D			4	B	C	D	
20	B	D	C							
21	C	B	D							
22	C	D	B							
23	D	B	C							
24	D	C	B							

Fonte: Produzido pelo Autor

Observe na figura 25 que ao levar em consideração a ordem (1º, 2º e 3º), temos $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades.

Quando a ordem não é levada em consideração, ou seja, escolher 3 pessoas em um grupo de quatro, as possibilidades de formação do agrupamento se repetem, por exemplo, o agrupamento (A, B, C) é o mesmo agrupamento (B, C, A). Logo, teremos $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{6} = 4$.

Assim, podemos escrever

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{6} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{3 \times 2 \times 1 \times 1!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Analisando os dois primeiros lugares e desconsiderando a ordem, temos:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Analisando mais casos podemos chegar a:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq q.$$

Vejamos alguns outros exemplos de escolhas ordenadas e não ordenadas.

Exemplo 2.5. Escolha ordenada:

Em um agrupamento de 4 pessoas de quantas formas diferentes podemos formar uma fila indiana com:

- 4 pessoas: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4!}{(4-4)!} = A_{4,4}$
- 3 pessoas: $4 \times 3 \times 2 = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{1!} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = A_{4,3}$
- 2 pessoas: $4 \times 3 = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = \dfrac{4!}{(4-2)!} = A_{4,2}$
- 1 pessoa: $4 = \dfrac{4 \times 3!}{3!} = \dfrac{4!}{(4-1)!} = A_{4,1}$
- 0 pessoa: $1 = \dfrac{4!}{4!} = \dfrac{4!}{(4-0)!} = A_{4,0}$

Exemplo 2.6. Escolha não ordenada:

Em um agrupamento de 4 pessoas de quantas formas diferentes podemos formar uma comissão com:

- 4 pessoas: $\dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = \dfrac{4!}{4!} = \dfrac{4!}{4! \times 0!} = \dfrac{4!}{4!(4-4)!} = C_{4,4} = C_4^4 = \dbinom{4}{4}$
- 3 pessoas: $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{3!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1!}{3! \times 1!} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = C_{4,3} = C_4^3 = \dbinom{4}{3}$
- 2 pessoas: $\dfrac{4 \times 3}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = C_{4,2} = C_4^2 = \dbinom{4}{2}$
- 1 pessoa: $\dfrac{4}{1!} = \dfrac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = C_{4,1} = C_4^1 = \dbinom{4}{1}$
- 0 pessoa: $\dfrac{1}{0!} = \dfrac{1 \times 4!}{0! \times 4!} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = C_{4,0} = C_4^0 = \dbinom{4}{0}$

3 Algumas Aplicações

Atividade 3.1. Mega Sena

Para quem acerta as seis dezenas sorteadas, a mega sena é o prêmio principal, mas é possível ganhar acertando 4 ou 5 dezenas dentre os 60 disponíveis no sorteio. Para tentar ser um milionário, você precisa marcar de 6 a 15 dezenas no volante.

A aposta mínima, de 6 números, custa R$ 4,50. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores as chances de faturar o prêmio mais cobiçado do país.

Figura 26 – Mega Sena

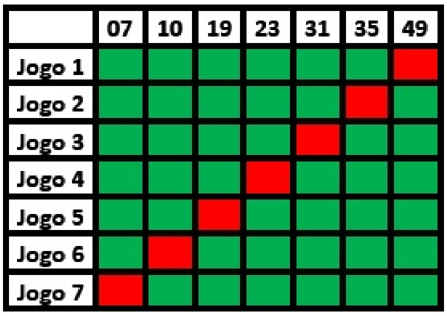
Fonte: https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mega-Sena.aspx

Preço das apostas

a) Uma aposta simples de 6 dezenas custa R$ 4,50.

b) Uma aposta com 7 dezenas corresponde a 7 jogos de 6 dezenas (ver figura 27), logo seu custo é de R$ 31,50 o que corresponde a 7 $\times$ 4,50.

Figura 27 – Aposta com Sete Dezenas



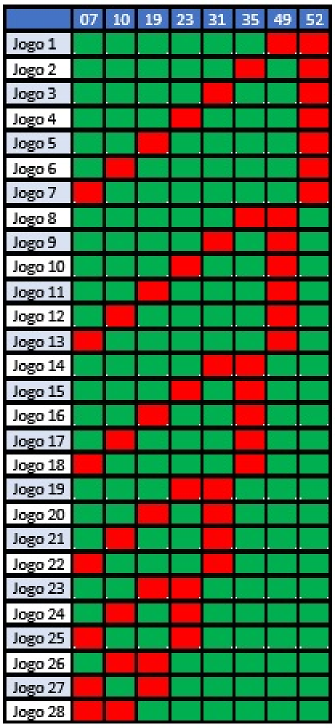
Fonte: Produzido pelo Autor

$$7 = \binom{7}{6} \rightarrow 7 \text{ para escolher } 6$$

$$\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$$

c) Uma aposta com 8 dezenas corresponde a 28 jogos de 6 dezenas (ver figura 28), logo seu custo é de R$ 126,00 o que corresponde a 28 $\times$ 4,50.

Figura 28 – Aposta com Oito Dezenas



Fonte: Produzido pelo Autor

$$28 = \binom{8}{6} \to 8 \text{ para escolher } 6$$

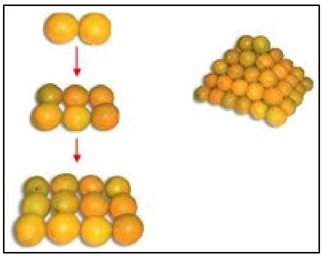
$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 2 \times 1} = 4 \times 7 = 28$$

Curiosidade Considerando 2 sorteios semanais e uma média de 104 sorteios anuais, seriam necessários, no mínimo, 481.384 anos para que todas as combinações fossem sorteadas.

Atividade 3.2. A questão da UERJ, abaixo, nos mostra uma relação muito interessante na arrumação das laranjas numa barraca de feira com a propriedade das colunas do triângulo de Pascal. Além disso, pode ser explorado o seu formato "esférico" para trabalhar esfera, cunha e fuso esférico, sem contar, com as operações básicas e números decimais no pagamento e troco, porcentagem num possível desconto e outros.

(UERJ-2006) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração a seguir.

Figura 29 – Camadas de Laranjas



Fonte: UERJ-2006

Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_n^p = C_{p+1}^{n+1}$, na qual n e p são números naturais, $n \geq p$ e corresponde ao número de combinações simples de n elementos tomados p a p. Com base nessas informações, calcule:

a) a soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{18}^2$

Resposta:

$$\begin{aligned}
\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\ldots+\binom{18}{2} &= \binom{19}{3}\\
&= \frac{19!}{3!16!}\\
&= \frac{19\times 18\times 17\times 16!}{3\times 2\times 1\times 16!}\\
&= \frac{19\times \cancel{18}^{\,3}\times 17\times \cancel{16!}}{\cancel{6}\times \cancel{16!}}\\
&= 19\times 3\times 17\\
&= 969
\end{aligned}$$

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

Resposta:

Considerando o número de laranjas como NL, temos que

$$\begin{aligned}
\text{NL} &= 2\times 1+3\times 2+4\times 3+5\times 4+\ldots+16\times 15\\
&= 2\times\left(\frac{2\times 1+3\times 2+4\times 3+5\times 4+\ldots+16\times 15}{2}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{2\times 1}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{4\times 3}{2}+\frac{5\times 4}{2}+\ldots+\frac{16\times 15}{2}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{2!}{2!\times 0!}+\frac{3\times 2!}{2!\times 1!}+\frac{4\times 3\times 2!}{2!\times 2!}+\frac{5\times 4\times 3!}{2!\times 3!}+\ldots+\frac{16\times 15\times 14!}{2!\times 14!}\right)\\
&= 2\times\left(C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+\ldots+C_{16}^2\right)\\
&= 2\times C_{17}^3\\
&= \cancel{2}\times\left(\frac{17\times 16\times \cancel{15}^{\,5}\times \cancel{14!}}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1\times \cancel{14!}}\right)\\
&= 1360
\end{aligned}$$

Atividade 3.3. Questão da Prova de MA12-2021. Profª ANNE MICHELLE DYSMAN

Questão 1 (2 pontos). Uma empresa que vende tintas trabalha com 6 cores de base: Amarelo ouro, vermelho alegria, branco paz, azul céu, rosa carinho e negro universo.

Ela permite que o cliente encomende latas misturando 10 partes de cores escolhidas entre estas. Por exemplo, é possível encomendar uma lata formada pela mistura de:

- 3 partes de amarelo ouro

- 5 partes de rosa carinho
- 2 partes de branco paz

ou

- 7 partes de amarelo ouro
- 3 partes de azul céu

ou pode, ainda, comprar a cor básica, encomendando, por exemplo, 10 partes de vermelho alegria.

a) Considerando que cada mudança nas cores básicas incluídas ou nas proporções usadas gera uma tonalidade diversa, quantas tonalidades diferentes podem ser produzidas?

b) Se a empresa der a possibilidade ao cliente de comprar latas com quantidades menores, compostas por composições com até 10 partes (por exemplo, encomendar uma lata com 2 partes de vermelho alegria e 1 parte de amarelo ouro), de quantas formas diferentes um cliente poderia compor o pedido de uma lata de tinta (considere que o pedido é definido tanto pela tonalidade quanto pela quantidade, isto é: 5 partes de branco paz + 5 partes de negro universo é diferente de 3 partes de branco paz + 3 partes de negro universo).

Atividade 3.4. Genética

A cor da pele humana é resultado da concentração de um pigmento marrom chamado melanina a qual é determinada por no mínimo dois pares de genes, que indicaremos pelas letras Nn e Bb. aqui N e B determinarão uma grande quantidade de melanina (são os alelos efetivos) e n e b uma pequena quantidade (alelos não efetivos). Com isto em mente, as pessoas $NNBB$ serão negras e as $nnbb$ serão brancas. Entre estes dois extremos, teremos os mulatos com suas nuances: escuro, médio e claro. Os cruzamentos possíveis enter Fernanda e Tiago, que são mulatos médios estão representados esquematicamente na figura 30:

Figura 30 – $NnBb$ X $NnBb$

Pai → Mãe ↓	NB	Nb	nB	nb
NB	NNBB Negro	NNBb Mulato escuro	NnBB Mulato escuro	NnBb Mulato médio
Nb	NNBb Mulato escuro	NNbb Mulato médio	NnBb Mulato médio	Nnbb Mulato claro
nB	NnBB Mulato escuro	NnBb Mulato médio	nnBB Mulato médio	nnBb Mulato claro
nb	NnBb Mulato médio	Nnbb Mulato claro	nnBb Mulato claro	nnbb Branco

Fonte: https://sites.usp.br/cdcc/wp-content/uploads/sites/512/2019/08/genetica-combinatoria-professor.pdf

Tabela 1 – Número de genes

Fenótipos	**Número de genes**
Negro ($NNBB$)	4 genes efetivos e 0 não efetivos
Mulatos escuros ($NNBb$ ou $nNBB$)	3 genes efetivos e 1 não efetivo
Mulatos médios ($NNbb$ ou $nnBB$)	2 genes efetivos e 2 não efetivos
Mulatos claros ($Nnbb$ ou $nnBb$)	1 gene efetivo e 3 não efetivos
Branco ($nnbb$)	0 genes efetivos e 4 não efetivos

Fonte: https://sites.usp.br/cdcc/wp-content/uploads/sites/512/2019/08/genetica-combinatoria-professor.pdf

Utilizando o triângulo de Pascal...

Chama-se de P = alelos efetivos = 2 (N ou B) e Q = alelos não efetivos = 2 (n ou b). Procura-se no triângulo a linha em que o número de alelos é igual a 4.

Tabela 2 – Coeficientes

Número de genes	**Coeficientes**
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

Fonte: https://sites.usp.br/cdcc/wp-content/uploads/sites/512/2019/08/genetica-combinatoria-professor.pdf

Logo, temos que:

Tabela 3 – Coeficientes e Expoentes

1	negro	4 efetivos e 0 não efetivos
4	mulatos escuros	3 efetivos e 1 não efetivo
6	mulatos médios	2 efetivos e 2 não efetivos
4	mulatos claros	1 efetivo e 3 não efetivos
1	brancos	0 efetivos e 4 não efetivos

Fonte: https://sites.usp.br/cdcc/wp-content/uploads/sites/512/2019/08/genetica-combinatoria-professor.pdf

Ou seja,

$$\text{Negro:}\frac{1}{16}; \qquad \text{Mulato escuro:}\frac{4}{16}; \qquad \text{Mulato médio:}\frac{6}{16}; \qquad \text{Mulato claro:}\frac{4}{16}; \qquad \text{Branco:}\frac{1}{16}$$

ou

$$\boxed{1\ :\ 4\ :\ 6\ :\ 4\ :1}$$

Se denotarmos por p os alelos efetivos (N e B), por q os alelos não efetivos (n e b) e desenvolvermos o binômio de Newton com $n = 4$ (número total de letras que representam os alelos), obteremos:

$$(p+q)^4 = \underbrace{1p^4}_{\substack{\text{1 negro} \\ NNBB}} + \underbrace{4p^3q}_{\substack{\text{4 mulatos escuros} \\ NNBb \text{ ou } NnBB}} + \underbrace{6p^2q^2}_{\substack{\text{6 mulatos médios} \\ NnBb \text{ ou } NNbb \text{ ou } nnBB}} + \underbrace{4pq^3}_{\substack{\text{4 mulatos claros} \\ Nnbb \text{ ou } bnBb}} + \underbrace{1q^4}_{\substack{\text{1 branco} \\ nnbb}}$$

Além dos coeficientes darem as proporções, os expoentes podem ser interpretados da seguinte maneira: p^4 significa a presença de 4 alelos efetivos, p^3q a presença de 3 alelos efetivos e 1 não efetivo, e assim por diante.

Atividade 3.5. Números de Divisores

Vamos calcular o número de divisores positivos de 360.

Primeiramente, devemos decompor o número 360 em potências de primos distintos.

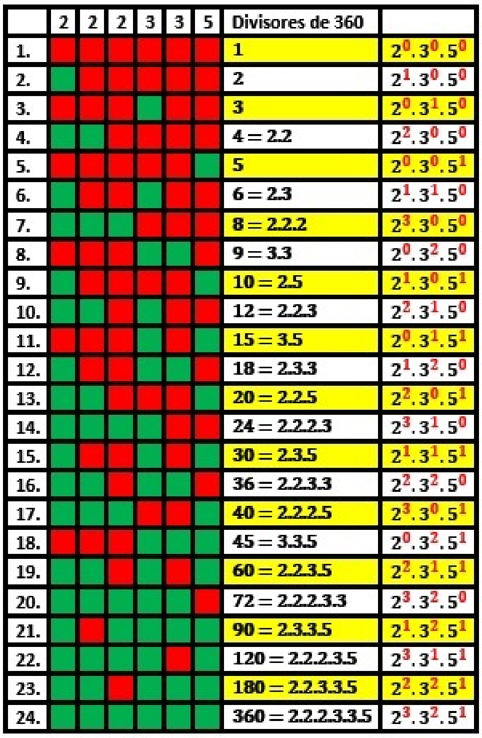
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

Os divisores positivos de 360 são da forma $2^x \times 3^y \times 5^z$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$ e $z \in \{0, 1\}$. Observe na figura 31 que o número de divisores positivos de 360 é igual a 24. Que pode ser calculado somando uma unidade a cada expoente da decomposição em primos distintos de 360 e multiplicando os resultados, ou seja:

$$(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = \underbrace{4}_{\substack{\text{nº de}\\ \text{possibilidades}\\ \text{para o expoente}\\ \text{do 2}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{nº de}\\ \text{possibilidades}\\ \text{para o expoente}\\ \text{do 3}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{nº de}\\ \text{possibilidades}\\ \text{para o expoente}\\ \text{do 5}}} = 24$$

Na figura 31 foram utilizados o sim e o não para percebermos a presença ou ausência de cada primo nos divisores e, portanto, entendermos o produto acima que nos dá rapidamente o número de divisores de 360.

Figura 31 – Número de Divisores



	2	2	2	3	3	5	Divisores de 360	
1.							1	$2^0.3^0.5^0$
2.							2	$2^1.3^0.5^0$
3.							3	$2^0.3^1.5^0$
4.							4 = 2.2	$2^2.3^0.5^0$
5.							5	$2^0.3^0.5^1$
6.							6 = 2.3	$2^1.3^1.5^0$
7.							8 = 2.2.2	$2^3.3^0.5^0$
8.							9 = 3.3	$2^0.3^2.5^0$
9.							10 = 2.5	$2^1.3^0.5^1$
10.							12 = 2.2.3	$2^2.3^1.5^0$
11.							15 = 3.5	$2^0.3^1.5^1$
12.							18 = 2.3.3	$2^1.3^2.5^0$
13.							20 = 2.2.5	$2^2.3^0.5^1$
14.							24 = 2.2.2.3	$2^3.3^1.5^0$
15.							30 = 2.3.5	$2^1.3^1.5^1$
16.							36 = 2.2.3.3	$2^2.3^2.5^0$
17.							40 = 2.2.2.5	$2^3.3^0.5^1$
18.							45 = 3.3.5	$2^0.3^2.5^1$
19.							60 = 2.2.3.5	$2^2.3^1.5^1$
20.							72 = 2.2.2.3.3	$2^3.3^2.5^0$
21.							90 = 2.3.3.5	$2^1.3^2.5^1$
22.							120 = 2.2.2.3.5	$2^3.3^1.5^1$
23.							180 = 2.2.3.3.5	$2^2.3^2.5^1$
24.							360 = 2.2.2.3.3.5	$2^3.3^2.5^1$

Fonte: Produzido pelo Autor

4 Embasamento Teórico

De acordo com Morgado et al. (2016), o primeiro registro do triângulo de Pascal foi no frontispício de um livro por Petrus Apianus (1495-1552) e, em 1654, Pascal (1623-1662) fez a publicação de um tratado apresentando a utilização do triângulo para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.

Neste Capítulo vamos abordar princípios básicos da análise combinatória e do binômio de Newton com introdução ao estudo do triângulo de Pascal.

4.1 Análise Combinatória

A Análise Combinatória é o conteúdo estudado por alunos do ensino básico, que envolve métodos e técnicas com o objetivo de solucionar problemas de contagem. Dessa forma, é muito importante na descoberta de possibilidades de um experimento.

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (MORGADO et al., 2016)

Como enfatizado por Morgado et al. (2016), problemas simples acabam se tornando difíceis, pois os problemas de análise combinatória necessitam de uma interpretação bem feita dos problemas e essa interpretação é uma das grandes dificuldades encontradas por alunos no ensino básico.

4.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem (PFC), ou princípio multiplicativo, é um conteúdo da matemática muito importante para a introdução dos problemas de contagem, sempre que desejamos encontrar a quantidade de possibilidades para a ocorrência de um evento constituído etapas sucessivas e independentes.

> O objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação no cálculo de probabilidade. (BRASIL, 1997)

Com o princípio fundamental da contagem podemos calcular a quantidade de maneiras de decisões que podemos fazer certas escolhas. Se uma decisão pode ser tomada de n maneiras e outra decisão pode ser tomada de m maneiras, o número de maneiras que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente é calculado pelo produto $n \times m$.

Demonstração. Sendo:

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ as m maneiras de ocorrências de A.

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ as n maneiras de ocorrências de B.

Considerando cada possibilidade um par ordenado (a_i, b_j), onde a_i representa as maneiras de ocorrer A, com $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, e b_j as maneiras de ocorrer B, com $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vamos fixar o a_1 como o primeiro termo do par e variar o segundo termo de b_1 a b_n. Depois vamos repetir este processo para cada a_i.

$$m\,linhas \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_n) \to n\,pares \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_n) \to n\,pares \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_n) \to n\,pares \end{cases}$$

Se somarmos todas as possibilidades, temos que a cada linha, gera n pares diferentes. Como temos m linhas, ficaremos com:

$$n + n + \cdots + n = m \times n$$

□

De forma intuitiva podemos estender o princípio multiplicativo para r conjuntos e não somente dois. Sendo assim, temos:

$$A = a_1, a_2, \ldots, a_{n1}. \quad \text{Temos } n_1 \text{ maneiras de ocorrer } A$$

$$B = b_1, b_2, \ldots, b_{n2}. \quad \text{Temos } n_2 \text{ maneiras de ocorrer } B$$

$$\vdots$$

$$Z = z_1, z_2, \ldots, z_{nr} \quad \text{Temos } n_r \text{ maneiras de ocorrer } Z$$

Logo o total de possibilidades é:

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$$

Exemplo 4.1. Pedro precisa se arrumar para sair à noite com seus amigos. Para sair ele dispõe de duas calças, uma preta e outra azul; três camisas, uma amarela, uma verde e outra preta; e dois sapatos, um marrom e outro preto. Se ele vai escolher um item de cada para se vestir, de quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

Figura 32 – Árvore de Possibilidades

Fonte: Produzido pelo Autor

Note na figura 32 que há 12 possibilidades de escolha, mas era possível chegar a esse número realizando a simples multiplicação das possibilidades por meio do princípio fundamental da contagem, logo o número de maneiras possíveis poderia ser calculado por:

$$2 \times 3 \times 2 = 12.$$

4.1.2 Permutação Simples

A permutação simples é utilizada para ordenar elementos de um conjunto finito, quando seus elementos não se repetem.

Consideremos um conjunto com n elementos distintos. Se desejamos organizar esse elementos em uma fila, é preciso escolher o primeiro elemento e, para isso, temos n possibilidades de escolha. Na escolha do segundo elemento, temos (n - 1) possibilidades, pois já usamos uma opção ao escolher o primeiro, e assim por diante até que se esgotem todos os elementos.

A quantidade total de permutações será dada multiplicando a quantidade de possibilidades existentes na escolha de cada elemento.

Dessa forma, teremos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \tag{4.1}$$

Exemplo 4.2. Uma fila precisa ser organizada de forma aleatória. Para formar a fila temos 5 pessoas, Carlos, Alice, Pedro, Maria e José.

De quantas maneiras diferentes essa fila pode ser formada?

Resposta:

- Para escolher a primeira pessoa para entra na fila temos: Carlos, Alice, Pedro, Maria ou José. Isto é, 5 pessoas.
- Supondo ter escolhido Maria para a primeira pessoa, agora para escolher a segunda pessoa para entrar na fila temos: Carlos, Alice, Pedro ou José. Isto é, 4 pessoas.
- Supondo ter escolhido Carlos para a segunda pessoa, agora para escolher a terceira pessoa para entrar na fila temos: Alice, Pedro ou José. Isto é, 3 pessoas.
- Supondo ter escolhido Pedro para a terceira pessoa, agora para escolher a quarta pessoa para entrar na fila temos: Alice ou José. Isto é, 2 pessoas.
- Supondo ter escolhido Alice para a quarta pessoa, agora para escolher a quinta pessoa para entrar na fila temos José. Isto é, 1 pessoa.

Dessa forma, o total de possibilidades para formar essa fila é dada por

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Chamamos a expressão 4.1 de fatorial de n, e denotamos por $n!$.

4.1.3 Fatorial de Número Natural

Como já mencionado, o fatorial de um número natural n é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

Assim, temos

- Por convenção $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \times 1 = 2$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$$\vdots$$

Exemplo 4.3. De quantas maneiras diferentes podemos organizar seis pessoas em uma fila indiana?

Resposta: Temos que organizar seis pessoas em seis lugares. Então, para o primeiro lugar podemos escolher qualquer uma das seis, para o segundo lugar teremos cinco pessoas para escolher, para o terceiro lugar teremos quatro pessoas para escolher, para o quarto lugar teremos três pessoas para escolher, para o quinto lugar teremos duas pessoas para escolher, para o sexto lugar teremos uma pessoa.

Logo, o total de maneiras de organizar essa fila é dado por

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \, \text{maneiras}$$

Ou seja, 6!.

4.1.4 Permutação com Elementos Repetidos

Quando precisamos permutar um conjunto que possui elementos repetidos, é primordial observar que algumas possibilidades serão contadas repetidas vezes. Esta é uma situação que caracteriza a permutação com elementos repetidos.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 4.4. Vamos verificar os anagramas da palavra PAR. Anagramas são palavras com ou sem sentido, formadas pela troca da ordem das letras de uma outra palavra.

São anagramas da palavra PAR: (PAR, PRA, RPA, RAP, APR, ARP).

Para se obter o número de anagramas de uma palavra, não é necessário que façamos todos os possíveis para depois contar. Imagine a fazer todos os anagramas da palavra CORTESIA.

Note que para contarmos os anagramas da palavra PAR podemos utilizar a permutação de elementos.

Para a primeira letra do anagrama podemos escolher qualquer uma das três letras; para a segunda, duas letras restantes e para a terceira apenas uma letra sobrará. Logo, temos

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6 \, \text{anagramas.}$$

Assim, para a palavra CORTESIA teremos:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40.320 \, \text{anagramas.}$$

Vamos verificar agora os anagramas da palavra CARA.

CARA, CARA, CAAR, CAAR, RAAC, RAAC, RACA, RACA, RCAA, RCAA, CRAA, CRAA, ACRA, ACRA, ARCA, ARCA, AARC, AARC, AACR, AACR, ARAC, ARAC, ACAR, ACAR.

Notemos que a palavra CARA possui 4 letras , fazendo a permutação teremos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, então são vinte e quatro anagramas. Porém, a palavra possui duas letras repetidas. Quando permutamos apenas as letras A, encontramos dois anagramas iguais, que acabam sendo contadas como se fossem diferentes. Isso acontece com todos os anagramas, se retirarmos os anagramas repetidos, ficaremos com um total de 12 anagramas para a palavra CARA, ou seja, dividimos o total de anagramas por 2! (dois fatorial. Número de letras A repetidas).

Para determinar a quantidade de anagramas da palavra BANANA, o raciocínio seria o mesmo, pois agora temos duas letras repetidas e cada uma com um número diferente de repetições. A palavra BANANA possui 6 letras, permutando-as, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$, são setecentos e vinte anagramas. Temos uma situação bem parecida com a anterior. São duas letras N e três letras A. Permutando-se apenas as letras A, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$, seis anagramas iguais, porém contabilizados como se fossem diferentes, e o mesmo acontece com as letras N, sendo que são apenas dois anagramas iguais. Para corrigir a situação, devemos dividir pela quantidade de anagramas repetidos:

$$\frac{720}{2 \times 6} = 60.$$

São sessenta anagramas distintos.

De maneira geral, o número de sequências de n elementos tais que:

a_1 repete-se α_1 vezes

a_2 repete-se α_2 vezes

$\vdots$

a_k repete-se α_k vezes

Pode ser calculado usando a fórmula:

$$P_n^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k}$$

4.1.5 Arranjos Simples

Vamos tratar nesta seção dos arranjos simples, que consistem na escolha e ordenação de parte dos elementos de um conjunto finito.

Para saber quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, devemos escolher um algarismo entre os cinco para ocupar o espaço das centenas; escolher um entre os quatro que sobraram, para ocupar o algarismo das dezenas e escolher um entre os três que sobraram, para ocupar a ordem das unidades.

$$\overline{centenas} \quad \overline{dezenas} \quad \overline{unidades}$$

Assim, a quantidade de números de três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 é:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Ou seja, para determinar a quantidade de escolher três números distintos em um conjunto de cinco números, temos $5 \times (5-1) \times (5-(3-1))$.

Definição 4.5. Dados dois números inteiros positivos n e p, com $1 \leq p \leq n$, um arranjo simples dos n objetos distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tomados p a p é qualquer ordenação de p objetos diferentes escolhidos dentre esses objetos.

Fórmula de Arranjo:

Denotando arranjo de n de p a p por $A_{n,p}$, teremos:

$$A_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-(p-1)). \tag{4.2}$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo da fórmula 4.2 por $(n-p)!$, teremos

$$A_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-(p-1)) \times (n-p)!}{(n-p)!}.$$

Assim, a fórmula usada para calcular arranjos simples é dada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{4.3}$$

Exemplo 4.6. As senhas de um determinado banco são formadas por quatro dígitos, sendo que os algarismos utilizados não poderiam aparecer duas vezes na mesma senha. Sendo assim, qual e a quantidade de senhas possíveis para esse sistema?

Resposta:

Estamos lidando com um problema de arranjo, pois, em uma senha, a ordem é importante, e há 10 opções de algarismos (todos os números de 0 até 9), dos quais escolheremos 4.

Assim, $n = 10$ e $p = 4$ na utilização da fórmula 4.3 do arranjo.

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Logo a quantidade de senhas que podemos formar é 5040.

4.1.6 Combinações Simples

As combinações simples apresentam uma diferença em relação aos arranjos simples. A ordem dos elementos escolhidos importa ou não?

Já vimos que no arranjo simples, para escolhermos no conjunto $\{3, 5, 6, 7\}$, três algarismos distintos para formar um número, teríamos $5 \times 4 \times 3 = 60$. Podemos formar, por exemplo, os números 375, 357, 573. Note que alterando a ordem dos algarismos 3, 5 e 7, formamos números diferentes, e esses deverão ser contatos.

Agora, se escolhermos no mesmo conjunto $\{3, 5, 6, 7\}$ os subconjuntos de três elementos, teremos $\{3, 5, 7\}$, porém os subconjuntos $\{3, 7, 5\}$ e $\{5, 7, 3\}$, ou seja, permutando os três elementos escolhidos, os subconjuntos formados são os mesmos e, desta forma, não devem ser contados.

Assim, para encontrarmos os subconjuntos deveremos fazer os arranjos possíveis e dividir o resultado pela permutação da quantidade de elementos escolhidos, ou seja,

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10 \quad \text{subconjuntos de três elementos.}$$

De modo geral, teremos

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{4.4}$$

Denotando $\frac{A_{n,p}}{p!} = C_{n,p}$ na fórmula 4.4, chegamos a uma representação para determinar a quantidade de combinações de n elementos escolhidos p a p:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{4.5}$$

Exemplo 4.7. Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Resposta:

Para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas. Note que se alterarmos a ordem das frutas escolhidas teremos a mesma salada.

Estamos diante de um problema de combinação. Logo,

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \times 6!} == \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \cancel{6!}} = 210 \quad \text{modos.}$$

4.2 Binômio de Newton

A potência da soma de dois números, tais como $(x + y)^n$, é conhecida como binômio de Newton.

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4.8. Vamos calcular a expansão de $(x+y)^3$.

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) = (xx+xy+yx+yy)(x+y) \\ &= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy \\ &= 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos notar na expansão 4.6, que os expoentes de x decrescem enquanto os de y crescem.

Notemos também que os coeficientes de cada termo encontrado são resultados de combinações simples, que como já visto na seção 4.1.6, são calculadas utilizado-se a fórmula $\binom{n}{p}$, que no caso do binômio, n é o valor do expoente e p vai crescendo de 0 a n.

Assim, podemos escrever

$$(x+y)^3 = 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

Vamos agora definir o binômio de Newton:

Teorema 4.9. *Considere a potência da soma de dois números x e y com expoente n inteiro não negativo. Então,*

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}y^p \tag{4.7}$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Vamos nos basear em uma demonstração interessante apresentada por Morgado et al. (2016) sobre o teorema 4.9.

Demonstração. Observamos que no desenvolvimento

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ vezes}}$$

cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um a ou um b e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de p, $0 \leq p \leq n$, se escolhermos b em p dos parênteses, a será escolhido em $n-p$ dos parênteses e o produto será igual a $a^{n-p}b^p$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{p}$ modos. Então, $(a+b)^n$ é uma soma onde há, para cada $p \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\binom{n}{p}$ parcelas iguais a $a^{n-p}b^p$, isto é,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

□

4.2.1 Coeficiente Binomial

Dados dois números inteiros não negativos n e p, com $p \leq n$. Chamamos de coeficiente binomial n sobre p, e denotamos por $\binom{n}{p}$, o número

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Sendo o número n e o número p, chamados de numerador e de denominador, respectivamente.

Alguns casos especiais do número binomial:

- Se $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}} = \frac{1}{1} = 1$.

  Por exemplo, $\binom{8}{0} = 1$ e $\binom{37}{0} = 1$.

- Se $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n.\cancel{(n-1)!}}{1!\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{1} = n$.

  Por exemplo, $\binom{8}{1} = 8$ e $\binom{37}{1} = 37$.

- Se $p = n$, temos $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}0!} = \frac{1}{1} = 1$.

  Por exemplo, $\binom{8}{8} = 1$ e $\binom{37}{37} = 1$.

4.3 Triângulo de Pascal

Para entendermos melhor a construção do triângulo de Pascal, vamos começar com o desenvolvimento de alguns binômios do tipo $(a+b)^n$, observar os coeficientes de cada desenvolvimento.

Na figura 33, pode-se notar o triângulo aritmético formado pelos coeficientes do resultado da expensão de alguns binômios. Observa-se também, que cada coeficiente é resultado de um número binomial.

Figura 33 – Coeficientes da Expansão de Binômios

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
(a+b)^0 = 1 & \longrightarrow & 1 & & & & & \longrightarrow & \binom{0}{0} & & & & \\
(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1 & \longrightarrow & 1 & 1 & & & & \longrightarrow & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 & \longrightarrow & 1 & 2 & 1 & & & \longrightarrow & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 & \longrightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & \longrightarrow & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 & \longrightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \longrightarrow & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

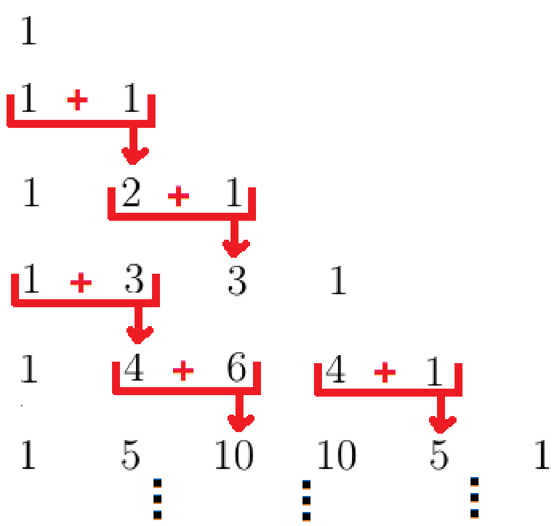
Fonte: Produzido pelo Autor

4.4 Algumas Propriedades do Triângulo de Pascal

Nesta seção teremos algumas demonstrações de propriedades do triângulo de Pascal, baseadas na dissertação de mestrado apresentado por Silva (2013).

Propriedade 4.10 (Relação de Stifel)**.** Somando dois números consecutivos em uma mesma linha teremos como resultado o elemento logo abaixo do número da segunda parcela, como podemos observar na figura 34,

Figura 34 – Relação de Stifel



: Produzido pelo Autor

Essa propriedade tem o nome de Relação de Stifel, também conhecida como identidade de Pascal.

"A identidade de Pascal mostra que, quando dois coeficiente binomiais adjacentes são somados no triângulo, é produzido um coeficiente binomial na próxima linha entre esses dois coeficientes." (ROSEN, 2010)

Como cada número do triângulo é o resultado de um número binomial, podemos então verificar as igualdades:

- $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$.
- $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1} \quad ; \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2} \quad .$
- $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1} \quad ; \quad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2} \quad ; \quad \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3} \quad .$

Ou seja,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad n \geq p \quad \text{e} \quad n \geq 2.$$

Demonstração. Utilizando definições de coeficiente binomial, temos:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} . \frac{n}{(n-p)p} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

□

Propriedade 4.11. Dois binomiais que pertencem a uma mesma linha e são equidistantes dos extremos assumem o mesmo valor, ou seja,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Dados dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ que pertencem a uma mesma linha são complementares se $p + q = n$, ou seja, dessa forma são equidistantes dos extremos e possuem o mesmo valor, ou seja

$$p + q = n \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

Demonstração. Como $p + q = n$, podemos escrever que $p = n - q$. Logo, temos que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)![n-(n-q)]!} = \frac{n!}{(n-q)!q!} = \binom{n}{q}.$$

□

Propriedade 4.12 (Teorema das Linhas)**.** A soma dos elementos da n-ésima linha é igual a 2^n, ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Faremos a demonstração por indução.

Demonstração.

- A igualdade é válida para $n = 0$, pois

$$\binom{n}{0} = 1 = 2^0$$

- Suponhamos que o resultado seja válido para algum n, ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- Vamos demonstrar que o resultado é válido para $n + 1$.

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}.$$

Pela relação de Stifel, propriedade 4.10, temos que

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{1} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \\
\binom{n+1}{2} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\
&\vdots \\
\binom{n+1}{n} &= \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}
\end{aligned}$$

Temos assim,

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}=$$

$$\binom{n+1}{0}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]+\ldots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+\binom{n+1}{n+1}.$$

$$2\underbrace{\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]}_{2^n}=2\times 2^n=2^{n+1}$$

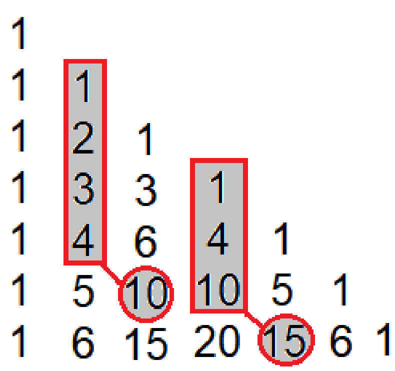
Logo, o teorema é válido para a linha $(n+1)$. Portanto, por indução, é válido para qualquer linha.

□

Propriedade 4.13 (Teorema das Colunas)**.** A soma dos elementos de uma coluna do triângulo, começando do primeiro elemento da coluna, tem como resultado o binomial à direita na linha abaixo do último elemento que foi somado.

Observe a ilustração na figura 35.

Figura 35 – Teorema das Colunas



: Produzido pelo Autor

Dados dois números inteiros não negativos n e p, a soma dos $p+1$ primeiros números da coluna n do triângulo de Pascal é:

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\binom{p+3}{p}+\ldots+\binom{p+n}{p}=\binom{p+n+1}{p+1}. \tag{4.8}$$

Demonstração. Vamos a relação de Stifel aos elementos da coluna $p+1$ a partir da linha $p+2$. Lembrando que $\binom{p}{p}=1$ para todo número natural n.

$$
\begin{aligned}
\binom{p+1}{p+1} &= \binom{p}{p}\\
\binom{p+2}{p+1} &= \binom{p+1}{p+1}+\binom{p+1}{p}\\
\binom{p+3}{p+1} &= \binom{p+2}{p+1}+\binom{p+2}{p}\\
&\vdots\\
\binom{p+n}{p+1} &= \binom{p+n-1}{p+1}+\binom{p+n-1}{p}\\
\binom{p+n+1}{p+1} &= \binom{p+n}{p+1}+\binom{p+n}{p}
\end{aligned}
$$

Somando e simplificando ambos os membros das igualdades teremos:

$$\cancel{\binom{p+1}{p+1}}+\cancel{\binom{p+2}{p+1}}+\cancel{\binom{p+3}{p+1}}+\ldots+\cancel{\binom{p+n}{p+1}}+\binom{p+n+1}{p+1}=\binom{p}{p}+\cancel{\binom{p+1}{p+1}}+\binom{p+1}{p}+\cancel{\binom{p+2}{p+1}}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\cancel{\binom{p+n}{p+1}}+\binom{p+n}{p}.$$

Ou seja,

$$\binom{p+n+1}{p+1}=\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\binom{p+n}{p}.$$

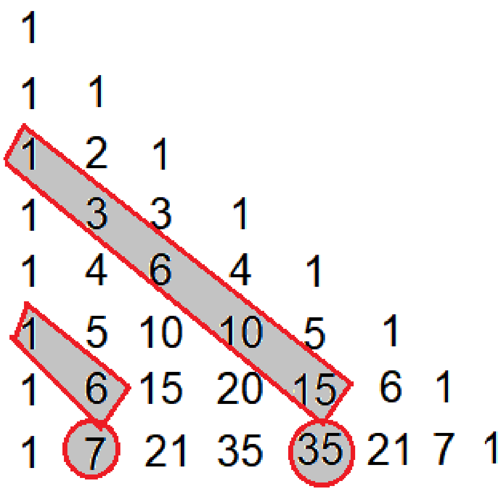
Como queríamos demonstrar.

$\square$

Propriedade 4.14 (Teorema das Diagonais)**.** A soma dos elementos de uma diagonal do triângulo, começando pelo primeiro elemento da diagonal, é igual ao elemento que está imediatamente abaixo do último elemento da soma.

Observe a ilustração na figura 36.

Figura 36 – Teorema das Diagonais



: Produzido pelo Autor

Utilizando a notação de coeficientes binomiais, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Demonstração. Pela propriedade de binomiais complementares temos que:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n};\ \binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{n};\ \binom{n+2}{2}=\binom{n+2}{n};\ldots;\ \binom{n+p}{p}=\binom{n+p}{n}.$$

Assim,

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}.$$

Pelo teorema das colunas, sabemos que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

E pelo teorema de binomiais complementares, temos

$$\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Logo, concluímos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots;\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Como queríamos provar. □

Conclusão

Este trabalho teve como principal objetivo mostrar formas diferenciadas de estudar a análise Combinatória, o triângulo de Pascal e o binômio de Newton, onde foi deixada de lado a utilização de fórmulas mecanizadas e foram desenvolvidos exercícios resolvidos através de observações e conjecturas.

Acreditamos que a execução das atividades como a proposta desse trabalho será de grande ajuda no aprendizado dos alunos, pois que para resolver as atividades eles atingirão habilidades propostas pela BNCC e ampliarão a compreensão dos conteúdos trabalhados, reconhecendo suas propriedades, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e enriquecedora.

Percebemos que diante das atividades feitas na prática, como por exemplo, todos saírem da sala e retornarem para escolher um lugar para sentar, os alunos têm uma maior interação e envolvimento com a disciplina. Verificando os acertos e erros, pode-se ter como retorno aquilo que espera.

Referências

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*: Secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. *Ministério da Educação*: Base nacional comum curricular. Brasília: MEC, 2018.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 10ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. Tradução: Helena Castro, João Giudice. 6ª. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SILVA, S. D. *Estudo do Binômio de Newton*. 2013. 60 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

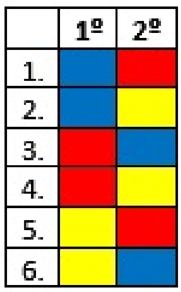
Apêndices

APÊNDICE A – Sugestões de exercícios de contagem com os próprios alunos

A análise combinatória é considerada um dos assuntos mais difíceis do ensino médio, mas ao mesmo tempo, encanta os alunos. Isso se deve a sua aplicabilidade que é percebida de imediato por eles. A partir dessa percepção sugerimos que os professores criem problemas de contagem com os próprios alunos e, a partir dos padrões observados, estimulem os mesmos a fazerem conjecturas. A seguir, alguns exemplos:

Exemplo A.1. Sugerir um problema simples para introduzirmos Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Por exemplo, os alunos dispõem de três lápis com cores diferentes (**azul**, **vermelho** e amarelo) para pintar dois retângulos. De quantas maneiras esses alunos poderão pintar esses dois retângulos de modo que o segundo seja pintado com uma cor diferente do primeiro? E, se os retângulos puderem ser pintados com a mesma cor?

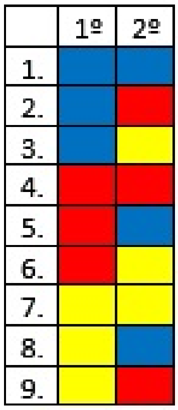
Figura 37 – Cores nos Retângulos Sem Repetição



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{nº de possibilidades}\\ \text{para pintar o}\\ \text{primeiro retângulo}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{nº de possibilidades}\\ \text{para pintar o segundo retângulo}\\ \text{(cor diferente do primeiro)}}} = \underbrace{6}_{\substack{\text{total de maneiras}\\ \text{de pintar os dois}\\ \text{retângulos}}}$$

Figura 38 – Cores nos Retângulos Com Repetição



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{nº de possibilidades}\\ \text{para pintar o}\\ \text{primeiro retângulo}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{nº de possibilidades}\\ \text{para pintar o}\\ \text{segundo retângulo}}} = \underbrace{9}_{\substack{\text{total de maneiras}\\ \text{de pintar os dois}\\ \text{retângulos}}}$$

Obs.: Explore as cores, trabalhe o visual.

Exemplo A.2. Peça para os alunos levarem para a aula 2 calçados (tênis ou sandália), 2 bermudas (ou saias) e 3 camisas e peça para que eles façam todas as possíveis combinações com 1 calçado, 1 bermuda (ou saia) e 1 camisa. Registre as informações no quadro, faça o diagrama de árvore e depois aplique o PFC.

Exemplo A.3. Considere uma sala de aula com 20 carteiras e 20 alunos.

Todos devem sair da sala e depois retornarem, um a um, para sentar-se. O 1º a entrar encontra 20 lugares disponíveis para sentar-se, o 2º encontra 19, o 3º encontra 18, e assim por diante até o 20º que encontra apenas um lugar vago. O professor vai anotando no quadro o número de possibilidades de cada aluno e ao final chegará ao número $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. O professor, então sugere uma notação (20!) para o produto e chama de fatorial de 20. A partir desse momento, vamos chamar o produto de um número natural por todos os seus antecessores até o 1 por fatorial desse número, ou seja:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n! \quad (n \geq 2)$$

Obs.: Adiantar para os alunos que será necessário adotar $1! = 1$ e $0! = 1$ para que os resultados futuros tenham validade para todos os números naturais.

Exemplo A.4. Considere a sala com 20 carteiras e 14 alunos.

Seguindo a lógica do exercício A.2, chegaremos ao número $20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 9 \times 8 \times 7$ que não poderemos chamar de 20!, pois está faltando $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Podemos sugerir aos alunos para completar o fatorial de 20 e "descontar" o que foi acrescentado. Como fazer isto?

$$20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7=\frac{20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{20!}{6!}$$

(fatorial do total de lugares dividido pelo fatorial do número de lugares não ocupados), ou seja,

$$20\times19\times18\times\ldots\times9\times8\times7=\frac{20!}{6!}=\frac{20!}{(10-14)!},$$

que será representado por

$$A_{20,14}$$

e será chamado de "Arranjos de 20 elementos tomados (agrupados) 14 a 14".

Fazendo mais alguns exemplos podemos generalizar e escrever:

$$A_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!}\qquad(n\in\mathbb{N}\quad\text{e}\quad p\leq n).$$

É importante que os alunos tenham a clareza que o agrupamento é ordenado.

Exemplo A.5. Formar uma chapa do Grêmio (Presidente(a), Tesoureiro(a) e secretário (a));

Exemplo A.6. Apostar uma corrida e formar o pódio (1º, 2º e 3º lugares);

Exemplo A.7. Formar filas para introduzirmos a ideia de permutação; Sem restrições, elementos juntos, elementos fixos, ...

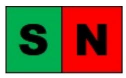
Exemplo A.8. Anagramas com os nomes dos(as) alunos(as).

Exemplo A.9. Calcular o número de abraços (= apertos de mãos) para introduzirmos a ideia de combinação;

Exemplo A.10. Calcular o número de comissões.

APÊNDICE B – Produto Educacional (PE): Puzzle dos padrões combinatórios

Figura 39 – Sim ou Não

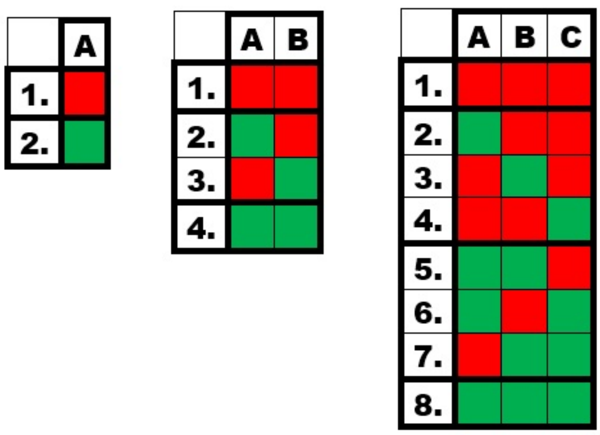


Fonte: Produzido pelo Autor

Objetivo do Puzzle: Completar as tabelas com as peças verdes (sim = o elemento pertence ao agrupamento) e vermelhas (não = o elemento não pertence ao agrupamento) de modo a compor padrões combinatórios.

Recorte as figuras 40 e peça para os alunos montarem as figuras 41.

Figura 40 – Figuras para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

Figura 41 – Figuras para Montar

	A
1.	
2.	

	A	B
1.		
2.		
3.		
4.		

	A	B	C
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Figura 42 – Resultado Esperado

A	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
	$1 = \binom{1}{1}$	1	0
	$1 = \binom{1}{0}$	0	1

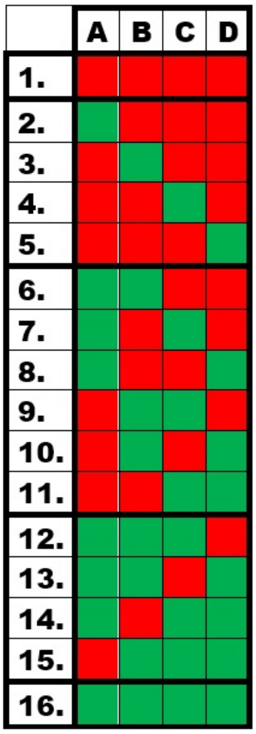
A	B	De quantas Maneiras?	SIM	NÃO
		$1 = \binom{2}{2}$	2	0
		$2 = \binom{2}{1}$	1	1
			1	1
		$1 = \binom{2}{0}$	0	2

	A	B	C	De quantas Maneiras?	Sim	Não
1.				$1 = \binom{3}{3}$	3	0
2.				$3 = \binom{3}{2}$	2	1
3.					2	1
4.					2	1
5.				$3 = \binom{3}{1}$	1	2
6.					1	2
7.					1	2
8.				$1 = \binom{3}{0}$	0	3

Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 43 e peça para os alunos montarem a figura 44.

Figura 43 – Figura para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

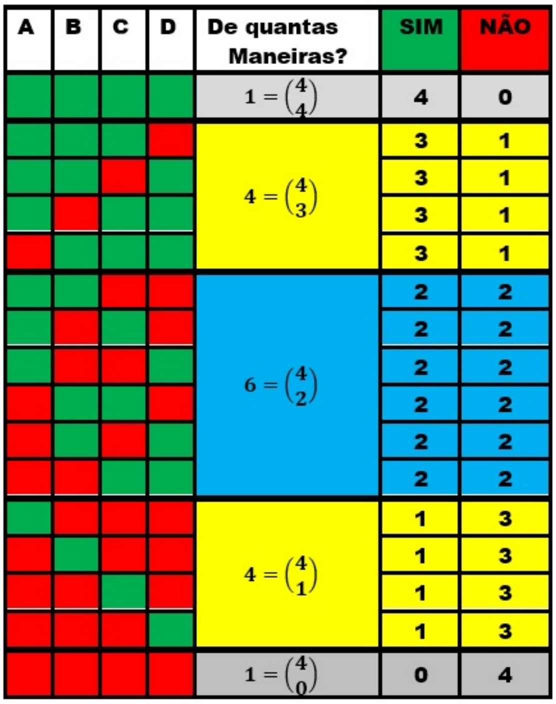
Figura 44 – Figura para Montar

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

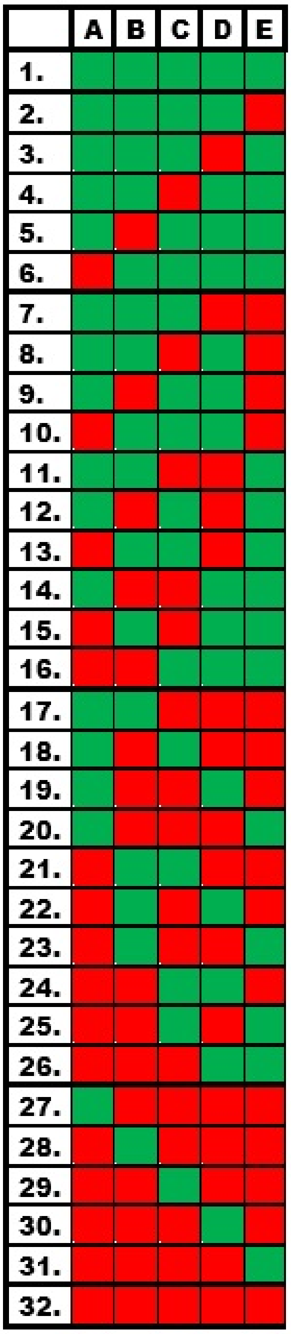
Figura 45 – Resultado Esperado



Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 46 e peça para os alunos montarem a figura 47.

Figura 46 – Figura para Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

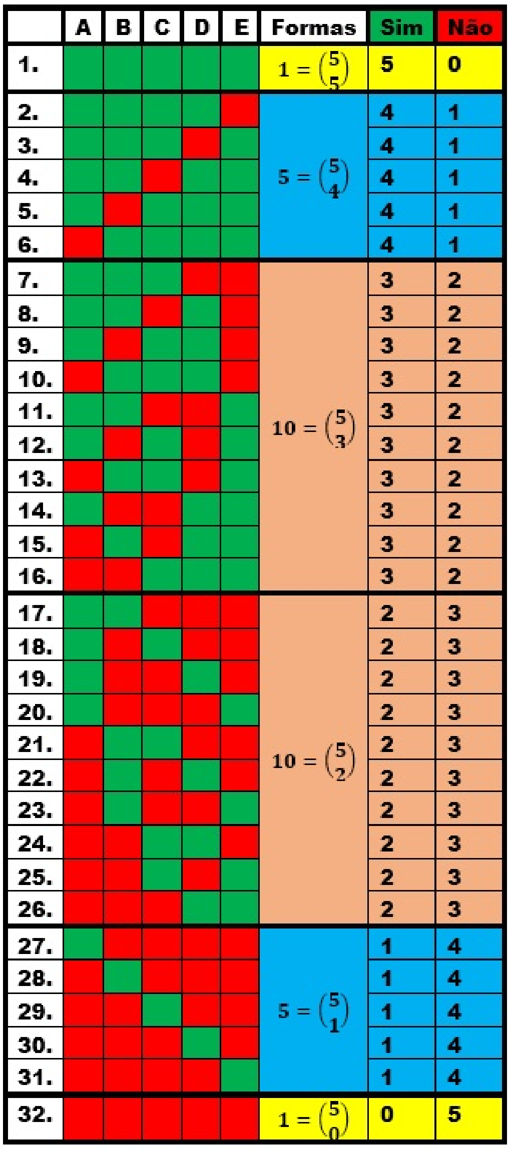
Figura 47 – Figura para Montar

	A	B	C	D	E
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					
14.					
15.					
16.					
17.					
18.					
19.					
20.					
21.					
22.					
23.					
24.					
25.					
26.					
27.					
28.					
29.					
30.					
31.					
32.					

Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Figura 48 – Resultado Esperado

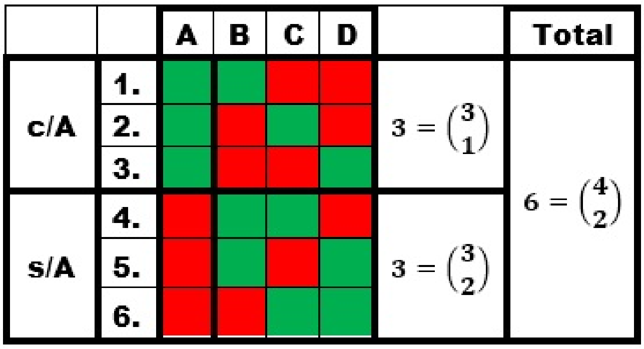


	A	B	C	D	E	Formas	Sim	Não
1.						$1 = \binom{5}{5}$	5	0
2.						$5 = \binom{5}{4}$	4	1
3.							4	1
4.							4	1
5.							4	1
6.							4	1
7.						$10 = \binom{5}{3}$	3	2
8.							3	2
9.							3	2
10.							3	2
11.							3	2
12.							3	2
13.							3	2
14.							3	2
15.							3	2
16.							3	2
17.						$10 = \binom{5}{2}$	2	3
18.							2	3
19.							2	3
20.							2	3
21.							2	3
22.							2	3
23.							2	3
24.							2	3
25.							2	3
26.							2	3
27.						$5 = \binom{5}{1}$	1	4
28.							1	4
29.							1	4
30.							1	4
31.							1	4
32.						$1 = \binom{5}{0}$	0	5

Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá usar partes das figuras anteriores e orientar os alunos para que eles percebam a Relação de STIFEL.

Figura 49 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

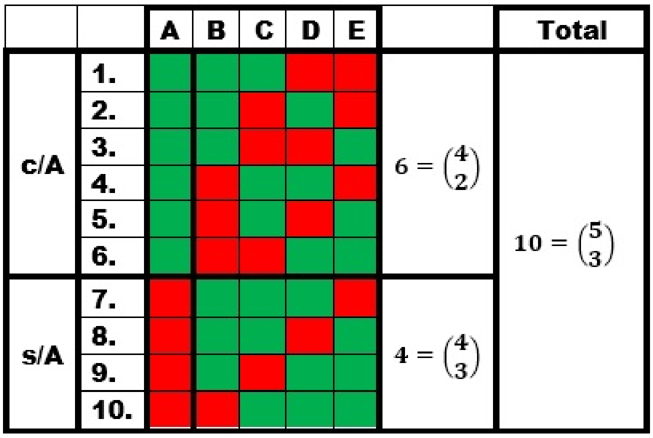
$$\underbrace{\overset{\textit{com o A}}{\binom{3}{1}}}_{3} + \underbrace{\overset{\textit{sem o A}}{\binom{3}{2}}}_{3} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}$$

Figura 50 – Relação de STIFEL. Montagem

		A	B	C	D	......	Total
c/A	1.						
	2.						
	3.						
s/A	4.						
	5.						
	6.						

Fonte: Produzido pelo Autor

Figura 51 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

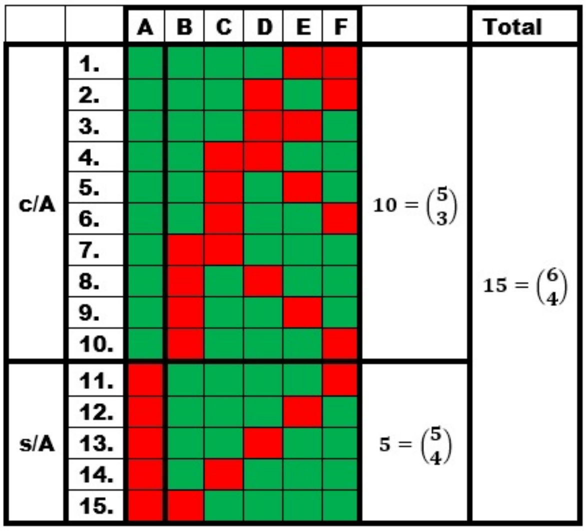
$$\underbrace{\overset{\text{com o } A}{\binom{4}{2}}}_{6} + \underbrace{\overset{\text{sem o } A}{\binom{4}{3}}}_{4} = \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}$$

Figura 52 – Relação de STIFEL. Montagem

		A	B	C	D	E	.....	Total
c/A	1.							
	2.							
	3.							
	4.							
	5.							
	6.							
s/A	7.							
	8.							
	9.							
	10.							

Fonte: Produzido pelo Autor

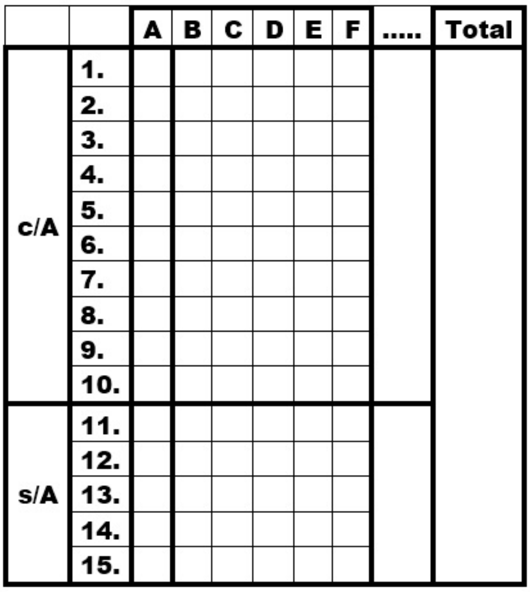
Figura 53 – Relação de STIFEL. Recorte



Fonte: Produzido pelo Autor

$$\underbrace{\overset{\text{com o } A}{\binom{5}{3}}}_{10} + \underbrace{\overset{\text{sem o } A}{\binom{5}{4}}}_{15} = \underbrace{\binom{6}{4}}_{10}$$

Figura 54 – Relação de STIFEL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor e a observação dos padrões obtidos em todas as figuras anteriores, os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ (Propriedade da linha);
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (Binomiais complementares);
3. $\binom{n}{0} = 1$ (Só existe 1 maneira de ninguém participar do grupo);
4. $\binom{n}{n} = 1$ (Só existe 1 maneira de todos participarem do grupo);
5. $\binom{n}{1} = n$ (Quando apenas 1 pessoa participa do grupo, o total de grupos é igual ao número de pessoas);
6. RELAÇÃO DE STIFEL
$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p};$$
7. Se aplicarmos a relação de STIFEL recursivamente, chegaremos à propriedade da COLUNA e se, fizermos os complementares de todos os binomiais na propriedade da coluna, chegaremos à propriedade da DIAGONAL.

$$\begin{aligned}
\binom{9}{3} &= \binom{8}{2} + \underbrace{\binom{8}{3}}_{\binom{7}{2}+\binom{7}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \underbrace{\binom{7}{3}}_{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \underbrace{\binom{6}{3}}_{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{\binom{2}{2}} \\
&= \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \quad \text{COLUNA}
\end{aligned}$$

PROPRIEDADE DA COLUNA

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\cdots+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$

8. Fazendo os complementares de todos os binomiais, temos:

$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\binom{9}{6}} = \underbrace{\binom{8}{2}}_{\binom{8}{6}}+\underbrace{\binom{7}{2}}_{\binom{7}{5}}+\underbrace{\binom{6}{2}}_{\binom{6}{4}}+\underbrace{\binom{5}{2}}_{\binom{5}{3}}+\underbrace{\binom{4}{2}}_{\binom{4}{2}}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{\binom{3}{1}}+\underbrace{\binom{2}{2}}_{\binom{2}{0}}$$

$$\binom{9}{6} = \binom{8}{6}+\binom{7}{5}+\binom{6}{4}+\binom{5}{3}+\binom{4}{2}+\binom{3}{1}+\binom{2}{0} \quad \text{DIAGONAL}$$

PROPRIEDADE DA DIAGONAL

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}.$$

Triângulo de Pascal

Recorte a a figura 55 e peça para os alunos montarem a figura 56.

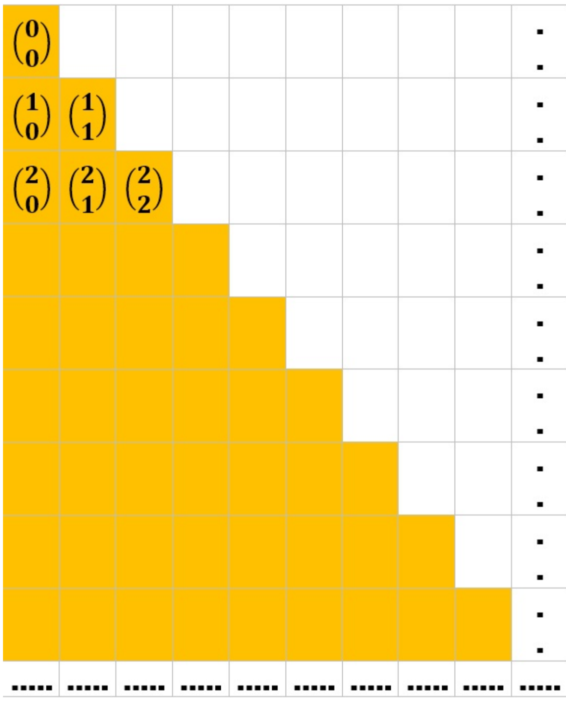
Figura 55 – Triângulo de PASCAL. Recorte

$\binom{0}{0}$								
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$	
$\binom{8}{0}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{8}{8}$

Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 56 – Triângulo de PASCAL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Recorte a figura 57 e peça para os alunos montarem a figura 58

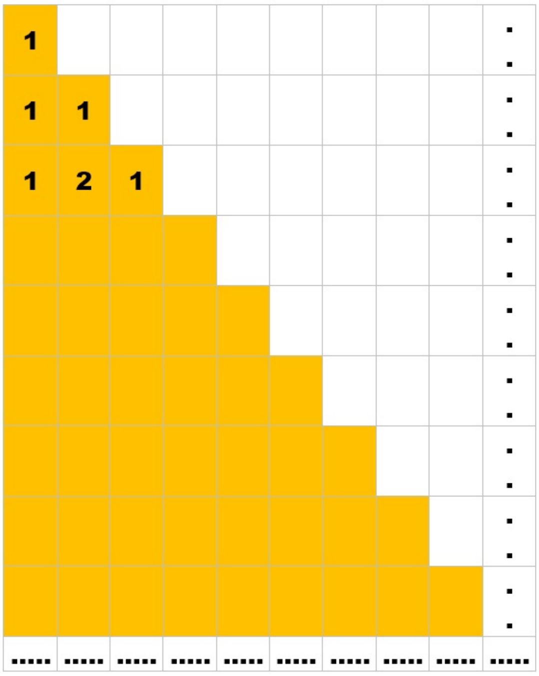
Figura 57 – Triângulo de PASCAL. Recorte

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Fonte: Produzido pelo Autor

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 58 – Triângulo de PASCAL. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Sequência de Fibonacci

Recorte a figura 59 e peça para os alunos montarem a figura 60.

Figura 59 – Sequência de FIBONACCI. Recorte

$\binom{0}{0}$						=	1
$\binom{1}{0}$						=	1
$\binom{2}{0}+$	$\binom{1}{1}$					=	2
$\binom{3}{0}+$	$\binom{2}{1}$					=	3
$\binom{4}{0}+$	$\binom{3}{1}+$	$\binom{2}{2}$				=	5
$\binom{5}{0}+$	$\binom{4}{1}+$	$\binom{3}{2}$				=	8
$\binom{6}{0}+$	$\binom{5}{1}+$	$\binom{4}{2}+$	$\binom{3}{3}$			=	13
$\binom{7}{0}+$	$\binom{6}{1}+$	$\binom{5}{2}+$	$\binom{4}{3}$			=	21
$\binom{8}{0}+$	$\binom{7}{1}+$	$\binom{6}{2}+$	$\binom{5}{3}+$	$\binom{4}{4}$		=	34
$\binom{9}{0}+$	$\binom{8}{1}+$	$\binom{7}{2}+$	$\binom{6}{3}+$	$\binom{5}{4}$		=	55
$\binom{10}{0}+$	$\binom{9}{1}+$	$\binom{8}{2}+$	$\binom{7}{3}+$	$\binom{6}{4}+$	$\binom{5}{5}$	=	89

Fonte: Produzido pelo Autor

Orientações para a próxima página:

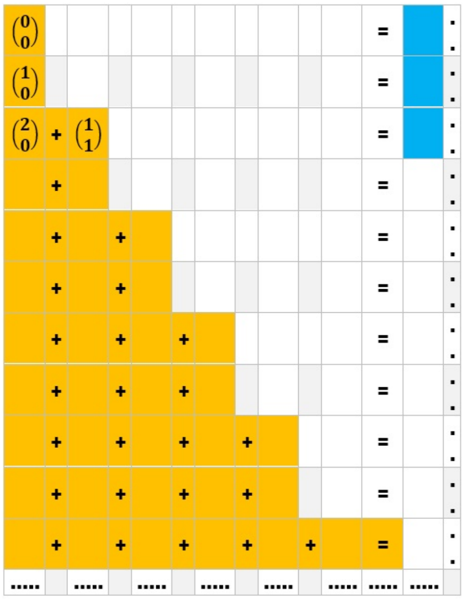
1. Arrume as peças seguindo o padrão;

2. A partir dos padrões observados, calcule a soma de cada linha;

3. Mostre que a soma dos binomiais de uma linha é igual a soma dos binomiais das duas linhas anteriores. Por exemplo, faça para a última linha.

O professor deverá montar as três primeiras linhas e pedir para os alunos montarem o restante de acordo com o padrão inicial. Caso os alunos não percebam o padrão, o professor deverá montar a quarta linha.

Figura 60 – Sequência de FIBONACCI. Montagem



Fonte: Produzido pelo Autor

Com a devida orientação do professor e a observação dos padrões anteriores, os alunos deverão chegar aos seguintes resultados:

Ex.: $\binom{9}{0} = \binom{10}{0}$, $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} = \binom{9}{1}$, $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} = \binom{8}{2}$, $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$, $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$, $\binom{4}{4} = \binom{5}{5}$.

$$\binom{8}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{4}{4} \quad = \mathbf{34}$$

$$\binom{9}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{5}{4} \quad = \mathbf{55}$$

$$\binom{10}{0}\ \binom{9}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{5}{5} = \mathbf{89}$$

Os números de Fibonacci são da forma:

$$F_{n+1} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{p}$$

onde n e p são naturais e k é o maior número natural menor do que ou igual a $\dfrac{n}{2}$