



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**UMA ATIVIDADE SOBRE AS MEDIDAS DO CÍRCULO DE ARQUIMEDES POR  
MEIO DO USO DE MATERIAIS CONCRETOS: CONTRIBUIÇÕES PARA O  
ENSINO DE MATEMÁTICA**

**LUÍS CARLOS BARBOSA DE OLIVIERA**

**Orientador: Prof. Dr. Benjamim Cardoso da Silva Neto**

**FLORIANO – PI  
2023**

**LUÍS CARLOS BARBOSA DE OLIVIERA**

**UMA ATIVIDADE SOBRE AS MEDIDAS DO CÍRCULO DE ARQUIMEDES POR  
MEIO DO USO DE MATERIAIS CONCRETOS: CONTRIBUIÇÕES PARA O  
ENSINO DE MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Piauí/ *Campus* Floriano, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Benjamim Cardoso da Silva Neto

**FLORIANO – PI  
2023**

### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**

---

- Oliveira, Luís Carlos Barbosa de
- O48a      Uma atividade sobre as medidas do círculo de Arquimedes por meio do uso de materiais concretos : contribuições para o ensino de matemática / Luís Carlos Barbosa de Oliveira. - 2023.  
97 p.: il. color.
- Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano, 2023.  
Orientador : Prof Dr. Benjamim Cardoso da Silva Neto.
1. Ensino de matemática. 2. História da matemática. 3. Medidas do círculo de Arquimedes. 4. Uso de materiais concretos. I. Título.

CDD - 510

---

**Elaborado por Neuda Fernandes Dias CRB 3/1375**

## TERMO DE APROVAÇÃO

LUÍS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA

### UMA ATIVIDADE SOBRE AS MEDIDAS DO CÍRCULO DE ARQUIMEDES POR MEIO DO USO DE MATERIAIS CONCRETOS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Piauí/ *Campus* Floriano, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 19/01/2023

#### BANCA EXAMINADORA



**Prof. Dr. Benjamin Cardoso da Silva Neto**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA  
**Orientador**

Guilherme Luiz de Oliveira Neto Assinado de forma digital por Guilherme Luiz de Oliveira Neto  
Dados: 2023.01.23 16:34:16 -03'00'

**Prof. Dr. Guilherme Luiz de Oliveira Neto**  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI  
**Avaliador Interno**

Angelica Francisca de Araujo Assinado de forma digital por Angelica  
Francisca de Araujo  
Dados: 2023.01.23 15:30:12 -03'00'

**Profa. Dra. Angelica Francisca de Araujo**  
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA  
**Avaliadora Externa**

Dedico este trabalho à minha querida filha,  
esposa, aos meus pais e à minhas irmãs Maria  
Aparecida e Maria dos Santos.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, como diz em 1 Samuel 7:12 – Até aqui nos ajudou o Senhor.

Minha história é carregada de momentos desafiadores e surpreendentemente impactantes, levando a situações extremas, em ponto de abandono do caminho que acreditamos ser certo e justo, mas quando entregamos a Ele, nosso Senhor Todo Poderoso, todas as nossas adversidades, não existe e nem existirá nada que nos possa estagnar, pois todas as coisas posso naquele que me fortalece (Filipenses 4:13). A atitude mais sensata é confiar em Deus.

Agradeço aos meus Pais, Antônio José e Maria Natividade, considero verdadeiros guerreiros, pois mesmos com baixíssimos graus de instrução, por falta de oportunidade, sempre acreditaram que a educação era a melhor riqueza que poderiam oferecer aos seus filhos e fizeram o possível e o impossível para mantê-los na escola.

Especialmente, agradeço a minha esposa Joelma, a quem eu tanto amo e que sempre me apoia nos momentos de crise e celebra alegremente os momentos de vitória. O nosso dia a dia até aqui foi carregado de obstáculos, tristeza, confiança, fé, alegria, ajuda (através das leituras e sugestões), compreensão, paciência dentre outras qualidades fundamentalmente compartilhadas, e sem isso, não seria possível ter chegado até aqui e a minha filha Lisya Beatriz, tendo a esta, um amor incondicional, e que considero o meu principal combustível de vida.

Agradeço aos meus amigos Paulo Bueno e Ronnyere, que mesmo geograficamente distantes, me proporcionaram assistência e incentivo à trajetória realizada no curso.

Agradeço a todos meus amigos e colegas, de mestrado, pelos momentos de compartilhamentos, pois a jornada até aqui não foi nada fácil, mas sem dúvidas, o fato de termos nos unido, perseverado lado a lado, proporcionou produtividade à jornada, porque se um cair, o outro levanta o seu companheiro; “mas aí do que estiver só; pois, caindo, não haverá outro que o levante (*Eclesiastes 4:10*).

Agradeço a todo o corpo docente do mestrado PROFMAT-IFPI Campus Floriano Piauí que me inspiraram com suas trajetórias e reflexões baseadas nos conhecimentos técnicos e científicos e que me fizeram refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula enfatizando a Educação Matemática, a todos os exemplos e referenciais que tive possibilitando muito aprendizado e crescimento pessoal e profissional.

Agradeço inmensuravelmente ao grande PROFESSOR e PESQUISADOR Benjamim Cardoso da Silva Neto pela orientação, paciência, incentivo, credibilidade, compreensão, presteza durante o mestrado, ao compartilhamento de conhecimentos sobre “História da

Matemática e Educação Matemática” que me proporcionou inspiração a investigação teórica, histórica e metodológica em matemática. Seus ensinamentos provocaram muitas reflexões, principalmente, sobre a importância da pesquisa em Educação Matemática e que tanto contribuiu e contribuirá para minha prática em sala de aula.

“ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua própria construção.” (FREIRE, 1996, p. 47).



## RESUMO

OLIVEIRA, Luís Carlos Barbosa de. **Uma atividade sobre as medidas do círculo de Arquimedes por meio do uso de materiais concretos: contribuições para o ensino de matemática**. 2023. 97f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede) – Instituto Federal do Piauí – *Campus* Floriano, Floriano, 2023.

Os estudos recentes em História para o ensino de Matemática possibilitaram o surgimento de novas estratégias e metodologias didáticas que podem contribuir para a formação de professores e para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Nesta pesquisa, que se constitui em um trabalho de dissertação, nos apropriamos de materiais concretos e sua aliança ao contexto histórico da Matemática como uma estratégia didática no ensino de Matemática. Desenvolve-se neste trabalho de pesquisa, uma investigação histórica acerca das medidas do círculo desenvolvidas pelos métodos históricos de Arquimedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.) aliado à construção de materiais concretos manipuláveis. O principal objetivo desta pesquisa é investigar contribuições da História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo de Arquimedes. Os participantes da pesquisa, são os alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Floriano - Piauí. Os referenciais teóricos adotados se concentram principalmente na investigação histórica e no uso de materiais concretos como procedimento de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, apresenta uma revisão bibliográfica e se caracteriza por um estudo de campo, pois planejamos e aplicamos atividades mediadas por informações históricas para o ensino de medidas do círculo. No desenvolvimento das atividades, partiu-se do método histórico de determinação de medidas de círculo sistematizado por Arquimedes, de onde houve construções com o uso de instrumentos de desenhos geométricos e uso de recortes para manipulação de figuras planas, chegando a uma formalização da expressão que determina a área de um círculo qualquer. Para coleta dos dados, fez-se uso de questionário, assim como, diário de bordo, registros de imagens e registros escritos dos alunos no decorrer dos momentos da pesquisa. Utilizou-se a análise de conteúdo como forma de elencar categorias e classificações, que são tecidas nos resultados que indicassem contribuições sobre o uso da História da Matemática. Identificou-se que o processo de construção de atividades por meio de uma investigação didática e histórica sobre um método histórico desenvolvido por Arquimedes em conexão com a construção e manipulação de materiais concretos, apresenta-se como possibilidade didática, proporcionando um ensino de Matemática com mais sentido, construído a partir da ação, da reflexão e do compartilhamento de ideias, gerando compreensões mais significativas para alunos e professores. Com a efetivação desta pesquisa, evidenciamos que o uso de informações históricas associadas à materiais concretos, carrega potenciais contribuições para o ensino de matemática, promovendo momentos atrativos, participativos, regado de inquietações e curiosidade, e destes fatos, disponibilizaremos este produto educacional considerando como uma valiosa estratégia para prática em sala de aula de outros profissionais em educação matemática.

**Palavras-chave:** História da Matemática; Métodos históricos; Medidas do círculo de Arquimedes; Uso de materiais concretos.

## ABSTRACT

OLIVEIRA, Luís Carlos Barbosa de. **Uma atividade sobre as medidas do círculo de Arquimedes por meio do uso de materiais concretos: contribuições para o ensino de matemática**. 2023. 97f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede) – Instituto Federal do Piauí – *Campus* Floriano, Floriano, 2023.

Recent studies in the teaching of mathematics have led to the development of new strategies and methodologies that can enhance the formation of teachers and the teaching and learning process of math. In this dissertation research, we focus on the use of concrete materials in conjunction with the historical context of mathematics as a teaching strategy in the classroom. We conduct a historical investigation of the methods for measuring circles developed by Archimedes of Syracuse (287 B.C. - 212 B.C.) and their integration with the construction of manipulative materials. The main objective of this research is to examine the contributions of the history of mathematics in conjunction with the use of concrete materials in teaching activities related to Archimedes' circle measurements in a third-grade high school class at a public school in Floriano, Piauí. The theoretical frameworks used in this research primarily include historical research and the use of concrete materials as a teaching method. This is a qualitative research study that includes a literature review and a field study. We planned and implemented activities that were guided by historical information to teach measures of circles. Data was collected through a questionnaire, a logbook, image recordings, and written records of the students during the research. Content analysis was used to analyze the data and identify contributions of the history of mathematics in teaching. Our findings indicate that the use of historical information and concrete materials in teaching provides a more meaningful and engaging learning experience for students and teachers. This research demonstrates that the integration of historical methods and concrete materials in the classroom has the potential to enhance the teaching of mathematics. As such, we consider it a valuable strategy for mathematics education professionals to implement in their classrooms.

**Keywords:** History of Mathematics; Historical methods; Archimedes circle measurements; Use of concrete materials.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Ilustração de Arquimedes .....	24
FIGURA 2 - Circunferência e triângulo de áreas correspondentes .....	26
FIGURA 3 - Decágono inscrito e decomposto em setores.....	27
FIGURA 4 - Polígonos inscritos e circunscritos no círculo .....	28
FIGURA 5 – Momento de aplicação de questionário .....	51
FIGURA 6 – Elaboração dos alunos .....	63
FIGURA 7 - Inferência da expressão da área do círculo através do método de Arquimedes ..	64

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - Produções acadêmicas identificadas .....	41
QUADRO 2 – Caracterização da atividade desenvolvida.....	46
QUADRO 3 - Registros escritos dos alunos – resposta da primeira questão.....	53
QUADRO 4 - Registros escritos dos alunos – resposta da segunda questão .....	54
QUADRO 5 - Registros escritos dos alunos – resposta da terceira questão .....	55
QUADRO 6 - Registros escritos dos alunos – resposta da quarta questão .....	55
QUADRO 7 - Registros escritos dos alunos – resposta da quinta questão .....	56
QUADRO 8 - Registros escritos dos alunos – resposta da sexta questão .....	56
QUADRO 9 - Registros escritos dos alunos – resposta da sétima questão.....	57
QUADRO 10 - Registros escritos dos alunos – resposta da oitava questão.....	58
QUADRO 11 - Atividade e respostas dos alunos.....	60
QUADRO 12 - Respostas da primeira questão do questionário final .....	65
QUADRO 13 - Respostas da segunda questão do questionário final .....	66
QUADRO 14 - Respostas da terceira questão do questionário final.....	67
QUADRO 15 - Respostas da quarta questão do questionário final.....	68

## **LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS**

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

BOCEHM – Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

IFPI – Instituto Federal de Educação, ciência e tecnologia do Piauí

RBHM – Revista Brasileira de História da Matemática

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

SBHM – Sociedade Brasileira de História da Matemática

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UEM – Universidade Estadual de Maringá

UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

UFMA – Universidade Federal do Maranhão

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos

UFMG – Universidade Federal de Campina Grande

UFRSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

UFRG – Universidade Federal do Rio Grande Do Sul

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

*“A produção cultural de uma sociedade depende do esforço e criatividade de toda a população, e é incorreto atribuir a produção a apenas poucos indivíduos que apenas adicionaram os toques finais.”*

*(Anglin, W. S., 1992)*

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	21
2.1	Um contexto histórico para as medidas do Círculo de Arquimedes.....	21
2.2	Inserção da História da Matemática no Ensino de Matemática.....	29
2.3	Uma apresentação sobre o uso de Materiais Concretos no ensino de Matemática .....	33
2.4	Uma aliança entre o uso da História da Matemática e Materiais Concretos para o ensino de Matemática .....	37
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	40
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	44
4.1	Caracterização da Pesquisa.....	44
4.2	Sobre a produção da atividade.....	46
4.3	Descrição dos procedimentos durante as aulas e aplicação da atividade .....	49
4.4	Desenvolvimento da Aplicação da Atividade Didática.....	50
<b>5</b>	<b>EXPOSIÇÃO DE RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	52
5.1	Sobre o questionário inicial .....	52
5.2	Sobre a atividade desenvolvida .....	59
5.3	Sobre o questionário de validação .....	65
5.4	Evidenciando algumas contribuições .....	70
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	73
	REFERÊNCIAS .....	75
	APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO.....	79
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL .....	82
	APÊNDICE C – ATIVIDADE DIDÁTICA – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ARQUIMEDES .....	84
	APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA PROPOSTA (INDIVIDUAL) .....	86
	APENDICE E – APRESENTAÇÃO EM SLIDES .....	87
	ANEXO A - TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO.....	97

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das civilizações humanas constituiu grupos sociais cada vez mais subdivididos que possibilitaram a formação de grupos sociais nos mais variados espaços geográficos do planeta e em diferentes épocas, uns grupos mais evoluídos e outros menos, em termos organizacionais, mas de forma que cada uma desenvolveu seu próprio repertório de conhecimento necessário para vivência, subsistência e sobrevivência. O desenvolvimento da sociedade ou de grupos sociais, historicamente, necessitou de entendimento sobre diversas situações que respondiam e solucionavam suas inquietações mais necessárias e urgentes.

O desenvolvimento de técnicas das mais rudimentares até as mais elaboradas faziam uso de conhecimentos das mais diversas áreas, tal como a necessidade de conhecimento matemático. Com efeito, verificamos que a ciência acompanha o desenvolvimento da humanidade desde seus primórdios e a História dessas ciências, que aqui enfatizamos a Matemática, entremeia-se com a História da humanidade em diversos pontos e aspectos e construções (D'AMBROSIO, 2008).

O surgimento de necessidades, indagações e o processo de buscas por respostas criadas ao longo do tempo, gerou um acúmulo de informações que impactaram a forma de ser e viver do homem (GARBI, 2010), destarte, o surgimento de áreas do conhecimento são frutos da mobilização de saberes, de ideias, de criações que permitem a formação de conhecimento novo. No caso da Matemática, seu desenvolvimento científico foi envolto em uma intensa mobilização de informações, antes, de cunho filosófico e religioso, e depois, de cunho epistemológico e ontológico (BICUDO, 2013).

Essa mobilização de saberes, gradativamente acompanhados de suas possíveis formalizações, aqueceu procedimentos metodológicos e técnicos que produziram cada vez mais conhecimento a partir daquilo que já era conhecido. Essa ação ocorria por meio de estudos e argumentações realizadas por personalidades que se tornaram célebres e que desenvolveram interesse em encontrar regras aplicáveis em determinados problemas, desde que similares a problemas iniciais, com isso, a sistematização e organização de ideias que antes eram apresentadas como mais práticas e culturais.

Do processo de sistematização de conhecimentos, vem a inserção das regras de onde se deriva a necessidade de comprovações se instalando em provas, demonstrações, elaboração de conjecturas e refutações para que novos conhecimentos pudessem surgir e permitir novas e outras elaborações que para alguns estudiosos e historiadores, essas representações em provas e demonstrações tiveram como precursor Euclides (323-283 a.C.) conforme (GARBI, 2010).



O desenvolvimento da Matemática, em sua constituição histórica, apresenta nomes e personalidades, e principalmente, feitos e realizações que se fazem presentes em manuais didáticos e teórico, livros, produções acadêmicas e em livros didáticos. Podemos elencar algumas destas personalidades que se destacaram por suas essenciais descobertas que vieram a se difundir pelo mundo, tornando uma linguagem mundial denominada Matemática, dentre eles, Tales de Mileto (624 a. C. – 558 a. C.), Pitágoras (582 a. C. – 497 a. C.), Platão (427 a. C. – 347 a. C.), Eudoxo de Cnido (408 a. C. – 355 a. C.), Euclides (323 a. C. – 283 a. C.), Arquimedes (287 a. C. – 212 a. C.). (LAUNAY, 2021)

Esses estudiosos aparecem e são evidenciados na Educação Básica, no Ensino Superior e na Formação de Professores de maneira vazia, geralmente com uso de *flashs* em livros didáticos com passagens sobre o teor histórico acerca do desenvolvimento de conceitos matemáticos que não costumam ser explorados pelos professores de Matemática (SILVA NETO, 2016).

Dentre as várias estratégias de ensino e de pesquisa em educação evidenciadas nos últimos 30 anos, sublinhamos a intensificação de estudos e publicações em História da Matemática apontando estratégias didáticas, tais como a Investigação Histórica no ensino da Matemática que pode contribuir para a formação de conceitos e abordagens didáticas quando oportunamente planejadas como ferramenta auxiliadora da prática escolar.

Em pleno século XXI, raramente esta estratégia pedagógica é praticada em sala de aula, onde se priorize as informações históricas como um princípio de ensino tencionado na formação de indivíduos mais pensantes, dando a oportunidade de se estruturarem intelectualmente, adquirindo um processo de criatividade matemática sequenciada, mediada pelo professor e conseqüentemente, tornando estudantes autônomos em futuros estudos matemáticos (MENDES, 2014).

O ensino tradicional prevalece nas aulas de matemática, tornando a participação do aluno como um receptor de informações transmitidas pautadas na apresentação de definições, fórmulas e uso na resolução de problemas de forma mecanicista, não havendo exploração das múltiplas habilidades criativas, intelectuais, interpretativas e dedutivas existentes nos alunos, certamente, bloqueadas cada vez mais por este método de ensino.

A Matemática apresenta um teor histórico que pode desencadear uma nova visualização sobre o que vem a ser essa Ciência, e proporcionar uma espécie de desmistificação quanto a um conhecimento que é tido e notado por alunos e professores como prontos, acabado e uniforme quando se é estudado em sala de aula (MIGUEL; MIORIM, 2011), o que não é bem dessa forma. Esta pesquisa de dissertação desenvolvida no campo de estudo da Educação

Matemática, centra-se em estudar a área do círculo dialogando com a História da Matemática, especificamente, trazendo à tona o método de Arquimedes para determinação de medidas do círculo por meio de uma investigação histórica e pela construção e manipulação de materiais concretos para a dedução da fórmula matemática usada atualmente para o cálculo da área do círculo  $\pi \cdot R^2$ .

Utilizamos como principal pressuposto teórico acerca do uso da História da Matemática no ensino de Matemática, as ideias apontadas por Miguel e Miorim (2011) e Mendes (2009, 2015), este último também será utilizado em uma perspectiva didática, o da investigação histórica, para elaboração de um contexto a ser aplicado em sala de aula, no que diz respeito ao desenvolvimento de atividades investigativas, desafiadoras e criativas sobre temas que explorem fatos e episódios sobre o desenvolvimento histórico da Matemática.

Ao estudarmos algumas publicações (livros, teses, dissertações e artigos) sobre a História da Matemática e sobre a História na Educação Matemática, reconhecemos que existe um diálogo promissor sobre a necessidade de um ensino de Matemática que fuja de modelos tradicionais e que se mostre mais contextualizado e problematizador, proporcionando um processo de aprendizagem mais criativo e autônomo, e que dê significado para a Matemática, possibilitando mais sentido ao que se ensina e ao que se aprende acerca de conceitos e conteúdos matemáticos.

A inserção da história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos no planejamento didático, possibilita ao professor mostrar, e ao aluno enxergar o porquê de estudar os conteúdos pré-estabelecidos nas ementas, colaborando com a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, pois se apresenta como uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais integrada com outras disciplinas, mais dinâmicas, mais agradável, mais criativa e mais socializada (CHAQUIAM, 2015).

O número de produções acadêmicas que apresentam propostas didáticas que aliem uso da História da Matemática em meio a estratégias didáticas de ensino com uso de informações históricas tem apresentado um crescimento nos últimos 30 anos, e com isso, trazendo à tona abordagens que podem contribuir no aspecto didático de exploração da História, como informa Mendes (2015) e Silva Neto (2021), obras históricas, problemas históricos, práticas socioculturais historicamente constituídas, soluções históricas e métodos históricos. Para esta última abordagem, voltamos nossa atenção, em meio ao que propomos neste estudo, acerca do método histórico de Arquimedes para determinação de medidas do círculo.

Nesse segmento, nosso trabalho percebe a História da Matemática como um potencial componente que pode promover um ensino mais dinâmico e que oferece aprendizagem de

forma mais compreensiva para a formação de conceitos matemáticos estudados no Ensino Médio, e para tanto, exploramos o método histórico de determinação de medidas do círculo, método da exaustão, a vida e obra de Arquimedes de Siracusa por entender que as informações históricas e a recriação da História da Matemática leva os estudante a refletir profundamente sobre os conteúdos abordados na educação matemática ao logo da história da humanidade.

A pergunta de pesquisa que propomos responder neste estudo é “Quais contribuições a História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo podem oferecer para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio?” e nosso objetivo geral é investigar contribuições da História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo de Arquimedes.

E para responder ao problema de pesquisa e atingir nosso objetivo geral, elencamos nossos objetivos específicos:

- Compreender o desenvolvimento histórico sobre o método de Arquimedes de Siracusa (287 a. C – 212 a.C.) para determinar a área do círculo.
- Desenvolver atividades didáticas que envolvam o método histórico para determinação de medidas do círculo por Arquimedes com uso de materiais concretos.
- Identificar possíveis contribuições acerca da aliança do uso de materiais concretos e a História da Matemática em atividades de investigação histórica.

A pesquisa se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, bibliográfica, desenvolvida no formato de um estudo de campo, onde se lançou mão da construção de atividades com base na História da Matemática e se realizou uma revisão bibliográfica que apresentou produções acadêmicas que reforçaram a aliança da História da Matemática ao uso de materiais concretos no ambiente didático tais como dissertações de Dias (2014), Lima (2016), Amorim (2014), Silva (2016) e Almeida (2020), os artigos de Trivizoli (2017) reforçamos que, essa pesquisa evidencia uma aliança entre a investigação histórica e didática sobre medidas do círculo em procedimentos realizados por Arquimedes de Siracusa e uso de materiais concretos na forma de proposição de atividades mediadas por informações da própria história do método.

Mendes (2009), afirma sobre a inserção de atividades com contexto histórico e que o uso de atividades mediadas pela História da Matemática deve favorecer a interatividade entre o sujeito e o objeto de conhecimento que se é estudado, e evidenciar os aspectos cotidiano, escolar e científico.

A justificativa deste trabalho de pesquisa situa-se na necessidade de validação dos apontamentos de pesquisas relacionadas as tendências em educação matemática, especialmente, se tratando do uso da História da Matemática na nossa realidade e limitações específicas em sala de aula, pois os pesquisadores em Educação Matemática, como Mendes (2009), Miguel e Miorim (2011), Mendes e Farias (2014) e Chaquiam (2015) defendem de modo geral, que a prática pedagógica dos professores de Matemática, planejadas e apoiadas em informações históricas da Matemática em conversação com outras estratégias didáticas, em particular para este trabalho, o uso de materiais concretos, tornam-se ferramentas poderosas para melhorias do ensino e aprendizagem da Matemática.

Concordamos com estes pesquisadores e acreditamos que a utilização de História da Matemática associada ao uso de materiais concretos como ferramenta facilitadora do processo educacional permite compreender as origens dos mais variados conteúdos, desenvolvimentos e provoca a compreensão de que a matemática utilizada hoje é resultado de árduos esforços de vários matemáticos ao longo dos tempos, e apoiado nestes apontamentos, mora a relevância de nossa pesquisa de dissertação.

Concluindo o texto introdutório que corresponde ao Capítulo 1 da dissertação, apresentamos brevemente cada uma das seções que seguem na forma de capítulo. No Capítulo 2, evidenciamos nossos pressupostos teóricos acerca do uso da História da Matemática para o ensino de Matemática com ênfase na investigação histórica da contribuição de Arquimedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.), em especial, o método de determinação de medidas do círculo e também se buscou estudos sobre uso de materiais concretos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

No Capítulo 3, nos debruçamos sobre a revisão bibliográfica, evidenciando trabalhos que se apropriam do uso da história e uso de recurso didáticos e metodológicos como ferramenta facilitadora do ensino e aprendizagem matemática.

No Capítulo 4, pautamos o desenvolvimento metodológico da pesquisa e de nossa ação em sala de aula durante a pesquisa de campo, descrevendo os momentos que delinearão os resultados desta pesquisa. No Capítulo 5, exploramos a nossa produção e análise de dados e validação, apoiado na análise de conteúdo (BARDIN, 2016), levando em consideração as significações do desenvolvimento das atividades, identificadas por gestos, ações, verbalizações, respostas dos questionários e anotação no diário do pesquisador.

No capítulo 6, tratamos das considerações finais do trabalho com exposição das contribuições para o ensino e aprendizagem e do produto educacional originado das sequências

de ações pedagógicas que foram criteriosamente planejadas para auxiliar a construção de conhecimento matemático em sala de aula.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

No referencial teórico, apresentamos um contexto histórico sobre o desenvolvimento da Matemática com ênfase no desenvolvimento da Geometria, especificamente na História de Arquimedes de Siracusa na exploração do método da exaustão para determinação de medidas do círculo, em seguida, reforçamos ideias sobre a necessidade da inserção da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem, tratamos sobre o uso de materiais concretos e suas contribuições no ensino de Matemática e por fim, estabelecemos um texto sobre uma possível aliança da História da Matemática e o uso de materiais concretos em práticas didáticas que possibilitem o ensino e uma aprendizagem com mais sentido e significado.

### 2.1 Um contexto histórico para as medidas do Círculo de Arquimedes

A História da Matemática mostra que seu desenvolvimento se deu com a finalidade de atender necessidades e desafios sociais e econômicos, garantindo a sobrevivência e transcendência de sociedades no espaço terrestre. Os primeiros registros de usos de conhecimentos matemáticos remontam à cerca de 4000 a. C. gerados de problemas de atividades cotidianas, como por exemplo, a repartição de terras, o cultivo de plantações e criações de animais às margens do Rio Nilo no Egito e nas planícies entre os rios Tigre e Eufrates na Antiga Mesopotâmia. Nesse aspecto, D'Ambrosio (2009), escreve:

Vejo a matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para estender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. [...] Trata-se da construção de corpos de conhecimento em total simbiose dentro de um mesmo contexto temporal e espacial, que obviamente tem variado de acordo com a geografia e a história dos indivíduos e dos vários grupos culturais a que eles pertencem [...] (D'AMBROSIO, 2009, p. 07-08).

A ciência denominada como Matemática é fruto do desenvolvimento de reflexões estratégicas resultantes da incessante dedicação de indivíduos ou de grupos ao longo da existência humana para responder questionamentos e atender necessidades das mais básicas às mais complexas e conseqüentemente, produzindo conhecimento novo a partir da busca por soluções de problemas de convívio em sociedade. Esse movimento acabou gerando uma matemática dita utilitária, que por sua vez, sua investigação, pode apresentar e expor como foram originados conhecimentos matemáticos, até se constituir conhecimentos avançados e utilizados em épocas e contextos diferentes.

A História da Matemática pode desprender uma série de informações que nos ajuda a entendê-la de forma holística, mas é igualmente importante tratarmos somente de alguns pontos e personagens e suas respectivas contribuições, elegendo um só fenômeno que pode

desencadear uma grande e valiosa discussão que remetam a conteúdos matemáticos escolares. Apresentamos, no entanto, um contexto para a História da Geometria se direcionando para as medidas do círculo destacada em experimentos e métodos técnicos de Arquimedes.

A sociedade egípcia, tendo como sustentação a agricultura nas margens do rio Nilo que se baseava na distribuição de recursos e a repartição de terras férteis, assim como a natureza, apresentaram formas e situações essenciais para estudos e desenvolvimento do conhecimento matemático. Na Babilônia, que floresceu na região denominada Mesopotâmia, situada entre os rios Tigres e Eufrates, tinha como bases de sustentação econômica a agricultura e principalmente o pastoreio, atividades estas que levaram e aplicavam importantes conhecimentos matemáticos registrados em tabletes de argila.

Os gregos, localizados na margem superior do Mar Mediterrâneo, desenvolviam uma matemática utilitária chegando à abordagem que deu origem dentre outros conhecimentos, a matemática abstrata e essas duas modalidades (utilitária<sup>1</sup> e abstrata<sup>2</sup>), prevaleceu no Império Romano, na Idade média e segue até hoje (GARBI, 2010).

A Geometria, no entanto, se desenvolveu aperfeiçoando as ideias da própria Matemática, colaborando com sua sistematização. Tem início por uma ordem mais prática, tendo em vista a busca de resoluções de problemas de origem prática, como ocorria nas civilizações egípcias, mesopotâmicas, hindus e chinesas. Para os gregos, a Matemática recebe uma conotação mais demonstrativa, revelando grandes e célebres personalidades, tais como Pitágoras de Samos (582 – 497 a. C.) e Tales de Mileto (624 – 558 a. C.). Como destaca D’Ambrosio (2009, p. 36), “muito do conhecimento que hoje temos da matemática Grega está na obra dos três maiores filósofos da Antiguidade Grega Sócrates, Platão e Aristóteles [...] Matemática e filosofia representavam uma mesma linha de pensamento”.

No final do século IV a.C., na Grécia Antiga, a obra *Os Elementos* de Euclides (323 – 283 a. C.) favoreceu a disseminação de um conhecimento matemático prático, teorizada até hoje como uma das obras mais emblemáticas sobre a Geometria, se tornando uma fonte de destaque em estudos. *Os Elementos de Euclides* foi uma obra escrita por volta do ano 300 a. C. e tem-se a ideia que foi o material textual que mais influenciou a Matemática do mundo ocidental, pois estabeleceu pontos de partida que provocaram novos engajamentos sobre

---

<sup>1</sup>Conhecimento matemático construído a partir das necessidades e problemas no convívio das sociedades, utilizado nas atividades laborais.

<sup>2</sup>Conhecimento matemático desenvolvido com base no raciocínio lógico dedutivo e organizados em axiomas, postulados, teoremas expostos em provas ou demonstrações D’Ambrosio (1996).

pesquisas e estudos matemáticos na busca de respostas e novas formas de compreensão (GARBI 2010).

Baseado nesse contexto, um dos discípulos de Euclides de Alexandria, Arquimedes (287 a. C. – 212 a. C.) se propôs ao estudo e manifestação de uma Matemática abstrata aliada a uma Matemática mais utilitária. Segundo D’Ambrósio (2009, p. 37), “no século III a. C. surge um grande matemático, Arquimedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.) talvez o primeiro capaz de desenvolver, com igual competência, as duas matemáticas” a utilitária e a abstrata. Dessa forma, uma nova visualização e compreensão sobre aspectos, antes mais abstratos, na Matemática, passou a ter novas conotações no decorrer do tempo.

No campo da Geometria, os conhecimentos da matemática utilitária na antiguidade emergiram acerca de situações envolvendo cálculo de área, problemas econômicos e planejamentos, pois antes de se tornar objeto de estudos aprofundados de grandes matemáticos, se mostrou útil e importante para solucionar problemas práticos. Segundo Launay (2021 p. 37), problemas de ordem prática aplicados à outras áreas demandavam uso de conhecimentos matemáticos, por exemplo, “Como dividir um campo em partes iguais? Como avaliar o preço de um terreno com base em sua superfície? Qual desses dois lotes está mais próximo do rio? Que traçado deve seguir o futuro canal para ser o mais curto possível?”. A ordem de atividades que movimentavam os eixos sociais, econômicos e políticos, por exemplo, garantiam trabalho, fertilidade de terras, cobranças de impostos.

Assim, percebemos que a História da Matemática apresenta problemas que podem e devem ser utilizados, estudados e explorados em sala de aula, objetivados a despertar a curiosidade e interesse dos alunos, levando-os a entender a utilidade e abrangência dos conteúdos matemáticos inseridos nas grades curriculares.

No decorrer do tempo, diversos problemas que faziam uso de conhecimentos matemáticos se fizeram presentes em representações escritas, textos, objetos e documentos elaborados por diferentes povos envolvendo conceitos aritméticos, geométricos e algébricos (EVES, 2004), esses problemas grafados e/ou registrados em materiais revelam maneiras, técnicas e procedimentos de operar com conteúdo que hoje já temos uma grande habilidade, porém muitos professores, inclusive, desconhecem suas origens.

Enfatizamos que resoluções de problemas práticos que envolviam questões geométricas e de medições eram bastante comuns nas sociedades no período da antiguidade (BOYER, 2012). Com isso, o desenvolvimento de métodos de resoluções e compreensões de problemas eram evidenciados, assim como, métodos que exploravam conceitos matemáticos e suas composições, como ocorreu com as curiosidades e questionamentos acerca de figuras



circulares. Estudiosos da Matemática, como Eudoxo de Cnido (408 a.C. – 355 a. C), Eratóstenes de Sirene (276 – 194 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) conceberam grandes ideias que até hoje se fazem presentes acerca de informações geométricas presentes em livros didáticos.

O mundo ao nosso redor tem proporcionado razões para grande parte do desenvolvimento da matemática. O fato de a terra ser ela própria uma esfera, e o céu ter a aparência de uma concha invertida sobre nós, tem colocado curvas, círculos e esferas no coração da geometria desde os primeiros tempos. (ROONEY, 2012, p. 97).

As influências de personalidades no decorrer da História fizeram a Matemática se constituir mais rica de contextos e sempre formando novas perguntas sobre aquilo que já era conhecido. Influenciado por Euclides de Alexandria, Arquimedes que nasceu em 287 a.C. na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília, com aguçada genialidade e inventividade no campo da Matemática, Física, Engenharia e Astronomia foi consagrado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, se mostrou capaz de ideias decididamente novas e revolucionárias, e para Launay (2021) é a Arquimedes que se deve os primeiros avanços acerca da sistematização do número  $\pi$ . A Figura 1 apresenta a ilustração de Arquimedes.

FIGURA 1 - Ilustração de Arquimedes



Fonte: Santos e Barros (2020)

Os personagens da ciência antiga, como são lembrados até hoje, como podemos perceber seus nomes e menções em diferentes livros escolares da Educação Básica e Superior faz associação do nome com o local em que viveram, Arquimedes, por exemplo, viveu em Siracusa, que na Idade Média se tornou uma cidade italiana emancipada da região da Sicília, por isso, Arquimedes de Siracusa.

Alguns matemáticos que viveram em tempos anteriores a Arquimedes, haviam se dedicado a estudar o círculo, mas muitas vezes, seus esforços careciam de um maior rigor e até

mesmo de mais elementos que foram sendo mobilizados com o tempo. Estabelecemos alguns pontos de Garbi (2011) para uma visualização do conhecimento sobre o círculo.

1. Sabe-se que o caminho para a determinação de comprimentos de linhas curvas ou de áreas e volumes de figuras delimitadas por linhas e superfícies curvas passava pelo Método da Exaustão, de Euclides. 2. Hipócrates descobriu e Eudóxo provou que a área do círculo é proporcional ao quadrado do diâmetro (ou do raio) mas desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade. 3. Sabia-se que o perímetro da circunferência é proporcional a seu diâmetro, mas, igualmente, desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade. 4. Sabia-se que o volume da esfera é proporcional ao cubo do raio mas, também, desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade. 5. Euclides não faz qualquer menção à medida de superfície da esfera, embora talvez cogitasse que fosse proporcional ao quadrado do raio. (GARBI, 2011, p. 81).

Apesar das frustrações de vários matemáticos ao estudarem figuras planas circulares, aproximadamente, coube como fruto de seus esforços intelectuais e reflexões estratégicas a Arquimedes, determinar um valor aproximado para  $\pi$ , ou seja, tomando nosso atual sistema decimal, demonstrou que  $\pi$  estava compreendido entre 3,1408 e 3,1428.

O conhecimento matemático construído e acumulado ao longo do tempo e registrado na obra *Os Elementos de Euclides*, em especial o conhecimento em Geometria, não tratava do comprimento da circunferência, nem calculavam a área do círculo, as inquietações e investigações de grandes pensadores matemáticos só apresentam resultados irrefutáveis sobre a área do círculo, aproximadamente, meio século depois, por Arquimedes de Siracusa. De acordo com a História, em seu livro contendo apenas três proposições e denominado *A Medida de Um Círculo*, Arquimedes apresentou, pela primeira vez, um método matemático rigoroso para se calcular o valor do número  $\pi$  em que demonstrava como se calculava a área de uma figura circular (GRUDTNER; BERTATO, 2020)

É importante destacarmos, que foi o matemático inglês William Oughtred, em 1647, vários séculos depois, quem pela primeira vez, usou a letra  $\pi$  ao referir-se ao comprimento da circunferência, tendo seu uso simbólico generalizado quando Leonhard Euler (1707 – 1783) adotou-o em seus livros em 1736 (ROONEY, 2012).

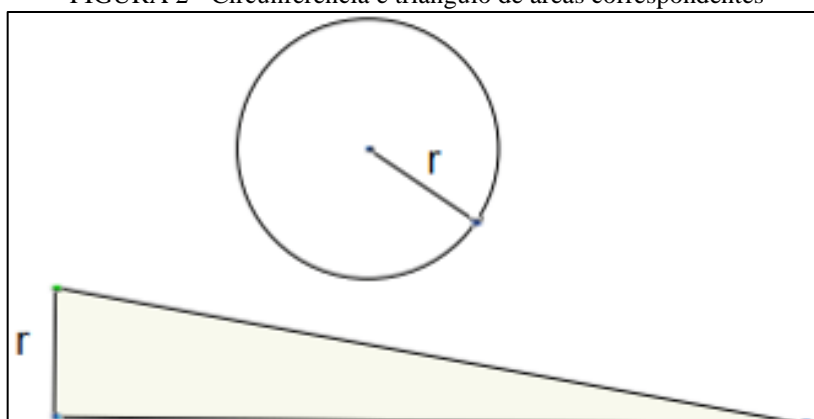
Dentre as contribuições de Arquimedes para a Matemática, três foram desenvolvidas no campo da geometria plana, a saber: a quadratura da parábola, sobre as espirais e a medida de um círculo, tendo este último possibilitado a determinação da constante  $\pi$ , conseqüentemente, a expressão do comprimento da circunferência e área do círculo, esses métodos eram desconhecidos até a chegada de Arquimedes. Assim como Arquimedes influenciou Heron de Alexandria (10 d. C. – 70 d. C.) e René Descartes, ele também foi influenciado em seus feitos e realizações por Euclides, Eudóxo, dentre outros matemáticos, astrônomos e filósofos.

Os métodos usados por Arquimedes no estudo de áreas de figuras curvilíneas indicam uma influência de Eudóxo.[...] Arquimedes propôs um refinamento desse método, comprimindo a figura entre duas outras cujas áreas mudam e tendem para a da figura inicial uma crescendo e outra decrescendo. A área do círculo, por exemplo, era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos, de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximavam da área da circunferência. [...] Por essa razão afirma-se que Arquimedes usava um método indireto para a medida da área de figuras curvilíneas. (ROQUE, 2012, p.203).

Quando os antigos geômetras<sup>3</sup> começaram a estudar as áreas de figuras planas, buscavam uma relação entre a área de um círculo e a área de um quadrado (área que era conhecida pela multiplicação de seus lados iguais), assim, surgiu a palavra quadratura, contribuindo com o tempo para o processo de determinar áreas, chegando a um dos problemas mais conhecidos e importantes da Geometria, a famosa quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado que tenha a mesma área de um determinado círculo. Esse método também se constituía em construir quadrados de lados conhecidos embaixo de curvas e figuras com curvas de forma que se aproximasse o máximo possível da área buscada.

Esse problema clássico da geometria grega teria atraído a atenção de alguns matemáticos na tentativa de provar tal questão com o uso, apenas, de régua e compasso, na época, não graduados, pois com os instrumentos disponíveis na época não era possível determinar o desconhecido valor  $\sqrt{\pi}$ , quando tomado o raio do círculo como unidade de comprimento, assim considerando que o problema não tinha solução, porém, Arquimedes ao estudar as relações matemáticas entre uma circunferência e seu diâmetro prova que outras figuras planas podem ter a mesma área de um círculo.

FIGURA 2 - Circunferência e triângulo de áreas correspondentes



Fonte: (ROQUE, 2012)

Arquimedes em seu tratado denominado *A Medida do Círculo*, segundo (ROQUE 2012, p.205) descreve que “área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos

---

<sup>3</sup>Nomenclatura atribuída aos matemáticos de origem suméria, babilônica e egípcia com conhecimentos em Geometria.

lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo”, ilustrado na Figura 2, este resultado se deu a partir do método da exaustão desenvolvido por Eudóxo. Esse pressuposto acaba caracterizando a importância de métodos matemáticos construídos no decorrer do tempo que podem destacar dificuldades e curiosidades, conforme assinala Silva Neto (2021) quando informa que os métodos antigos podem ser explorados como forma de resolver problemas antigos e novos problemas e assim serem encaminhados a uma potencialidade didática.

O método histórico desenvolvido por Arquimedes na determinação da medida do círculo é nosso foco de pesquisa e aplicação na atividade proposta que consiste no desenvolvimento sequenciado de pensamentos que desaguou na elaboração de conhecimentos matemáticos demonstrados há séculos atrás, e que impactou o desenvolvimento da humanidade e o avanço da ciência.

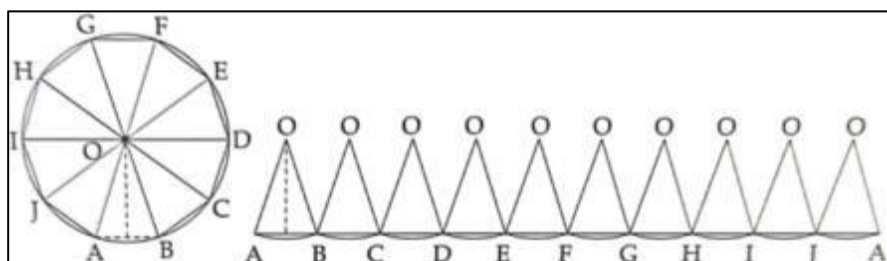
[...] Arquimedes, em várias de suas demonstrações usou uma técnica chamada “**dupla redução ao absurdo**”, [...] Sempre que era muito difícil demonstrar diretamente que uma grandeza era igual a outra, ele supunha que ela fosse maior ou menor e, de tais suposições, deduzia dois absurdos. (GARBI, 2010, p. 82)

De acordo com alguns historiadores da Matemática, Arquimedes apresenta em suas contribuições, para Matemática e Física, habilidades e capacidades quase insuperáveis, pois seus trabalhos são dotados de suas próprias ideias, clareza e rigor de seus raciocínios, podemos encontrar as seguintes contribuições de Arquimedes:

Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Corpos Flutuantes, Sobre Espirais, A Quadratura da Parábola, Sobre Conoides e Esferoides, A medida de um Círculo, O contador de Grãos de Areia e o método. Sabe-se que outros de seus trabalhos foram perdidos, entre eles dois sobre Mecânica (**Sobre Alavancas** e **Sobre Centros de Gravidades**), um outro sobre Óptica, um chamado **Sobre o Calendário** e outro denominado **Sobre a Construção de esferas** (GARBI 2010, p.81, grifo do autor).

Tratando desse método de Arquimedes sobre A Medida do Círculo, referindo-nos a sua demonstração, vale enfatizar que ele usou uma técnica para determinação do comprimento e área do círculo, tal procedimento ilustrado na Figura 3, foi a base no desenvolvimento das atividades aplicadas nessa pesquisa, consiste em uma divisão do círculo em setores idênticos.

FIGURA 3 - Decágono inscrito e decomposto em setores



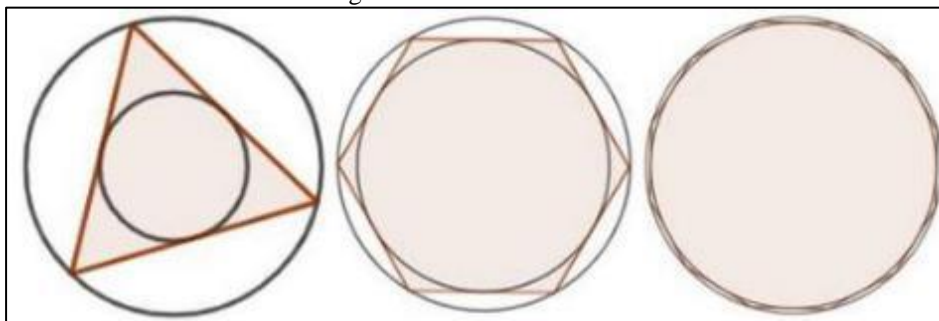
Fonte: GARBI (2010)

Baseado no método desenvolvido por Arquimedes, sendo considerado um círculo decomposto em setores circulares congruentes entre si, para determinar a expressão que possibilita encontrar a área de qualquer círculo se centra na soma das áreas dos setores equivalentes à área do círculo, que é aproximadamente a soma das áreas dos triângulos isósceles e congruentes entre si  $OAB, OBC, \dots, OJA$ , representado na Figura 3.

O método desenvolvido por Arquimedes iniciou com  $n = 3$  setores e a cada construção fazendo uso de régua e compasso dobrava-se o número de setores, que se constituíam nos lados dos polígonos inscritos e circunscritos e continuava até  $n = 96$  setores congruentes. É possível perceber que a soma dos segmentos de retas  $AB + BC + \dots + AJ$  se aproxima da soma dos arcos de circunferência  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \dots, \widehat{AJ}$  de onde apoiado nesta ideia e no pensamento lógico dedutivo, é possível inferir os resultados estudados atualmente em sala de aula para a constante pi ( $\pi$ ), comprimento da circunferência e área do círculo.

Explorando o método da exaustão que consiste em construir polígonos inscritos e circunscritos na circunferência, assumindo o número de setores congruentes em que o círculo foi dividido, dessa vez, tendendo ao infinito, conseqüentemente, a altura dos triângulos se aproxima do raio de uma circunferência, como apresentado na Figura 4. (GARBI 2010).

FIGURA 4 - Polígonos inscritos e circunscritos no círculo



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

O método de Arquimedes se efetiva em inscrever e circunscrever polígonos à circunferência e faz-se a área destes tenderem a área do círculo por excesso e por falta, daí a derivação para o nome método exaustivo, ou método da exaustão através da manipulação dos elementos que compõe a figura de uma região circular (BOYER, 2012). Ideias como estas, desenvolvidas de forma real que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática de maneira evolutiva e que serviu de ponto de apoio para outros estudiosos da Matemática para solidificação de novos processos, fórmulas, teorias, teoremas, proposições dentre outros elementos que dão forma a uma Matemática estudada em sala de aula.

Os métodos resolutivos, as experimentações, os problemas, as soluções matemáticas que foram estruturadas ao longo do tempo contribuíram para a constituição de uma Matemática

que é expressada nas salas de aulas da Educação Básica, também do Ensino Superior e da Formação de Professores e com isso, passam de certa forma, a retratar fases, épocas, fatos e episódios da História da Matemática que quando contextualizados e problematizados no processo de ensino e de aprendizagem podem provocar estímulos positivos para o planejamento de propostas e atividades didáticas assim como reforçar e apoiar a cognição matemática dos alunos.

## **2.2 Inserção da História da Matemática no Ensino de Matemática**

No decorrer dos tempos, foram produzidas matemáticas diferentes, de formas diferentes, em diferentes contextos e por personalidades diferentes, e em paralelo a esses fatos, os usos da Matemática também se fizeram importantes sob diferentes aspectos e em diferentes áreas do conhecimento. Essa espécie de construção de Matemática se deu de forma, muitas vezes, não contínua de um matemático ou pensante em Matemática para outro. E é nesse aspecto que defendemos a ideia de que a História da Matemática pode desencadear, quando utilizada em sala de aula, efeito e influência positiva na aprendizagem de alunos. Mas também como D'Ambrosio (2008) pontua, disponibilizar o conhecimento científico e matemático para um determinado público sempre foi responsabilidade da academia superior.

A difusão de conhecimento novo é sempre um desafio. Mendes (2015) situa que o desenvolvimento de pesquisas no âmbito da História da Matemática tem proporcionado o surgimento de um leque de possibilidades de se trabalhar a História da Matemática em seu sentido epistemológico, social e didático, neste último, o didático, situamos nosso estudo nesta pesquisa de dissertação, proporcionando uma reprodução de uma abordagem dada historicamente para um problema expressamente matemático em torno de elementos e medidas presentes em figuras circulares. Para a inserção da História da Matemática no ensino de matemática

[...] faz se necessário que o professor lance continuamente em sala de aula uma prática desafiadora, na qual seus estudantes se aventurem na busca de sustentação ou revalidação de verdades estabelecidas ao longo da pesquisa histórica, tendo em vista o aumento de seu domínio educativo em matemática [...]defendo a tese de que uma abordagem didática investigatória nas aulas de matemática, apoiada nas informações históricas, pode contribuir na concretização de um ensino e aprendizagem da matemática com significado[...]. (MENDES, 2015 p. 121).

Percebemos uma necessidade de inserir informações sobre o desenvolvimento histórico da matemática no ambiente de ensino por meio de atividades e contextualizações didáticas, neste sentido, os conteúdos matemáticos abordados em sala de aula, podem ser trabalhados também, expondo informações que podem proporcionar uma melhor compreensão

do processo de construção cognitivo dos conceitos matemáticos desde a origem, perpassando seu contexto histórico e até geográfico, até sua aplicação.

[...] podemos asseverar que a história da matemática que consideramos adequada para ser inserida no desenvolvimento conceitual dos estudantes refere-se diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares. (MENDES; CHAQUIAM, 2016 p, 19).

Desta forma, é importante que professores compromissados em um ensino de qualidade, se debruçam na pesquisa em busca de fontes confiáveis e informações pertinentes elaborando atividades práticas pautadas em investigações históricas como proposta pedagógica facilitadora da construção do conhecimento matemático escolar.

Os professores, debruçados em estratégias de ensino testadas e consideradas eficazes, precisam se desdobrar em meio aos conteúdos essenciais pré-estabelecidos nas ementas a serem lecionados, nesse sentido,

[...] muitas pesquisas centradas na busca de novos ou no resgate de velhos métodos que possam contribuir para diminuir as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem da Matemática. Tanto no aspecto didático-pedagógico quanto no aspecto da escolha dos conteúdos mais importantes e mais apropriados para conter a queda crescente da aprendizagem significativa da Matemática, que vem ocorrendo nas últimas décadas. (PEREIRA; VASCONCELOS 2015, p.12).

Outro ponto ideal, é que os conteúdos sejam contemplados com estratégias de ensino atrativas e provocativas para a atenção dos alunos, no caso da História da Matemática, são necessários procedimentos de busca de informações em *sites* especializados ou não, textos acadêmicos e repositórios que permitam extrair informações que possam ser trabalhadas em sala de aula por meio e com auxílio de problematizações a partir do teor histórico.

[...] o que a educação deseja é que o processo de ensino e aprendizagem em matemática seja condutor do alcance de autonomia e aquisição ou desenvolvimento de competências e habilidades para a leitura, compreensão e explicação da vida, da natureza e da cultura, de modo que possa seguir de forma cidadã, a sua vida. O que queremos na verdade é que nossos alunos obtenham formação do campo conceitual, do campo procedimental e do campo atitudinal necessários a fim de que contribuam efetivamente para a formação cidadã. (MENDES; FARIAS, 2014, p. 117 - 118).

O professor de Matemática que tenha intenção de utilizar a História da Matemática em suas aulas, precisa se inclinar em estudos que facilitem a formação de uma concepção mais aprofundada sobre a Matemática que ele ensina. A presença de informações históricas em livros didáticos pode servir de pontos de partida para futuras discussões, pois de acordo com Oliveira e Nogueira (2022), informações históricas em livros didáticos são pontuais, no entanto, podem

disparar a busca por novas informações além de localizações geográficas, biografias e principais fatos, mas possibilitar inovações didáticas que se comprometam com o processo de ensino e de aprendizagem com sentido para os alunos, possibilitando uma nova forma de o estudante perceber a Matemática, como uma Ciência construída e em construção.

[...] é preciso, então, que o professor reformule suas concepções acerca da Matemática como ciência, considerando, para isso, o processo de elaboração matemática nos contextos sócio-culturais, bem como sua construção, acúmulo e disseminação como uma fonte de valorização da tradição cultural. (MENDES, 2009 p. 37).

A História da Matemática de acordo com Mendes (2015) se apresenta em três dimensões, a epistemológica, que diz respeito a História da Matemática em si, a social que diz respeito à história do ensino da Matemática como disciplina e a pedagógica, ou didática, nesta se incluem as propostas didáticas e as diversas maneiras de se inserir e se abordar a História em sala de aula no ensino de Matemática.

Para Mendes (2009), o uso da história como um recurso pedagógico para o ensino de Matemática tem a finalidade de promover um ensino e aprendizagem que possibilite a ressignificação ao conhecimento matemático, levando em consideração e a respeito à sua produção pela sociedade ao longo do tempo.

A história é composta de acontecimentos, fatos, descobertas, descobridores, períodos e datas, o movimento de pensamento dos alunos guiado pelo professor por esses pontos, levam ao entendimento e compreensão dos conhecimentos matemáticos inseridos nesta composição. Pode ser de fundamental importância o entrelaçamento dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula com seus contextos históricos, a vivência dos alunos e a matemática científica trabalhada no repertório de conteúdos propostos à Educação Básica.

Mendes (2009), Saito (2015) e Miguel e Miorim (2011) afirmam que o movimento didático em torno da História da Matemática pode possibilitar uma nova percepção tanto para o professor quanto para o aluno sobre o que vem a ser essa Matemática, que os professores ensinam e que os alunos aprendem. É importante colocar também que se faz necessário que o professor de Matemática não conheça apenas matemática, mas a forma como essa ciência se fez ciência e os motivos, fatos e acontecimentos no decorrer dos anos que contribuíram para que ela esteja na escola.

A história confere significados aos conteúdos matemáticos ali dispostos e permite que o educador os ressignifique, uma vez que, ele percebe as diferentes relações entre conceitos e noções já consolidadas matematicamente. Nesse movimento, essencialmente dialético, emergem elementos potencialmente didáticos que podem ser explorados pelo educador matemático de modo mais crítico e criativo. (SAITO, 2016).



Nesse estudo, utilizamos a investigação histórica conforme destacada por Mendes (2009), essa estratégia metodológica é equivalente a transportar os alunos ao passado carregado de saberes contemporâneo atual e ao adquirirem essas informações históricas, se sintam atraídos em debruçarem sobre a matemática acadêmica pré-estabelecida e ensinada, aprofundando, ressignificando e comprovando a História da Matemática como fonte de produção, conhecimento, ideias e habilidades. Despertando, no entanto, nos estudantes a crença de serem capazes de aprender e de transformar o seu pensamento, isso através de desafios propostos, problematizações elaboradas que levem os alunos juntamente com o professor a reproduzirem o passado, estudarem e pesquisarem.

Silva Neto (2021) em sua tese sobre criatividade em propostas didáticas sobre a História da Matemática, identifica abordagens didáticas para o uso da História da Matemática, dentre elas, destacamos, o uso de problemas e soluções históricas, práticas sociais historicamente constituídas, obras e fontes históricas, abordagem holística e métodos históricos. Esta última abordagem é um dos procedimentos trabalhados neste estudo, revelando que o método possibilita uma compreensão sobre as técnicas, o saber, o conhecimento, as aplicações de uma região e de uma época, ou seja, revelam que Matemática era conhecida e como ela foi disseminada e necessária em outras épocas por diferentes finalidades. Contudo, é importante colocar que a inserção da História da Matemática em sala de aula pode se dar de diversas formas, aliada a diversas formas estratégicas e recursos didáticos.

[...] a utilização da história da matemática em sala de aula é a incorporação de uma fundamentação epistemológica de caráter ético, pois é capaz de proporcionar aos alunos uma imersão em problemas, fazendo o aluno descobrir os porquês de fatos, de fórmulas e de conceitos, respeitando o desenvolvimento e as contribuições da ciência (SILVA NETO, 2016, p. 40).

O modo de pensar e agir dos professores de Matemática, inevitavelmente necessita da História na sua missão de sala de aula, que compreendemos como importante para o desenvolvimento do processo ensino e aprendizagem de Matemática dos alunos, pois no ensino básico, é por meio da História da Matemática que conseguimos explicar a organização conceitual da matemática produzida ao longo dos séculos em regiões diferentes.

[...] essa história pode ser tomada como um aporte para esclarecimentos de cunho epistemológico e didático que poderão contribuir para o professor explicar e orientar a organização das matemáticas escolares. Nesse sentido as informações históricas poderão ser utilizadas para auxiliar o professor de matemática a melhorar o planejamento e a execução de suas explicações durante as aulas de matemática, bem como para justificar os modos de produção matemática no tempo e no espaço. (MENDES CHAQUIAM, 2016, p. 17 - 18).

Na atualidade, apostando nesta organização didática envolvendo a História da Matemática, e desta, prevalecendo a exibição natural das respostas a indagações corriqueiras em sala de aula pelos alunos, mesmo sendo essencial para o ponto de partida e encantamento dos discentes na busca do conhecimento matemático, raramente são respondidos pelos professores de forma fundamentada e que levem os estudantes às informações verdadeiras e completas do que está sendo estudado, como: O que é matemática? Onde surgiu ou foi construída? Quem descobriu ou construiu? Quando descobriu ou construiu? Como descobriu ou construiu? Qual utilidade? E com isso, dando ao processo de ensino, sentido e tornando a matemática mais agradável. (MENDES, 2009).

A aliança da História da Matemática a estratégias didáticas e recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem proporcionam ideias docentes sobre como estruturar propostas didáticas e atividades que somem no engajamento para o ensino de conteúdos escolares, de maneira que fortaleça, nos alunos, as ideias sobre uma Matemática elaborada por homens e mulheres no decorrer do tempo histórico, desde a idade antiga até a contemporaneidade.

Tem-se apresentado em produções acadêmicas, um movimento de pesquisas que aliam a História da Matemática a outros pressupostos teóricos e metodológicos que refletem e dinamizam estratégias didáticas, como é o caso do uso de materiais concretos e ludicidade. Passamos agora a uma apresentação sobre o que entendemos sobre materiais concretos e uma aproximação sobre sua aliança ao uso didática da História da Matemática.

### **2.3 Uma apresentação sobre o uso de Materiais Concretos no ensino de Matemática**

O ato de ensinar matemática se torna de uma logística por vezes difícil de efetivar muitas vezes pela dissociação entre a Matemática e sua constituição humana, até mesmo a falta de uma concepção mais elaborada tanto por parte dos alunos, quanto dos professores que ensinam essa disciplina. O ensino da Matemática requer uma mudança na postura didática, no que concerne a adoção e inserção de novos modelos, pressupostos metodológicos e estratégias didáticas no processo de ensino, buscando irrigar a construção de um pensamento mais dinâmico e autônomo acerca da aprendizagem de conceitos e conteúdos matemáticos pelos alunos.

[...] nos diversos níveis escolares é amplamente reconhecida. [...] Alguns afirmam que as dificuldades resultam de certas características intrínsecas da matemática. Sendo um tema que envolve constantemente o recurso a abstração [...] Outros pretendem que a origem dos problemas é de natureza didática e está associada a metodologia arcaicas, hoje inadequadas. [...] Há quem culpe os currículos, acusando-os de insuficientes atualizações [...] Há os que concentram as críticas na insuficiente apresentação de aplicações práticas para os conteúdos ensinados [...] há ainda os que depositam suas fichas na falta de interesse dos alunos, ou em dissonâncias psicológicas na aprendizagem escolar. (MACHADO, 2012, p.11 – 12).

O ensino de matemática em todos os níveis necessita que o educador além de apresentar um conhecimento específico, seja conhecedor de estratégias pedagógicas de ensino, entendendo o uso de várias ferramentas facilitadoras da aprendizagem em Matemática, praticando em sala de aula uma metodologia de ensino que possa colaborar com a compreensão dos conteúdos abordados com sentido e significado para o alunado, e conseqüentemente possibilitando uma mudança de sua própria concepção sobre ensino e aprendizagem de Matemática.

A adoção de estratégias metodológicas tem se mostrado como uma proposta positiva nos últimos anos como assinala Guerra (2019), apontando que há um crescimento de discussões acerca de novas metodologias e estratégias didáticas sendo inseridas na prática docente devido ao aumento de pesquisas acadêmicas que sinalizam potencialidades no processo de ensino e aprendizagem quando ocorrem mudanças na forma de ensinar Matemática. O uso de metodologias eficazes para o ensino e aprendizagem da Matemática tem se tornado uma busca constante carregada de desafios em meio à complexidade da missão de ensinar. Segundo Pereira e Vasconcelos (2015, p. 15), “alguns pesquisadores vêm defendendo que a Educação Matemática deveria ser iniciada pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentais”. É nesse aspecto que buscamos uma aliança entre o contexto histórico da Matemática e o uso de materiais concretos em meio a uma atividade didática.

Os materiais concretos podem ser um tipo de recurso a ser inserido em modelos metodológicos no ensino de Matemática, pois, entendemos que uma saída na efetivação do ensino e aprendizagem com qualidade de determinados conteúdos matemáticos é o uso de materiais concretos manipulativos em atividades práticas de Matemática. De onde é possível aos alunos visualização, envolvimento no processo, mobilização dos conhecimentos, ludicidade, discussões estratégicas acerca dos conteúdos envolvidos e regularidades nas manipulações enquanto estuda os conteúdos matemáticos, aproximando os alunos dos conceitos, aplicações, propriedades e demonstrações e oportunizando aos discentes, desenvolvimento intelectual ao nível de pensar matematicamente. (LORENZATO, 2009).

Segundo Maria e Luciano (2017, p. 1) “uma maneira de reforçar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos é a utilização de materiais concretos nas atividades curriculares propostas em sala de aula”. Corroborando com essa ideia, Gervásio (2017) informa que os problemas no ensino de Matemática remontam a metodologias antigas que necessitam ser readaptadas ou substituídas, devendo-se empreender um novo modelo de ensino, que encadeie estratégias didáticas que possam contribuir para uma construção mais autônoma do conhecimento matemático.

Os materiais concretos manipuláveis, construídos e utilizados, podem contribuir para o processo educacional tornando o ambiente escolar prazeroso, envolvente e agradável, porém, sua eficácia está condicionada a forma como o professor planejou e conduziu o seu uso em sala de aula. “Na verdade, por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de Matemática, de homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica”. (FIORENTINI E MIORIN, 1990, p. 02). Já para Lorenzato (2010, p.117), “para cada aula ou assunto, um planejamento visando responder a questionamentos tais como: Quais são os pontos fundamentais do assunto a ser estudados? dos materiais disponíveis, quais são os necessários ou mais adequados às atividades dos alunos?”.

Desse modo, para o processo educacional, é importante que o professor inclua em seu planejamento o destaque de pontos essenciais dos conteúdos, lançando mão de atividades que possibilitem ao aluno o sentir e o tocar para construir, com a ajuda do professor.

Queremos dizer que, antes de optar por um material ou um jogo, devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno. (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 04).

O lado abstrato do conceito matemático necessita que os alunos cruzem a fronteira de observador, de acordo com Lorenzato (2010, p.20), “para se alcançar a abstração, é preciso começar pelo concreto”. Sempre que necessário e possível, é importante que o professor disponibilize materiais concretos para auxiliá-lo nesta construção do saber matemático, ao passo que problematize situações por meio de atividades que sejam investigativas, atrativas e desafiadoras.

Para o desenvolvimento de habilidades e efetivação das competências da BNCC faz-se necessários a aplicabilidade de materiais concretos, dentre as possibilidades estratégicas de ensino, como previsto na competência específica 5, “Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais”. (BNCC, ano, página)

um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos (BNCC, 2017, p. 532).

O processo de educação formal é desafiada em inúmeros pontos, questões do cotidiano, dificuldade em aprendizagem por parte dos estudantes, didática não atrativa por parte dos docentes, até a fragmentação na formação dos professores, e se tratando da Educação Matemática, por si só, requer um tratamento criativo, provocando o envolvimento espontâneo dos alunos, com isso, valorizando e percebendo a importância das atividades propostas compartilhadas, reflexivas e colaborativas para desenvolvimento e construção do conhecimento matemático.

Atualmente, cobra-se do professor mostrar, de alguma forma, a utilidade da Matemática para os alunos, facilitando, com isso, a compreensão ou até mesmo a organização da sua realidade, pois esses mesmos alunos não veem a Matemática como uma disciplina dinâmica. Mas os cursos de formação de professores, na sua maioria, não preparam os professores nesse sentido (PEREIRA; VASCONCELOS 2015, p. 12).

Em colaboração com o exposto, o sistema educacional como um todo aponta em vários momentos que atividades grupais experimentais são imprescindíveis para a disseminação dos saberes dos conteúdos de Matemática, mas para que o sistema educacional alcance os objetivos propostos, o professor deve favorecer o envolvimento dos alunos, atraídos por perceberem significado na abordagem de conteúdos matemáticos.

Uma estratégia é contextualizar e adaptar problemas ou situações históricas da matemática para uma realidade atual, construindo momentos de ensino e aprendizagem que despertem a curiosidade em todos os tempos de uma aula, trazendo questionamentos pertinentes e específicos, trazendo reflexões que leve os alunos a uma percepção sobre seu próprio conhecimento lógico e matemático. Consideramos importante “valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BNCC, 2017 p. 09).

Os materiais concretos utilizados criativamente na Educação Matemática podem ser associados ou até mesmo aliados aos pressupostos históricos sobre a constituição de saberes matemáticos, beneficiando uma ação que proporcione um ensino interativo, democrático e inclusivo, que possibilite a reconstrução de ideias matemáticas, partindo ou não, de sua origem, compreendendo suas necessidades e suas finalidades, favorecendo interações na interpretação de contextos para uma leitura matemática de mundo, mas conforme sinaliza Lorenzato (2010), a ação deve ser construída pelo professor com base em um planejamento sólido e atrativo.

O avanço da pesquisa sobre o uso da História da Matemática em sala de aula evidencia metodologias pedagógicas com maior aproveitamento no ensino quando são realizadas associadas a outras ferramentas auxiliaadoras do processo de ensino e aprendizagem, realizadas experimentalmente em atividades bem elaboradas, neste caso, nos posicionamos na aliança do uso de materiais concretos em práticas de ensino mediada por informações extraídas da História da Matemática.

#### **2.4 Uma aliança entre o uso da História da Matemática e Materiais Concretos para o ensino de Matemática**

Nesta vertente, a História da Matemática carrega ingredientes importantes para o efetivo ensino e aprendizagem da matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência.

A atuação de uma proposta de ensino de Matemática apoiada nas informações históricas enfatiza o caráter investigativo do processo construtivo da matemática, podendo levar os estudiosos dessa área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem estudar. (MENDES, 2009, p.92).

Para tanto, o professor possui a incumbência de se manter continuamente se autoavaliando, analisando ações, fazendo anotações, realizando reflexões e se reelaborando, ou seja, engajado em praticar metodologias e estratégias inovadoras que podem ser associadas ao uso da História da Matemática aliada aos materiais concretos de forma que propicie aos alunos uma aprendizagem com mais sentido, criatividade, autonomia e compreensão. Como apresenta D'Ambrosio (2009, p. 97) conceito de formação de professor exige um repensar. É muito importante que se entenda que é impossível pensar no professor como já formado”.

Nesta perspectiva, a História da Matemática por si, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, porém se faz necessário um processo de entrega por parte do professor para a promoção de ideias, confecção de tarefas, atividades, que adotem estratégias metodológicas que possibilitem a imersão de alunos em um contexto histórico, baseado em processos de investigação, descoberta, engenhosidades e levantamento de questões tanto por parte dos alunos quanto por parte do próprio professor. É nesse ponto que defendemos a ideia de aliar materiais concretos a contextos e fatos históricos que efetuem respostas e visualizações de métodos, problemas e soluções constituídas historicamente por personagens destacados no decorrer do tempo que representam conteúdos e conceitos matemáticos dispostos no ensino atual.

Por exemplo, determinar medidas inacessíveis sem a utilização de sombras. Esse conhecimento é derivado do procedimento de medição da altura das pirâmides, explicados por Tales de Mileto, surgindo a partir da seguinte indagação, o que faria um homem para medir a altura de um objeto em um dia nublado e/ou chuvoso, ou seja, sem sol? problemas dessa natureza remete a conhecimentos históricos essenciais para o desenvolvimento da humanidade (navegação) e avanço da matemática (trigonometria) e tecnologia (teodolito), seu desenvolvimento se originou de duas civilizações antigas, os egípcios e os gregos, e ao desenvolver aulas práticas abordando o conhecimento de razões trigonométricas envolvendo esse método pensados pelos geômetras, é necessário o uso de materiais de baixo custo, uma opção, a utilização de um transferidor, canudo, fita ou crepe, linha e um peso (MENDES, 2009).

A adoção de materiais concretos sob o uso da História da Matemática são evidenciadas em uma movimentação de pesquisas já sinalizadas pelos trabalhos de Luzetti (2013), Lima (2016), Silva (2016), Trivizoli (2017), Almeida (2020) e Borges (2020) em que o uso de materiais concretos possibilita um viés lúdico ao processo de ensino e de aprendizagem e a História da Matemática possibilita um viés investigador e essa aliança em meio a situações de atividades e problematizações podem alinhar experiências com turmas de alunos na tentativa de dar significado e ressignificado a conteúdos matemáticos e práticas com conceitos que reproduzam ou reapliquem métodos históricos ou soluções históricas, por exemplo.

Atividade lúdica traz consigo que, o importante não é apenas o resultado efetivo, mas a própria ação. A experiência vivida permite experimentar ciclos de significação, ressignificação e apreensão, além de propiciar que o aluno se autoconheça e conheça o próximo, e no ambiente escolar oportuniza maior apropriação do conteúdo trabalhado, uma vez que o aluno vivenciou de forma prazerosa e não na forma automática, pronta e acabada. (NAVARRO; SOUSA, 2021 p.154).

É oportuno que um dos objetivos das propostas de ensino seja contribuir para a erradicação desse pensar, promovendo ensino de conteúdos matemáticos oportunizando o aluno a conhecer amplamente a teoria e aplicar no desenvolvimento de atividades manipulativas vivenciando o aprofundamento da matemática do passado provocando a curiosidade e envolvimento, tornando real o ensino aprendizagem da matemática na atualidade.

Diz respeito aos tipos de vínculo que se intenta promover entre a produção sócio-histórica do conhecimento matemático no passado e a produção e/ou apropriação pessoal desse conhecimento no presente. Em outras palavras, e mais amplamente, tal questão diz respeito a como se poderia conceber a relação entre a cultura matemática e as formas de apropriação dessa cultura no presente, sobretudo nas práticas pedagógicas escolares e nas práticas de investigação acadêmica em educação matemática. (MIGUEL; MORIM, 2005, p. 10).

A responsabilidade de inverter esta realidade enraizada no trilhar da sociedade educacional ou não, é atribuída ao professor/educador, e este, deve dominar plenamente o que

se propõe a ensinar e antes da exposição necessariamente rebuscar sua: origem, motivações, utilidades e desenvolvimento destes conteúdos e, além disso, filtrar as melhores abordagens, técnicas e metodologias a serem aplicadas e, dentre as várias disponíveis, acreditamos que a inserção de materiais concretos e o lúdico articulados à história da matemática promove um ensino e aprendizagem atrativo, prazeroso, sólido e significativo e, além disso, possibilita ao professor ensinar com maestria degustando o envolvimento e interesse do alunado na construção do seu próprio conhecimento matemático.

A busca por ensino de qualidade em matemática, remonta à união e colaboração dos profissionais da educação munidos de conhecimentos específicos e estratégicos de ensino, equipados com ferramentas que transformem a sala de aula em ambiente propício aos interesses dos alunos objetivados na formação de cidadão conhecedor da ciência denominada matemática.



### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Com intuito de ampliar nosso olhar e conhecimento sobre o assunto em investigação, realizamos uma checagem em trabalhos publicados que realizaram estudos que aliaram a História da Matemática ao uso de materiais concretos, o que contribuiu com nossa prática na coleta de dados.

À respeito dessa revisão bibliográfica, procedemos a uma seleção de publicações, nas revistas o Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM), Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM) e Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), produções que se conectassem com nossa principal temática, História da Matemática e Materiais concretos, contudo, além dos trabalhos que encontramos, pudemos perceber a presença de um tratamento didático sobre a História da Matemática e uso de materiais concretos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática através do uso de abordagens e estratégias didáticas disponíveis nestas fontes de publicações.

Também buscamos no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES por dissertações de mestrados acadêmicos e profissionais, utilizando as palavras-chave: “Método Arquimedes” AND “proposta didática”, “Área do círculo” AND “método da exaustão”, “Arquimedes” AND “medida do círculo”, “Arquimedes” “AND história da matemática”, e todo o material encontrado se constituiu em material empírico que foi em arquivos em PDF para estudo, leituras e estabelecimento de primeiras características para prosseguimento de estudos da pesquisa.

Das fontes de publicações, nos limitamos em buscar, estudar e descrever produções disponíveis em revistas que publicam pesquisa sobre o ensino da matemática baseado na história da matemática dentre elas, BOCEHM de 2014, ano que a revista é criada, até 2021, RBHM de 2012 a 2021 e o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) de 2012 a 2021 que possui teses e dissertações defendidas no território brasileiro em Instituições de Ensino Superior (IES) do país. Nosso foco foram os trabalhos que apresentassem estudos acerca do uso didático da História da Matemática associado a materiais concretos com ênfase para o ensino das medidas do círculo pelo método de Arquimedes.

Apresentamos um quadro com as produções que identificamos que apontaram estudos sobre o número  $\pi$ , a determinação de raio de círculo, comprimento de figuras circulares, aproximação da área do círculo e estudos sobre a sistematização dessas ideias durante o decorrer do tempo histórico, tendo em vista o uso de materiais concretos no ensino de Matemática.

Identificamos os trabalhos de dissertação de Luzetti (2013), Lima (2016), Silva (2016), Borges (2020) e Almeida (2020) e os artigos de *Trivizoli* (2017), que realizaram associações de

aliança entre a História para o ensino de Matemática e uso de diferentes materiais concretos que auxiliaram a reprodução, a compreensão de métodos e técnicas antigas de aplicações matemáticas e a instrumentalização de procedimentos organizados historicamente. Esses trabalhos, contudo, entendemos que podem favorecer a prática de novas discussões a respeito dessa temática em questão. Porém, não encontramos dissertações e artigos de periódicos consultados que tratassem, especificamente, sobre o uso de materiais concretos e determinação da área do círculo por Arquimedes de Siracusa, o que viabiliza ainda mais o desenvolvimento de nosso estudo.

No Quadro 1, apresentamos as produções encontradas que relacionam as contribuições de Arquimedes para a Matemática e que aplicam algumas estratégias didáticas evidenciando explorações de informações históricas, acerca das medidas do círculo, que são tomadas para construção de ideias e conhecimentos matemáticos junto aos alunos, sujeitos dos estudos elencados, tendo constatado um quantitativo de seis trabalhos científicos que se apoiam em fatos históricos associados a outras estratégias de ensino, em destaque, o uso de materiais concretos e que enfatizam características de nosso olhar nesta pesquisa de dissertação.

QUADRO 1 - Produções acadêmicas identificadas

<b>Autoria/(ano) Tipo de trabalho</b>	<b>Título</b>	<b>Conteúdo explorado</b>	<b>Materiais concretos utilizados</b>
Luzetti (2013) Dissertação.	Figuras Circulares: uma atividade envolvendo perímetro e Área do Círculo	Perímetro e área do Círculo	Objetos circulares, calculadora, cartolina, barbante, estilete e régua.
Silva (2016) Dissertação	A utilização da história da matemática em atividades investigativas: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares	Cálculo: Integrais	Cartolina Lápis de cor Papel A4 Papel quadriculado.
Lima (2016) Dissertação	A história da Matemática como Alternativa Didática: uma coletânea de atividades.	Proposta didática sobre vários conteúdos matemáticos auxiliadas pela história da matemática dentre estes, o comprimento do círculo.	Podendo ser utilizados: Geogebra, caneta, compasso, estilete, régua, barbante, cartolina etc.
Trivizoli (2017) Artigo	Descobrimos pi: duas atividades baseadas nos trabalhos de Arquimedes	Geometria plana: número $\pi$ , geometria e trigonometria.	Tampas circulares, discos, CDs, latas, pratos etc., além de barbante, régua, calculadora.
Almeida (2020) Dissertação	O Princípio de Arquimedes e o Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer	Geometria espacial: áreas e volumes	Régua, copo, frasco de <i>shampoo</i> , garrafas, recipiente qualquer com água e um recipiente em forma de prisma transparente.
Borges (2020) Dissertação	Arquimedes e Polya em sala de aula	Cálculo de área de figura geométrica	Cartolina, régua, compasso, transferidor, lápis de cor, etc.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Na RBHM no período de 2012 a 2021, foram publicados 107 artigos, não identificamos trabalhos fazendo alusão ao nosso tema. Já no BOCEHM, detectamos 245 publicações de 2014 (ano de início) até 2021, no entanto, identificamos apenas um expondo relação com nossa temática por fim, no Catálogo de dissertações da CAPES encontramos cinco trabalhos que discorrem sobre associação entre uso de materiais concretos em propostas didáticas sobre o uso da História da Matemática.

Luzetti (2013) propõe analisar a eficácia do ensino através de uma sequência didática experimental e investigativa apoiado nos passos da Engenharia didática, nessa abordagem foi utilizado objetos circulares, calculadora, cartolina, barbante, estilete e régua. Conclui que atividades investigativas apoiadas nos passos da Engenharia Didática entrelaçada a uso de materiais concretos, pode favorecer o processo de ensino e aprendizagem matemática.

Silva (2016) realiza um trabalho que desmistifica o cálculo tradicional de área de figuras não planas, como a área de um rio em determinada região, aliando métodos e procedimentos históricos acerca do cálculo de áreas em diferentes civilizações, como Índia, Babilônia e Egito, em diferentes espaços temporais, que contribuíram para as formas de estabelecimento de fórmulas de cálculo de áreas de figuras dispostos em livros didáticos, por exemplo. O autor trabalhou com licenciandos de Matemática, na disciplina de cálculo explorando o conteúdo de integrais para determinação de áreas, aliando informações históricas nas atividades propostas ao uso de cartolina, pincéis, folha A4, dentre outros materiais para representação da imagem de um rio e a partir dessa representação, estabelecer cálculos e aprofundamentos teóricos e históricos.

Trivizoli (2017) desenvolve em sua pesquisa duas atividades baseadas em trabalhos de Arquimedes apoiado em materiais concretos para determinação do valor do número pi, e disponibiliza uma possibilidade de atividades que possam enriquecer uma aula e/ou auxiliar a colocar o conteúdo de uma aula em um contexto histórico, social e científico e utiliza em uma experiência didática, tampas circulares, discos, CDs, latas, pratos, barbante, régua, calculadora, objetivado a possibilitar uma aula e/ou auxiliar a colocar o conteúdo de uma aula em um contexto histórico, social e científico. Considera que o importante não é a determinação do cálculo aproximado de  $\pi$  em si, é de, por meio desse cálculo, possibilitar discussões acerca da importância histórica de Arquimedes e reconhecer as construções das ideias matemáticas fazendo ligações com a matemática de hoje com problemas e matemática do passado.

Almeida (2020) Baseia-se no princípio de Arquimedes para determinar o volume de quaisquer sólidos e propõe como recurso didático a interdisciplinaridade com a manipulação de materiais concretos inserido no cotidiano dos alunos.

Borges (2020) apresenta uma revisão do texto *A arte de resolver problemas de George Polya*, que contém o método das quatro fases para resolver problemas baseado em heurística, e discorre sobre vida e contribuições de Arquimedes para matemática, dando ênfase a quadratura do círculo, baseado no método heurístico e, também, mostra a engenhosidade de Arquimedes em métodos sobre os teoremas mecânicos, utilizando os princípios físicos do centro de gravidade e a lei da alavanca, com intuito de apresentar propostas de atividades experimentais. Considera que ao apresentar a essência de *O método* de Arquimedes, possibilita observar uma abordagem diferente ao estudar temas de matemática, abrindo caminhos para uma forma diferente de pensar e abordar os temas que envolve a área de geometria plana, contribuindo para o ensino e aprendizagem matemática.

Dentre os trabalhos relacionados no quadro acima, somente um associou História da Matemática e materiais concretos resgatando o método de Arquimedes, ou seja, (ALMEIDA 2020) faz exposição e aplicação do método de Arquimedes para calcular o volume de sólidos quaisquer, apoiado em objetos presentes no dia a dia dos alunos, mas devido à pandemia COVID19, não foi possível desenvolver sua atividade proposta com a turma almejada, ficando como sugestão de atividade proposta de ensino a ser aplicada em sala de aula no ensino básico, além disso, destacamos que nem todos os trabalhos fazem uso de materiais concretos nas atividades propostas.

Não foi encontrado na investigação realizada nos sites anteriormente citados, sobre atividades didáticas educacionais que apresentam História da Matemática e uso de Materiais concreto sobre as medidas do círculo que faça aplicação do método de Arquimedes. Podemos assim, encontrar em nossas atividades características singulares, tendo como referência trabalhos semelhantes abordando outras contribuições de Arquimedes. Assim, apresentamos um estudo explorando conhecimento matemático partindo de um ponto principal, que é problema histórico associados ao uso de materiais concretos intencionados em desenvolver momentos de aprendizado com significado.

## **4 METODOLOGIA**

Nesse capítulo, apresentamos as características da tipologia de pesquisa, os sujeitos envolvidos, o local de pesquisa, os principais apontamentos acerca da pesquisa bibliográfica, a estruturação da atividade elaborada sobre o método de Arquimedes para determinação de medidas do círculo, os procedimentos de coleta de dados, e o procedimento que utilizamos para a análise dos dados e para a apresentação dos resultados.

### **4.1 Caracterização da Pesquisa**

A pesquisa em discussão apresenta um cunho qualitativo, que segundo Bogdan e Biklen (1994) integra a compreensão de informações proporcionadas por sujeitos imersos em um ambiente natural, social e cultural, incluindo o próprio pesquisador, tem como principal característica a descrição e seu maior interesse não é o resultado, e sim, o processo de desenvolvimento de um dado estudo, além de assumir a vitalidade do significado da pesquisa para uma área ou campo de estudo.

A pesquisa também é bibliográfica conforme especifica Gil (2002), esse tipo de pesquisa se concentra em materiais já elaborados, tais como, livros, artigos, dissertações, teses, trabalhos apresentados em eventos, o que nos conduz a uma maior sustentação teórica, e neste ponto, situamos as produções de D'Ambrosio (2009), Lorenzato (2010), Mendes (2009), Miguel e Miorim (2011), Garbi (2011), Roque (2012) e Silva Neto (2021) como os principais referenciais teóricos.

A busca por informações históricas leva o professor e pesquisador a se debruçar sobre as publicações em fontes confiáveis que contribuam para processo de ensino e aprendizagem e para o desenvolvimento de uma pesquisa. De acordo com Miguel e Miorim (2008, p. 44 - 45), “podemos identificar a participação da história ao menos sob três formas diferenciadas: como elemento orientador da sequência de trabalho com um tema específico, os números; na apresentação de diferentes métodos históricos; na discussão de problemas de natureza histórica”.

O presente estudo, também se configura em uma pesquisa de campo, neste ponto, é relevante a aplicação de questionários abertos para coleta de dados, pois de acordo com Gil (2002) o uso de questionários promove a elaboração da escrita, expondo informações, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, conhecimento, abstrações e situações vivenciadas, e desde o início, busca por materiais e produções bibliográficas de cunho acadêmico que contribuam com o estudo.

Pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles. (MARCONI; LAKATOS 2003, p.185).

Na pesquisa de campo, aplicamos dois questionários composto de questões abertas, o questionário inicial contendo oito questões, apêndice B, com finalidade de uma aproximação cognitiva dos alunos sobre a atividade proposta e o questionário final, apêndice D, possibilitando a avaliação de todo processo de ensino, pelos alunos e validação ou não da mesma. Elaboramos uma atividade mediada pela História da Matemática que apresentou como estratégia didática o uso de materiais concretos de maneira que os alunos, auxiliados pelo pesquisador, em momentos de aula pudessem construir e manipular materiais que favorecessem a percepção, formação e estruturação de conceitos e conteúdos acerca de medidas do círculo.

As observações e registros em diário pelo professor/pesquisador de informações das resoluções das atividades e/ou participação dos alunos na experiência prática (perguntas, interações, verbalizações a partir de suas reflexões, pensamento lógico dedutivos, tomada de decisões, avanços nas construções e entrosamento dos grupos no desenvolvimento da atividade), imagens, registros escritos dos alunos e questionários consistiram em nossos instrumentos de coleta de dados, que foram classificados e comentados de acordo com a análise de conteúdo de Bardin (2016) que fundamentou a apresentação de contribuições possíveis de identificar sobre a aliança entre o uso de materiais concretos e a investigação didática e histórica sobre o método de Arquimedes de determinação de medidas do círculo.

Nas literaturas utilizadas, focamos em entender como a História da Matemática pode ser compreendida como ferramenta de auxílio ao processo de ensino e sobre suas possibilidades de inserção em sala de aula como favorecimento da mobilização dos saberes matemáticos combinados com a construção e manipulação de materiais concretos, e assim, nos apropriando da sustentação teórica e concomitantemente, viabilizando o planejamento das atividades que foram elaboradas para ação em sala de aula.

Os sujeitos desta proposta de pesquisa se constituíram em alunos regularmente matriculados no 3º Ano do Ensino Médio do curso Técnico em Edificações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - Campus Floriano, uma turma composta de 33 alunos, sendo 20 do sexo feminino e 13 do sexo masculino, com idades de 16 a 18 anos, onde somente 24% da turma é natural de Floriano, a maioria possui naturalidade de cidades que compõe a região de Floriano e os demais se dividem com naturalidade de cidades localizadas em outros estados como Maranhão, Distrito Federal e São Paulo. Nessa turma, os conteúdos

pesquisados já haviam sido ministrados na ocasião da pesquisa e estão presentes na matriz curricular da série.

É pertinente destacar que, a análise dos dados da pesquisa de dissertação procedeu através da organização e categorização a partir da classificação das informações dos alunos pesquisados. Então foram usados dois instrumentos de coleta de dados, dois questionários para os alunos e o diário de bordo usado pelo professor para fazer as suas anotações e observações., onde buscamos identificar as contribuições através de processos de categorização por meio da análise de conteúdo em que a História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos, pode apresentar enquanto facilitador do ensino e aprendizagem de Matemática.

A análise de conteúdo leva em consideração as significações (conteúdo) [...] procura conhecer aquilo que está por trás das palavras sobre as quais se debruça [...] é uma busca de outras realidades por meio das mensagens... visa o conhecimento de variáveis de ordem psicológica, sociológica, histórica etc., por meio de um mecanismo de dedução com base em indicadores reconstruídos a partir de uma amostra de mensagens particulares. (BARDIN 2016, p.51).

De acordo com Bardin (2016), na análise de conteúdo é possível captar as reflexões, discussões de ideias, engajamentos no fazer, motivação, entendimento do processo em construção de forma individual e grupal, para que pudéssemos realizar a tradução em significados, sem que aconteça discrepância da realidade dos fatos. Os usos desse procedimento nos permitiram elencar contribuições a partir de descrições de resultados obtidos com a aplicação da atividade e dos questionários.

#### 4.2 Sobre a produção da atividade

A ação em sala de aula após a idealização e elaboração de uma atividade, permitiu que construíssemos um quadro que identifica e caracteriza a atividade que fez uso da História da Matemática, em que também identificamos em um espaço a oportunidade de uso de materiais concretos e/ou outros recursos. Pensamos ser interessante evidenciar o Quadro 2 com descritores da atividade desenvolvida de forma que possibilite a outros professores e pesquisadores sua adoção na esquematização de novas atividades e desenvolvimento de estudos e propostas didáticas acerca da História da Matemática para o ensino de Matemática.

QUADRO 2 – Caracterização da atividade desenvolvida

Série/Ano escolar	3º ano
Conteúdo Geral	Geometria
Conteúdos específicos	Medidas da circunferência/círculo, número, comprimento da circunferência e área do círculo.
Habilidades (BNCC)	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BNCC, 2017 p. 09).

		(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.  (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais.
Objetivos	Professor	Envolver conhecimentos já estudados pelos alunos em meio uma prática didática baseada em informações históricas acerca das medidas do círculo remontando o método usado por Arquimedes.
	Aluno	Ser capaz de determinar medidas do círculo, identificando elementos constituintes da formação das figuras circulares e fomentar empregos das medidas do círculo em atividade cotidianas e científicas.
Materiais concretos utilizados		Papel cartão de cores variadas, EVA, régua, transferidor, cola, compasso, barbante, tesoura, fita crepe e canetas de diferentes cores.
Contexto histórico		Realização de Arquimedes (287 a. C. – 212 a. C.).
Informação histórica		Determinação da constante $\pi$ e da área do círculo pelo método da Exaustão de Arquimedes.
Fontes de referências		GARBI, Gilberto. <b>A rainha das ciências</b> : um passeio histórico pelo maravilhoso mundo a matemática. 5. ed. Ver. E ampl.- São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. ROQUE, Tatiana. <b>História da Matemática</b> : uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. rio de janeiro: zahar, 2012. LAUNAY, Mickael. <b>A Fascinante História da Matemática</b> : Da pré-história aos dias de hoje. Trad. Clóvis Marques; Rev. Anna Maria Sotero. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2021. ROONEY, Anne <b>A História da Matemática</b> : Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito São Paulo: m.Books Brasil , 2012.
Duração da atividade		Três aulas de 50 minutos.
Conhecimentos prévios envolvidos		Figuras planas regulares, polígonos inscritos e circunscritos, área do triângulo e área do retângulo, circunferências concêntricas e conhecimento sobre o uso dos instrumentos de desenho geométrico.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Viabilizamos na atividade proposta aos alunos, o compartilhamento de conhecimento e de ideias, reflexões sobre o fazer correlacionando com o método histórico, através do uso de materiais concretos permitindo encontrar o número irracional ( $\pi$ ) experienciando uma atividade com a utilização de objetos do cotidiano e, posteriormente conduzindo-os a utilização dos materiais disponibilizados pelo pesquisador, a construção de polígonos regulares desenhados, representados e sobrepostos ao círculo por meio da reprodução de parte do método de Arquimedes no que se refere ao método da exaustão.

É indispensável para o processo ativo reflexivo em atividades históricas, os pressupostos teóricos referentes à investigação histórica como estratégia didática para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois se trata de fonte de motivação e geração de sentido nas aquisições dos saberes escolares. (MENDES, 2009).

A realização da atividade elaborada de cunho investigativo possibilitou ação do pensar, fazer, refletir, compartilhar, reordenar, relacionar conhecimentos sobre o círculo por Arquimedes estruturando condições de transformação, levando o aluno a percorrer o passado,



viabilizando a construção de seus próprios conhecimentos matemáticos, em um processo criativo e autônomo.

Uma relevância da atividade é que foi elaborada na tentativa de que as respostas dos sujeitos se baseassem em suas próprias deduções e não em aplicação de fórmulas dadas como um passe de mágica, sem argumentação de prova ou origem e desenvolvimento dos conteúdos ao longo do tempo. Reforçamos que os alunos recorrem às fórmulas uma vez que já são induzidos a pensar que uma solução só é possível através do uso de fórmulas prontas e acabadas. A aplicação de atividades que usem da História da Matemática faz com que,

[...] o estudante compreenda e se aproprie da própria Matemática concedida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algarismos, etc. [...] e fazer com que o estudante construa, por intermédio do conhecimento matemático, valores e atitudes de natureza diversa, visando a formação integral do ser humano [...] (MENDES; MIORIM 2008, p. 70 - 71).

Um ensino baseado na exploração e na investigação histórica em matemática por meio da proposição de atividades que vá além da simples memorização de fórmulas e técnicas de resolução de problemas, contribui para uma maior compreensão de fatos matemáticos e formação cidadã. Mas para isso, é importante que o professor se comprometa em possibilitar o desafio, a investigação e a autonomia do estudante.

A atividade didática foi definida através de um planejamento específico e de estudos acerca do método de Arquimedes e o uso de materiais concretos, assim como a definição de quais materiais utilizar, e sobre a inserção da História da Matemática em sala de aula. Os questionários, um com a finalidade de conhecer a turma e entender até que ponto o planejamento das atividades eram aplicáveis e o outro questionário focado na validação das atividades. Além disso, a estruturação dos quatro passos trilhados pelos grupos de alunos na execução das atividades propostas, neste ponto, destaco a flexibilidade na sequência de realização das etapas, o suficiente para adaptações das ações dos passos na atividade sobre o círculo de Arquimedes.

Estabelecemos a estruturação das atividades engajados a promover sentido conceitual aos alunos, objetivando atrair seus interesses pela História da Matemática e que a empolgação se afluísse no desenrolar das etapas. Entendemos que uma atividade que lance mão de um recurso metodológico, neste caso, a História da Matemática interligada ao uso de materiais concretos em atividade prática, deve ser planejada, e se possível simulada e idealizada de maneira que promovam significado e sentido para os alunos, e que posicione, neste caso, o método histórico como aspecto relevante na atividade de reprodução.

O desenvolvimento da ação em sala de aula ocorreu em três horários de aula cedidos pelo professor atuante da turma, assim divididas: duas aulas geminadas de 50 minutos cada (100 minutos) e uma aula individual (50 minutos).

A atividade consistia em reproduzir por meio de leituras, interpretações, desenhos, recortes e colagens, aspectos do método de Arquimedes de forma que os próprios alunos chegassem até a visualização da fórmula da área do círculo.

#### **4.3 Descrição dos procedimentos durante as aulas e aplicação da atividade**

Os alunos sujeitos da pesquisa foram convidados para participar do estudo no dia 30 de agosto de 2022, ocasião em que nos apresentamos à instituição e expomos as ideias da pesquisa à direção de ensino, de onde obtivemos autorização, via documento apresentado no anexo A, para realização desse estudo. No dia 4 de setembro de 2022, nos dirigimos ao campus para nos apresentar aos alunos e expor os objetivos do estudo, na ocasião, entregamos os termos de consentimentos aos alunos, presente no apêndice A, e esses termos foram assinados pelos alunos maiores de idade e pelos pais caso os alunos fossem menores de idade. Assim, cumprimos uma das características éticas de desenvolvimento da pesquisa, pois utilizamos os registros escritos digitalizados, imagens fotografadas pelo pesquisador no momento das aulas e do processo de intervenção.

Salientamos que houve ausência de três alunos durante o primeiro encontro, e nem todos retornaram o Termo de Consentimento, justificaram que moravam com colegas de turma e que também possuíam idades menor que 18 anos e, além disso, seus pais e/ou responsáveis moravam em cidades distantes, e pelos motivos expostos, estes alunos não foram contabilizados nesta pesquisa de dissertação de mestrado, assim, filtramos a efetivação da participação de 26 alunos sujeitos.

Lançamos mão, como instrumentos de coleta de dados, da observação, registros no diário de campo, resoluções escritas dos alunos, questionário com questões abertas, imagens acerca da construção de figuras planas pelos alunos e manipulação dos materiais concretos e questionários de validação com a finalidade de adquirir informações que viabilizassem entendimento sobre a compreensão dos alunos.

A reconstituição do método de Arquimedes foi reproduzida na atividade desenvolvida com os alunos que foram organizados em cinco grupos, essa parte teve duração de 70 minutos conforme planejamento, dentro do espaço de 150 minutos cedidos. Esse momento ocorreu no horário regular da aula de Matemática, fazendo uso dos seguintes materiais: folhas A4, régua,

folhas de EVA, tesouras, fitas crepe, canetas de cores diferentes e instrumentos de desenho geométrico (esquadro, compasso, transferidor).

Informamos que no momento das aulas houve interação, discussões, reflexões, construções, indagações, suposições acertadas e equivocadas, tornando a aula em um verdadeiro laboratório de conhecimento matemático, vale ressaltar que em atividades, tais como a que projetada para essa pesquisa, deve ocorrer liberdade para autonomia na construção do conhecimento pelos próprios alunos.

#### **4.4 Desenvolvimento da Aplicação da Atividade Didática**

Consideramos que a realização da aplicação da atividade didática de pesquisa de dissertação se distribuiu em quatro momentos:

1º momento: aplicamos o questionário inicial para sondagem dos conhecimentos prévios dos alunos sobre os tópicos em abordagem e se fosse necessário adaptarmos nossos planejamentos da atividade prática pretendida.

2º momento: efetuamos a explanação de uma apresentação teórica, abordando informações históricas sobre Matemática e Arquimedes, em ênfase os saberes sobre as medidas do círculo.

3º momento: foi de organização da turma em cinco grupos para reconstituição do método de Arquimedes, fazendo uso de materiais disponibilizados pelo pesquisador para desenhar, recortar, colar, manipular e com raciocínio lógico dedutivo inferir a expressão que determina a área de qualquer círculo.

4º e último momento: aplicamos o questionário de validação, oportunizando aos alunos a refletirem sobre a atividade desenvolvida em sala com o objetivo de entender se atividades assim estruturadas contribuem positivamente para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

A aplicação do questionário inicial (individual, aconteceu dia 13 de setembro 2022, teve duração de 20 minutos momento ilustrado na Figura 5, tempo previsto no planejamento e que aconteceu no turno matutino, a participação dos pesquisados foi registrada em diário, imagens e escrita dos próprios pesquisados nos espaços disponíveis nas respectivas oito perguntas abertas e subjetivas), presente no apêndice C.

FIGURA 5 – Momento de aplicação de questionário



Fonte: Acervo do autor (2022)

As perguntas do questionário inicial, versaram sobre as origens da Matemática e o contato dos alunos com a História da Matemática.

## 5 EXPOSIÇÃO DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 Sobre o questionário inicial

É singular informar que não esperávamos textos muito elaborados pelos alunos participantes. O questionário nos auxiliou em uma primeira aproximação cognitiva dos alunos acerca da prática que seria realizada. Observamos que no momento da resolução do questionário, alguns alunos se mostraram retraídos, afirmando que não tinham conhecimento sobre algumas questões e se podiam deixá-las sem respostas. O estranhamento dos alunos quanto aos questionamentos já era de se esperar, visto que, ocorre uma adaptação para ter-se acesso ao espaço de trocas em uma pesquisa realizada em sala de aula.

Ainda no dia 13 de setembro de 2022, após o término do questionário inicial realizamos exposição teórica com auxílio de *slides*, apresentados no apêndice E, sobre a História da Matemática, desde a sua origem, desenvolvimento, destaque de alguns matemáticos que contribuíram com conhecimento sobre as medidas do círculo e circunferência, enfatizando as contribuições de Arquimedes e na ocasião da aula, também utilizamos a exibição de trechos de um vídeo<sup>4</sup> de 6,57 minutos, trazendo informações sobre o método de Arquimedes.

Esse momento está registrado na Figura 6, onde podemos observar que os alunos se mostraram atentos à exposição, tendo ocorrido uma grande participação dos alunos quando questionados pelo pesquisador sobre a origem e desenvolvimento da Matemática e dos vários estudiosos registrados na história que descobriu, organizou e disseminou esta ciência hoje denominada matemática e, em foco as medidas do círculo e circunferência através do método de Arquimedes.

Figura 6- Momento de exposição inicial sobre o conteúdo



Fonte: acervo do autor (2022)

---

<sup>4</sup> (link: <https://www.youtube.com/watch?v=TYz86YVKqCM&t=44s>)

Para viabilizar a realização dos passos da atividade descrita no Quadro 02, foram utilizados os seguintes materiais concretos: instrumentos de desenho geométrico, tesoura, folha A4, cartolina, canetas de cores diferentes, fitas e objetos do cotidiano dos alunos com formatos circulares, na atividade investigativa planejada sobre o método histórico de Arquimedes.

Dos 26 alunos considerados na pesquisa, apresentamos do quadro três ao dez, no entanto, a transcrição (na íntegra) de seis respostas de cada pergunta, as seis primeiras respostas entregues no momento da aplicação, foi o critério de escolha, como forma de expormos e tecermos comentários sobre o que foi desenvolvido no decorrer de nossa ação inicial de intervenção, assim como no questionário de avaliação. Destacamos que em nossa leitura e análise, foi levado em consideração todas as respostas elaboradas pelos alunos e observações registradas dos momentos de aplicações buscando perceber quais concepções sobre Matemática e sobre História da Matemática e sobre o conteúdo que estudamos.

Após as leituras de todas as respostas elaboradas pelos alunos referentes ao questionário inicial, lidos, relidos, organizados e analisados, verificamos que os alunos, apresentam algum entendimento e associam mesmo que superficialmente, a História da Matemática à História da Humanidade, e é fato que o desenvolvimento das civilizações e a evolução da ciência, em grande parte, tem contribuições da exploração dos conhecimentos matemáticos. D'Ambrosio (2009) informa que muitas vezes professores e alunos possuem informações superficiais sobre a Matemática como necessidade humana, fazendo emergir muitas vezes uma associação de que a História da Matemática pode se confundir e se entrelaçar com o desenvolvimento das civilizações, advento da tecnologia e da própria Humanidade.

QUADRO 3 - Registros escritos dos alunos – resposta da primeira questão

01. Como você acha que a matemática surgiu?
<i>A1 – Surgiu através da curiosidade humana para desvendar aquilo que não conheciam, criada também para medir e contar.</i>
<i>A2 – Desde os primeiros homens na terra conviver com quantidade já era uma realidade, acredito eu, que a matemática de fato surgiu precisaram ter um controle.</i>
<i>A3 – Surgiu para facilitar a vida das pessoas, por meio de números, para contagem e entender e datas do que se vivia.</i>
<i>A4 – Da necessidade do homem em organizar as coisas, como rebanho de ovelhas.</i>
<i>A5 – Acho que a partir do momento em que os seres humanos começaram a ter necessidade de somar quantidades, de dividir a caça, tarefas,...</i>
<i>A6 – Na minha opinião surgiu a partir do momento que os antigos se deram conta de que sabiam contar os animais, por exemplo.</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

As respostas à primeira pergunta do questionário sobre a forma como os alunos pensam sobre a origem da Matemática se direcionaram, de uma maneira geral, acerca da necessidade do homem de estabelecer controle e organização de objetos, domínios sobre operações aritméticas e sistemas de contagem, também sobre a necessidade de solucionar

problemas para vivência em grupos sociais. Foram apontadas também informações de uma Matemática que foi construída por pessoas intelectuais que criaram e formularam teoremas e fórmulas.

Com o apresentado, podemos afirmar que os alunos possuem uma especulação de que a Matemática foi desenvolvida a partir de necessidades humanas e de desenvolvimento de sociedades, principalmente pela necessidade de estabelecer sistemas de contagens promissores que fossem de útil integração entre os povos. Consideramos que essas respostas já eram esperadas como entendimentos iniciais dos alunos.

Para a segunda pergunta do questionário inicial, os alunos descreveram conhecimentos matemáticos assimilados por meio da História da Matemática mediados pelos professores.

QUADRO 4 - Registros escritos dos alunos – resposta da segunda questão

02. Poderia dizer que (quais) conteúdos já estudou por meio da História da Matemática em sala de aula?
A1 – <i>Trigonometria, geometria,... que eu me lembre todos os conteúdos sempre antes de serem estudados são passados um pouquinho da história de determinado assunto.</i>
A2 – <i>Que eu me lembre, nenhum.</i>
A3 – <i>Todos os conteúdos de alguma forma utiliza a história, através da história sabemos de onde se originou aquela necessidade.</i>
A4 – <i>Algarismo Romano, Pitágoras.</i>
A5 – <i>A matemática da construção das pirâmides, no estudo das constelações, dos fenômenos naturais, na contagem de tempo, de massa, de distância, etc.</i>
A6 – <i>Não lembro de já ter estudado sobre as histórias de algum conteúdo</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

O que é relatado na questão de número 2 e que podemos inferir é que 18 dos alunos pesquisados já tiveram contato com o ensino de conteúdos matemáticos e processo que se utilizaram da História da Matemática. Eles apresentam os conteúdos sobre algarismos romanos, teorema de Pitágoras, contagem do tempo, associam a uma Matemática egípcia por enunciarem a construção das pirâmides no Egito, associam o uso da astronomia, unidades de medidas.

Não sabemos ao certo se já viram materiais escritos, se imaginam a presença da História nestes conteúdos ou se já estudaram de fato esses conteúdos mediados pela História da Matemática em sala de aula. Contudo, é importante mencionar que o ensino de Matemática associado à inserção da História da Matemática em sala de aula deve ser além da exposição teórica e mínima de algum fato e acontecimento, embora esse tipo de exposição também contribua, mas nesse trabalho defendemos a ideia de que a História deve se fazer presente não somente de forma introdutória, mas de maneira investigativa e que faça parte da aula como um todo e esteja presente em atividades que possibilitem a descoberta, a investigação, a indagação, o desafio estabelecendo um processo de criatividade em sua rotina escolar.

Na terceira pergunta, que diz a respeito de Arquimedes, buscamos perceber o que os alunos poderiam dizer sobre esse matemático e que associações faziam.

QUADRO 5 - Registros escritos dos alunos – resposta da terceira questão

03.O que já ouviu falar sobre Arquimedes?
A1 – Posso já ter ouvido falar, mas não me lembro
A2 – Já ouvi que Arquimedes foi um grande filósofo e matemático que fez grandes descobertas, inclusive a descoberta do $\pi = \pi$
A3 – Nunca ouvi falar, não conheço, mas ele deve está ligado a alguma da história.
A4 – Nunca ouvi falar.
A5 – Nunca ouvi falar.
A6 – Não lembro de já ter estudado.

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Acerca do terceiro questionamento, a maioria dos alunos sujeitos desse estudo não reconhecem contextos sobre Arquimedes e conexões com conceitos matemáticos. Alguns associaram Arquimedes ao fato de estudos sobre Filosofia e poucos acerca de estudos sobre o conhecimento matemático em especial às medidas do círculo. Dessa forma, nos posicionamos sobre as contribuições que a História da Matemática, na forma de aspectos biográficos e celebrações pode proporcionar ao aluno uma soma de argumentos que explicitam o movimento histórico desempenhado pela Matemática ao longo do tempo.

No quarto questionamento, os alunos foram consultados sobre a presença e o reconhecimento de figuras circulares.

QUADRO 6 - Registros escritos dos alunos – resposta da quarta questão

04. Cite alguns objetos ou situações de sua vida que envolvam regiões circulares
A1 – Pizza, bambolê, bola, ...
A2 – Quando vou comer um biscoito, jogar bola, brincar de bambolê, etc.
A3 – Objetos: bola, tampa, garrafa, balde, bacia, etc.
A4 – Bola de futebol, panela e ventilador e etc.
A5 – Compasso, copos, estojo, anel, óculos, garrafa,...
A6 – Potes, bolas, garrafas, pias, reservatórios de água.

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Entendemos que os alunos sujeitos dessa pesquisa associam o círculo a objetos ou situações que estão inseridas nos seus convívios, isso reforça os estudos de D’Ambrosio (2009) que defende que na vivência de todo ser humano acontece o manifesto de conhecimento matemático e é fundamental que o processo educacional parta da matemática desenvolvida no cotidiano dando prioridade a conteúdos essenciais para o interesse do aluno avançando ao ponto da aquisição do saber matemático enquanto ciência.

Em adoção de estratégias didáticas, é crucial que o trabalho docente seja planejado considerando a execução de sua regência explorando conhecimento matemático cotidiano, escolar e científico. A associação dessas três matemáticas como também aponta Mendes (2009, 2015) e Miguel e Miorim (2011) pode desencadear possibilidades de compreensão diversas acerca de conteúdos e conceitos matemáticos.



Os alunos sugerem como respostas os objetos circulares: bola, jogo de futebol, bambolê, pizza, ventilador, elementos que podem substancialmente fazer parte de contextos de atividades diversas como forma de elucidar aproximações e aplicações da figura plana circular e fomentar a adoção de diferentes estratégias didáticas e metodológicas.

O reconhecimento de figuras geométricas planas no cotidiano é um passo importante para estudo de teoremas e fórmulas na sala de aula como conceitos presentes na matemática científica. A junção de contextos, recursos e estratégias tais como é possível pela exploração do método de Arquimedes pode fomentar discussões no contexto da sala de aula, tornando este ambiente um lugar atrativo e propício ao ensino e aprendizagem matemática com sentido.

A questão cinco provocava os alunos a refletirem sobre seus conhecimentos acerca do círculo e circunferência.

QUADRO 7 - Registros escritos dos alunos – resposta da quinta questão

05. O que pode nos dizer sobre o círculo ou sobre seus elementos?
A1 – O círculo possui raio, diâmetro e centro.
A2 – No círculo há o centro, o raio e o diâmetro.
A3 – O círculo é utilizado em várias atividades cotidianas por meio de objetos utilizados.
A4 – Tem diâmetro, raio é o diâmetro $\div 2$ .
A5 – É uma figura geométrica sem lados, formado por uma sucessão infinitas de pontos.
A6 – Que faz parte dos polígonos e é importante, pois diariamente precisamos saber dos seus cálculos.

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Explicitaram sobre alguns dos elementos do círculo, mas não associaram a existência da área e muito menos a sua expressão  $\pi r^2$ . É fato, que os alunos não assimilam todo o conhecimento matemático ensinado, devido alguns fatores preocupantes que permeiam desde as questões socioculturais dos alunos até a fragmentação na formação dos professores. Na prática docente, uma grande parcela dos professores, desenvolve sua profissão carente de discussões sobre estratégias práticas na educação matemática na qual impossibilita levar o aluno a vivenciar a construção dos saberes, desta forma, os discentes se delimitam em reproduzir o que aprenderam durante sua formação, ou seja, é transmitido uma ideia equivocada de que a matemática é uma ciência pronta e acabada, aplicação de fórmulas sem suas devidas origem e justificativas, assim tornando um ensino amargo, sem sentido, os discentes não conseguem vislumbrar suas importâncias e aplicações reais (D'AMBROSIO, 1996).

Na questão seis, os alunos foram indagados sobre a constante  $\pi$ , representatividade e valor em torno de estudos envolvendo o círculo e a circunferência.

QUADRO 8 - Registros escritos dos alunos – resposta da sexta questão

06. O número $\pi$ está envolvido em cálculos que buscam medidas do círculo e da circunferência. O que você já estudou sobre este número? Qual o seu valor? O que ele representa?
A1 – Sua relação com a circunferência e com o círculo, 3,14; não lembro.

<i>A2 – Já estudei fórmulas que irei usar ela, em que momento e onde. O valor de pi é 3,14 e representa uma dízima.</i>
<i>A3 – O <math>\pi</math> é uma letra grega utilizando em equações e fórmulas de círculo ou circunferência, tem o valor aproximado de 3,14.</i>
<i>A4 – É um número muito utilizado na geometria, tem seu valor de 3,14.</i>
<i>A5 – Já estudei ele em fórmulas que calculam área, como o círculo e o cilindro. Vale aproximadamente 3,14; não sei o que ele representa.</i>
<i>A6 – Ele aparece muito na área do círculo, por exemplo. Seu valor é 3,14. Representa cálculo do círculo.</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Como podemos perceber, os alunos se manifestaram em torno de sua vivência no uso de fórmulas e teoremas que se utilizam do número  $\pi$ , alguns enfatizam que nos cálculos de elementos do círculo e da circunferência, se faz necessário o uso desse número, mas desconhecem a sua representatividade.

Neste questionamento, é possível verificar que os alunos estabelecem ligações do número  $\pi$  a estudos e problemas que envolvem regiões circulares. Essa noção, nos faz perceber que se faz necessário um contexto anterior que horizontalize cronologicamente a ideia da constituição desse número e suas relações com figuras circulares. O que percebemos é que os alunos não apresentam informações sobre origens de conceitos matemáticos, e assim, podem conceber a Matemática conforme já relatamos anteriormente como ciência desconectada de uma História de estudos e descobertas.

A questão de número sete sugeriu aos alunos associações entre o círculo e a circunferência.

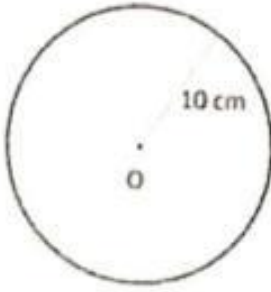
QUADRO 9 - Registros escritos dos alunos – resposta da sétima questão

<i>07. Você acha que os mesmos métodos de estudar o círculo são válidos para a circunferência? Se sim ou se não, informe por quê.</i>
<i>A1 – Sim e não, pois são utilizados os mesmos elementos mas não da mesma forma.</i>
<i>A2 – Não, eu acho que há sim outras maneiras de estudo para circunferência.</i>
<i>A3 – Não, pois em alguns casos são usados fórmulas e interpretações diferentes.</i>
<i>A4 – Não sei.</i>
<i>A5 – Acho que sim, porque são semelhantes.</i>
<i>A6 – Não, pois o círculo é o “recheio da circunferência e a circunferência é o redor.”</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Nas respostas observadas, percebemos que, em parte, os alunos se mostram inseguros ou não sabem diferenciar as abordagens do círculo e circunferência. Nesse momento, um dos alunos, escreve que o “círculo é o recheio da circunferência e a circunferência é o redor”, esse reconhecimento empírico é uma forma saudável de diferenciar círculo de circunferência com uma explicação sem apresentações matemáticas, nesse caso, o que pode desencadear novas discussões para apropriação de saberes sobre as figuras planas em questão. Neste sentido, cabe a nós professores, o cuidado de buscarmos aspectos construtivistas sobre o conhecimento matemático, viabilizando ao alunado compreensão segura dos diferentes conceitos matemáticos estudados.

QUADRO 10 - Registros escritos dos alunos – resposta da oitava questão

08. Poderia determinar o comprimento e a área dessa figura geométrica? Não deixe de registrar seus cálculos.		
		
A1 –	$comprimento = 2\pi R$ $\text{Área} = \pi R^2$	$2\pi 10 = 20\pi$ $\pi 10^2 = 100\pi$
A2 –	$\pi r^2$ $\pi 10^2$ $100\pi$	
A3 –	$\text{Área} =$ $A = \pi r^2$ $A = 3,14 \cdot 10$ $A = 31,4m^3$	
A4 –	$A = \pi \cdot r^2$ $A = 3,14 \cdot 10^2$ $A = 3,14 \cdot 100$ $A = 314.$	$C = 2 \cdot \pi \cdot r$ $C = 2 \cdot \pi \cdot 10$ $C = 20\pi$
A5 –	$A = \pi r^2$ $A = 100\pi$	$C = \pi \cdot r$ $C = 10\pi$
A6 –	$A = \pi r^2$ $A = \pi 10^2$ $A = 100\pi$	

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Observamos que os alunos apresentaram os cálculos a partir da aplicação de fórmula, sem elaborar uma interpretação dos dados, além disso, 35% dos pesquisados não apresentaram domínio em suas resoluções sobre os tópicos abordados: comprimento da circunferência e área do círculo, solicitados no questionário.

Podemos inferir que é corriqueiro a aplicação tida como verdadeira de fórmulas tais como a área do círculo e comprimento da circunferência. Destacamos que se trata de uma turma de 3º ano do Ensino Médio, em que conceitos acerca do círculo são necessários em problemas de outros conteúdos e até mesmo de outras disciplinas. Convém destacar que a alusão a informações acerca da História da Matemática e uso e manipulação de materiais concretos vem reforçar a estudo sobre conteúdos matemáticos que possibilitam um ensino de matemática de modo investigativo, construtivo e reflexivo favorecendo a apropriação da matemática hoje constituída.

Conseguimos perceber que, para os alunos, o conhecimento matemático surge de situações práticas envolvendo necessidades de resolver problemas do convívio das pessoas, conseqüentemente, emergindo o desenvolvimento da Matemática, destacamos que esse

entendimento por parte dos alunos envolvidos na pesquisa se apresenta de forma carente de aprofundamento e extensão.

## **5.2 Sobre a atividade desenvolvida**

A atividade proposta foi desenvolvida com base em Mendes (2009), pois defende que o ensino da matemática deve ser cuidadosamente planejado e ancorado em ideias investigativas, tornando o ambiente de ensino e aprendizagem propícios as redescobertas da matemática, provocando a criatividade e o espírito desafiador do aluno para construir suas ideias sobre o que pretende aprender, e isso, é viável, propondo atividades que requer envolvimento dos aprendizes colaborando para o conhecimento matemático sequenciado, visto que cada passo experienciado pelos envolvidos, exige discussões e reflexões fundamentadas para formalização dos conceitos matemáticos em aquisição.

Para a execução da atividade, adotamos a concessão de quatro passos que para descrever o método de Arquimedes para sua reprodução com uso de materiais concretos pelos alunos. Para essa execução, a turma foi organizada em cinco grupos: dois de cinco alunos e três de seis alunos, atribuindo a cada grupo a tarefa de realizar a construção do método de Arquimedes.

Na investigação histórica no ensino de Matemática, não apresentamos a formulação, ou seja, fórmulas, provocamos para que os alunos percebam o que acontece e construam seu próprio conhecimento, o professor, figura, portanto, como um provocador ao aluno.

A apresentação do contexto histórico sobre as medidas do círculo propiciou a curiosidade nos grupos, fato primordial e que contribuiu significativamente para execução da ação de construção das figuras e manipulação dos materiais concretos pelos grupos de alunos, possibilitando conexão do fazer com o método histórico de Arquimedes sobre as medidas do círculo desenvolvido por volta de 250 a. C.

Na Figura 7 expomos um momento de execução da atividade e manuseio de materiais oferecidos pelo pesquisador.

Figura 7- construção e manipulação dos materiais concretos



Fonte: Acervo do autor (2022)

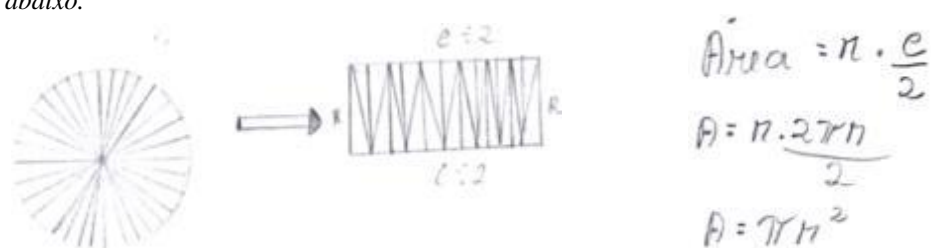
Apresentamos os direcionamentos das etapas de construção e as respectivas anotações através dos registros escritos dos alunos expostos que passamos a apresentar no Quadro onde apresentamos os registros escritos de todos os cinco grupos, durante o cumprimento das etapas para a construção, recorte, manipulação e colagem das partes, formando uma nova figura plana, e esse processo levou ao aluno percorrer de modo sequenciado e lógico o método de Arquimedes para determinação das medidas do círculo, facilitando o emprego da autonomia em conceber seu próprio saber matemático.

Devido à semelhança nos quatro passos de construção apresentados no Quadro 11, por meio da transcrição das anotações dos cinco grupos, diferindo unicamente o número de lados do polígono inscrito e circunscrito, considerando este fato, para evitar redundância, decidimos organizar as informações das etapas de construção, somente em uma estrutura e a partir desta, seguir sua descrição e com tessitura de comentários.

QUADRO 11 - Atividade e respostas dos alunos

<p>Passo. 1</p> <p>Construa duas circunferências com auxílio de um compasso ou transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 4 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.</p>
<p><i>Alguns componentes ficaram um pouco confusos no início, mas logo após conseguirmos saciar-nos com a ajuda do professor. Todos nós conseguimos desempenhar alguma função, seja colando, desenhando, escrevendo ou refletindo. Logo conseguimos o de duas diagonais com sucesso.</i></p>
<p><i>Primeiro o professor nos apresentou o assunto, como fazer, como dividir, como recortar e como colar de acordo com o método de Arquimedes. Então nos fizemos os polígonos inscritos e circunscritos que foram orientados pelo professor, o primeiro foi o de quatro lados, cortamos e colamos numa cartolina, e formou ma figura parecida com um cilindro.</i></p>
<p><i>Desenhar quadrado com a régua, com o compasso fez um círculo por dentro do quadrado, traçou as diagonais e recortou. Por meio de uma discussão em grupo, para decidirmos a função de cada um. Foi decidido duas pessoas para traçar as diagonais, 2 pessoas para cortar e uma pessoa para registrar as respostas</i></p>
<p><i>Primeiramente foi traçado um raio de 7 centímetros na circunferência, logo depois foi feito um quadrado inscrito na circunferência. Após, foram traçados seguimentos de reta pela diagonal. A circunferência foi retirada da folha. Depois cortamos a diagonal</i></p>
<p><i>Através de conhecimentos prévios aplicados em sala de aula pelo professor Luis Carlos, aprendemos sobre o método de Arquimedes, o qual estamos praticando em sala. As etapas consistem no desenho + corte + colagem</i></p>

<i>em cartolina de dois círculos, sendo um sendo um inscrito e outro circunscrito, com o intuito de aproximarmos cada vez mais de um retângulo, figura geométrica de área já conhecida. No primeiro passo o círculo foi cortado em 4 partes.</i>
<p>Passo. 2</p> <p>Construa duas circunferências com auxílio de um compasso ou transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 6 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.</p> <p><i>Com poucas dúvidas fomos bem mais rápidos, sem muitos impasses, todos já sabia o que fazer. Ao olhar um pouco para o grupo, podemos ver que todos, auxiliam o trabalho para podermos achar uma forma mais simples de achar a área do círculo, a partir do método de Arquimedes. Assim com menos trabalho concluímos.</i></p> <p><i>Depois, usamos o processo de exaustão de Eudóxo foi usado anteriormente, traçamos as diagonais dos polígonos inscritos e circunscritos de 6 lados na circunferência. Após isso cortamos, agrupamos e colamos na cartolina e formou uma figura parecida com a um paralelogramo.</i></p> <p><i>Traçamos as diagonais, cortamos e colamos. Do mesmo modo que a circunferência foi inscrita em um polígono de 4 lados nós discutimos quem iria fazer qual função, então do mesmo modo da atividade anterior decidimos então separar 2 pessoas cortar, 2 pessoas para colar e uma para responder o exercício (anotações)</i></p> <p><i>Com o auxílio de uma régua, foi traçado diversas diagonais na circunferência. Recortamos na forma de um círculo e logo após no formato de vários triângulos. Por fim, colamos na cartolina com o intuito de formar outra figura.</i></p> <p><i>Neste segundo passo, o círculo agora é dividido e cortado em seis partes iguais. O objetivo é diminuir cada vez mais o tamanho das partes e cola-las de forma alternadas para que possamos chegar cada vez mais próximo de um retângulo.</i></p>
<p>Passo. 3</p> <p>Construa duas circunferências com auxílio de um compasso e um transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 12 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.</p> <p><i>Já sem dúvidas e quase automatizados ao trabalho de colar pois a essa altura já tínhamos desenhado e cortado todos, conseguimos ver que os grupos se empenhavam, pois alguns já tinham feito o seu trabalho, após discutirmos um pouco em relação a posição, concluímos com sucesso as seis diagonais.</i></p> <p><i>Depois usando ainda a estratégia adotada por Arquimedes nós traçamos as diagonais do polígono com 12 lados, cortamos agrupamos e colamos na cartolina e formou uma figura parecida com a de um retângulo.</i></p> <p><i>Traçamos as diagonais traçamos e colamos. Igualmente como foi feito no polígono de 6 lados, o polígono de 12 lados não foi diferente, a gente se reuniu e decidimos quem iria fazer tal função, de maneira análoga decidimos 2 pessoas para traçar e cortar as figuras e 2 pessoas para colar e por final uma pessoa para responder, escrever as anotações do momento de construção.</i></p> <p><i>Por meio da construção de figuras inscritas e circunscritas nos alunos aprendemos a cooperar uma com as outras e como uma imagem pode se transformar em várias outras.</i></p> <p><i>Aqui a figura, dividida já em 12 lados, assemelha a um paralelogramo, figura geométrica poligonal, que também já apresentava área conhecida, assim como o retângulo.</i></p>
<p>Passo. 3</p> <p>Construa duas circunferências com auxílio de um compasso e um transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 24 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.</p> <p><i>Já na última etapa, somente foi cansativo, pois bem fácil, já sabíamos e como sabíamos fizemos, faltou cola mais não atrapalhou, pois logo conseguimos novamente, e com sucesso conseguimos o de 12 diagonais.</i></p> <p><i>Por último, mas não menos importante o polígono de 24 lados, traçamos suas diagonais, cortamos, agrupamos, colamos na cartolina e percebemos que formou outro retângulo só que mais bem feito, mais parecido com o retângulo. Percebemos que quanto mais diagonais o polígono tem, mais se aproxima de um retângulo ele fica quando recortamos, agrupamos e colamos suas diagonais.</i></p> <p><i>Traçamos as diagonais, cortamos e colamos. Concordamos com a questão anterior quando fizemos o passo com o polígono de 12 lados. Por meio de uma discussão em grupo decidimos a função de cada representante, e ficou 2 pessoas para cortar e traçar as diagonais e ao final todos nos colamos as figuras cortadas.</i></p> <p><i>Na circunferência circunscrita por um polígono regular de 24 lados foi traçado várias retas exatamente no centro e então cortados vários triângulos, que então foi colado na cartolina e formou uma imagem que nós alunos, achamos aproximar de um retângulo.</i></p> <p><i>Nesta fase, que, para nós, é a última, o círculo foi dividido em 24 partes e é a que mais se assemelhará a um retângulo. Agora podemos fazer como Arquimedes e usar a área do retângulo, que é a soma dos triângulos (suas áreas). O círculo também é a soma dos triângulos, já que foi dividido neste polígono. Podemos dizer que temos a área do círculo.</i></p>

<p>Passo. 4</p> <p>Se a cada passo, você dividir o círculo dobrando o número de setores, ao tornar a quantidade de passos muito grande a quantidade de setores tenderá para o infinito, assim, obterá triângulos isósceles de base infinitesimal e altura igual ao raio do disco. Facilmente, perceberá que a área do círculo é igual a soma das áreas dos triângulos (setores). Descreva formalmente, em discussão com os colegas do grupo, como ocorre esse processo, usando linguagem matemática que conhece.</p> <p><b>Sugestão:</b> Intuitivamente, e em reflexão coletiva, lançando mão do conhecimento da área do quadrilátero formado com esses infinitos triângulos, deduza a expressão que determina a área limitada pela circunferência (círculo) na qual o polígono está inscrito e circunscrito.</p>
<p><i>Ao terminar alguns círculos percebemos então o propósito de nosso raro esforço, ao transformarmos o círculo em uma outra figura plana, conseguimos através da mesma, achar a área do círculo como mostrado mais abaixo.</i></p> 
<p><i>Nós fizemos a construção de um retângulo a partir de polígonos inscritos e circunscritos. Depois descobrimos multiplicando a base do retângulo por sua altura encontramos a relação entre a área da circunferência <math>\frac{2\pi r}{2} \cdot r</math> e a área do retângulo continuando o cálculo <math>A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r \rightarrow A = \pi r^2</math></i></p>
<p><i>De início resultou numa discussão do que seria o raio e o que seria o comprimento, em seguida chegamos a conclusão que a base e metade do quadrilátero e a altura seria o raio. Por fim chegamos a conclusão que a área deve ser medida <math>\left[ \frac{\text{comprimento}}{2} \cdot \text{raio} \right]</math> ou <math>\frac{2\pi r}{2} \cdot r</math>, cortando os números iguais obtemos <math>\pi r^2</math>.</i></p>
<p><i>Em reflexão com os colegas e ensinamentos do professor chegamos a conclusão que a figura se assemelha a um retângulo, o qual sua base representa a soma dos lados dos triângulos e ao desenvolver chemoas a área do retângulo que é igual a área da circunferência.</i></p>
<p><i>A partir da análise feita pelo grupo, foi possível observar que a planificação forma um retângulo em que a altura (h) é o raio e a base representa a circunferência (<math>2\pi r / 2</math>), pois é a metade dela.</i></p>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Partindo das anotações dos grupos, percebemos que a atividade possibilitou um pensamento de construção sequenciado, compartilhamento de ideias, divisão de responsabilidade, cooperação na construção do conhecimento matemático, discussões sobre os conceitos envolvidos nas atividades conectadas às informações históricas, oportunizando aos alunos perceberem que as dificuldades apresentadas no início das atividades foram sendo sanadas ao passo que avançavam nas discussões, assimilação e familiarização do método da exaustão aplicado por Arquimedes para estudo das medidas do círculo.

Miguel e Miorim (2011) sugerem que as dificuldades encontradas historicamente para solução de problemas pelos quais estudiosos, dentre eles, célebres personagens que se destacaram na área da Matemática, são dificuldades semelhantes às encontradas em sala de aula. A percepção dos alunos pode mudar quando se depara com métodos constituídos historicamente.

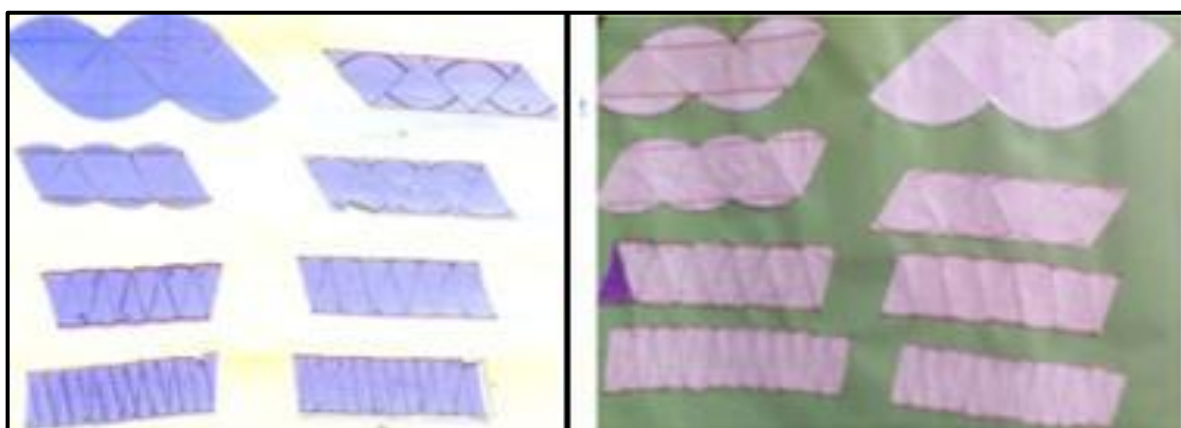
É importante ressaltar que os alunos estavam cientes que alguns elementos do círculo, tais como o próprio número  $\pi$ , ganhou essa forma posteriormente, com associação a uma letra do alfabeto grego, porém, é usual e esperado que eles manipulem esses valores e simbologia,

pois, já se é conhecido, e presumimos que no ensino tradicional os alunos são engajados a apresentar com pressa seus resultados.

Os resultados obtidos nessa atividade apresentam a relação da História da Matemática com os conteúdos ministrados, mostrando que os conhecimentos produzidos ao longo dos séculos servem de suporte para o ensino e aprendizagem, se houver um planejamento coerente com a turma e com os conteúdos programados. Chamamos a atenção para a realidade exercida em sala de aula, das leituras e releituras dos registros escritos dos alunos, destacamos a evidência de aulas tradicionais no decorrer dos anos letivos, isto nos remete a reflexão sobre esta atividade e outras semelhantes, caso não seja levado aos alunos de forma prática e investigativa, provavelmente, pouco contribui para o processo de construção e internalização de conhecimentos matemáticos.

Após a construção das figuras reproduzindo uma parte do método de determinação e medidas do círculo de Arquimedes e manipulação de instrumentos de desenhos, os alunos sujeitos de pesquisa, passaram a colagem em uma cartolina das seções circulares construídas, unindo as laterais das figuras (raios) de forma a construir uma outra figura. Nesse ponto, destacamos que não se falava sobre área de figuras. Destaca-se aqui o entrosamento, as habilidades dos alunos em manuseios, as perguntas e indagações que faziam a todo momento, esse é um processo singular, de construção de próprio conhecimento, onde os alunos obtém autonomia, e o professor guia um caminho estratégico que possibilite criatividade e tomada de decisão por parte dos alunos.

FIGURA 6 – Elaboração dos alunos



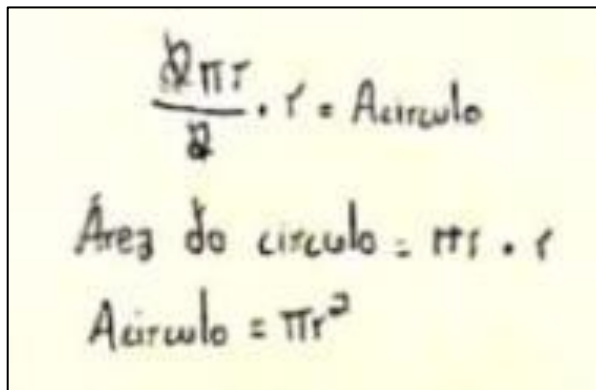
Fonte: A partir dos registros dos alunos (2022)

As construções orientadas pelo professor pesquisador da atividade geraram reflexões, ações, compartilhamento de ideias, tomada de decisões, erros, reelaboração, sequência de



pensamentos, acertos e inferência da área do círculo, possibilitando manipulações algébricas que culminou na expressão  $\pi r^2$  como mostrado na figura 9.

FIGURA 7 - Inferência da expressão da área do círculo através do método de Arquimedes



The image shows a handwritten derivation of the area of a circle. It consists of three lines of text on a yellow background:

$$\frac{2\pi r}{2} \cdot r = A_{\text{circulo}}$$
$$Área do círculo = \pi r \cdot r$$
$$A_{\text{circulo}} = \pi r^2$$

Fonte: A partir dos registros dos alunos (2022)

Ao término dos passos percorridos realizando construção, recorte, manipulação e reordenamentos, os discentes perceberam que a figura plana manipulada tenderá cada vez mais a forma de um retângulo, descrevendo que a figura passa a se assemelhar a uma figura retangular, a partir da conseqüente subdivisão dos círculos em setores semelhantes. Intuíram que a área do suposto retângulo é igual a área do referido círculo original e usando o conhecimento de área do retângulo, chegaram a expressão da área do círculo  $\pi r^2$ , ressaltando que presenciamos uma vibração de prazer no momento da descoberta nos grupos ao perceberem a elaboração construída por eles próprios, isso pode ser confirmado ao fazer a leitura das respostas dos questionários de validação dos Quadros 12 ao 15.

Os conteúdos presentes nos livros didáticos carecem de busca em fontes que apresentem informações produzidas no passado que dão sentido aos conteúdos ministrados atualmente. Entendemos que o ensino alicerçado na construção histórica da Matemática produzida sobre o contexto cultural, sociopolítico e econômico, possibilita aos alunos compreensão das ideias geradoras dos conhecimentos matemáticos (MENDES, 2015).

A atividade investigativa proposta possibilitou a recriação do método de Arquimedes impactando na compreensão dos alunos, onde os envolvidos refletiram sobre as estratégias de construção do conhecimento matemático, compreendendo e construindo o método histórico, por intermédio da ação na execução dos passos elaborados para desenvolvimento da atividade, ultrapassando abordagens praticadas em sala de aula que simplesmente apontam nomes, datas e locais sem provocar o pensamento em busca do processo de construção dos conhecimentos matemáticos.

Já no 3º momento, de início, dois grupos ficaram confusos sobre as atividades propostas, necessitando das orientações do professor para que pudessem colocar os

conhecimentos do método de Arquimedes em construção, os demais grupos não necessitaram desta intervenção, e no decorrer das construções, os grupos evidenciaram a cooperatividade na construção das atividades, distribuição de responsabilidades, envolvimento dos membros sem necessidade de interferência do professor, discussões em pontos importantes enquanto desenvolviam os passos de construção, reflexão em grupo, tanto nos cuidados estratégicos nos devidos cortes dos desenhos por eles feitos, como nas manipulações das partes pra entender a figura a qual tendia ao progredir nas etapas de construção.

### **5.3 Sobre o questionário de validação**

Os estudantes foram convidados a responder quatro questões subjetivas sobre a experiência vivenciada durante a atividade didática com a finalidade de que eles avaliassem todo o processo experienciado, desta análise, apresentamos uma síntese das respostas dos alunos que: a atividade foi bem descontraída e divertida, na intensidade no ensinar e aprender reinou a empolgação, motivou o aluno a tentar refletir e aprender de forma mais lógica e construtiva as fórmulas que envolve o círculo e circunferência, foi dado sentido aos assuntos que eles já tinham estudado e que simplesmente replicavam e não entediavam os porquês, acharam as atividades dinâmicas que de certa forma tirou-os do tradicional, método aplicado pelos outros professores.

Dos registros escritos nos questionários de avaliação da atividade, expomos as seis primeiras respostas entregues, como já mencionado, caso tivéssemos escolhido seis outras respostas, o resultado final não seria alterado, devido o fato de que as respostas apresentaram as mesmas características, e que foram respondidos individualmente, argumentando sobre aplicabilidade, contribuição da atividade investigativa para o ensino e aprendizagem da Matemática, interesse em conhecer outros conteúdos através de abordagem semelhantes e sugestões para melhoria da proposta desenvolvida, possibilitando ao pesquisador a reelaboração e adaptação dos procedimentos realizados, assim possibilitando ao pesquisador, a eficácia na proposta didática.

Consideramos todos os questionários validados, e com efeito de transparência, apresentamos, nos Quadros 12 ao 15, as seis primeiras respostas entregues e nossos respectivos entendimentos, fizemos a leitura detalhada das 26 respostas e expomos comentários sobre o que foi informado, continuando o tratamento de dados em nossa discussão sobre as atividades aplicadas.

#### QUADRO 12 - Respostas da primeira questão do questionário final

01. O que você achou sobre a atividade desenvolvida através do método histórico de determinação de medidas do círculo de Arquimedes?
--

<i>Foi uma atitude boa que de certa forma nos tira do tradicional método aplicado pelos outros professores é mais teoria e nessa atividade tivemos contato direto com as figuras que nos divertiu aprendendo de certa forma.</i>
<i>.A atividade desenvolvida foi interessante, nos mostrou um método que eu não conhecia. Me trouxe conhecimento também como a matemática surgiu e se desenvolveu.</i>
<i>o uso dos métodos em sala propostos pelo professor foi excelente, bem trabalhado e muito lucrativo, pois entendemos como a matemática se desenvolveu e chegou ao ponto que nós conhecemos e usamos.</i>
<i>A atividade estimulou os nossos pensamentos de forma diferente, por ter sido mais dinâmica e intuitiva. Também foi extremamente importante para a atividade e aprendizado de maneira além do que estamos acostumados diariamente em sala de aula.</i>
<i>Uma ótima atividade que nos motivou a tentar refletir e tentar entender de uma forma mais lógica sobre assuntos que nós já vimos antes, mas simplesmente fazíamos mas nunca entendíamos o porquê.</i>
<i>Achei legal, pois com a explicação do professor, os exemplos, com o conteúdo ministrado foi possível adquirir conhecimento que não sabia, pois geralmente a gente aprende apenas as fórmulas sem saber a origem da fórmula apresentada, e com a atividade desenvolvida, podemos aprender profundamente o método de Arquimedes.</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Os alunos compreendem que a atividade da aula apresentada fugiu do tradicional, pois a realização das etapas exigia dos alunos reflexões sobre a exploração do método de Arquimedes, que muitos afirmaram não conhecer e que esse conhecimento adquirido causou entendimento do surgimento e desenvolvimento da matemática acerca das medidas do círculo e ao propor o uso de materiais manipuláveis, promoveu, segundo os alunos, as características de: interações dos alunos, troca de conhecimento, aula proveitosa, lucrativa, criativa e que o caminho tomado levou a descoberta de fórmulas, construção de seu próprio conhecimento matemático e elaboração formal de suas conclusões.

Destacamos que essa atividade deve ser promovida diante de uma aula de Matemática e que a História da Matemática se apresenta com a abordagem de um método extraído de fatos históricos pré-estabelecidos como verdadeiros na literatura. Uma aula ou atividade que envolva a História da Matemática deve ser um empreendimento que faça o professor conhecer aspectos na História que podem ser problematizados, como ocorre com o método de Arquimedes para determinação da área do círculo, que é problematizado para ser reproduzido com auxílio de materiais concretos e criatividade nas execuções dos passos.

QUADRO 13 - Respostas da segunda questão do questionário final

<b>02. Você considera que atividades como estas podem contribuir para seu aprendizado em Matemática?</b>
<i>Sim, ajuda principalmente com pessoas que possuem muita dificuldade. Na prática é bem melhor de entender e explorar o conhecimento e capacidades mentais de raciocínio.</i>
<i>Sim, pois quando os conceitos são colocados em prática sua aprendizagem é facilitada e absorvida mais rapidamente.</i>
<i>Sim, pois com as explicações da forma como esses métodos foram desenvolvidos e descobertos é bem melhor para o aprendizado da matemática, pois entendemos não só como usar o matemática mas sim como ela se formou.</i>
<i>Sim, pois a matemática se dá através do ensino de teoria com prática, a qual é essencial para o entendimento pleno dos conteúdos. A atividade desenvolvida trouxe estas duas propostas, tornando o nosso aprendizado mais dinâmico e produtivo do que normalmente seria.</i>
<i>Sim, normalmente quando um assunto é passado, a orientação é você simplesmente aprender as fórmulas e executados ao realizar as questões, mas nunca entendemos o motivo de ter que usar tal fórmula.</i>

*Sim, pois quando nos aprofundamos em certos assuntos muitas vezes o interesse cresce muito mais e assim podemos ter um conhecimento maior, ou seja, aprender desde o começo da história é mais proveitoso, pois o conhecimento é mais formulado.*

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Declaram que em aulas práticas (nesse caso aulas manipulativas) é bem melhor de entender os conceitos, explorar os conhecimentos e capacidades lógicas de raciocínios, e facilita a absorção do conhecimento mais rapidamente, promove a inclusão, a dinâmica trouxe abrangências de entendimento matemático em discussão, justificando as fórmulas utilizadas e em geral, notaram que esta estratégia ajudou os alunos, incluindo os que possui dificuldades, a entender mais rápido os conteúdos em abordagem.

Para que tenhamos êxito em atividades com base em atividade didáticas investigativas pautadas na História da Matemática e no uso de materiais concretos, é fundamental que o professor apresente algum conhecimento sobre contextos históricos que possam embasar o conceito ou conteúdo matemático a ser estudado.

QUADRO 14 - Respostas da terceira questão do questionário final

03. Quais conteúdos matemáticos ou personalidades matemáticas você teria curiosidade de reconhecer fatos históricos?
<i>Pitágoras, Euclides Henri, Arquimedes e Isaac Newton.</i>
<i>Eudóxo, Arquimedes, e Pitágoras, pois eles parecem ter sido de suma importância para a história da matemática.</i>
<i>Seria interessante contar a história de Pitágoras e como ele desenvolveu os seus métodos, como ele descobriu essa descoberta e seus meios de estudo.</i>
<i>Como nesta experiência obtivemos conhecimentos sobre acerca de Arquimedes, gostaria de saber mais sobre Pitágoras, Aristóteles e platão.</i>
<i>Sinceramente eu gostaria de saber mais profundamente sobre Pitágoras, mas especificamente sobre sua vida e algumas outras curiosidades não tão conhecidas da matemática e também um pouco sobre a vida e Eudóxo.</i>
<i>Pitágoras, por ser um grande matemático que fez muitas coisas na história da matemática. Eudóxo por ter sido um dos primeiros e a partir dele e de outros Arquimedes aprofundou seus estudos.</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Na aula expositiva que antecedeu a aplicação da atividade de pesquisa, foi explanado sobre alguns matemáticos antigos que contribuíram para a Matemática como é conhecida hoje e discutido sobre algumas de suas contribuições. Ao indagar aos alunos sobre quais conteúdos matemáticos ou personalidades matemáticas que eles teriam curiosidade de reconhecer, curiosamente delimitaram suas respostas no que foi discorrido em sala, fato este que transmite a limitação de conhecimento de personalidades importantes. É nesse ponto que defendemos ainda mais nosso ponto de vista de que evidenciar caminhos percorridos pela Matemática, no que diz respeito ao seu desenvolvimento histórico e evolutivo permite e oportuniza a alunos e professores a mudança de percepção de que a Matemática é uma disciplina difícil e constituída apenas por métodos, regras e aplicações vazias.

Ainda se percebe que os alunos remetem ao desenvolvimento da Matemática, talvez como um todo, a sempre os mesmos personagens, e mais sobre aspectos da Geometria, tais

como Pitágoras, Euclides, Eudóxo, Arquimedes, esse fato pode se dever pelo fato de no ensino de Matemática não ser tão comum essa exploração com viés histórico, fazendo com que os alunos se restrinjam a nomes mais comuns de personalidades da Matemática na História, fragmentando e até mesmo comprometendo o entendimento do surgimento, desenvolvimento e dos matemáticos que contribuíram para esses conhecimentos estudados em sala de aula.

Essa pergunta também surge como pensamentos futuros para novos estudos e investigações e até mesmo refutações, adaptações e inserção de pontos que elevem a eficácia da atividade didática.

QUADRO 15 - Respostas da quarta questão do questionário final

04. Deixe seus comentários e sugestões acerca das atividades que foram realizadas.
<i>Eu acho que a atividade aplicada foi muito bem elaborada e sugiro que mais assuntos sejam abordados dessa maneira.</i>
<i>Trouxe muito conhecimento, aprendizagem e a atividade prática foi muito divertida. Aprender novas coisas é sempre muito bom.</i>
<i>O meio que as atividades foram ministradas foi muito interessante, pois saímos da matemática aplicada e fomos descobrir como as fórmulas e métodos que utilizamos foram descobertos. Assim as aulas foram bem intuitivas e prazerosas com a ajuda de todos.</i>
<i>A persistência e dedicação na realização das atividades foi essencial para o desenvolvimento pleno dos exercícios, bem como também do entendimento da teoria dos conteúdos. Sugiro que continue com as atividades propostas.</i>
<i>As atividades desenvolvidas nos ensinou alguns motivos por usarmos tais fórmulas, e como uma coisa leva a outra. Como aluna sugiro que a atividade como esta que foram aplicada, nos motiva a solucionarmos certos cálculos então entendo que se todos os professores adotassem esses métodos antes de explicar novos assuntos seria bem melhor nosso entendimento.</i>
<i>As atividades foram ministradas de forma maestrosa e muito proveitosa, além de estimular o trabalho em grupo. Deixo como sugestão mais aulas como essa, pois gera muito conhecimento, estimulando o aprendizado mais detalhado sobre matemática.</i>

Fonte: Elaborado a partir das respostas do questionário (2022)

Ficou claro nos manifestos dos alunos que a conjuntura da proposta apresentou-se com planejamento adequado, conduzindo-os desde a introdução dos passos de Arquimedes, vivenciando a reconstituição e chegando na formalização das medidas no que se refere a circunferência e círculo, cabendo destaque, a participação de todos os alunos sem que houvesse a necessidade da interferência do professor, percebemos que as aulas práticas realizadas atraíram a atenção, estimularam o aprendizado e mergulharam o alunado em um mundo de descobertas no campo da Matemática, através das manipulações e investigações compartilhadas, degustando o prazer ao estudar os conteúdos programados.

As escritas dos alunos nos fazem entender que aulas organizadas de maneira sistemática, que fogem do tradicional, partindo do conhecimento prévio e desenvolvidas considerando o contexto histórico dos conteúdos e do uso de materiais concretos pode tornar o processo de ensino e aprendizagem Matemática atrativo, favorável à criatividade de seus pensamentos de forma construtiva.

A utilização dos questionários, observações, registros, expressões verbais e produção de imagens foram fundamentais para nossa investigação. Concentramo-nos no desenvolvimento das atividades sobre a utilização da história da matemática, construção e manipulação dos materiais concretos em sala de aula, da organização e análise das palavras e frases, e destas evidências, geração de dados riquíssimos em informações que nos leva a identificar as contribuições para o ensinar e aprender, decorrido da realização da atividade didática, assim, posicionando a história da matemática aliada ao uso de materiais concreto como vetor facilitador para o processo educacional.

Os procedimentos desta pesquisa de dissertação na qual evidenciam a experiência investigativa e prática, orientada pelo pesquisador exibe que as informações históricas aplicadas e aprendidas em sala de aula apresentam progressivamente contribuições para o ensino e aprendizagem da matemática, pois a aplicação da atividade explorando o método de Arquimedes promoveu engajamento, motivação e geração do conhecimento matemático sobre as medidas do círculo.

Enfatizamos, que os alunos expõem, que normalmente, quando um assunto é ensinado nas aulas regulares, a orientação é que eles simplesmente decorem as fórmulas e executem na resolução de questões, não ocorrem discussões sobre origem e desenvolvimento, não evidenciam as personalidades que contribuíram com os saberes discutidos, não destacam a importância dos conteúdos ensinados para a humanidade e nem para a ciência, já em nossa atividade, compreendemos que contemplamos estimular pensamento lógico dedutivo de forma sequenciada, dinâmica e intuitiva, da leitura do processo de realização dos passos da atividade percebemos como momento carregado de criatividade e aprendizado de uma maneiras além do que eles estão acostumados em sala de aula.

Ainda percebemos, através dos olhos dos alunos, que o ensino e aprendizagem abordados na sua completude, apoiado na história da matemática associado ao uso de materiais concretos e manipulados em aulas prática é mais proveitoso, pois o conhecimento é aprendido com compreensão e o aluno é envolvido ao processo de investigação matemático, e ao tom de entusiasmo e prazer, afirmam que entenderam como chegar as medidas que fazem parte da circunferência e círculo por meio do uso do método de Arquimedes e que até então não conheciam, e por fim, deixam como sugestão que os professores adotem em seus planejamentos pedagógicos, aulas que contemplem o contexto histórico dos conteúdos e além disso, aulas práticas, pois gera muito conhecimento, estimula o aprendizado de forma ampla e profunda sobre matemática

Dos desenvolvimentos dos passos da atividade e escritas dos alunos, julgamos que entender o surgimento e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos responde a vários questionamentos importantes para o avanço da aquisição dos conceitos e aplicações no mundo real: onde surgiu? Por que surgiu? Quais matemáticos contribuíram? É aplicável no mundo real? O quanto é importância para o desenvolvimento da ciência?

No entanto, consideramos que aulas ministradas com adição de momentos experimentais de investigação dos conceitos matemáticos, partindo de informações históricas sobre os conteúdos e uso de materiais manipulativos pertinentes à cada tópico é mais proveitoso, estimula o trabalho cooperativo resultando em saberes detalhados dos conteúdos matemáticos investigados, permitindo que os alunos apreendam conceitos para chegarem às determinações necessárias.

Como consequência do que apresentamos, entendemos que experiências didáticas apoiadas em informações históricas auxiliadas com a construção e manipulação de materiais concretos possibilitam um ensino com mais compreensão sobre o que é a Matemática e motivação na aprendizagem que se manifesta nos alunos envolvidos através do interesse em participar e interagir demonstrando de forma individual e em grupo, entendimentos dos conceitos trabalhados.

#### **5.4 Evidenciando algumas contribuições**

Engajado a responder ao problema de pesquisa e atingir nossos objetivos, acalentando nossas inquietações e oferecendo uma proposta de ensino inovadora baseada em metodologias que utilizam História da Matemática correlacionada e alinhada ao uso de materiais concretos, apresentamos algumas contribuições pertinentes à exploração do método histórico de Arquimedes para determinação e medidas do círculo por meio de uso de materiais concretos. Apontamos que essas contribuições emergem sobre nossas leituras e análises sob as quais nos referimos à Bardin (2016) que possibilitou que elencássemos como contribuições partir de características observadas nas respostas dos questionários e dos registros escritos das atividades dos alunos.

A análise de conteúdo nesta pesquisa serve para dar viabilidade à atividade aplicada aos alunos e adoção da perspectiva teórica que adotamos. Nesse sentido, as contribuições que emergem dessa leitura sobre o que foi apresentado, giram em torno do uso de métodos históricos como desafios matemáticos, compreensão do aspecto evolutivo da Matemática, aliança com uso de materiais concretos na reprodução de métodos, novas elaborações de perguntas pelos

alunos e professores, incentivo à pesquisa, apelo interdisciplinar, envolvimento de outros conteúdos matemáticos.

- O uso de métodos históricos possibilita investigações na forma de desafios aos alunos em atividades criteriosamente pensadas, permitindo que os alunos e professores compreendam que a matemática muda e se desenvolve ao longo do tempo.
- O uso de métodos históricos permite o professor se debruçar sobre a evolução histórica de um conceito perpassando por construções de outros conteúdos, tendo em vista, o esclarecimento dos conceitos que estão sendo ensinados
- Perceber que a aliança entre a História da Matemática e Materiais Concretos pode ocorrer de diversas maneiras em diferentes níveis de ensino e associar diferentes repertório de materiais a depender dos objetivos criados para o ensino;
- A reprodução de métodos históricos com objetivos pré-estabelecidos em sala de aula favorece a visão e a percepção de que a Matemática não é pronta e acabada, pois provoca a reflexão sobre as indagações práticas ou abstratas na construção do conhecimento matemático das diferentes culturas em diferentes momentos históricos.
- Os métodos históricos conduzem à problemas e soluções através das habilidades matemáticas desenvolvidas por nossos antepassados, descortinando as contribuições históricas para a matemática praticada na atualidade.
- No trabalho com materiais concretos associado ao uso da História da Matemática, diversos conteúdos matemáticos podem ser trabalhados dependendo da estratégia didática adotada;
- Os materiais concretos trabalhados em atividades matemáticas mediadas pela História da Matemática permitem visualização e manipulação de formas, quantidades, formatos, criação de sistematizações, representações e esquemas;
- Aperfeiçoa os planejamentos dos professores e intensifica a participação dos alunos nas ações criativas individual e/ou coletiva na exploração, pesquisa e entendimento de informações históricas para apropriação e consolidação do conhecimento matemático proposto em discussão na atividade investigativa;
- Ajuda a acalantar as inquietações e elaborar soluções pertinentes às problematizações dos alunos o que possibilita a formulação de ideias, criação de estratégia de pensamento, uma vez que, para essa atividade não apresentamos



fórmulas, e sim, provocamos os alunos a pensar, construir, manipular, compartilhar suas reflexões e entendimento, gerando discussões e gradativamente organizando seus pensamentos sequenciadas e lógica, e conseqüentemente, proporcionando a formalização do conhecimento matemático raciocinado e entendido com compreensão.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que nossa pesquisa responde à pergunta inicial desse estudo “Quais contribuições a História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo podem oferecer para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio?” de forma que elenca nove contribuições didáticas acerca do uso da História da Matemática aliada a materiais concretos no ensino de Matemática, enfatizando a abordagem didática que diz respeito à exploração de métodos históricos em sala de aula, mais especificamente o método de Arquimedes para determinação de medidas do círculo.

Consideramos também que atingimos os objetivos, pois exploramos o contexto histórico sobre a Geometria de Arquimedes, elaboramos e desenvolvemos uma atividade didática que se utiliza de materiais concretos para resolução do que é proposto por meio da metodologia da investigação histórica no ensino de Matemática. A atividade didática investigativa foi planejada tomando como base Mendes (2009). Utilizamos por meio dos instrumentos de produção de dados a aplicação de dois questionários (inicial e final), diário para observações e anotações do pesquisador nos momentos em sala o que possibilitou a organização e categorização de acordo com as significações das palavras e frases percebidas nas leituras dos dados para elucidar as contribuições que almejamos identificar, possibilitando a identificação e evidências das contribuições positivas no campo da Educação Matemática.

Para tanto, realizamos a pesquisa e elaboramos aula expositiva para que nossos investigados compreendessem o desenvolvimento histórico da matemática e, em específico, sobre o método de Arquimedes de Siracusa (287 a. C – 212 a.C.) para determinar a expressão da área do círculo.

Desenvolvemos na atividade didática a História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos para o ensino de medidas do círculo de Arquimedes e realizamos leituras e releituras dos dados empíricos, organizando, analisando e agrupando informações com mesma ideia e sentido, para a identificação de possíveis contribuições sobre o uso de materiais concretos aliados a uso da História da Matemática por meio da exploração do método de Arquimedes.

Na revisão bibliográfica efetivada, consideramos que ainda são poucos os trabalhos publicados sobre História da Matemática que fazem uso de materiais concretos associados ao ensino de Matemática na produção de atividades e propostas didáticas. Assim, se fazem necessários esforços de professores e pesquisadores para o desenvolvimento de novas produções que possibilitem criação de estratégias didáticas nesse mesmo formato.

Defendemos que o uso de materiais concretos associados à História da Matemática no desenvolvimento de atividades didáticas possibilita a investigação, a descoberta, o desafio, a evolução da criatividade em meio a processos investigativos e manipulativos com professores e alunos em sala de aula. Em todo caso, informamos que esse trabalho não para por aqui, conteúdos tais como sistema de numeração, escalas, trigonometria, o volume e tronco de pirâmides, a origem dos números irracionais, números complexos e sua formulação, poliedros regulares, a duplicação do cubo etc., se utilizam de métodos históricos produzidos em diferentes épocas e podem ser explorados na Educação Básica com auxílio de materiais concretos em combinação com outras estratégias de ensino.

Durante o desenvolvimento da atividade proposta, percebemos que atividade de ensino apoiada em História da Matemática associada ao uso de materiais concretos movimentou os alunos de forma espontânea em busca do conhecimento em pauta, levantando discussões e compartilhamento de ideias, características que prevaleceram em todos os momentos de sala de aula. O envolvimento dos alunos, promoveu debates, obedecendo o ordenamento dos passos em torno do método de Arquimedes, viabilizando engajamento nas atividades, superação de dificuldades, sequência de pensamentos lógico-dedutivos, e assim, tornando o processo de ensino interessante e agradável tanto para quem ensina, quanto para quem aprende.

Consideramos ainda que a metodologia didática aplicada na pesquisa promoveu um processo de ensino e aprendizagem mais atrativo, investigativo, envolvente, criativo, significativo, e assim, concedendo ao alunado, motivação suficiente para torná-lo voluntariamente, ativo no processo, com desejo de se atualizar, ampliar e sistematizar seu olhar e pensar sobre os saberes matemáticos, e neste caso, desenvolveram aprendizagem sólida sobre as medidas do círculo, vida e obra de Arquimedes.

Como sugestão e contribuição para outros professores e pesquisadores que ensinam matemática, disponibilizamos nossa proposta didática planejada, aplicada e validada juntamente com um grupo de alunos, para que possam desencadear novas ideias na elaboração e inserção de estratégias pedagógicas que podem ser alinhadas às tendências de ensino em Educação Matemática como modelagem, Informática Educativa, Etnomatemática, Jogos matemáticos, dentre outras, pois, acreditamos que essas propostas e/ou outras estratégias de ensino associadas as informações históricas e uso de materiais concretos ou não, em outras salas de aula são de suma importância para a formação matemática dos estudantes e para a ampliação do desenvolvimento conceitual dos professores e de alunos acerca de processos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Bruno Oliveira de. **O Princípio de Arquimedes Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer**: Cálculo do Volume de Sólidos Quaisquer. 37f, 2020 Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande/RS, 2020.

AMORIM, Francisco Reginaldo Roberto. **A utilização do recurso da história da matemática para facilitar a assimilação de alguns conteúdos** 2014. 61f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semiárido – UFRS, Mossoró, 2015.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto; Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Maria João Alvarez. Porto: Porto, 1994.

### **BOLETIM CEARENSE DE EDUCAÇÃO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:**

BOCEHM. Revista. Universidade Estadual do Ceará. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/>. Acesso em: 10 mar. 2022.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 2. ed. trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BORGES, Kleber Alves. **Arquimedes e Polya em sala de aula** 2020. 89f. Dissertação - (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT, Cuiabá, 2020.

### **BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasil, 2018.**

Disponível em:

[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).

Acesso em: 22 mar. 2022.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Educação Matemática: um ensaio sobre concepções que sustentem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, Cláudia Regina; CASSIANI, Suzani. **Tendências contemporâneas nas pesquisas em Educação Matemática e Científica**: sobre linguagens e práticas culturais. (Orgas.). Campinas: Mercado das Letras, 2013. Página 17 a 40

D`AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus. 2009.

D`AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DIAS, Vandenberg Gouveia. **Quadratura**: da antiguidade à atualidade 2014. 56f. Dissertação (Mestrado em matemática). Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, Campina Grande, 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FIorentini, D., Miorim, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de Matemática. **Sociedade Brasileira em Educação Matemática**, ano 4, n. 7, 1990. Disponível em: [http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012\\_curso\\_47\\_e\\_51\\_-\\_matematica\\_-\\_emersom\\_rolkouski\\_-\\_texto\\_1.pdf](http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf). Acesso em: 22 mar. 2022.

GARBI, Gilberto **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo a matemática. 5. ed. Ver. E ampl.- São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C. Q. D.**: teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Livraria de Física, 2010.

GERVÁZIO, S. N. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa.

C.Q.D.– **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 9, p. 42-55, jul. 2017.

Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/>. Acesso em: 27 nov. 2022.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**.4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRUDTNER, Guilherme Luiz; BERTATO, Fábio Maia: **A Medida do Círculo**: Uma tradução do texto KYKΛΟΥ METPHΣΙΣ de Arquimedes 2020. **Revista brasileira de história da matemática**, Cidade, v. 21, n. 42, p. 1–13, 2021. Disponível em:

<http://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/354/321>. Acesso em 22 mar. 2022.

GUERRA, Adriano. DIFERENTES METODOLOGIAS DE ENSINO NA MATEMÁTICA: EXPECTATIVA X EXPERIÊNCIA EFETIVA. **Práxis Educacional**, [S. l.], v. 15, n. 35, p. 20-41, 2019. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/5657>. Acesso em: 27 nov. 2022.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LAUNAY, Mickael. **A Fascinante História da Matemática**: Da pré-história aos dias de hoje. Trad. Clóvis Marques; Rev. Anna Maria Sotero. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2021.

LIMA, Jeroncio Fernandes de Oliveira. **A história da Matemática como Alternativa Didática**: uma coletânea de atividades 2016. 79f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA. Mossoró-RN, 2016.

LORENZATO, Sérgio – **Para aprender matemática**/Sergio Lorenzato. 3 ed. Rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de Professores)

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção Formação de Professores).

LUZETTI, Fabiano Donizeti da Silva. **Figuras Circulares**: uma atividade envolvendo perímetro e Área do Círculo 2013. 80f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos – UFSCar. São Carlos – SP. 2013.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Educação: alegorias, tecnologias, jogos e poesia**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. (Coleção questões da nossa época)

MENDES Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Coleção História da Matemática para Professores)

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História da matemática em sala de aula: proposta para integração aos conteúdos matemáticos**-São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática para o ensino)

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores: Sociedade Brasileira de História da Matemática** Belém, 2016.

MENDES, Iran Abreu; Farias, Carlos Aldemir. **Práticas socioculturais e Educação matemática**. 1. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.- (Coleção contextos da ciências).

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática)

PEREIRA, Ana Carolina Costa; VASCONCELOS, ....., **Educação matemática no Ceará: os caminhos trilhados e as perspectivas**. Ana Carolina Costa Pereira (org). - Fortaleza: EdUECE, 2015.

NAVARRO, Eloisa Rosotti; SOUSA, Maria do Carmo de. **Educação matemática em pesquisa** (livro eletrônico): perspectivas e tendências: volume 1/organizadores Eloisa Rosotti Navarro, Maria do Carmo de Sousa. – Guarujá, SP: científica digital, 2021.

OLIVEIRA, Francisco Wagner; NOGUEIRA, Raniele Sampaio. A presença da história da matemática nos livros didáticos do novo ensino médio. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 76-88, 2022. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8026/6812>. Acessado em 28 nov. 2022.

**REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – RBHM.**

Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/rbhm>. Acesso em: 20 mar. 2022.

RODRIGUES JUNIOR, Antônio; LÜBECK, Marcos: A História como Ferramenta de Ensino dos Números 2020. 19f. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – Volume 07, Número 21, 25 – 43, 2020. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/ad2a/9d35dc95d80dc535d0b652e3a73fe8bb35bb.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2022.

RODRIGUES, Laécio Silva. **Teoremas mecânicos**: A versão de Arquimedes para o cálculo 2018. 58f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão – UFMA. São Luís, 2018.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: m.Books Brasil , 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, Fumikazu. História da matemática e suas (re)construções contextuais / prefácio de Ubiratan D'Ambrosio . – São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, F. CONSTRUINDO INTERFACES ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DA MATEMÁTICA. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 3, n. 1, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002>. Acesso em: 29 nov. 2022.

SILVA NETO, Benjamim Cardoso da. **Criatividade didática em dissertações e teses sobre História para o ensino de Matemática (1990-2018)**. 2021. 169f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará – UFPA. Belém, 2021.

SILVA, Daniel de Jesus. **A utilização da história da matemática em atividades investigativas**: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB. Vitória da Conquista, 2016.

TRIVIZOLI, Lucieli M. Descobrimos pi: Duas atividades baseadas nos trabalhos de Arquimedes 2017. 8f. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** - Volume 04, Número 12, 06 – 13 (2017).

Disponível em:

[https://pdfs.semanticscholar.org/ff49/dd7328a9aaaf52ff07ada233f27553680f26.pdf?\\_ga=2.164228796.248566660.1672234839-1842594728.1669467224](https://pdfs.semanticscholar.org/ff49/dd7328a9aaaf52ff07ada233f27553680f26.pdf?_ga=2.164228796.248566660.1672234839-1842594728.1669467224). Acesso em: 20 de mar. 2022.

## APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Prezado ou Prezada

Este termo de Consentimento se direciona ao Senhor Pai ou Senhora Mãe ou Senhor(a)  
Responsável pelo(a) aluno(a) -

\_\_\_\_\_ no sentido de consentir a participação do(a) aluno(a) na pesquisa intitulada UMA INVESTIGAÇÃO DIDÁTICA E HISTÓRICA SOBRE AS MEDIDAS DO CÍRCULO DE ARQUIMEDES DE SIRACUSA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA desenvolvida no PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – Campus Floriano. A pesquisa é desenvolvida pelo mestrando LUÍS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA sob a orientação de BENJAMIM CARDOSO DA SILVA NETO para fins de desenvolvimento de dissertação de mestrado.

A pesquisa ocorrerá no INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ, CAMPUS FLORIANO - PI com os (as) alunos (as) do CURSO TÉCNICO INTEGRADO AO MÉDIO EM EDIFICAÇÕES. Todos os custos envolvidos na pesquisa serão arcados pelo pesquisador, ressaltamos que os nomes dos pais e dos (as) alunos (as), assim como identificações pessoais e/ou profissionais não serão utilizadas ou identificadas nos textos iniciais e nem finais da pesquisa. Serão coletadas imagens dos (as) alunos (as) (as imagens que proporcionarem identificação serão borradas), registros escritos dos (as) alunos (as), anotações, respostas de questionários, áudios de gravações, não permitindo reconhecimento dos sujeitos envolvidos. A pesquisa é livre de quaisquer compensações financeiras e não gerará algum ganho ou gasto para os envolvidos.

É assegurado o direito de se manter informado (a) sobre os resultados parciais e finais, os quais poderão ser publicados em eventos ou periódicos científicos, mantendo-se o anonimato dos (as) participantes. Assegura-se também a liberdade de retirada do consentimento e do assentimento em qualquer etapa da pesquisa, sem prejuízo à continuidade do atendimento pela instituição em que a pesquisa ocorre e que o (a) aluno (a) estuda. Para tanto, poderá solicitar a retirada da participação de seu (sua) pessoa menor de idade, entrando em contato com a equipe de pesquisa através dos dados informados abaixo.

Você aceita a participação de \_\_\_\_\_  
nesta pesquisa?

SIM (        )                      NÃO (        )



### **Dados da pesquisa**

**Título:** Uma investigação didática e histórica sobre as medidas do círculo de Arquimedes de Siracusa para o ensino de matemática.

**Objetivo:** Investigar possíveis contribuições da História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo por Arquimedes para o Ensino Médio.

**Duração de participação dos alunos sujeito da pesquisa:** 3 aulas de 50 minutos na qual serão divididos em três momentos: abordagem expositiva do contexto histórico sobre o círculo e o método de Arquimedes sobre as medidas do círculo, reconstituição através da construção de materiais concretos e manipulações dos mesmos para inferência da expressão que permite determinar a área do círculo e, por fim, aplicação de questionário composto de quatro questões abertas sobre a atividade desenvolvida.

### **Equipe de pesquisa:**

Prof. Dr. Benjamim Cardoso da Silva Neto (IFMA) - Orientador

Prof. Mestrando: Luís Carlos Barbosa de Oliveira – (IFPI)

### **Declarações**

Eu \_\_\_\_\_  
declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Termo de Consentimento Livre e  
Esclarecido desta pesquisa para participação de  
\_\_\_\_\_ na pesquisa.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Responsável

Eu \_\_\_\_\_ tendo  
a participação consentida por responsável, declaro que obtive de forma apropriada e voluntária

o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assino o presente documento sobre minha participação nesta pesquisa.

---

Assinatura do aluno participante

Eu LUIS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA declaro que todas as informações acerca da pesquisa serão repassadas aos responsáveis e aos alunos envolvidos no desenvolvimento da pesquisa.

---

Assinatura do responsável pelo estudo

LUIS CARLOS BARBOSA DE OLIVEIRA, E-MAIL: luis.carlos.ma@ifpi.edu.br,  
Rua, Professora Rita de Cassia, 105 Bairro: Sambaíba Floriano – PI CEP: 64804-205.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ  
Rua Francisco Urquiza Machado, 462 Bairro: Meladão Floriano – PI CEP: 64800-000.

Floriano, Piauí em 05 de setembro de 2022.

## APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL

NOME: \_\_\_\_\_

Questionário inicial – aproximando do conhecimento prévio dos alunos (individual)

01. como você acha que a matemática surgiu?

---

---

---

---

02. poderia dizer que (quais) conteúdos já estudou por meio da história da matemática em sala de aula?

---

---

---

---

03. o que já ouviu falar sobre Arquimedes?

---

---

---

---

04. cite alguns objetos ou situações de sua vida que envolvam regiões circulares.

---

---

---

---

05. o que pode nos dizer sobre o círculo ou sobre seus elementos?

---

---

---

06. o número  $\pi$  está envolvido em cálculos que buscam medidas do círculo e da circunferência. o que você já estudou sobre este número? qual seu valor? o que ele representa?

---

---

---

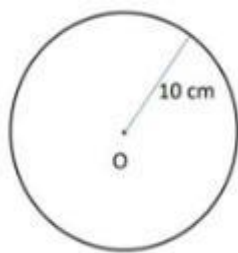
07. você acha que os mesmos métodos de estudar o círculo são válidos para a circunferência? se sim ou se não, informe por quê.

---

---

---

08. poderia determinar o comprimento e a área dessa figura geométrica? não deixe de registrar seus cálculos



---

---

---

**APÊNDICE C – ATIVIDADE DIDÁTICA – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE  
ARQUIMEDES**

**ATIVIDADE**

Alunos(as): \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Passo. 1**

Construa duas circunferências com auxílio de um compasso ou transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 4 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.

Anotações:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Passo. 2**

Construa duas circunferências com auxílio de um compasso ou transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 6 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.

Anotações:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Passo. 3**

Construa duas circunferências com auxílio de um compasso e um transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 12 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.

Anotações:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

---

---

Passo. 4

Construa duas circunferências com auxílio de um compasso e um transferidor no raio desejado, em uma circunferência inscreva e na outra circunscreva um polígono regular de 24 lados. Identifique os vértices e com auxílio de uma tesoura recorte a figura obtida, com as partes, tentem montar quadrilátero.

Anotações:

---

---

---

---

Se a cada passo, você dividir o círculo dobrando o número de setores, ao tornar a quantidade de passos muito grande a quantidade de setores tenderá para o infinito, assim, obterá triângulos isósceles de base infinitesimal e altura igual ao raio do disco. Facilmente, perceberá que a área do círculo é igual a soma das áreas dos triângulos (setores). Descreva formalmente, em discussão com os colegas do grupo, como ocorre esse processo, usando linguagem matemática que conhece.

**Sugestão:** Intuitivamente, e em reflexão coletiva, lançando mão do conhecimento da área do quadrilátero formado com esses infinitos triângulos, deduza a expressão que determina a área limitada pela circunferência (círculo) na qual o polígono está inscrito.

Anotações

---

---

---

---

**APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA  
PROPOSTA (INDIVIDUAL)**

Questionário final de avaliação da atividade (individual)

01. O que você achou sobre a atividade desenvolvida através do método histórico de determinação de medidas do círculo de Arquimedes? (Mínimo de 5 linhas)

---

---

---

---

02. Você considera que atividades como estas podem contribuir para seu aprendizado em Matemática? **Explique.** (Mínimo de 5 linhas)

---

---

---

---

03. Quais conteúdos matemáticos ou personalidades matemáticas você teria curiosidade de conhecer fatos históricos?

---

---

---

---

04. Deixe seus comentários e sugestões acerca das atividades que foram realizadas. (Mínimo de 5 linhas).

---

---

---

---

## APENDICE E – APRESENTAÇÃO EM SLIDES



### MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



INSTITUTO FEDERAL DO PIAUÍ- IFPI - CAMPUS FLORIANO.

Mestrando: Luís Carlos Barbosa  
Professor: Dr. Benjamim

Floriano, setembro de 2022.

Nº 01 de 21 - Data: 13/09/22



História da matemática - Atividade proposta.



#### Construindo o conhecimento matemático

- Como surgiu a matemática?
- Qual a utilidade da matemática?
- Quem criou a matemática?
- Como a matemática se desenvolveu...?



Nº 03 de 21 - Data: 13/09/22

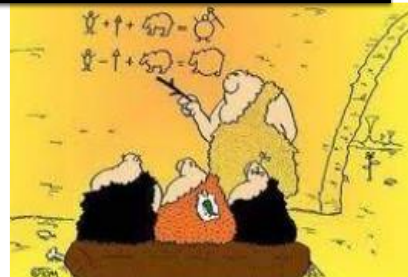


### Povos egípcios e babilônicos

Áreas e projetos agrícolas



Era comum o cultivo do linho, do algodão, da vinha, dos cereais e da oliveira. Os animais mais utilizados nesse período foram o boi e o asno, mas existia a criação de carneiros, cabras e gansos.



Nº 04 de 21 - Data: 13/09/22

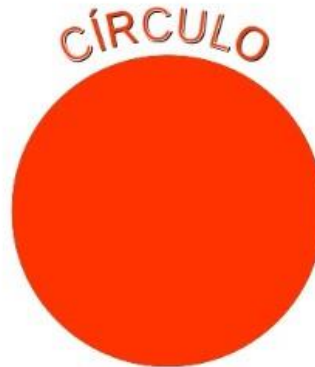
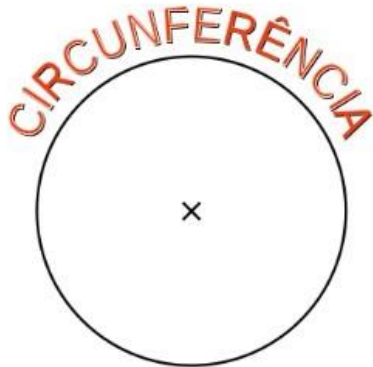
### Figuras circulares no dia a dia



Nº 05 de 21 - Data: 13/09/22

**Circunferência/círculo**

Que nome dás a estas figuras geométrica?



Nº 06 de 21 - Data: 13/09/22

**O círculo ao longo da História e por diferentes povos**

O círculo é uma das formas geométricas mais presente em civilizações e sociedades antigas e até atuais, presente por exemplo em rituais religiosos, na astronomia, nas danças e reuniões em grupos, no formato de representações de homens e animais, na arquitetura, no artesanato, etc.



Nº 07 de 21 - Data: 13/09/22

**Registro do número  $\pi$**

Os primeiros registros de uma história documentada da matemática datam por volta de 2000 a. C. e são os babilônicos e egípcios os primeiros povos que demonstraram conhecimento sobre o número  $\pi$ .

## História do cálculo do valor de $\pi$

Antigo Egito

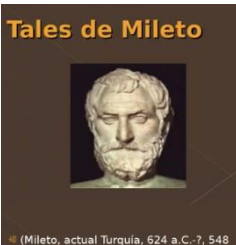


Detalhe do papiro Rhind.

Matemáticos antigos perceberam que havia uma certa proporção entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Eles partiram de um quadrado inscrito em uma circunferência, cujo lado media nove unidades, então dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de oito lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência. O egípcio Ahmes no ano de 1800 a.C., descrito no papiro Rhind, chegou ao valor aproximado de 3,16 há 3500 anos.

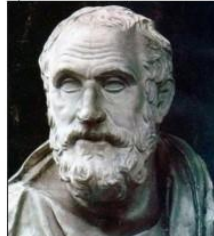
Nº 08 de 21 - Data: 13/09/22

**Matemáticos – Círculo/circunferência**



(Miletos, actual Turquia, 624 a.C.-?; 548

Hipócrates de Quios 460 a.C



Eudoxo 408 e 355 a.C



Euclides, 300 a.C



Arquimedes



287 a.C. – 212 a. C.

Nº 09 de 21 - Data: 13/09/22

**Método de Arquimedes**

Arquimedes



287 a.C. – 212 a. C.

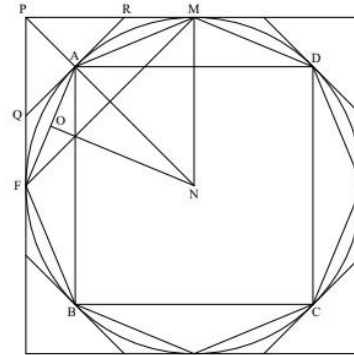


Diagrama - Proposição I (no alfabeto latino).

Nº 10 de 21 - Data: 13/09/2

**Registro do número  $\pi$**

Por volta de 250 a. C. Arquimedes utiliza um método que tem como base os polígonos inscritos e circunscritos, ficando conhecido como método Clássico do Cálculo de  $\pi$ .

Figura – Arquimedes

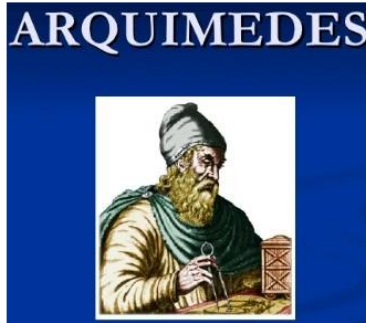


287 a. C. – 212 a.C.

Nº 11 de 21 - Data: 13/09/2

### Arquimedes e suas contribuições

Arquimedes (287 a.C. a 212 a.C.), tendo nascido na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília, sua genialidade e inventividade no campo da Matemática e Física consagrou-o como um dos maiores matemáticos de todos os tempos



Matemática  
Física  
Engenharia militar

Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Corpos Flutuantes, Sobre Espirais, A Quadratura da Parábola, Sobre Conoides e Esferoides, A medida de um Círculo, O contador de Grãos de Areia e o método. Sabe-se que outros de seus trabalhos foram perdidos, entre eles dois sobre Mecânica (**Sobre Alavancas** e **Sobre Centros de Gravidades**), um outro sobre Óptica, um chamado **Sobre o Calendário** e outro denominado **Sobre a Construção de esferas.** (GARBI 2010, p.81).

rei Hierão

Nº 12 de 21 - Data: 13/09/2

### Medidas do círculo pelo método da exaustão aplicado por Arquimedes

Eudoxo de Cnido



408a.C – 355a.C

Nº 13 de 21 - Data: 13/09/2



**Objetos circulares do dia a dia**

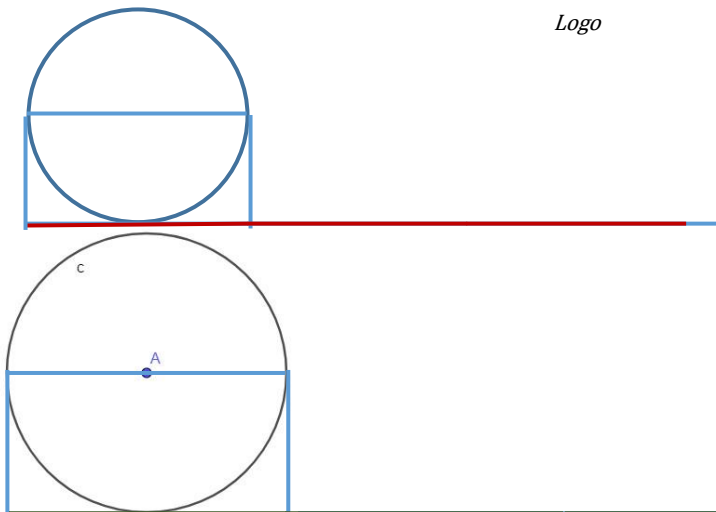
Ideia intuitiva do valor de  $\pi$  com uso de objetos inseridos no dia a dia dos alunos



Nº 14 de 21 - Data: 13/09/2

**Determinação do número pi por Arquimedes**

Logo



$$C \cong 3 \cdot D$$



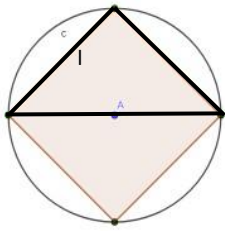
$$C = 3,1 \cdot D$$

$$C = 3,2 \cdot D$$

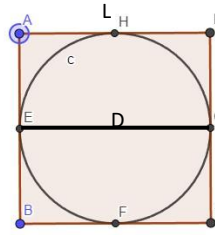
$$C \cong 3,5 \cdot D$$

Nº 15 de 21 - Data: 13/09/2

**Determinação do número π (pi) por Arquimedes**



$$4l < c < 4L$$



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo verde, vem:

$$D^2 = l^2 + l^2$$

$$2l^2 = D^2$$

$$l^2 = \frac{D^2}{2}$$

$$l = \frac{D\sqrt{2}}{2}, \text{ logo } 4l \cong 2,8D$$

(i)

Como  $L = D$ , vem:

$$C < 4D \quad \text{(ii)}$$

Usando (i) e (ii), concluímos:

$$2,8D < C < 4D$$

Portanto

$$2,8 < \frac{C}{D} < 4$$

Resumo:

Caso  $n = 4$ ,  $2,8 < \frac{C}{D} < 4$

Caso  $n = 6$ ,  $3 < \frac{C}{D} < 3,48$

...

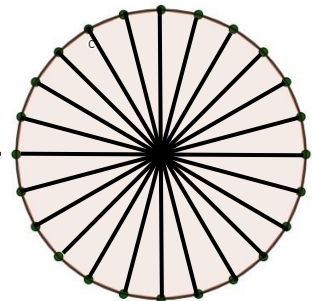
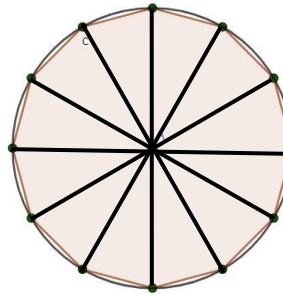
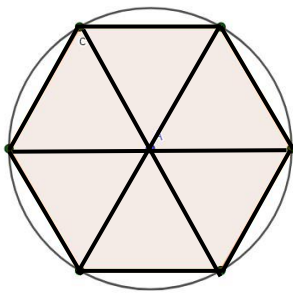
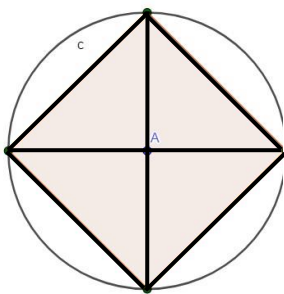
...

Caso  $n = 96$ ,  $3,1408 < \frac{C}{D} < 3,1428$

Nº 16 de 20 - Data: 19/08/22

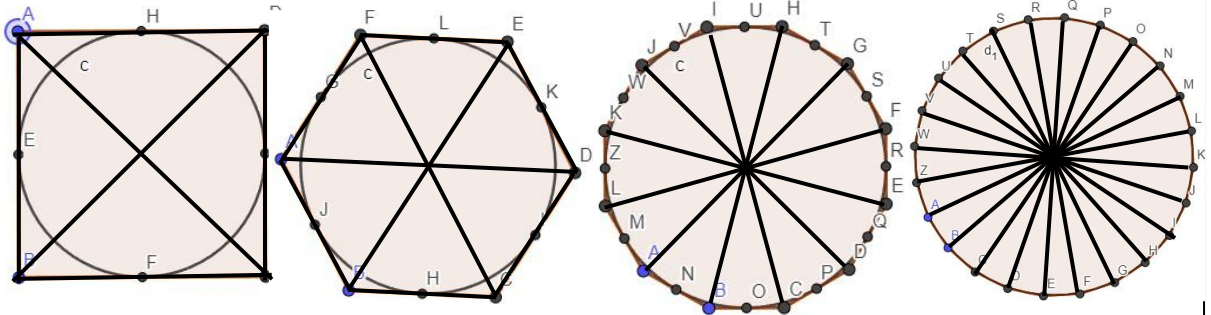
**Medida de um círculo - Área**

Círculo de Arquimedes– uso de polígonos inscrito e circunscrito a circunferência para inferência da expressão que determina a área do círculo.



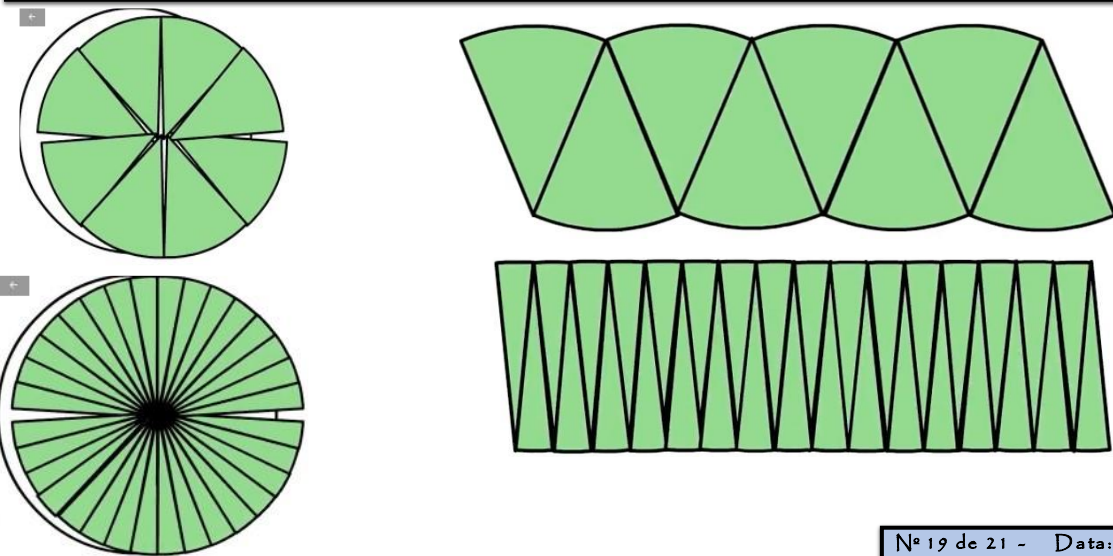
Nº 17 de 21 - Data: 13/09/22

Medida de um círculo - Área



Nº 18 de 21 - Data: 13/09/2

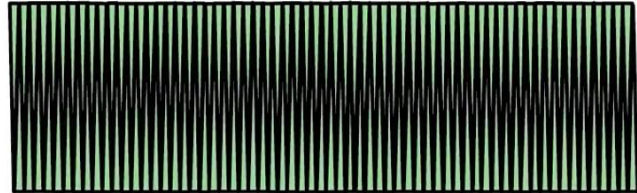
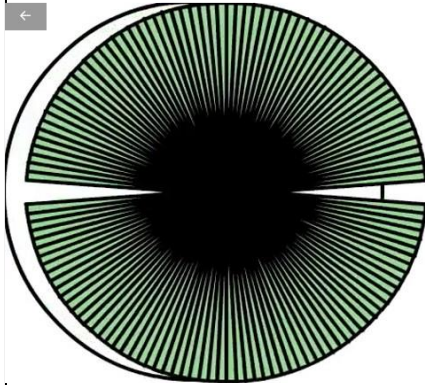
Medida de um círculo- Área



Nº 19 de 21 - Data: 13/09/2



## Medida de um círculo - Área

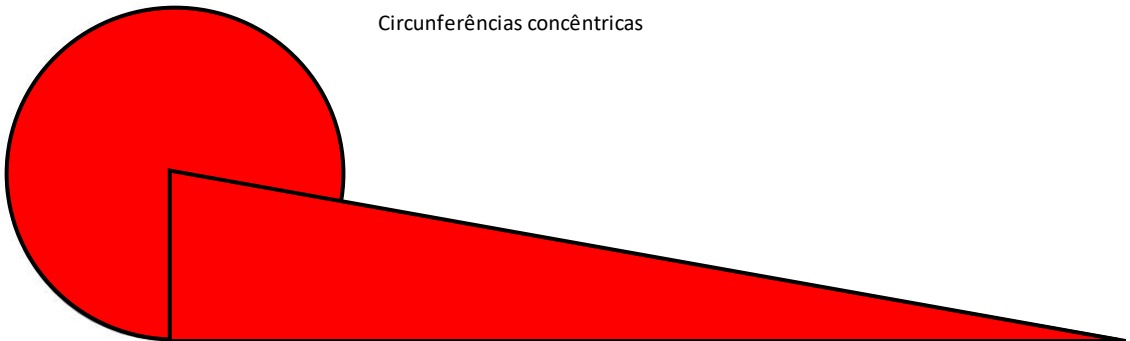


História da matemática - Atividade proposta.



## Medida de um círculo - Área

Circunferências concêntricas



Convido todos vocês a reconstituir o caminho percorrido por Arquimedes sobre A  
Medida de um Círculo (adaptado)

Nº 20 de 21 - Data: 13/09/2

## ANEXO A - TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO



MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT  
INSTITUIÇÃO ASSOCIADA: IFPI – CAMPUS FLORIANO



### Termo de Autorização da Instituição

Eu, André Francisco Coêlho Castro, Diretor de Ensino do INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ, campus Floriano - PI autorizo a realização do estudo, UMA INVESTIGAÇÃO DIDÁTICA E HISTÓRICA SOBRE AS MEDIDAS DO CÍRCULO DE ARQUIMEDES DE SIRACUSA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA, a ser conduzido pelos pesquisadores abaixo relacionados. Foi informado pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual representamos. O objetivo principal da pesquisa é investigar possíveis contribuições da História da Matemática aliada ao uso de materiais concretos em atividades didáticas sobre as medidas do círculo por Arquimedes para o Ensino Médio.

O Estudo será desenvolvido da seguinte forma: 3 aulas de 50 minutos na qual serão divididos em três momentos: abordagem expositiva do contexto histórico sobre o círculo e o método de Arquimedes sobre as medidas do círculo, reconstituição através da construção de materiais concretos e manipulações dos mesmos para inferência da expressão que permite determinar a área do círculo e, por fim, aplicação de questionário composto de quatro questões abertas sobre a atividade desenvolvida.

Autorizo a utilização dos seguintes materiais, equipamentos e dependência(s): Câmera e tripé.

Declaro ainda que, os pesquisadores devem estar cientes e sujeitos ao regimento da instituição para acesso a ambientes, profissionais, pacientes e bancos de dados (considerando o que apregoa a Lei Geral de Proteção de Dados no tocante a dados pessoais e dados pessoais sensíveis), além da observância das regras de biossegurança, até o término da pesquisa, sob pena da retirada da autorização, sem aviso prévio.

Declaro ainda ter lido, conhecer e cumprir as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial a Resolução CNS 466/12 e a CNS 510/16. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos participantes de pesquisa nela recrutados, possibilitando condições mínimas necessárias para a garantia de tal segurança e bem-estar.

IFPI – campus Floriano - PI, 31 de agosto de 2022

André Francisco Coêlho Castro  
Diretor de Ensino do IFPI – Campus Floriano  
Portaria nº 1.754 de 31 de agosto de 2021

Lista Nominal de Pesquisadores:

Mestrando: Prof. Luis Carlos Barbosa de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Benjamin Cardoso da Silva Neto

Termo de Autorização da Instituição

Página 1 de 1