UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Regis Kapitanovas

Coordenadas Baricêntricas e Aplicações

Santo André - SP
2013

Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Regis Kapitanovas

Coordenadas Baricêntricas e Aplicações

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Márcio Fabiano da Silva.

Santo André - SP
2013

Universidade Federal do ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Regis Kapitanovas**, realizada em 07 de agosto de 2013.

Márcio Fabiano da Silva

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (UFABC) – Presidente

Alexandre Lymberopoulos

Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos (USP) – Membro Titular

[illegible]

Prof. Dr. João Paulo Gois (UFABC) – Membro Titular

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (UFAM) – Membro Suplente

Prof. Dr. Igor Leite Freire (UFABC) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 15 de agosto de 2013.

Assinatura do autor: Regis Kostarnas ______________________________.

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva ______________________________.

Dedico este trabalho à minha esposa, meus pais, e amigos; e todos aqueles que me apoiaram durante a minha vida acadêmica.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por tudo.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), à CAPES pelo auxílio concedido, à UFABC e seus professores, ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, e aos colegas de turma de mestrado.

A todos vocês, sincera gratidão.

Resumo

Inspirados pelos trabalhos de J. Bortolossi [1] e F. Capitán [2], estudamos um método para calcular as coordenadas baricêntricas de um ponto em $\mathbb{R}^2$, a partir dos vértices de um dado triângulo. Usando o Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas, aplicamos este método para pontos notáveis do triângulo. Usando o Teorema de Conway, calculamos as coordenadas baricêntricas do Ponto de Fermat do triângulo.

Palavras-Chave

Coordenadas Baricêntricas, Ponto de Fermat, Teorema de Conway

Abstract

Based on the papers of J. Bortolossi [1] and F. Capitán [2], in this work we study a method to calculate the barycentric coordinates of a point in $\mathbb{R}^2$ from the vertices of a given triangle. By using Ceva's theorem for barycentric coordinates we apply the method to notable points of the triangle. By using Conway's theorem we calculate the barycentric coordinates of the Fermat Point of the triangle.

Keywords

Barycentric coordinates, Fermat Point, Conway's Theorem

Sumário

1 Introdução **1**

2 Coordenadas Baricêntricas **3**

2.1 Coordenadas Baricêntricas e Exemplos 3

2.2 Equação de Reta 14

2.3 Cevianas e Traços 14

2.4 Teorema de Ceva para Coordenadas Baricêntricas 17

3 Pontos Notáveis de um Triângulo **21**

3.1 Coordenadas Baricêntricas do Incentro 21

3.2 Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro 22

3.3 Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro 24

4 Teorema de Conway e o Ponto de Fermat **29**

4.1 A Fórmula de Conway 29

4.2 O Ponto de Fermat 33

4.3 Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Fermat 34

5 Atividades para a sala de aula **43**

5.1 Atividades 43

6 Conclusão **53**

Bibliografia **55**

Lista de Figuras

2.1 Coordenadas baricêntricas de um ponto P. 4
2.2 Áreas formadas pelo ponto P e os vértices do triângulo ABC. 8
2.3 Sinal da coordenada u. 9
2.4 Sinal da coordenada v. 9
2.5 Sinal da coordenada w. 10
2.6 Sinais das coordenadas u, v e w. 10
2.7 Construção Cartesiana do Exemplo 2.1. 11
2.8 Coordenadas cartesianas de vértices, pontos médios e baricentro. 13
2.9 Cevianas e traços do ponto P. 15
2.10 O Teorema de Ceva para Coordenadas Baricêntricas. 19

3.1 Incentro (I) de um triângulo ABC. 22
3.2 Circuncentro (O) de um triângulo ABC. 23
3.3 Ortocentro (H) de um triângulo ABC. 25

4.1 Ângulos internos de um triângulo ABC. 30
4.2 P externo ao triângulo ABC, e seus ângulos com o lado BC. 31
4.3 Teorema de Conway para três pontos. 32
4.4 Rotação do $\triangle PAB$ em 60^o, com eixo em B, encontrando o $\triangle C'P'B$. 33
4.5 A solução para o Ponto de Fermat. 34
4.6 Uma possível construção para o Ponto de Fermat. 35
4.7 O ponto P "enxerga" os lados do triângulo com ângulos α, β e γ. 38
4.8 Construção da circunferência por B, P e C. 38
4.9 Determinando os pontos A', B' e C'. 39

5.1 Exemplo 5.1. 44
5.2 Exemplo 5.2. 44
5.3 Exemplo 5.3. 45
5.4 Exemplo 5.4. 46
5.5 Exemplo 5.5. 47
5.6 Exemplo 5.6. 49
5.7 Exemplo 5.7. 50
5.8 Exemplo 5.8. 52

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, abordaremos o tema Coordenadas Baricêntricas, criado por Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), e descrito no seu livro *Der Barycentische Calcul* de 1827. Estas coordenadas serão calculadas para alguns pontos notáveis de um triângulo, como vértices, pontos médios dos lados, baricentro, incentro, ortocentro, circuncentro, além do Ponto de Fermat. Veremos que o uso dessas coordenadas facilitam os cálculos envolvendo tais pontos.

A dissertação está dividida em 5 capítulos. No capítulo 2, definiremos coordenadas baricêntricas de um ponto no plano a partir dos vértices de um triângulo de referência. Apresentaremos o Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas.

No Capítulo 3, usaremos o Teorema de Ceva para calcular as coordenadas baricêntricas dos pontos notáveis de um triângulo: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro.

No Capítulo 4, será demonstrado um importante resultado para coordenadas baricêntricas, que é conhecido como Teorema de Conway. Com ele, calcularemos as coordenadas baricêntricas do Ponto de Fermat de um triângulo.

No Capítulo 5, aplicaremos alguns conceitos explorados nos capítulos anteriores para a resolução de problemas que podem ser utilizados como atividades para sala de aula. Para a realização dessas atividades, sugerimos o uso de algum software de geometria dinâmica, como o Geogebra, que foi utilizado nesta dissertação; e também um software de planilha eletrônica para os cálculos que determinarão as coordenadas baricêntricas e cartesianas. Esta é uma excelente oportunidade para desenvolver a habilidade de resolução de problemas que usam conhecimento geométrico e algébrico.

Capítulo 2

Coordenadas Baricêntricas

Neste capítulo introduziremos e discutiremos o conceito de coordenada baricêntrica para um ponto do plano cartesiano, em função dos vértices de um dado triângulo de referência. Apresentaremos alguns resultados básicos relacionados com este tema, como o Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas.

2.1 Coordenadas Baricêntricas e Exemplos

Primeiramente, apresentamos o conceito de coordenada baricêntricas de um ponto.

Definição 2.1 *Sejam A, B e C os vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e P um ponto do plano de coordenadas cartesianas (x, y). Dizemos que u, v e w são as coordenadas baricêntricas de P, em relação ao triângulo $\triangle ABC$, se*

$$P = (x, y) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Isto é, se o ponto P pode ser obtido como média ponderada dos vértices A, B e C com pesos u, v e w, respectivamente, onde u, v e w são números reais tais que $u + v + w \neq 0$. Desta maneira, o ponto P passa a ser identificado por esses pesos e, neste caso, usaremos a notação:

$$P = (u : v : w).$$

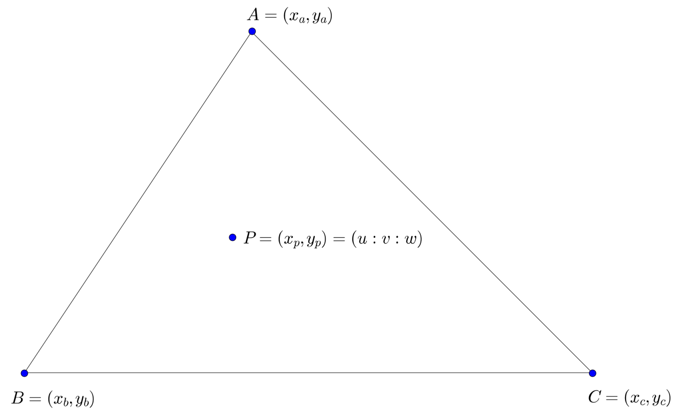

Figura 2.1: Coordenadas baricêntricas de um ponto P.

Uma questão que surge naturalmente a partir da Definição 2.1 é sempre será possível obter as coordenadas baricêntricas de um ponto. Sejam $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ as coordenadas cartesianas dos vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$, e $P = (x_p, y_p)$ as coordenadas cartesianas de um ponto do plano. Pela Definição 2.1, as coordenadas baricêntricas de P devem satisfazer a relação

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = \frac{u(x_a, y_a) + v(x_b, y_b) + w(x_c, y_c)}{u + v + w} = (x_p, y_p). \tag{2.1}$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u(x_a - x_p) + v(x_b - x_p) + w(x_c - x_p) = 0 & (2.2) \\ u(y_a - y_p) + v(y_b - y_p) + w(y_c - y_p) = 0. & (2.3) \end{cases}$$

Para facilitar as contas, faremos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} a &= x_a - x_p, \quad b = x_b - x_p, \quad c = x_c - x_p, \\ d &= y_a - y_p, \quad e = y_b - y_p, \quad f = y_c - y_p. \end{aligned} \tag{2.4}$$

de modo que o sistema anterior se reescreve como

$$\begin{cases} ua + vb + wc = 0 & (2.5) \\ ud + ve + wf = 0. & (2.6) \end{cases}$$

Pela Definição 2.1, vemos que as coordenadas baricêntricas dos vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$ podem ser obtidas facilmente como

$$A = (1 : 0 : 0), \qquad B = (0 : 1 : 0), \qquad C = (0 : 0 : 1).$$

Além disto, se P pertence à reta suporte do lado $\overline{AB}$, ou seja, se P, A e B estiverem alinhados, então

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo-se este determinante, obtemos $ae - bd = 0$. Da mesma forma, o alinhamento de P, A e C equivale à condição $cd-af = 0$, e o alinhamento de P, B e C equivale à condição $bf - ce = 0$.

Suponha que P não seja um vértice do triângulo $\triangle ABC$ e não pertença às retas suportes dos lados deste triângulo.

De (2.5), obtemos

$$u = \frac{-vb - wc}{a} \tag{2.7}$$

e substituindo-se (2.7) em (2.6), temos

$$(ae - bd).v = w.(cd - af), \tag{2.8}$$

de onde segue que

$$v = w.\frac{cd - af}{ae - bd}. \tag{2.9}$$

Substituindo-se (2.9) em (2.7), obtemos

$$u = -\left[w.\frac{(cd - af)}{(ae - bd)}\right].\frac{b}{a} - w.\frac{c}{a} = w.\left[\frac{abf - bcd - ace + bcd}{(ae - bd).a}\right] = w.\left(\frac{bf - ce}{ae - bd}\right).$$

Por (2.8), temos que se P, A e B estivessem alinhados, teríamos $w = 0$, de modo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem como equação $w = 0$, em coordenadas baricêntricas. De modo análogo, a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é dada pela equação $u = 0$ e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é dada pela equação $v = 0$.

De acordo com os cálculos anteriores, podemos escrever P em coordenadas baricêntricas em função da variável w. Ou seja,

$$P = (u : v : w) = \left(w\left(\frac{bf - ce}{ae - bd}\right) : w\left(\frac{cd - af}{ae - bd}\right) : w\right). \tag{2.10}$$

Tomando-se $w = 1$, ficamos com

$$P = \left(\frac{bf - ce}{ae - bd} : \frac{cd - af}{ae - bd} : 1\right).$$

Observemos que as coordenadas baricêntricas de P podem ser obtidas para cada $w \neq 0$. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 2.2 *Considere um triângulo $\triangle ABC$ com vértices A, B e C. Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$. Dizemos que $P_1 = P_2$ se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $u_2 = k.u_1$, $v_2 = k.v_1$ e $w_2 = k.w_1$.*

Para operarmos com as coordenadas baricêntricas de pontos, apresentamos as seguintes definições.

Definição 2.3 *Sejam P_1 e P_2 pontos com coordenadas baricêntricas $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$. Ao ponto de coordenadas baricêntricas*

$$P_1 + P_2 = (u_1 + u_2 : v_1 + v_2 : w_1 + w_2),$$

denominamos soma de P_1 e P_2.

Definição 2.4 *Sejam k um número real diferente de zero e P_1 um ponto de coordenadas baricêntricas $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$. Ao ponto de coordenadas baricêntricas P, em que*

$$P = k.P_1 = (k.u_1 : k.v_1 : k.w_1),$$

denominamos multiplicação de P_1 pelo escalar k.

Definição 2.5 *Sejam P_1 e P_2 pontos com coordenadas baricêntricas $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$. Ao ponto de coordenadas baricêntricas*

$$P = P_1 - P_2 = P_1 + (-1)\,.P_2 = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2),$$

denominamos de diferença de P_1 e P_2.

Em seguida, dividimos cada coordenada baricêntrica por $u + v + w$. A este processo, chamamos de normalização das coordenadas baricêntricas. Temos que

$$u + v + w = \frac{bf - ce}{ae - bd} + \frac{cd - af}{ae - bd} + 1 = \frac{bf - ce + cd - af + ae - bd}{ae - bd}.$$

Pela Definição 2.2, mesmo divindo-se as coordenadas de P dadas em (2.2) por $u+v+w$, ainda temos o ponto P. Assim,

$$P = \left(\left(\frac{ae-bd}{bf-ce+cd-af+ae-bd}\right) . \left(\frac{bf-ce}{ae-bd}\right) : \left(\frac{ae-bd}{bf-ce+cd-af+ae-bd}\right) . \left(\frac{cd-af}{ae-bd}\right) : \frac{ae-bd}{bf-ce+cd-af+ae-bd}\right).$$

Logo,

$$P = \left(\frac{bf-ce}{bf-ce+cd-af+ae-bd} : \frac{cd-af}{bf-ce+cd-af+ae-bd} : \frac{ae-bd}{bf-ce+cd-af+ae-bd}\right).$$

Por (2.4), temos

$$u = \frac{x_b y_c - x_b y_p - x_p y_c - x_c y_b + x_c y_p + x_p y_b}{x_b y_c - x_c y_b + x_c y_a - x_a y_c + x_a y_b - x_b y_a}.$$

O módulo do número real $x_b y_c - x_b y_p - x_p y_c - x_c y_b + x_c y_p + x_p y_b$ corresponde ao dobro da área do triângulo $\triangle PBC$, enquanto que o módulo de $x_b y_c - x_c y_b + x_c y_a - x_a y_c + x_a y_b - x_b y_a$ corresponde ao dobro da área do triângulo $\triangle ABC$. Então,

$$u = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}},$$

onde S_{PBC} e S_{ABC} denotam as áreas com sinal dos triângulos $\triangle PBC$ e $\triangle ABC$. Para fixar notação, consideramos

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

A área do triângulo S_{ABC} será denotada por S. Por (2.4), temos também

$$v = \frac{x_c y_a - x_c y_p - x_p y_a - x_a y_c + x_a y_p + x_p y_c}{x_b y_c - x_c y_b + x_c y_a - x_a y_c + x_a y_b - x_b y_a}.$$

Assim,

$$v = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}},$$

onde S_{APC} denota a área com sinal do triângulo $\triangle APC$. E

$$w = \frac{ae - bd}{bf - ce + cd - af + ae - bd} = \frac{x_a y_b - x_a y_p - x_p y_b - x_b y_a + x_b y_p + x_p y_a}{x_b y_c - x_c y_b + x_c y_a - x_a y_c + x_a y_b - x_b y_a} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}},$$

onde S_{ABP} denota a área com sinal do triângulo $\triangle ABP$.

Portanto, vimos que dado um ponto $P = (x_p, y_p)$ e um triângulo de vértices $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, as coordenadas baricêntricas de um ponto $P = (x_p, y_p)$ podem ser obtidos a partir das áreas com sinal dos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle APC$, $\triangle PBC$ e $\triangle ABC$.

$$P = (x_p, y_p) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = (u : v : w) = \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} \right). \tag{2.12}$$

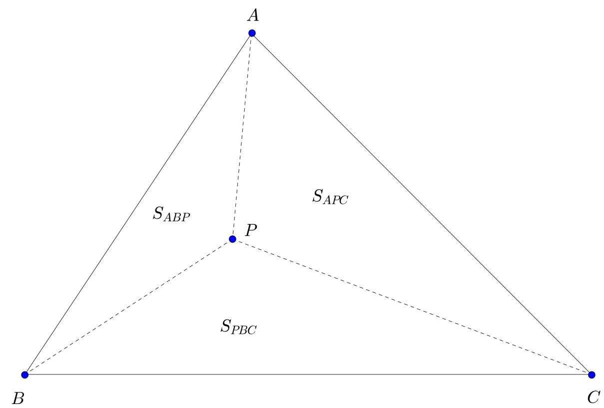

Figura 2.2: Áreas formadas pelo ponto P e os vértices do triângulo ABC.

Os sinais das coordenadas baricêntricas u, v e w podem ser determinados pelas áreas com sinal S_{PBC}, S_{APC} e S_{ABP}, respectivamente. Tomando-se a orientação dada pelos vértices para o cálculo da área com sinal, como em (2.11), temos que:

1. $u > 0$ quando P e A estão do mesmo lado em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e $u < 0$ quando eles estiverem em lados opostos;

2. $v > 0$ quando P e B estão do mesmo lado em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$ e $v < 0$ quando eles estiverem em lados opostos;

3. $w > 0$ quando P e C estão do mesmo lado em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $w < 0$ quando eles estiverem em lados opostos.

As Figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 ilustram estes casos.

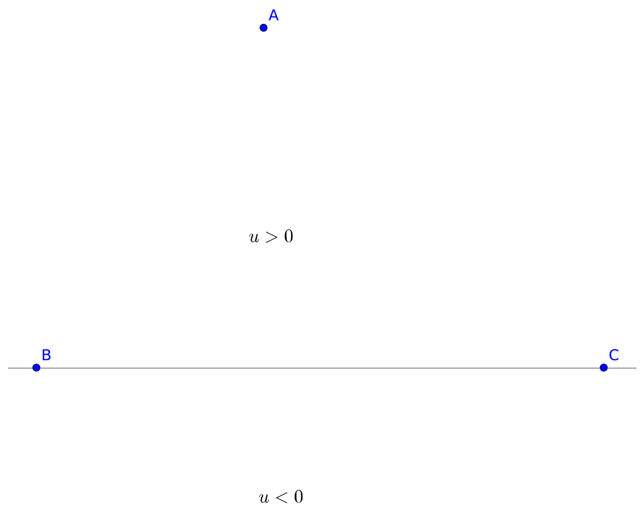

Figura 2.3: Sinal da coordenada u.

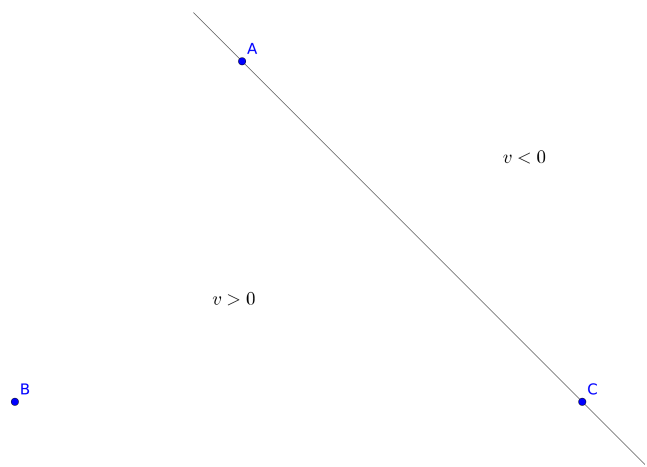

Figura 2.4: Sinal da coordenada v.

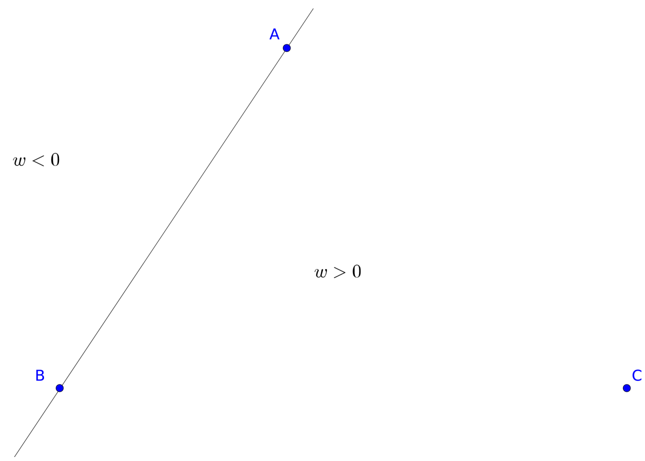

Figura 2.5: Sinal da coordenada w.

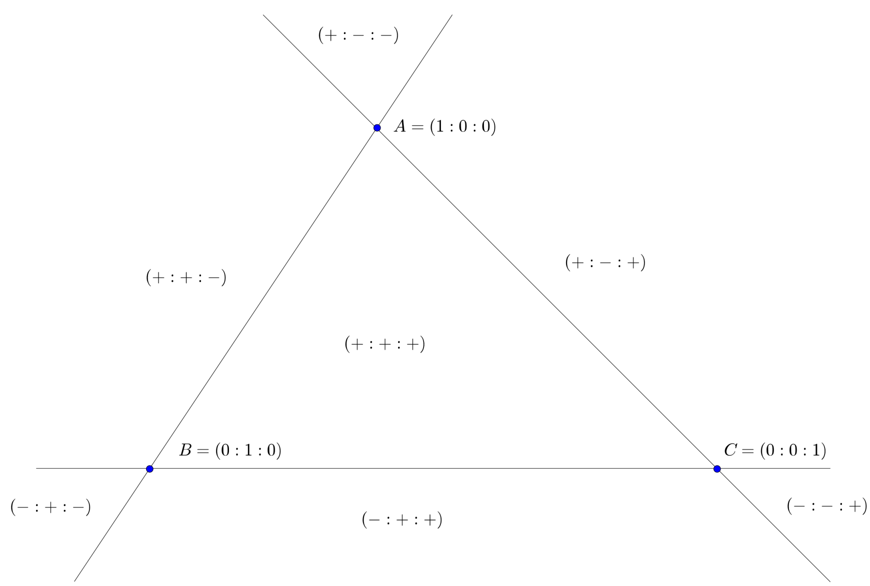

Figura 2.6: Sinais das coordenadas u, v e w.

A fim de explorar os conceitos apresentados, a seguir faremos alguns cálculos.

Exemplo 2.1 *Considere o triângulo* $\triangle ABC$ *de vértices com coordenadas cartesianas* $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ *e* $C = (6, 2)$ *e seja* P *o ponto de coordenadas cartesianas* $P = (3, 2)$. *Determinemos as coordenadas baricêntricas de* P.

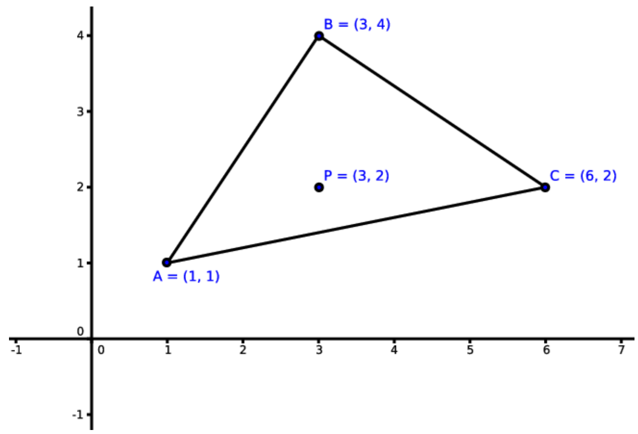

Figura 2.7: Construção Cartesiana do Exemplo 2.1.

Observamos que P não pertence às retas suportes dos lados do triângulo dado. Por (2.4) e (2.10), temos

$$\begin{aligned} a &= -2, \quad b = 0, \quad c = 3, \\ d &= -1, \quad e = 2, \quad f = 0, \end{aligned}$$

donde segue que

$$P = (\frac{3}{2}w : \frac{3}{4}w : w).$$

Notamos que $u + v + w = \frac{13}{4}w \neq 0$, pois $w \neq 0$.

Tomando-se $w = 4$, então as coordenadas baricêntricas de P são $P = (6 : 3 : 4)$

As coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo são dadas por:

$$A = \frac{1(1,1) + 0(3,4) + 0(6,2)}{1+0+0} = (1,1), \text{ donde } A = (1 : 0 : 0).$$

$$B = \frac{0(1,1) + 1(3,4) + 0(6,2)}{0+1+0} = (3,4), \text{ donde } B = (0 : 1 : 0).$$

$$C = \frac{0(1,1) + 0(3,4) + 1(6,2)}{0+0+1} = (6,2), \text{ donde } C = (0 : 0 : 1).$$

Notamos que $u + v + w = 1$. Este é um caso especial de coordenadas homogêneas, como vemos na próxima definição.

Definição 2.6 *Sejam A, B e C os vértices de um triângulo de referência $\triangle ABC$. Se P é um ponto de coordenadas baricêntricas $P = (u : v : w)$, suas coordenadas baricêntricas serão denominadas homogêneas quando $u + v + w = 1$.*

No exemplo anterior, tínhamos $u+v+w = \frac{13}{4}w$. Desta forma, para que as coordenadas de P sejam homogêneas, devemos ter $w = \frac{4}{13}$. Assim, as coordenadas baricêntricas homogêneas de P são $P = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right)$.

As coordenadas baricêntricas de P também poderiam ser obtidas a partir das áreas com sinal S_{PBC}, S_{APC} , S_{ABP} e S_{ABC}, como em (2.12):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}.$$

$$S_{PBC} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Assim, $P = (u : v : w) = \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}\right) = \left(\frac{6}{13} : \frac{3}{13} : \frac{4}{13}\right)$.

No caso de calcularmos as coordenadas baricêntricas a partir das áreas com sinal, elas são homogêneas. Isto não é uma mera coincidência, uma vez que

$$u + v + w = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = 1.$$

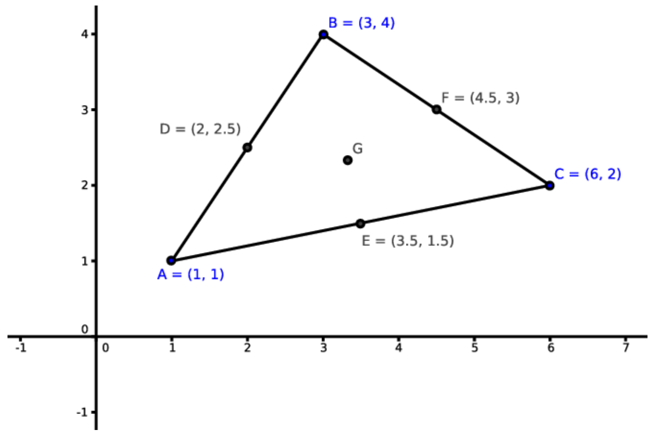

Figura 2.8: Coordenadas cartesianas de vértices, pontos médios e baricentro.

Além das coordenadas dos vértices, podemos determinar no exemplo anterior as coordenadas dos pontos médios D, E e F dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Em coordenadas cartesianas, temos:

$D = \frac{A+B}{2} = (2, \frac{5}{2})$, $E = \frac{B+C}{2} = (\frac{9}{2}, 3)$ e $F = \frac{A+C}{2} = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

E em coordenadas baricêntricas homogêneas, temos:

$$D = \frac{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + 0C}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = \frac{A+B}{2}, \text{ e assim } D = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 0).$$

$$E = \frac{0A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C}{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{B+C}{2}, \text{ e assim } E = (0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}).$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}A + 0B + \frac{1}{2}C}{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \frac{A+C}{2}, \text{ e assim } F = (\frac{1}{2} : 0 : \frac{1}{2}).$$

O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das medianas do triângulo. Dado o triângulo $\triangle ABC$, ele pode ser obtido como sendo o ponto $G = \frac{A+B+C}{3}$. Em coordenadas baricêntricas homogêneas, ele é dado como

$$G = \frac{\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{A+B+C}{3}}{1} = \frac{A+B+C}{3}, \text{ e assim, } G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right).$$

Observação 2.1 *Não importam quais sejam as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo de referência $\triangle ABC$, as coordenadas baricêntricas homogêneas dos vértices, dos pontos médios e do baricentro ficam invariantes.*

2.2 Equação de Reta

Nesta seção, determinamos a forma geral da equação de uma reta utilizando coordenadas baricêntricas. Mais adiante, utilizaremos fortemente este conceito.

A equação de uma reta no plano em coordenadas cartesianas é $a.x+b.y+c=0$, onde a, b e c são números reais. Se u, v e w denotam as coordenadas baricêntricas de um ponto P, ou seja, se $P=(u:v:w)$, em relação a um triângulo de referência $\triangle ABC$, nosso objetivo é determinar a equação geral desta reta em coordenadas baricêntricas.

Novamente, sejam $A=(x_a, y_a)$, $B=(x_b, y_b)$ e $C=(x_c, y_c)$ as coordenadas cartesianas dos vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$, e $P=(x_p, y_p)$. Por (2.1), a equação geral da reta em coordenadas baricêntricas é

$$r.u+s.v+t.w=0,$$

onde $r=a.x_a+b.y_a+c$, $s=a.x_b+b.y_b+c$ e $t=a.x_c+b.y_c+c$.

Por exemplo, determinemos a equação da reta que passa por $A=(1:0:0)$ e $B=(0:1:0)$. Como A e B pertencem a esta reta então $r=0$ e $s=0$. Assim, $tw=0$. Como $t\neq 0$, pois neste caso, C também pertenceria a esta reta, de modo que A, B e C seriam colineares, então concluímos que a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$, em coordenadas baricêntricas, é $w=0$. Analogamente, as equações de $\overleftrightarrow{BC}$ e de $\overleftrightarrow{AC}$, em coordenadas baricêntricas, são, respectivamente, $u=0$ e $v=0$.

2.3 Cevianas e Traços

A seguir, definimos cevianas e traços de pontos.

Definição 2.7 *Dado um triângulo $\triangle ABC$, seja P um ponto qualquer não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo. Uma ceviana de P é uma reta que passa por P e por um vértice do triângulo $\triangle ABC$. A intersecção de uma ceviana de P com o lado oposto a este vértice, ou com o prolongamento deste lado, é chamado de traço de P.*

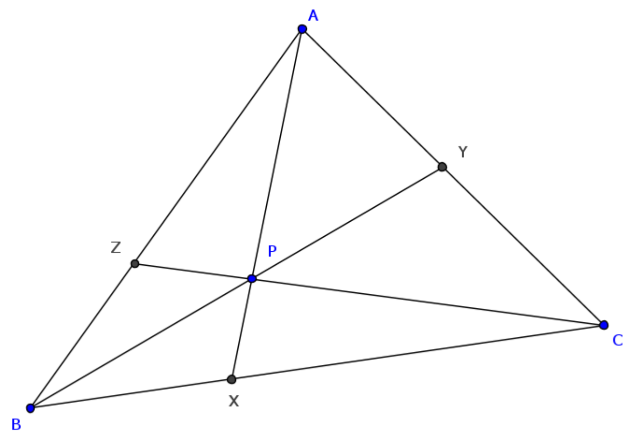

Figura 2.9: Cevianas e traços do ponto P.

Sejam X, Y e Z os traços das cevianas por A, B e C, respectivamente.

Como $P = \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}\right) = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$, devemos encontrar as coordenadas baricêntricas dos traços X, Y e Z por meio da intersecção entre retas. Por exemplo, as coordenadas baricêntricas de X são obtidas pela intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AP}$. Já vimos que a equação de $\overleftrightarrow{BC}$ é $u = 0$. Em coordenadas baricêntricas, a equação da reta $\overleftrightarrow{AP}$ é $r.u+s.v+t.w = 0$. Como $A = (1 : 0 : 0)$ pertence a esta reta, temos $r = 0$. Assim, usando também que P pertence a esta reta, temos $s.S_{APC} + t.S_{ABP} = 0$. Como $S_{APC} \neq 0$, temos $s = -t.\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}$. Desta forma,

$$t.\left(w - \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v\right) = 0.$$

Como $t \neq 0$, pois caso contrário teríamos $r = s = t = 0$, concluímos que a equação da reta $\overleftrightarrow{AP}$ é

$$w = \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v.$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas de X são

$$\left(0 : v : \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v\right) = (0 : S_{APC}.v : S_{ABP}.v) = (0 : S_{APC} : S_{ABP}).$$

Analogamente,

$$Y = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}) = (S_{PBC} : 0 : S_{ABP}).$$

e

$$Z = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}) = (S_{PBC} : S_{APC} : 0) \,.$$

Nosso próximo objetivo é encontrar as coordenadas baricêntricas dos traços X, Y e Z em função de proporções de segmentos. Temos dois casos para estudar:

Caso 1: P pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$.

Neste caso, as coordenadas homogêneas u, v e w dos traços serão não-negativas. Temos que $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BX}{XC}$, pois

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{S_{XAB} - S_{XPB}}{S_{XAC} - S_{XPC}} = \frac{\frac{BX.h_A}{2} - \frac{BX.h_P}{2}}{\frac{XC.h_A}{2} - \frac{XC.h_P}{2}} = \frac{\frac{BX.(h_A - h_P)}{2}}{\frac{XC.(h_A - h_P)}{2}} = \frac{BX}{XC},$$

onde h_A e h_P são as alturas a partir dos pontos A e P, respectivamente, em relação ao lado $\overline{BC}$.

Analogamente, $\frac{S_{APC}}{S_{PBC}} = \frac{AZ}{ZB}$ e $\frac{S_{ABP}}{S_{PBC}} = \frac{AY}{YC}$.

Desta forma, as coordenadas baricêntricas dos traços podem ser encontradas pela proporção de segmentos:

$$\begin{aligned} X &= (0 : S_{APC} : S_{ABP}) = \left(0 : 1 : \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}\right) = \left(0 : 1 : \frac{BX}{XC}\right) = (0 : XC : BX) \\ Y &= (S_{PBC} : 0 : S_{ABP}) = \left(1 : 0 : \frac{S_{ABP}}{S_{PBC}}\right) = \left(1 : 0 : \frac{AY}{YC}\right) = (YC : 0 : AY) \\ Z &= (S_{PBC} : S_{APC} : 0) = \left(1 : \frac{S_{APC}}{S_{PBC}} : 0\right) = \left(1 : \frac{AZ}{ZB} : 0\right) = (ZB : AZ : 0). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Caso 2: P pertence ao exterior do triângulo $\triangle ABC$.

Neste caso, pelo menos uma das seguintes condições não vale: X e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, X e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$, Y e A estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{BC}$, Y e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$, Z e A estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{BC}$, Z e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Dependendo de qual condição não for válida, o sinal de u, v ou w poderá ser negativo, de acordo com a análise feita na Seção 2.1.

A menos de sinal, as coordenadas homogêneas dos traços X, Y e Z são dadas por (2.13). Por exemplo, no caso em X e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, mas X e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, teremos

$$X = (0 : S_{APC} : S_{ABP}) = \left(0 : 1 : \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}\right) = \left(0 : 1 : \frac{-BX}{XC}\right) = (0 : XC : -BX).$$

Este é o caso, por exemplo, em que P é o ortocentro de um triângulo $\triangle ABC$, obtuso no vértice B.

2.4 Teorema de Ceva para Coordenadas Baricêntricas

Nesta seção, apresentamos uma versão do conhecido Teorema de Ceva da geometria plana para o caso de coordenadas baricêntricas. O Teorema de Ceva dá uma condição para determinar se as cevianas de um triângulo se interceptam. A saber,

Teorema 2.1 *Em um triângulo $\triangle ABC$, as cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ e $\overline{CZ}$ se interceptarão se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

No enunciado do Teorema de Ceva, as cevianas foram tomadas como segmentos que unem o vértice do triângulo a um traço de P.

A seguir, será enunciado o Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas. Ele dá uma condição para determinar se um ponto é um traço de P, e será utilizado no capítulo seguinte no cálculo das coordenadas de alguns pontos notáveis.

Teorema 2.2 *Três pontos X, Y e Z são os traços do ponto $P = (u : v : w)$ se e somente se, X, Y e Z são da forma* $\begin{cases} X = (0 : v : w) \\ Y = (u : 0 : w) \\ Z = (u : v : 0) \end{cases}$ *para algum u, v e w.*

Como anteriormente, tomamos $\triangle ABC$ como triângulo de referência, em que $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$. Neste caso, vimos que $P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$ e

$$\begin{cases} X = (0 : S_{APC} : S_{ABP}) \\ Y = (S_{PBC} : 0 : S_{ABP}) \\ Z = (S_{PBC} : S_{APC} : 0) \end{cases}.$$

Prova: Pela construção feita na seção anterior, se X, Y e Z forem os traços de um ponto $P = (u : v : w)$, então $X = (0 : S_{APC} : S_{ABP})$, $Y = (S_{PBC} : 0 : S_{ABP})$ e $Z = (S_{PBC} : S_{APC} : 0)$. Ou seja, no caso de X, basta tomar $u = 0$, $v = S_{APC}$ e $w = S_{ABP}$, e assim por diante.
Reciprocamente, sendo $X = (0 : S_{APC} : S_{ABP})$, $Y = (S_{PBC} : 0 : S_{ABP})$ e $Z = (S_{PBC} : S_{APC} : 0)$,

mostremos que eles são os traços de P. Para isto, devemos mostrar que $P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$. Isto será feito obtendo-se a intersecção das cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ e $\overline{CZ}$.

Sendo $r.u + s.v + t.w = 0$ a equação da reta que passa por $A = (1 : 0 : 0)$ e $X = (0 : S_{APC} : S_{ABP})$ então

$$\begin{cases} r.1 + s.0 + t.0 = 0 \Rightarrow r = 0 \\ r.0 + s.S_{APC} + t.S_{ABP} = 0 \Rightarrow s = -\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.t \end{cases}$$

Logo,

$$0.u + \left(-\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.t\right).v + t.w = 0 \Longrightarrow \overleftrightarrow{AX} : w = \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v$$

Analogamente, como $Y = (S_{PBC} : 0 : S_{ABP})$ e $Z = (S_{PBC} : S_{APC} : 0)$, as retas $\overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{CZ}$ terão equações $u = \frac{S_{PBC}}{S_{ABP}}.w$ e $v = \frac{S_{APC}}{S_{PBC}}.u$, respectivamente. A intersecção das retas $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ e $\overleftrightarrow{CZ}$ nos dá o ponto P:

$$\begin{cases} u = \frac{S_{PBC}}{S_{ABP}}.w \\ v = \frac{S_{APC}}{S_{PBC}}.u \\ w = \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P &= (u : v : w) = \left(u : \frac{S_{APC}}{S_{PBC}}.u : \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.v\right) = \left(u : \frac{S_{APC}}{S_{PBC}}.u : \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}.\frac{S_{APC}}{S_{PBC}}.u\right) = \\ &= \left(1 : \frac{S_{APC}}{S_{PBC}} : \frac{S_{ABP}}{S_{PBC}}\right) = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}). \end{aligned}$$

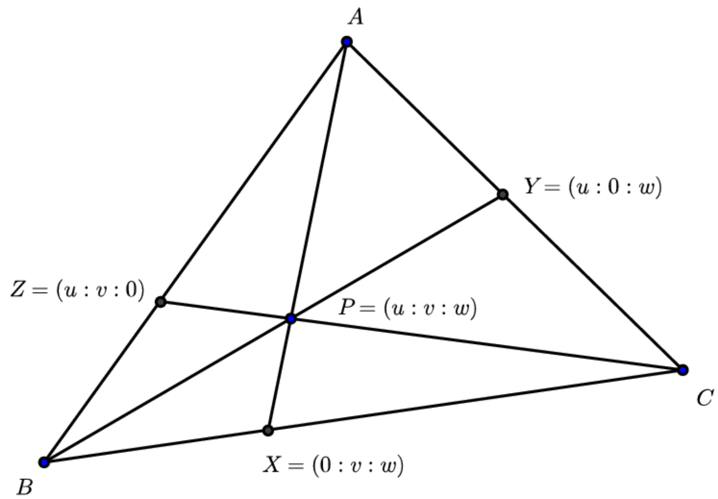

Figura 2.10: O Teorema de Ceva para Coordenadas Baricêntricas.

Capítulo 3

Pontos Notáveis de um Triângulo

Neste capítulo, calculamos as coordenadas baricêntricas de alguns pontos notáveis de um triângulo. O baricentro G já foi estudado no capítulo anterior, e suas coordenadas baricêntricas são dadas por $G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$. Faremos o mesmo para o incentro, o circuncentro e o ortocentro.

3.1 Coordenadas Baricêntricas do Incentro

Lembramos que o incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita a este triângulo. Ele pode ser determinado como sendo o ponto de intersecção entre as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e I o seu incentro. Sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ e r o raio da circunferência inscrita ao triângulo $\triangle ABC$. Por (2.12), as coordenadas baricêntricas de I são

$$I = (u : v : w) = \left(\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{AIC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{ABI}}{S_{ABC}}\right).$$

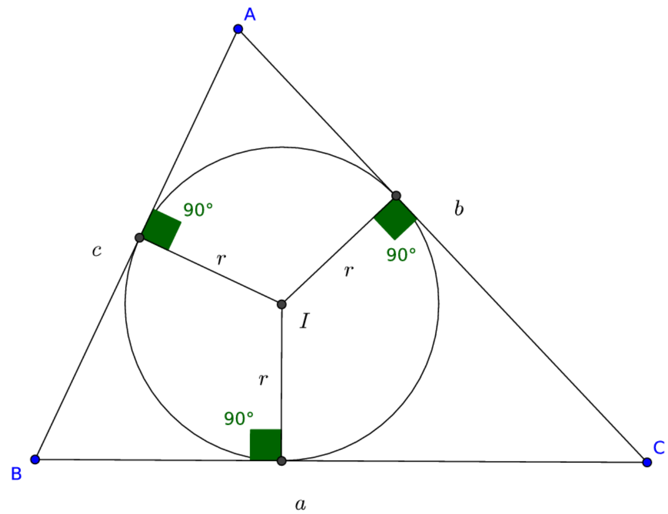

Figura 3.1: Incentro (I) de um triângulo ABC.

Como a circunferência inscrita ao triângulo $\triangle ABC$ tangencia seus lados, o raio r desta circunferência pode ser visto como medidas de alturas dos triângulos S_{IBC}, S_{AIC} e S_{ABI}. Assim,

$$\begin{aligned} I &= (u:v:w) = \frac{1}{S_{ABC}}\left(S_{IBC}:S_{AIC}:S_{ABI}\right) = \left(S_{IBC}:S_{AIC}:S_{ABI}\right) = \\ &= \left(\frac{a.r}{2}:\frac{b.r}{2}:\frac{c.r}{2}\right) = \left(\frac{r}{2}.a:\frac{r}{2}.b:\frac{r}{2}.c\right) = (a:b:c). \end{aligned}$$

Portanto, dado um triângulo $\triangle ABC$, as coordenadas baricêntricas de seu incentro são

$$I = (BC:AC:AB). \tag{3.1}$$

3.2 Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro

Lembramos que o circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a este triângulo. Ele pode ser determinado como sendo o ponto de intersecção entre as mediatrizes dos lados do triângulo.

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo $\triangle ABC$ e O o seu circuncentro. Sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABC$. Por (2.12), as coordenadas baricêntricas de O são

$$O = (u:v:w) = \left(\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}:\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}:\frac{S_{ABO}}{S_{ABC}}\right) = \left(S_{OBC}:S_{AOC}:S_{ABO}\right).$$

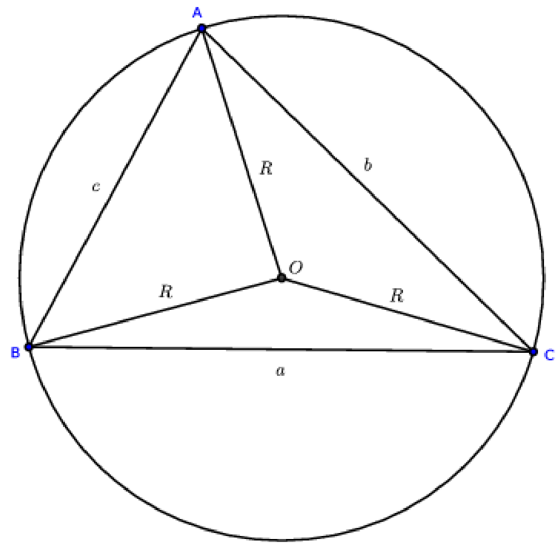

Figura 3.2: Circuncentro (O) de um triângulo ABC.

Denotemos por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ as medidas dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Pelo teorema do ângulo inscrito, temos que a medida do arco BC, que não contém A, é igual ao dobro de $\hat{A}$. Assim, a medida do ângulo central $\angle BOC$ é igual a $2\hat{A}$. Consequentemente,

$$S_{OBC} = \frac{R^2.\text{sen}\,(2\hat{A})}{2} = R^2.\text{sen}\hat{A}.\cos\hat{A}.$$

Analogamente,

$$S_{AOC} = \frac{R^2.\text{sen}\,(2\hat{B})}{2} = R^2.\text{sen}\hat{B}.\cos\hat{B}.$$

$$S_{ABO} = \frac{R^2.\text{sen}\,(2\hat{C})}{2} = R^2.\text{sen}\hat{C}.\cos\hat{C}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} O &= \left(R^2.\text{sen}\hat{A}.\cos\hat{A} : R^2.\text{sen}\hat{B}.\cos\hat{B} : R^2.\text{sen}\hat{C}.\cos\hat{C}\right) = \\ &= \left(2.R.\text{sen}\hat{A}.\cos\hat{A} : 2.R.\text{sen}\hat{B}.\cos\hat{B} : 2.R.\text{sen}\hat{C}.\cos\hat{C}\right). \end{aligned}$$

Pela Lei dos Senos, temos que

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2.R \Rightarrow 2.R.\text{sen}\hat{A} = a.$$

Pela Lei dos Cossenos, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.b.c}.$$

Analogamente,

$$2.R.\text{sen}\hat{B} = b \ \text{ e } \ \cos\hat{B} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2.a.c}.$$

e

$$2.R.\text{sen}\hat{C} = c \ \text{ e } \ \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} O &= \left(a.\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2.b.c}\right) : b.\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2.a.c}\right) : c.\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2.a.b}\right)\right) \\ &= \left(a^2.\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2.a.b.c}\right) : b^2.\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2.a.b.c}\right) : c^2.\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2.a.b.c}\right)\right) \\ &= \left(a^2.\left(-a^2+b^2+c^2\right) : b^2.\left(a^2-b^2+c^2\right) : c^2.\left(a^2+b^2-c^2\right)\right). \end{aligned}$$

Portanto, dado um triângulo $\triangle ABC$, as coordenadas baricêntricas de seu circuncentro são

$$O = \left(a^2.\left(-a^2+b^2+c^2\right) : b^2.\left(a^2-b^2+c^2\right) : c^2.\left(a^2+b^2-c^2\right)\right). \tag{3.2}$$

3.3 Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro

Lembramos que o ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção entre as alturas do triângulo, traçadas a partir de seus vértices. Sejam A, B e C os vértices de um triângulo $\triangle ABC$, com $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, e H o seu ortocentro. Tomamos os traços X, Y e Z de H como sendo os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Temos alguns casos para analisar.

Caso 1: o triângulo $\triangle ABC$ é acutângulo (vide figura 3.3).

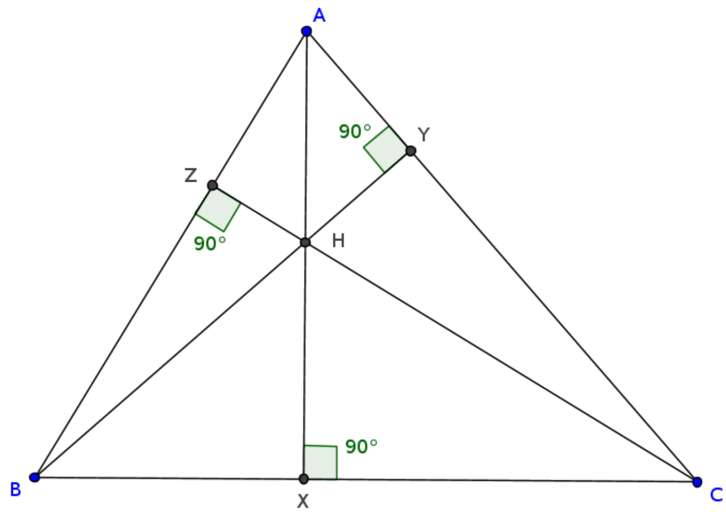

Figura 3.3: Ortocentro (H) de um triângulo ABC.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle ABX$ e $\triangle AXC$, temos:

$$\begin{cases} BX^2 + XA^2 = AB^2 \\ XC^2 + XA^2 = AC^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} BX^2 + XA^2 = c^2 \\ (a - BX)^2 + XA^2 = b^2 \end{cases}$$

Consequentemente,

$$BX = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2.a}$$

e

$$XC = a - XB = \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{2.a}.$$

De modo análogo, aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle BAY$ e $\triangle BCY$, teremos:

$$AY = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.b}$$

e

$$YC = \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{2.b},$$

E aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle CAZ$ e $\triangle CZB$, teremos:

$$AZ = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.c}$$

e

$$ZB = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2.c}.$$

Por (2.13)

$$\begin{cases} X = (0 : XC : BX) = \left(0 : \frac{+a^2+b^2-c^2}{2.a} : \frac{+a^2-b^2+c^2}{2.a}\right) \\ Y = (YC : 0 : AY) = \left(\frac{+a^2+b^2-c^2}{2.b} : 0 : \frac{-a^2+b^2+c^2}{2.b}\right) \\ Z = (ZB : AZ : 0) = \left(\frac{+a^2-b^2+c^2}{2.c} : \frac{-a^2+b^2+c^2}{2.c} : 0\right) \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} X = \left(0 : \frac{+a^2+b^2-c^2}{(+a^2+b^2-c^2).(+a^2-b^2+c^2)} : \frac{+a^2-b^2+c^2}{(+a^2+b^2-c^2).(+a^2-b^2+c^2)}\right) \\ Y = \left(\frac{+a^2+b^2-c^2}{(+a^2+b^2-c^2).(-a^2+b^2+c^2)} : 0 : \frac{-a^2+b^2+c^2}{(+a^2+b^2-c^2).(-a^2+b^2+c^2)}\right) \\ Z = \left(\frac{+a^2-b^2+c^2}{(+a^2-b^2+c^2).(-a^2+b^2+c^2)} : \frac{-a^2+b^2+c^2}{(+a^2-b^2+c^2).(-a^2+b^2+c^2)} : 0\right) \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X &= \left(0 : \frac{1}{+a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 + b^2 - c^2}\right) \\ Y &= \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : 0 : \frac{1}{+a^2 + b^2 - c^2}\right) \\ Z &= \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 - b^2 + c^2} : 0\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pelo Teorema de Ceva para coordenadas baricêntricas, concluímos que

$$H = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 + b^2 - c^2}\right). \tag{3.4}$$

Caso 2: o triângulo $\triangle ABC$ é obtusângulo. Neste caso, as coordenadas baricêntricas do ortocentro também são dadas por (3.4). No entanto, a prova deste resultado para este caso exige análise de sinais. Por exemplo, suponhamos que o ângulo obtuso ocorra no vértice B. Assim,

$$\begin{cases} X = (0 : XC : -BX) = \left(0 : \frac{+a^2+b^2-c^2}{2.a} : \frac{+a^2-b^2+c^2}{2.a}\right) \\ Y = (YC : 0 : AY) = \left(\frac{+a^2+b^2-c^2}{2.b} : 0 : \frac{-a^2+b^2+c^2}{2.b}\right) \\ Z = (-ZB : AZ : 0) = \left(\frac{+a^2-b^2+c^2}{2.c} : \frac{-a^2+b^2+c^2}{2.c} : 0\right) \end{cases}$$

Desta forma,

$$H = \left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{+a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Caso 3: o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo. Neste caso, é importante destacar qual é o ângulo reto do triângulo.

1. o ângulo reto ocorre no vértice A. Neste caso,

$$H = A = (1 : 0 : 0).$$

2. o ângulo reto no vértice B. Neste caso,

$$H = B = (0 : 1 : 0).$$

3. o ângulo reto ocorre no vértice C. Neste caso,

$$H = C = (0 : 0 : 1).$$

Capítulo 4

Teorema de Conway e o Ponto de Fermat

Neste capítulo, determinaremos as coordenadas baricêntricas de um importante ponto de um triângulo, o chamado Ponto de Fermat do triângulo. Elas serão calculadas de duas maneiras: em função de áreas e em função de ângulos.

4.1 A Fórmula de Conway

Nesta seção, apresentamos o Teorema de Conway ([5] e [6]), com a qual obteremos as coordenadas baricêntricas de um ponto em função de certos ângulos. Começamos introduzindo algumas notações.

Considere um triângulo de vértices A, B e C. Denotamos por $\widetilde{S}$ o dobro da área deste triângulo. Se θ for a medida de um ângulo, o símbolo S_θ será usado para denotar o número real $\widetilde{S}.\text{cotg}\theta$.

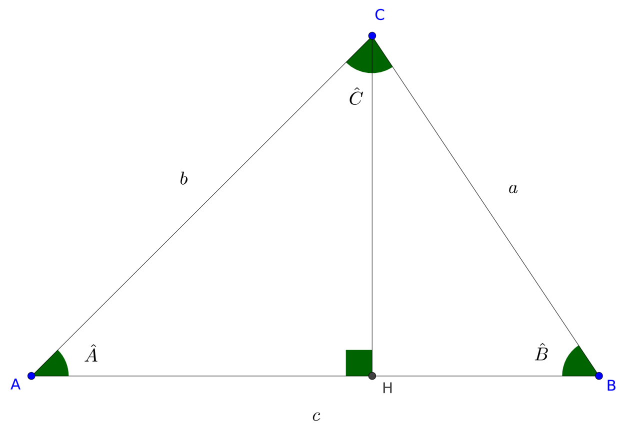

Figura 4.1: Ângulos internos de um triângulo ABC.

Denotando por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ as medidas dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, H o pé da perpendicular baixada por C, $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ (como na figura 4.1), temos

$$S_A = b.c.\text{sen}\hat{A}.\frac{\cos\hat{A}}{\text{sen}\hat{A}} = b.c.\cos\hat{A}.$$

Pela Lei dos Cossenos, como $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$, temos:

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Analogamente,

$$S_B = a.c.\cos\hat{B} = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2} \quad \text{e} \quad S_C = a.b.\cos\hat{C} = \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Além disso,

$$S_B + S_C = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2} + \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{2} = a^2.$$

A seguir, enunciamos e demonstramos o Teorema de Conway (vide [2]), que nos dá uma expressão para as coordenadas baricêntricas de um ponto em função de ângulos que este ponto forma com um lado do triângulo de referência.

Teorema 4.1 *(Teorema de Conway) Dados um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P tal que P e A estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$, sejam $a = BC$, $\theta = \angle CBP$ e $\varphi = \angle BCP$ as medidas dos ângulos que P forma com o lado $\overline{BC}$. Então, as coordenadas baricêntricas de P são*

$$P = \left(-a^2 : S_C + S_\varphi : S_B + S_\theta\right). \tag{4.1}$$

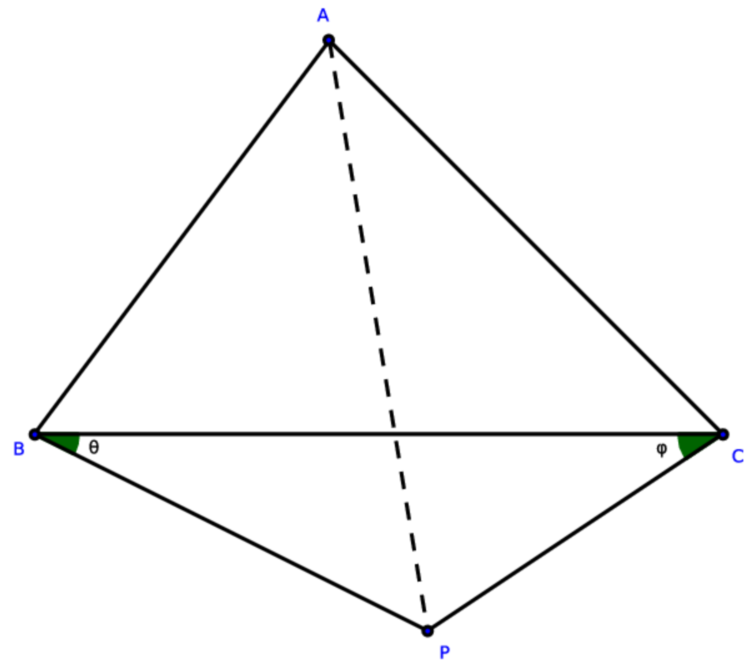

Figura 4.2: P externo ao triângulo ABC, e seus ângulos com o lado BC.

Prova: Por (2.12), temos que $P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$. Então, aplicando-se a Lei dos Senos ao triângulo $\triangle PCB$, temos:

$$\frac{\text{sen}\varphi}{BP} = \frac{\text{sen}\theta}{CP} = \frac{\text{sen}\hat{P}}{BC}.$$

Assim,

$$BP = \frac{BC.\text{sen}\varphi}{\text{sen}\hat{P}} = \frac{a.\text{sen}\varphi}{\text{sen}(\pi - (\theta + \varphi))} = \frac{a.\text{sen}\varphi}{\text{sen}(\theta + \varphi)}$$

e

$$CP = \frac{BC.\text{sen}\theta}{\text{sen}\hat{P}} = \frac{a.\text{sen}\theta}{\text{sen}(\pi - (\theta + \varphi))} = \frac{a.\text{sen}\theta}{\text{sen}(\theta + \varphi)}.$$

Consequentemente, a área do triângulo $\triangle PBC$ é dada por

$$\frac{1}{2}.a.\frac{a.\text{sen}\varphi}{\text{sen}(\theta + \varphi)}.\text{sen}\theta = \frac{a^2\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta}{2.\text{sen}(\theta + \varphi)}$$

e a área do triângulo $\triangle PCA$ é dada por

$$\frac{1}{2}.\frac{a.\text{sen}\theta}{\text{sen}(\theta + \varphi)}.b.\text{sen}(\pi - (\hat{C} + \varphi)) = \frac{a.b.\text{sen}\theta.\text{sen}(\hat{C} + \varphi)}{2.\text{sen}(\theta + \varphi)}$$

Também temos que a área do triângulo $\triangle PBA$ é dada por

$$\frac{1}{2}.\frac{a.\text{sen}\varphi}{\text{sen}(\theta+\varphi)}.c.\text{sen}(\pi-(\hat{B}+\theta)) = \frac{a.c.\text{sen}\varphi.\text{sen}(\hat{B}+\theta)}{2.\text{sen}(\theta+\varphi)}.$$

Por fim, como $P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$, então,

$$\begin{aligned}
P &= \left(-\frac{a^2\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta}{2.\text{sen}(\theta+\varphi)} : \frac{a.b.\text{sen}\theta.\text{sen}(\hat{C}+\varphi)}{2.\text{sen}(\theta+\varphi)} : \frac{a.c.\text{sen}\varphi.\text{sen}(\hat{B}+\theta)}{2.\text{sen}(\theta+\varphi)}\right) = \\
&= \left(-a^2\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta : a.b.\text{sen}\theta.\text{sen}(\hat{C}+\varphi) : a.c.\text{sen}\varphi.\text{sen}(\hat{B}+\theta)\right) = \\
&= \left(-\frac{a^2\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta}{\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta} : \frac{a.b.\text{sen}\theta.\text{sen}(\hat{C}+\varphi)}{\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta} : \frac{a.c.\text{sen}\varphi.\text{sen}(\hat{B}+\theta)}{\text{sen}\varphi.\text{sen}\theta}\right) = \\
&= \left(-a^2 : \frac{a.b.\text{sen}(\hat{C}+\varphi)}{\text{sen}\varphi} : \frac{a.c.\text{sen}(\hat{B}+\theta)}{\text{sen}\theta}\right) = \\
&= \left(-a^2 : a.b.\text{sen}\hat{C}.\text{cotg}\varphi + a.b.\cos\hat{C} : a.c.\text{sen}\hat{B}.\text{cotg}\theta + a.c.\cos\hat{B}\right) = \\
&= \left(-a^2 : a.b.\text{sen}\hat{C}.\text{cotg}\varphi + S_C : a.c.\text{sen}\hat{B}.\text{cotg}\theta + S_B\right) = \left(-a^2 : S_\varphi + S_C : S_\theta + S_B\right).
\end{aligned}$$

De modo análogo, dados um triângulo $\triangle ABC$, X', Y' e Z' pontos tais que X' e A estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$, Y' e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, Z' e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, se os ângulos X', Y' e Z' formam com os seus respectivos lados do triângulo ângulos de medidas θ_i e φ_i, como na figura 4.3, então X', Y' e Z' têm coordenadas baricêntricas dadas por

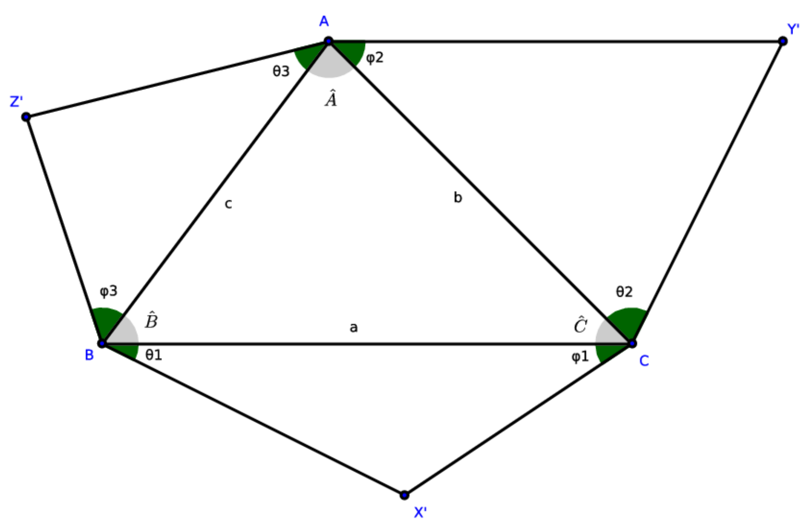

Figura 4.3: Teorema de Conway para três pontos.

$$\begin{aligned} X' &= \left(-a^2 : S_{\varphi 1} + S_C : S_{\theta 1} + S_B\right), \\ Y' &= \left(S_{\theta 2} + S_C : -b^2 : S_{\varphi 2} + S_A\right), \\ Z' &= \left(S_{\varphi 3} + S_B : S_{\theta 3} + S_A : -c^2\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 O Ponto de Fermat

Fermat propôs a Torricelli o problema de se "determinar um ponto no plano de um triângulo de modo que a soma de suas distâncias aos três vértices fosse mínima". Esse ponto, chamado *centro isogônico* do triângulo, foi o primeiro ponto notável de um triângulo a ser descoberto desde os tempos da matemática grega antiga. Uma solução envolvendo triângulos equiláteros foi publicada por J. E. Hofmann em 1929 ([4]):

Em um triângulo $\triangle ABC$, tome um ponto P qualquer. Trace os segmentos que ligam P aos vértices A, B e C. Rotacione externamente o triângulo $\triangle PAB$ em 60^o, com centro em B, encontrando o $\triangle C'P'B$. Logo, os triângulos $\triangle P'PB$ e $\triangle C'AB$ são equiláteros. Desta forma, vimos que não importa como o ponto P seja tomado no $\triangle ABC$, a rotação sempre levará o vértice A ao vértice C' de um triângulo equilátero construído externamente sobre $\overline{AB}$, com $C' \neq A$ e $C' \neq B$.

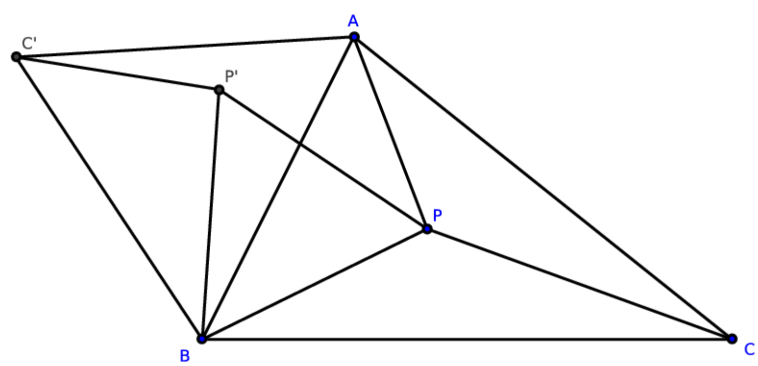

Figura 4.4: Rotação do $\triangle PAB$ em 60^o, com eixo em B, encontrando o $\triangle C'P'B$.

Além disso, como $\triangle P'PB$ é um triângulo equilátero, temos que $PB = PP'$. A rotação leva $\overline{AP}$ em $\overline{C'P'}$, fazendo com que $AP = C'P'$. Consequentemente,

$$PA + PB + PC = C'P' + P'P + PC = C'P'PC.$$

Para todas as escolhas de P, o "caminho" $C'P'PC$ começa no mesmo ponto C' e termina no mesmo ponto C. Uma condição para que P realize a menor soma das distâncias aos vértices do triângulo é que $C'P'PC$ seja um segmento de reta ligando C' a C. Neste caso, o ponto P deveria estar sobre a reta $\overleftrightarrow{C'C}$ e o ângulo $\angle BPC'$ tem que medir 60^o. Portanto, para construir a solução, devemos encontrar a intersecção entre a reta que passa por C' e C, com a circunferência circunscrita ao triângulo equilátero $\triangle C'AB$.

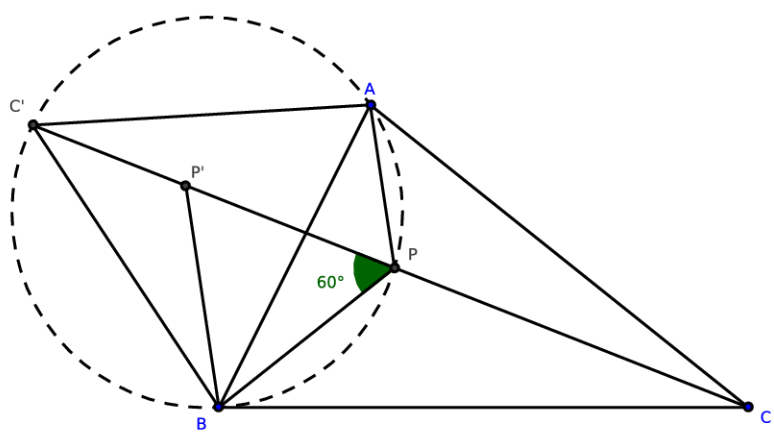

Figura 4.5: A solução para o Ponto de Fermat.

4.3 Coordenadas Baricêntricas do Ponto de Fermat

Na seção anterior, apresentamos uma possível construção para o Ponto de Fermat de um triângulo. Observamos que ela é equivalente à seguinte: dado o triângulo $\triangle ABC$, sejam X', Y' e Z' os vértices dos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. O ponto de Fermat pode ser obtido pela intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{CZ'}$, $\overleftrightarrow{BY'}$ e $\overleftrightarrow{AX'}$.

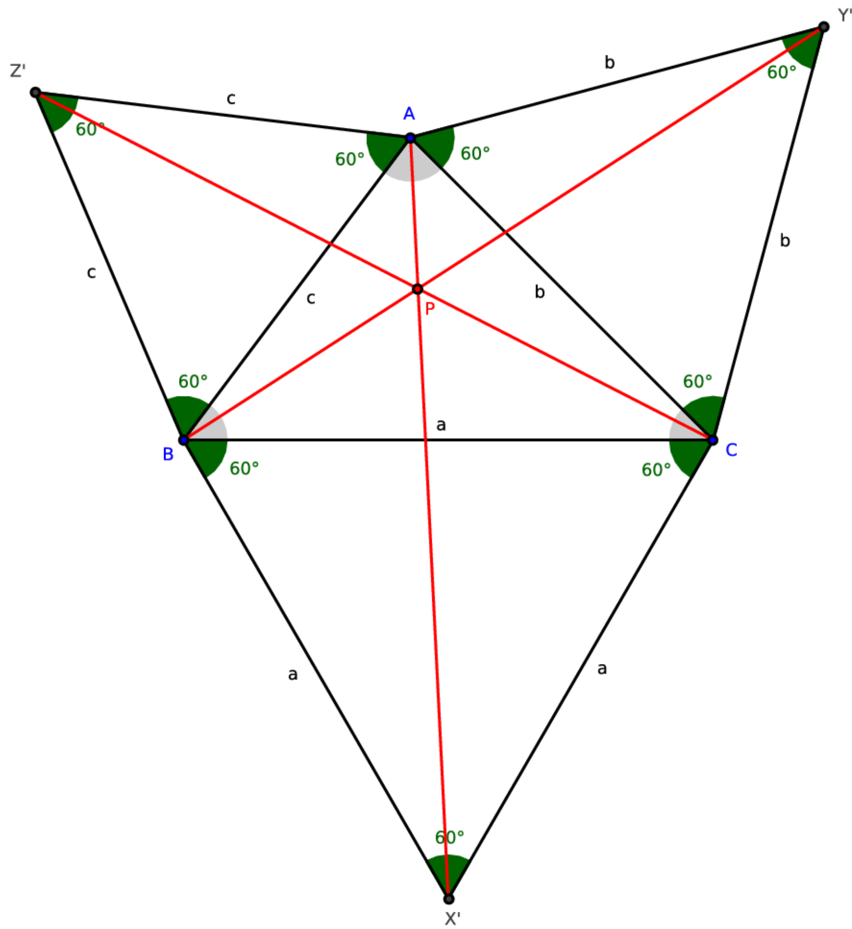

Figura 4.6: Uma possível construção para o Ponto de Fermat.

Para encontramos as coordenadas baricêntricas do Ponto de Fermat, tomaremos $\theta_i = \varphi_i = \frac{\pi}{3}$ nas coordenadas baricêntricas de X', Y' e Z' em (4.2) e procuraremos pela intersecção das retas $\overleftrightarrow{AX'}$, $\overleftrightarrow{BY'}$ e $\overleftrightarrow{CZ'}$. Sendo $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, temos que

$$S_{\frac{\pi}{3}} = \widetilde{S}.\text{cotg}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}},$$

onde $\widetilde{S}$ denota o dobro da área do triângulo $\triangle ABC$. Além disso,

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}, \quad S_B = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2}, \quad S_C = \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
X' &= \left(-a^2 : S_{\frac{\pi}{3}} + S_C : S_{\frac{\pi}{3}} + S_B\right) = \left(-a^2 : \frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C : \frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right) = \\
&= \left(\frac{-a^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}\right) = \\
&= \left(\frac{-a^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}\right).
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
Y' &= \left(S_{\frac{\pi}{3}} + S_C : -b^2 : S_{\frac{\pi}{3}} + S_A\right) = \left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C : -b^2 : \frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right) = \\
&= \left(\frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)} : \frac{-b^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)} : \frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{S}{\sqrt{3}} + S_A\right)}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)} : \frac{-b^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)} : \frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z' &= \left(S_{\frac{\pi}{3}} + S_B : S_{\frac{\pi}{3}} + S_A : -c^2\right) = \left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B : \frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A : -c^2\right) = \\
&= \left(\frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{-c^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)} : \frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{-c^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Em seguida, determinamos a equação da reta que passa por $A = (1 : 0 : 0)$ e X'. Como A pertence à reta $\overleftrightarrow{AX'}$ então

$$r.1 + s.0 + t.0 = 0.$$

Assim $r = 0$ e como X' pertence à reta $\overleftrightarrow{AX'}$, vale que

$$0.\left(\frac{-a^2}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right).\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}\right) + s.\left(\frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}\right) + t.\left(\frac{1}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}\right) = 0.$$

Logo,

$$s = -\frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}.t,$$

de onde segue que a equação da reta $\overleftrightarrow{AX'}$ é $w = \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_B\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_C\right)}.v$

Analogamente, a reta $\overleftrightarrow{BY'}$ tem $u = \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_C\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_A\right)}.w$ como equação, e $\overleftrightarrow{CZ'}$ é dada pela equação $v = \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_A\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}}+S_B\right)}.u$.

Como $\{P\} = \overleftrightarrow{AX'} \cap \overleftrightarrow{BY'} \cap \overleftrightarrow{CZ'}$, obtemos

$$\begin{aligned} P &= \left(u : \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}.u : \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}.\frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)}.u\right) = \left(1 : \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B\right)} : \frac{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A\right)}{\left(\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C\right)}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_A} : \frac{1}{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_B} : \frac{1}{\frac{\widetilde{S}}{\sqrt{3}} + S_C}\right). \end{aligned}$$

Portanto

$$P = \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{cotg}\hat{A}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{cotg}\hat{B}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{cotg}\hat{C}}\right). \tag{4.3}$$

A seguir, usamos [3] para apresentar uma expressão para as coordenadas baricêntricas de um ponto, em função dos ângulos que este ponto forma com os lados do triângulo de referência.

Teorema 4.2 *Dados um triângulo de referência $\triangle ABC$ e um ponto P, sejam $\alpha = \angle BPC$, $\beta = \angle CPA$, $\gamma = \angle APB$ os ângulos orientados formados por P e pelos lados do triângulo $\triangle ABC$. Então as coordenadas baricêntricas de P são dadas por*

$$P = \left(\frac{1}{\mathrm{cotg}\hat{A} - \mathrm{cotg}\alpha} : \frac{1}{\mathrm{cotg}\hat{B} - \mathrm{cotg}\beta} : \frac{1}{\mathrm{cotg}\hat{C} - \mathrm{cotg}\gamma}\right). \tag{4.4}$$

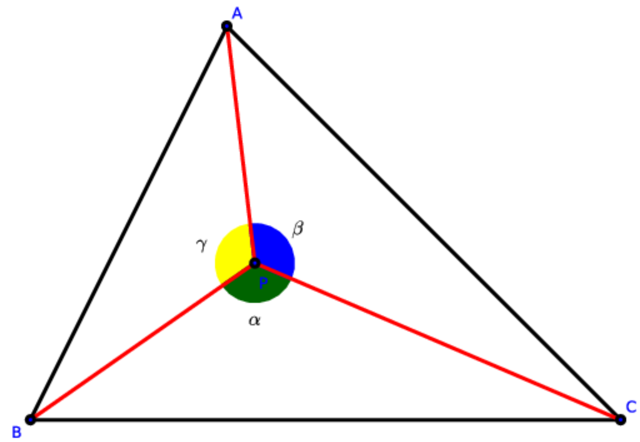

Figura 4.7: O ponto P “enxerga” os lados do triângulo com ângulos α, β e γ.

Prova: Construa a circunferência que passa pelos pontos B, P e C. Seja A' o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{AP}$ com esta circunferência, com $A' \neq P$. Assim, pelo teorema do ângulo inscrito, temos que $\angle A'BC = \angle A'PC = \pi - \angle CPA = \pi - \beta$ e $\angle A'CB = \angle A'PB = \pi - \angle APB = \pi - \gamma$.

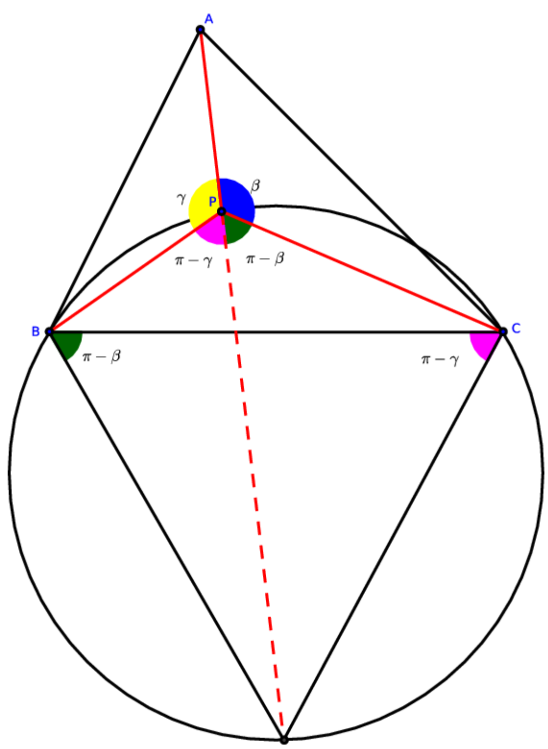

Figura 4.8: Construção da circunferência por B, P e C.

Pelo Teorema de Conway (Teorema 4.1), denotando por $\widetilde{S}$ o dobro da área do triângulo $\triangle ABC$, as coordenadas baricêntricas de A' são

$$\begin{aligned} A' &= \left(-a^2 : S_C + S_{\pi-\gamma} : S_B + S_{\pi-\beta}\right) = \\ &= \left(-a^2 : S_C + \widetilde{S}.\text{cotg}\,(\pi-\gamma) : S_B + \widetilde{S}.\text{cotg}\,(\pi-\beta)\right) = \\ &= \left(-a^2 : S_C - \widetilde{S}.\text{cotg}\,(\gamma) : S_B - \widetilde{S}.\text{cotg}\,(\beta)\right) = \\ &= \left(-a^2 : S_C - S_\gamma : S_B - S_\beta\right). \end{aligned}$$

Analogamente, seja $B' \neq P$ o ponto de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{BP}$ e a circunferência que passa por C, P e A, e seja $C' \neq P$ o ponto de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{CP}$ e a circunferência que passa A, P e B. Assim, B' e C' têm as seguintes coordenadas baricêntricas:

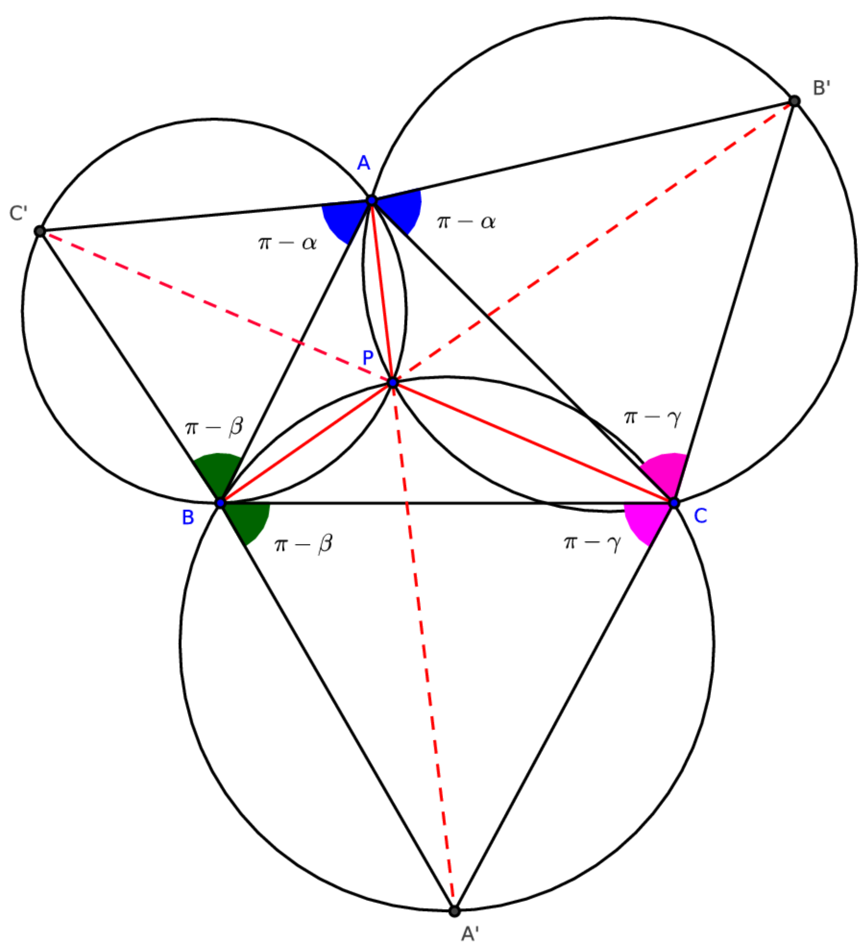

Figura 4.9: Determinando os pontos A', B' e C'.

$$B' = \left(S_C + S_{\pi-\gamma} : -b^2 : S_A + S_{\pi-\alpha}\right) = \left(S_C - S_\gamma : -b^2 : S_A - S_\alpha\right).$$

$$C' = \left(S_B + S_{\pi-\beta} : S_A + S_{\pi-\alpha} : -c^2\right) = \left(S_B - S_\beta : S_A - S_\alpha : -c^2\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A' &= \left(-a^2 : S_C - S_\gamma : S_B - S_\beta\right) = \\
&= \left(\frac{-a^2}{(S_C - S_\gamma)(S_B - S_\beta)} : \frac{S_C - S_\gamma}{(S_C - S_\gamma)(S_B - S_\beta)} : \frac{S_B - S_\beta}{(S_C - S_\gamma)(S_B - S_\beta)}\right) = \\
&= \left(\frac{-a^2}{(S_C - S_\gamma)(S_B - S_\beta)} : \frac{1}{S_B - S_\beta} : \frac{1}{S_C - S_\gamma}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B' &= \left(S_C - S_\gamma : -b^2 : S_A - S_\alpha\right) = \\
&= \left(\frac{S_C - S_\gamma}{(S_C - S_\gamma)(S_A - S_\alpha)} : \frac{-b^2}{(S_C - S_\gamma)(S_A - S_\alpha)} : \frac{S_A - S_\alpha}{(S_C - S_\gamma)(S_A - S_\alpha)}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{S_A - S_\alpha} : \frac{-b^2}{(S_C - S_\gamma)(S_A - S_\alpha)} : \frac{1}{S_C - S_\gamma}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C' &= \left(S_B - S_\beta : S_A - S_\alpha : -c^2\right) = \\
&= \left(\frac{S_B - S_\beta}{(S_B - S_\beta)(S_A - S_\alpha)} : \frac{S_A - S_\alpha}{(S_B - S_\beta)(S_A - S_\alpha)} : \frac{-c^2}{(S_B - S_\beta)(S_A - S_\alpha)}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{S_A - S_\alpha} : \frac{1}{S_B - S_\beta} : \frac{-c^2}{(S_B - S_\beta)(S_A - S_\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

Como o ponto P é obtido pela intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, onde

$$\begin{cases}
A' = & \left(\frac{-a^2}{(S_C - S_\gamma)\left(S_B - S_\beta\right)} : \frac{1}{S_B - S_\beta} : \frac{1}{S_C - S_\gamma}\right) \\
B' = & \left(\frac{1}{S_A - S_\alpha} : \frac{-b^2}{(S_C - S_\gamma)(S_A - S_\alpha)} : \frac{1}{S_C - S_\gamma}\right) \\
C' = & \left(\frac{1}{(S_A - S_\alpha} : \frac{1}{S_B - S_\beta} : \frac{-c^2}{\left(S_B - S_\beta\right)(S_A - S_\alpha)}\right)
\end{cases}$$

e calculamos os traços de A, B e C, a partir das cevianas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, respectivamente, e aplicamos o Teorema de Ceva para Coordenadas Baricêntricas, e concluímos que

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{S_A - S_\alpha} : \frac{1}{S_B - S_\beta} : \frac{1}{S_C - S_\gamma}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\text{cotg}\hat{A} - \text{cotg}\alpha} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{B} - \text{cotg}\beta} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{C} - \text{cotg}\gamma}\right). \end{aligned}$$

O Teorema anterior nos dá uma outra expressão para obtermos as coordenadas baricêntricas do Ponto de Fermat de um triângulo. Como vimos, o Ponto de Fermat pode ser obtido pela intersecção das retas que ligam os vértices do triângulo $\triangle ABC$ aos vértices externos dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo $\triangle ABC$. Constuindo-se a circunferência que passa por dois vértices do triângulo $\triangle ABC$ e pelo vértice do triângulo equilátero construído sobre este lado, vemos que os ângulos formados por essas retas são de 60^o, de modo que o Ponto de Fermat "enxerga" os lados do triângulo $\triangle ABC$ em 120^o. Assim, basta tomarmos $\alpha = \beta = \gamma = 120^o$ no Teorema 4.4:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\text{cotg}\hat{A} - \text{cotg}\,(120^o)} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{B} - \text{cotg}\,(120^o)} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{C} - \text{cotg}\,(120^o)}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\text{cotg}\hat{A} + \frac{1}{\sqrt{3}}} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{B} + \frac{1}{\sqrt{3}}} : \frac{1}{\text{cotg}\hat{C} + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right). \end{aligned}$$

Capítulo 5

Atividades para a sala de aula

Neste capítulo, damos alguns exemplos envolvendo cálculos de coordenadas baricêntricas, com o intuito de explorar os conceitos trabalhados nos capítulos anteriores. Esses exemplos podem ser usados como atividades nas aulas de Geometria do ensino médio ou fundamental. É uma boa oportunidade para destacar o papel das coordenadas baricêntricas e de discutir alguns pontos notáveis de um triângulo. Para a realização das atividades, sugerimos que seja usado algum software de Geometria Dinâmica para visualizar e conferir os cálculos realizados. Para a construção de nossos exemplos, foi usado o Geogebra (versão 4.2), software multiplataforma gratuito (http://www.geogebra.org).

5.1 Atividades

Nos Exemplos 5.1 e 5.2, trabalhamos com o conceito de baricentro de triângulo. Já sabemos que as coordenadas baricêntricas do baricentro G de um triângulo $\triangle ABC$ são $G = (1/3 : 1/3 : 1/3)$, independentemente das coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo. Agora, a partir das coordenadas baricêntricas, desejamos recuperar as coordenadas cartesianas.

Exemplo 5.1 *Suponha que $A = (2,4)$, $B = (-2,-1)$ e $C = (3,0)$ sejam os vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Determine as coordenadas cartesianas do baricentro G deste triângulo $\triangle ABC$.*

Solução: Com o uso do Geogebra, podemos construir o baricentro do triângulo a partir da intersecção das medianas do triângulo. No entanto, usaremos (2.1). Como as coordenadas baricêntricas de G são $G = (\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3})$, então

$$G = \frac{\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}(2,4) + \frac{1}{3}(-2,-1) + \frac{1}{3}(3,0)}{1} = (\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 1, \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 0) = (1,1).$$

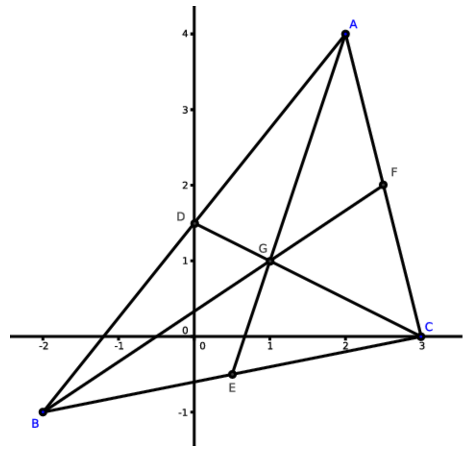

Figura 5.1: Exemplo 5.1.

Exemplo 5.2 *Dados os vértices $A = (2,4)$ e $B = (1,-1)$ de um triângulo $\triangle ABC$, e seu baricentro $G = (3,2)$, determine as coordenadas cartesianas do vértice C.*

Solução: Sejam (x, y) as coordenadas cartesianas do vértice C. Usando as coordenadas baricêntricas de G, temos por (2.1) que

$$G = \frac{\frac{1}{3}(2,4) + \frac{1}{3}(1,-1) + \frac{1}{3}(x,y)}{1} = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{x}{3}, \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{y}{3}) = (1 + \frac{x}{3}, 1 + \frac{y}{3}) = (3,2).$$

Assim, $1 + \frac{x}{3} = 3$ e $1 + \frac{y}{3} = 2$. Portanto, $C = (6,3)$. Estes cálculos podem ser verificados com o Geogebra, construindo-se o triângulo $\triangle ABC$, com $C = (6,3)$, e daí construindo-se seu baricentro, e comparando-o com $(3,2)$.

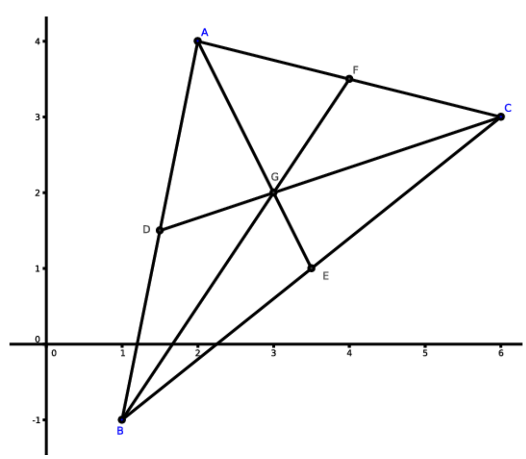

Figura 5.2: Exemplo 5.2.

Nos Exemplos 5.3 e 5.4, trabalhamos com o conceito de incentro de triângulo. As coordenadas baricêntricas do baricentro I de um triângulo $\triangle ABC$ foram obtidas, de forma geral, em (3.1).

Exemplo 5.3 *Suponha que $A = (1,4)$, $B = (-2,-2)$ e $C = (7,0)$ sejam os vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Determine as coordenadas baricêntricas e cartesianas do incentro I deste triângulo $\triangle ABC$.*

Solução: Primeiramente, calculamos os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\begin{aligned} a &= BC = \sqrt{[7-(-2)]^2 + [0-(-2)]^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}, \\ b &= AC = \sqrt{(7-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, \\ c &= AB = \sqrt{[1-(-2)]^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Por (3.1), temos

$$I = (a:b:c) = (\sqrt{85} : 2\sqrt{13} : 3\sqrt{5})$$

As coordenadas cartesianas de I podem ser agora obtidas por (2.1):

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{85}(1,4) + 2\sqrt{13}(-2,-2) + 3\sqrt{5}(7,0)}{\sqrt{85} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{5}} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{85} - 4\sqrt{13} + 21\sqrt{5}}{\sqrt{85} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{85} - 4\sqrt{13} + 0}{\sqrt{85} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{5}}\right) \approx (1,80; 0,97). \end{aligned}$$

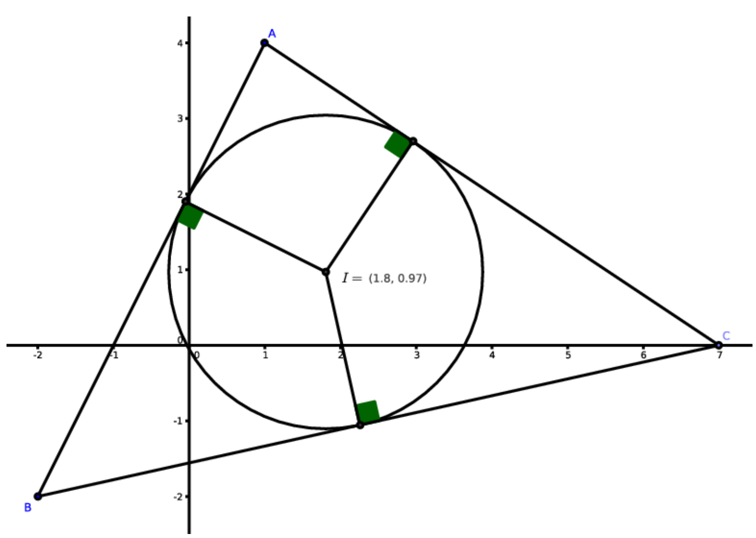

Figura 5.3: Exemplo 5.3.

Os cálculos podem ser novamente verificados com o uso do Geogebra. Neste caso, o incentro é construído como sendo o centro da circunferência inscrita ao triângulo, ou como a intersecção das bissetrizes internas do triângulo.

Exemplo 5.4 *Dados os vértices $A = (3,5)$ e $B = (-1,2)$ de um triângulo $\triangle ABC$, e as coordenadas de seu Incentro $I = (4:3:5) = (2,3)$, determine as coordenadas cartesianas do vértice C.*

Solução: Sejam (x,y) as coordenadas cartesianas do vértice C. Usando as coordenadas baricêntricas de I, temos por (2.1) que

$$I = \frac{4(3,5)+3(-1,2)+5(x,y)}{4+3+5} = (\frac{12-3+5x}{12}, \frac{20+6+5y}{12}) = (\frac{9+5x}{12}, \frac{26+5y}{12}) = (2,3).$$

Assim, $\frac{9+5x}{12} = 2$ e $\frac{26+5y}{12} = 3$. Portanto, $C = (x,y) = (3,2)$. Estes cálculos podem ser verificados com o Geogebra, construindo-se o triângulo $\triangle ABC$, com $C = (2,3)$, e daí construindo-se seu incentro, e comparando-o com $(2,3)$.

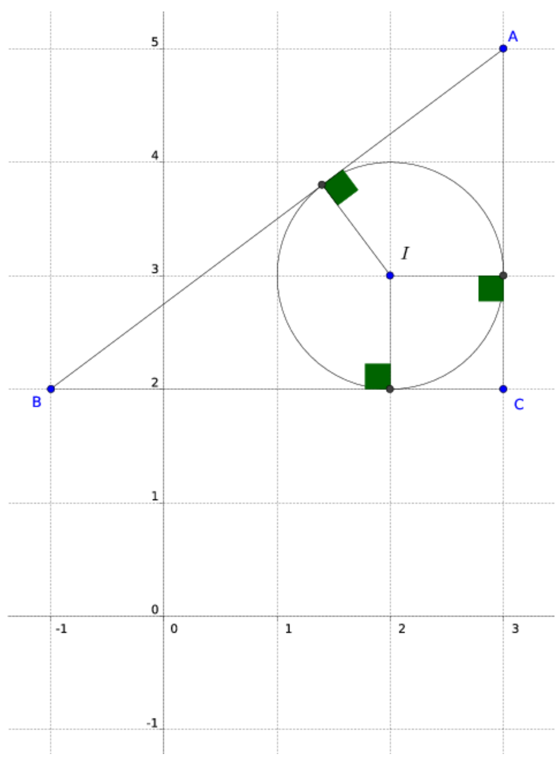

Figura 5.4: Exemplo 5.4.

Nos Exemplos 5.5 e 5.6, trabalhamos com o conceito de circuncentro de triângulo. As coordenadas baricêntricas do circuncentro O de um triângulo $\triangle ABC$ foram obtidas, de forma geral, em (3.2).

Exemplo 5.5 *Suponha que* $A = (4,5)$, $B = (-2,0)$ *e* $C = (4,-1)$ *sejam os vértices de um triângulo* $\triangle ABC$. *Determine as coordenadas baricêntricas e cartesianas do circuncentro* O *deste triângulo* $\triangle ABC$.

Solução: Primeiramente, determinamos os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\begin{aligned} a &= BC = \sqrt{(-2-4)^2 + [0-(-1)]^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}, \\ b &= AC = \sqrt{(4-4)^2 + [5-(-1)]^2} = \sqrt{0+36} = \sqrt{36} = 6, \\ c &= AB = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (5-0)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}. \end{aligned}$$

Por (3.2),

$$\begin{aligned} O &= (a^2(-a^2+b^2+c^2) : b^2(a^2-b^2+c^2) : c^2(a^2+b^2-c^2) = \\ &= (\sqrt{37}^2(-\sqrt{37}^2 + 6^2 + \sqrt{61}^2) : 6^2(\sqrt{37}^2 - 6^2 + \sqrt{61}^2) : \sqrt{61}^2(\sqrt{37}^2 + 6^2 - \sqrt{61}^2) = \\ &= (37(-37+36+61) : 36(37-36+61) : 61(37+36-61)) = \\ &= (37.60 : 36.62 : 61.12) = (2220 : 2232 : 732) = (185 : 186 : 61). \end{aligned}$$

Por (2.1):

$$O = \frac{185(4,5) + 186(-2,0) + 61(4,-1)}{185+186+61} = \left(\frac{612}{432}, \frac{864}{432}\right) = \left(\frac{17}{12}, 2\right).$$

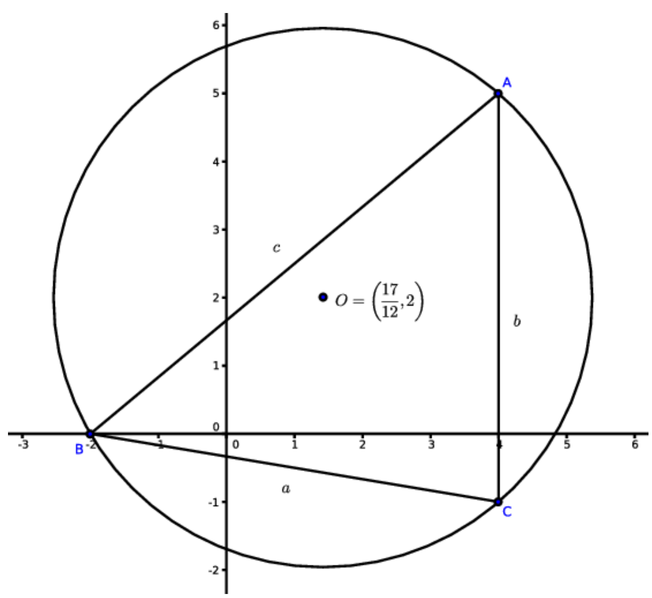

Figura 5.5: Exemplo 5.5.

Os cálculos podem ser novamente verificados com o uso do Geogebra. Neste caso, o circuncentro é construído como sendo o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou como a intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo. A propriedade da mediatriz como lugar geométrico será explorada no próximo exemplo: qualquer ponto de uma mediatriz de um segmento equidista dos extremos do segmento.

Exemplo 5.6 *Dado um triângulo de vértices* $A = (-3, -1)$, $B = (-1, 3)$ *e* $C = (2, 2)$, *determine as coordenadas cartesianas do ponto* O *que é equidistante dos vértices do triângulo.*

Solução: Sabemos que este ponto O é o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$. Primeiramente, calculamos os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\begin{aligned}
a &= BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, \\
b &= AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}, \\
c &= AB = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Por (3.2),

$$\begin{aligned}
O &= (10.(-10+34+20) : 34.(10-34+20) : 20.(10+34-20)) = \\
&= (10.44 : 34.(-4) : 20.24) = (440 : -136 : 480) = \\
&= (55 : -17 : 60)\,.
\end{aligned}$$

Por (2.1), as coordenadas cartesianas de O são dadas por

$$O = \frac{55(-3,-1) - 17(-1,3) + 60(2,2)}{55 - 17 + 60} = \left(-\frac{28}{98}, \frac{14}{98}\right) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) \approx (-0,28; 0,14)\,.$$

Neste exemplo, podemos calcular a distância de O aos vértices do triângulo $\triangle ABC$ e verificar que elas são iguais. Isto também pode ser feito com o uso do Geogebra.

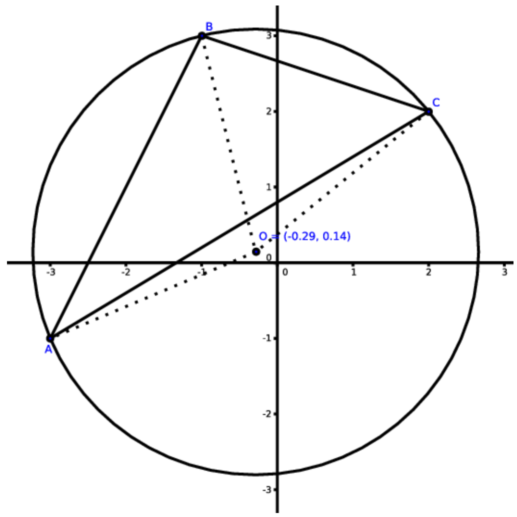

Figura 5.6: Exemplo 5.6.

No Exemplo 5.7, trabalhamos com o conceito de ortocentro de triângulo. As coordenadas baricêntricas do ortocentro H de um triângulo $\triangle ABC$ foram obtidas, de forma geral, em (3.4).

Exemplo 5.7 *Suponha que $A = (3, 2)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (2, -1)$ sejam os vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Determine as coordenadas baricêntricas e cartesianas do ortocentro H deste triângulo $\triangle ABC$ e dos pés das alturas.*

Solução: Primeiramente, calculamos os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\begin{aligned} a &= BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \\ b &= AC = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, \\ c &= AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Por (3.3) e (3.4), temos que

$$X = \left(0 : \frac{1}{+18-10+16} : \frac{1}{+18+10-16}\right) = \left(0 : \frac{1}{24} : \frac{1}{12}\right),$$

$$Y = \left(\frac{1}{-18+10+16} : 0 : \frac{1}{+18+10-16}\right) = \left(\frac{1}{8} : 0 : \frac{1}{12}\right),$$

$$Z = \left(\frac{1}{-18+10+16} : \frac{1}{+18-10+16} : 0\right) = \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{24} : 0\right),$$

$$H = \left(\frac{1}{-18+10+16} : \frac{1}{+18-10+16} : \frac{1}{+18+10-16} \right) = \left(\frac{1}{8} : \frac{1}{24} : \frac{1}{12} \right).$$

Por (2.1), as coordenadas cartesianas de X, Y, Z e H são:

$$X = \frac{0(3,2) + \frac{1}{24}(-1,2) + \frac{1}{12}(2,-1)}{0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}} = (1,0)\,,$$

$$Y = \frac{\frac{1}{8}(3,2) + 0(-1,2) + \frac{1}{12}(2,-1)}{\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{12}} = \left(\frac{13}{5}, \frac{4}{5} \right),$$

$$Z = \frac{\frac{1}{8}(3,2) + \frac{1}{24}(-1,2) + 0(2,-1)}{\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + 0} = (2,2)\,,$$

$$H = \frac{\frac{1}{8}(3,2) + \frac{1}{24}(-1,2) + \frac{1}{12}(2,-1)}{\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}} = (2,1)\,.$$

Novamente, estes cálculos podem ser verificados com o uso do Geogebra.

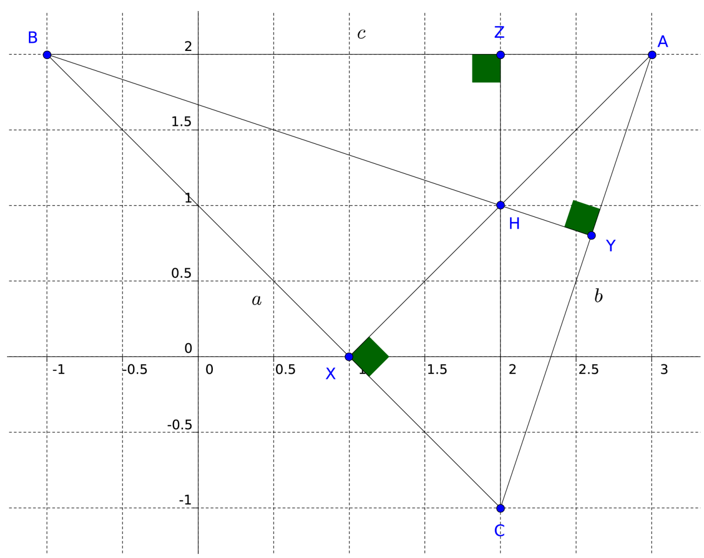

Figura 5.7: Exemplo 5.7.

No Exemplos 5.8, exploramos a construção do Ponto de Fermat de um triângulo.

Exemplo 5.8 *Suponha que $A = (-2,-1)$, $B = (3,0)$ e $C = (1,3)$ sejam os vértices de um triângulo $\triangle ABC$. Determine as coordenadas baricêntricas e cartesianas do Ponto de Fermat deste triângulo $\triangle ABC$.*

Solução: Por (4.4), basta determinarmos a cotangente dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Primeiramente, calculamos os comprimentos dos lados do triângulo.

$$\begin{aligned} a &= BC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \\ b &= AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \\ c &= AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos e dos Senos, temos que

$$\cos\hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.b.c} \quad \text{e} \quad \text{sen}\hat{A} = \frac{2.S}{b.c},$$

onde S denota a área do triângulo $\triangle ABC$. Assim,

$$\text{cotg}\hat{A} = \frac{\cos\hat{A}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.b.c}.\frac{b.c}{2.S} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4.S}.$$

Analogamente,

$$\text{cotg}\hat{B} = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{4.S} \quad \text{e} \quad \text{cotg}\hat{C} = \frac{+a^2 + b^2 - c^2}{4.S}.$$

Por (4.4),

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{cotg}\hat{A}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{cotg}\hat{B}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \text{cotg}\hat{C}} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-a^2+b^2+c^2}{4.S}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{+a^2-b^2+c^2}{4.S}} : \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{+a^2+b^2-c^2}{4.S}} \right). \end{aligned}$$

A área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2}.\left| \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{17}{2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{4.S.\sqrt{3}}{4.S + \sqrt{3}.(-a^2+b^2+c^2)} : \frac{4.S.\sqrt{3}}{4.S + \sqrt{3}.(+a^2-b^2+c^2)} : \frac{4.S.\sqrt{3}}{4.S + \sqrt{3}.(+a^2+b^2-c^2)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{4.S + \sqrt{3}.(-a^2+b^2+c^2)} : \frac{1}{4.S + \sqrt{3}.(+a^2-b^2+c^2)} : \frac{1}{4.S + \sqrt{3}.(+a^2+b^2-c^2)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{34 + \sqrt{3}.(-13+25+26)} : \frac{1}{34 + \sqrt{3}.(+13-25+26)} : \frac{1}{34 + \sqrt{3}.(+13+25-26)} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{34 + 38.\sqrt{3}} : \frac{1}{34 + 14.\sqrt{3}} : \frac{1}{34 + 12.\sqrt{3}} \right) \approx (0,010018 : 0,017167 : 0,018253). \end{aligned}$$

E em coordenadas cartesianas:

$$P = \frac{u(-2,-1) + v(3,0) + w(1,3)}{u+v+w} \approx (1,094194; 0,98466).$$

Nesse exemplo, o uso do Geogebra pode ser feito para verificar que o ponto P encontrado forma ângulos de 120^o com os lados do triângulo $\triangle ABC$. Também vale a pena explorar a propriedade que o Ponto de Fermat minimiza a soma das distâncias aos vértices. Neste sentido, podem ser escolhidos alguns pontos e calcula-se a soma deles aos vértices. Em seguida, estas podem ser comparadas com aquela obtida para o Ponto de Fermat. Não é uma demonstração, mas vale a pena realizar esta atividade.

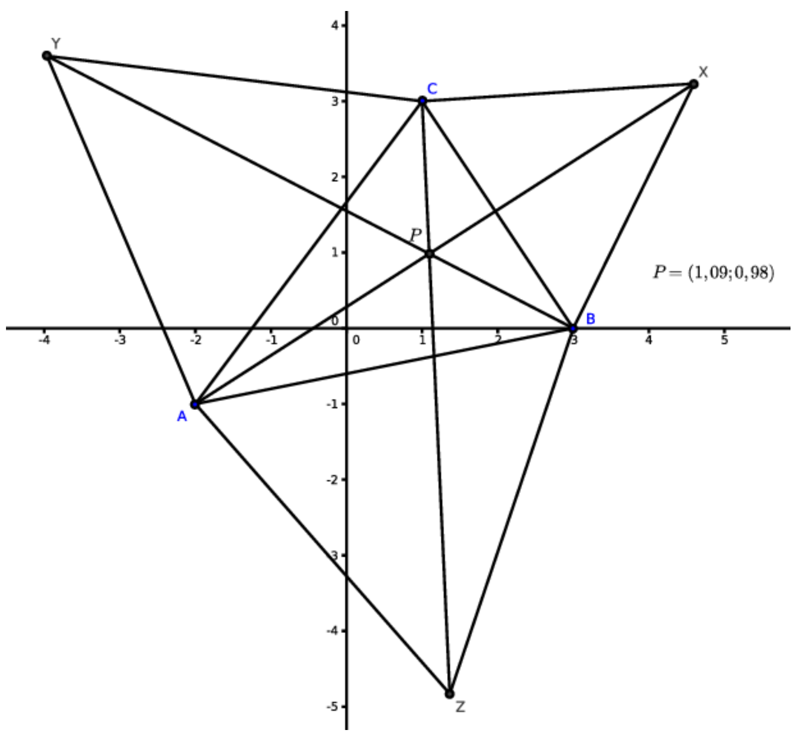

Figura 5.8: Exemplo 5.8.

Capítulo 6

Conclusão

As coordenadas baricêntricas foram introduzidas pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius em 1827, e uma de suas aplicações naquela época era determinar o centro de gravidade de um triângulo. Apareceram aplicações na área da Astronomia, e hoje, devido as coordenadas baricêntricas serem mais simples, são mais utilizadas no campo da computação gráfica (geometria computacional, mapeamento geográfico, etc.).

Apresentamos neste trabalho as noções iniciais sobre o tema Coordenadas Baricêntricas. Mostramos sua existência, e as determinamos através da sua relação com áreas, segmentos e ângulos de um triângulo de referência.

Tal abordagem foi feita utilizando-se conceitos básicos de trigonometria e álgebra, tornando-a possível de ser realizada com alunos do ensino médio. Aplicamos o uso das coordenadas baricêntricas para determinar alguns pontos notáveis de um triângulo qualquer, como baricentro, incentro, circuncentro, ortocentro, além do famoso Ponto de Fermat, que tem como propriedade ser o ponto cuja soma de sua distância aos vértices ser a mínima possível.

A partir deste trabalho, pode-se dar início a um aprofundamento no tema, como o estudo de outros pontos notáveis como o Centro de Spieker, Ponto de Gergonnee de Nagel; o estudo da equação da circunferência, o Círculo de nove Pontos, a Reta de Euler, e as cônicas.

Referências Bibliográficas

[1] BORTOLOSSI, Humberto José; FIGUEIREDO, José Osório de. *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo.* Universidade Federal Fluminense - V Bienal da SBM, 2010.

[2] CAPITÁN, Francisco J, Garcia. *Coordenadas Baricéntricas.* Disponível em: <http://garciacapitan.99on.com/escritos/cb.zip>. Acesso em: 27 de maio de 2013.

[3] DERGIADES, Nikolaos. *A Simple Barycentric Coordinates Formula.* Disponível em: <http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200921.pdf>. Acesso em: 27 de maio de 2013.

[4] HONSBERGER, Ross. *Mathematical Gems I.* The Mathematical Association of America, 1973.

[5] SCHINDLER, Max; CHEN, Evan. *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry.* Disponível em: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary_full.pdf>. Acesso em: 27 de maio de 2013.

[6] YIU, Paul. *Introduction to the geometry of the triangle.* Disponível em: <http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf>. Acesso em: 27 de maio de 2013.