Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Fabrício Santos Silva

Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o Ensino Médio

Rio de Janeiro

2022

Fabrício Santos Silva

Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Fabrício Santos.
Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o ensino médio/ Fabrício Santos Silva. – 2022.
74 f. : il.

Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Jogos em educação matemática - Teses. 2. Indução (Matemática) - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 51-8

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Fabrício Santos Silva

Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 16 de dezembro de 2022.

Banca Examinadora:

____

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Orientadora)

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof.ª Dra. Rosa García Márquez

Faculdade de Formação de Professores - UERJ

____

Prof. Dr. Moisés Ceni de Almeida

Universidade Federal rural do Rio de Janeiro- UFRRJ

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Agnes Drochet e meus pais Claudia Cristina e Marcio Gomes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, o autor da minha fé, ao qual ofereço a minha vida e tudo que faço e tenho.

Agradeço a meus pais, Claudia Cristina e Márcio Gomes, por sempre me fornecerem o que precisava, não medindo esforços para me educar e instruir com o melhor que tinham, embora as dificuldades existissem, se eu venci meus pais são mais que vencedores.

Agradeço a minha esposa Agnes Drochet, que mesmo ainda sendo minha namorada, sempre me incentivou e acreditou no meu trabalho. Se esta dissertação foi finalizada, devo a ela pelo apoio e por lembrar que eu não poderia parar.

Agradeço a minha professora e orientadora Cláudia Ferreira Reis Concordido, durante minha graduação se apresentou como uma excelente profissional sendo um espelho para minha formação. No mestrado me instruiu da melhor forma para realização deste trabalho.

Agradeço a todos meus colegas de turma do PROFMAT 2019 e aos professores que nos acompanharam durante essa trajetória, que são: Guido Gerson Espiritu Ledesma, Ruben Edwin Lizarbe Monje, Sérgio Luiz Silva, Jaime Velasco Câmara da Silva, Fernando Antônio de Araújo Carneiro, Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior (em memória), Francisco Roberto Pinto Mattos e Gabriela dos Santos Barbosa.

O Senhor é bom, um refúgio em tempos de angústia. Ele protege os que nele confiam,

Naum 1:7

RESUMO

SILVA, Fabrício Santos. *Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o ensino médio.* 2022. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Este trabalho tem por finalidade apresentar aos docentes do nível médio da educação básica uma perspectiva moderna sobre jogos, com o objetivo de abordar alguns conceitos trabalhados no nível superior que poderiam ser aplicados no ensino básico. Tópicos como Princípio da indução finita e recorrências lineares podem ser tratadas no Ensino Médio pelo auxílio de jogos, com o propósito de diminuir o abismo das abordagens conceituais existentes entre o ensino médio e o ensino superior. Para isso, foram elaboradas questões baseadas nas regras de um jogo famoso conhecido como "Torre de Hanói", criado pelo francês Édouard Lucas. São introduzidos os conceitos de indução matemática e relação de recorrência a partir dos padrões observados no jogo, isto é, como cada jogada se constitui em relação à jogada anterior. Tais assuntos são usados para demonstração de propriedades elementares da matemática, que são relevantes para o ensino médio. Este método consiste na apresentação histórica da "Torre de Hanói", em seguida, o início do jogo. É apresentada uma proposta de ensino detalhada para aplicação em sala de aula. A proposta tem por finalidade trabalhar com o professor de matemática possíveis caminhos para aplicação do estudo de recorrências e indução finita no ensino médio. Queremos levar o professor juntamente com seus alunos a construir um modelo para determinar o menor número de jogadas necessárias para conclusão do jogo, aplicando os conceitos de indução e recorrência em outros problemas. Tudo o que é tratado neste trabalho tem o auxílio de abordagens lúdicas. Os resultados obtidos devem estar mais próximos às resoluções ideais do quebra-cabeça para chegar à percepção se o conceito do princípio da indução finita e relação de recorrência foram bem absorvidos. Com isso, o trabalho aqui apresentado tem por compromisso visionar a forma que podem ser tratados os conceitos na graduação, percebendo que a ferramenta lúdica facilita o aluno da educação básica a compreender os conteúdos matemáticos e resolver problemas, além de procurar estabelecer um diálogo entre as abordagens feitas no ensino superior e básico.

Palavras-chave: Torre de Hanói. Ensino Médio. Recorrências Lineares. Indução Finita. Olimpíada de Raciocínio Lógico.

ABSTRACT

SILVA, Fabricio Santos . Tower of Hanoi in the study of recurrence and finite induction for high school students. 2022. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

The purpose of this work is to present a modern perspective on games to secondary level teachers in basic education, with the aim of approaching some concepts worked on at higher education that could be applied in basic education. Topics such as the principle of finite induction and linear recurrences can be treated in high school with the aid of games, with the purpose of reducing the gap of existing conceptual approaches between high school and higher education. In this regard, questions were elaborated based on the rule of a famous game known as “Tower of Hanoi”, created by the Frenchman Édouard Lucas. The concepts of mathematical induction and the recurrence relation are introduced from the patterns observed in the game, that is, how each move is constituted in relation to the previous move. Such subjects are used to demonstrate elementary properties of mathematics that are relevant to high school. This method consists in the historical presentation of the “Tower of Hanoi” and then the beginning of the game. A detailed teaching proposal is presented for application in the classroom. The goal of the proposal is to work with the mathematics teacher on possible ways to apply the study of recurrences and finite induction in high school. We want to take teachers along with their students to build a model to determine the smallest number of moves necessary to complete the game, applying the concepts of induction and recurrence in other problems. Everything that will be dealt with in this work will have the assistance of ludic approaches. The results obtained should be closer to the ideal puzzle resolutions to reach the perception if the concept of the principle of finite induction and the recurrence relation were well absorbed. So, the work presented here is committed to envisioning the way in which concepts can be treated in graduation, realizing that the ludic tool facilitates basic education students to understand mathematical content and solve problems, in addition to criticizing the approaches taken in higher and basic teaching.

Keywords: Tower of Hanoi. High school. Linear Recurrences. Finite Induction. Logical Reasoning Olympiad.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CBM	Corpo de Bombeiros Militar
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FUNDEP	Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa
IFCH	Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas
MG	Minas Gerais
OBRL	Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico
PPL	Pessoas Privados de Liberdade
UNESP	Universidade Estadual Paulista em Franca
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação básica no Brasil passa por um processo de constantes mudanças com o advento da tecnologia. O aluno possui cada vez mais acesso a informações de forma dinamizada, este avanço é comentado no artigo do professor Reginaldo Carmello Corrêa de Moraes, colaborador na pós-graduação em Ciência Política do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH) da UNICAMP. Ele trata da massificação das tecnologias e ressalta os sinais desses impactos altamente relevantes para serem ignorados, também mostrando sua preocupação com a aparente dificuldade e a diminuição no tempo de concentração desta geração chamada por ele de “iGeneration” (DE MORAES, 2018). A nomenclatura dada como “iGeneration” é definida basicamente, como uma geração que já nasceu falando dentro das redes sociais, vivendo dentro delas ao que parece; isso também altera a medida e o arranjo que o autor chama de três modos básicos de aprendizagem: o visual, o auditivo e o tátil-cinestésico. A falta desses modos provoca dificuldade para o ensino teórico, pois a atenção do aluno em sala de aula fica dividida entre o quadro e o *smartphone*. Assim, um desafio se levanta todos os dias para os educadores brasileiros impulsionando-os a promover estratégias para explanar o conteúdo de maneira aprofundada utilizando os recursos dispostos na escola em que leciona.

Assim, precisamos tratar tal assunto pensando na realidade escolar brasileira, isto é, relevando a discussão sobre acesso à internet, computadores, *smartphones, tablets*, entre outros recursos tecnológicos, visto que sabemos que há um grande atraso nestas questões[1]. Precisamos tratar este trabalho como motivador para produção do ensino matemático nas escolas, mesmo que as limitações surjam durante o processo.

Muitas escolas não dispõem de recursos ideais para introdução da tecnologia no cotidiano do aluno. A pandemia vivenciada nestes últimos dois anos deixou claro o abismo do acesso à internet pela comunidade escolar, tanto alunos quanto professores. Por vezes é necessário, não por escolha, mas por contingência estrutural, restringir a forma de ensinar, pois explanar o conteúdo em um campo limitado de recursos tecnológicos e com tanta falta de acessibilidade minimiza a dinamização das aulas, provocando um teste maior ao professor do que para os alunos. Para entendermos melhor, vamos exemplificar os processos para preparação de uma aula de educação financeira. Sabemos que tal assunto, conforme ressalta a

[1] Disponível em: http://www.iea.usp.br/noticias/educacao-brasileira-precisa-se-adaptar-ao-uso-de-tecnologia-nas-salas-de-aula. Acesso em 17/12/2022.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é altamente necessário para comunidade escolar, entretanto, ministrar essas aulas sem os recursos da calculadora cientifica, excel, computador, internet para pesquisa, se torna mais real ao cenário estudantil brasileiro e nada facilitador para a prática docente.

A troca do modo de ensinar em algumas escolas tem sido um debate relevante nos últimos anos, uma vez que dar espaço à tecnologia é imprescindível. Segundo Reginaldo Carmello, a massificação do rádio levou cerca de quarenta anos, já as massificações das redes sócias levaram cerca de dois anos (DE MORAES, 2018). Com isso, unir os problemas matemáticos com a tecnologia se torna um método extremamente atrativo para sala de aula, mesmo que já seja desigual no Brasil. Conforme pode ser visto no documento da BNCC, uma das competências gerais da educação básica deve ser

> [...] Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p.9)

O ensino tradicional em alguns momentos deve ser completado, isto é, técnicas antigas são válidas, porém para "iGeneration" recursos tecnológicos tornam-se cada vez mais necessários para o processo de aprendizado. Isso nos leva a debater hoje que realizar o método tradicional de explanar o conteúdo é importante, entretanto, incluir outros recursos pode causar proximidade ao aluno e dar abertura para o avanço de muitas propostas, entre elas, os jogos matemáticos. Trabalhar jogos matemáticos com a tecnologia é intuitivo para qualquer nível da educação básica, extremamente produtivo e com fins de quebrar barreiras de muitos alunos que possuem dificuldades no aprendizado.

Essa relação exige dos educadores matemáticos a compreensão maximizada entre o brincar e o aprender. É possível compreender tais benefícios para o desenvolvimento escolar, assim, incluindo o avanço cognitivo e intelectual. A BNCC baseia-se claramente nisto.

> [...]Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 298)

Dar espaço para o ensino da matemática lúdica através da tecnologia e dos jogos é um processo de aprendizagem custoso. Para isso, deve se ter o trabalho de investimento estrutural nas escolas públicas e privadas. Um viés do presente nesta elaboração é mostrar alguns recursos facilitadores para dizer que, sim, é possível trabalhar a matemática e completar as defasagens estruturais com recursos bem criativos e de fácil acesso.

Para tal discussão sobre tecnologia e jogos no ensino da matemática vamos neste trabalho discutir algumas atividades que podem ser abordadas, para isso, escolhemos o jogo “Torre de Hanói”. No decorrer desta dissertação também mostramos outros jogos que introduzem a mesma linha de raciocínio, porém o foco está em desvendar a Torre de Hanói e aproveitar o máximo de recursos que este jogo tem a oferecer na aprendizagem matemática. Para justificar a escolha deste jogo é necessário apontar algumas possibilidades pedagógicas, conforme indicam Ortega, da Silva e Fiorot (2002):

1- A competição através da Torre de Hanói garante dinamismo, movimento, propiciando interesse e contribuindo para o desenvolvimento social.
2- A competição faz ainda com que o aluno elabore estratégias, e com o tempo, aprimore essas estratégias, a fim de superar deficiências.
3- A busca pela competição faz com que o jogador sempre busque desafios maiores, a fim de sempre se superar, pois a competição no jogo propicia uma constante autoavaliação do sujeito sobre suas competências, habilidades e etc.

A utilização da Torre de Hanói em sala de aula permite inserir o aluno no contexto de um jogo em que ele pode manusear, analisar, inferir e incorporar a ideia de crescimento exponencial, perceber padrões matemáticos, desenvolver o pensamento computacional, criar estratégias de resolução de problemas entre outros. Isso será mostrado através da utilização de material concreto e tecnológico.

> No jogo Torre de Hanói podemos desenvolver várias habilidades que estão intimamente vinculadas aos objetivos do ensino de Matemática, entre as principais podemos citar: planejamento das próximas jogadas, capacidade de generalização, criação do modelo matemático que dá a quantidade mínima de jogadas em função do número de discos. (DA SILVA, 2015, p. 13)

Para mostrar a relevância de tudo que está sendo dito foi feita uma proposta de aula, a qual detalhamos neste trabalho. O intuito é esquematizar que com um jogo clássico como a Torre de Hanói, trabalhada de forma interativa e desafiadora, pode-se construir um conhecimento matemático de recorrências lineares e indução finita através da busca por desafios maiores por parte dos alunos. A atividade é proposta para ser realizada com alunos da primeira e segunda séries do ensino médio. Os processos poderão ser realizados de forma remota com recursos de alguns *softwares*, como: Geogebra, *Google Meet, Google Forms*, ou de forma presencial com adesão do jogo físico (facilmente pode ser produzido) ou auxílio de ferramentas computacionais para jogá-lo.

Para chegarmos à conclusão de que é possível trabalharmos indução matemática e recorrências lineares no ensino básico com auxílios ativos para aprendizagem e termos garantia do aprendizado, e repensando em abordagens tradicionais, percorremos o seguinte detalhamento dos capítulos deste trabalho:

No primeiro capítulo é tratada a importância dos jogos e dos recursos tecnológicos, notando a relevância do seu papel pedagógico na sala de aula, como contribui para avanços cognitivos e como a atualidade vem administrando os avanços da informática e seus impactos no ensino básico e superior.

O segundo capítulo apresenta o princípio da indução finita. Discorremos sobre a história dos números naturais e sobre os axiomas de Giuseppe Peano, que formalizou os famosos axiomas de Peano. Iniciamos o enunciado do princípio da indução finita e faremos exemplos demonstrando algumas propriedades básicas para elucidar o conceito.

O terceiro capítulo aborda as recorrências lineares; desenvolvemos algumas sequências identificando seus padrões, processos resolutivos e determinando uma expressão que a sintetize.

No quarto capítulo é desenvolvida a dinâmica do quebra-cabeça Torre de Hanói. Para isso, introduzimos a história do jogo, explicamos as regras e performances dos movimentos, identificamos padrões dos movimentos e determinação do número mínimo para qualquer fase do jogo e a relação dos números binários para encontrar qualquer disco em qualquer processo dos movimentos em qualquer haste.

No quinto capítulo é proposta uma série de dez questões mostrando inicialmente como o tema Torre de Hanói é lembrado em alguns concursos; em seguida, comentamos questões da Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico (OBRL) e finalizamos com um jogo clássico de raciocínio lógico que utiliza os princípios da Torre de Hanói.

O sexto capítulo traz uma proposta metodológica, especificando o passo a passo dos processos de aprendizado e recursos utilizados para aplicação dos conceitos princípio da indução finita, recorrências lineares, Torre de Hanói em sala de aula. Com isso, esperamos que a proposta motive a realização das atividades em qualquer escola, dotada de recursos tecnológicos ou não. O objetivo geral deste trabalho é aplicação de conceitos da graduação que são importantes para passos demonstrativos no ensino básico. Buscamos ainda motivar a participação nas olimpíadas de matemática em geral e trazer uma proposta acessível para todos os profissionais da educação matemática que atuam diretamente em sala de aula.

1 IMPORTÂNCIA DOS JOGOS E DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

1.1 Jogos e seu papel pedagógico

A inclusão de jogos e recursos tecnológicos no ensino da matemática está cada vez mais recorrente no ensino básico, impactando-a em diversas áreas. Consequentemente, é frequente, ao falarmos sobre educação nos dias de hoje, levarmos em conta a possibilidade de uso de algum tipo de tecnologia digital. Trazer algo diferente do método tradicional de ensino na sala de aula desperta a curiosidade dos alunos. De acordo com a BNCC, a "elaboração, a interpretação e a aplicação de modelos explicativos para fenômenos naturais e sistemas tecnológicos são aspectos fundamentais do fazer científico, bem como a identificação de regularidades, invariantes e transformações" (BRASIL, 2018, p.548).

É possível que novas estratégias de ensino da matemática sejam benéficas para o aprendizado. Trabalhar com o lúdico, com jogos e ser auxiliado pela tecnologia é muito importante para o despertar do questionamento do aluno. Fazer o aluno indagar, pesquisar, pensar e ser criativo atua no próprio desenvolvimento; tais processos promovem a autonomia na busca por conhecimento. A BNCC visa a promover o aluno como personagem principal no ensino, sempre concentrando no desenvolvimento de suas habilidades e competências.

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias têm a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2018, pp.528-529)

Neste contexto, o papel dos jogos deve valorizar o ensino da matemática, pois mostra que o aluno é o ator principal e ele pode, com a colaboração docente, desenvolver conceitos matemáticos. Uma preocupação relevante para este trabalho é evidenciar que não é produtivo e razoável que o jogo e os recursos tecnológicos sejam apenas aplicados sem propósito. É necessário desencadear no aluno um papel de exploração e construção do seu entendimento a respeito do conteúdo e fazê-lo tornar-se protagonista; para isso, o professor deve questionar o aluno sobre suas jogadas e estratégias para que os recursos discutidos se tornem um ambiente de aprendizagem e criação conceitual e não apenas de reprodução mecânica do conceito, como pode ocorrer na resolução de uma lista de exercícios. Desse modo, o jogo, na Educação Matemática, segundo Moura (1996, p.80), "passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. A criança, colocada diante de situações lúdicas, apreende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, apreende também a estrutura matemática presente".

Assim, conceitos matemáticos serão fixados com maior aproveitamento quando algumas estratégias são abordadas. Não condenamos o ensino tradicional. Tais métodos convencionais são importantes e necessários para o desenvolvimento do aluno. Entretanto, a forma de indagar, questionar e permitir ao aluno construir seu próprio conhecimento tem características de interdependência criando uma série de relações produtivas em sala de aula.

É perceptível a inserção dos jogos nas atividades em sala de aula. Diversos trabalhos acadêmicos foram escritos promovendo essa discussão (DA SILVA, 2015; SANTOS, 2017). Muitas pesquisas elaboram métodos diversificados para auxílio do profissional da educação em poder aplicar tais recursos lúdicos (PEREIRA; RODRIGUES, 2003; OLIVEIRA; CALEJON; BRITO, 2016). Apesar de a BNCC incentivar o uso de jogos na aprendizagem, o documento não aborda como isso deve ser praticado, podendo transmitir a ideia de que a aplicação deve ser feita do "jogo pelo jogo", como se a atividade já fosse o suficiente para mostrar para os docentes qual conteúdo deve ser trabalhado e a forma que ele deve ser utilizado.

1.2 **Jogos e seu papel cognitivo**

Diante dessa preocupação em como abordar as atividades lúdicas e fazê-las serem mais produtivas deve haver um planejamento. Uma inclinação do professor é atingir todos os alunos e fazê-los se sentirem envolvidos e produtores do aprendizado. Sempre mostrando sua intervenção e guiando o aluno para o caminho do aprendizado para o conteúdo, instigando-o sempre a construir o raciocínio necessário para obter o conhecimento daquele assunto. Diante dessa abordagem, reafirmamos nossas ideias juntamente com Franco (2013) que:

> [...] Os jogos são recursos pedagógicos, pois eles não visam só o prazer, auxiliam na construção da leitura, da escrita, na matemática e na interação entre os alunos, contribuindo para o desenvolvimento social. Destarte, os aspectos sociológico, psicológico e pedagógico ratificam o quanto o jogo é uma atividade de grande valia e indispensável como uma importante ferramenta pedagógica para o professor. (FRANCO, 2013, p. 22).

Os jogos possuem suas vantagens, porém o professor deve definir bem quais são seus objetivos e onde pretende chegar com determinado assunto abordado. O papel do professor é mais importante que o jogo. Com isso, vamos finalizar verificando algumas vantagens das atividades lúdicas no ensino da matemática. Segundo Lopes (2011, p.36-45), os objetivos que podem ser atingidos através dos jogos são:

- aprimorar a coordenação motora;
- desenvolver a organização espacial;
- aumentar a atenção e a concentração;
- desenvolver antecipação e estratégia;
- ampliar o raciocínio lógico;
- desenvolver a criatividade;
- perceber figuras e fundo.

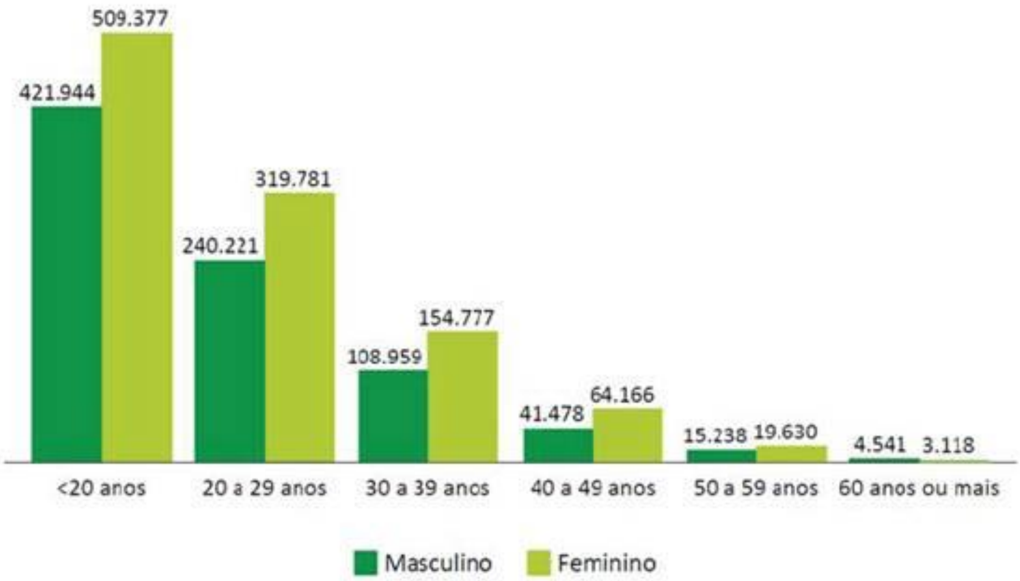
No trabalho com jogos matemáticos, todas essas habilidades são importantes para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Dentre as principais, destacam-se a concentração e o raciocínio lógico, já que essas habilidades adquiridas contribuirão para o processo de aprendizagem, à medida que o raciocínio lógico é tido como uma ferramenta poderosa para a dedução de ideias matemáticas e resolução de problemas mais elaborados.

Este trabalho tem como princípio entrelaçar a importância do jogo, do lúdico, da tecnologia, das ferramentas propícias em sala de aula para o aprofundamento do conteúdo e ensino da matemática. Deixando evidente que ambos devem caminhar juntos em alguns momentos do aprendizado da matemática utilizando os recursos de jogos, sendo que ensino tradicional com suas ferramentas, estratégias e abordagens não devem ser trocadas ou negociadas, mas, aperfeiçoadas e melhoradas.

1.3 **Tecnologia no ensino básico e superior**

É perceptível que os tempos são outros, como dito na introdução pelo professor Reginaldo, tudo vem mudando de forma acelerada com o surgimento da “iGeneration” (DE MORAES, 2018). Obviamente o corpo discente mudou ao longo dos últimos 10 anos, e precisamos refletir sobre o público que hoje está ingressando nas universidades. De acordo com o censo do MEC, no ano de 2018 a maioria dos estudantes da graduação são jovens de 17 a 29 anos (Figura 1).

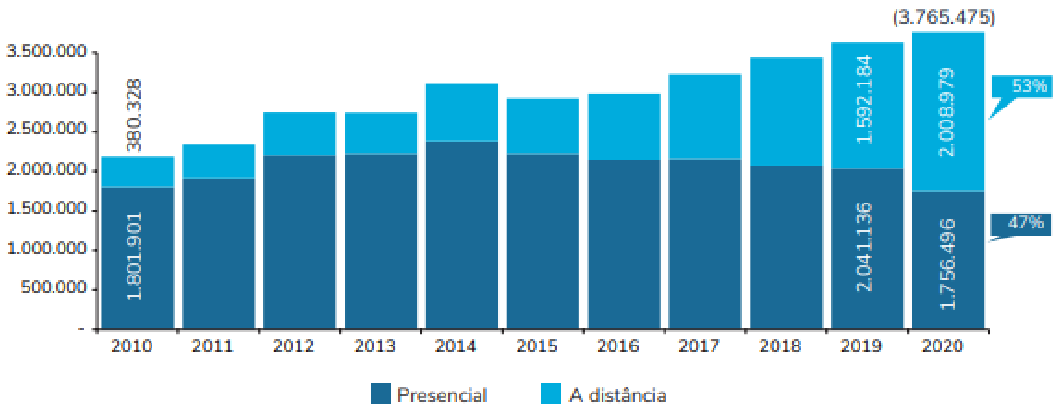
Figura 1 – Idade dos estudantes universitários.



Fonte: MEC, 2018.

Além de observamos que a maioria dos alunos da comunidade universitária é de jovens de, até 29 anos, também nos deparamos com outros dados que mostram o aumento dos estudantes que se matriculam nos cursos de graduação a distância e, em verdade, no presencial houve queda (Figura 2).

Figura 2 – Distância x presencial.



Fonte: MEC, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/notas_estatisticas_censo_da_educacao_superior_2020.pdf

Nos últimos 10 anos houve uma crescente procura pelos cursos de graduação a distância, tal evento não pode ser ignorado. Isso pode ocorrer por série de fatores, mas um fator que precisamos levar em relevância é que muitos destes que procuram os cursos de graduação são jovens, e consequentemente possuem facilidade e preferência por recursos tecnológicos. Isso nos faz analisar os caminhos que a educação no Brasil vem tomando.

O que podemos dizer da educação básica? A tecnologia vem alterando de forma muito rápida a comunicação, informação, processos de produção, desenvolvimento social e o ensino básico. Queremos tratar a aprendizagem de forma eficaz. Trabalhar com a tecnologia é importantíssimo no dinamismo em resolver problemas, criar conceitos e maximizar as chances de sucesso na absorção dos conteúdos. A BNCC deixa tudo muito claro a respeito da importância da aplicação tecnológica no ensino básico.

> Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 536).

A utilização de computadores no ensino básico ainda não é muito comum em todas as escolas brasileiras. As atividades aplicadas pelos recursos tecnológicos não causam desvio no propósito do ensino da matemática. A quantidade de cursos para especialização docente se multiplica nas instituições formadoras, porém, atualização para promoção da aprendizagem com esses recursos facilitadores não é uma realidade para todos os educadores.

> O desenvolvimento das tecnologias pode criar um ambiente cultural e educativo suscetível de diversificar as fontes do conhecimento e do saber. Por outro lado, as tecnologias caracterizam-se pela sua complexidade crescente e pela gama cada vez mais ampla de possibilidades que oferecem. (UNESCO apud PEREIRA 2013, p. 86)

De forma contrária, o avanço do acesso às ferramentas oferecidas pelos recursos tecnológicos não pode ser considerado negativo, dado que, elevando a discussão proposta em sala de aula e mostrando muitos outros possíveis caminhos para os alunos, é fundamental que os professores se atualizem e adaptem-se à realidade atual de uma geração cada vez mais envolvida com computadores, *tablets* e *smartphones*.

O avanço das tecnologias da informação cresce vertiginosamente em diversas áreas do conhecimento e a inserção no mundo virtual e tecnológico de estudantes cada vez mais jovens faz com que o uso dessa tecnologia na educação apresente-se como um instrumento potencializador e revolucionário do aprendizado.

Entretanto, não podemos repetir os erros do passado, não basta equipar as escolas de computadores, mídias, redes de *internet*, *tablets* entre outros. Nada disso compromete-se com o avanço da aprendizagem. A incorporação de recursos tecnológicos aos programas educativos não significa, necessariamente, desenvolvimento de uma proposta pedagógica inovadora se, previamente, não os integrarmos e desenvolvermos em função de um modelo educativo não autoritário e reprodutor.

As reflexões aqui apresentadas sintetizam experiências relacionadas em alguns contextos. Em alguns momentos é necessário me posicionar como professor da rede privada e como professor de projetos sociais em escolas da rede pública. E enquanto presente na rede pública me deparei com uma série de limitações no uso de tecnologias. Por muitas vezes, me deparei com o abismo entre a teoria e a prática. Como pesquisador desenvolvi métodos que utilizam informática na educação matemática, porém, não dispondo de laboratórios, foi necessário se reinventar com outros recursos para que o conteúdo fosse ensinado além do quadro. Entretanto, quando dispunha de computadores, o tempo era otimizado e se aprendia muito mais em curto tempo. Tal esforço pode provocar um ceticismo de que o computador não ajuda na aprendizagem, ele apenas cumpre tarefas.

Com isso, é preciso reformular a forma que trabalhamos com tecnologia em sala de aula e como podemos inseri-las no ensino da matemática. Alguns professores acreditam que utilizar equipamentos de projeção é um método inovador para o uso de tecnologias, entretanto o equipamento está sendo utilizado apenas para ler textos, assim é um instrumento de apoio ao professor que substitui a lousa. Precisamos potencializar nossos recursos, criar métodos de aprendizagem práticos e acessíveis às limitações estruturais da escola.

É possível concluir pelas Figuras 1 e 2 que possuímos demanda para isso, então por que o mundo muda e avança de forma acelerada e a escola precisa manter-se de forma inalterada? Sabemos que a tecnologia em sala de aula não irá resolver todos os nossos problemas, a relação dos princípios da ética, alguns métodos tradicionais de ensino, aprendizado socioemocional, interação e inclusão entre as relações continuam sendo muito valiosas para educação.

A era tecnológica, juntamente com seus avanços, possui poder multiplicador de aplicações, exigindo do profissional da educação uma atualização para promover a produtividade do aluno. A escola precisa se apropriar das novas técnicas para atender exigências do mundo contemporâneo, que requer sintonia com o conhecimento informático. Nisso, as novas tecnologias podem ser aproveitadas pela educação básica, sendo o profissional da educação o mediador, pois por meio da relação professor e aluno que o mundo é descoberto.

2 **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA**

2.1 **O que seria o conjunto dos Naturais?**

Existem evidências arqueológicas de que havia necessidade de contar há mais de 50.000 anos. Com isso, sugiram de forma intuitiva e sem formalização ou conceito os números naturais. Isso reforça que a matemática se desenvolve juntamente com a necessidade da humanidade em avançar. No início não havia conceito de números nem símbolos para suas representações, para isso, utilizavam-se recursos como pedras e gravetos, entre outros objetos. Assim, o homem tornou o primeiro conceito matemático abstrato em concreto. O termo *calculus* deriva de *calx*, que significa "pedra calcárea", que por sua vez foi originado do grego *khalix*, que também quer dizer "pedra pequena" ou "seixo"[2].

Com a necessidade de efetuar cálculos mais extensos, o processo de contar precisou ser organizado em sistemas. Cada civilização criou sua forma de contar, isto é, seu sistema de numeração. Desse modo, o Egito desenvolveu seu sistema numérico, utilizando alguns símbolos considerados importantes para o estudo do sistema de numeração (hieroglífico) egípcio pelo fato de ser um sistema simples, de fácil compreensão e ter um apelo estético bastante marcado (Figura 3).

Figura 3 – Sistema de numeração egípcio.

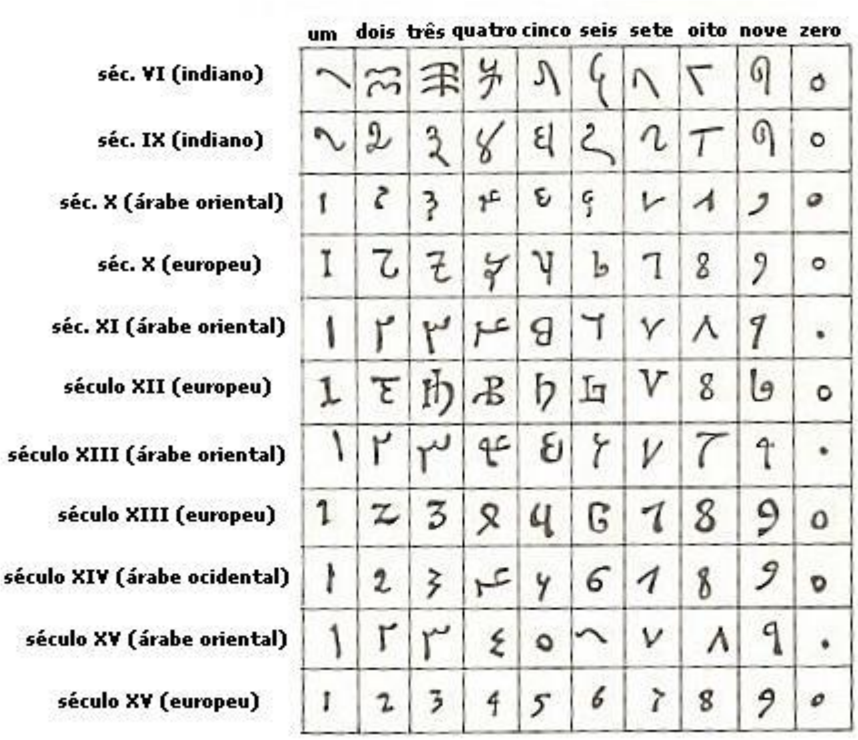
Fonte: pt.astelus.com.

---

[2] https://www.dicionarioetimologico.com.br/calculo.

Na Babilônia foi desenvolvido um sistema de numeração sexagesimal com princípio posicional. Entre muitas outras civilizações pode-se destacar o sistema numérico indiano. Um sistema muito bem desenvolvido e próximo ao que se utiliza hoje, com representações para o zero e outros números (Figura 4).

Figura 4 – Sistema de numeração indiano e sua evolução até hoje.



Fonte: http://www.invivo.fiocruz.br/cienciaetecnologia/o-sistema-numerico-indiano-e sua-divulgacao-arabe/ Acesso 17/12/2022

A imensa quantidade de objetos a serem contados, as atividades práticas e o espírito indagador do homem determinaram a noção de conjunto numérico sem limites: a sequência dos naturais passou a ser considerada como não limitada superiormente. Para realizar medidas, o número racional se tornou uma necessidade. As frações foram desenvolvidas no Egito – frações com numerador 1, como 1/7 - e na Babilônia – frações com base 60. Este sistema era muito usado e chegou até nós, no mundo ocidental, na forma das unidades para medir tempo e ângulos. As frações decimais foram introduzidas, na Ásia, no século XV, e alcançaram a Europa no século seguinte (RODRIGUES, 2013).

Então, com todo conhecimento desenvolvido até hoje, como pode-se formalizar todos os elementos do conjunto dos números naturais, isto é, existe uma maneira de observar uma fórmula, propriedade ou conceito que resume todos os naturais? Há algumas formas intuitivas de poder determiná-los. Uma forma é pensarmos que ele pode ser escrito como todo número da forma recursiva $n + 1; n = 0$.

$1;$

$2 = 1 + 1;$

$3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1;$

$4 = 3 + 1 = (2 + 1) + 1 = (1 + 1 + 1) + 1; \ldots$

A verdade é que dificilmente conseguiremos provar alguma propriedade utilizando essa forma de determinar os números naturais. Pois, há números que os "..." representam e por mais que consigamos representá-los, teríamos dificuldades em deixá-los explícitos da forma satisfatória, isto é, com uma escrita matematicamente formal.

Assim, uma alternativa é listar propriedades que deixem bem lúcidos, sem equívocos, como os números naturais podem ser tratados dentro do conjunto dos números reais. Para isso, Giuseppe Peano[3] (Figura 5) observou que os números naturais usufruíam de quatro propriedades fundamentais que os caracterizam, que são chamadas de Axiomas, isto é, todo subconjunto dos números naturais possui tais propriedades (HEFEZ, 2009).

Figura 5 – Giuseppe Peano.

Fonte: Wikipédia, 2021.

[3]Giuseppe Peano, considerado o maior matemático italiano da época, nasceu em Spinetta em 1858 e morreu em Turim em 1932. Na matemática, teve um papel importante na axiomatização, uma de suas maiores contribuições teóricas foi na área da teoria dos conjuntos, e foi um líder pioneiro no desenvolvimento da lógica (Dias, 2011).

- $Axioma\ 1 – Todo\ número\ natural\ n\ tem\ um\ sucessor, representado\ por\ n\ +$ $1.$
- $Axioma\ 2 – Se\ m\ +\ 1\ =\ n\ +\ 1, então\ m\ =\ n.$
- $Axioma\ 3 – Existe\ um\ único\ número\ natural, designado\ por\ 1, tal\ que\ n\ +1$ $\neq\ 1, para\ todo\ \ n\ \in\ \mathbb{N}.$
- $Axioma\ 4 – Seja\ X\ um\ conjunto\ de\ números\ naturais\ (isto\ é, X\ \subset\ \mathbb{N}). Se\ n \in$ $X\ e\ se,\ além\ disso,\ n+1\ \in X,\ para\ cada\ n\ \in X, então\ X =\ \mathbb{N}.$

Observação 2.1 – O terceiro axioma estabelece que o número um é o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro número natural, ou seja, “ponto de partida” dos conjuntos dos naturais. Alguns livros adotam o zero como ponto de partida. A opção é tratada neste trabalho como conveniência.

2.2 **O Princípio da Indução Finita**

O axioma 4 é chamado princípio da indução matemática, mais precisamente: **Princípio da Indução Finita:** Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n\ \in\ \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.1 - Provar, por indução, que, se X é um conjunto finito com n elementos, esses elementos podem ser ordenados de $n!$ modos.

Por indução vamos verificar se a propriedade é válida.

i) Um conjunto unitário só pode ser ordenado da forma $1!\ =\ 1$. Desse modo, $P(1)$ é válida.

ii) Suponhamos que valha para n e consideremos um conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ com $n\ +\ 1$ elementos. As possíveis ordenações desse conjunto podem ser obtidas tomando cada uma das $n!$ ordenações de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e inserindo a_{n+1} em uma das $n\ +\ 1$ posições possíveis, assim temos que, $(n+1).n! = (n+1)!$ possíveis ordenações. Logo, pelo princípio da indução, vale para todo n natural.

Uma curiosidade sobre o resultado obtido no próximo exemplo:

> [...] Conta-se a seguinte história sobre o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quando ainda garoto. Na escola, o professor, para aquietar a turma de Gauss, mandou os alunos calcularem a soma de todos os números naturais de 1 a 100. Qual não foi a surpresa quando, pouco tempo depois, o menino deu a resposta: 5 050. Indagado como tinha descoberto tão rapidamente o resultado, Gauss, então com nove anos de idade, descreveu o método a seguir (HEFEZ, 2009, p. 8).

Exemplo 2.2.2 - Queremos determinar uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais.

Sendo, $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, o objetivo é encontrar uma fórmula fechada para S_n.

Efetuando a soma $S_n + S_n$ temos que:

$$\begin{cases} S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 2 + n - 1 + n \\ S_n = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \ 2S_n = n + 1 + n + 1 + \cdots + n + 1$$

Daí segue-se que $2S_n = n(n+1)$ e, portanto,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Analisando a fórmula acima com critérios. Essa prova nos dá a impressão de ser impecável, mas se alguém nos perguntasse o que está escondido atrás dos pontinhos, por mais que seja intuitivo, precisamos explicitar de forma satisfatória. Também, como ter absoluta certeza de que nada acontece fora do nosso controle, exatamente na imensa região coberta pelos pontinhos? Para não haver nenhuma dúvida sobre o nosso resultado, vamos provar a fórmula utilizando Indução Matemática. Considere a sentença aberta sobre os naturais;

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i) Vamos verificar se $P(1)$ é válida,

$$P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

ii) Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeira. Vamos verificar se para $n+1$ também é verdadeira. Assim, vamos somar $n+1$ em ambos os lados da igualdade, temos que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \ + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \ + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

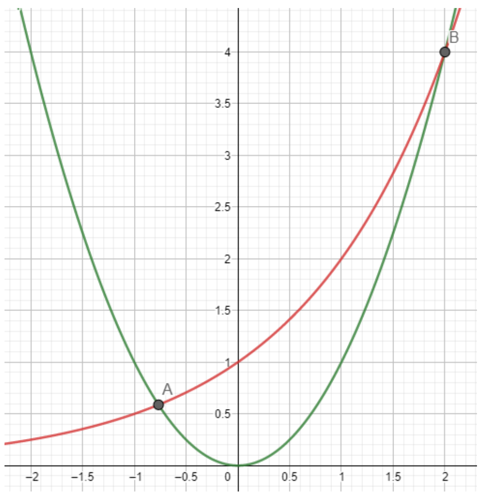
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \ + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

o que verifica que $P(n+1)$ é verdadeira.

Um cuidado que devemos tomar em sala de aula é o rigor para as demonstrações matemáticas. Elas são necessárias, porém a descoberta deve vir antes de qualquer formalização. O formalismo deve ajudar os alunos e não atrapalhar, o rigor não deve sobrepor a criatividade e entendimento do aluno. Provar a fórmula da soma de Gauss é perfeitamente aceitável no nível médio sem utilizar indução. Compreender padrões e estabelecê-los como verdade faz parte da curiosidade e aprendizagem do aluno.

É importante a demonstração por indução finita, por mais que possamos interpretá-la~~s~~ de forma intuitiva. Também podemos utilizar o princípio da indução finita em problemas que envolvem desigualdades. Vejamos um exemplo em que tal princípio se aplica. Queremos provar que uma função exponencial de variável discreta, tem por comportamento crescer mais rápido em suas imagens que a função quadrática de variável discreta. Assim, induzindo para o aluno que com variáveis reais o comportamento não seria diferente.

Figura 6 – Comportamento das funções: quadrática e exponencial.

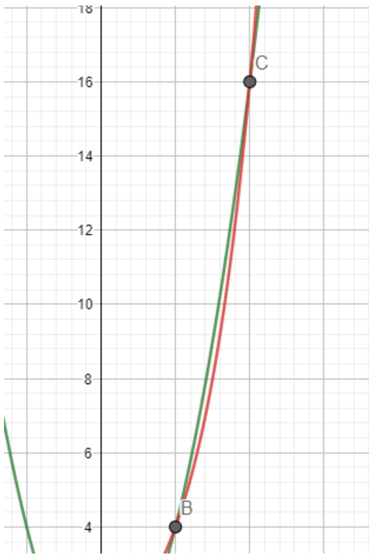


Fonte: O autor, 2022.

Graficamente (Figura 6) podemos perceber que a função vermelha representa $f(x) = 2^x$ e a função verde representa a função $g(x) = x^2$. Pode-se perceber que, a partir do ponto A, a função f possui valores maiores que a função g, porém como nosso intuito é trabalhar com variáveis discretas e naturais, a análise será feita após x = 1.

Entre os pontos B(2,4) e C(4, 16) (Figura 7) vemos que a função g admite valores maiores que a função f. Entretanto, após o ponto C a função f (vermelha) tem um crescimento muito maior que a função g (verde). Assim, podemos perceber graficamente que a função exponencial a partir $x > 4$ tem imagens maiores que a função quadrática. Vamos mostrar isto usando o princípio da indução finita.

Figura 7 – Comportamento das funções: quadrática e exponencial 2.



Fonte: O autor, 2022.

Exemplo 2.2.3 - Mostrar que $2^n > n^2, \forall\, n > 4$.

i) Vejamos um caso inicial. Para $n = 5$, de fato, $2^5 > 5^2$.

ii) Suponha que seja verdade para $k > 4$, ou seja, $2^k > k^2$. Daí, duplicamos ambos os lados $2^{k+1} > 2k^2$ e ficará faltando apenas mostrar que $2k^2 \geq (k+1)^2$. Teremos assim

$$2^{k+1} > 2k^2 > k^2 + 2k + 1$$

Vamos provar que $2k^2 \geq k^2 + 2k + 1$. De fato,

$$2k^2 \geq k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow$$

$$k(k-2) \geq 1$$

Como $k > 4$, fica garantido que $k(k-2) \geq k.2 > 1$. Logo, $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Podemos perceber que o princípio da indução finita é usado para demostrar conceitos importantes para o ensino básico. Tais demonstrações podem ser abordadas com uma linguagem fácil para interpretação do aluno. Para algumas demonstrações matemáticas em sala de aula no nível básico, alguns professores têm por reposta para seus alunos dizer que eles não possuem maturidade para entender alguns passos da demonstração. Neste trabalho vamos discutir que isso limita o campo de curiosidade do aluno, promovendo mais um bloqueio para matemática do que um alento momentâneo.

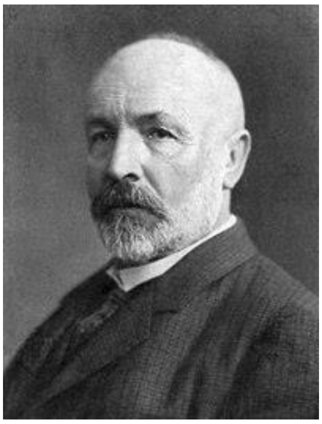
O Princípio da Indução Finita é um assunto importante e os jogos matemáticos são recursos facilitadores para tal compreensão. Assim, aplicaremos tais conceitos à Torre de Hanói, evidenciando a aplicabilidade e as ferramentas lúdicas possíveis.

3 RECORRÊNCIAS LINEARES

3.1 Sequências

Neste capítulo iremos estudar recorrências. Mas, antes precisamos abordar alguns conceitos importantes. Para isso, tomemos a definição simples de conjuntos, sendo um conjunto uma coleção de objetos. Sabemos que tal definição não é muito precisa para assuntos profundos da Teoria dos Conjuntos, porém vamos nos limitar a uma noção simplificada. Ademais, vamos utilizar alguns axiomas da Teoria dos Conjuntos. Tais axiomas foram implantados por volta de 1874 pelos matemáticos Georg Cantor e Richard Dedekind (Figuras 8 e 9).

Figura 8 – Georg Cantor.



Fonte: https://impa.br/noticias/georg-cantor-1845-1918-pai-do-infinito-e-do-icm/. Acesso 17/12/2022

Figura 9 – Richard Dedekind

Fonte: ecalculo.if.usp.br/historia/dedekind.htm. Acesso 17/12/2022

Utilizaremos o seguinte axioma, como:

1 - (da extensão) Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.

Quando um conjunto é pequeno, isto é, possui poucos elementos, podemos escrevê-lo listando seus elementos, nesse caso, a representação chama-se de forma tabelar. Como exemplo:

- O conjunto dos números que possuem apenas um algarismo é {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

- O conjunto dos países que já venceram a Copa do Mundo de futebol é {Uruguai, Itália, Alemanha, Brasil, Inglaterra, Argentina, França, Espanha}.

Conjuntos também podem ser definidos por uma ou mais condições que podem satisfazer. Isto é muito comum para conjuntos grandes, ou seja, que possuem muitos elementos. Neste caso, cada elemento do conjunto goza da tal propriedade que forma um determinado conjunto, podendo o conjunto ser finito ou infinito. Como exemplo:

- Y é o conjunto de todos os números inteiros maiores que 10, assim, Y = {11, 12, 13, ...}.

Por sua vez, uma sequência é uma lista ordenada de objetos, aos quais nos referimos como seus termos.

Definição 3.1.1: Uma **sequência numérica** $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função que associa cada número natural $n \in \mathbb{N}$ a um número real $s_n \in \mathbb{R}$. O termo s_n é denominado **termo geral** da sequência, ou ainda, o **n-ésimo termo** da sequência s_n.

Em geral, representamos uma sequência pela lista de seus termos $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots)$. Quando a sequência possuir uma lista finita de números $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ chamaremos de sequência finita, caso contrário, será chamada de sequência infinita. Uma sequência pode ser representada através de:

- Uma proposição matemática. Por exemplo: a sequência dos números positivos múltiplos de 3 é $s_n = (3, 6, 9, 12, \dots)$;

- Uma expressão matemática. Por exemplo: a sequência definida por $s_n = 2n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$: $s_n = (3, 5, 7, 9, \dots)$.

- Uma relação de recorrência. Nesse caso cada termo da sequência, exceto alguns termos iniciais, é determinado por meio do(s) termo(s) imediatamente anterior(es). Por exemplo: a sequência de primeiro termo $s_1 = 1$ e segundo termo $s_2 = 2$, dada por $s_n = 2s_{n-1}$- s_{n-2} com $n \geq 3$ é $s_n = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

Frequentemente é necessário definir a sequência a partir do zero, isto é, $s : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$. Nestes casos o primeiro termo passaria a ser s_0, o segundo s_1 e assim sucessivamente. Pode até parecer estranho adotar essa nomenclatura, mas isso pode facilitar os cálculos em alguns exemplos.

3.2 Recorrências

Definição 3.2.1: Uma **recorrência** é uma sequência definida em função dos seu(s) termo(s) anterior(es) imediato(s), ou seja, são definidas de forma recursiva.

Exemplo 3.2.1: Determine x_5 na sequência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n, x_0 = x_1 = 1$.

Neste problema a forma mais simples de resolver é de maneira recursiva, pois, sabendo os temos de ordem zero e um, conseguimos utilizando a fórmula da sequência encontrar o termo de ordem cinco, por exemplo.

$$Sendo\ n = 0, temos: x_2 = 2x_1 + x_0 = 2.1 + 1 = 3$$

$$Sendo\ n = 1\ temos: x_3 = 2x_2 + x_1 = 2.3 + 1 = 7$$

$$Sendo\ n = 2, temos: x_4 = 2x_3 + x_2 = 2.7 + 3 = 17$$

$$Sendo\ n = 3, temos: x_5 = 2x_4 + x_3 = 2.17 + 7 = 41$$

Assim, $x_5 = 41$.

Pode-se perceber que resolver problemas dessa natureza não é complicado. Como o intuito do trabalho é explorar assuntos mais aprofundados, nesta seção abordaremos apenas um exercício para esclarecer e continuaremos com outras abordagens mais focadas no assunto central.

3.3 Recorrências lineares de primeira ordem

Uma recorrência de primeira ordem é expressa por x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se, somente se, essa função for do primeiro grau.

Exemplo 3.3.1: As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2\ e\ x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = {x_n}^2$ não é linear. As duas últimas são ditas homogêneas por não possuírem termos independentes.

Vejamos agora alguns exemplos que tratam resoluções de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem.

Exemplo 3.3.2: Resolva a recorrência $x_{n+1} = nx_n, x_1 = 1$.

Temos
$$\begin{cases} x_2 = 1x_1 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 3x_3 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n = (n-1)x_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando todas as expressões, obtemos $x_n = (n-1)!\, x_1$, como $x_1 = 1$, temos, $x_n = (n-1)!$.

Exemplo 3.3.3: Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n, x_1 = 1$.

Temos,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 2 \\ x_3 = x_2 + 2^2 \\ x_4 = x_3 + 2^3 \\ \quad\vdots \\ x_n = x_{n-1} + 2^{n-1} \end{cases}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Neste capítulo, não trabalharemos exemplos das recorrências lineares não homogêneas. Vale lembrar que o intuito deste trabalho é relacionar as aplicações da torre de Hanói com o ensino básico. Como o estudo de recorrências e indução nos auxilia para melhora do raciocínio matemático do aluno do ensino médio e como podem ser introduzidas com auxílio tecnológico, problemas que tratam recorrências não lineares, recorrências de segunda ordem, recorrências não homogêneas não seriam produtivas para este trabalho.

4. TORRE DE HANÓI

Após o desenvolvimento da parte teórica a respeito do estudo de princípio da indução finita e recorrências lineares, é necessário avançar e conhecer o jogo que norteia o tema deste trabalho. O intuito neste capítulo é apresentar o jogo e, através de sua história, motivar os leitores a valorizar problemas clássicos matemáticos. Evidenciar sua solução clássica, porém mostrar formas distintas de analisarmos a dinâmica dos processos resolutivos, padrão dos movimentos dos discos, algumas variações do jogo e aplicações em outras áreas da matemática.

4.1 História da Torre de Hanói

A Torre de Hanói tem por criador o matemático francês Édouard Lucas (Figura 10) no ano de 1892 na Obra Récréations Mathématiques, vol. III. O fato é que Lucas popularizou o jogo que já existia e foi apresentado a ele por seu amigo, professor N. Claus (do Sião), que, por sua vez, foi apresentado ao quebra-cabeça em uma das suas viagens ao Vietnã, na região de Tonkin, em 1891 (DE OLIVEIRA, 2019). N. Claus era o próprio Édouard Lucas, inclusive a palavra Claus é um anagrama da palavra Lucas, o próprio criou esse pseudônimo (SILVA, 2018).

Figura 10 – Édouard Lucas.

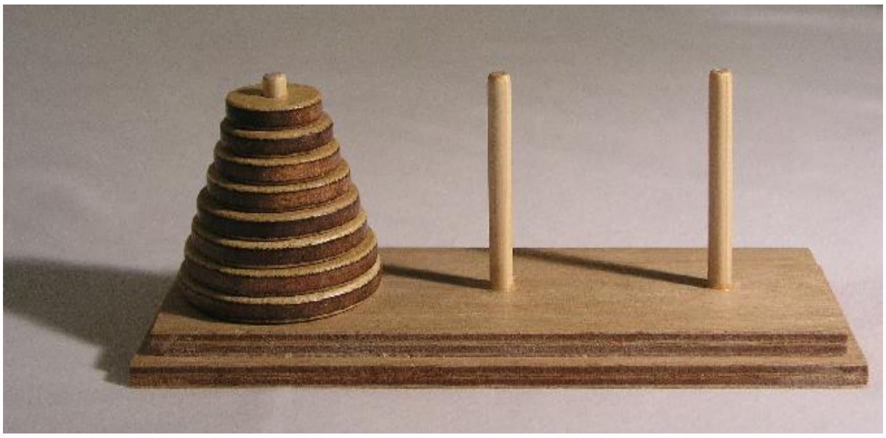
Fonte: Wikipédia, 2011.

Lucas foi responsável pelas formalizações matemáticas do jogo. Ele conseguiu estimar o tempo necessário para resolver o jogo, se considerarmos um movimento feito a cada segundo. Por curiosidade, ele cita um jogo com 64 discos, no qual são necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para vencê-lo, o que levaria bilhões de séculos para resolver sem pausas (DA COSTA, 2011). Além disso, Lucas equiparou a solução matemática com um quebra-cabeça muito famoso da China, o Baguenaudier, que é um quebra-cabeça de desembaraçamento de anéis. Junto com o jogo, também é muito famosa a lenda por trás da Torres de Hanói:

> No grande templo em Benares, Índia, abaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há três pinos de diamante fixados em uma placa de latão. Em um desses pinos, Deus colocou, no início dos tempos, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior apoiado no metal, e os outros, cada vez mais estreitos, sobrepostos um ao outro de forma crescente. É a torre sagrada de Brahma. Noite e dia, os sacerdotes se sucedem nos degraus do céu, ocupados carregando os discos do primeiro pino de diamante ao terceiro, sem se afastar das regras, foram impostas por Brahma. Quando tudo estiver terminado, a torre de Benares se transformará em pó, e então será o fim do mundo (LUCAS,1892 apud DE OLIVEIRA, 2019, p.16).

Segundo de Oliveira (2019, p.16), “logo após a descoberta do jogo, surgiram outras variações do desafio no início do século XX”, dentre eles o mais famoso é a Torres de Hanói com 3 pinos (Figura 11).

Figura 11– Torre de Hanói.



Fonte: Wikipédia, 2021.

4.2 Dinâmica do jogo

Para manipulação do jogo é necessário que se respeitem algumas regras que o condicionam, deixando-o mais complexo e, ao mesmo tempo, dando real sentido de desafio, dessa forma exigindo do seu jogador maior grau de raciocínio no movimento das peças. As regras são as seguintes:

- só se pode movimentar uma peça (disco) por vez;
- uma peça de maior diâmetro não pode ficar sobre uma peça de menor diâmetro;
- as peças devem estar sempre em uma das três hastes, ou em movimento.

4.3 Objetivos

De posse das regras é necessário que o jogador tenha seus objetivos definidos, seja pela simples manipulação por passatempo ou, como neste trabalho, com uma finalidade pedagógica. Os objetivos principais são determinar:

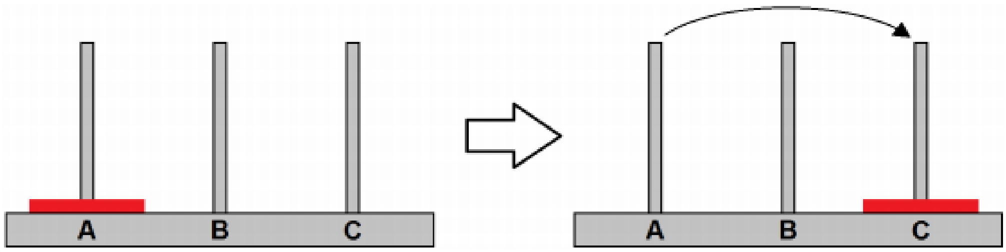
- uma estratégia para movimentar as peças de uma torre para outra com o menor número de jogadas de acordo com as regras;
- o número mínimo de jogadas para movimentar as peças de uma torre para outra.

Os objetivos também podem ter suas variantes, tais como, em um jogo de vários competidores, saber quem conseguiu transportar a torre de um pino (haste) para outro com a menor quantidade de discos, sem levar em consideração a quantidade exata de jogadas, criando assim um ambiente de disputa que desperta interações cognitivas já ditas neste trabalho e também pode levar à cooperação entre os alunos.

4.4 Número mínimo de jogadas

Como visto na seção anterior, a dinâmica da torre de Hanói e seus objetivos são dependentes do número de discos e ao menor número de jogadas para finalizar o jogo sem quebrar nenhuma das regras. Nesta seção são apresentadas algumas formas de descobrir o menor número de movimentos através de alguns conceitos matemáticos. Para isso, vejamos um modelo simples do jogo dispondo de poucas peças.

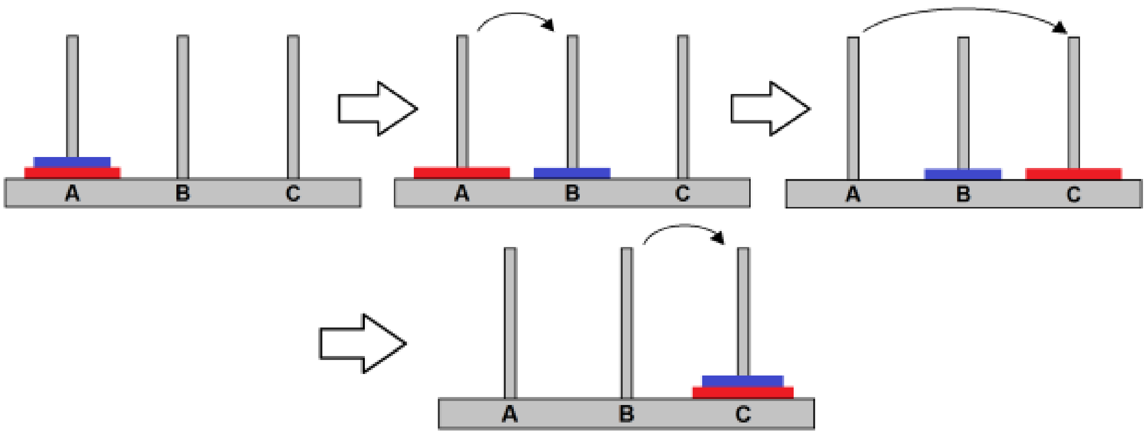
Figura 12 - Solução com um disco.



Fonte: De Oliveira, 2019.

Para atingir o objetivo do jogo com um disco (Figura 12), basta remover o disco presente na torre A e colocá-lo na torre C, isto é, o propósito do jogo foi cumprido precisando realizar apenas uma única jogada. Assim, $a_1 = 1$, sendo a_1 o número de movimentos dispondo de apenas um disco.

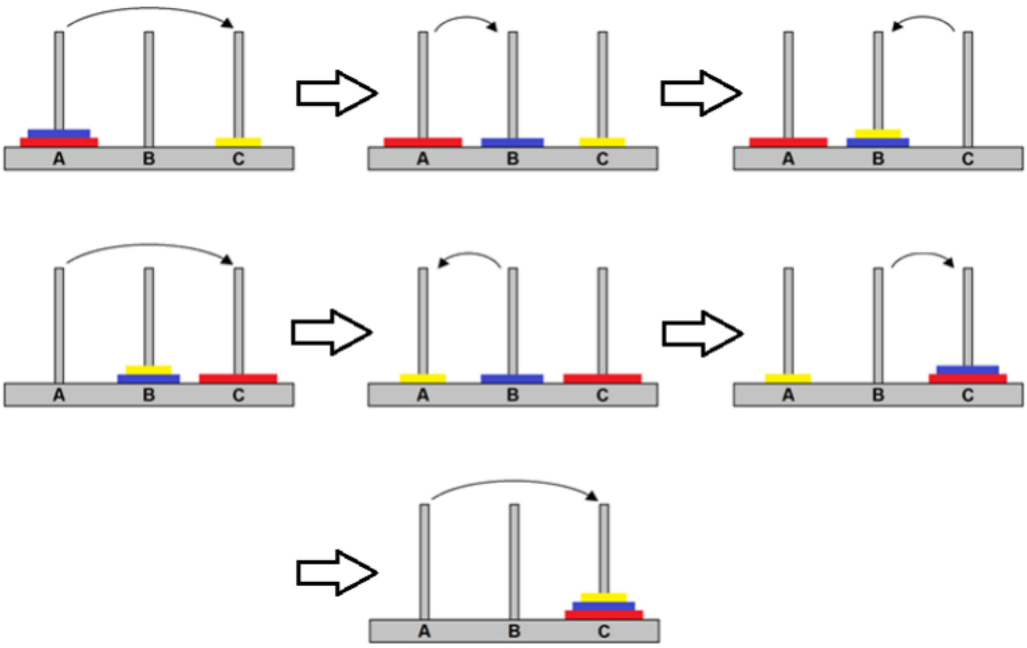
Figura 13 - Solução com dois discos.



Fonte: De Oliveira, 2019.

Para atingir o objetivo do jogo com dois discos (Figura 13), basta remover da torre A o disco azul (disco de menor diâmetro) e colocá-lo na torre B. Em seguida, retirar o disco vermelho (disco de maior diâmetro) e colocá-lo na torre C; por fim, mover o disco azul para a torre C, concluindo o jogo. Para finalizar o jogo foi necessário fazer três movimentos. Assim, $a_2 = 3$, sendo a_2 o número de movimentos dispondo de dois discos.

Figura 14 - Solução com três discos.



Fonte: De Oliveira, 2019.

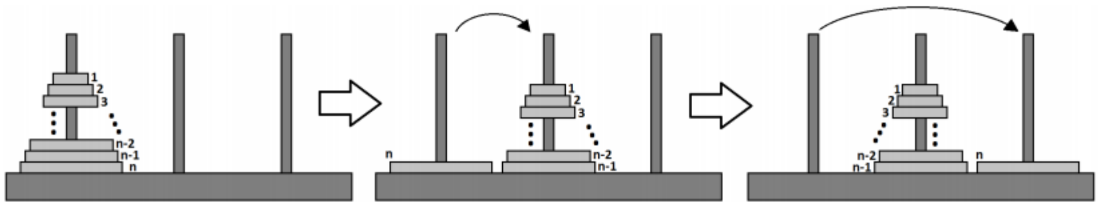
Para atingir o objetivo do jogo com três discos (Figura 14), basta remover da torre A o disco amarelo (disco de menor diâmetro) e colocá-lo na torre C. Em seguida, retirar o disco azul (disco de diâmetro intermediário) e colocá-lo na torre B. Mover o disco amarelo para a torre B, em sequência o disco vermelho (maior diâmetro) para a torre C; por fim, colocar o disco amarelo na torre A, mover o disco azul para a torre C e retornar o disco amarelo para a torre C, concluindo o jogo. Para finalizar o jogo foram necessários sete movimentos. Assim, $a_3 = 7$, sendo a_3 o número de movimentos dispondo de três discos.

Uma outra forma de visualizar a resolução do jogo é realizar os primeiros três movimentos no intuito de finalizar como se o jogo tivesse dois discos, mover o disco restante que é o de maior diâmetro e novamente mover as peças no propósito de finalizar como se o jogo tivesse dois discos.

Percebe-se que, para realização dos movimentos, a forma mais simples de se pensar, a partir de três discos, é relembrar o movimento da jogada anterior quando você tinha dois discos apenas. Com isso, vamos generalizar o caso para n discos e, em seguida, demonstrar se a propriedade será válida para todo n natural.

Para facilitar a interpretação dessa relação, será chamado de $a_{n-1} = X$, sendo X o número de movimentos necessários para mover n – 1 discos (Figura 15).

Figura 15 - Solução com n discos.



Fonte: De Oliveira, 2019.

Seguindo a ideia da generalização do jogo, a torre de Hanói com n discos deverá ser finalizada se deslocar as peças da forma que seja concluída a jogada para n – 1 discos, ou seja, fazer X movimentos. Mover a peça restante que sempre será a de maior diâmetro e novamente mover os discos no intuito de concluir o problema com n – 1 discos, isto é, realizando novamente X movimentos. Com isso, o total de movimentos realizados é $a_n = 2X + 1$, onde a_n é o número de jogadas realizadas com n discos.

Partindo do princípio de que isso seja verdade, fundamentaremos o seguinte teorema para o padrão de resolução do jogo e, em seguida, faremos a demonstração para verificação de sua validade.

Teorema 4.4.1: Se a_n é a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo Torre de Hanói com n discos, então vale a relação de recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ e $a_1 = 1$.

Demonstração: Para a demonstração utilizamos o Princípio da Indução Finita.

1) Como verificado no início desta seção, podemos perceber que para n = 1 a propriedade é válida.
2) Por hipótese, diremos que a propriedade é válida para algum $n \in N$. Assim, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$; n $\geq$ 2 é verdade.
3) Em seguida, vamos mostrar que a propriedade é válida para n +1; $n \in N$, ou seja, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, para todo $n \in N; n \geq 2$. Esse passo da demonstração é similar ao passo explicado quando dispomos de n discos enunciado nesta seção. Assim, é fácil verificar que quando dispomos de n + 1 discos, pela hipótese de indução, realizaremos a_n movimentos, a fim de colocar n discos na ordem pedida pelo jogo. Em seguida, mais um movimento para o disco maior para torre que ficará vazia. Em sequência, a_n movimentos novamente, a fim de colocar n discos na ordem

pedida pelo jogo sobre o disco maior. Com isso, o número total de movimentos mínimos para $n+1$ discos é $a_{n+1} = 2a_n + 1$, para todo $n \epsilon \mathbb{N}; n \geq 2$ e $a_1 = 1$.

Porém, encontramos uma fórmula recursiva para determinação do número de jogadas, ou seja, é necessário saber o número de jogadas anterior para determinar a próxima. Agora, vamos determinar uma expressão fechada que dependa apenas do número de discos na torre.

Como já determinado nesta seção, se a_n para $n \epsilon N$ é o número de movimentos mínimos com *n* discos, sabemos que: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$. Portanto, vamos determinar a fórmula trabalhando os conceitos de recorrências lineares, e queremos chegar na fórmula fechada $a_{\mathrm{n}} = 2^n - 1$, para todo $n \epsilon \mathbb{N}$.

Proposição 4.4.1: A quantidade mínima de jogadas a_n para vencer o jogo em função da quantidade *n* de discos é dada por: $a_{\mathrm{n}} = 2^n - 1$, para todo $n \epsilon N$.

1° Demonstração utilizando conceitos de recorrências lineares: Segue a demonstração utilizando o conceito de recorrências lineares.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2a_1 + 1 \\ a_3 = 2a_2 + 1 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-2} = 2a_{n-3} + 1 \\ a_{n-1} = 2a_{n-2} + 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n-1}a_1 = 1.2^{n-1} \\ 2^{n-2}a_2 = 2^{n-1}a_1 + 1.2^{n-2} \\ 2^{n-3}a_3 = 2^{n-2}a_2 + 1.2^{n-3} \\ . \\ . \\ . \\ 2^2a_{n-2} = 2^3a_{n-3} + 1.2^2 \\ 2a_{n-1} = 2^2a_{n-2} + 1.2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Somando todas as equações, temos

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1.$$

Perceba que temos uma soma de *n* parcelas de uma progressão geométrica de razão 2.

Sendo assim, $a_n = \frac{2^n - 1}{2-1}$, então, $a_n = 2^n - 1$, para todo $n \epsilon \mathbb{N}$.

2° Demonstração utilizando princípio da indução finita: Segue a demonstração utilizando o Princípio da Indução Finita.

1) Para $n = 1$ temos que $a_1 = 2^1 - 1$, sendo assim verdadeira.
2) Suponhamos verdade para algum $n \epsilon \mathbb{N}$, ou seja, $a_n = 2^n - 1$.
3) Verificar se é verdade para $n + 1$. Sabemos pelo teorema 4.4.1 que $a_n = 2a_{n-1} + 1$, assim:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Logo, P (n + 1) é verdadeira. Por indução, $a_n = 2^n - 1$ é verdadeira para todo n natural.

4.5 Torre de Hanói e números binários

As formas discutidas na seção 4.4 para resolução da Torre de Hanói, apesar de simples, não são tão práticas. É notória a dificuldade que surgirá quando for aumentado o número de discos, isto é, o algoritmo recorrente não é a melhor forma de descobrir a solução do jogo a partir de 5 discos. Na prática, podemos analisar cautelosamente como ocorrem as movimentações dos discos. Chamemos o maior disco de n, e o segundo maior de $n - 1$, e assim por diante até o menor disco que será representado por disco 1.

O disco n move-se apenas uma vez (da torre inicial até a torre final), o disco $n - 1$ deve se mover o dobro de vezes do disco n (uma para sair de cima do disco n e outra para voltar para cima do disco n). Analogamente, o disco $n - 2$ move-se o dobro de vezes que o disco $n - 1$ se move, ou seja, 4 vezes. Continuando este processo, podemos facilmente concluir que o disco 1 irá se mover o dobro de vezes do disco 2, assim, fazendo 2^{n-1} movimentos. Note-se que esses valores são potências de 2, que a soma do número de movimentos dos discos $n, n - 1, n - 2, \ldots, 2$ é $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$ e é dada por:

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
(1)_2 = 2^0 & disco\ n \\
(10)_2 = 2^1 & disco\ n-1 \\
(100)_2 = 2^2 & disco\ n-2 \\
(1000)_2 = 2^3 & disco\ n-3 \\
\vdots & \\
+(1000 \ldots 000)_2 = 2^{n-1} & disco\ 1 \\
\hline
111111 \ldots 11111 = 2^n - 1 & \\
+1 & \\
\hline
(10000 \ldots 000)_2 = 2^n &
\end{array}
\right.
$$

Os números binários são extremamente importantes para resolução de problemas que envolvem a teoria dos jogos, assim, utilizaremos tal conceito para auxiliar na relação da movimentação dos discos corretos a cada jogada. Inicialmente temos que mover o disco 1 para a torre de destino (torre em que será montada a torre completa no final do jogo), se n (total de discos) for ímpar, ou para a torre auxiliar (torre que ficará vazia no fim do jogo), se n for par. De fato, em cada passo as movimentações das peças da torre de Hanói teremos as situações seguintes:

1) Se no passo anterior o disco movido foi o menor (disco 1), então não devemos movê-lo novamente porque voltaríamos ao passo inicial ou poderíamos ter alcançado o mesmo resultado com apenas um único movimento. Assim, só podemos mover um dos outros discos (o menor que está nas outras hastes), para a haste em que não se encontra o disco 1.
2) Se no passo anterior o disco movido não foi o menor, então agora devemos mover o disco 1. Neste caso existem duas hastes onde é possível colocar o disco 1.

Vamos chamar as três hastes por A, B e C e considere-se que: se n for par o disco 1 desloca-se para a haste no seguinte sentido A → C → B → A. Se n for ímpar o disco 1 desloca-se para haste no sentido A → B → C → A. Analisando o disco 2, temos que, se $n-1$ for par, o disco 2 desloca-se para a haste no seguinte sentido A → C → B → A. Se $n-1$ for ímpar, o disco 2 desloca-se para haste no sentido A → B → C → A. Analisando o disco 3 se $n-2$ for par o disco 3 desloca-se para a haste no seguinte sentido A → C → B → A. Se $n-2$ for ímpar, o disco 3 desloca-se para haste no sentido A → B → C → A. E isso irá se repetir para os demais discos, logo, percebemos que a torre de Hanói possui movimentos cíclicos em relação a paridade dos discos.

4.5.1 Algoritmo Iterativo

Qualquer algoritmo pode ser expresso em forma muito próxima a uma dinâmica recorrente. Queremos agora verificar a iteração dos discos, isto é, se é possível perceber um padrão para saber a ordem que devemos movimentar os discos. Para isso, já determinamos o ciclo de movimentação dos discos, porém com auxílio dos números binários conseguimos determinar qual disco mover em cada rodada, no intuito de resolver o jogo, conforme sugerido em Silva (2018).

Vamos denotar como $L(n)$ a sequência de movimentos utilizados para transferir uma torre de n discos da haste inicial para haste final.

Definição 4.5.1. Chama-se **concatenação** das sequências $a = x_1, x_2, \dots, x_n; n \epsilon \mathbb{N}$ e $b = y_1, y_2, \dots, y_m; m \epsilon \mathbb{N}$ à sequência $a.b = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Exemplo 4.5.1.1: $a = 1, b = 3$ e $c = 5$, então, $a.b.c = (1, 3, 5)$

Usando esta notação podemos escrever a sequência dos movimentos dos discos como, $\mathrm{L}(n) = L(n-1).(n).L(n-1)$ e $L(1) = 1.$ Vamos ler a expressão acima da seguinte forma, $\mathrm{L}(n)$ é a sequência das jogadas com n discos, isto é, a representação binária do número 1 até $2^n - 1$; $L(n-1)$ representa os movimentos para a haste auxiliar; em seguida, levar o disco n para a haste final que resultaria em mais um movimento; por último, realizar $L(n-1)$ movimentos da haste auxiliar para a torre se completar na haste final.

Teorema 4.5.1. O disco que será movido na b-ésima jogada será o número da posição do dígito 1 mais à direita na representação binária de b.

Demonstração: Pelo Princípio da Indução Finita, vamos verificar que o teorema é valido para todo n natural.

1) Vamos verificar para $L(1)$ e $L(2)$.

Se $L(1) = L(0).(1).L(0)\ e\ L(1) = 1$, por concatenação a sequência seria $(0,1,0)$. Assim, mover apenas um disco. Se $L(2) = L(1).(2).L(1)\ e\ L(1) = 1$, temos que:

$$(1)_2 = 1$$
$$(10)_2 = 2$$
$$(1)_2 = 1$$

Por concatenação a sequência seria $(1,2,1)$, isto é, mover o disco 1 em seguida mover o disco 2, em seguida mover o disco 1 respeitando os ciclos estudados acima. Logo, podemos observar que a propriedade é válida.

2) Por hipótese, diremos que a propriedade é válida para algum $n \in N$. Assim, $L(n) = L(n-1).(n).L(n-1)\ e\ L(1) = 1$ é verdade. Em seguida, vamos mostrar que a propriedade é válida para *n* +1; $n \in N$, ou seja, $L(n+1) = L(n).(n+1).L(n)\ e\ L(1) = 1$.

Se $b \leq 2^n - 1$, então, por se tratar da primeira parte da concatenação por hipótese de indução é válida.

Se $b = 2^n$, então, $2^n = (\underbrace{100 \ldots 00}_{n\ zeros})_2$, repare que o algarismo 1 está na posição *n* +1, assim o disco *n* + 1 será movido.

Se $2^n < b \leq 2^{n+1} - 1$, ou seja, $b = 2^n + k$, e $1 \leq k \leq 2^n - 1$. Então, estamos na parte final da concatenação e o primeiro algarismo 1 mais à direita na representação por b será representado por k. Logo, por hipótese de indução, o algarismo 1 mais à direita determinará qual peça será movida.

Exemplo 4.5.1.2: Vamos representar um esquema de resolução para a Torre de Hanói com 4 discos. Tomemos que o ciclo dos discos pares será A → B → C → A e o ciclo dos discos ímpares será A → C → B → A.

$$L(4) = L(3) = \begin{cases} (0\,001)_2 \\ (0\,010)_2 \\ (0\,011)_2 \\ (0\,100)_2 \\ (0\,101)_2 \\ (0\,110)_2 \\ (0\,111)_2 \end{cases}, 8 = (1\,000)_2, L(3) = \begin{cases} (0\,001)_2 \\ (0\,010)_2 \\ (0\,011)_2 \\ (0\,100)_2 \\ (0\,101)_2 \\ (0\,110)_2 \\ (0\,111)_2 \end{cases}$$

Obedecendo tal esquema acima conseguimos solucionar o jogo, prevendo antecipadamente os movimentos e quais hastes serão ocupadas a cada movimento, como:

$$L(3) = \begin{cases} (0\ 001)_2\ movimentar\ o\ disco\ 1 \\ (0\ 010)_2\ movimentar\ o\ disco\ 2 \\ (0\ 011)_2\ movimentar\ o\ disco\ 1 \\ (0\ 100)_2\ \ movimentar\ o\ disco\ 3 \\ (0\ 101)_2\ movimentar\ o\ disco\ 1 \\ (0\ 110)_2\ movimentar\ o\ disco\ 2 \\ (0\ 111)_2\ movimentar\ o\ disco\ 1 \end{cases}$$

Exemplo 4.5.1.3: Com 13 discos no total, qual disco é movido na jogada 2240?

O número $2240 = (100011000000)_2$, e primeiro dígito 1 mais à direita está na posição 7. Portanto, a jogada 2240 o disco movido será o 7.

5 **APLICAÇÕES**

Sabendo que a “Torre de Hanói” é um jogo milenar, o qual envolve problemas de alguns campos da matemática, é natural ver tal jogo presente em alguns concursos e olimpíadas. Também podemos perceber que os conceitos envolvidos para demonstração do número mínimo de jogadas deste jogo, como princípio da indução finita e recorrência linear, podem ser trabalhados em outros problemas elementares da educação básica.

Para trazer um sentido prático e mostrar a relevância dos conceitos envolvidos da Torre de Hanói para o nível médio da educação básica, neste capítulo veremos algumas possibilidades de aplicações matemáticas em que podemos utilizar os conceitos de princípio da indução ou recorrência linear. O intuito é levar o leitor a entender que tais assuntos são importantes não apenas no âmbito da graduação e crer que é fundamental estes assuntos serem iniciados no nível médio com uma abordagem especial por meio da utilização da Torre de Hanói.

É apresentada uma coletânea de questões dividida em três tópicos para organização da exposição.

5.1 Problemas de concurso

Veremos algumas provas de concurso diversificadas que apresentam a Torre de Hanói como tema para abordar algum conteúdo. Não estamos preocupados neste tópico em apresentar resoluções engenhosas ou até mesmo aplicar o princípio da indução e recorrência nas questões. O objetivo é apenas mostrar a relevância do assunto e como o jogo tratado neste trabalho é utilizado para contextualizar conceitos matemáticos

Questão 5.1.1 – Adaptada do Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade – 2011 (ENEM PPL – 2011)[4]

[4] Disponível em: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2011-segunda-aplicacao/segundo-dia. Acesso em 12/10/2022.

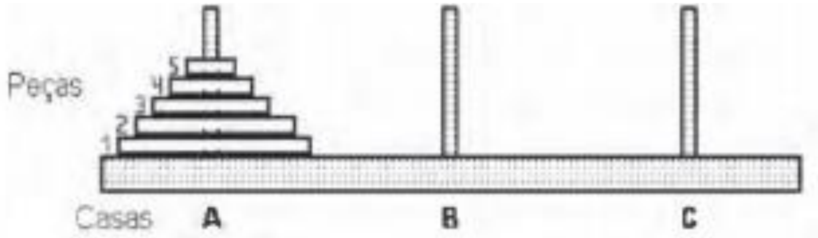
A torre de Hanói (Figura 16) é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as seguintes regras:

1- Um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor.

2- Pode-se mover um único disco por vez.

3- Um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Figura 16 – Torre de Hanói 5 discos



Fonte: INEP.

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (x) e o número mínimo de movimentos (y):

Figura 17 - Tabela peças por movimentos.

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

Fonte: INEP.

A relação entre x e y é:

A) $y = 2^x - 1$ B) $y = 2^{x-1}$ C) $y = 2^x$ D) $y = 2x - 1$ E) $y = 2x - 4$

Vemos uma questão do ENEM PPL de 2011 que trata sobre a Torre de Hanói. Para regulação da questão o candidato deveria ter o conceito de modelagem matemática. Há algumas formas para pensar nisso, como:

1° - O candidato poderia trabalhar com as alternativas e substituir os pares ordenados nas relações apresentadas, sendo x o número de peças e y o número mínimo de movimentos. Assim, chegando na reposta correta alternativa A.

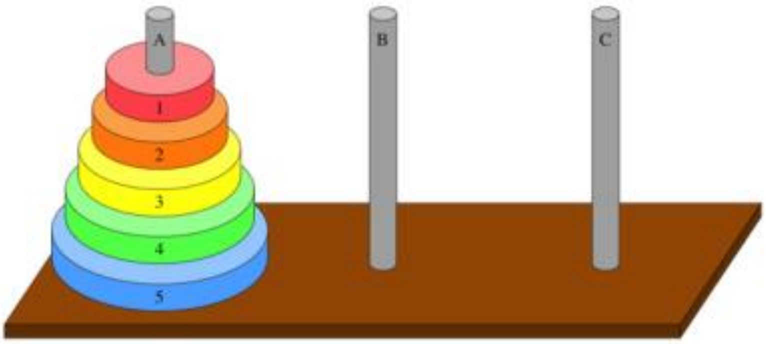
2° - O candidato poderia verificar na tabela apresentada na Figura 17 que o número de movimentos mínimos é constituído pelas potências de dois menos uma unidade. Isso economizaria mais tempo de prova levando o candidato à alternativa A, que é a única que satisfaz tal propriedade. Para pensar desse modo, o conceito de potência, função exponencial e progressão geométrica, deve estar bem consolidado.

Em suma, o candidato que já teve contato com a torre antes de realizar esta prova saiu na frente dos demais. Com isso, a contextualização do jogo foi importante para resolução da questão para aqueles que já o conheciam.

Questão 5.1.2 – Adaptada do Concurso para Aspirante do Corpo de Bombeiros de Minas Gerais – 2018[5]

A torre de Hanói constitui-se em um jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, no planejamento e na solução de problemas. O jogo se apresenta em uma base que possui três pinos na posição vertical (Figura 18). No primeiro pino, tem-se uma sequência de discos com ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo é passar todos os discos para o último pino com a ajuda do pino central, de modo que no momento da transferência o pino de maior diâmetro nunca fique sobre o de menor diâmetro.

Figura 18 - Torre de Hanói 5 discos.



Fonte: Khanacademy. Disponível em: https://pt.khanacademy.org.

Considere uma torre de Hanói, em que os discos são constituídos por 5 cilindros retos “furados” de mesma altura, 1 centímetro. Sabe-se, também, que os raios desses cilindros estão em progressão aritmética de razão 1 e que o diâmetro dos “furos” de cada disco mede 1 centímetro.

[5] Disponível em: https://questoes.grancursosonline.com.br/questoes-de-concursos/matematica/1017053. Acesso em 12/10/2022.

Sabendo-se que o raio do menor disco é de 1 centímetro, qual é o volume ocupado por esses 5 cilindros “furados”, em cm³?

A) 50π B) 5π C) $\frac{215\pi}{4}$ D) $\frac{219\pi}{4}$

Vemos uma questão de concurso a aspirante a bombeiro da banca FUNDEP. Por mais que o problema não trabalhe os conceitos que envolvem a resolução do problema da Torre de Hanói, ela possui uma ideia de recorrência que vale a pena ser refletida neste trabalho. Vamos verificar uma forma de pensar nisto.

Temos que para calcular o volume dos discos vazados, utilizaremos os conceitos de progressão aritmética. Cada disco possui um centímetro a mais em seu raio, sendo o primeiro disco de raio 1 centímetro. E devemos tirar a parte vazada, o que corresponde a um furo cilíndrico de 0,5 centímetros de raio. Assim, cada disco possui a mesma altura, porém seu raio difere de 1 cm em relação ao disco anterior, ou seja, $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 2$ cm, ..., $R_5 = 5$ cm. Somando o volume de cada disco vamos subtrair o volume de um cilindro de raio 0,5 cm e altura 5 cm, que corresponde à parte vazada dos cinco discos. Portanto,

$$V_{discos} = \pi.1^2.1 + \pi.2^2.1 + \pi.3^2.1 + \pi.4^2.1 + \pi.5^2.1 - 5.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.1$$

$$= 55\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{215\pi}{4}.$$

Logo, a alternativa C está correta.

Em suma, examinando a resolução vemos que existe uma ideia de sequência que é utilizada na constituição do problema do jogo, porém conhecer a Torre de Hanói não foi uma grande vantagem para a parte determinista da resolução do problema.

Questão 5.1.3 – Adaptada do Concurso para Professor de Matemática de Paraíba do Sul (Banca: UNESP) – 2018[6]

O jogo torre de Hanói é u m jogo criado pelo matemático Édouard Lucas (1842 -1891). O jogo contém três pinos e alguns discos estão uns sobre os outros em ordem crescente de tamanho de cima para baixo. O objetivo é passar todos os discos em uma quantidade mínima de movimentos para um outro pino de modo que o disco menor sempre fica em cima do disco maior como mostra a Figura 18 com 5 discos, como exemplo. Para 1 disco é necessário 1 movimento. Para 2 discos são necessários 3 movimentos, para 3 discos são necessários 7

[6] Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/60690211/professor-matematica-1. Acesso em 12/10/2022.

movimentos, para 4 discos são necessários 15 movimentos. Observando o padrão quantos movimentos mínimos serão necessários para uma torre com 10 discos?

A) 128 B) 511 C) 1001 D) 1023

Vemos uma questão de concurso para professores de matemática da educação básica. O relevante é que pelo fato de tratar de um jogo clássico, envolve conceitos importantíssimos para serem trabalhados em sala de aula. Assim como a questão 5.1.1, há uma semelhança nos fatores que envolvem a sua resolução.

Entendendo que o número mínimo de jogadas é obtido através dos resultados possíveis das potências de dois menos uma unidade, temos: $y = 2^{10} - 1$, sendo y o número mínimo de jogadas. Assim, $y = 1024 - 1 = 1023.$ Portanto, o número mínimo de jogadas possíveis é 1023, alternativa correta letra D.

Vemos que nas três questões desta seção, temos que a torre de Hanói para o nível de concurso não foi trabalhada na essência do conteúdo que a envolve, isto é, utilizando os conceitos de indução matemática ou recorrência linear. Porém, em alguns casos, conhecer o jogo antes de fazer o problema envolvido no concurso pode trazer uma vantagem para o candidato. Com isso, concluímos que o jogo é relevante quando é tratado para abordar algumas ferramentas da matemática.

5.2 Olimpíadas Brasileiras de Raciocínio Lógico

Nesta seção vamos ver algumas abordagens da Torre de Hanói em provas olímpicas, destacando a OBRL (Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico) [7], que tem por costume cobrar com frequência abordagens a respeito do jogo. No final das questões e discussão das soluções será feito um resumo dos conhecimentos explorados e o que a banca gostaria de exigir do candidato.

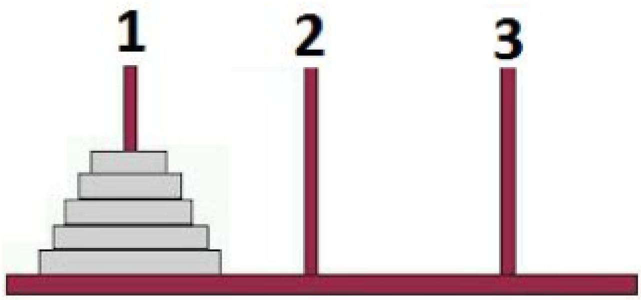
Questão 5.2.1 – Adaptada da 2ª OBRL – Nível 1 – Fase 1 – 2015

O problema da Torre de Hanói envolve um ambiente formado por uma base, contendo 3 pinos, onde, em um deles, há uma pilha de discos furados no meio e de diâmetros diferentes

[7] Disponível em: https://www.obrl.com.br/. Acesso em 20/03/2022

ordenados de forma que o disco maior esteja em baixo e o menor esteja em cima, formando assim uma torre conforme a Figura 19.

Figura 19 - Torre de Hanói 5 discos.



Fonte: OBRL.

Na Torre de Hanói, suponha que em vez de transferir a torre para um dos pinos, você tenha que transferir a torre para cada um dos outros pinos uma vez, ou seja, primeiramente para o pino 2 e, em seguida, para o pino 3. Encontre o número mínimo de movimentos para resolver esse problema, sendo este a soma de todos os movimentos para chegar ao pino 2, mais os movimentos para chegar ao pino 3, a partir do pino 2.

Obs.: Poderemos chegar ao menos número de movimentos possíveis através da expressão que a define com exatidão $\mathbf{2^n - 1}$.

a) 5 b) 25 c) 32 d) 62 e) 127

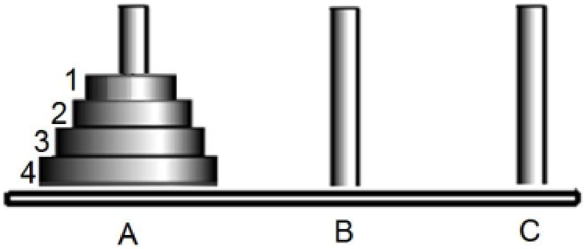
A questão 5.2.1 impõe para o candidato a utilização de uma interpretação algébrica. Para facilitação da solução a banca informou a fórmula fechada para determinação do número mínimo de jogadas. Entretanto, para chegarmos à resposta, é preciso entender que o número mínimo de jogadas dispondo de cinco discos na torre inicial para qualquer um~~a~~ do~~as~~ outro~~as~~ ~~torres~~ pinos é dado por $2^5 - 1 = 31$. Assim, para realizar a nova remoção dos cinco discos para uma outra torre, temos novamente no mínimo 31 movimentos. Assim, totalizando 62 movimentos, alternativa D.

Questão 5.2.2 – Adaptada da 3ª OBRL – Nível 1 – Fase 1 – 2016

Na Torre de Hanói (Figura 20), o desafio consiste em transportar uma a uma dessas quatro peças para um dos outros pinos num menor número possível de movimentos, transferindo assim, toda a torre de discos que está na haste A para a haste C. Para o primeiro movimento transferimos o disco 1 para a haste B e, em seguida, para o segundo movimento, transferimos o disco 2 para a haste C, etc. Determine o total de discos que estarão pousados sobre a haste C, para o sétimo movimento.

a) Nenhum b) Um c) Dois d) Três e) Quatro

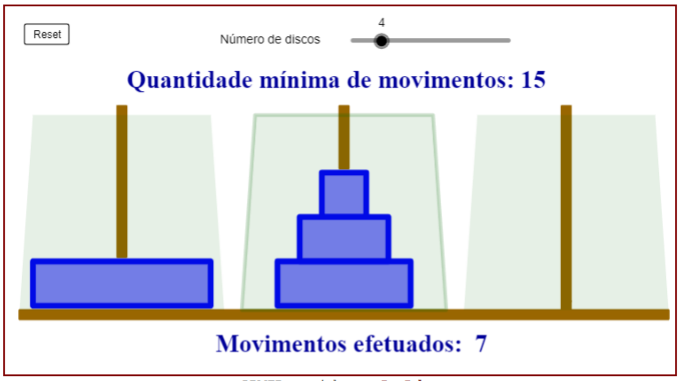
Figura 20 - Torre de Hanói 4 discos.



Fonte: OBRL.

Questão que exige do aluno não apenas saber o funcionamento da Torre de Hanói, mas também, seus padrões e comportamentos a cada jogada. Perceba que o enunciado determina que o jogador comece a realizar os movimentos colocando o disco número 1 na torre B. Se isso for feito no sétimo movimento, teremos a situação ilustrada na Figura 21.

Figura 21 - Torre de Hanói 4 discos – solução parte 1.



Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

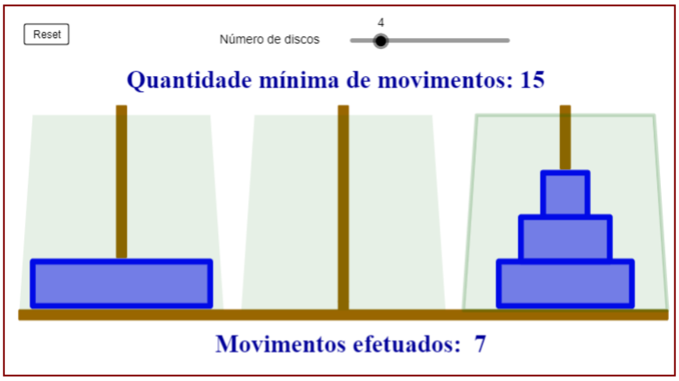
Repare que a resposta correta é letra A, pois nenhum disco se encontra na torre C. Porém, se começássemos o movimento do primeiro disco para torre C, teríamos a situação observada na Figura 22.

Podemos perceber que a torre sem nenhum disco agora seria a torre B. Logo, a forma que iniciamos os deslocamentos dos discos determina onde a torre será formada, e é possível estabelecer um padrão para o número de discos e qual será a torre vazia. Veja:

- Se tivermos um único disco e começarmos o movimento para a torre B, teremos que o número mínimo de jogadas será $2^1 - 1 = 1$. A torre vazia será C.
- Se tivermos dois discos e começarmos o movimento para a torre B, o número mínimo de jogadas será $2^2 - 1 = 3 = 1 + 2$. A torre vazia será a B.

Se tivermos três discos e começarmos o movimento para a torre B, o número mínimo de jogadas será $2^3 - 1 = 7 = 1 + 2 + 2^2$. A torre vazia será a C.

Figura 22 - Torre de Hanói 4 discos – solução parte 2.



Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

Podemos generalizar a situação para um caso com n discos. Se tivermos n discos e começarmos o movimento para a torre B, o número mínimo de jogadas será $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$. A torre vazia será a C se n for ímpar. Se n for par, a torre vazia será a B. Tal propriedade é muito bonita e parece funcionar, porém aqui vemos a necessidade de mostrar para os nossos alunos uma justificativa válida para mostrar que esse argumento será verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$. Assim, utilizaremos o recurso de indução finita para a demonstração abaixo.

Vamos supor que a propriedade é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$. Porém, é necessário verificar dois casos, quando o número de discos n é ímpar e quando n é par. Assim, vamos testar os casos $n = 1$ e $n = 2$. Como esses casos já foram testados na explicação do exercício acima, não o repetiremos, pois já sabemos que são válidos.

Vamos assumir a propriedade válida para $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$. E tomaremos como primeiro movimento o deslocamento do primeiro disco para a torre B. Assim, tomaremos o seguinte argumento como hipótese de indução:

O número mínimo de movimentos para realização do jogo da torre de Hanói obtendo n discos é $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$. A torre vazia será a C se n for ímpar. Se n for par, a torre vazia será a B.

Se n for ímpar, e a propriedade for válida, sabemos que a torre vazia será C. Logo, para $n + 1$, que é par, a torre vazia será B e é isso que queremos demonstrar. Somando 2^n em ambos os membros da hipótese de indução, temos:

$$2^n - 1 + 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$$

Logo, a propriedade é válida para $n + 1$ discos, sendo $n + 1$ par. Vamos agora verificar qual torre estará vazia.

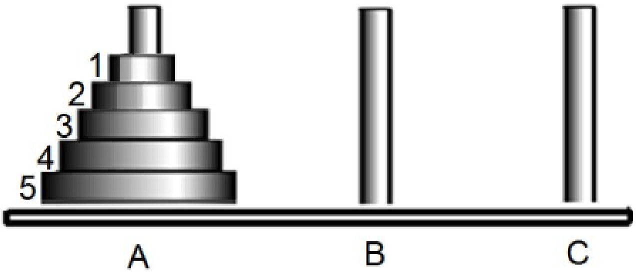
Pela hipótese de indução sabemos que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$ é o número mínimo de movimentos para levar n discos para torre B, pois n é ímpar, ou seja, a torre C estará vazia. Havendo agora $n + 1$ discos, teremos 2^n movimentos a mais que serão tomados, onde $2^n = 2^n - 1 + 1$, isto é, um movimento para remover o disco de ordem $n + 1$ para a haste C e, em seguida, com $2^n - 1$ movimentos mover os discos da haste B para C. Logo, a torre que ficará vazia após esses processos é a torre B. Demonstração análoga se o número de discos é par. Assim, demonstramos a seguinte proposição:

Proposição 5.2.1: Dados n discos na Torre de Hanói posicionados na extremidade à esquerda, iniciando o primeiro movimento para torre central, temos que, após o número mínimo de jogadas, $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$. A torre vazia será a da extremidade direita se n for ímpar. Se n for par, a torre vazia será a central.

Questão 5.2.3 – Adaptada da 3ª OBRL – Nível 2 – Fase 1 – 2016

Na Torre de Hanói da Figura 23, o desafio consiste em transportar uma a uma dessas cinco peças para um dos outros discos num menor número possível de movimentos, transferindo assim, toda a torre de discos que está na haste A para a haste C. Para o primeiro movimento transferimos o disco 1 para haste B e, em seguida, para o segundo movimento, transferimos o disco 2 para a haste C, etc.

Figura 23 - Torre de Hanói 5 discos.



Fonte: OBRL.

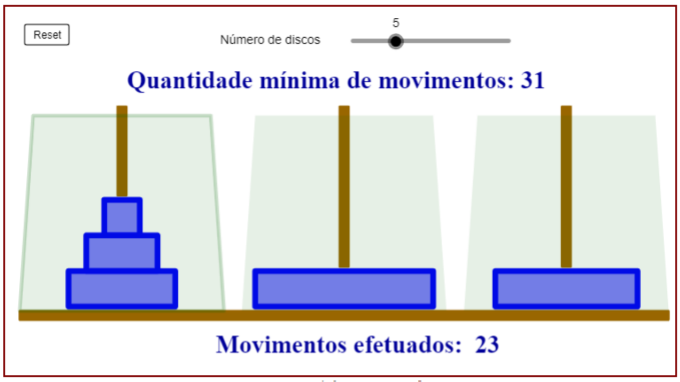
Determine em que haste o disco 2 estará pousado para 23° movimento e em que haste o disco 4 estará pousado para o 12° movimento, respectivamente,

a) A e B. b) B e A. c) A e C. d) C e A. e) B e C.

O problema 5.2.3 exige reconhecimento dos padrões dos posicionamentos dos discos a cada jogada da Torre de Hanói. A questão pode ser solucionada realizando os movimentos do jogo um a um. Assim, teremos o resultado que será alternativa C. Porém, queremos estabelecer uma solução mais engenhosa, notando cada movimento e solucionando problemas similares alterando o número de discos ou ordens de movimento.

Na figura 24 podemos perceber que o disco 2 está na haste 1 na 23ª jogada. Uma maneira simples de perceber sua posição sem realizar os movimentos de um a um é perceber que na 15° jogada a torre com 4 discos será montada em uma das hastes. Sabemos pela seção 4.5 que, com um disco será montado na haste B, com dois discos será montado na haste C e pela regra de alternância das hastes a torre com 4 discos será montada na haste C. Logo, $23 = 15 + 7 + 1$, isto é, 7 é o número mínimo de movimentos para montar a torre de 3 discos, somando uma unidade no número mínimo de jogadas significa que, algum disco será removido, porém temos certeza que não será o disco dois, pois ele terá um disco em cima na 23º jogada.

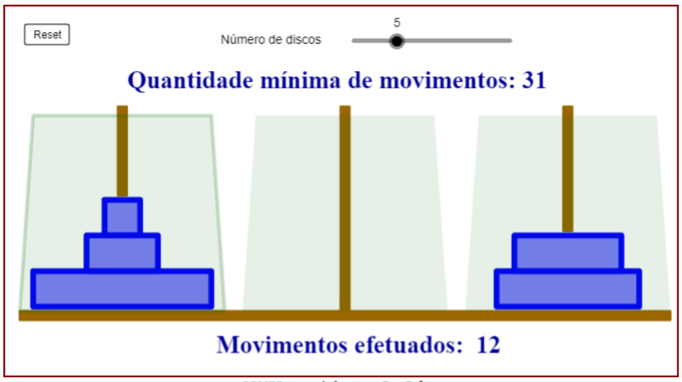
Figura 24 - Torre de Hanói 5 discos – solução parte 1.



Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

Na figura 25 analisamos de forma análoga a figura 24. Percebe-se que o disco 4 está na haste 4 na 12ª jogada. Uma maneira simples de perceber sua posição sem realizar os movimentos de um a um é perceber que na 7° jogada a torre com 4 discos não será removido, pois 7 movimentos mínimos montam a torre com apenas 3 discos. Sabemos pela seção 4.5 que, com um disco será montado na haste B, com dois discos será montado na haste C e pela regra de alternância das hastes a torre com 4 discos será montada na haste C. Logo, o 8º movimento será do disco 4 para haste C e mais 7 movimentos serão realizados apenas com o disco 1, 2 ou 3, ou seja, o disco 4 na 12° jogada estará na torre C.

Figura 25 - Torre de Hanói 5 discos – solução parte 2.



Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

Questão 5.2.4 – Adaptada da 4ª OBRL – Nível 1 – Fase 2 – 2017

O jogo "A torre de Hanói" tem sido jogado desde o século dezenove. É formado por três hastes de plástico, metal, ou madeira, diversos anéis de tamanhos diferentes e consiste em transferir e reconstruir a torre em torno de uma das duas hastes vazias, mas seguindo as seguintes regras:

1ª – Somente um anel pode ser movido de cada vez.

2ª – Nenhum anel pode ficar sobre um anel menor.

Sendo assim, com 1 disco tem-se 1 movimento, com 2 discos tem-se 3 movimentos, com 3 discos tem-se 7 movimentos no mínimo e assim por diante.

Figura 26 - Torre de Hanói com 7 discos.

Fonte: OBRL.

Encontre o número mínimo de movimentos para resolver uma Torre de Hanói com 7 discos (Figura 26), transferindo todos eles de uma haste para outra haste qualquer.

Obs.: Poderemos chegar ao menor número de movimentos possíves através da expressão que a define com exatidão ($\boldsymbol{2^n - 1}$).

a) 64 b) 65 c) 121 d) 128 e) 127

O problema 5.2.4 consiste em uma solução simples, pois ele busca apenas que o candidato determine o número de movimentos mínimos da Torre de Hanói que dispõe de sete discos. Para isso, consta no enunciado a fórmula que determina isto. Assim, $2^7 - 1 = 127$. Resposta alternativa E.

Questão 5.2.5 – Adaptada da 4ª OBRL – Nível 2 – Fase 2 – 2017

A torre de Hanói é um “quebra – cabeça” que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo (Figura 27). O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar de forma a aumentar ou diminuir a quantidade de jogadas mínimas para resolução do sistema.

Figura 27 - Torre de Hanói 8 discos

Fonte: OBRL.

O Professor Danizinho propôs aos seus alunos um desafio para quem conseguisse montar o quebra-cabeça de 8 discos no menor tempo possível e logo seus alunos ficaram entusiasmados a fim de solucionar tal desafio. Rapidamente as alunas Malu e Révora juntaram-se pra treinar e solucionar o jogo movimentando a menor quantidade de discos, e assim, também solucioná-lo no menor tempo possível.

Malu foi a primeira que tentou e quando acabou de realizar o 4° movimento, Révora, que a acompanhava, disse em alto e bom som: “Agora, Malu, só restam N movimentos!”. Qual é o número N?

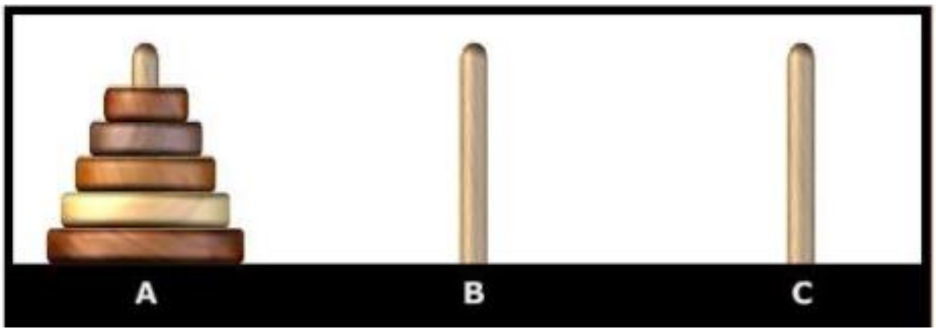
a) 251 b) 124 c) 508 d) 256 e) 128

Para resolução deste problema o candidato deveria realizar a diferença entre o número de movimentos mínimos da Torre de Hanói que possui oito discos com o número de movimentos já realizados. Assim, $2^8 - 1 - 4 = 251$, alternativa correta letra A.

Questão 5.2.6 – Adaptada da 6ª OBRL – Nível 1 – Fase 2 – 2019

A torre de Hanói também cria uma situação envolvendo o número mínimo de movimentos necessários através da seguinte expressão matemática: $(\mathbf{2^n - 1})$, onde *n* corresponde ao número de discos (Figura 28).

Figura 28 - Torre de Hanói.



Fonte: OBRL

Tio Carlos na aula de lógica da sexta-feira pediu a seus alunos para descobrirem a quantidade de discos que foram utilizados, em um jogo da torre de Hanói, quando o seu número mínimo de movimentos tiver sido exatamente 255?

a) 10 b) 8 c) 6 d) 9 e) 7

Para realização desta questão é necessário que o candidato determine o número de discos sabendo o que número de jogadas mínimas para realização do jogo. Então,

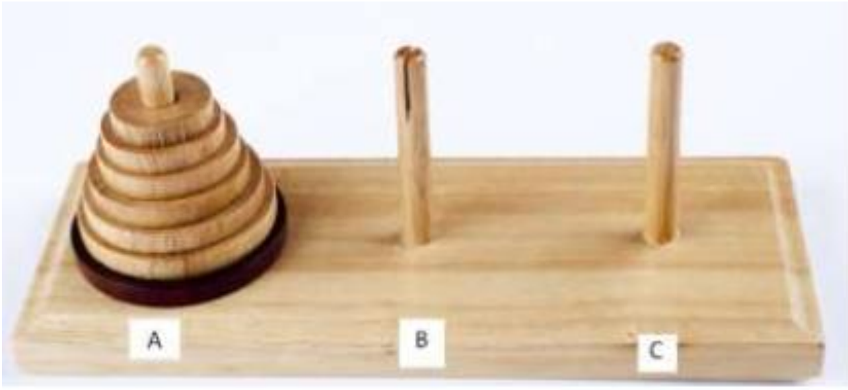
$$2^n - 1 = 255$$
$$2^n = 1 + 255$$
$$2^n = 256$$
$$n = 8$$

Alternativa correta letra B.

Questão 5.2.7 – Adaptada da 6ª OBRL – Nível 2 – Fase 2 – 2019

A torre de Hanói foi inventada em 1833 pelo francês Édouard Lucas, os símbolos foram inspirados na cidade de Hanói do Vietnã. É interessante observar que o número mínimo de “movimentos” para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à terceira é "$(\mathbf{2^n - 1})$**”**, sendo *n* o número de discos.

Figura 29 - Torre de Hanói com 7 discos.



Fonte: OBRL.

Imaginaremos agora que João tem uma torre com 7 discos como mostra a Figura 29. Quando João acabou de realizar o 97° movimento, seu professor, que o acompanhava, disse a ele que só restavam N movimentos! Qual é o número N?

a) 30 b) 12 c) 44 d) 53 e) 27

A resolução desta questão apresenta-se de forma similar ao exercício 5.2.5. Teremos que determinar a diferença entre o número mínimo de jogadas com sete discos e o número de jogadas já realizadas. Assim, $2^7 - 1 - 97 = 30$. Alternativa correta letra A.

5.3 Um problema bem curioso

O intuito é de revelar a Torre de Hanói como instrumento facilitador para resolver problemas e entender padrões., esperamos que os conceitos aqui trabalhados até então nos motivem a resolver outros problemas utilizando os mesmos processos de construção. Um exemplo é o jogo “Lobo, ovelha e a couve” (Figura 30). Vejamos como este jogo conversa com a Torre de Hanói, para isso vamos conhecê-lo.

Figura: 30 - Lobo, ovelha e a couve.

Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

O propósito do jogo é conseguir levar para outra margem do rio os três elementos, a ovelha, o lobo e a couve, porém para que isso seja feito de forma correta é necessário obedecer algumas regras:

1 – A ovelha não pode ficar sozinha com a couve, senão ela comeria a couve e ficaríamos sem um dos três elementos.

2 – O lobo não pode ficar sozinho com a ovelha, senão o lobo comeria a ovelha e ficaríamos sem um dos três elementos.

O número mínimo de jogadas para resolver o problema são 7 que é equivalente ao número mínimo de jogadas para resolver o problema da Torre de Hanói possuindo três discos $2^3 - 1 = 7$. Será que é possível relacionar a forma de solucionar este problema com a Torre?

Figura: 31 - Torre de Hanói com 3 discos.

Fonte: Clubes de matemática da OBMEP.

Seja o maior disco da Figura 31 o lobo, o segundo disco a couve e o primeiro e o menor disco a ovelha. Sabemos que a ovelha não pode ficar sozinha com a couve nem com o lobo, isto é, o primeiro disco não pode ficar embaixo do segundo e terceiro discos, que são maiores. Com esse princípio, conseguimos levar os três elementos para a outra margem do rio, ou seja, os três discos para outra torre.

Caminho da solução do problema: 1° mover a ovelha (disco menor para haste central), 2° voltar com a canoa vazia (disco médio para haste da direita), 3º levar a couve (disco menor para haste da direita), 4° voltar com a ovelha (disco maior para haste central), 5° levar o lobo (disco menor para haste da esquerda), 6° voltar com a canoa vazia (disco médio para haste central) e por 7° e último levar a ovelha (disco menor para haste central).

Assim, podemos perceber o poder do raciocínio lógico para a resolução de problemas e como o conhecimento de um determinado padrão pode ser aplicado a muitos outros problemas. Desenvolver uma estratégia de resolver desafios é muito mais importante que testar série de conceitos para resolvê-lo.

6 **PROPOSTA METODOLÓGICA**

Neste capítulo vamos apresentar a sequência didática para realização de quatro aulas com duração de 50 minutos. As aulas precisam ocorrer com um intervalo de, no mínimo, uma semana entre elas, com o intuito de motivar os alunos a produzirem também fora da sala de aula. Tais aulas envolvem o jogo tema deste trabalho, a Torre de Hanói. Vimos nos capítulos anteriores as aplicações diversificadas a respeito dos conceitos que envolvem a Torre de Hanói. Para esses encontros vamos discutir dois conceitos, que são princípio da indução finita e recorrências lineares. Nosso objetivo é provocar no aluno através do jogo e de alguns recursos tecnológicos a necessidade de buscar padrões e formalizá-los. Assim, entender as interações e produzir um despertamento de que é possível criar modelos matemáticos e até mesmo prová-los.

Para iniciar o experimento é necessário causar um estímulo no aluno para a validade das atividades. Não queremos reproduzir o jogo pelo jogo, mas motivá-los a produzir raciocínios mais apurados. O professor precisa apresentar de forma muito clara a proposta, que é:

- Compreender e superar desafios;
- Solucionar problemas;
- Formalizar soluções;
- Verificar suas aplicações;
- Buscar novos desafios.

Se os alunos se inclinarem para os pontos acima, teremos resultados satisfatórios.

Destinamos essas aulas para alunos do ensino médio. Para realização dos encontros será necessário dividir os alunos em duplas, de modo que em todos os encontros as duplas não possam ser alteradas. Cada grupo deverá ter acesso a um computador e o professor será o mediador de todas as aulas.

6.1 Aula 1 – Apresentação da atividade proposta

Conteúdo abordado: Torre de Hanói e seus padrões.

Objetivo: Explicar aos alunos o funcionamento das atividades e os modelos oferecidos pela Torre de Hanói.
Duração: 50 minutos.

Será necessário dividir a turma em duplas, deixando claro que as duplas deverão ser mantidas nos quatro encontros. A divisão pode ser feita em forma de sorteio ou os próprios alunos determinarem seus companheiros, não há nenhuma regra para formação dos grupos. Cada dupla precisará estar com um único computador, se possível. Havendo alguma dificuldade para disponibilidade de computadores, sugerimos aumentar o número de encontros com a turma para cada aula, assim possibilitando a cada dupla o acesso para realização da atividade.

Cada computador deverá estar acessado no *site* http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/, tal página conta uma breve história sobre a Torre de Hanói e possui um aplicativo com a interação do jogo. O professor será o mediador para contar a história e as curiosidades da Torre de Hanói, apresentadas aqui no início do capítulo 4 e, em seguida, explicar o funcionamento do jogo, suas regras e objetivo; isso levará cerca de quinze minutos. As duplas deverão jogar o jogo por quinze minutos, importante nesse momento que o professor não ofereça dicas, necessário que os alunos testem os padrões, errem e acertem. Se assim conseguirem, outra observação considerável é que os alunos não pulem etapas, mas comecem o jogo com um único disco e, em seguida, avancem aumentando o número de discos.

O professor deverá, a seguir, verificar o rendimento dos alunos, se conseguiram cumprir o objetivo do jogo e qual nível cada dupla atingiu; são dez minutos para rápida avaliação. Os dez minutos finais serão destinados para o professor mostrar para os seus alunos a resolução da Torre de Hanói com cinco discos, elucidar que existe um número mínimo de jogadas e explicar os objetivos da proposta de ensino, isto é, onde queremos que os alunos cheguem e pedir uma atividade para a próxima aula.

A atividade fora de sala de aula pede que as duplas joguem e verifiquem se os números mínimos de jogadas para realização do quebra-cabeça possuem um padrão numérico e se o padrão pode ser verificado até quantos discos no jogo; tal atividade poderá ser praticada no mesmo *site* trabalhado em aula. O aluno não precisa fazer um relatório sobre as atividades realizadas, ele poderá simplesmente discutir na próxima aula o que produziu.

6.2 Aula 2 – Torre de Hanói e suas aplicações

Conteúdo abordado: OBRL (Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico).
Objetivo: Incentivá-los a resolver questões e superar desafios.
Duração: 50 minutos.

Recebendo as atividades deixadas para serem feitas no decorrer da semana, nessa aula será feita uma avaliação das percepções feitas por cada dupla na última atividade. É provável que alguns alunos deduzam por padrões que o número mínimo de jogadas seja $2^n - 1$, e que eles tenham percebido esse padrão até 5 ou 6 discos dispostos no quebra-cabeça. Entretanto, queremos nesta aula instigar a curiosidade do aluno fazendo algumas perguntas, como:

- O que seria o n?
- Posso afirmar que o possível número mínimo de jogadas dado pela expressão $2^n - 1$ funciona para 13 discos?

Possíveis respostas serão dadas, entre as mais comuns, que n representa o número de discos e que para 13 discos não podemos afirmar que $2^n - 1$ é o número mínimo de jogadas, a não ser que alguém tenha resolvido a Torre de Hanói para 13 discos. Tal discussão deve levar cerca de 10 minutos para ser realizada.

Na Atividade 2 queremos que os alunos cheguem juntamente com o professor na expressão $2^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$; serão utilizados 20 minutos para que o professor explique a relação de recorrência que resulta no número de movimentos mínimos, tal explicação pode ser inspirada no tópico 4.4 deste trabalho. Deve-se deixar bem explícitos os movimentos dos discos e como eles colaboram para determinação do número mínimo de jogadas, utilizando os recursos de progressão geométrica e recorrências lineares na proposição 4.4.1 (as partes que envolvem demonstrações por indução não devem ser trabalhadas no momento). Em seguida, será preciso 10 minutos para propor dois problemas das olimpíadas de raciocínio lógico, são eles o problema 5.2.6 e 5.2.7. Nos próximos 10 minutos serão corrigidas as atividades anteriores e proporemos 3 problemas para as duplas mostrarem as soluções na aula seguinte, são os problemas 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3. As resoluções destes problemas constam neste trabalho no capítulo 5.

6.3 Aula 3 – Utilização do princípio de indução finita

Conteúdo abordado: Princípio da Indução Finita.

Objetivo: Incentivá-los a demonstrar e perceber a importância deste passo.

Duração: 50 minutos.

As atividades deixadas para serem resolvidas durante a semana devem ser corrigidas nos primeiros 10 minutos da aula, lembrando que as atividades devem ser feitas com o objetivo de apurar até onde o aluno consegue pensar em padrões e se os conhecimentos dados para as duplas na primeira e segunda aula foram suficientes para fazê-lo pensar em montagem de padrões matemáticos, que vai além da reprodução dos números. Em seguida, devemos indagar os alunos para verem a importância de demonstrar o modelo obtido na recorrência trabalhada. Como podemos provar que a fórmula é válida? Se dispormos de 30 discos será que poderíamos usar a mesma fórmula observada? A resposta só poderá ser concluída após o estudo de indução matemática. Será preciso 30 minutos para explicar o conceito de indução finita e fazer dois exemplos, para inspiração de tal atividade temos o capítulo 2 deste trabalho. Nos próximos 10 minutos finais da aula pediremos que os alunos mostrem por princípio da indução finita a demonstração da propriedade $2^n - 1; n \epsilon \mathbb{N}^*$. Em seguida, a propriedade deverá ser demonstrada pelo professor, que corrigirá os possíveis erros.

6.4 Aula 4 – Sabendo utilizar as ferramentas

Conteúdo abordado: Reconhecimento de modelos e suas demonstrações.

Objetivo: Motivá-los a reconhecer padrões e formalizá-los.

Duração: 50 minutos.

Nesta última aula queremos envolver os alunos em uma conversa na qual o intuito não é trabalhar com números, mas mostrá-los a aplicação de reconhecer padrões e como a matemática interage com outras áreas, ajudando-as a desvendar métodos que facilitam a vivência da sociedade, assim trazendo praticidade em alguns campos que nem percebemos.

Cada dupla deverá estar de frente a um computador com o programa Excel aberto, podendo ser no modelo virtual dado pelas ferramentas da Google. Deverá listar em uma coluna o número de discos até onze, na coluna seguinte o número de movimentos mínimos dado pela quantidade de discos para resolução da Torre de Hanói e na próxima coluna os candidatos a números primos de Mersenne, ou seja, números primos da forma $2^p - 1$, onde p é primo. Logo, os alunos deverão descobrir quais números da segunda coluna são primos; se o número for de alto valor, o aluno poderá pesquisar na internet se um número é primo ou não.

Figura 32 – Primos de Mersenne.

Discos	Número mínimos de movimentos	Primos de Mersenne
1	1	
2	3	3
3	7	7
4	15	
5	31	31
6	63	
7	127	127
8	255	
9	511	
10	1023	
11	2047	2047

Fonte: Autoral, 2022.

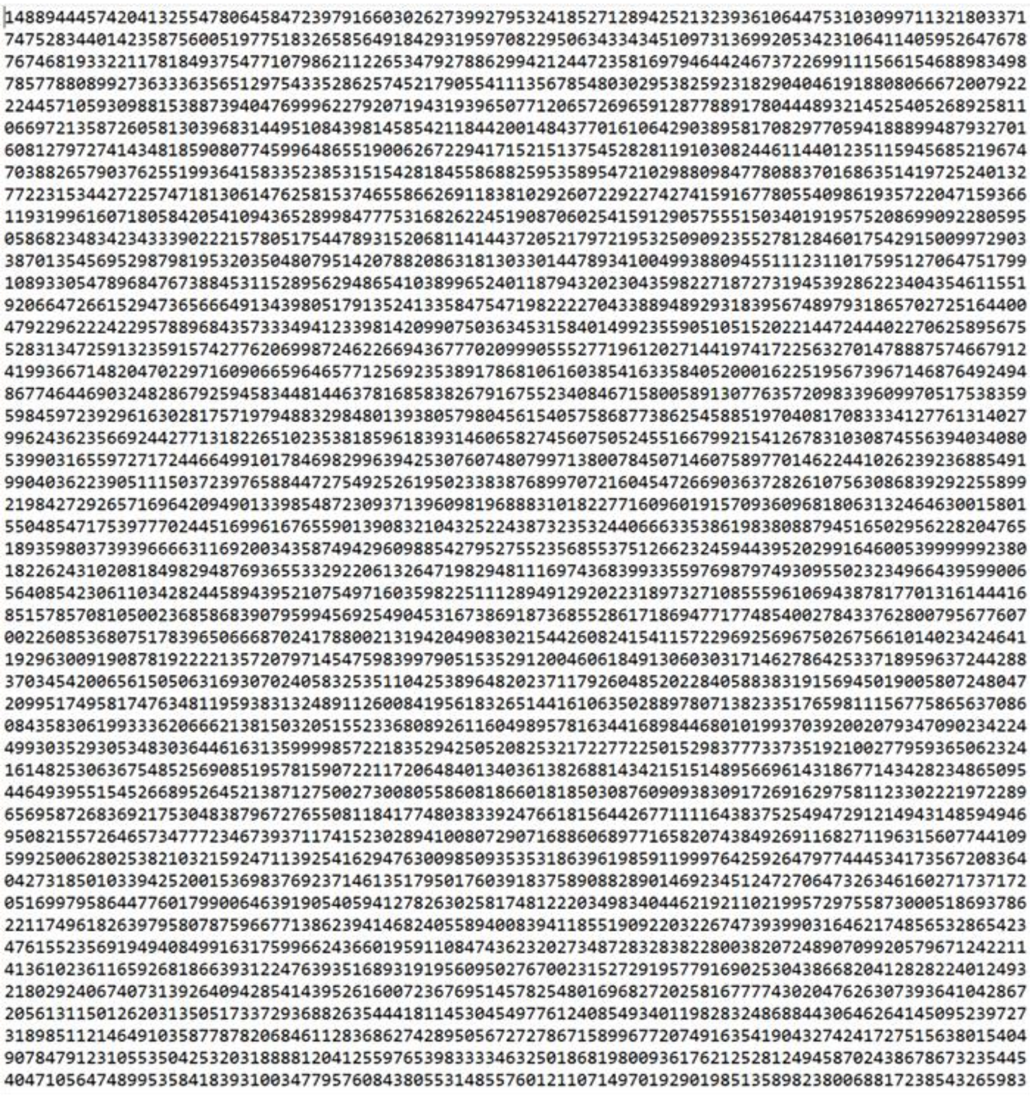
Após isso algumas perguntas devem ser feitas:

- Qual a relação dos números primos de Mersenne com a quantidade de discos?
- Essa relação é aplicada para todos os discos primos?
- A propriedade $2^p - 1$ é primo, se p é primo, é verdadeira?

Possivelmente para primeira pergunta teremos como resposta que quando a quantidade de discos for um número primo, então a quantidade mínima de movimentos será um número primo também, como destacado na Figura 32. Porém, a segunda pergunta mostra que isso não é verdade para todo número de discos primo, pois $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, que não é primo. Logo, o terceiro questionamento não é verdadeiro para todo p primo.

Com isso, evidencie juntamente com os alunos a importância de algumas aplicações em nosso cotidiano. Os números primos são empregados em várias áreas do conhecimento científico, mas sem dúvida sua utilização na criptografia é a mais famosa. As compras realizadas pela internet com segurança utilizam o algoritmo RSA, amplamente operado no mundo e conversas sigilosas por aplicativos em *smartphones* só são possíveis através da criptografia, que modifica a mensagem em código não legível para que não seja interceptado durante o envio. O algoritmo de criptografia gera uma chave que parte basicamente de 2 números primos. Quanto maiores forem, mais segura será a operação envolvida. O maior número primo conhecido até o momento é um primo de Mersenne – matemáticos profissionais e amadores do projeto de pesquisa mundial Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) descobriram o maior número primo conhecido (Figura 33). Com 24.862.048 dígitos, mais de 1,5 milhão do que o número primo recorde[8] descoberto em 2017, ele pode ser expresso como $2^{82.589.933} - 1$.

Figura: 33 – Maior número primo já descoberto.



Fonte: Impa

O objetivo da atividade proposta é mostrar que, com o auxílio da Torre de Hanói, tecnologia, problemas olímpicos, conseguimos promover o estudo de uma ferramenta específica, utilizada na graduação, que trabalha conceitos básicos da matemática como objeto

[8] Disponível em: https://impa.br/noticias/por-que-a-descoberta-do-maior-numero-primo-importa/. Acesso em 12/10/2022.

de estudo no nível médio. Quando o ensino vem acompanhado de aplicações, história e prática temos certeza de que o resultado será satisfatório. A matemática não pode ser um campo isolado, mas deve ser a ciência que une os campos comprovando afirmações através dos números.

CONCLUSÃO

É simples perceber na jornada docente abismos que existem na aprendizagem, sendo por acessibilidade tecnológica e estrutural do colégio ou até mesmo por questões sociais envolvidas na localização escolar, tanto geográfica quanto em termos da situação financeira dos alunos. Enfim, uma lista de dificuldades é encontrada diariamente pelos educadores que precisam rompê-las para o exercício de lecionar. Desse modo, os professores vêm se reinventando a cada dia para atingir os objetivos do ensino satisfatório nas escolas.

Com a democratização do acesso às universidades, através do sistema de cotas e bolsas universitárias, temos um público carente ingressando no ensino superior que por sua vez precisa de apoio para seguir até a conclusão do curso que escolheram. Mas, além das dificuldades sociais enfrentadas por cada aluno, há uma diferença entre a forma de lecionar no ensino básico e superior. Este trabalho vem dialogar e evidenciar que possuímos formas satisfatórias de trabalhar conceitos da graduação que são importantes para o ensino básico, com o objetivo de diminuir a fenda aberta diariamente na forma de ensinar matemática.

A explanação do trabalho não é apenas mostrar técnicas diferentes e recursos que consideramos serem mais apropriados, mas sim, unir o método tradicional de ensinar matemática, que é necessário, com metodologias que podem causar efeitos mais fortes dentro de sala de aula. Dentre os métodos tradicionais cremos que um jogo clássico como a Torre de Hanói pode ajudar muitos alunos a entender padrões, deduzir fórmulas e demonstrá-las. Trabalhar os conceitos de indução finita e recorrências lineares com a Torre de Hanói no ensino básico mostra que o aluno pode investigar e entender conteúdo do nível superior de forma lúdica e concluir que há aplicações em muitos campos matemáticos.

Entre novos recursos, o auxílio da história por traz do jogo, ferramenta da matemática lúdica, utilização de *softwares* e incentivo à participação nas olimpíadas podem potencializar o aprendizado. Motivar os alunos a participarem de olimpíadas é muito válido, pois encoraja o corpo discente a superar desafios e facilita na promoção da iniciação a pesquisa dos professores na educação básica.

Logo, ter disponível um jogo milenar e conceitos não ensinados no nível médio pode ser uma oportunidade de elevar o nível do raciocínio lógico matemático de nossos alunos. É preciso destacar a necessidade de se ter sempre o zelo de expor os conteúdos de forma clara e acessível, contextualizar e, se possível, trabalhar de modo interdisciplinar o assunto, mostrando que na matemática muitas coisas são aplicáveis em nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. 16 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 27 de nov. de 2021.

CLUBE DA OBMEP. *Jogo interativo Torre de Hanói*. Clubes da OBMEP. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/ Acesso em 21 de nov. de 2021.

CLUBE DA OBMEP. *Lobo, a ovelha e a couve*. Clubes da OBMEP. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/112532-2/. Acesso em 21 de nov. de 2021.

DA COSTA, Eli Banks Liberato. A História da Ciência e o ensino da recursividade: as torres de Hanói. *História da Ciência e Ensino*: Construindo Interfaces, São Paulo, v. 4, p. 38-48, 2011.

DA SILVA, Claudenor Ancelmo. *A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas*. 2015. Dissertação (Mestrado profissional em matemática). Departamento e Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, Rio Grande do Norte. 2015.

DE MORAES, Reginaldo Carmello Corrêa. Entre o quadro negro e o smartphone. *Jornal da Unicamp*, 24 mai. 2018. Disponível em: <unicamp.br/unicamp/ju/artigos/reginaldo-correa-de-moraes/entre-o-quadro-negro-e-o-smartphone>. Acesso em: 23 nov. 2021.

DE OLIVEIRA, Edvan Pontes. *As diversas maneiras de explorar a matemática através do jogo torres de Hanói*. Dissertação (Mestrado profissional em matemática). 2019. Departamento de matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte. 2019.

DIAS, Barrozo Claudia. Construção dos números a partir dos axiomas de Peano. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática). 2011. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2011.

FRANCO, Magda Aparecida de Oliveira. *Jogos como uma ferramenta para favorecer a aprendizagem*. Artigo (V congresso nacional de educação). Universidad de la empresa. 2018.

HEFEZ, Abramo. Indução Matemática. *Programa de Iniciação Científica da OBMEP*. Vol. 4, 2009. Disponível em:< https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/7uly1ostl484c.pdf.>. Acesso em 12 de jul. de 2021.

LOPES, Maria da Glória. *Jogos na educação: criar, fazer, jogar*. 7 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MOURA, M. O. *A séria busca no jogo: do lúdico na matemática*. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 1996.

OBRL. *Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico*. Disponível em: < http://www.obrl.com.br/>. Acesso em 23 de maio de 2021.

OLIVEIRA, Sergiano Guerra; CALEJON, Laura Marisa Carnielo; BRITO, Alan Santana. *A utilização e aplicação do jogo torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos mais atraente e eficaz*. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. *Anais do..*. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5316_2744_ID.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2022.

ORTEGA, Antônio Carlos; DA SILVA, Lorena Carla Macedo; FIOROT, Meire Andersan. O jogo Torre de Hanói em um contexto psicogenético. *Acta Scientiarum,* Maringá, v.4, n.1, p. 151-158, 2002.

PEREIRA, Antônio; RODRIGUES, Rosália. O problema das Torres de Hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações. *Gazeta de matemática,* Aveiro, n.144, p. 1-9, 2003.

RODRIGUES, Aroldo. *Sistemas de numeração*: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. 2013. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, Pará. 2013.

SANTOS, Mirian Silva. *Algumas variações do jogo torre de Hanói*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, 2017.

SILVA, Bruno Thiago. *Indução matemática*: discussão teórica e uma proposta de ensino. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, 2015.

SILVA, Renato José Menezes. *Explorando a matemática do jogo torre de Hanói*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento e Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, Rio Grande do Norte, 2018.