Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

PLATAFORMA DIGITAL GRASPABLE: PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Diogo Ferreira de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Evaldo A. de Oliveira

DIADEMA

2022

DIOGO FERREIRA DE SOUSA

PLATAFORMA DIGITAL GRASPABLE: PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

DIADEMA

2022

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Sousa, Diogo Ferreira de
Plataforma digital graspable: proposições para o ensino de álgebra na educação básica / Diogo Ferreira de Sousa. – – Diadema, 2022.
94 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2022.

Orientador: Evaldo Araújo de Oliveira Filho

1. Álgebra. 2. Ensino de matemática. 3. Ensino híbrido. 4. Plataforma virtual de aprendizagem. 5. Graspable. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas

Campus Diadema

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Renato de Sá Teles

Diogo Ferreira de Sousa

PLATAFORMA DIGITAL GRASPABLE: PROPOSIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Presidente da Banca:

____

Prof. Dr. Evaldo Araújo de Oliveira

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Vicente Pereira de Barros - IFSP

____

Prof. Dr. Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos - UNIFESP

____

Prof. Dr. Carlos Roberto Senise Junior - UNIFESP

Discente do Mestrado:

____

Diogo Ferreira de Sousa

Data da Defesa: 30/11/2022

AGRADECIMENTOS

À Deus, que sempre me deu força e nunca me deixou desistir.

À minha maravilhosa esposa, Juliana Liberato Sousa, que suportou todos esses anos, me incentivando, apoiando e orando pela minha vida. Muito obrigado!

Aos meus maravilhosos filhos Daniel e Laís por compreenderem minhas inúmeras ausências.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Evaldo A. de Oliveira, que muito contribuiu para o desenvolvimento desse trabalho com seu vasto conhecimento e experiência.

Por fim, agradeço a todos os meus colegas de turma e professores do mestrado que contribuíram na minha formação com seus valiosos conhecimentos e sempre estiveram dispostos a ajudar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Ele fortalece o cansado e dá grande vigor ao que está sem forças."

Isaías 40:29

RESUMO

A compreensão que se tem sobre a escola atual é que não houve grandes mudanças há décadas, principalmente sobre o formato do ensino que se baseia, predominantemente, em salas dispostas em fileiras e o professor como um transmissor de conhecimento. Por outro lado nossos alunos, que nasceram imersos em um mundo digital com acesso rápido e fácil a milhares de informações, não encontram grandes motivações no ensino atual, em particular no ensino de matemática. A aprendizagem de matemática, em especial a de álgebra, pode ser frustrante e às vezes um tanto difícil, pois há muitas regras para memorizar e procedimentos para decorar. O acesso rápido e fácil à informação promovidos pelo rápido avanço tecnológico, trouxe um novo desafio, pois não é mais necessário se preocupar em armazenar os conhecimentos, mas sim, pensar em como construir e conectar tudo isso. É preciso considerar que o acesso às informações se tornou mais rápido, e os alunos estão cada vez mais protagonistas de sua aprendizagem. Pois as novas tecnologias e mídias sociais estão promovendo uma verdadeira revolução no mundo. Nas escolas, de forma geral, houve um rompimento quanto às barreiras da resistência e ao uso de recursos tecnológicos, seja por meio de livros digitais, videoaulas, uso de celulares, TVs, lousas digitais, acesso à internet sem fio (wifi) entre outros. Nesta nova abordagem de ensino, através de novas experiências, pode-se encontrar alternativas que tenham o objetivo de melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, este trabalho buscou investigar, através da literatura, quais são as concepções mais relevantes que se têm sobre álgebra, metodologias de ensino, o baixo rendimento em avaliações externas, as atuais dificuldades no ensino básico, as orientações norteadoras para o ensino de álgebra no Brasil, um breve relato sobre o ensino híbrido e a tendência do uso de tecnologias de comunicação nas escolas. Por fim, foi apresentado o aplicativo GRASPABLE MATH (GM) que tem por finalidade auxiliar no processo de ensino-aprendizagem em álgebra e fomentar a utilização de recursos digitais nas aulas de matemática, bem como um passo a passo para a utilização do GM e proposições de uso deste aplicativo para o ensino de álgebra.

Palavras chaves: Álgebra. Ensino de matemática. Ensino híbrido. Plataforma virtual de aprendizagem. Graspable.

ABSTRACT

The understanding that we have about the current school is that there have been no major changes for decades, especially regarding the teaching format, which is predominantly based on classrooms arranged in rows and the teacher as a transmitter of knowledge. On the other hand, our students, who were born immersed in a digital world, with quick and easy access to thousands of information, do not find great motivations in current teaching, particularly in the teaching of Mathematics. Learning mathematics, especially Algebra, can be frustrating and sometimes quite difficult, there are many rules to memorize, procedures to write and follow. The quick and easy access to information, promoted by the rapid technological advance, brought a new challenge, as we no longer need to worry about storing knowledge, but thinking about how to build and connect it all. We need to consider that access to information has become faster and students are increasingly protagonists of their learning, as new technologies and social media are promoting a true revolution in the world. In schools, in general, there was a break in the barriers of resistance to the use of technological resources, whether through digital books, video classes, use of cell phones, TVs, digital whiteboards, wireless internet access (wifi) among others. We can say that, little by little, the 21st century is coming to schools and making it possible to get closer to the reality of the student. In this new teaching approach, alternatives can be found through new experiences, which aim to improve the teaching-learning process. In this sense, this work sought to investigate, through the literature, what are the most relevant conceptions about Algebra, teaching methodologies, the low performance in external assessments, the current difficulties in basic education, the guiding guidelines for the teaching of Algebra in Brazil, a brief report on blended learning and the trend in the use of communication technologies in schools. Finally, the application GRASPABLE MATH (GM) was presented, which aims to assist in the teaching-learning process in Algebra and encourage the use of digital resources in Mathematics classes, as well as a step-by-step guide for the use of GM and use propositions of this app for teaching Algebra.

Keywords: Algebra. Mathematics teaching. Blended teaching. Virtual learning platform. Graspable.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

LISTA DE QUADROS

QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os conteúdos que são ensinados na educação básica bem como as metodologias aplicadas, nas últimas décadas, sofreram pouca ou nenhuma alteração principalmente em matemática.

> "As pesquisas que tratam de questões relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática, nos diferentes níveis de ensino, têm aumentado muito nas últimas décadas. Propostas significativas para a melhoria do ensino estão centradas em enfoques, métodos e estratégias, uma vez que, do ponto de vista teórico, os conteúdos a serem abordados durante as aulas de Matemática deverão continuar essencialmente os mesmos." (ALMEIDA e DIAS, 2004)

Por outro lado tanto o acesso quanto os meios de obter informações, sim, modificaram-se, por isso, atualmente há necessidade de pesquisar, compreender e aplicar as mais diversas opções que a humanidade desenvolveu ao longo de seu processo de desenvolvimento histórico, tendo como finalidade: promover e melhorar a construção do conhecimento. Nesse sentido, a BNCC estabelece uma das competências gerais:

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, BNCC, 2017, p. 9)

Compreender a forma de integrar essas novas práticas pedagógicas com as necessidades específicas de cada área de conhecimento, tem sido desafiador. Para entender o cenário atual da educação e atuar sobre ele, faz-se necessário pesquisar o processo histórico da construção do ensino sobre as áreas de conhecimento, em particular o de álgebra e de seu ensino, que será o objetivo de pesquisa deste trabalho. Para que haja condições e embasamento teórico que possibilite ações futuras, precisa-se responder algumas indagações que surgiram e serão foco de pesquisa deste trabalho, são elas:

Quais são as principais concepções sobre álgebra e seu ensino? Temos um currículo adequado às necessidades do aluno, hoje? Quais são as práticas de ensino mais adequadas para o século XXI?

Nessa perspectiva, de adequar as práticas de ensino, vários pesquisadores têm estudado sobre o uso de ferramentas digitais na prática docente com consideráveis contribuições no processo de ensino-aprendizagem de matemática. De acordo com Pitombeira (2020):

> Por ser mais interessante para o aluno, a utilização das tecnologias digitais em Matemática facilita muito sua aprendizagem. Para tanto, existem vários softwares matemáticos e plataformas capazes de simplificar a aprendizagem de Matemática e estes recursos tecnológicos estão cada vez mais disponíveis tanto para o professor como para o aluno. Estes recursos ampliam a ação didática do professor enriquecendo os processos metodológicos em sala de aula. (PITOMBEIRA, 2020, p. 29)

Ao associar recursos tecnológicos ao ensino, espera-se que os estudantes criem uma conexão com o processo de ensino-aprendizagem, pois são nativos digitais e os recursos eletrônicos fazem parte do dia a dia destes. Com a finalidade de entender quais práticas e recursos tecnológicos podem ser implementados, é fundamental entender o panorama atual da educação básica, no Brasil, de acordo com as suas diversas realidades escolares.

Este trabalho foi fundamentado com uma abordagem teórica, logo, o trabalho foi resultado de uma pesquisa bibliográfica, e tem por objetivo contribuir com a formação de professores. A pesquisa de referências bibliográficas foi realizada através de bibliotecas virtuais de teses de universidades públicas brasileiras e universidades estrangeiras, periódicos, livros e artigos em revistas de divulgação científica, bem como os documentos normativos da educação básica.

O Capítulo 2 tratará do desenvolvimento histórico da álgebra, principais concepções da literatura, ensino de álgebra, pensamento algébrico, bem como as orientações normativas, para o ensino de álgebra, segundo a BNCC e o Currículo Paulista.

O Capítulo 3 apresentará algumas concepções sobre o uso de tecnologias no ensino de álgebra, ensino híbrido e TDIC.

No Capítulo 4 será apresentado o aplicativo GRASPABLE MATH, projeto de desenvolvimento, fundadores, tutoriais, alcances e limitações do aplicativo.

No Capítulo 5 é apresentado um plano de aula adequado para o Ensino Fundamental Anos Finais, com uso do aplicativo GRASPABLE MATH.

Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais sobre esse trabalho, com a defesa do uso de tecnologia na educação, em particular o uso do GRASPABLE MATH como alternativa para o ensino de álgebra.

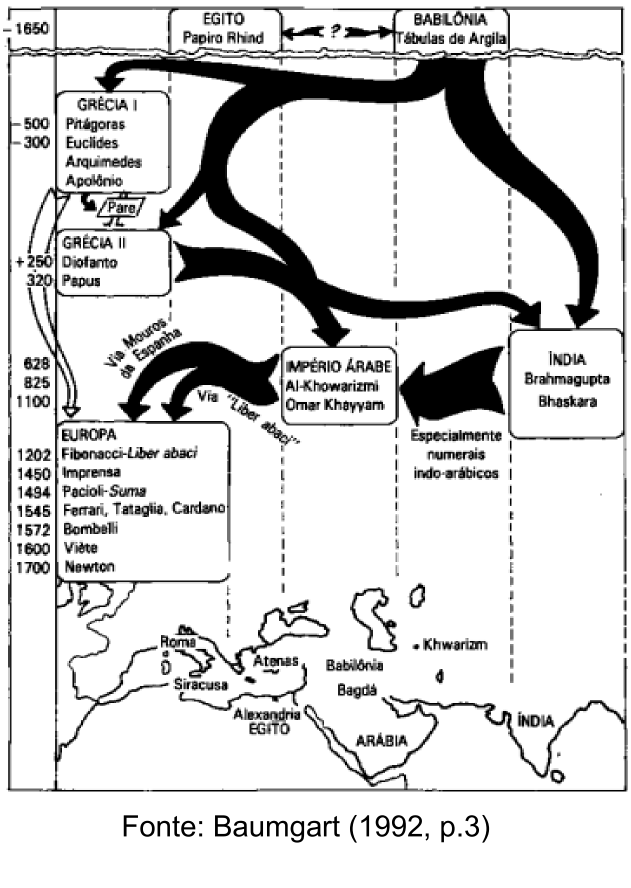
2. BREVE HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

Historicamente, a álgebra é um dos grandes eixos da matemática e seu aparecimento está diretamente ligado à necessidade humana em estabelecer meios e procedimentos para representar e resolver diversos problemas da humanidade. De acordo com Milies (2004, p.3), pode-se dizer que “esta ciência é tão antiga quanto a própria história da humanidade, se levarmos em conta que esta última se inicia a partir da descoberta da escrita”. Ainda de acordo com o autor:

> [...] tanto nas tabuletas de argila da suméria quanto nos papiros egípcios, encontramos problemas matemáticos que lidam com a resolução de equações. No Papiro Rhind, por exemplo, documento egípcio que data aproximadamente do ano 1650 a.C. e no qual o escriba conta que está copiando material que provém do ano 2000 a.C., encontramos problemas sobre distribuição de mercadorias que conduzem a equações relativamente simples. Surpreendentemente, descobrimos também que os antigos babilônios sabiam resolver completamente equações de segundo grau (MILIES 2004, p.3).

Para entender o presente momento da álgebra faz-se necessário voltar alguns anos na história e seguir uma linha cronológica de seu desenvolvimento. Vale ressaltar que ao longo da história a álgebra se desenvolveu com a contribuição de diversas culturas (Figura 1).

Figura 1 - Principais correntes no fluxo da álgebra



Fonte: Baumgart (1992, p.3)

O termo "álgebra" surge aproximadamente no século IX d.C a partir de uma derivação da palavra *al-jabr*, utilizada no título de um livro publicado pelo matemático árabe *al-Khowarizmi (790-840)*. De acordo com Baumgart (1992, p.1), possivelmente uma melhor tradução para o termo álgebra seja "a ciência das equações", uma vez que se fundamenta em realizar a mesma operação em ambos os lados da igualdade.

O termo hoje em dia tem um significado mais amplo, por isso, vamos separar sua cronologia em duas fases: "(1) álgebra antiga (elementar), que é o estudo das equações e seus métodos de resolvê-las e (2) álgebra moderna (abstrata), que é o estudo de estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos" (BAUMGART, 1992, p.3). Ainda de acordo com o autor, a primeira fase (elementar) se passou entre 1700 a.C. a 1700 d.C., com o avanço gradual do simbolismo, mas com pouco progresso.

Apenas no século XVI, aproximadamente, um feito de maior expressão ocorre com a resolução geral das equações cúbicas, quárticas e o desenvolvimento das equações polinomiais em geral, feito por François Vietè (1540-1603), que por sua vez passou a fazer parte da história como o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da matemática, ficando assim conhecido como o Pai da álgebra. As ideias algébricas evoluíram com importantes contribuições, principalmente da álgebra egípcia, babilônica, chinesa, hindu, arábica e europeia renascentista.

A linguagem algébrica foi construída ao longo da história e para chegar ao formato atual passou por três importantes estágios.

O estágio *retórico,* onde os problemas eram escritos e desenvolvidos de forma escrita (ou verbal), que não faz uso de símbolos para representar números e operações, mas apenas a linguagem corrente. Entre os problemas solucionados na época citamos um retirado da Antologia Grega: "Democares viveu um quarto de sua vida como criança, um quinto como jovem, um terço como adulto e há treze anos é ancião. Quantos anos ele tem?" (EVES, 2004, p.225, apud HANKE, 2008).

O estágio *sincopado* (uso de abreviações), "onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente" (ALMEIDA, 2010, p. 20), teria surgido com Diofanto de Alexandria por volta de 250 d.C. e posteriormente por várias civilizações, segundo Ponte (2006, p. 5):

> "Pouco a pouco vai-se definindo o conceito de equação e a álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações. Um autor da

> Antiguidade, por alguns considerado o fundador da álgebra, é Diofanto (c. 329-409 d.C.), que desenvolveu métodos aproximados para a resolução de equações e sistemas de equações num estilo de linguagem conhecido como “sincopado”. Deste modo, os enunciados dos problemas, que tinham começado por ser expressos em linguagem natural, passam a incluir pequenas abreviações.”

Nas primeiras aparições de símbolos algébricos, utilizou-se sinal específico para incógnitas, um para o sinal de menos e um para cada potência da incógnita. A linguagem corrente ainda era utilizada para representar, por exemplo, a igualdade: “é igual a”. O quadro 1 apresenta uma relação entre a linguagem algébrica contemporânea e o formato sincopado, de representar equações, utilizadas por Diofanto, no século IV.

Quadro 1: Simbolismo atual x Simbolismo Grego

Simbolismo atual	**Diofanto**
$x + 3 = 18$	$x1\ u3$ é $igual\ a\ \ u18$
$x + 3 = 12 - x$	$x1\ u3$ é $igual\ a\ \ u12\ M\ x1$
$x^2 = 4$	$Q1$ é $igual\ a\ \ u4$
$x^4 = 8\,x^3$	$QQ1$ é $igual\ a\ \ C8$

Fonte: GUELLI, O. (1997, p.24, apud HANKE, 2008)

Finalmente, o estágio simbólico (uso de linguagem simbólica representativa) foi o período “em que o poder de síntese das expressões é transmitido pelos símbolos.” (FERREIRA e NOGUEIRA, 2007, p.4). Somente no final da fase intitulada como elementar, no século XVI, com François Viète (1540-1603), ocorre uma transformação fundamental, entrando no estágio da álgebra simbólica,

> Viète introduziu o uso das letras para indicar números desconhecidos da forma como são utilizadas até hoje, escrevendo equações e estudando suas propriedades. Ele foi o primeiro a utilizar letras como coeficientes genéricos (positivos) aproximando a representação simbólica das equações à praticada atualmente. [...] Apesar do avanço proporcionado pelos estudos de Viète e da beleza da álgebra elaborada por ele, esta ainda estava incompleta e a álgebra de Descartes veio não apenas completá-la, mas também complementá-la, ao possibilitar a síntese entre Geometria e álgebra, agora de uma maneira sistematizada e formal, transformando a álgebra geométrica dos gregos, em uma Geometria algébrica, utilizando os principais objetos algébricos, as equações, para representar entes geométricos, como retas, curvas, planos, sólidos, entre outros. (FERREIRA E NOGUEIRA, 2007, p.5).

O quadro 2 traz algumas contribuições de civilizações distintas que, ao longo do tempo, tiveram grande influência para o desenvolvimento da notação algébrica.

Quadro 2 - As civilizações e a evolução do uso da notação algébrica

Época	Estudiosos	Contribuições
2000 a.C.	Babilônios	Usavam a técnica de completar quadrados para resolver equações.
1950 a.C.	Egípcios	Os problemas pareciam enigmas. Encontramos em alguns papiros a utilização de símbolos para representação: mais, menos, igual e incógnitas.
500 a.C.	Gregos	Utilizam a Geometria como ferramenta para se resolver equações algébricas por método da aplicação de áreas ou métodos das proporções.
300 d.C.	Diofanto	Introduz algumas abreviações para escrita e resolução de equações algébricas.
1500 d.C.	Viète e outros	Introduz o simbolismo algébrico moderno.
1600 d.C.	Descartes	Aprimora o simbolismo algébrico moderno. Institui a utilização das primeiras letras do alfabeto (a,b,c) para representação dos coefici-entes numéricos e as últimas (x,y,z) para as variáveis. É o pioneiro a utilizar o símbolo **.** (ponto) para representar a multiplicação.

Fonte: Autor, a partir de (HANKE, 2008).

Dois aspectos principais culminaram no avanço do desenvolvimento algébrico, o primeiro foi a necessidade em melhorar as notações, com intuito de torná-las mais práticas e eficazes, de tal forma que possibilitasse trabalhar com maior praticidade, tornando-as mais simples e o mais geral possível.

O segundo aspecto foi a carência em desenvolver novos conjuntos numéricos, com o árduo trabalho em compreender sua natureza e sua adequada formalização com rigor matemático. A partir do século XIX, enfim uma notação mais apropriada é desenvolvida (utilizando letras para simbolizar coeficientes e variáveis de uma equação), possibilitando chegar às fórmulas gerais de resolução de equações e demonstrar técnicas de trabalho gerais. As letras simbolizavam em todos os casos algum tipo de número (inteiros, racionais, reais ou complexos) e trabalhavam-se as propriedades destes de modo intuitivo (MILIES, 2004).

2.1 PERSPECTIVAS SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA

Seja no processo de ensinar ou de aprender, é imprescindível investigar quais são as concepções que se têm sobre o objeto de estudo. Com o objetivo de ter um melhor diagnóstico sobre as dificuldades atuais em nossas escolas, no processo de ensino aprendizagem de álgebra, faz-se necessário entender o caminho de desenvolvimento dessa temática, bem como os pontos de maior relevância, pois assim, obtém-se uma visão mais sólida e consistente que permitirá sugerir propostas com possíveis melhorias no Ensino de álgebra, e, assim, direcionar as perspectivas futuras.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), "percebe-se ainda, dificuldade de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal, e os novos significados dos símbolos matemáticos", por isso, é de grande relevância buscar o entendimento de como está o panorama atual, ou seja, quais são as perspectivas do ensino da álgebra na educação básica e como os estudantes a enxergam.

Encontrar e entender tais aspectos ajudarão os professores a estruturar e planejar seu trabalho, levando em conta as diferentes propostas pedagógicas - abordagens sobre o tema - e previsíveis dificuldades que aparecerão ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Tradicionalmente, a álgebra tem espaço de destaque nos livros didáticos e currículos, como veremos nas próximas seções, sendo uma das unidades temáticas - além de Números, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística - que tem grande relevância, devido à sua posição como um objeto de estudo necessário para desenvolvimento da sociedade. Através dos livros didáticos utilizados no ensino básico e de pesquisas encontradas na literatura, nota-se que no Brasil, em especial, somente no final do século XX houve um esforço para mudar concepções mais tradicionais do Ensino da álgebra, até então, predominava-se a manipulação de expressões algébricas seguindo um padrão de regras.

Por vezes, ainda ocorre do seu ensino ser apresentado fora do contexto dos alunos e sem o devido planejamento, o que pode acarretar a desmotivação por parte dos estudantes. Na próxima seção, pretende-se analisar, a partir da literatura, algumas concepções que permeiam a álgebra.

2.2 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA SEGUNDO USISKIN

Comumente a álgebra é relacionada, de forma muito simplificada, às operações com letras e a compreensão de seus significados, e assim “consideramos que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez” (USISKIN, 1995, p. 9).

De acordo com Hanke (2008), as variáveis possuem um conceito multiface, sendo concebidas em diferentes quadros de trabalho. Não se pode resumir a variável em apenas um ponto de vista, pois desta forma estaríamos distorcendo os objetivos da álgebra. Pois para que os alunos alcancem a compreensão sobre álgebra, em suas diversas faces, é necessário propor atividades que sejam significativas, com foco nas habilidades de analisar, observar, argumentar, identificar padrões, generalizar, formalizar e comunicar.

Para Usiskin (1995, p.12), as variáveis “comportam muitas definições, conotações e símbolos, tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra”. Na linha de pensamento do autor, as variáveis possuem conceitos multifacetados. No quadro 3 são apresentadas as diferentes faces conceituais para variável.

Quadro 3 - Conceitos e as multifaces de variável

Situações	**Exemplos de diferentes usos de uma variável**
Fórmula: $A = b \cdot a$	Fórmula da área de um retângulo, onde as letras (variáveis) representam coisas conhecidas, neste caso, A de área, b de base e a de altura.
Equação: $40 = 50 \cdot x$	Variável como algo desconhecido: incógnita.
Identidade: $senx = cosx \cdot tgx$	Variável como argumento de uma função.
Propriedade: $1 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$	Variável como generalizadora de modelos.

Expressão que traduz uma função: $y = kx$	Variável traduz uma proporcionalidade direta, onde há o caráter de variabilidade.

Fonte: Autor, a partir de Usiskin (1995, p. 10, apud ESTEVÃO, 2021)

No quadro 4 são apresentadas as principais concepções de álgebra de acordo com Usiskin (1995).

Quadro 4: Resumo das concepções de álgebra segundo Usiskin (1995)

Concepção da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de padrões (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: A partir de Usiskin (1995, p. 20)

Segundo Usiskin (1995), a primeira concepção de álgebra pode ser vista como *aritmética generalizada – padrões numéricos* - podendo ser utilizada no sentido de apoiar o entendimento da ideia de variável e generalização. Há inúmeras possibilidades para ser trabalhada, desde os anos iniciais, mediante o planejamento e uso de atividades que desenvolva a álgebra de forma intuitiva.

Dentro dessa concepção, a variável é vista como generalizadora de modelos, sendo de grande relevância no trabalho com a modelagem matemática. Desenvolver atividades algébricas com esta concepção remete a resultados construtivos tanto na álgebra como em Aritmética, pois espera-se que o aluno conheça a estrutura aritmética e as operações entre os números. Identifica-se a prática desta concepção quando o aluno começa a utilizar letras, ao invés de números, entendendo a álgebra como uma ferramenta que generaliza processos, operações e propriedades sobre os números. No início dos trabalhos, o professor não deve ter uma preocupação acentuada com a formalização rigorosa, as impressões iniciais devem ser desenvolvidas de forma intuitiva e exploradas de forma mais natural possível.

Uma situação de aprendizagem que pode ser estabelecida, por exemplo, está no estudo das propriedades operatórias, questionando os alunos de uma turma sobre as operações: 2 . 1 = 1 . 2 = 2, 3 . 1 = 1 . 3 = 3, … , 5 . 1 = 1 . 5 = 5, com a intenção direcionada em que eles possam generalizar tal propriedade aritmética do elemento neutro na operação de multiplicação, escrevendo-se a . 1 = 1 . a = a. Ainda segundo o autor, através da tradução de uma ideia, generaliza-se o modo de encontrar uma propriedade.

Um segundo exemplo com tais características, que seguem o mesmo raciocínio, é a igualdade 2 + 4 = 4 + 2, escrita como $x + y = y + x$, ou seja, através da indução numérica de um caso particular remete-se à generalização de propriedades, nesse caso, encontra-se de forma natural a propriedade comutativa.

A partir da observação de relações conhecidas entre números, generaliza-se propriedades numéricas usando a concepção de álgebra como aritmética generalizadora, desta forma, não há a ideia de incógnita, ou valores a serem descobertos.

Portanto, a atividade terá alcançado o propósito de uma primeira experiência com a generalização de padrões e um primeiro contato com as variáveis. Conforme Standarts (NCTM, 2000, p.91, apud. HANKE, 2008), “quando os estudantes notam que operações parecem ter propriedades particulares, eles estão começando a pensar algebricamente”.

Usiskin (1995), chama a segunda concepção de a álgebra como um *estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*. Na visão do autor, a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, seguindo na direção oposta da concepção de aritmética generalizada, as variáveis são visualizadas como incógnitas ou constantes, enquanto as instruções-chave para manusear a variável como generalizador de padrões são “traduzir e generalizar”, as instruções-chave nesta concepção são “simplificar e resolver”. Do aluno, espera-se que escreva um problema do formato retórico para uma linguagem algébrica - nesse passo utiliza-se a primeira concepção de traduzir e generalizar - com o objetivo de ter melhores condições de visualizar o problema e resolvê-lo, após alguns passos em determinada sequência - nesse passo aplica-se a segunda concepção para simplificar e resolver.

Sabe-se que, por um lado, os passos procedimentais para resolver problemas têm o objetivo de facilitar, mas estes só facilitam a depender da clareza que os alunos têm sobre as regras que a linguagem algébrica impõe, por outro lado, contrapondo esta possível situação, os procedimentos podem criar uma falsa compreensão de facilitarem o aprendizado.

Por exemplo, considere o seguinte problema: “O triplo de um certo número adicionado a 2 unidades é igual a 8. Encontre o número. Utilizando a concepção de álgebra generalizada para traduzir e generalizar, escreve-se $3x$ + 2 = 8. O aluno deve entender que é preciso realizar operações inversas em ambos os membros da equação, para descobrir o valor da incógnita x, seguindo os passos a seguir:

- Traduzir e generalizar:

  I) $3x + 2 = 8$

- Simplificar e resolver:

  I) $3x + 2 - 2 = 8 - 2$

  II) $3x = 6$

  III) $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$

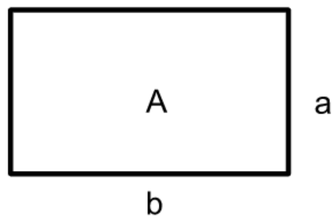
  IV) $x = 2$

A visão de que se tem uma igualdade, precisa estar clara para o aluno, pois assim ele irá assimilar que tudo o que é feito em um membro tem que ser feito no outro, aplicando aqui uma ideia facilitadora, por exemplo, simulando o que ocorreria com uma balança de dois pratos e o seu equilíbrio. Logo, ao subtrair uma quantidade de um membro (um prato da balança), para que a igualdade (balança) fique em equilíbrio, é preciso subtrair a mesma quantidade do outro membro (segundo prato da balança): fazendo essa comparação com igualdades nas equações.

Para não ficar dúvidas e encerrar esse tema, essa concepção baseia-se principalmente na resolução de equações, simplificar e resolver, com o claro objetivo de encontrar o valor numérico desconhecido que por sua vez está representado por uma letra (incógnita).

Usiskin (1995), denota a terceira concepção de álgebra como um *estudo de relações entre grandezas*, nesta concepção as variáveis podem representar ou assumir diversos valores, partindo do pressuposto que há relações entre elas. Por exemplo, ao anunciar a fórmula da área do retângulo (Figura 2):

Figura 2 – Retângulo



Fonte: Autor

Tem-se $A = b \cdot a$, onde as variáveis A, b e a, são respectivamente a área, base e altura. Não há uma busca de valores, como se estivesse resolvendo algo. O fato é que não resolveu coisa alguma, e sim três grandezas relacionaram-se entre si (USISKIN, 1995). É através dessa visão que se traz o significado ao estudo de funções, que por sua vez, por exemplo, pode-se introduzir uma abordagem de atividades por meio de sequências geométricas, pois ao analisar e compreender os padrões, o aluno relacionará grandezas (HANKE, 2008).

O que difere esta concepção das anteriores, pode ser ilustrada com a seguinte pergunta para o aluno: “O que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior?” (USISKIN, 1995, p. 15). O autor explica, que apesar da simplicidade deste exemplo, ele pode provocar dúvidas nos estudantes, pois neste caso o “x” não é para ser encontrado, ou seja, não é uma incógnita. Não é também uma generalização, já que não faz sentido analisar o que acontece para um único valor em específico (USISKIN, 1995).

Nesta concepção, a álgebra se preocupa com os modelos e relações funcionais que busca relacionar grandezas. As variáveis representam relações de dependência e independência entre quantidades e medidas, podendo ser representadas graficamente. Nesta linha de pensamento, a variável independente pode assumir o papel de argumento e todos os valores que este pode assumir formam o domínio da função, enquanto os valores da variável dependente formam a imagem da função.

Também as letras podem ser encaradas como parâmetros, como por exemplo na equação $y = mx + n$ onde m e n são parâmetros (USISKIN, 1995).

Situações que relacionam grandezas são úteis e muito importantes, além do mais, atuam como meio para o desenvolvimento do raciocínio responsável pela obtenção de modelos que configuram, entre outros, fenômenos da natureza e do dia a dia, permitindo também o pleno desenvolvimento da linguagem algébrica.

Para a quarta concepção de álgebra denominada *estudo das estruturas*, segundo o autor:

> "O estudo da álgebra no nível universitário envolve estruturas como grupos, anéis, domínios integrais, corpos e espaços vetoriais. Parece ter pouca semelhança com o estudo da álgebra no nível do ensino médio, embora os campos de números reais e números complexos e os vários anéis de polinômios subjazem à teoria da álgebra, e as propriedades de domínios e grupos integrais explicam por que certas equações podem ser resolvidos e outros não. No entanto, reconhecemos a álgebra como o estudo de estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações sobre números reais e polinômios." (USISKIN, 1995, p12)

Como exemplo de abordagem das propriedades atribuídas às operações com polinômios e números reais considere o seguinte problema: suponha que se queira fatorar a expressão $4x^2 + 2ax + 68a^2$. Observa-se neste exemplo que a utilização e o significado da variável não é o mesmo que nas concepções anteriores. Inicialmente percebe-se que não há um modelo aritmético a ser traduzido e generalizado, como na aritmética generalizada.

Também não representa uma equação, ou seja, a variável não é uma incógnita ou algo a ser encontrado. Por fim, não se trata também de alguma relação funcional entre grandezas, portanto, a variável independente não é vista como um argumento. Então, nessa concepção as letras podem ser manipuladas segundo as regras da aritmética, como símbolos arbitrários, e onde os alunos apresentam muitas dificuldades pois exige do deles maior amadurecimento com relação às técnicas e operações algébricas.

Como veremos nas próximas seções, esta situação ocorre no Ensino Fundamental Anos Finais, quando se começa a desenvolver os produtos notáveis, fatoração, simplificação de expressões algébricas e operações com monômios e polinômios. Neste contexto, o estudante irá manipular as variáveis "usando propriedades que são exatamente tão abstratas" (USISKIN, 1995, p. 18) quanto a expressão a ser manipulada.

Nesta concepção, os alunos precisam ter certo nível de amadurecimento no uso da linguagem algébrica, pois lidarão abstratamente com as variáveis utilizando técnicas adequadas. De acordo com Hanke (2008), o uso das técnicas ou regras sem significado, dificulta o aprendizado e consequentemente leva a erros conceituais.

Pode-se exemplificar com uma situação bem comum nas salas de aula, em determinadas situações pede-se para os alunos simplificar uma expressão algébrica, e surgem questionamentos quanto ao objetivo ou sentido em executar tal procedimento, pois as variáveis não têm “valores”.

Surge outra situação bem comum, eles não conseguem distinguir, em muitos momentos, equações de expressões algébricas. A utilização de atividades sob esta concepção, fornece bases de uma álgebra abstrata com maior rigor, ajuda no aprimoramento de técnicas de manipulação e compreensão de modelos mais abstratos e formais.

Para isso, é fundamental que se dê significado ao cálculo algébrico, apontando justificativas bem como os objetivos que levam à simplificação e fatoração de expressões. Ainda na linha de pensamento de Usiskin (1995), as concepções de álgebra estão relacionadas aos papéis atribuídos às variáveis, as quais devem ser exploradas e trabalhadas em contextos significativos. O autor destaca que estas concepções podem sofrer alterações ao passar do tempo, como por exemplo, devido às múltiplas aplicações matemáticas e à utilização dos computadores que avançam a uma velocidade impressionante.

2.3 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA SEGUNDO FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM

Para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), uma primeira concepção, que chamaram de *processológica*, parte do pressuposto que a álgebra é um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para aplicar em problemas, cuja resolução segue procedimentos padronizados.

Uma segunda concepção, que chamaram de *linguístico-estilística, entende a álgebra como* uma linguagem específica, criada para expressar rigorosamente os procedimentos da primeira concepção, entretanto, defende a não suficiência de um “problema” para sua coexistência, ou seja, a álgebra se constitui como campo autônomo do conhecimento matemático.

Uma terceira concepção, que chamaram de *linguístico-sintático-semântica*, também entende a álgebra como linguagem específica e rigorosa, no entanto, seu poder criativo e instrumental não está propriamente em seu domínio estilístico, mas em seu sentido interpretativo (semântica), ou seja, quando se distingue o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas ou contínuas, determinadas e particulares, e o uso da letra para representar genericamente quantidades genéricas. Desta forma, essa linguagem revela sua capacidade operatória em expressar transformações algébricas estritamente simbólicas.

Uma quarta concepção, que chamaram de *linguístico-postulacional*, segue na linha de pensamento da terceira concepção, no entanto, estende-se o domínio da álgebra a todos os campos da matemática, ao imprimir um grau de abstração e generalidade sem precedentes, ou seja, passa-se a representar não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades matemáticas que não tenha uma representação quantitativa, por exemplo: estruturas topológicas, estruturas de ordem entre outras.

De acordo com essas concepções mais frequentes de álgebra que podem ser caracterizadas, a partir de diferentes leituras do desenvolvimento histórico, precisa-se estabelecer como se relacionam com as concepções dominantes de *Educação Algébrica*, que ganharam força ao longo da história da Educação matemática.

2.4 CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Ao longo do século XIX até meados do século XX, destacava-se uma educação pautada, de modo geral, na resolução de problemas que faziam pouco ou nenhum sentido para os alunos. No Brasil, a matemática era ensinada de forma fragmentada - em blocos - um tema após o outro. Os conteúdos Aritmética, álgebra, Geometria e Trigonometria tinham programas e livros separados e não existia relação entre os conteúdos e a disciplina matemática - como é atualmente - não existia.

Os objetivos de cada tema não eram definidos com clareza, adotava-se a postura que tudo era muito importante, em algumas situações por influência de outros países. Alguns autores de livros da época, justificavam a importância de se estudar esse ou aquele conteúdo, pela relevância que outros países mais desenvolvidos davam aos mesmos.

> “Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a álgebra é considerada como um dos ramos mais úteis e interessantes da

> instrução. Tal é a importância que ali se dá a esta matéria, que já foi incluída como parte do ensino obrigatório nas escolas primárias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema a uma equação algébrica." (TRAJANO, 1953: Prefácio, apud FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1992, p. 41)

No Brasil, em 1931, ocorreu a primeira organização nacional da educação e a disciplina de matemática foi criada. Ainda de acordo com os autores, as primeiras coleções de livros de matemática, que surgiram, usavam uma abordagem mecânica e davam mais destaque para a álgebra, do que a aritmética, devido sua aplicabilidade na resolução de problemas. Nessa época, o transformismo algébrico (concepção processológica), era considerado pré-requisito para uma álgebra aplicada e o processo de ensino aprendizagem estava estruturado seguindo a estrutura seguir:

I) Treinar a utilização de regras para manipulação de expressões algébricas;

II) Operacionalização de expressões algébricas;

III) Resolução de equações;

IV) Resolução de problemas.

Segundo os autores Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), essa estrutura de desenvolvimento da educação algébrica, através do treinamento para ser um bom tecnicista, com vistas aos procedimentos algébricos, seria suficiente para que os alunos se tornassem hábeis solucionadores de problemas, foi definida como "*concepção linguístico-pragmática*".

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1992), somente, a partir da década de 60, o Movimento da matemática Moderna chega ao Brasil, com uma perspectiva diferente e com o objetivo de unir os campos da matemática. O movimento buscou contrapor a forma puramente mecânica, utilizando temas que pudessem ser unificados: estruturas algébricas, teoria de conjuntos e relações que deveriam criar uma base para o desenvolvimento de uma nova matemática.

Tendo o objetivo de instruir o aluno a aplicar estruturas algébricas em diferentes temas, tópicos fundamentais como: conjuntos numéricos, propriedades estruturais, sentenças abertas e fechadas, conjunto universo e conjunto verdade, equações e inequações de 1° grau, foram fixadas como pré-requisitos ao desenvolvimento de expressões algébricas, valores numéricos, operações e fatoração. A partir desta mudança, acreditava-se que o aluno construiria argumentos lógicos para significar o transformismo algébrico. Ainda de acordo com os autores, a álgebra, nessa época, obteve um destaque maior, por isso, a educação algébrica ganha uma outra concepção: a "*fundamentalista-estrutural*".

De acordo com essa concepção, para iniciar o conteúdo de funções, deveria estudar a teoria de conjunto e suas propriedades estruturais, sentenças abertas e fechadas, expressões algébricas, equações, polinômios, fatoração, frações algébricas, ou seja, os tópicos algébricos são estruturados em uma sequência, colocando um conteúdo sempre como pré-requisito a outro.

Logo, essa concepção volta a sofrer influências da corrente pedagógica do tecnicismo após alguns anos mais tarde. Então, instalou-se um impasse entre os matemáticos e educadores da época, pois diante de contestações sobre o Movimento da matemática Moderna - conjecturas que serviram de base para os novos ideais modernistas - que por sua vez, não consegue conter tal crise.

Após a ruptura entre as concepções anteriores, abriu-se uma fenda entre as ideias de educação algébrica possibilitando o aparecimento de uma nova concepção de educação algébrica: a "*fundamentalista-analógica*". A partir desta nova concepção, busca-se realizar uma união entre as concepções linguístico-pragmática e fundamentalista-estrutural e - encontra-se um "meio termo" - "[...] procura, por um lado, recuperar o valor instrumental da álgebra e, por outro, manter o caráter fundamentalista – só que não mais de forma lógico-estrutural – de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico" (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.84).

O que fica claro em todas as concepções pautadas pelos autores é que todas têm por base uma álgebra simbólica pronta e, em geral, o processo de ensino aprendizagem consiste no chamado "transformismo algébrico".

A partir de então, seguiu-se com os ideais de um ensino que tem por referência uma linguagem que nega as experiências vivenciadas pelos alunos, ficando a cargo dos mesmos a compreensão de que tudo está acabado e o único objetivo baseia-se no cumprimento de regras sem um contexto ou justificativa, e depois resta implementá-las na resolução de algum problema criado para essa finalidade.

2.5 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), que foram elaborados a partir da necessidade de estabelecer referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras, destaca que:

> “Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver um estudo da álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.” (BRASIL, PCNS, 1998, p.116)

Portanto, encontra-se uma linha de pensamento nova para a educação algébrica somente a partir da década de 90, mudando o foco das regras de manipulações algébricas de uma linguagem “pronta” para uma proposta do uso de situações que levem os alunos a construir noções algébricas, tendo como referência as experiências, principalmente, quanto à variedade de representações, levando os alunos a desenvolverem um “*pensamento algébrico”*.

> “A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio a expressão de um pensamento.” (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, l993. p. 85)

As concepções atuais sustentam-se na literatura que a álgebra é, entre outros pontos de vista, uma forma de expressar um pensamento, pois através dela pode-se obter relações que nos auxiliam a modelar e entender o mundo. Nesse sentido, e especialmente na escola, o ensino de matemática possui um papel de grande relevância. Segundo Coelho e Aguiar (2018), de forma indissociável as habilidades, desenvolvidas na disciplina de matemática, auxiliam os alunos a desenvolver tais ferramentas para a sua vida em sociedade. Em especial, o ensino da álgebra pode apoiar o objetivo de desenvolver, nos alunos, o pensamento que os ajudem na procura por padrões e comparações, quando enfrentarem problemas do dia a dia.

A compreensão sobre o pensar algébrico tem sido indagada por vários autores e não há um entendimento consensual sobre o tema. Para Lins e Gimenez (1997), as observações, as conclusões, as indagações, as ideias utilizadas por sujeitos durante o entendimento de uma situação problema, qualificam o pensamento algébrico.

Partindo desse entendimento e olhando a linha do tempo na evolução da álgebra, o pensamento algébrico aparece em todos os estágios de sua evolução, mesmo no estágio retórico, onde havia uma ausência total da linguagem simbólica. De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o pensamento algébrico pode expressar-se por meio de várias linguagens:

> [...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.88)

De acordo com Blanton e Kaput (2005, p.413, apud Coelho e Aguiar, 2018, p.188), o pensamento algébrico pode ser entendido como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de casos particulares, "estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade".

Na mesma direção, Kaput, Blanton e Moreno (2008, apud Coelho e Aguiar, 2018, p.188) entendem que "a generalização e a simbolização são os cernes do pensamento algébrico". Para Ponte, Branco e Matos (2009, p.28, apud Coelho e Aguiar, 2018, p.188), aprender álgebra possibilita e torna o indivíduo capaz de pensar algebricamente, e isso inclui a compreensão das propriedades das operações pois "a identificação destas propriedades e a sua generalização desde os primeiros anos de escolaridade constituem uma base importante para o pensar algebricamente".

Na mesma linha de pensamento, Wasserman (2016, apud Coelho e Aguiar, 2018, p.188), ressalta que "os professores precisam perceber como as propriedades das operações estão sendo trabalhadas pelos estudantes explícita ou implicitamente e precisam saber como problematizá-las". Blanton e Kaput (2005, p.413, apud Coelho e Aguiar, 2018, p.188) categorizam quatro formas de pensamento algébrico:

> "[...] o uso da aritmética como domínio da expressão e a formalização da generalização (aritmética generalizada); a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais (pensamento funcional); a modelação como um domínio para a expressão e formalização das generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações. BLANTON E KAPUT (2005, P.413, APUD COELHO E AGUIAR, 2018, P.188)

De acordo com Coelho e Aguiar (2018), as formas de conceituar o pensamento algébrico, se complementam. Nas próximas seções serão abordadas algumas dessas concepções que visam categorizar as formas de pensar algebricamente.

2.6 ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NA PERSPECTIVA DOS DOCUMENTOS NORMATIVOS

O ensino da matemática na educação básica tem como compromisso principal desenvolver competências e habilidades matemáticas adequadas nos estudantes, preparando-os para as demandas de seus ambientes social, cultural e profissional. Como o foco desta pesquisa é o ensino de álgebra na educação básica, o foco será explicitar como o ensino da álgebra está estruturado segundo documentos oficiais.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - documento que tem por objetivo central normatizar as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante a vida escolar nas etapas e modalidades da educação básica - a unidade temática *álgebra* tem um papel fundamental na utilização de "modelos matemáticos, na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos", (BRASIL, BNCC, 2017, p.270). Ainda segundo a BNCC:

> "Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, BNCC, 2017, p.270).

A BNCC (2017) estabelece e organiza os objetos de conhecimentos e as habilidades, de acordo com a modalidade de ensino. Na modalidade *Anos Iniciais*, que compreende os 1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos, não se propõe o uso de letras. A relação dessa unidade temática está mais associada à de Números e, portanto, com maior foco no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas) seja na ação de completar ou na construção de sequências seguindo uma regra de formação determinada.

O quadro 5 traz a organização dos *Objetos de Conhecimento* e as *Habilidades*, segundo a BNCC (2017), para a temática álgebra, na modalidade de ensino *Anos Iniciais*.

Quadro 5 - Conjunto de Habilidades em álgebra (Ensino Fundamental Anos Iniciais)

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
1º ANO	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas.	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ANO	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º ANO	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade.	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ANO	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
4º ANO	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade.	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
	Propriedades da igualdade.	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

5º ANO	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
	Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017).

Na modalidade de ensino seguinte - Anos Finais, que compreende os 6º, 7º, 8º e 9º anos, os estudos de álgebra são retomados com maior profundidade do que foi trabalhado nos Anos Iniciais. A BNCC (2017) estabelece, nessa modalidade, que os alunos devem desenvolver habilidades que levem à aprendizagem dos diferentes significados de variáveis numéricas, generalizações em sequências numéricas, valores desconhecidos em uma sentença algébrica e, por fim, estabelecer a variação entre duas grandezas. Sendo assim, busca-se que os alunos estabeleçam relações entre variável e função e entre incógnita e equação.

O quadro a seguir traz a organização dos *Objetos de Conhecimento* e as *Habilidades*, segundo a BNCC (2017), para a temática álgebra, na modalidade de ensino *Anos Finais*.

Quadro 6 - Conjunto de Habilidades em álgebra (Ensino Fundamental Anos Finais)

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6º ANO	Propriedades da igualdade.	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º ANO	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
7º ANO	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau.	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
8º ANO	Valor numérico de expressões algébricas.	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo ax2 = b.	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
		(EF08MA10) Identificar a regularidade de

	Sequências recursivas e não recursivas.	uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
8º ANO	Sequências recursivas e não recursivas.	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica representá-la no plano cartesiano.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.	EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º ANO	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
9º ANO	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017).

Para a modalidade seguinte - Ensino Médio, a BNCC propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das competências e habilidades desenvolvidas nas modalidades de ensino anteriores, com novos conhecimentos específicos devem “estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos” (BRASIL, BNCC, 2017, p.529).

De acordo com a BNCC, a Área de matemática e suas Tecnologias na modalidade Ensino Médio, está estruturada a partir de cinco (5) *Competências Específicas* que *não estão agrupadas por seriação*, de modo que a definição das competências e habilidades seja mais flexível a depender da proposta pedagógica de cada escola e da realidade e níveis de desenvolvimento de seus alunos. Essa estrutura não segue uma ordem determinada mas dependem umas das outras, se conectam formando um todo, embora o desenvolvimento de uma competência requer, em determinadas situações, a mobilização de outras.

O quadro a seguir traz a organização das cinco *Competências Específicas* para o ensino de matemática e suas Tecnologias na modalidade *Ensino Médio*, de acordo com a BNCC (2017).

Quadro 7 - Conjunto de Habilidades em Números e álgebra (Ensino Médio)

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS	HABILIDADES
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática.	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções

	quadráticas em contextos envolvendo superfícies, matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017).

A partir da homologação da BNCC, em 20 de dezembro de 2017, os Estados iniciaram a (re)elaboração de seus currículos.

> Na (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas. A despeito disso, é fundamental preservar a articulação, proposta nesta BNCC, entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Além disso, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais (BRASIL, BNCC, 2017, p.542).

Dentre os documentos normativos que têm o papel de orientar a prática pedagógica, o currículo escolar é um dos documentos de maior importância, pois contém os objetos de estudo, as atividades e as competências a serem desenvolvidas com o objetivo da formação plena dos estudantes. Mas, afinal, o que é um currículo? Segundo Sacristán (2013), “um *Currículo* deve determinar quais conteúdos serão abordados, e deverá estabelecer as diretrizes para que haja desenvolvimento dos sujeitos durante a escolaridade”. No quadro 8 o autor retrata as dimensões que regulam um currículo:

Quadro 8 - Dimensões que regulam um currículo

Dimensões ou aspectos estruturais do currículo: a ordem pela qual ele é estabelecido	**Elementos e aspectos estruturais ou afetados**
Divisões do tempo: ● Anos ou cursos da escolaridade sequenciados. ● Horário semanal repetido ciclicamente. ● Horário diário, em parte repetido ciclicamente.	● Tempo de aprender, tempo livre etc. ● Tempo de ensinar. ● Conhecimentos e saberes valorizados. ● Atividades possíveis de ensinar

<table>
<tr>
<td>

Concepções do tempo.

Delimitação e organização dos conteúdos:

Acessibilidade e fontes de onde a informação pode ser obtida.
Demarcação do que se pode e deve ser aprendido.
Organização em disciplinas e outras formas de classificação de conteúdos.
A ordem da sequência de conteúdos.
Permeabilidade das fronteiras entre os territórios demarcados.
Itinerários de progressão nos conteúdos e no tempo.
Opções epistêmicas sobre o conhecimento.
Sistemas e mecanismos de avaliação das aprendizagens.

</td>
<td rowspan="2">
ou transmissoras em geral.

Atividades possíveis e prováveis de aprendizagem e seus resultados.
Comportamentos tolerados e estimulados.
Linha e ritmo de progresso.
Identidade e especialização dos professores.
Orientação do desenvolvimento das pessoas.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
Outros elementos ou agentes:

O espaço escolar.
Classificações dos alunos.
Clima social. Regras de comportamento.
O método como ordem das ações.
Relações verticais/horizontais.
Sistemas de avaliação e controle não curriculares.
Ideologias, filosofias, e outras abordagens do processo de ensinar.

</td>
</tr>
</table>

Fonte: Sacristán (2013, p.21)

Após um processo colaborativo, entre Estado e Municípios, o Estado de São Paulo homologa o *Currículo Paulista* no segundo semestre de 2019, tendo o compromisso em melhorar a qualidade da educação. O *Currículo Paulista* tem por diretrizes e bases os mesmos conjuntos de competências e habilidades estabelecidas na BNCC (2017), com ênfase na formação dos alunos de todas as redes (públicas e privadas), nas áreas: intelectual, física, socioemocional e cultural. E o seu foco está centrado na *educação integral*

> "[...] independentemente da duração da jornada escolar, o conceito de educação integral se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades, os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea. Isso supõe considerar as diferentes infâncias e juventudes, as diversas culturas juvenis e seu potencial de criar novas formas de existir (BNCC, 2017, p.14).

O *Currículo Paulista* tem o importante compromisso de normatizar e orientar a todos os profissionais da educação que atuam no Estado, estabelecendo as competências e habilidades *essenciais* para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes paulistas. O Currículo Paulista divide a matemática do Ensino Fundamental em cinco unidades temáticas, sendo elas: números, geometria, álgebra, grandezas e medidas e a unidade de probabilidade e estatística.

Com a perspectiva de letramento matemático, estabelece que os alunos devem desenvolver habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, "de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, BNCC, 2017, p. 264). O Currículo Paulista traz a proposta do estudo da álgebra desde os Anos Iniciais, pois existe uma grande necessidade em melhorar o desenvolvimento da base do pensamento algébrico, sua compreensão, a construção de seus conceitos algébricos e na capacidade dos alunos em usar suas representações.

Portanto, de acordo com esse entendimento, há um reforço na importância do ensino da álgebra desde os Anos Iniciais e a proposta é de construir, de forma gradativa, a escrita algébrica até chegar aos registros com letras (SÃO PAULO, CURRÍCULO PAULISTA, 2019). De acordo com o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019, p.320), "o aprendizado da álgebra contribui para a compreensão das propriedades e generalizações, para ampliar a capacidade de abstração, o que promove "saltos" cognitivos no raciocínio matemático".

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o objetivo está mais ligado ao ato de desenvolver o pensamento algébrico, o que significa: observar um fato ou relação, identificar um padrão, algo que se repete, generalizar esse padrão e fazer deduções a partir dessa generalização, sem o uso de letras, com ênfase na maneira de pensar. Buscou-se a promoção dos processos de generalizações contínuas com intuito de desenvolver o pensamento algébrico, que é de fundamental relevância para “saltar” ao uso de modelos matemáticos.

Nos Anos Finais, o Currículo Paulista direciona para o aprofundamento e ampliação do que foi estudado nos Anos Iniciais. Espera-se que os estudantes compreendam os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, que são: estabelecer uma generalização de uma propriedade; investigar a regularidade de uma sequência numérica; indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica; estabelecer a variação entre duas grandezas.

Nesta etapa do ensino os estudantes devem saber expressar suas respostas usando diferentes registros e linguagens, a partir de um texto na língua materna. De acordo com o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019, p.321), “quando se trata do ensino de álgebra, há que se observar que existe uma relação de natureza algébrica entre o pensamento e a linguagem. A linguagem da álgebra é expressão do pensamento matemático”.

3. ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

As avaliações externas às instituições escolares - avaliações governamentais do Sistema Educacional Brasileiro - que tem por objetivo auxiliar na criação e aplicação de políticas públicas direcionadas à área educacional a partir de referências de qualidade e igualdade, bem como sintetizar informações com transparência e confiabilidade aos gestores, pesquisadores, educadores e demais públicos de interesse, seguem no mesmo ritmo, ou seja, os resultados não são animadores.

Os resultados destas avaliações governamentais aplicadas nos últimos anos são alarmantes e nos indicam, com evidências, que há entraves no processo ensino-aprendizagem da matemática, em especial no de álgebra. De acordo com Silva (2008):

> "Segundo o Ministério da Educação(MEC), em 2003, 51,6% dos alunos da 4ª série não tinham adquirido os conhecimentos matemáticos apropriados a essa faixa de escolarização e estavam em um estado "crítico" ou "muito crítico" (BRASIL, 2004, APUD SILVA, 2008, p. 150). A situação estava ainda pior na 8ª série (57,1%) e no 3º ano do ensino médio (68,8%). Além disso, parece que a situação não vai melhorando de modo significativo, uma vez que, em 2001, se encontravam em estágio "crítico" ou "muito crítico" 52,3% dos alunos da 4ª série, 58,4% na 8ª e 67,4% no 3º ano do ensino médio. A matemática não é a única matéria em que os jovens se deparam com dificuldades, mas é a matéria em que são maiores as dificuldades dos alunos." (SILVA, 2008, p.150)

Na mesma direção, Ribeiro (2001), analisa o desempenho de alunos da antiga 8ª Série - atual 9º Ano - em álgebra, com referência aos dados do Saresp - Sistema de Avaliação de Rendimento do Estado de São Paulo.

> "A análise do desempenho dos resultados obtidos nas 30 questões que compõem a prova e mais especificamente, na parte de álgebra permite destacar os seguintes pontos: A média do desempenho dos alunos da 8ª série [atual 9º ano], na prova como um todo, corresponde a 33%, sendo a mediana e a moda equivalente a 30%, bastante próximas. Pode-se constatar que houve uma grande concentração de resultados em torno da média, notando-se uma dificuldade do aluno em lidar com os tópicos abordados." (RIBEIRO, 2001, p. 23)

De acordo com SARESP (SÃO PAULO, 2019), o desempenho em matemática na rede estadual de ensino apresenta níveis críticos, principalmente no final do ciclo da educação básica. Ao longo das modalidades de ensino – do 5º ano à 3ª série do ensino médio - os níveis de domínio em matemática reduzem, chegando próximo a 50% quando os alunos alcançam, o final do ciclo, a 3ª série do ensino médio.

- 5º ano: 14% dos alunos têm conhecimento abaixo do básico.
- 9º ano: 24,9% dos alunos têm proficiência abaixo do básico.

- Ensino Médio: 49,3% dos alunos da rede pública têm conhecimento abaixo do básico.

O nível abaixo do básico indica que os alunos demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, das competências e das habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram. (SÃO PAULO, SARESP, 2019).

Mesmo com esforços e mudanças que o processo de ensino dessa área vem sofrendo ao longo dos anos, os resultados não têm apresentado melhoras significativas. Mesmo após passar por diversas reformas educacionais, em especial no Brasil, com mudanças profundas nas bases e diretrizes que orientam as propostas para o sistema educacional, o ensino de álgebra continua com a mesma face sem grandes mudanças e com pouca significação para os alunos na Educação Básica, em outras palavras, os métodos de ensino e aplicação da álgebra, que vem perpetuando ao longo da história, continuam mostrando muita resistência.

“Muitos pesquisadores afirmam que, no ensino de álgebra, ainda prevalece a aprendizagem de um conjunto de técnicas operatórias que busca apenas resolver equações sem contextualizá-las” (BARBOSA; BORRALHO, 2009; AGUIAR, 2014, apud COELHO E AGUIAR (2018), p. 172).

De acordo com Aguiar (2014), ao analisar livros didáticos, apresenta resultados de pesquisa, mostrando que uma grande quantidade de autores de livros do Ensino Básico ainda dá muita ênfase ao ensino de regras e técnicas operatórias, e uma pequena parcela apresentam propostas que buscam o desenvolvimento de significados para os conceitos algébricos e auxiliam o processo cognitivo do pensamento algébrico. A partir dessa perspectiva, nota-se que “as inovações aparecem, mas esbarram nos conteúdos arraigados que não perdem o seu espaço no Ensino Fundamental” (AGUIAR, 2014, p.286, apud COELHO E AGUIAR (2018), p. 172).

O ensino de álgebra é orientado, pelos documentos normativos, a partir de uma proposta que evidencie as habilidades e competências juntamente ao desenvolvimento da forma de pensar algebricamente, como declara os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> “Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por

> meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para a resolução) de uma equação. Esse encaminhamento dado à álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiros e quarto ciclos [atualmente de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental]. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio." (BRASIL, PCN, 1998, p.50-1)

As orientações dos PCN direcionam os professores, para o trabalho com o ensino de álgebra, e indicam que

> "[...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica." (BRASIL, PCN, 1998, p.116)

Recentemente, as propostas dos órgãos governamentais têm seguido a linha de pensamento em que o ensino de álgebra deve ser inserido desde os anos iniciais. Em 2017, a BNCC estabeleceu tais diretrizes, definindo quais conteúdos mínimos deverão ser desenvolvidos nos anos iniciais dentro da Unidade Temática álgebra.

Será que somente o ato de implementar o ensino de álgebra, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, bem como propor situações que conduzam os alunos a construir ideias algébricas, basta para melhorar o ensino de álgebra na educação básica? Os recursos que é usado, juntamente com os materiais didáticos, ditos "tradicionais" (Livros e Apostilas), somente esses, são adequados para o século XXI?

3.1 PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM COM USO DE TECNOLOGIA

Atualmente os agentes das escolas do ensino básico, entre eles os professores, são orientados a buscar alternativas de práticas inovadoras, para aplicar nas propostas de ensino. De acordo com a BNCC (2017), deve-se:

> "Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas." (BRASIL, BNCC, 2017, Introdução)

Por outro lado, quanto ao protagonismo do aluno enquanto agente de seu desenvolvimento na vida pessoal e coletiva, a BNCC (2017) orienta que estes devem:

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, BNCC, 2017, Introdução)

Ainda segundo a BNCC (2017), a cultura digital tem contribuído para mudanças sociais importantes nas sociedades contemporâneas. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação. É “imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento” (BRASIL, BNCC, 2017, p. 61).

No que diz respeito ao uso de tecnologia às competências específicas de matemática, a BNCC orienta que:

> “Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. *Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados*.” (BRASIL, BNCC, 2017, p. 267 - Grifos, nosso).

Dentro das competências, a BNCC (2017) também orienta quanto ao uso de tecnologias para o desenvolvimento de habilidades específicas, em especial, de álgebra, como, por exemplo, elaborar e resolver, com e sem uso de tecnologias, situações-problemas que possam ser modelados por equações polinomiais de 2º grau do formato $ax^2 = b$.

A BNCC (2017) aborda as diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores. No quadro a seguir, foi feito uma síntese das habilidades e competências, dentro da temática “*uso de tecnologias digitais”*, que os alunos precisam desenvolver:

Quadro 9 - Aprendizagens que caracterizam a computação e as tecnologias digitais

ATITUDES E VALORES	COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
● Pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;	● Buscar dados e informações de forma crítica nas diferentes mídias, inclusive as sociais, analisando as vantagens do uso e da evolução da tecnologia na sociedade atual, como também seus riscos potenciais; ● Apropriar-se das linguagens da

● Mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) – compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação; ● Cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.	cultura digital, dos novos letramentos e dos multiletramentos para explorar e produzir conteúdos em diversas mídias, ampliando as possibilidades de acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho; ● usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e ● utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade.

Fonte: Autor, a partir da BNCC (2017, p.475)

Neste sentido, através do uso de tecnologia e com a finalidade de fazer sentido e buscar alternativas que auxiliem tanto os alunos como os professores, serão apresentadas nas seções seguintes algumas alternativas que visam o uso de novas metodologias educacionais.

3.2 ENSINO HÍBRIDO COMO ALTERNATIVA AO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Atualmente os alunos nascem imersos em um mundo digital, nesse sentido, os professores precisam ter conhecimento e um maior contato com essas novas tecnologias, com seu manuseio e suas aplicações, para assim conseguir mediar um ensino com maior significado ao aluno.

> "As tecnologias digitais começam a fazer parte da rotina escolar, encorajando muitos educadores para a mudança de mentalidade. Lévy (2000) propõe uma reflexão sobre o papel de tais tecnologias e suas aplicações nessa mudança. O autor diz que as tecnologias digitais proporcionam acesso rápido a uma grande quantidade de informação, modificando as formas de pensar e de construir conhecimentos, e que, por isso, seu papel deve ser pensado em relação às modificações que causam nas formas de pensar, bem como nas alterações comportamentais de quem as utiliza ou está cercado por elas." (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p.48, apud CARNEIRO, 2020, P. 18)

Uma das alternativas factíveis de implementação, nas práticas educacionais, que se apresenta como um movimento crescente para alcançarmos tais objetivos, é compreendida no chamado "*Ensino Híbrido"*.

> "Híbrido significa misturado, mesclado, blended. A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Esse processo, agora, com a mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo, é um ecossistema mais aberto e criativo. Podemos ensinar e aprender de inúmeras formas, em todos os momentos, em múltiplos espaços." (BACICH, TANZI NETO e TREVISANI, 2015, P.27, apud CARNEIRO, 2020, P. 19)

Segundo Bacich (2016, p. 679, apud CARNEIRO, 2020, p.19), "no modelo híbrido, a ideia é que educadores e estudantes ensinem e aprendam em tempos e locais variados." De acordo com a mesma autora, "[...] o termo Ensino Híbrido está enraizado em uma ideia de que não existe uma forma única de aprender e que a aprendizagem é um processo contínuo."

Logo, as maiores barreiras que se podem encontrar para conseguir que os alunos desenvolvam seu protagonismo no processo de ensino e de aprendizagem está no passo em que os agentes escolares se apropriem de novas práticas, tanto no acesso quanto na utilização das variadas tecnologias disponíveis atualmente e aquelas que estão por vir.

De acordo com Horn e Staker (2015, p. 25, apud CARNEIRO, 2020, p. 24), "o ensino híbrido é qualquer programa educacional formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino on-line, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou o ritmo". A figura 3 visa ilustrar como é a concepção de funcionamento do Ensino Híbrido.

Figura 3: Fatores que implementam o Ensino Híbrido.

Fonte: Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 64, apud CARNEIRO, 2020, p. 25)

A engrenagem acima ilustrada, mostra que o aluno é o centro no processo de ensino mas, além do aluno, há outros protagonistas deste processo. De acordo Bacich (2016, apud CARNEIRO, 2020, p. 25), é necessário o envolvimento de todos, "como o diretor, o coordenador, o professor, o aluno e os funcionários se unam a fim de valorizar a autonomia do aluno para utilizar diferentes tecnologias e em diferentes espaços, para que assim haja uma gradativa mudança da cultura escolar".

Ainda segundo os autores, a principal motivação para que ocorra essa ajuda mútua é uma certa urgência em transformar o ambiente escolar, pois,

> Nos últimos 30 anos, o mundo passou por profundas transformações, assim como as formas de produção e as relações humanas; contudo, o *espaço escolar continua formatado para atender às demandas de uma sociedade que não existe mais*. (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 104, apud CARNEIRO, 2020, p. 25, grifo nosso)

Além disso, o autor ainda afirma que:

> "Tradicionalmente, as aulas são expositivas, e os alunos devem voltar para casa com o caderno repleto de conteúdos copiados da lousa, pois acredita-se que essa seja uma forma eficiente de ensino. Porém, com o avanço das tecnologias digitais e a consequente facilidade de acesso à informação, a escola já não é a única fonte de conhecimento disponível para as pessoas. Por meio do desenvolvimento dos computadores, smartphones, tablets e internet, pode-se aprender em qualquer lugar e a qualquer hora. Contudo, o papel da escola não termina, mas se expande, e cabe a ela direcionar e capacitar os alunos a explorar responsavelmente esses novos caminhos." (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 141, apud CARNEIRO, 2020, p. 26)

Nesse sentido, não basta aplicar as metodologias antigas com novas "roupagens", o uso da tecnologia tem que ter um objetivo bem claro, principalmente para o aluno, por isso é importante que haja um planejamento - um preparo - para que a tecnologia seja uma ferramenta a mais para “melhorar” a compreensão dos alunos com o que se pretende ensinar, com foco no desenvolvimento do conhecimento e das habilidades tão necessárias para a vida.

De acordo com Bacich (2016), ao olhar para o Brasil, vê-se que a implementação do Ensino Híbrido de forma integral é um grande desafio, devido às diversas realidades que se encontra o Sistema Educacional Brasileiro. Nessas diversas realidades,

> “[...] há escolas em que as tecnologias digitais estão presentes em maior intensidade, com certa obrigatoriedade de uso por parte dos docentes, escolas em que as tecnologias digitais estão presentes e seu uso é facultativo, escolas em que não há tecnologias digitais”, mas há entusiastas em seu uso e, ainda, escolas em que não há qualquer indício da presença ou do uso de tecnologias digitais. Nessas muitas realidades, é possível pensar em uma prática híbrida desde que ela tenha uma forma sustentada de atuação, não como uma forma puramente de ruptura em relação ao modelo de ensino considerado “tradicional”, mas caminhando em direção a essa possibilidade.” (BACICH, 2016, Resultados e Discussões, p. 686)

Ainda de acordo com a autora, uma alternativa sustentada para tal implementação passa por ações como “incentivar o uso das tecnologias digitais em diferentes modelos, não apenas substituindo recursos já existentes, mas mantendo aquilo que sustenta o ensino naquela escola” (BACICH, 2016, p. 686). A mudança de uma cultura escolar não pode ocorrer subitamente, é preciso avançar aos poucos, de forma consciente, para que, em algum momento, seja possível oferecer algo realmente motivador e significativo para todos os agentes do processo de ensino-aprendizagem.

Não se pretende esgotar o tema em alcance e nem em profundidade, mas apenas apresentá-lo como uma vertente em expansão que tem prospecção para o ensino futuro.

Na próxima seção será apresentado uma outra linha de pensamento, próxima à ideia do ensino híbrido, que são as chamadas Tecnologia Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Apresentar-se-á como o uso das TDIC podem ser implementadas como instrumentos na prática pedagógica.

3.3 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

É necessário considerar que o acesso às informações se tornou mais rápido e os alunos estão cada vez mais protagonistas de sua aprendizagem - quando precisam de alguma informação, pegam o aparelho celular, conectado à internet, e realizam uma busca rápida.

De acordo com os autores Bialik, Fadel e Trilling (2015 apud Schmitt, 2018, p. 27), é fundamental repensar os sistemas que as escolas estão inseridas para que a educação tenha um real significado para os alunos. O acesso rápido e fácil a informação, promovidos pelo rápido avanço tecnológico, trouxe um novo desafio, pois não é mais necessário armazenar os conhecimentos, mas sim, pensar em como construir e conectar tudo isso, sempre que possível, priorizando a experimentação, “para que os alunos possam identificar caminhos possíveis, promissores e aprazíveis neste mundo incerto e imprevisível, em profunda e constante transformação” (BIALIK; FADEL; TRILLING; 2015, p.9, apud Schmitt, 2018, p. 27).

Portanto, compreender o processo de aprender a ensinar, atualmente, é entender o contexto real em que se está inserido, seu processo contínuo de construção de conhecimento, com a acessibilidade ao uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Segundo Kenski (2012),

> “i) As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) representam, de uma maneira geral, toda e qualquer tecnologia capaz de mediar os processos informacionais e comunicativos; sua evolução, por sua vez, ocorre na geração analógica, onde aparecem os recursos audiovisuais: a televisão, o rádio, o telefone, o fax. ii) Com a popularização da internet, surgem as Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTIC), ou Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), inseridas na atual geração: a digital.” (KENSKI, 2012 apud SCHMITT, 2018, p. 28)

De acordo com Schmitt (2018), o contexto atual da comunicação está integrado à sociedade moderna e apresenta múltiplas possibilidades de interligar telefones celulares, computadores, televisores, satélites, e através deles, realizar a transmissão e o compartilhamento de conteúdo em diversos formatos, tais como imagens, áudios, vídeos e textos de maneira rápida e intuitiva. Sendo assim, diante destas ferramentas oferecidas pelas TDIC, vislumbra-se diversas aplicações às práticas docentes no ensino de matemática, com vistas ao melhoramento dos resultados do desempenho escolar na Educação Básica do Brasil. A iniciativa de integrar as TDIC às práticas pedagógicas torna-se, a cada dia que se avança na história, uma necessidade real para a educação. Em especial no campo da educação matemática, é mais urgente explorar o alcance das TDIC, haja vista a visão que muitos acabam criando de que é uma disciplina difícil, desinteressante e até inalcançável em alguns casos extremos.

A forma de utilizar as TDIC ainda é um grande desafio para todos nós, pois

> “Como manter as práticas pedagógicas atualizadas com esses novos processos de transação de conhecimento? Não se trata aqui de usar as tecnologias a qualquer custo, mas sim de acompanhar consciente e deliberadamente uma mudança de civilização que questiona profundamente as formas institucionais, as mentalidades e a cultura dos sistemas educacionais tradicionais e, sobretudo, os papéis de professor e de aluno.” (LÉVY, 1999, p.172 apud SCHMITT, 2018, p. 46).

De acordo com Valente (2005), tem-se um enorme desafio na era digital, que está no processo de adaptação de seu uso, que vai muito além de um simples treinamento para o seu uso. É fundamental que haja uma mudança na mentalidade dos agentes da educação, pois há resistência, quanto ao uso de tecnologia nas práticas educacionais. Ainda de acordo com o autor, apesar dos desafios em torno da preparação dos professores para o uso de tecnologias digitais nas práticas escolares, ela é muito importante para que se alcance um novo modelo de qualidade na educação.

> O desafio dessa formação é enorme. Ela deve ser pensada na forma de uma espiral crescente de aprendizagem, permitindo ao educador adquirir simultaneamente habilidades e competências técnicas e pedagógicas. No entanto, a preparação desse professor é fundamental para que a educação dê o salto de qualidade necessário para se instituir um novo modelo pedagógico, que deixe de ser baseado na transmissão da informação para incorporar também aspectos da construção do conhecimento pelo aluno, usando para isso as tecnologias digitais, que estão cada vez mais presentes em nossa sociedade (VALENTE, p. 30, 2005, apud SCHMITT, 2018, p. 50).

Vale ressaltar que, embora o uso de TDIC indiquem um caminho para melhorar os resultados educacionais, elas não são soluções prontas para a construção de novos modelos escolares, portanto, elas devem ser entendidas como oportunidades para experimentação e criação, mediante o surgimento das necessidades, “já que o ato de ensinar não pode ser fixo e imutável, mas sim flexível e adaptativo, pautando-se, assim, na evolução das teorias de ensino-aprendizagem e no desenvolvimento de novos recursos”. (SCHMITT, 2018, p. 51).

4. APLICATIVO GRASPABLE MATH NO ENSINO DE ÁLGEBRA

Atualmente, instituições escolares usam computadores e têm acesso à internet, com o aumento da disponibilidade de recursos tecnológicos, bem como a acessibilidade, há uma grande diversidade de aplicativos e sites de cunho educacional que pode ser utilizado durante as aulas.

O desafio, está na forma que esses recursos podem ser usados, ou seja, sua correta utilização depende do conhecimento que se tem sobre esses recursos e da capacidade de contextualizá-los com a área de conhecimento. A partir desta concepção, pode-se estruturar atividades que façam sentido e promovam uma sólida construção do conhecimento.

De acordo com Kenski (2005, p. 78), “as oportunidades postas pelas tecnologias para a escola lhe garantem a sua função como espaço em que ocorrem as interações [...]”. As tecnologias, por fazerem parte do cotidiano dos alunos, podem dar mais sentido e significado a eles diminuindo a distância que há entre eles e o objeto de ensino, pois a maior parcela dos alunos precisa de recursos visuais para compreenderem determinado assunto. Ainda segundo Kenski (2005, p. 77), as tecnologias são verdadeiros instrumentos que podem “[...] impulsionar a educação de acordo com as necessidades sociais de cada época.” e ainda que “[...] a escola transforme suas ações, as formas de interação entre as pessoas e o conhecimento sempre será essencial para viabilização de qualquer proposta de sociedade”.

Na mesma linha de pensamento, Moran (2003), reforça que “indiscutivelmente, a educação avança junto com as tecnologias”; para Garcia (2011), adequar-se a essas novas Tecnologias Digitais é possibilitar aulas mais dinâmicas; para Pereira e Chagas (2016), as tecnologias podem dinamizar o ensino e permitir que os alunos escolham, entre uma variedade de opções, uma que os ajude mediante as suas necessidades.

Na próxima seção será apresentada o aplicativo digital GRASPABLE MATH (GM), um recurso digital que pode ser utilizado para o ensino de matemática, em particular o de álgebra.

4.1 GRASPABLE MATH: UM PROJETO DESENVOLVIDO PARA ENSINAR ÁLGEBRA

Segundo o Instituto de Ciências da Educação (IES, 2022), dos Estados Unidos da América (EUA), o projeto GM foi iniciado em 2018, contou com um investimento de mais de 1 milhão de dólares e foi desenvolvido através de duas fases.

> “Por meio de concessões anteriores do IES, os pesquisadores desenvolveram o Graspable Math, uma intervenção baseada em tablet e computadores onde alunos do ensino fundamental e médio criam e manipulam expressões complexas para operações básicas, bem como equações e sistemas de equações e desigualdades. Neste projeto, a equipe desenvolverá um protótipo de atividades matemáticas acessíveis, um aplicativo com novos tipos de prática de álgebra e tarefas de avaliação. O aplicativo ajudará os alunos a se tornarem usuários fluentes e flexíveis de álgebra e fornecerá aos professores relatórios de avaliação formativa sobre o desempenho de seus alunos. As atividades de álgebra promoverão fluência processual ao mesmo tempo em que permitem que os alunos se concentrem na estratégia e na conexão entre conceitos e procedimentos. No final da Fase I, em um estudo piloto com três salas de aula do ensino médio, os pesquisadores examinarão se o protótipo funciona conforme o planejado, se os professores acreditam que o conceito completo do produto pode ser implementado e se o protótipo se mostra promissor para melhorar os resultados dos alunos em matemática.” (IES, 2022, tradução nossa e grifo nossos).

Após os resultados promissores da primeira fase em 2018, a segunda fase do projeto foi desenvolvida no ano de 2019:

> *“Objetivo*: Neste projeto, a equipe desenvolverá e testará totalmente um produto baseado na web que fornece feedback em tempo real à medida que os alunos se envolvem em exercícios de álgebra I e II. Este produto complementará um aplicativo interativo de álgebra baseado em toque desenvolvido com financiamento prévio do IES . O sucesso em álgebra está relacionado a eventuais taxas de graduação na capacidade e ganhos de aplicabilidade, onde poucos alunos alcançam uma compreensão avançada da notação algébrica. *Atividades do projeto*: Durante a Fase I em 2018 , a equipe desenvolveu um protótipo que fornece suporte em tempo real aos alunos à medida que avançam nos exercícios de álgebra I. No final da Fase I, os pesquisadores concluíram um estudo piloto com 48 alunos e dois professores em salas de aula do 9º ano. O protótipo funcionou como pretendido quando os alunos concluíram os problemas e os professores puderam revisar os resultados do trabalho dos alunos em um painel de relatórios. Além disso, a equipe encontrou uma correlação positiva entre a resolução de problemas dos alunos no protótipo e as pontuações pós-teste relacionadas ao conteúdo de álgebra. *Na Fase II*, a equipe desenvolverá totalmente a interface do usuário para que seja envolvente e reduza a ansiedade do aluno. Eles testarão a confiabilidade do mecanismo de feedback em tempo real, preencherão a biblioteca de conteúdo e finalizarão o painel de avaliação formativa do professor. Após a conclusão do desenvolvimento, os pesquisadores concluirão um estudo piloto para examinar a usabilidade e viabilidade do produto, fidelidade de implementação, confiabilidade e validade, e prometem aumentar o aprendizado de álgebra I e II dos alunos. O estudo incluirá 40 turmas do 9º ano com 800 alunos (20 alunos por turma). Metade das aulas serão aleatoriamente designadas para usar atividades matemáticas com uso do

> aplicativo e a outra metade concluirá as atividades normais. Eles compararão as pontuações dos alunos em resultados pré e pós-aprendizagem padronizados para álgebra I e II. A equipe reunirá informações de custos usando o "método dos ingredientes" e incluirá todos os gastos com itens como pessoal, instalações, equipamentos, materiais e treinamento. *Produto*: Graspable Math Activities é um aplicativo web que alunos do ensino fundamental e médio usam em laptops e tablets para praticar álgebra e receber feedback instantâneo. As atividades são baseadas em uma tecnologia de notação de álgebra que pode promover fluência processual ao mesmo tempo em que permite que os alunos se concentrem na estratégia e na conexão entre conceitos e procedimentos. A equipe produzirá um site que incluirá um painel para fornecer aos professores resultados de avaliação formativa para informar a prática, uma biblioteca de atividades de álgebra organizadas por padrões e notas e módulos de desenvolvimento profissional sobre como integrar o aplicativo em sua prática em sala de aula." (IES, 2022, tradução e grifo nosso)

4.2 FUNDADORES DA PLATAFORMA GRASPABLE MATH

De acordo com, Landy, Weitnauer e Ottmar (2020), fundadores da plataforma GRASPABLE MATH (GM) - matemática acessível (tradução nossa) - a educação matemática tem grande poder, se manejada por especialistas. Por outro lado, para os estudantes que avançam nesta área de conhecimento, ao longo dos 3 ciclos de ensino, a aprendizagem de matemática pode ser frustrante e às vezes um tanto difícil. Muitas regras para memorizar, procedimentos para escrever e acompanhar.

Ainda de acordo com os autores, há um mundo em que os avanços tecnológicos são extraordinários, em contrapartida a escrita matemática não sofreu mudanças significativas após 400 anos. A forma mais fácil de realizar uma escrita matemática, em particular uma equação, continua sendo à mão com uso de papel. Há alguns anos, um grupo de pesquisadores dos Estados Unidos da América (EUA) – educadores matemáticos, psicólogos, matemáticos e cientistas da computação – vêm pesquisando meios de reconstruir a ideia da escrita formal de matemática, porém, desta vez, utilizando recursos digitais.

Os autores viram oportunidades de aplicar modalidades modernas para construir interações, entre aluno e objeto de conhecimento, mais intuitivas e simples para o ensino de matemática. Com o objetivo de criar recursos para ampliar a proximidade de estruturas algébricas com um estudante, ao mesmo tempo, possibilitar investigações de uma forma natural e investigativa, sobre como ocorre o funcionamento da matemática, e permita às pessoas raciocinar a matemática de forma flexível.

Os fundadores da plataforma GM (2020), são:

> *"David Landy* - É professor adjunto da Indiana University Bloomington. Sua pesquisa acadêmica se concentra nos mecanismos cognitivos por trás do pensamento matemático. David quer ver expressões matemáticas estáticas substituídas por expressões interativas em todos os lugares para mudar a forma como aprendemos, usamos e compartilhamos matemática.
> *Erik Weitnauer:* É empresário e desenvolvedor de software (e finalista das Olimpíadas de Matemática da Alemanha no 12º ano). Ele acredita em mudar o mundo por meio da educação e está desenvolvendo o Graspable Math para ajudar os alunos a aprender álgebra de uma maneira mais intuitiva.
> *Erin Ottmar:* É professora de ciências da aprendizagem, tecnologia e psicologia no Worcester Polytechnic Institute, com foco no ensino e aprendizagem de matemática. Ela também é professora e é apaixonada por estudar o impacto das notações matemáticas interativas em crianças e professores." GM (2020, grifo nosso)

A plataforma foi - e está sendo - desenvolvida por autores cujas formações estão diretamente associadas com a educação, portanto, especialistas da educação, educação matemática e outras áreas correlatas.

4.3 APRESENTAÇÃO DA PLATAFORMA GRASPABLE MATH

De acordo com GM (2020), trata-se de um aplicativo totalmente web, desenvolvido para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de álgebra, que permite múltiplas aplicações e apresenta-se como uma forma promissora e alternativa para utilizar durante as aulas de matemática. As atividades são estruturadas em uma tecnologia digital de notação algébrica que permite fluência processual aos alunos, uma vez que a plataforma sinaliza ao usuário sempre que tentar um "passo" não permitido dentro da estrutura de operações algébricas, não permitindo o prosseguimento, e, assim, o aluno pode se concentrar em construir estratégias para, por exemplo, simplificar expressões algébricas ou resolver equações.

Como a maioria dos aplicativos educacionais atualmente, GM disponibiliza um plano de acesso gratuito, mas com um alcance limitado. Por outro lado, o plano premium possibilita a utilização de todos os recursos que o aplicativo disponibiliza. O custo mensal, para o plano premium, atualmente, está em $5,00 (cinco dólares americanos) por mês, demais informações estão disponíveis na política de utilização do aplicativo no próprio aplicativo.

4.4 ALCANCES E LIMITAÇÕES DO GRASPABLE MATH

O aplicativo GM apresenta-se como um recurso promissor para aproximar os alunos com a álgebra, pois disponibiliza diversos recursos para utilizar durante as aulas, seja no formato totalmente remoto, híbrido ou presencial. O acesso, bem como o seu uso é totalmente web, através do cadastro inicial com um e-mail Google, não precisa de instalação local nos aparelhos (computador, tablet ou celular). A interface do aplicativo é interativa e intuitiva, logo os alunos terão pouca ou nenhuma dificuldade para seu uso, nesse sentido, vê-se que o engajamento pode ser alcançado. Permite o *acompanhamento em tempo real* pelo professor, ou seja, permite que o aluno realize as tarefas e, simultaneamente, o professor acompanhe, possibilitando avaliar e realizar intervenções durante as aulas. O aplicativo permite o desenvolvimento de diversas temáticas dentro da disciplina de matemática, no entanto, o foco central é o desenvolvimento em álgebra.

Além dos recursos nativos do GM, o aplicativo permite a integração com o Geogebra[1], Google[2] Classroom (permite importar as turmas para o GM), realizar o upload de imagens e vídeos, utilizar atividades criadas por outros usuários e compartilhar atividades criadas com outros usuários.

O cadastro de usuários menores de 13 anos não é permitido, segundo a Política de Privacidade do aplicativo. Possibilita o acesso às atividades enviadas pelo professor, sem a necessidade de um cadastro no aplicativo, e também permite o acesso à uma página denominada "Graspable Math Whiteboard" (GM Quadro Branco, tradução nossa), esse recurso do aplicativo é gratuito, portanto, não há custos pelo uso.

O GM pode ser adquirido por instituições que queiram fazer uso do aplicativo, ou seja, tem escalabilidade. Nesta modalidade, seus idealizadores fornecem suporte técnico prioritário e treinamento para professores.

Por ser um aplicativo desenvolvido nos EUA, a linguagem de origem é o inglês, entretanto, a maioria dos navegadores para acesso à internet permitem a tradução da página, uma vez que o aplicativo é web e não requer instalação local.

Por outro lado, o acesso a internet, a depender da realidade dos professores e das escolas, pode ser um fator que inviabiliza o uso do GM. Além disso, tanto os professores quanto os alunos precisam ter meios de acessá-lo, através de celulares,

---

1 GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. (GEOGEBRA, 2022)

2 Google Classroom: Você pode usar o Google Sala de Aula na sua escola para simplificar as atividades, aumentar a colaboração e melhorar a comunicação. O Google Sala de Aula está disponível na Web ou pelo app para dispositivos móveis. (GOOGLE CLASSROOM, 2022)

tablets ou computadores nesse caso não se percebe grandes dificuldades, pois como já citado anteriormente, a maior parte das escolas da rede pública e privada se encontram em um processo de informatização devido ao impulsionamento ocorrido durante a pandemia do COVID-19.

O custo para utilização do aplicativo, em sua versão premium, pode ser um fator que não estimule seu uso na rede pública, pois depende de o professor adquirir um plano individual ou de investimento dos órgãos públicos. Na rede privada, o custo do plano premium pode ser um fator que não motive seu uso, embora tenha um custo relativamente baixo, o plano individual pode encarecer seu uso. Neste caso, a instituição pode negociar o custo junto aos administradores do aplicativo, para aquisição em escala. Na próxima seção será apresentado um passo a passo para acessar, cadastrar e usar o GM.

4.5 GRASPABLE MATH: PASSO A PASSO

1) Com o uso de um computador, tablet, celular entre outros dispositivos móveis, acesse seu navegador de preferência e digite o endereço: https://activities.graspablemath.com/ ,em seguida, aparecerá a página Inicial do aplicativo GM (Figura 4).

Figura 4 - Página inicial do aplicativo GM

Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

2) Ao clicar no botão “LEIA NOSSO TUTORIAL”, abrirá uma página de instruções iniciais, onde o usuário poderá aprender os passos iniciais para manusear o

aplicativo (Figura 5). Ao navegar nas instruções, há indicações de videoaulas e atividades teste, para praticar.

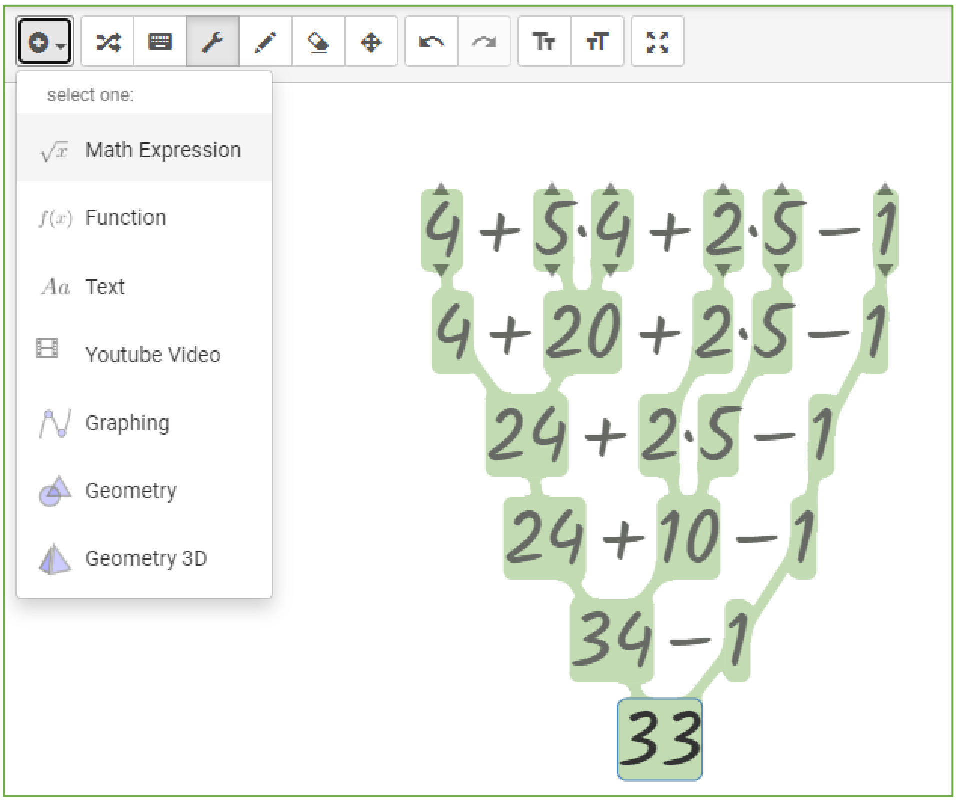
Figura 5 - Página de instruções para o manuseio do aplicativo

Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

3) Ao clicar no botão “QUADRO BRANCO” da página inicial (Figura 4), abrirá uma página onde qualquer usuário pode praticar, de forma gratuita. Nesta página o aplicativo possibilita utilizar alguns recursos, apresenta alguns recursos abaixo:

- Criar e simplificar operações numéricas, para essa finalidade há um recurso que o aplicativo “rastreia” o passo a passo das operações até o resultado esperado (Figura 6);

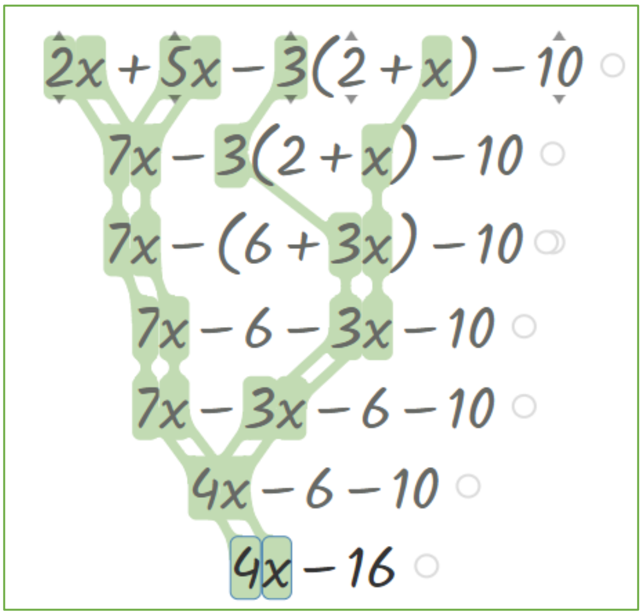
Figura 6 - Criando e simplificando expressões numéricas



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Através de notação algébrica digital, GM possibilita criar expressões algébricas e simplificá-las (Figura 7);

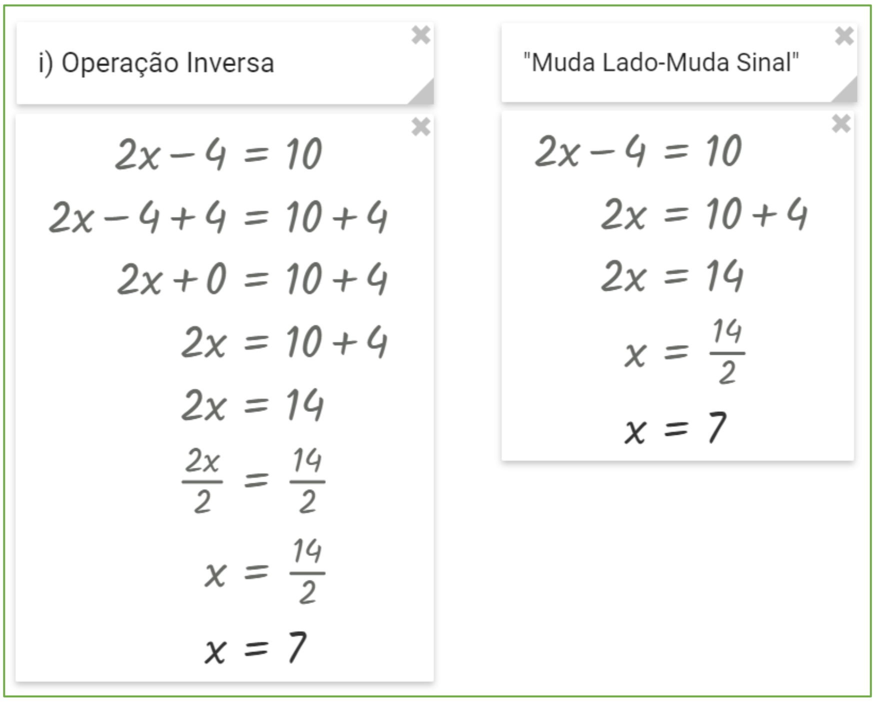
Figura 7 - Criando e simplificando expressões algébricas com notação digital



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- O mesmo ocorre com equações polinomiais de 1º Grau, possibilita configurar em qual forma pretende que seja resolvida, por exemplo, se deseja inibir o “*muda lado-muda sinal*”, é possível, nesse caso, o usuário terá de aplicar a operação inversa (Figura 8);

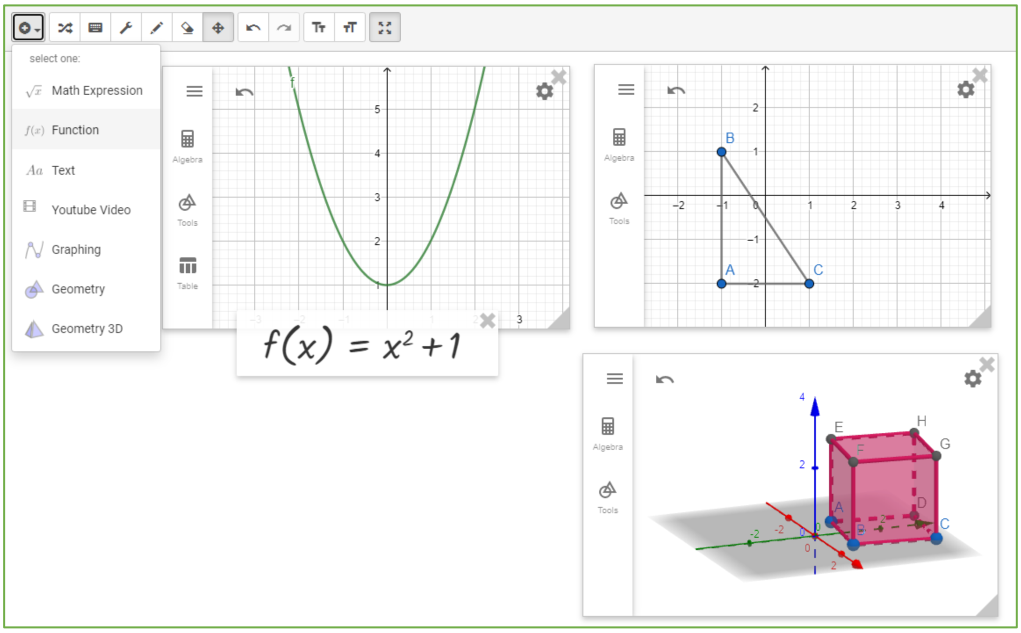
Figura 8 - Resolvendo equações



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- O GM permite integrar funções polinomiais e suas representações gráficas no aplicativo Geogebra (Figura 9), bem como integra os aplicativos de Geogebra Geometria e Geometria (3D);

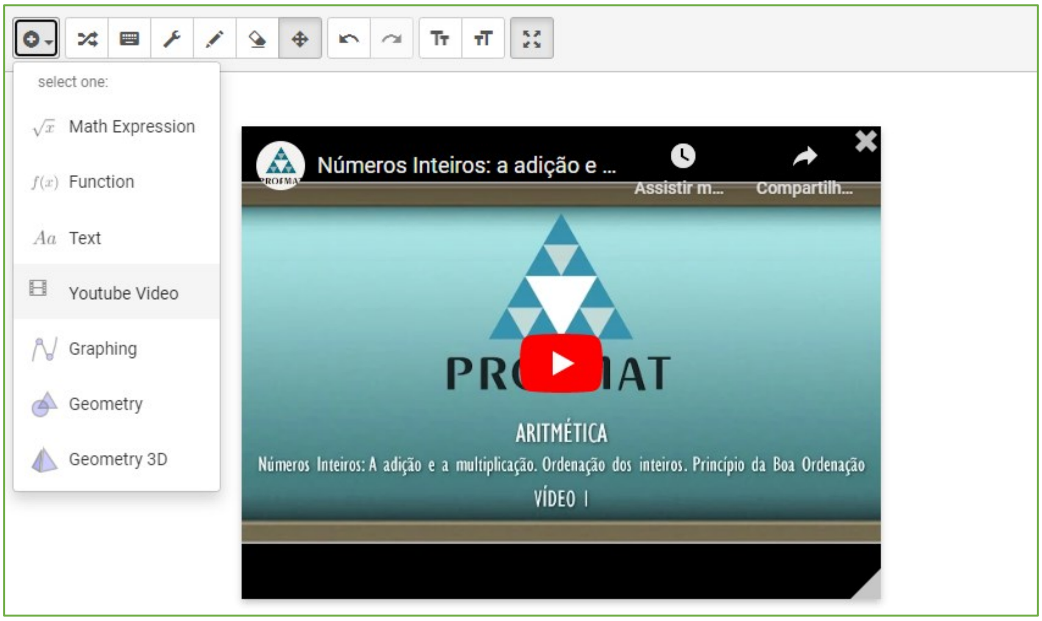
Figura 9 - Integração com aplicativos Geogebra



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Para adicionar videoaula do Youtube (Figura 10), basta ter o link do vídeo;

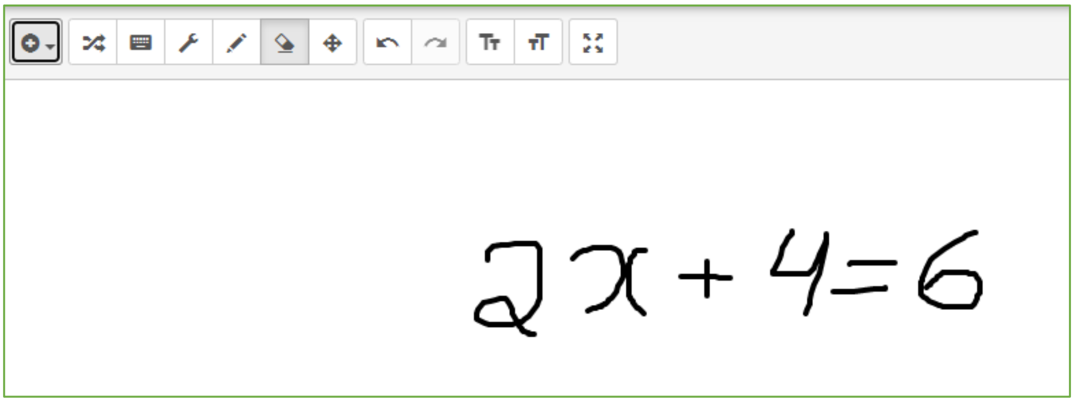
Figura 10 - Integração com vídeo do Youtube



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Pode escrever e apagar livremente na tela, como se fosse um caderno digital (Figura 11);

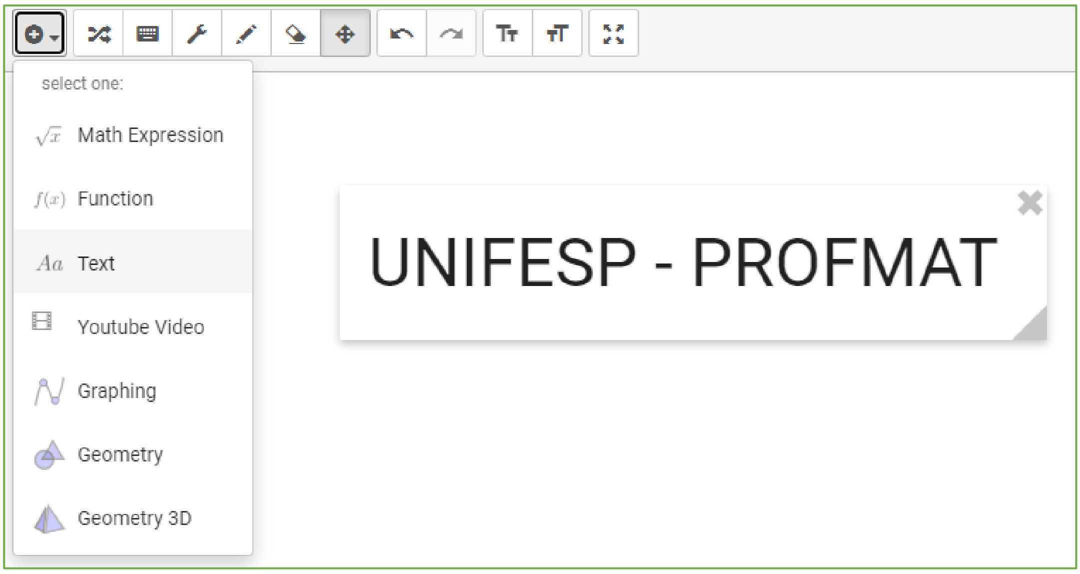
Figura 11 - Escrevendo à mão



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Criar e editar textos, como se fosse um mural (Figura 12);

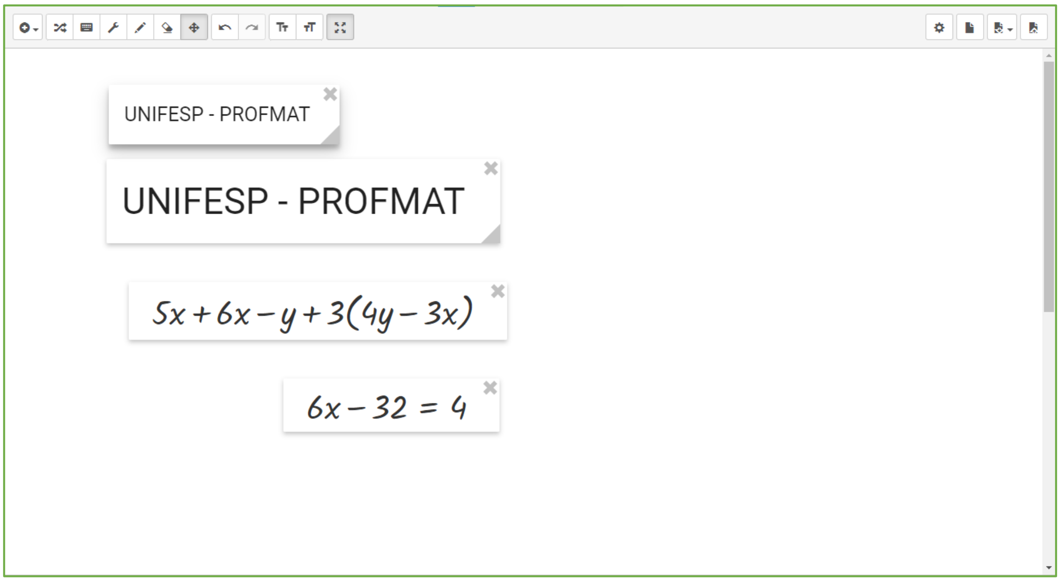
Figura 12 - Criando e editando textos



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Ampliar ou reduzir as informações na tela, bem como deixar a página no formato de tela “cheia” (Figura 13);

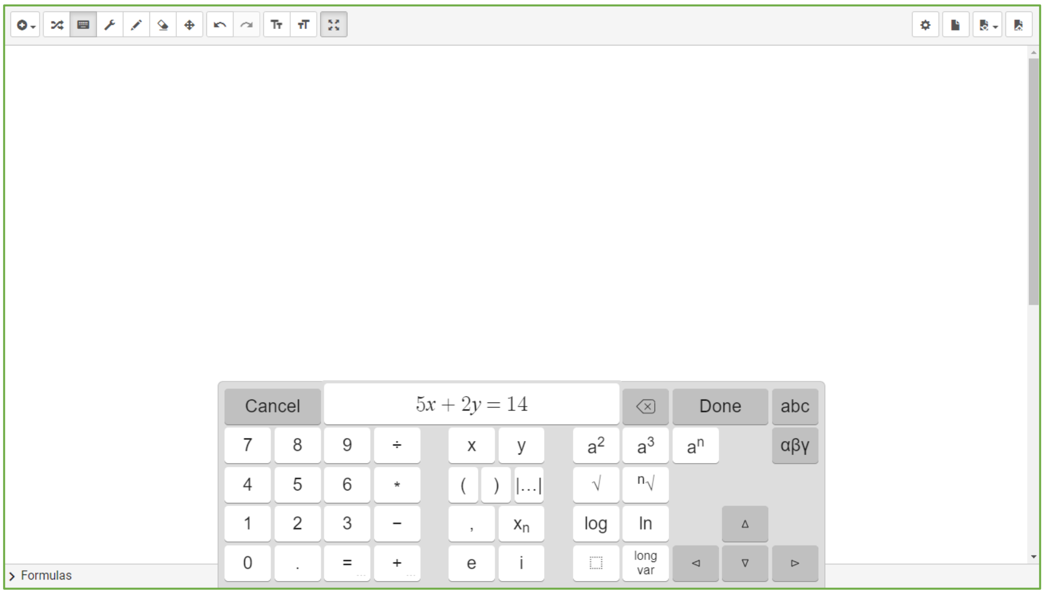
Figura 13 - Ampliação e tela cheia



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

- Possui um teclado virtual para inserir informações, quando necessário (Figura 14).

Figura 14 - Teclado Virtual



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

4) Além dos recursos gratuitos na função “QUADRO BRANCO” (3), o professor pode realizar o cadastro no GM e utilizar as funções prêmio. Para isso, o professor precisará de um e-mail Google (gmail), pode ser um e-mail pessoal, mas recomenda-se que seja o e-mail da instituição a qual o professor leciona. Na

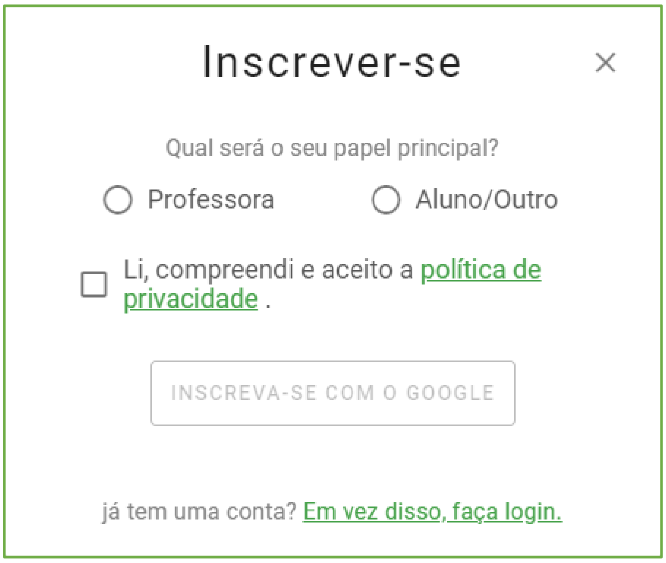
página inicial do aplicativo (Figura 4), clique no botão “INSCREVER-SE” (Figura 15):

Figura 15 - Botão para Inscrever-se

Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

5) Em seguida, abrirá uma tela para definir o cadastro como professor(a), aluno ou outro e para ler e aceitar a Política de Privacidade do aplicativo (Figura 16):

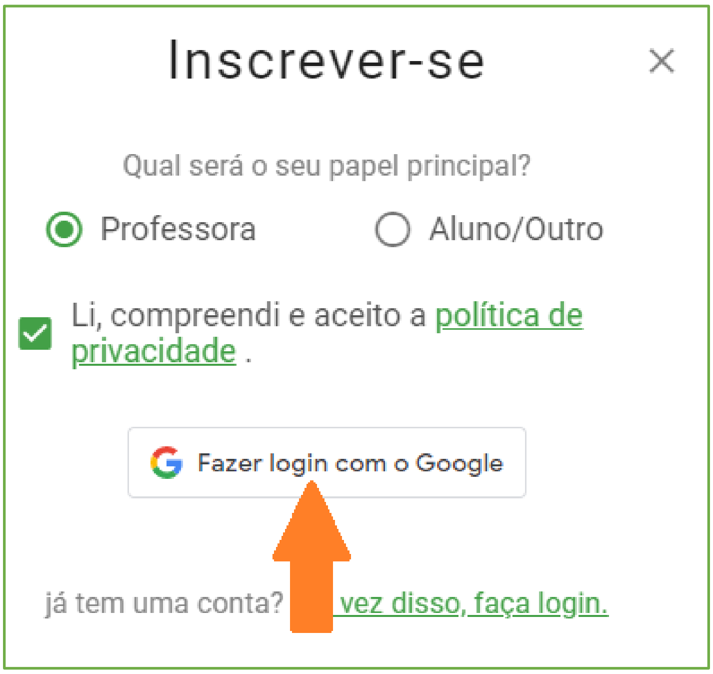
Figura 16 - Escolha do tipo de cadastro



Fonte: Captura de tela, a partir de GM (2022)

6) Após ler a Política de Privacidade, escolha a opção Professor(a), selecione o campo “Li, compreendi e aceito a política de privacidade” e clique no botão “Fazer login com o Google” (Figura 17):

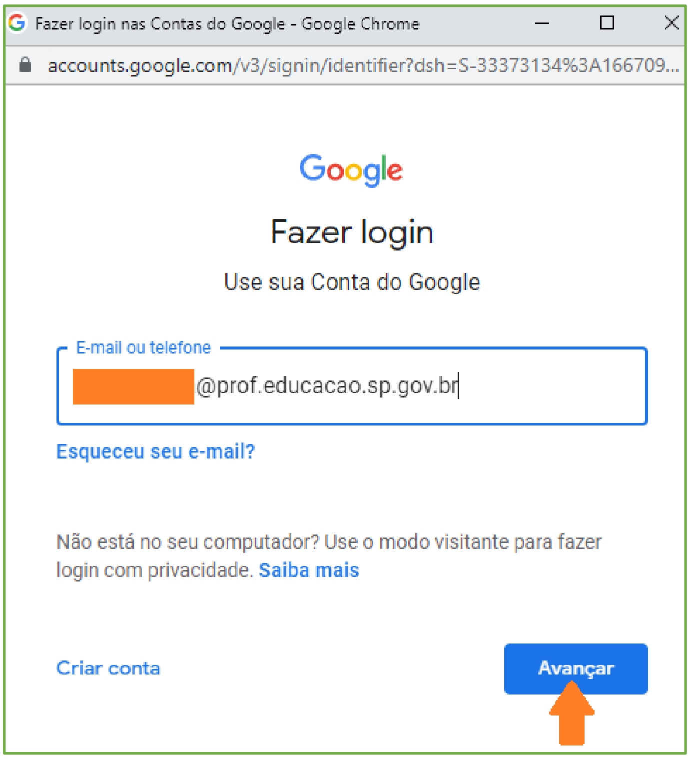
Figura 17 - Escolhendo o tipo de cadastro e selecionando a política de privacidade



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

7) Na próxima tela solicitará o preenchimento de um e-mail Google (gmail), e em seguida clique no botão “Avançar” (Figura 18):

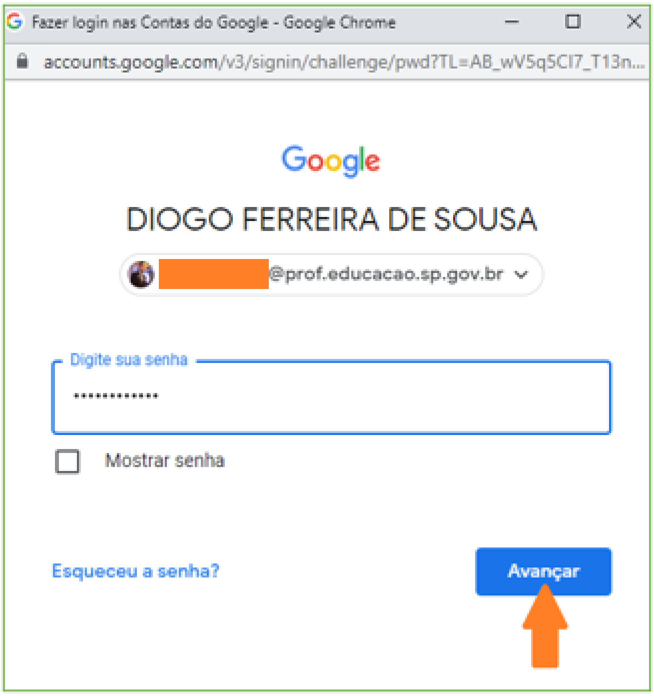
Figura 18 - Preenchimento do e-mail



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

8) Proceda da mesma forma com o preenchimento da senha de seu e-mail e clique no botão “Avançar” (Figura 19):

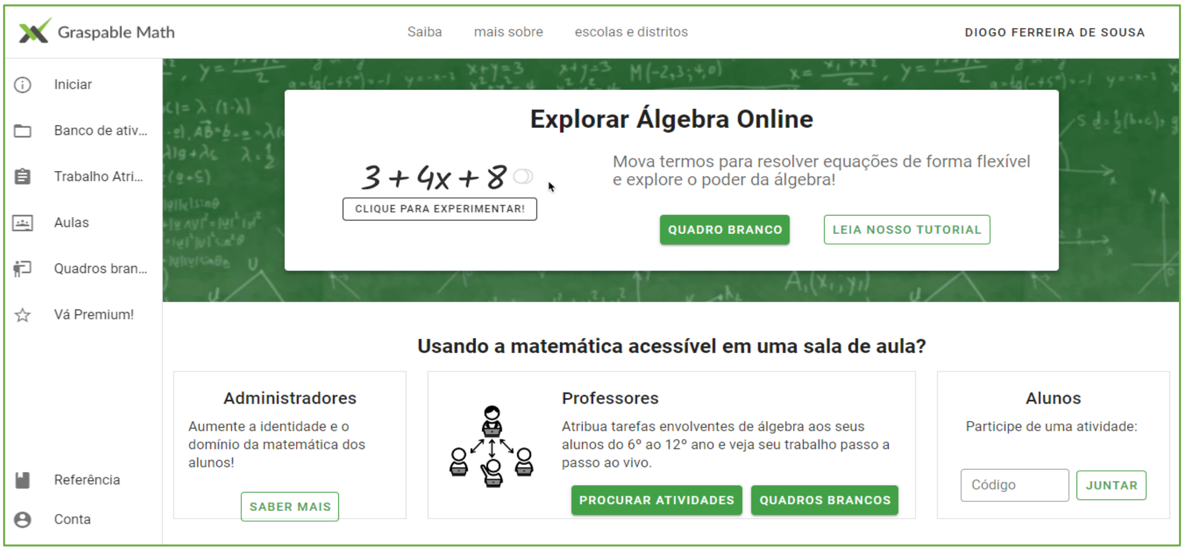
Figura 19 - Preenchimento da Senha



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

9) Após ter se cadastrado, aparecerá a página a seguir (Figura 20). Quando sair do aplicativo e for entrar novamente, basta clicar no botão “Conecte-se” (Figura 15) e seguir com o preenchimento do e-mail e senha.

Figura 20 - Tela Inicial após conectar-se ao aplicativo GM



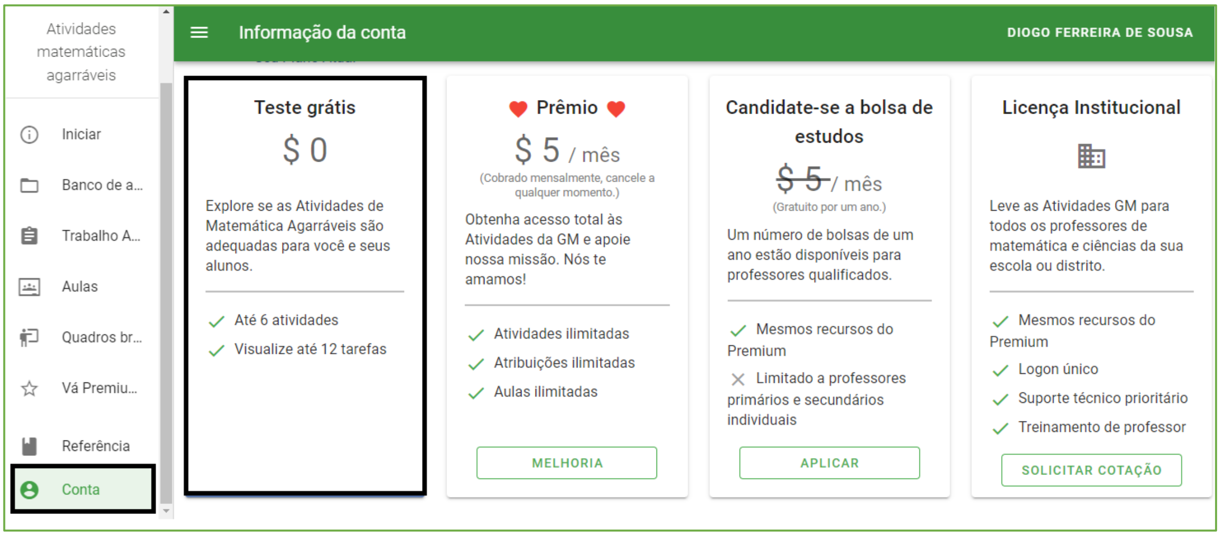
Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

10) Após conectar-se como professor(a), através de um e-mail e senha Google, o aplicativo disponibilizará os recursos do plano "Teste Grátis", mas a gratuidade é por um período determinado:

> "Seja você um professor descobrindo como ensinar matemática para sua turma remotamente ou um pai tentando apoiar seus filhos com seus trabalhos escolares de matemática, provavelmente agora está procurando bons recursos para ajudá-lo. Achamos que as Atividades GM podem ser uma alternativa certa – e estamos fornecendo-o gratuitamente pelo restante deste ano letivo." (GM, 2022)

Para obter informações sobre os planos, clique no botão "CONTA". No plano "Teste grátis", o GM disponibiliza mais recursos, com limitações, além das funcionalidades gratuitas do QUADRO BRANCO.

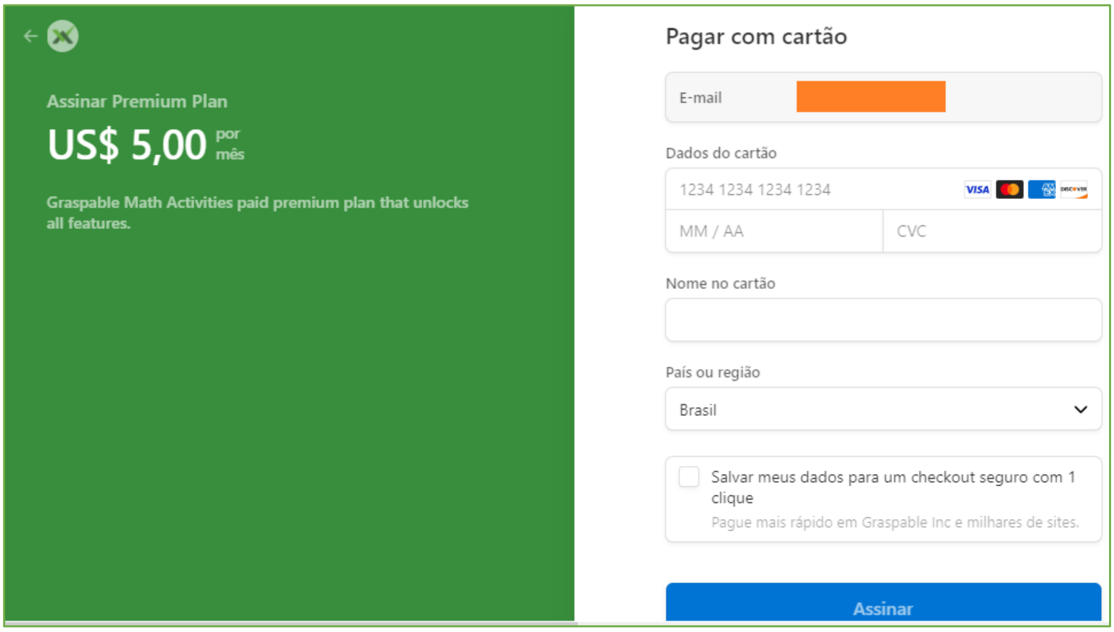
Figura 21 - Plano Teste



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

11) Para adquirir o aplicativo GM, no plano Prêmio (Figura 21), basta clicar no plano desejado, na página de pagamento por cartão de crédito (Figura 22) siga com o preenchimento dos dados, mas, reforçando, é um *plano mensal* e a cobrança de $5,00 dólares será recorrente, ao menos que solicite o cancelamento do plano.

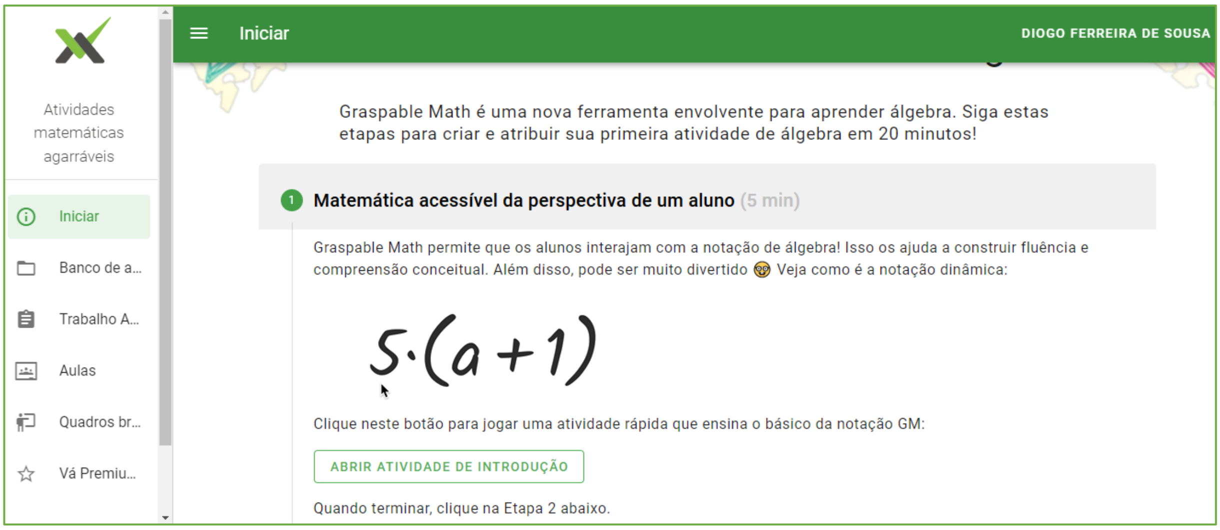
Figura 22 - Aquisição do Plano Prêmio



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

12) Nesta etapa, é apresentado as funções que são disponibilizadas no Menu da lateral esquerda da página inicial (Figura 20). Ao clicar no botão "INICIAR", aparecerá uma tela com o passo a passo para entender as funcionalidades do GM e visualizar um exemplo de atividade, no tutorial (1) ensina a perspectiva do aluno (Figura 23):

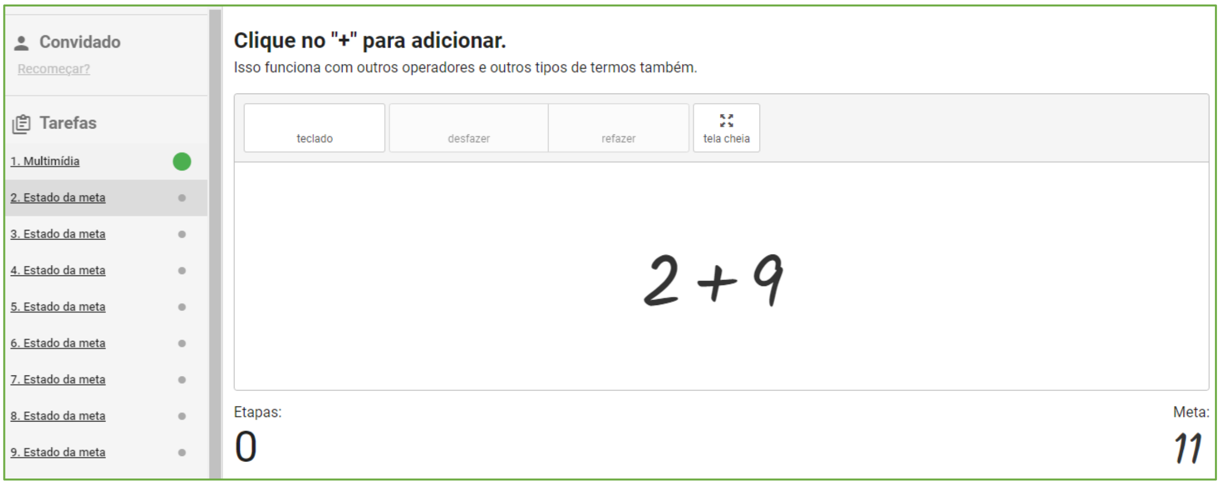
Figura 23 - Tutorial da perspectiva do aluno



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

Ao clicar no botão “ABRIR ATIVIDADE DE INTRODUÇÃO” (Figura 23), abrirá uma nova tela e após escolher uma atividade (Figuras 24 e 25) o aluno poderá realizar a atividade, portanto, aqui é uma demonstração de como o aluno fará as atividades em GM, note que, na parte inferior da tela há um contador “Etapas” que contabiliza a quantidade de passos realizados e também a “Meta”, o resultado pretendido.

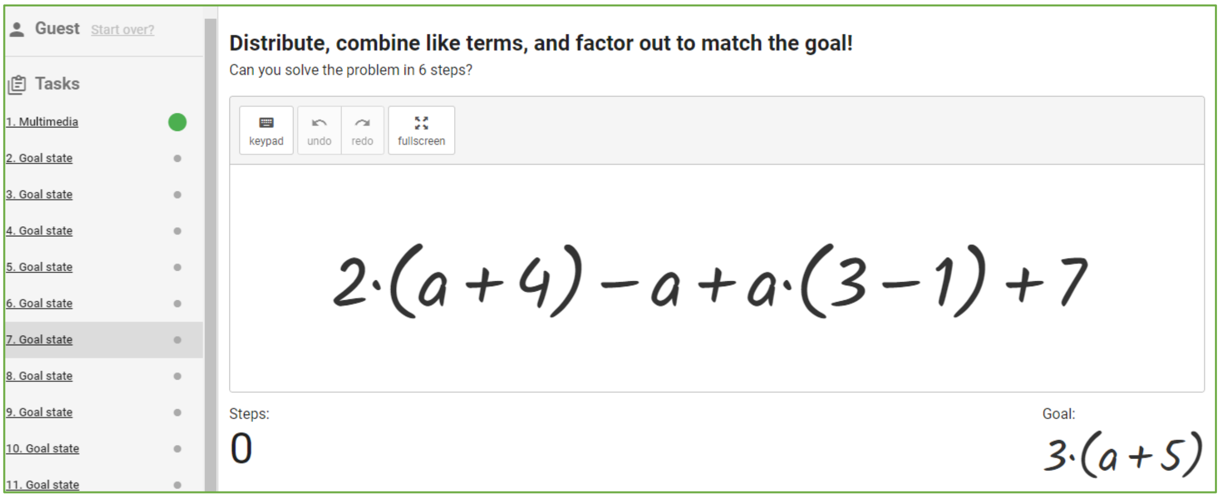
Figura 24 - Demonstração 1: atividade na perspectiva do aluno



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

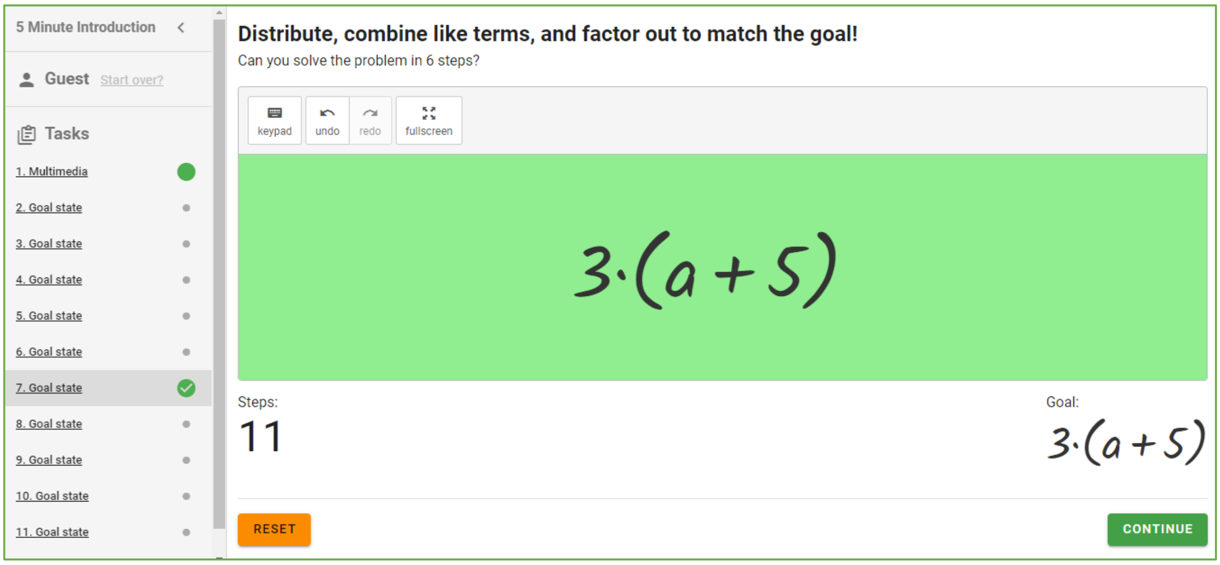
Segunda atividade demonstrativa:

Figura 25 - Demonstração 2: atividade na perspectiva do aluno



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

Figura 26 - Conclusão da Atividade 7



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

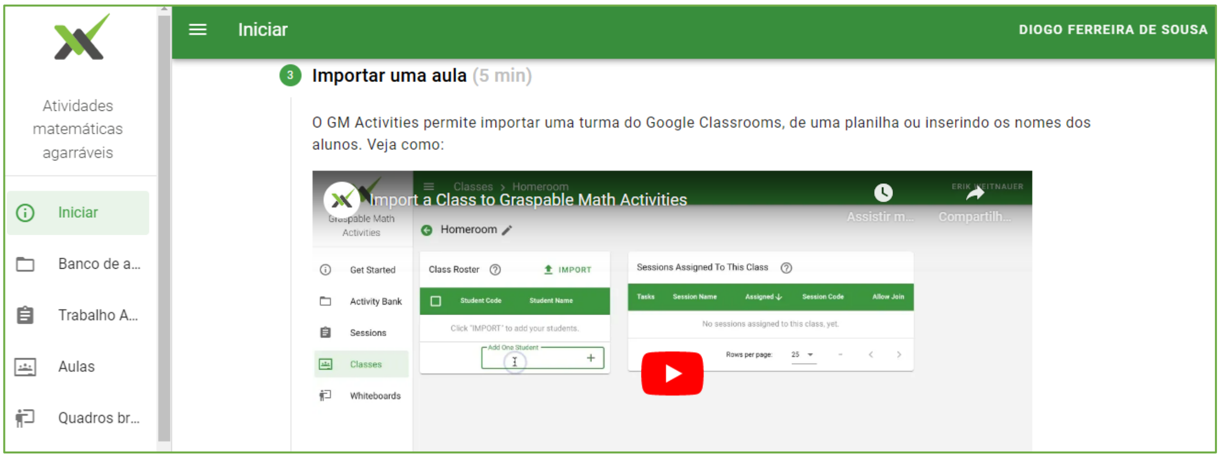
O segundo tutorial (2) disponibiliza duas videoaulas (Figura 27), uma ensina a criar sua primeira atividade e a segunda ensina como copiar uma atividade pública (compartilhada por outro usuário do GM):

Figura 27 - Criar atividade ou copiar uma atividade pública

Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

No terceiro tutorial (3), ensina como o GM permite importar sua turma do Google Classroom, de uma planilha ou inserindo os nomes dos alunos manualmente (Figura 28):

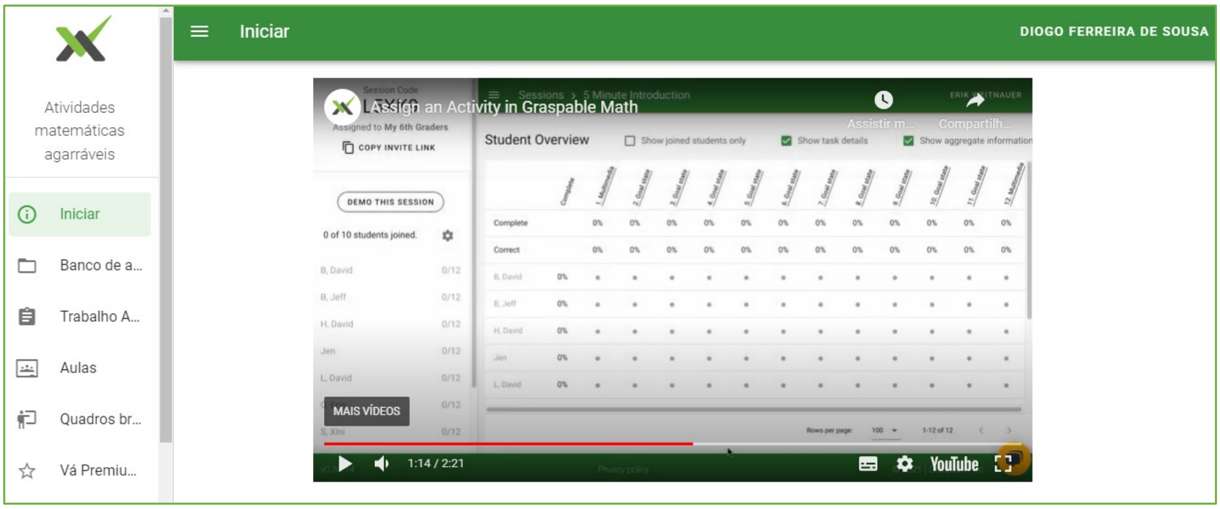
Figura 28 - Criar ou importar suas turmas



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

No próximo tutorial (4), é demonstrado como realizar a atribuição de tarefas às turmas ou alunos individualmente (Figura 29). Ao compartilhar o link de participação com seus alunos, você poderá ver o trabalho dos alunos ao vivo em seu painel.

Figura 29 - Atribuir atividade às turmas ou aos alunos



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

Após terminar os tutoriais, aparecerá uma tela (Figura 30) com mais algumas informações que podem ser importantes para os próximos passos:

Figura 30 - Informações gerais e contatos com o suporte GM

Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de GM (2022)

Na próxima seção será apresentado algumas possibilidades para uso do aplicativo GM, em atividades que promovam o desenvolvimento de habilidades na disciplina de matemática, em particular de álgebra, de acordo com as diretrizes e bases da BNCC (2017).

5. PROPOSIÇÕES PARA O USO DO GM SEGUNDO HABILIDADES DA BNCC

Nesta seção será apresentada a aplicação dos recursos do GM, associados a um plano de aula, de acordo com a habilidade referenciada na BNCC a seguir (Quadro 10).

O plano de aula descrito nesta seção, encontra-se disponível no site da Nova Escola (2022): Nova Escola

Atividade 1

A atividade 1 está baseada nas orientações a seguir (Quadro 10).

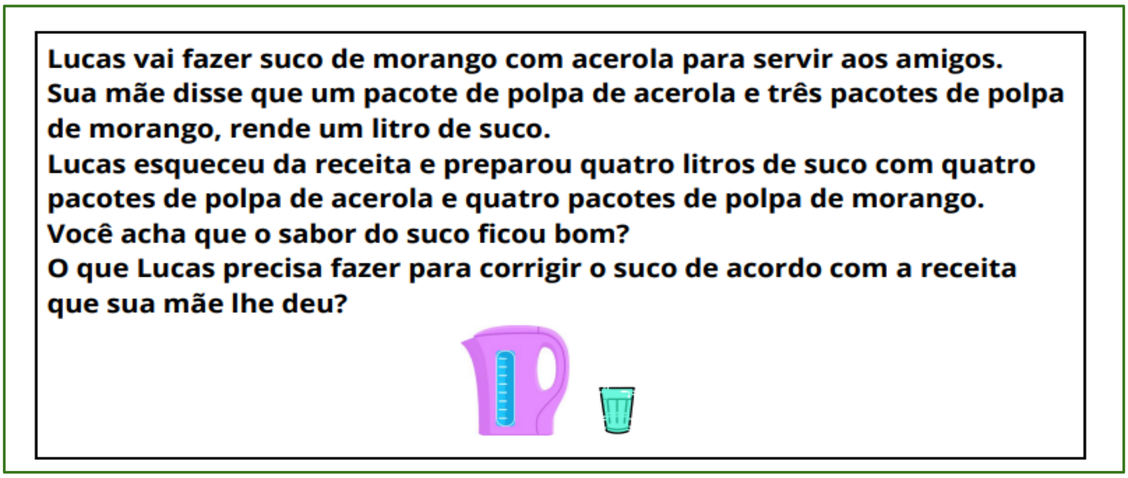
Quadro 10 - Temática, Objeto de Conhecimento e Habilidade para a Proposta 1

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidade
Álgebra	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: Autor, a partir de BNCC (2017)

A atividade 1 está estrutura a partir da situação-problema 1 (Figura 31)

Figura 31 - Situação-problema 1



Fonte: Autor, a partir de uma captura de tela de Nova Escola (2022)

Objetivos específicos: Explorar a razão entre as partes e entre as partes e o todo na partilha em duas quantidades desiguais.

Conceito-chave: Resolução de problemas, partilha em duas partes desiguais, razão.

Recursos necessários: Algum aparelho com acesso à internet (computador, tablet, celular entre outros).

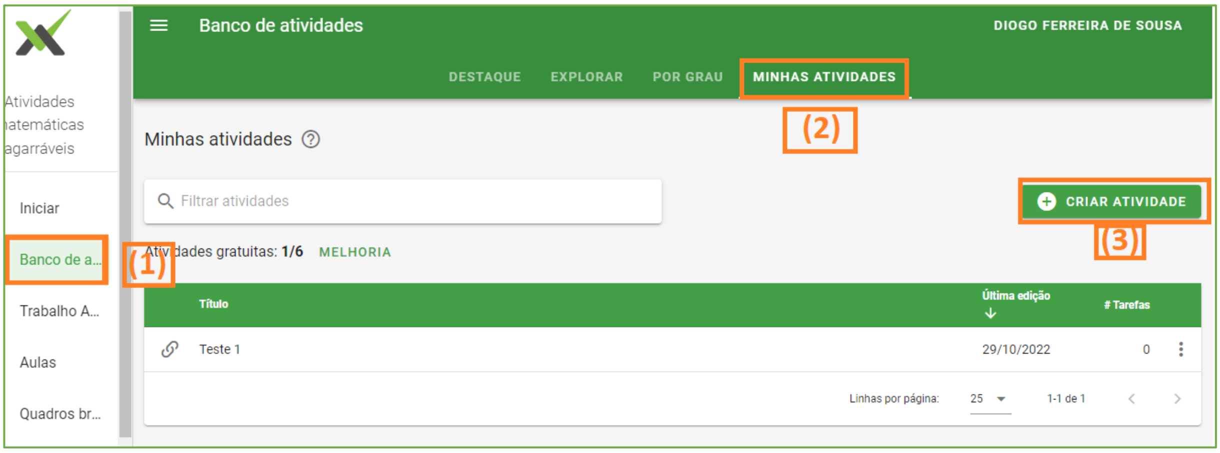
Duração: 50 minutos

Orientação: Para realização desta atividade, é sugerido que os alunos estejam em duplas. Para motivar os alunos para a atividade, converse com eles sobre o assunto, pergunte quem já preparou uma receita, se já tomaram suco de acerola, de morango, de morango com acerola, como é o sabor de cada um separado, e como ficariam misturados, como na receita, com mais morango que acerola, enfim, converse com os alunos para que a compreensão do contexto não seja uma dificuldade. Reserve um tempo para um debate coletivo e deixe que as duplas compartilhem o que discutiram. Utilize o guia de intervenções para discutir com os alunos as formas e possibilidades de resolução.

A seguir, será apresentado o passo a passo para criar a Atividade 1 com o uso do aplicativo GM

1) Para criar um maior engajamento dos alunos nesta situação-problema, pode-se criar a Atividade 1 no GM. Logo, para isso, é necessário conectar-se com usuário e senha, de acordo com as instruções da seção (4). Em seguida, clique no botão “Banco de atividades”, depois em “MINHAS ATIVIDADES” e “CRIAR ATIVIDADE” (Figura 32):

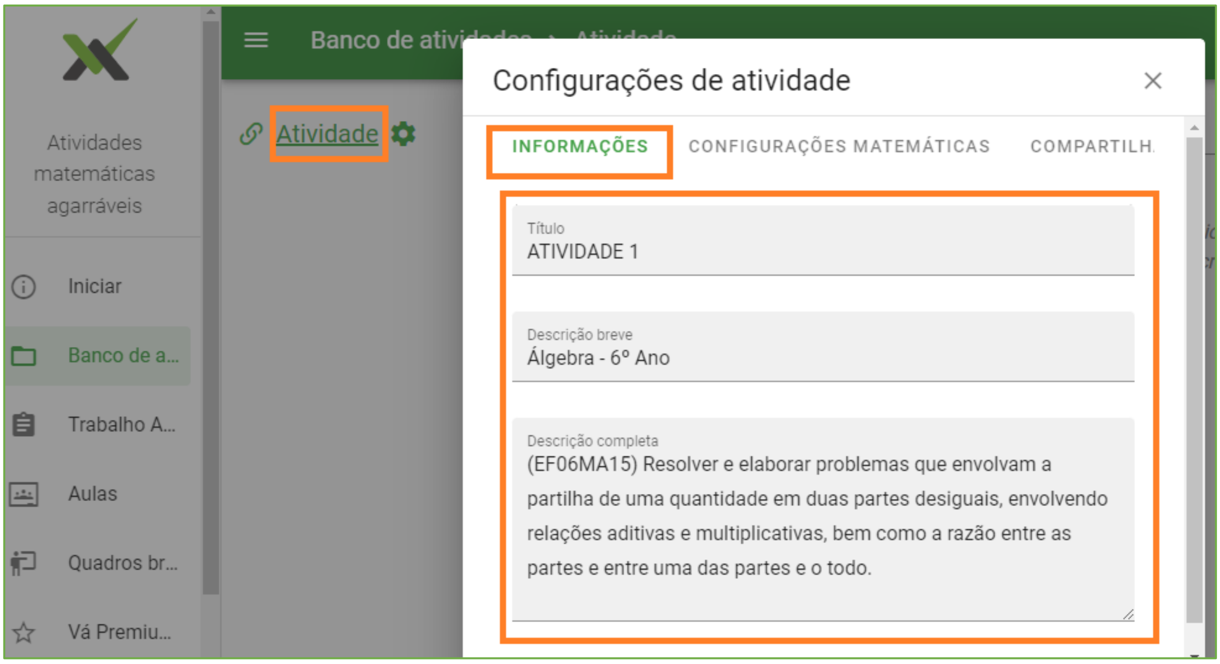
Figura 32 - Criar uma atividade no GM



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

2) Na próxima tela clique em “Atividade”, em seguida, na aba INFORMAÇÕES e descreva as informações da atividade (Figura 33):

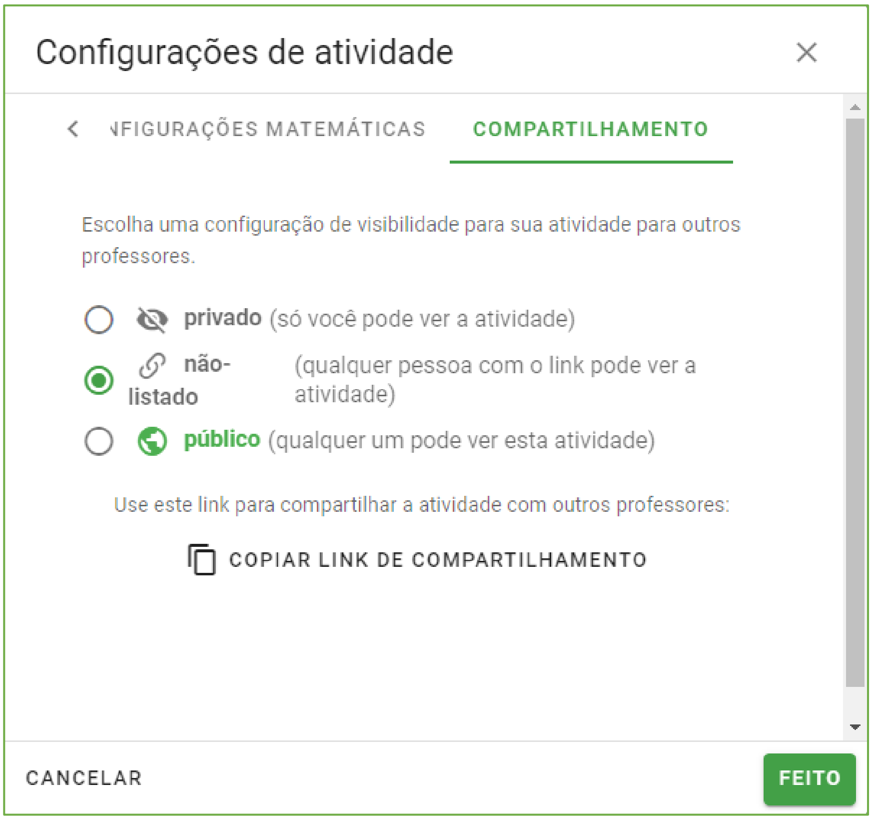
Figura 33 - Configurando a Atividade



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

3) Na aba COMPARTILHAMENTO, você poderá escolher entre: privado (só você verá a atividade), não-listado (qualquer pessoa com o link poderá ver a atividade) ou público (qualquer pessoa pode ver e copiar sua atividade) (Figura 34), após escolher uma das opções clique em “FEITO”:

Figura 34 - Configurando o compartilhamento da atividade



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

4) Clique no botão "Novo tipo de tarefa", depois escolha "Ponto de acesso" e por fim "+ ADICIONAR TAREFA" (Figura 35):

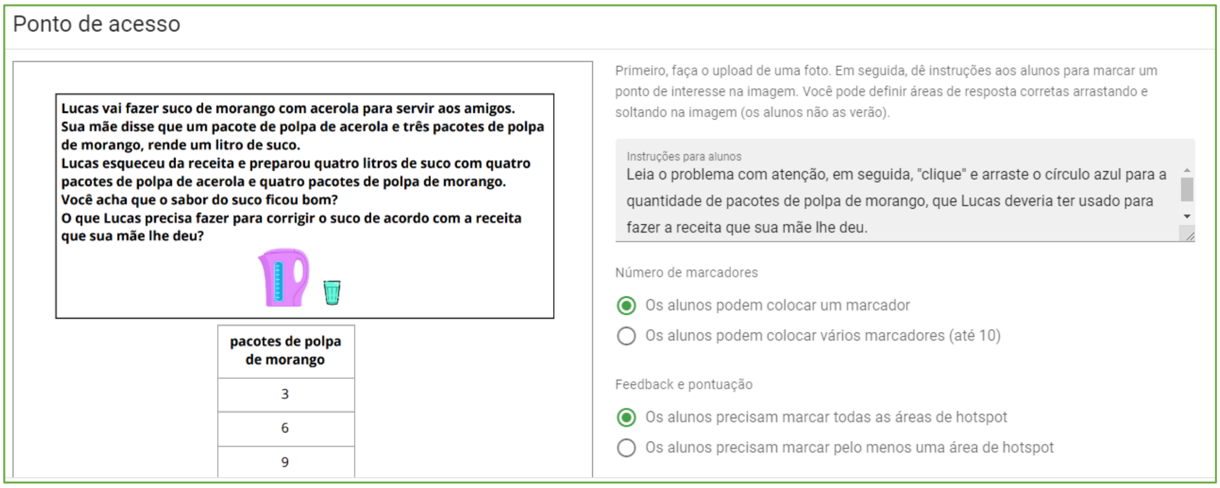
Figura 35 - Adicionando uma tarefa

Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

5) Na próxima tela clique em "ENVIAR IMAGEM", você precisará salvar previamente a imagem em seu computador para realizar o upload, depois descreva as instruções para o aluno, o que deseja que ele desenvolva. Neste recurso "Ponto de acesso", GM, permite que o aluno encontre na imagem algo

que você tenha determinado nas instruções. O aluno deverá clicar em um marcador na tela e arrastar até o ponto procurado na imagem (Figura 36):

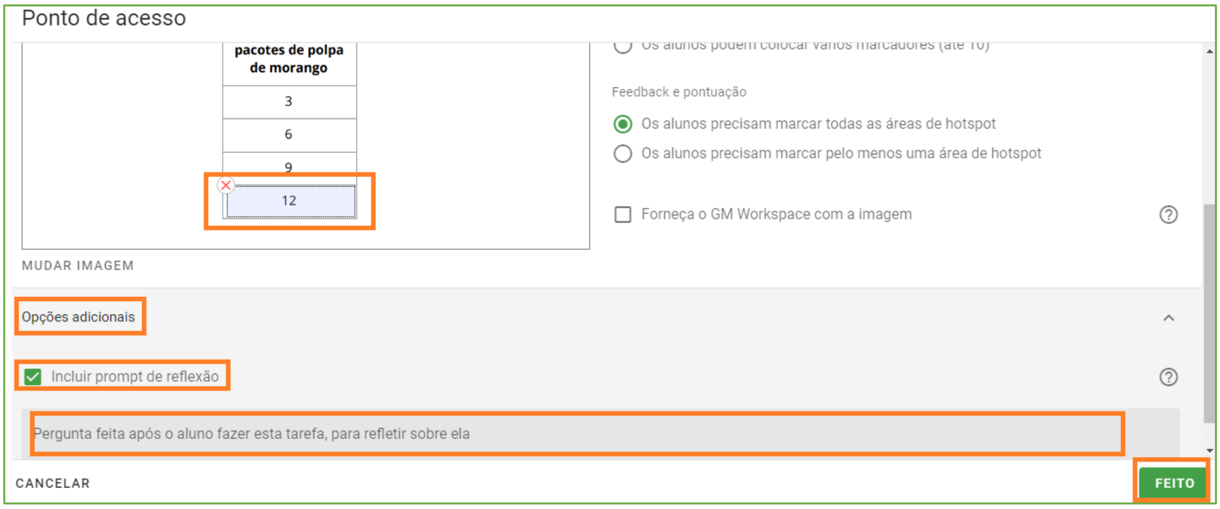
Figura 36 - Criando uma tarefa



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

6) Em seguida clique na imagem e escolha o local que o aluno deverá realizar a marcação, nesse exemplo o aluno deverá marcar a quantidade 12, então clique sobre o número 12. Ao descer a tela você terá a opção de habilitar um campo para os alunos descrever uma justificativa para sua ação. Clique no botão “Opções adicionais”, depois em “Incluir um prompt de reflexão” e descreva o que o aluno deverá justificar e clique em “FEITO” (Figura 37). Antes de atribuir a tarefa para os alunos é válido testar a atividade criada para saber se está da forma que você desejou:

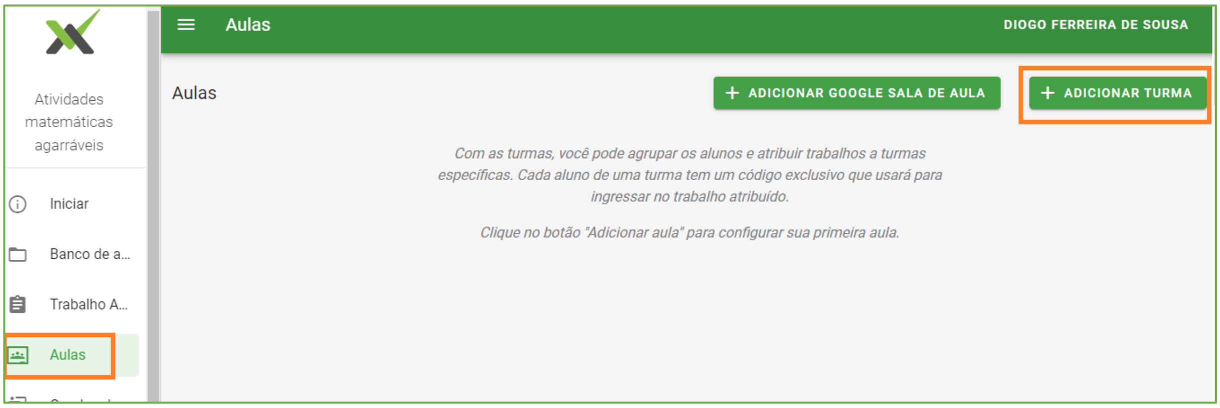
Figura 37: Resposta na imagem e campo para justificativa



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

7) Agora só precisa criar uma turma, importar do Google Classroom ou de uma planilha. Clique no botão “Aulas”, depois escolha a opção de que desejar (Figura 38), neste exemplo faremos uma criação manual para uma demonstração, lembrando que nas videoaulas dos tutoriais, ensinam como realizar as outras formas:

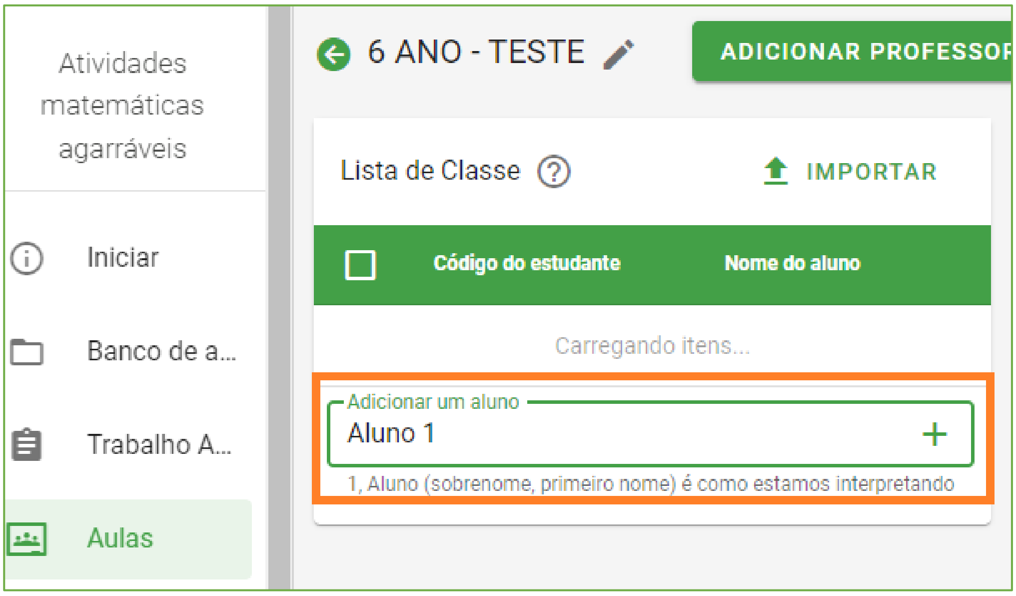
Figura 38 - Criando uma Turma



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

8) Após ter criado a Turma, nesse exemplo foi criado a turma 6 ANO - TESTE, clique em "Adicionar um aluno” e cadastre o nome do aluno, depois clique em “+” para adicionar outros, se desejar (Figura 39):

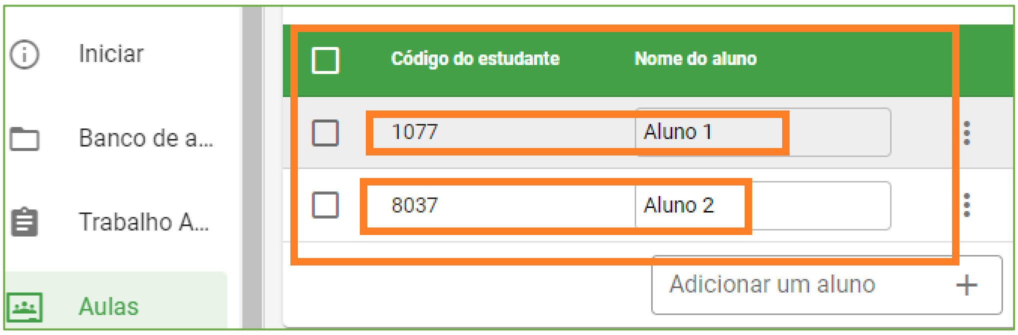
Figura 39 - Cadastrando os alunos



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

9) Cada aluno terá um código único para associar com as atividades que o professor atribuir (Figura 40):

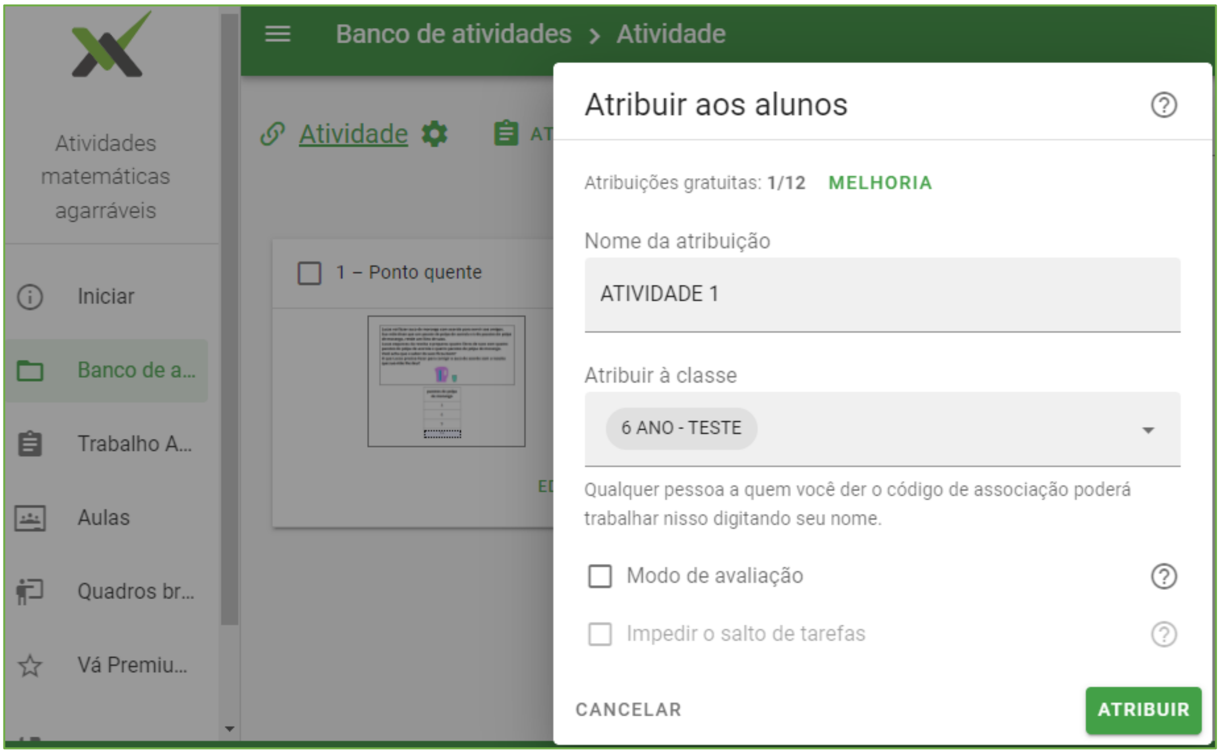
Figura 40 - Alunos cadastrados



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

10) Agora que a tarefa foi criada e a turma cadastrada, precisa atribuir a tarefa para os alunos. Siga o caminho: “Banco de atividade”, “Atribuir aos alunos” (escolha a tarefa desejada), “Atribuir à classe” (escolha a classe desejada) e clique no botão “ATRIBUIR” (Figura 41).

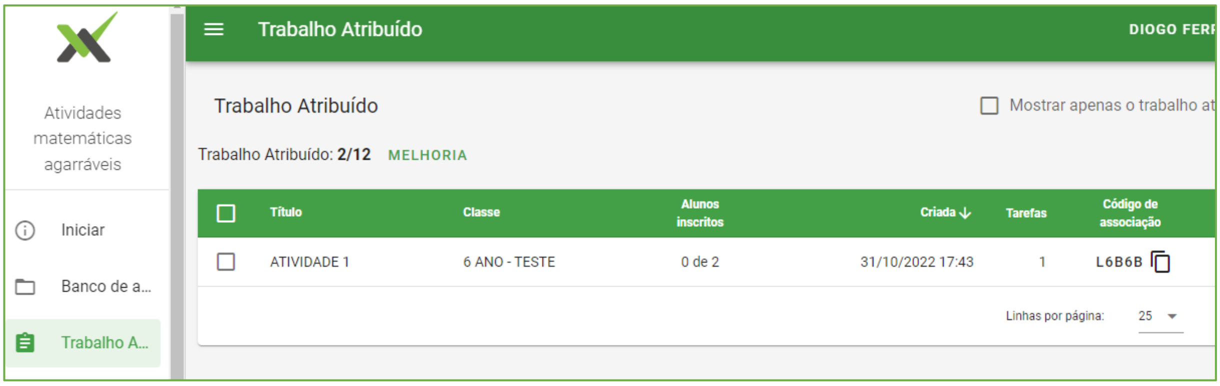
Figura 41 - Atribuindo tarefa para uma classe



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

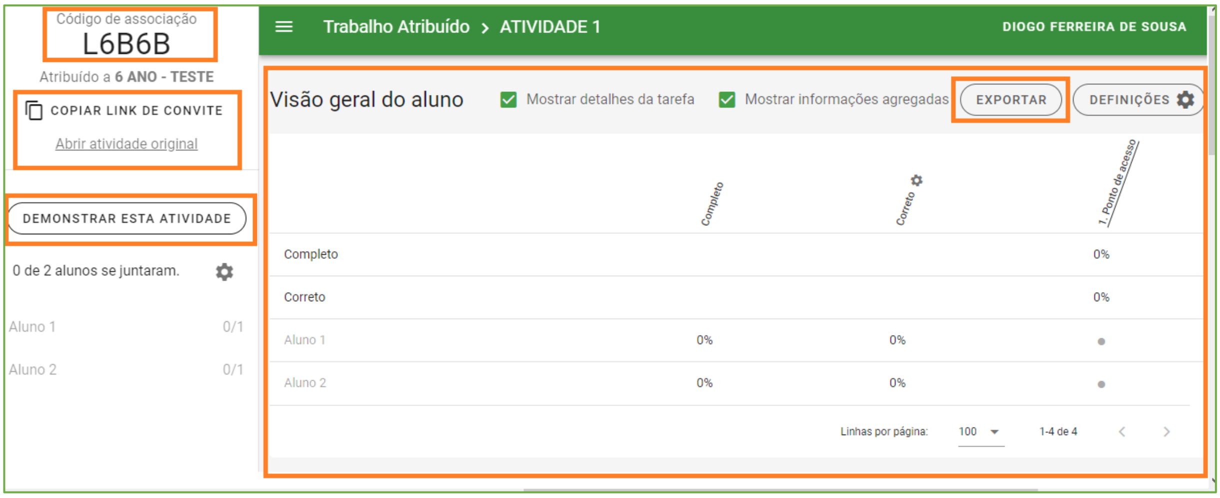
11) Após atribuir a tarefa para uma classe, o professor poderá acompanhar o andamento em “Trabalho Atribuído”, clicando na tarefa (Figura 42). Em seguida abrirá a tela de controle do professor (Figura 43), onde é possível: acompanhar o andamento das atividades em tempo real, aluno por aluno, exportar relatório após o encerramento das atividades, fazer uma demonstração para os alunos ou até mesmo testar a atividade:

Figura 42- Visualizando a tarefa atribuída



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

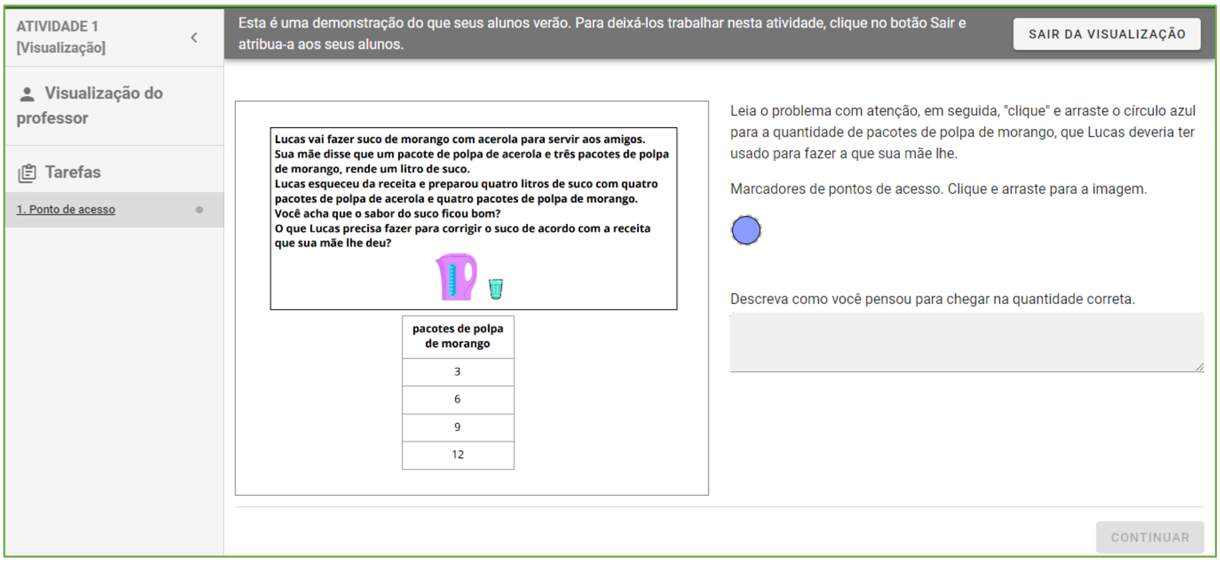
Figura 43 - Painel de Controle do Professor



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

12) Visualização do aluno para realizar a tarefa (Figura 44):

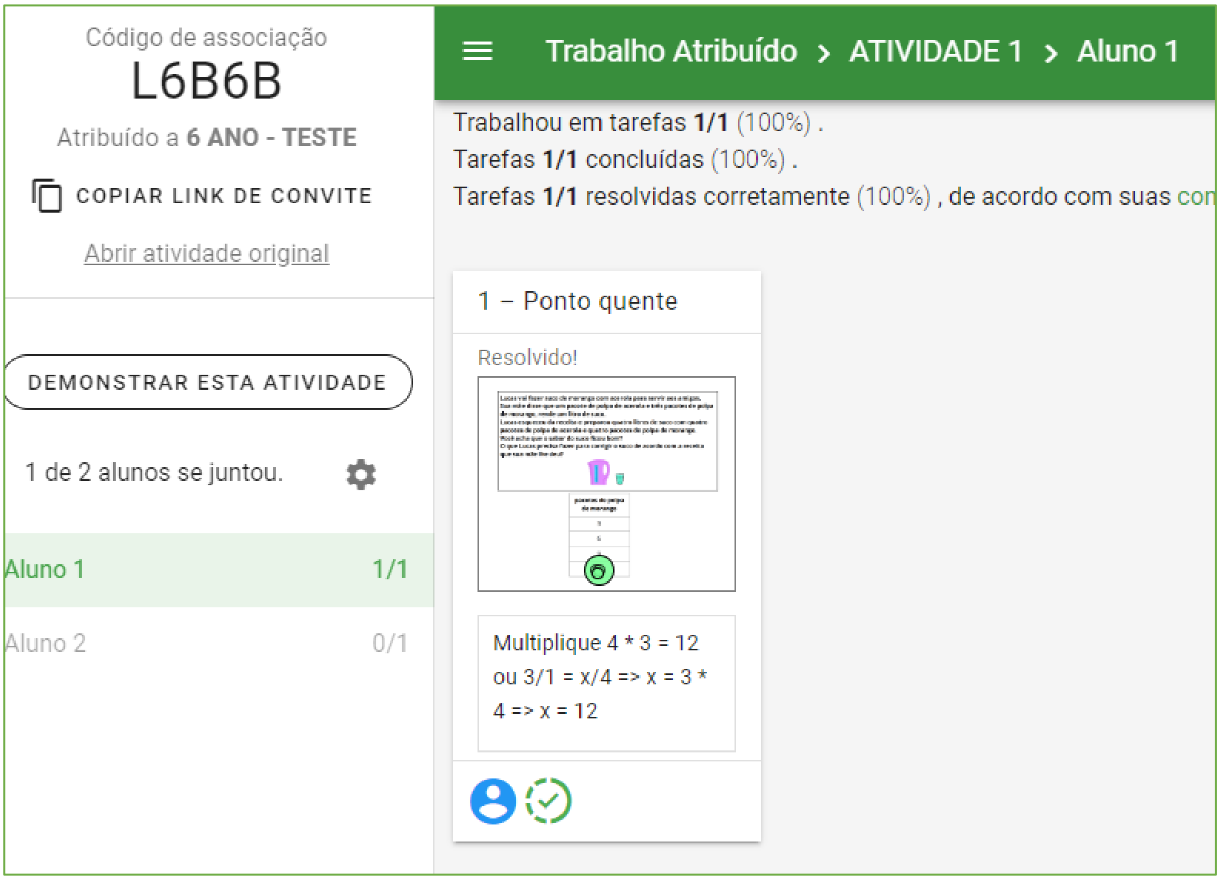
Figura 44 - Visualização do aluno para realizar a tarefa



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

13) Painel do professor após os alunos realizar a atividade (Figura 45)

Figura 45 - Painel do professor após aluno realizar a atividade



Fonte: Autor, a partir da captura de tela em GM (2022)

Discussão com os alunos: Ao final da atividade, o professor pode realizar um momento de discussão para socializar as diferentes estratégias que os alunos usaram, podendo, inclusive, construir um painel de soluções, mediante a algumas perguntas sobre o desenvolvimento da atividade.

1) O suco foi preparado conforme a receita?
2) Quais são as polpas que serão usadas para o preparo do suco?
3) Quantos pacotes de cada polpa devem ser usados, segundo a receita, para o preparo de um litro de suco?
4) Qual a razão entre a quantidade de polpas de cada sabor no preparo de um litro de suco?
5) O que é preciso fazer para corrigir o suco preparado, seguindo a razão proposta na receita?

Esta proposta, entre tantas outras, pode ser aplicada em um formato de ensino remoto, ensino híbrido e até mesmo no ensino presencial. Devido o uso de recursos digitais, espera-se que os alunos fiquem mais engajados no processo de construção de conhecimento, a aula fique mais dinâmica devido ao uso de recursos de comunicação do dia a dia destes, podendo criar mais familiaridade e uma aproximação maior dos alunos com o ensino de matemática. Por fim, se a aula for bem planejada, o professor estiver seguro com relação ao uso desses recursos, podemos ter avanços promissores no processo de ensino de matemática, em particular o de álgebra, pois tais recursos nas mãos de especialistas, são poderosos instrumentos a favor da educação.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do presente trabalho, buscou-se compreender as principais concepções sobre a álgebra e sobre seu ensino, com vistas a contribuir com a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem desta temática.

Na literatura atual buscou-se os autores de maior relevância, e dentre as principais concepções sobre a álgebra não houve um consenso quanto à definição conceitual, mas sim, ao nosso ver, um complemento entre estas. Ligando o processo de aprendizagem desta temática aos métodos e aplicações, ou seja, à concepção processual da linguagem algébrica.

A BNCC (2017) estabeleceu diretrizes e bases para as redes de ensino pública e privada, no ensino de matemática, para introduzir o ensino de álgebra a partir dos Anos Iniciais (Ciclo I - 1º ao 5º Ano) com práticas pedagógicas baseadas no pensamento algébrico, ou seja, na construção do pensamento cognitivo sobre a temática álgebra. No Ensino Fundamental Anos Finais (Ciclo II - 6º ao 9º Ano), os alunos têm a continuidade do que foi trabalhado no ciclo anterior, com a introdução das variáveis e procedimentos metodológicos para resolução de expressões e equações algébricas. Já no Ensino Médio, espera-se que os alunos cheguem a esta etapa do ensino com o pensamento algébrico mais desenvolvido, a parte estrutural e procedimental em desenvolvimento, e desta forma, tenham condições para compreender estruturas e aplicações mais complexas, seja do dia a dia ou de fenômenos naturais.

Pesquisas que buscaram analisar os índices de acertos em avaliações governamentais de matemática, em especial os resultados específicos em álgebra, a nível estadual por meio do SARESP e federal por meio do MEC, demonstraram que os conhecimentos matemáticos continuam não adequados para as faixas etárias dos estudantes.

Seguindo as orientações contidas nos documentos normativos da educação básica, principalmente a BNCC (2017), que indicam a necessidade de compreender, criar e aplicar o uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Além de autores que através de seus trabalhos indicam o uso de tecnologia na educação, para contribuir e dinamizar a forma de construir o conhecimento tão amplamente divulgado por meio da internet. Foi proposto o uso de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) como meio de melhorar o ensino e a aprendizagem da concepção processual da temática álgebra no ensino básico.

Com o objetivo de apresentar e produzir material de apoio aos professores, para estimular e promover novas práticas de ensino pautadas no uso de tecnologia. Este trabalho apresentou o aplicativo GRASPABLE MATH (matemática acessível - tradução nossa), ou simplesmente GM, como meio de auxiliar os professores a obterem conhecimento técnico e procedimental para o seu uso.

O projeto de desenvolvimento deste aplicativo ocorreu no ano de 2018 (primeira fase) e em 2019 (segunda fase), com investimento de mais de 1 milhão de dólares pelo Instituto de Ciências da Educação (IES) dos Estados Unidos da América, e está sendo desenvolvido por especialistas da área de educação. O aplicativo foi desenvolvido com a finalidade central de facilitar a compreensão da linguagem algébrica, entre outras temáticas, como Aritmética e Geometria.

O GM é aplicável às muitas realidades brasileiras, e mostrou-se muito promissor no ensino de álgebra. Possui vários recursos que permite contextualizar o ensino, além de realizar integração com o aplicativo Geogebra e com o Youtube. Pode ser utilizado para avaliação, pois tem recurso de relatório e painel de controle para acompanhamento das atividades.

As limitações ficam por conta da versão gratuita, que oferece poucos recursos e a gratuidade é por tempo determinado. O plano pago, atualmente, está em $5,00 mensal, portanto, o valor é baixo e não inviabiliza seu uso. Por fim, criou-se um tutorial para utilização do GM e indicou-se um plano de aula para aplicar no 6º Ano do Ensino Fundamental.

Espera-se que esse trabalho contribua com a formação dos professores da educação básica, seja uma alternativa para o ensino de álgebra e para o melhoramento do processo de ensino e de aprendizagem da concepção processual da linguagem algébrica. Além de apoiar e estimular novas pesquisas no campo do ensino de matemática, com o uso de novas abordagens aplicadas às práticas docentes, inclusive com o uso de ferramentas digitais.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e de Teoria Antropológica do Didático**. São Paulo, 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.

ALMEIDA, L.M.W de; DIAS, M.R. **Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem**. BOLEMA: Mathematics Education Bulletin. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, Brasil, v. 17, n. 22, 2004 - ISBN 978-85-89082-23-5.

ALMEIDA, M. A. R. de. **O tratado de álgebra de John Wallis e suas relações com a álgebra britânica**. Rio de Janeiro. 2010.

BACICH, Lilian. **Ensino Híbrido: Proposta de formação de professores para uso integrado das tecnologias digitais nas ações de ensino e aprendizagem**. In: Workshop De Informática Na Escola, 22. , 2016, Uberlândia. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2016. p. 679-687.

BAUMGART, J. K. álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, V. 4. álgebra**. São Paulo, 1992.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Versão Final. Brasília: MEC**, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 18 jun 2022

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – PCN. Brasília : MEC/SEF, 1998

CARNEIRO, J. **O USO DO KAHOOT! E DO ENSINO HÍBRIDO COMO FERRAMENTAS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA**. 2020. Trabalho de conclusão de curso - Programa De Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional – Universidade Estadual De Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. **A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino.** Estudos Avançados, São Paulo, v. 32, n.94, p. 171-187, 2018.

ESTEVÃO, E. J. O. **DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM E ENSINO DE ÁLGEBRA: ATIVIDADES PROPOSTAS PARA MINIMIZAR ESSAS DIFICULDADES**. 2021. Trabalho de conclusão de curso - Programa De Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional – Universidade Federal De Goiás, Goiás, 2021.

FERREIRA e NOGUEIRA. **O Professor PDE e os Desafios da Escola Pública Paranaense. O Desenvolvimento da Linguagem Algébrica e Sua Compreensão Por Meio da álgebra Geométrica**. Paraná, Universidade Estadual de Maringá, 2007.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. **Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?**. Pro-Posições, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 39–54, 1992, . Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424. Acesso em: 24 out. 2022.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições. Campinas, v. 4, n. 1[10], 1993.

GARCIA, W. **Educação, tecnologia e subjetividade: aproximações estratégicas**. Revista Científica Internacional, Campos dos Goytacazes, ano IV, n. 16, jan./mar. 2011.

GM. **Graspable Math: Atividades.** 2022. Disponível em: https://activities.graspablemath.com Acesso em 29 out. 2022.

HANKE, T. A. F.. **PADRÕES DE REGULARIDADES: Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. Trabalho de conclusão de curso - Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica De Minas Gerais, Minas Gerais, 2008.

IES. Instituto de Ciências da Educação. **Oportunidades De Financiamento: Subsídios E Contratos De Pesquisa Financiados Por Pesquisa: GRASPABLE MATH** https://ies.ed.gov/funding/grantsearch/details.asp?ID=3276 Acesso em: 29 out. 2022

KENSKI, M. Vani. **Das salas de aula aos ambientes virtuais de aprendizagem**. 2005. Disponível em http://www.abed.org.br/congresso2005/por/pdf/030tcc5.pdf Acesso em: 10 set. 2022.

LINS, R.C. ; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI** .Campinas, SP. Ed. Papirus, 1997.

MILIES, César Polcino. **Artigo: Breve história da álgebra abstrata.** São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. 2004.

MORAN, J. M. **Propostas de mudanças nos cursos presenciais com a educação on-line**. Texto apresentado no 11° Congresso Internacional de Educação a Distância. 2003. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/inov.pdf. Acesso em 10 out. 2022.

NOVA ESCOLA. PINHEIRO, F. M..**Plano de aula: Descobrindo a razão no preparo de uma receita**. 2022. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/descobrindo-a-razao-no-preparo-de-uma-receita/1107. Acesso em 30 out 2022.

PEREIRA, S. S.; CHAGAS, Flomar Ambrosina Oliveira. **Tecnologias na educação matemática: desafios da prática docente**. Itinerarius Reflections/UFG, v. 12, n. 01, p. 01-12, 2016. Disponível em: https://www.revistas.ufg.br/rir/article/download/37120/pdf/166344 Acesso em: 12 out. 2022

PITOMBEIRA, J. R. DE SALES. O **Kahoot no Ensino da Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Trabalho de conclusão de curso - Programa De Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, 2020.

PONTE, J. P. (2006). **Números e álgebra no currículo escolar**. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

PONTE, João Pedro da, BRANCO, Neusa, MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. DGIDC, MEC. 2009 Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-BrancoMatos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf. Acesso em 20/08/2022.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP**. São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2001.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista, 2019.** Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wpcontent/uploads/sites/7/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf. Acesso em: 20 jun 2022.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **SARESP, 2019.** Disponível em: http://saresp.vunesp.com.br/resultadosgeralmat.html. Acesso em: 30 jun 2022.

SCHMITT. CRISTINA. A INTEGRAÇÃO DAS TDIC À EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Um estudo sobre o uso de ferramentas digitais e metodologias ativas no ensino e aprendizagem de Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. São Paulo. 2018. Disponível em: https://repo.ifsp.edu.br/bitstream/handle/123456789/247/Integra%C3%A7%C3%A3o.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 15 jul 2022.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e Incertezas Sobre o Currículo**.Saberes e Incertezas Sobre o Currículo. (2013). (n.p.): Penso Editora.

SILVA, V. A. D. **Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas**. Revista Brasileira de Educação, v.3, n.37, jan./abr. 2008.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In: COXFORD, A. F. E SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. The National Council of Teachers of Mathematics. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.