



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# Razão áurea: uma proposta para o ensino de Geometria

**Edvania Portilho Lopes**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT

de 2022

# Razão áurea: uma proposta para o ensino de Geometria

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Edvania Portilho Lopes e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 22 de dezembro de 2022.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Orientador

## **Banca examinadora:**

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa  
Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins  
Prof. Dr. Marcus Vinícius de Andrade Neves

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

### Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

L864r Lopes, Edvania Portilho.  
Razão áurea: uma proposta para o ensino de Geometria [recurso eletrônico] / Edvania Portilho Lopes. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 103 f., il. color., pdf). -- 2022.

Orientador: Márcio Lemes de Sousa.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2022.

Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.

Inclui bibliografia.

1. Proporção áurea. 2. sequência de Fibonacci. 3. Geometria. 4. educação básica. 5. construção geométrica. I. Sousa, Márcio Lemes de, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

### FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: Razão áurea: uma proposta para o ensino de Geometria**

AUTORA: MESTRANDA Edvania Portilho Lopes

Dissertação defendida e aprovada em **22 de dezembro** de **2022**.

### COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

**1. DR. MÁRCIO LEMES DE SOUSA (PRESIDENTE/ORIENTADOR)**

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

**2. DR. TIBÉRIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS (MEMBRO INTERNO)**

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

**3. DR. MARCUS VINÍCIUS DE ANDRADE NEVES (MEMBRO EXTERNO)**

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

**Barra do Garças, 12/01/2023.**



Documento assinado eletronicamente por **TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/01/2023, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCIO LEMES DE SOUSA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 12/01/2023, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCUS VINICIUS DE ANDRADE NEVES, Usuário Externo**, em 12/01/2023, às 12:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufmt.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5436149** e o código CRC **8E3B5D39**.

*Dedico esse trabalho às pessoas que mais amo na vida Meus filhos Kamilla e José Lucas, minha mãe Eugênia, meu pai José Brito (in-memória) meus irmãos Josimar e Edna, meus amigos e colegas que me ajudaram durante o decorrer desse processo, a meus professores que tiveram uma parte muito importante nesse projeto e a Deus por me honrar e me proteger sempre.*

# Agradecimentos

A Deus por todas as coisas que tem me proporcionado durante toda a minha vida. Ao Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa, orientador deste trabalho, pela paciência e dedicação. A todos os professores que contribuíram para minha formação. A toda a minha família pelo carinho e companherismo. As minhas amigas e aos meus colegas pelo apoio e incentivo.

# Resumo

Apresentamos nesse trabalho um pouco da história da razão áurea, mostrando como ela está presente na natureza, na arte, na arquitetura, no corpo humano, nos números de Fibonacci, na geometria plana e também da geometria espacial. Expomos alguns trabalhos sobre a proporção áurea em geometria sagrada. Realizamos alguns cálculos mostrando resultados interessantes em geometria plana. Por fim, elaboramos uma proposta didática envolvendo construções geométricas e razão áurea, com a finalidade de envolver os estudantes da educação básica ao ensino de geometria.

**Palavras chave:** Proporção áurea; sequência de Fibonacci, Geometria, educação básica; construção geométrica.

# Abstract

In this work, we present a bit of the history of the golden ratio, showing how it is present in nature, art, architecture, the human body, Fibonacci numbers, plane geometry and also spatial geometry. We present some works on the golden ratio in sacred geometry. We performed some calculations showing interesting results in plane geometry. Finally, we elaborated a didactic proposal involving geometric constructions and golden ratio, with the purpose of involving basic education students in the teaching of geometry.

**Keywords:** Golden Ratio; Fibonacci sequence, geometry, basic education; geometric construction.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	xii
Introdução	1
<b>1 Um pouco de história</b>	<b>3</b>
1.1 A razão áurea na natureza e na arte. . . . .	8
1.2 A média e extrema razão e a Geometria sagrada . . . . .	16
<b>2 Proporção áurea e a geometria</b>	<b>19</b>
2.1 Definições básicas e propriedades . . . . .	19
2.2 A razão áurea na geometria . . . . .	21
2.2.1 Retângulo áureo . . . . .	21
2.2.2 A espiral áurea . . . . .	38
2.2.3 Ângulo áureo . . . . .	41
2.2.4 Triângulo equilátero . . . . .	43
2.2.5 Triângulo isósceles áureo . . . . .	45
2.2.6 Pentágono . . . . .	55
2.2.7 Relações trigonométricas . . . . .	58
<b>3 Resultados e discussão</b>	<b>63</b>
3.1 Proposta para o ensino médio . . . . .	63
3.1.1 Sequência didática 1: Construções com régua e compasso. . . . .	64

3.1.2 Sequência didática 2: Construções com o Geogebra. . . . .	66
<b>Considerações finais</b>	<b>89</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>91</b>

# Lista de Figuras

1.1	Segmento áureo . . . . .	3
1.2	Partenon . . . . .	4
1.3	Retângulo áureo . . . . .	4
1.4	A pirâmide de Quéops . . . . .	5
1.5	Pentagrama . . . . .	6
1.6	Sequência de retangulos . . . . .	7
1.7	Espiral de Fibonacci . . . . .	8
1.8	Azaleia e hoyá carnosa . . . . .	9
1.9	Jasmim-estrela e petúnia . . . . .	9
1.10	Disposição dos ramos de uma planta . . . . .	10
1.11	Equinácea púrpuras e girassol . . . . .	10
1.12	Concha do mar . . . . .	11
1.13	Monalisa, Leonardo Da Vinci. . . . .	11
1.14	Homem Vitruviano, Leonardo Da Vinci. . . . .	12
1.15	Catedral Notre-Dame . . . . .	13
1.16	Torre Eiffel . . . . .	13
1.17	Taj Mahal . . . . .	14
1.18	Prédio da ONU . . . . .	14
1.19	Logotipo com uso da proporção áurea . . . . .	15
1.20	Logotipo com uso da proporção áurea . . . . .	15
1.21	Proporção áurea no corpo humano . . . . .	16
1.22	Proporção áurea no corpo humano . . . . .	16
1.23	Dodecaedro . . . . .	18
1.24	Icosaedro . . . . .	18
2.1	Segmento áureo . . . . .	19

2.2	Retângulo . . . . .	22
2.3	Retângulo áureo . . . . .	23
2.4	Ângulo cuja a tangente é $\phi$ . . . . .	24
2.5	Diagonais perpendiculares . . . . .	25
2.6	Novo retângulo áureo . . . . .	26
2.7	Sequência de retângulos áureos . . . . .	27
2.8	Retângulos áureos . . . . .	28
2.9	Retângulo áureo contido no quadrado . . . . .	32
2.10	Retângulos áureos . . . . .	35
2.11	Diagonais de retângulos áureos . . . . .	35
2.12	Diagonais de retângulos áureos . . . . .	37
2.13	Espiral áurea . . . . .	39
2.14	Espiral de Fibonacci . . . . .	40
2.15	Ângulo áureo . . . . .	42
2.16	Ângulo áureo . . . . .	42
2.17	Ângulo áureo . . . . .	42
2.18	Razão áurea e triângulo equilátero . . . . .	44
2.19	Triângulo $ABC$ . . . . .	46
2.20	Triângulo isósceles $ABC$ . . . . .	47
2.21	Triângulo isóscele áureo . . . . .	48
2.22	Triângulos áureos . . . . .	49
2.23	Triângulos áureos . . . . .	50
2.24	Triângulos isósceles áureos . . . . .	51
2.25	Triângulos isósceles áureos . . . . .	52
2.26	Espiral áurea . . . . .	53
2.27	Espiral áurea . . . . .	54
2.28	Pentagrama . . . . .	55
2.29	Medidas dos ângulos internos . . . . .	56
2.30	Triângulos isósceles áureos a partir do pentágono . . . . .	57
2.31	Razão trigonométrica no triângulo isósceles áureo . . . . .	58
2.32	Relações trigonométricas do triângulo áureo . . . . .	60
3.1	Abrindo o Geogebra . . . . .	67

3.2	Construindo dodecaedro . . . . .	68
3.3	Construindo dodecaedro . . . . .	69
3.4	Construindo dodecaedro . . . . .	70
3.5	Construindo dodecaedro . . . . .	71
3.6	Construindo dodecaedro . . . . .	72
3.7	Construindo dodecaedro . . . . .	73
3.8	Construindo dodecaedro . . . . .	74
3.9	Construindo o retângulo . . . . .	75
3.10	Construindo o retângulo . . . . .	76
3.11	Construindo icosaedro . . . . .	77
3.12	Construindo icosaedro . . . . .	78
3.13	Construindo icosaedro . . . . .	79
3.14	Construindo icosaedro . . . . .	80
3.15	Construindo icosaedro . . . . .	81
3.16	Construindo icosaedro . . . . .	82
3.17	Construindo Icosaedro . . . . .	83
3.18	Construindo icosaedro . . . . .	84
3.19	Construindo icosaedro . . . . .	85
3.20	Construindo o retângulo . . . . .	86
3.21	Construindo o retângulo . . . . .	87
3.22	Construindo o retângulo . . . . .	88

# Introdução

Razão áurea também conhecida como média e extrema razão; proporção áurea; divina proporção e número de ouro é uma constante real irracional com seu valor arredondado a três casas decimais 1,618. Essa constante real surge ao dividirmos um segmento de modo que o todo está para o maior assim como o maior está para o menor. A razão áurea é denotada pela letra grega  $\phi$  ( lê-se “fi”), em homenagem ao arquiteto e escultor Phídeas (Fídias), que a teria utilizado para a construção de Partenon, o templo da deusa Atena no século V a. C.

A proporção áurea descreve a relação especial encontrada na natureza entre duas partes de um todo. Pode ser descrita em termos de número, comprimento, área, volume e, em até certo ponto, em termos de beleza e consciência, estando presente na estrutura espiral das conchas de alguns seres vivos marinhos, no crescimento das plantas, nas proporções do corpo humano e dos animais, nas pinturas do período renascentistas, nas obras arquitetônicas da antiguidade clássica, da idade média, era moderna e na geometria plana e espacial, como no segmento, no retângulo, em triângulos no pentagrama e nos sólidos de Platão. (Lauro, 2005)

Pavanello (1993), como pesquisadora e professora de matemática observou, e desenvolveu uma pesquisa que evidencia que os estudantes da educação básica a cada ano apresentam menor conhecimento sobre os conceitos geométricos elementares. A pesquisadora aponta ainda que ao participar de um projeto de capacitação para docentes, pode observar que poucos deles incluem geometria em seus temas abordados em sala de aula. Se justificam ainda não se sentirem motivados por não dominarem bem os conceitos e não encontrarem formas diversificadas de desenvolver as atividades em sala. Segundo Pavanello (1993), esse fato é ainda mais reforçado pelos livros didáticos que abordam esse tema quase sempre por último, passando a impressão de que essa é a melhor programação a se cumprir. Motivos como esses comprometem a exploração e aprendizado sobre os con-

ceitos de geometria. Somado a isso, temos o uso do software geogebra que pode mostrar como o número  $\phi$  que aparece em várias figuras geométricas também surge em uma série de elementos da natureza, inserindo o uso das tecnologias nas atividades didáticas.

Diante de tal situação, surgiu a proposta de realizar estudos que possam subsidiar o professor do ensino médio em seu trabalho docente, no que diz respeito ao ensino da geometria por meio da razão áurea, sugerir situações que possam trabalhar esse conceito no ensino da matemática e mostrar as mais importantes propriedades relacionadas a média e extrema razão, pois a partir dos estudos realizados acerca do ensino de geometria e a pesquisa realizada por Pavanello (1993) ficou evidente por diversos motivos, citados acima, a necessidade de promover diferentes formas de abordagens dos conceitos geométricos em sala de aula. No cumprimento desse objetivo, esse trabalho traz algumas considerações, notas históricas sobre o número áureo e as diversas situações em que apresentam essa proporção, tais como, na natureza, na arte, na arquitetura, no corpo humano, na sequência de Fibonacci e nos sólidos de Platão no capítulo 1. No capítulo 2 apresentamos sua definição algébrica e geométrica, seus conceitos, definição e propriedades, assim como também sua presença na geometria plana, realizamos alguns cálculos evidenciando alguns resultados importantes. No capítulo 3, abordamos algumas propostas de ensino da geometria por meio da razão áurea utilizando construções geométricas.

Espera-se que as situações que ilustram cada um desses capítulos sejam capazes de estimular a reflexão e a criatividade dos professores, de modo que estes percebam possibilidades de melhorar sua prática pedagógica no sentido de tornar a abordagem dos conteúdos geométricos mais estimulante e atrativa.

# Capítulo 1

## Um pouco de história

Neste capítulo iremos explorar um pouco da história, da razão áurea e da sua presença na natureza, no corpo humano, na arte, na arquitetura e na geometria.

Razão áurea também conhecida como média e extrema razão; proporção áurea; divina proporção e número de ouro é uma constante real irracional com seu valor arredondado a três casas decimais 1,618, representada pela letra grega  $\phi$ , embora ao longo de sua história tenha assumido outras representações, como por exemplo a letra grega  $\tau$ . Atualmente ela é frequentemente chamada de razão áurea. Essa constante real surge ao dividirmos um segmento de modo que o comprimento todo está para o comprimento maior assim como o comprimento maior está para o comprimento menor.

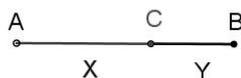


Figura 1.1: Segmento áureo

As aplicações dessa proporção estão nas áreas de designers, matemáticos, médicos, biólogos, artistas clássicos e investidores. Ao longo de sua história tem sido usada para criar beleza em muitas obras clássicas e arquitetura (Meisner, 2018). Como é o caso do Partenon Grego, um templo em Atena, construído no século V a.C. pelo arquiteto e escultor Fídias, é um dos mais famosos exemplos dessas construções, pois possui, na fachada principal, um quase exato retângulo áureo, conforme a figura (1.2):



Figura 1.2: Partenon  
Fonte: Santos (2015)

O retângulo é um paralelogramo tal que seus lados formam ângulos de  $90^\circ$  entre si, possuindo dois lados paralelos verticalmente e dois lados paralelos horizontalmente. Um retângulo é áureo quando a razão entre o lado maior pelo menos é exatamente  $\phi$ .

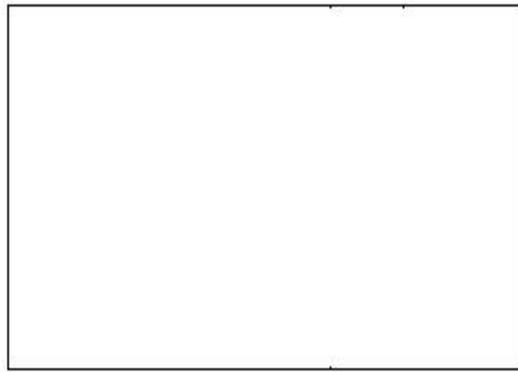


Figura 1.3: Retângulo áureo  
Fonte: Lauro (2005)

Pouco se sabe sobre Euclides de Alexandria, apenas que ele viveu em Alexandria por volta do século III a. C. e que uma das obras mais usadas, estudadas e que contribuiu para a produção de pensamento científico é a sua obra composta por treze livros, os elementos de Euclides contendo definições, postulados e provas cobrindo geometria, teoria dos números e proporções e linhas incomensuráveis aquelas que não podem ser expressas como uma razão de números inteiros. Euclides fez a primeira definição de razão áurea e a definiu como: uma linha reta cortada de modo que esta linha toda está para o maior segmento, assim como o maior segmento está para o menor. E a chamou de média e extrema razão (Linck, 2017).

Mas, anteriormente a isso já existiam construções com medidas bem próximas de

$\phi$ , tais como, o Partenon grego, templo representativo do século de Périclesos os arquitetos responsáveis o construíram de modo que a razão entre a altura e a largura eram muito próximos ao número  $\phi$  (Dunlap, 1997), e a pirâmide de Quéops, construída entre 2551 e 2528 a.C, considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo, logo após a sua construção, sua altura media 280 cúbitos<sup>1</sup> e a medida do lado da base 440 cúbitos . Então, o apótema da base é 220 cúbitos. Aplicando o Teorema de Pitágoras para calcular a medida do apótema da pirâmide:  $g$  é o apótema da pirâmide,  $h$  é a altura da pirâmide e  $m$  é o apótema da base da pirâmide conforme ilustrada a figura (1.4), então:

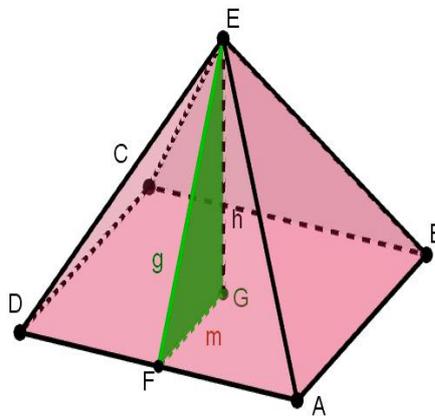


Figura 1.4: A pirâmide de Quéops

$$g^2 = h^2 + m^2,$$

logo

$$g^2 = 280^2 + 220^2,$$

e portanto,

$$g = 356,08.$$

Calculando a razão entre o apótema da pirâmide e o apótema da base da pirâmide, ou seja,  $\frac{g}{m}$ , obteremos:

$$\frac{356,08}{220} \approx 1,618... \approx \phi.$$

A razão áurea também está presente no pentágono regular por toda parte, pois as medidas das diagonais estão em proporção áurea com as medidas dos lados. Além disso,

<sup>1</sup>Cúbitos é uma unidade de medida, sendo o comprimento do maior dos dois ossos do antebraço, tendo na sua extremidade superior uma apófise que forma a saliência do cotovelo

o ponto  $C$  de intersecção de duas diagonais, divide cada uma delas em razão áurea como ilustra a figura (1.5). Nesse caso tanto o pentágono quanto o pentagrama apresentam a razão áurea em suas estruturas.

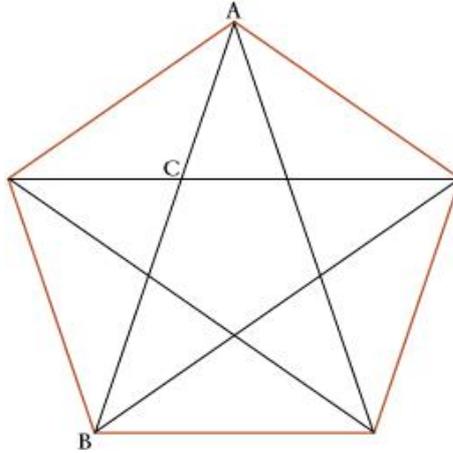


Figura 1.5: Pentagrama  
Fonte: Lauro (2005)

Talvez esse tenha sido o motivo que levou os discípulos de Pitágoras a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita, (Lauro, 2005).

Na história da razão áurea outro matemático importante que contribuiu produzindo muito conhecimento sobre esse assunto foi Leonardo de Pisa, que nasceu em Pisa (1175-1250), que também era conhecido como Leonardo Fibonacci. Ele expandiu os exemplos e aplicações como o problema que o deixou mais conhecido, o caso dos coelhos. Que consiste no seguinte problema: Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano, se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? O problema pode ser entendido com mais clareza por meio da tabela 1.1.

MES	Novo Par.	Par fértil.	Total de Par.
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13

Tabela 1.1: Problema dos coelhos

Ao interpretar a tabela1 temos como resultado final a seguinte sequência

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,$$

que ficou conhecida como a sequência de Fibonacci. Os números de Fibonacci, os quais são definidos como uma sequência em que os dois primeiros valores são iguais a 1 e os termos seguintes são a soma dos dois termos anteriores, estão relacionados com a razão áurea. A sequência de Fibonacci é definida como:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n > 2.$$

A razão entre cada dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$  tende ao número  $\phi$  quando  $n$  aumenta, ou seja, quando tende a infinito. (Anastácio e Ferreira, 2015).

Quando se faz a representação geométrica desses números de Fibonacci, usando-os como a medida dos lados de quadrados, os resultados vão gerando retângulos que se aproximam cada vez mais do retângulo de ouro, o retângulo com a proporção áurea como na figura (1.6).

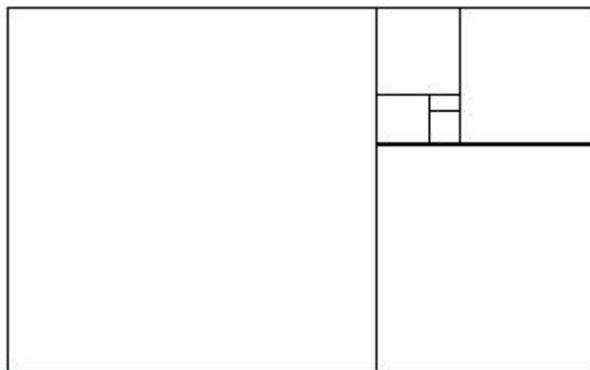


Figura 1.6: Sequência de retângulos  
Fonte: Lauro (2005)

Ao usarmos cada dois vértices opostos de cada quadrado traçando uma curva plana que gira em torno de um ponto central obtemos a espiral logarítmica como na imagem (1.7).

Jacques Bernoulli ( 1654-1705 ) produziu uma obra intitulada Spira Mirabilis (Espiral Maravilhosa) a espiral logarítma cujo nome foi dado a ela por seu comportamento, o raio cresce à medida em que percorremos a curva no sentido horário, esse comportamento

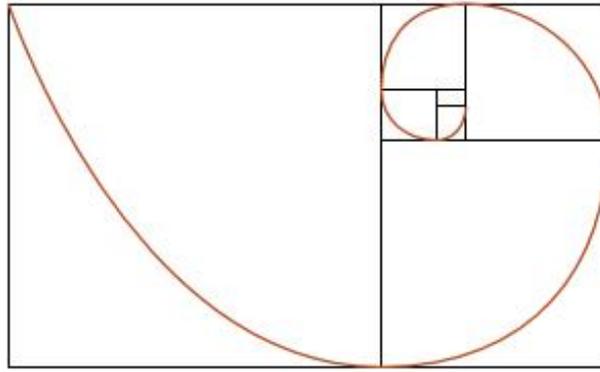


Figura 1.7: Espiral de Fibonacci  
Fonte: Lauro (2005)

descreve uma propriedade fundamental e exclusiva da espiral logarítmica, pois não altera a forma a medida em que seu tamanho aumenta, (Livio, 2008). Isso ocorre com os chifres de carneiros, por exemplo, e também nas presas dos elefantes. Ao girar em ângulos iguais aumenta a distância da origem a cada espiral em proporções iguais, diferentemente da espiral arquimediana, cujo nome se dá em homenagem ao matemático grego Arquimedes ( 287 a.C - 212 a.C. ). A espiral arquimediana é a espiral em que a distância de cada espiral sucessiva é a mesma, ao girar em ângulos iguais a distância não aumenta, como a espiral de um caderno, por exemplo. Já a espiral logarítmica se encontra em várias situações da natureza como nos redemoinhos, furacões e nas galáxias, na próxima seção falaremos com mais detalhes a cerca desses exemplos na natureza e na arte.

## 1.1 A razão áurea na natureza e na arte.

Existem varias situações em que podemos observar a presença da proporção áurea na natureza, como por exemplo, nas plantas, flores, frutas, em animais, no corpo humano, em obras clássicas e em construções.



Figura 1.8: Azaleia e hoya carnosa  
Fonte: Stumpf (2020)

As flores azaleia e hoya carnosa “flor de cera” figura (1.8), ao sobrepor um pentágono estrelado, percebe-se que elas são formadas por proporções áurea. O mesmo pode ser observado em outras flores como, por exemplo, no jasmim-estrela e na petúnia figura (1.9).



Figura 1.9: Jasmim-estrela e petúnia  
Fonte: Nonel (2011)

Algumas plantas se desenvolvem de modo que a soma do número de galhos remanescentes e dos novos formam os termos da sequência de Fibonacci, observe na figura (1.10) que os números da direita representam a sequência de Fibonacci.



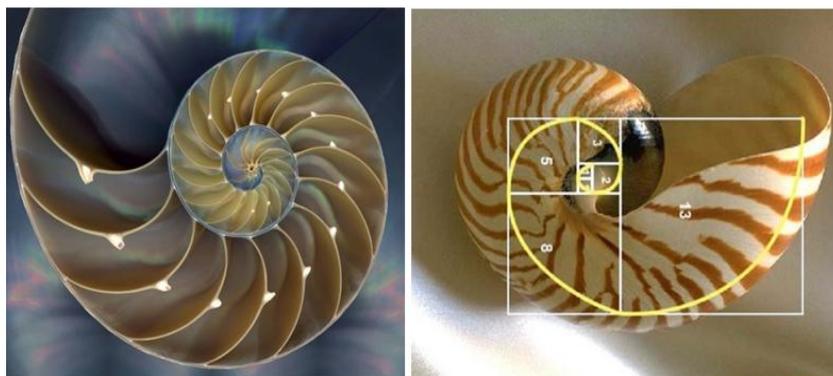


Figura 1.12: Concha do mar  
 Fonte: Coruja (2019)

As obras de Leonardo da Vinci contam com a proporção divina e por isso são tão harmoniosas. A pintura de Monalisa, por exemplo, pode-se construir retângulos áureos sobre a pintura e perceber que foi feita utilizando proporção áurea. Um exemplo, claro é na terceira imagem a direita em que o retângulo esta no rosto de Monalisa, podemos encontrar o número de ouro ao dividir a altura da face pelo comprimento da frente até o queixo.

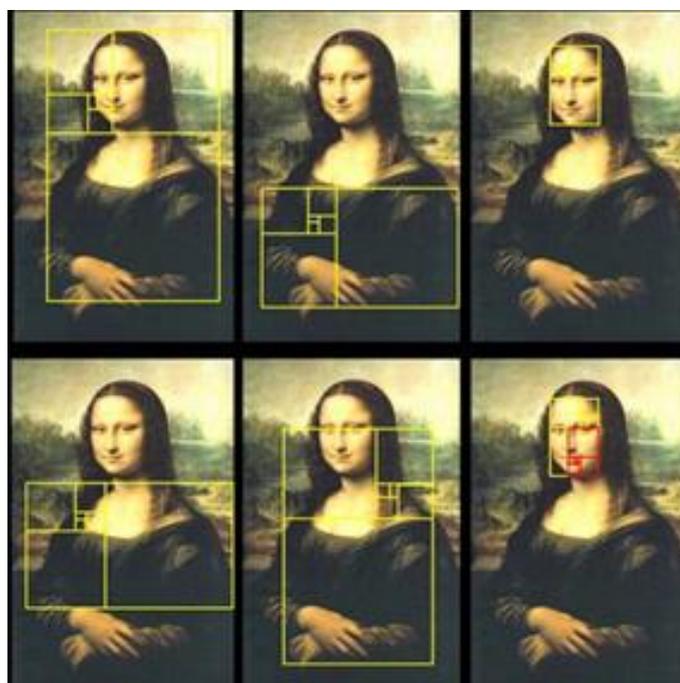


Figura 1.13: Monalisa, Leonardo Da Vinci.  
 Fonte: Conceição (2012)

Em 1492, Leonardo da Vinci, resolveu desenhar o Homem Vitruviano. O desenho era um problema matemático, já que a proposta era um homem de proporções perfeitas

e deveria estar inscrito em um quadrado e em um círculo. Para que fosse inscrito no quadrado, a altura do corpo deveria ser igual ao comprimento dos braços abertos. Para que fosse inscrito no círculo e os braços deveriam estar abertos na altura do crânio e as pernas abertas deveriam tocar o círculo. As medidas obedecem à divina proporção. A altura do chão até o umbigo é a secção Áurea da altura do homem. O mesmo acontece com o cotovelo que divide o braço em segmentos de média e extrema razão (Anastácio e Ferreira, 2015).

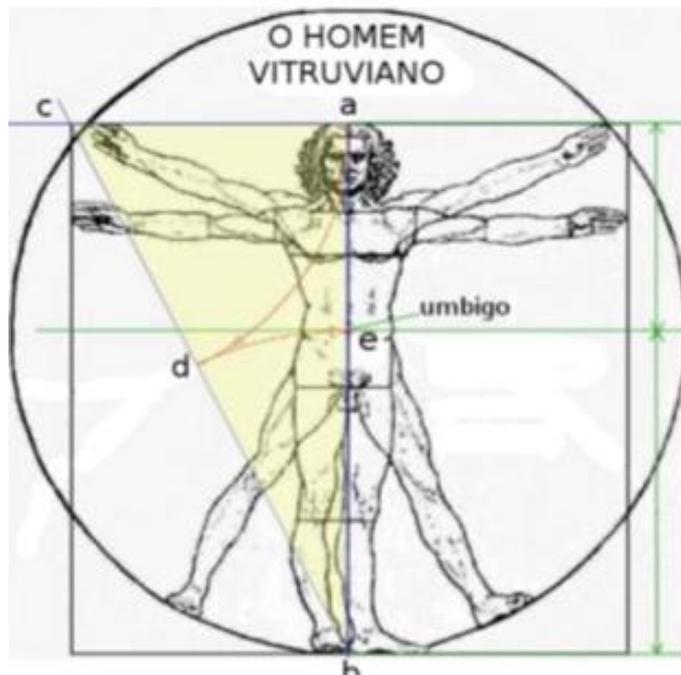


Figura 1.14: Homem Vitruviano, Leonardo Da Vinci.  
Fonte: Says (2014)

O retângulo áurea foi muito utilizado em diversas obras de arquiteturas, como a catedral Notre-Dame. As medidas da fachada da catedral seguem essa proporção. Assim como também na torre Eiffel e no Taj Mahal.

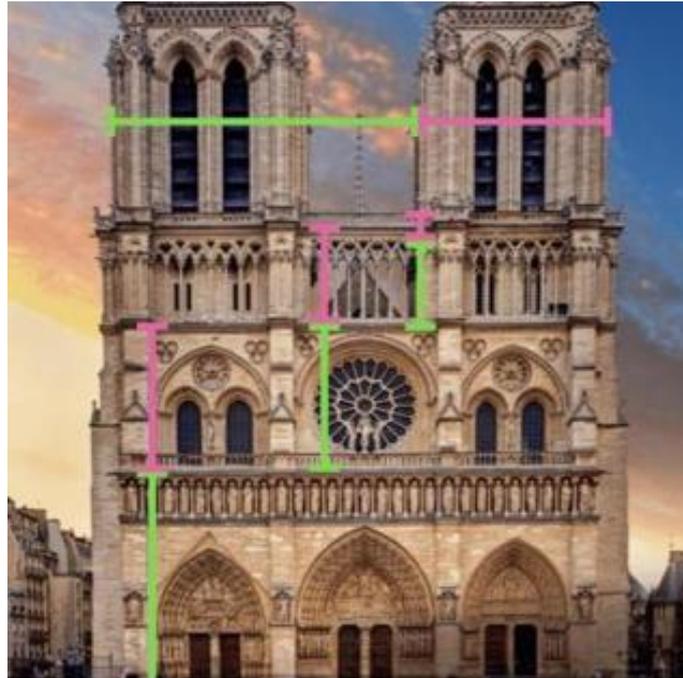


Figura 1.15: Catedral Notre-Dame  
Fonte: Clickideia (2019)

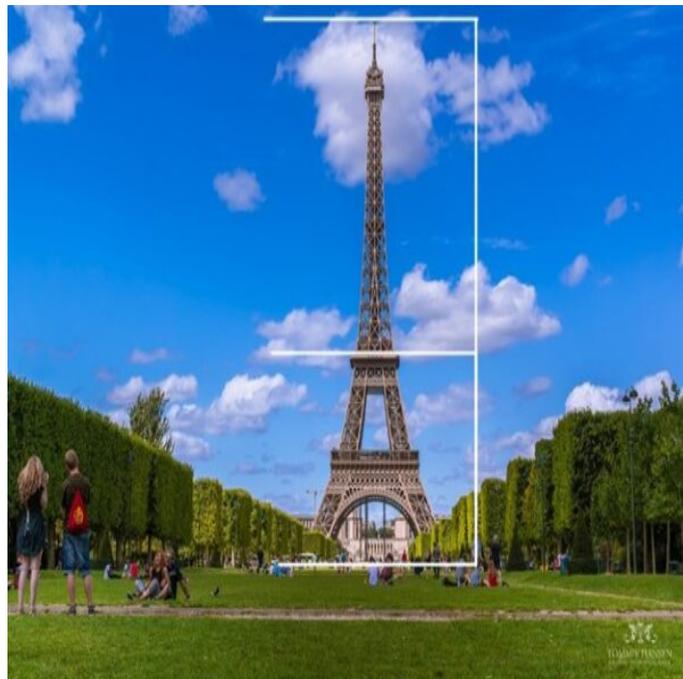


Figura 1.16: Torre Eiffel  
Fonte: Eliogualberto (2020)

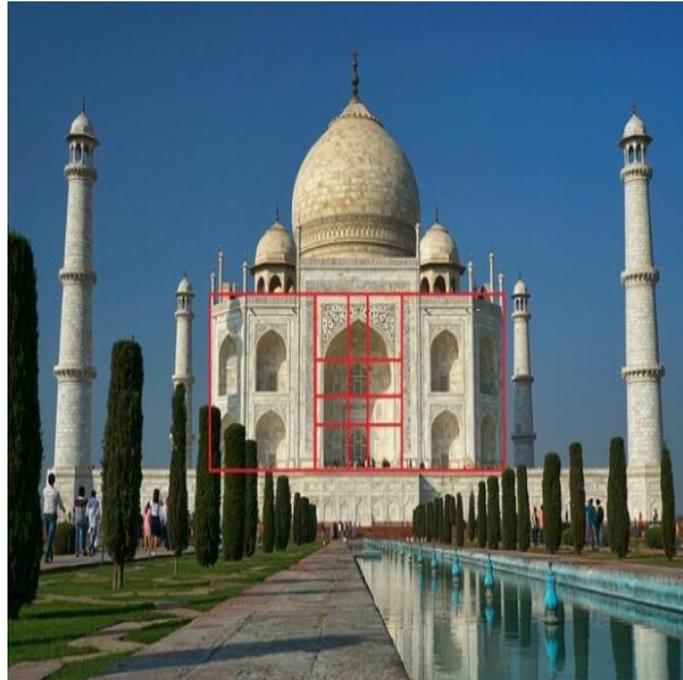


Figura 1.17: Taj Mahal  
Fonte: Eliogualberto (2020)

Ela também está no edifício-sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente.



Figura 1.18: Prédio da ONU  
Fonte: Piropo (2007b)

Frequêntemente usada da área de artes visuais, designers, gráficos, composições de fotos, vídeos, logotipos, interface de usuários entre outros.

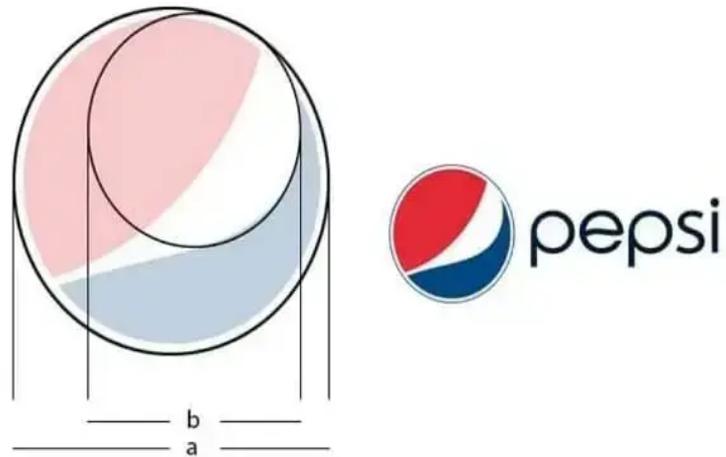


Figura 1.19: Logotipo com uso da proporção áurea  
Fonte: CRUZ (2022)

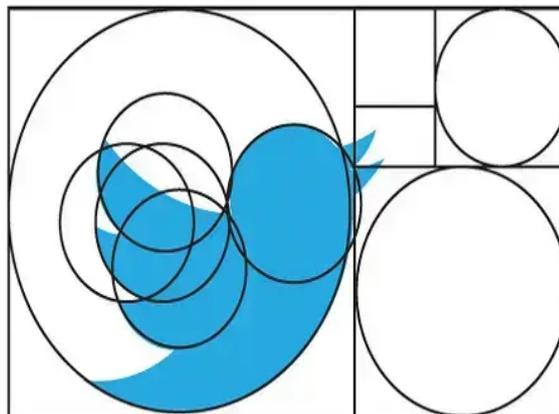


Figura 1.20: Logotipo com uso da proporção áurea  
Fonte: CRUZ (2022)

Um rosto é cada vez mais perfeito se simétrico e se as razões entre as suas medidas estão próximas de  $\phi$ . Assim como a arcada dentária se for respeitada a proporção áurea é possível obter-se um posicionamento correto dos dentes.

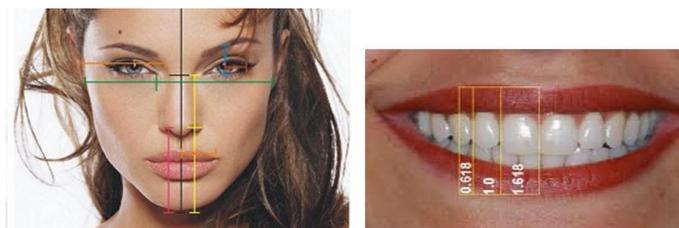


Figura 1.21: Proporção áurea no corpo humano  
Fonte: CRUZ (2022)

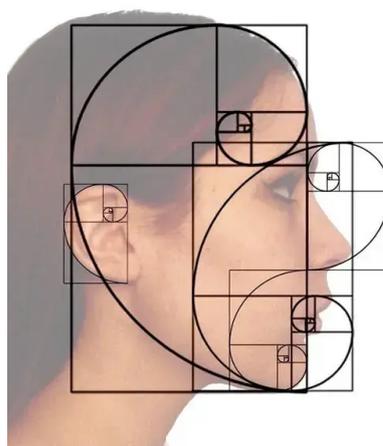


Figura 1.22: Proporção áurea no corpo humano  
Fonte: CRUZ (2022)

## 1.2 A média e extrema razão e a Geometria sagrada

A razão áurea também foi estudada pelo monge Luca Pacioli, de Veneza, que escreveu um tratado “De Divina Proportione” (Sobre a Proporção Divina), em 1509. Tal obra foi ilustrada por Leonardo da Vinci. Ele acreditava que razão áurea era um conteúdo para mentes humanas perspicazes e inquisidoras e todas aquelas que gostam de artes, arquitetura, perspectiva, pintura e filosofia. Pacioli acreditava que a razão áurea deveria ser chamada de proporção divina e enumerava razões para isso como: primeiro, só existia uma razão como esta, assim como Deus é único; segundo, na razão áurea aparece três segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  como a existência da santíssima trindade: Pai, Filho e Espírito Santo; terceiro, o número  $\phi$  ser irracional e a impossibilidade de compreensão de Deus, dentre outras (Lauro, 2005).

Os antigos arquitetos e construtores do Egito e da Grécia Antiga conheciam as proporções naturais e construíaam os templos segundo padrões geométricos que estão na base de formas encontradas na natureza, desde a estrutura do átomo até a formação de galáxias, passando pelas flores e animais. Acreditam que essas formas naturais, todas harmônicas entre si, criam vibrações específicas. E as frequências dessas vibrações sustentam o equilíbrio de tudo que existe no Universo, por isso esta geometria ficou conhecida como geometria sagrada. O termo “geometria sagrada” é usado por arqueólogos, antropólogos e geômetras para englobar as crenças religiosas, filosóficas e espirituais que surgiram em torno da geometria em várias culturas ao longo da história humana.

Vários filósofos buscaram compreender a origem do Universo. Platão viu na geometria espacial a explicação para essa origem. Os sólidos de Platão são:

**Tetraedro;** também chamado de pirâmide triangular, contém 4 faces; 4 vértices e 6 arestas. Cada face é triangular. O tetraedro representa o elemento de fogo.

**Hexaedro;** também chamado de cubo é o segundo dos cinco sólidos platônicos. O hexaedro tem 6 faces quadradas; 8 vértices e 12 arestas. O hexaedro está associado ao elemento terra.

**Octaedro;** possui 8 lados triangulares; 6 vértices e 12 arestas. Simboliza o elemento ar.

**Dodecaedro;** O dodecaedro tem 12 faces; 12 vértices e 30 bordas. Cada face é moldada na forma de um pentágono. O dodecaedro está ligado aos Éteres / Universo.

**Icosaedro;** tem 20 faces; 20 vértices e 30 arestas. Cada face tem a forma de um triângulo equilátero. O icosaedro está associado ao elemento água.

Todos eles são considerados sólidos regulares, pois possuem arestas e suas faces todas congruentes. Além disso, respeitam a relação de Euler, que relaciona o número de vértices, faces e arestas pela fórmula  $V + F = A + 2$ .

Os sólidos de Platão estão ligados à razão áurea, pois essa proporção está nas faces triangulares e pentagonais. Os sólidos icosaedro e dodecaedro, envolvem o pentagrama regular. O dodecaedro tem faces pentagonais, além de que os 12 centros das faces de um dodecaedro regular poderem ser divididos em três grupos de quatro pontos, sendo que os quatro pontos de cada grupo formam um retângulo áureo.

As cinco faces do icosaedro que cercam qualquer vértice determinam um pentágono. Além de que as 20 faces são triângulos equiláteros, e cada par de arestas opostas podem

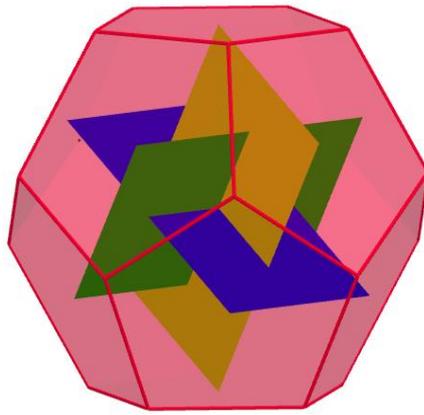


Figura 1.23: Dodecaedro

formar um retângulo áureo.

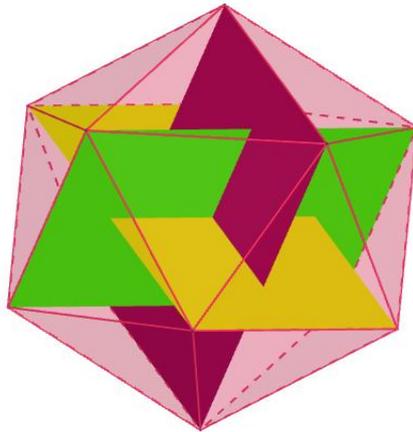


Figura 1.24: Icosaedro

# Capítulo 2

## Proporção áurea e a geometria

Nesse capítulo iremos usar como referência principalmente Posamentier e Lehmann (2011) e seus resultados importantes em geometria.

### 2.1 Definições básicas e propriedades

A razão áurea é definida pelo quociente entre as medidas de dois segmentos específicos da seguinte forma: tomemos um segmento  $AB$  e um ponto  $C$  no seu interior dividindo-o em duas partes no qual a razão entre a medida do segmento e a parte maior é igual a razão entre a maior e a menor parte, ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

A obtenção algébrica do número  $\phi$  é dada pela razão dos segmentos: considerando  $\overline{AC} = x$ ,  $\overline{CB} = y$  temos:

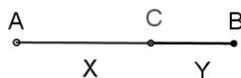


Figura 2.1: Segmento áureo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Aplicando a proporcionalidade obtemos a seguinte equação:

$$x^2 = xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - xy - y^2 = 0. \quad (2.1)$$

Resolvendo a equação pela fórmula resolvente de equações do segundo grau obtemos as seguintes raízes:

$$x = \frac{y(1 + \sqrt{5})}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{y(1 - \sqrt{5})}{2}$$

Considerando,

$$\frac{x}{y} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2},$$

pois como  $x$  e  $y$  são segmentos de retas, não assumem valores negativos assim, calculamos:

$$\phi = \frac{x}{y} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} = 1,61803\dots$$

Como vimos  $\frac{x}{y} = \phi$ , voltando na equação 2.1 e dividindo ambos os membros da igualdade por  $y^2$  temos que:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{xy}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}$$

o que implica que:

$$\phi^2 = \phi + 1. \quad (2.2)$$

Como consequência temos as seguintes propriedades:

**Propriedade 2.1.** *A razão áurea  $\phi$  satisfaz a seguinte*

$$(a) \quad \phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

$$(b) \quad \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Para justificarmos o item a) da propriedade (2.1), basta extrair a raiz quadrada

na equação (2.2), isto é,

$$\phi = \sqrt{1 + \phi}, \quad (2.3)$$

no segundo membro dessa equação substitua  $\phi$  por  $\sqrt{1 + \phi}$ , daí,

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}},$$

fazendo esse procedimento sucessivamente obtemos o resultado desejado.

Para justificarmos o item b) da propriedade (2.1), basta dividirmos ambos os membros da igualdade (2.2) por  $\phi$ , obtendo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}, \quad (2.4)$$

no segundo membro dessa equação substitua  $\phi$  por  $1 + \frac{1}{\phi}$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

fazendo esse procedimento sucessivamente obtemos o resultado desejado.

E ainda, na igualdade (2.2) dividindo ambos os membros por  $\phi^2$  obtemos:

$$1 = \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\phi^2} = 1 - \frac{1}{\phi}$$

o que implica que,

$$\frac{1}{\phi} = \sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}. \quad (2.5)$$

## 2.2 A razão áurea na geometria

### 2.2.1 Retângulo áureo

Entre as figuras geométricas que apresentam a proporção áurea está o retângulo. Como já vimos anteriormente é um paralelogramo, tal que seus lados formam ângulos

internos de  $90^\circ$  entre si, possuindo dois lados paralelos verticalmente e dois lados paralelos horizontalmente. O retângulo é áureo quando a razão entre o lado maior pelo menor é exatamente  $\phi$ .

Seja  $ABCD$  um retângulo como na figura (2.1), tal que dois dos seus lados paralelos medem  $x$  então, podemos encontrar a medida dos outros dois lados também paralelos de modo que o retângulo  $ABCD$  seja áureo,

- (i) se  $x$  for a medida dos lados maiores, isto é,  $\overline{AD} = \overline{BC} = x$ , então dividindo esse valor por  $\phi$  obtemos a medida dos lados menores;
- (ii) se  $x$  for a medida dos lados menores, isto é,  $\overline{AB} = \overline{DC} = x$ , então multiplicando esse valor por  $\phi$  obtemos a medida dos lados maiores;



Figura 2.2: Retângulo

(i) Considere que  $\overline{AD} = \overline{BC} = x$ , então dividindo esse valor por  $\phi$  temos que  $\overline{AB} = \overline{DC} = \frac{x}{\phi}$ , calculando a razão entre os lados,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\frac{x}{\phi}} = \frac{\phi \cdot x}{x} = \phi.$$

(ii) Considere que  $\overline{AB} = \overline{DC} = x$ , então multiplicando esse valor por  $\phi$  temos que  $\overline{AD} = \overline{BC} = x \cdot \phi$ , calculando a razão

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\phi \cdot x}{x} = \phi.$$

Discorreremos sobre esse assunto, porém antes vejamos a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos. Então*

$$\frac{a}{b} = \phi,$$

se, e somente se,

$$\frac{a+b}{a} = \phi.$$

*Demonstração.* Temos que,

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a},$$

então

$$\frac{a}{b} = \phi \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

mas pela equação (2.4)

$$\frac{a}{b} = \phi \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \phi.$$

□

Agora iremos destacar o resultado que envolve a construção do retângulo áureo com suas propriedades. Como consequência da proposição (2.1).

**Proposição 2.2.** *Seja  $ABCD$  um retângulo cuja a razão de seus lados seja áurea, isto é, a razão do lado maior pelo lado menor seja  $\phi$ , se o dividirmos em um quadrado (um quadrado cuja medida de seu lado seja a medida do menor lado do retângulo  $ABCD$ ) e um retângulo, o novo retângulo gerado está também em razão áurea.*

*Demonstração.* Seja  $a$  a medida do lado menor do retângulo  $ABCD$  e seja  $a+b$  a medida do maior lado, então, conforme a figura (2.3), o novo retângulo gerado são de lados  $a$  e  $b$  e por hipótese temos que

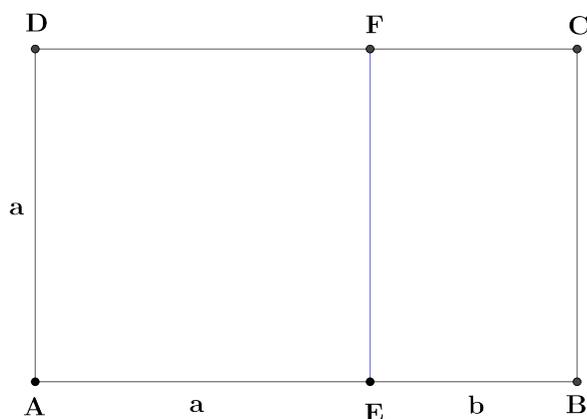


Figura 2.3: Retângulo áureo

$$\frac{a+b}{a} = \phi,$$

então pela proposição (2.1) temos que

$$\frac{a}{b} = \phi.$$

□

O ângulo que destacaremos no próximo resultado é o ângulo cuja tangente é  $\phi$ . Como consequência da proposição (2.2) temos o seguinte resultado:

**Corolário 2.1.** *Seja  $ABCD$  um retângulo áureo de diagonal  $AC$ , conforme a figura (2.4), seja  $\beta$  a medida do ângulo  $\angle ACB$  então*

$$\operatorname{tg} \beta = \phi.$$

*Demonstração.* Conforme a figura (2.4), temos que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a+b}{a} = \phi.$$

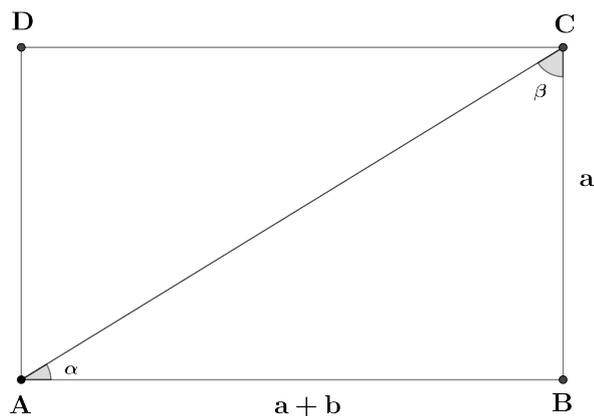


Figura 2.4: Ângulo cuja a tangente é  $\phi$

□

A partir de um retângulo áureo podemos construir uma sequência de retângulos áureos.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $ABCD$  e  $EBCF$  os retângulos áureos como na proposição (2.2), com diagonais  $AC$  e  $EB$  respectivamente figura (2.5). Então:*

- (i) *As diagonais  $AC$  e  $FB$  são perpendiculares;*
- (ii) *O retângulo cujo um dos lados maiores é  $FC$  (lado menor do retângulo  $EBCF$ ) e um dos vértices do outro lado paralelo a este é a interseção da diagonal  $AC$  e o lado  $EF$ , do retângulo menor, ponto  $G$  na figura (2.6) também é áureo. Além disso, o retângulo  $EBHG$  restante contido no retângulo  $EBCF$  é um quadrado.*

*Demonstração.* Primeiramente provaremos (i). Para isto, iremos usar as notações do corolário (2.1), ou seja,  $\beta$  como sendo o ângulo cuja a tangente é  $\phi$  e  $\alpha$  o seu complemento.

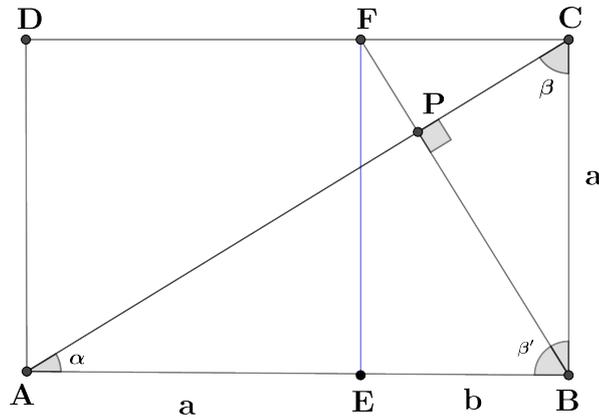


Figura 2.5: Diagonais perpendiculares

Seja  $\beta'$  a medida do ângulo  $\angle EBF$ . Como o triângulo  $EBF$  é retângulo em  $E$  figura (2.5), temos que

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \frac{a}{b},$$

como o retângulo  $EBCF$  é áureo, temos que

$$\operatorname{tg} \beta' = \phi,$$

ou seja,  $\beta' = \beta$ . Devido o ângulo  $\angle PBC$  ser complementar ao ângulo  $\angle EBF$ , segue que sua medida é  $\alpha$ , então como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  concluímos que a medida do ângulo  $\angle BPC$  é  $90^\circ$ , provando a afirmação (i).

Para o item (ii), seja  $GHCF$  o retângulo citado, conforme a figura (2.6) um dos

lados já conhecemos sua medida  $b$  e denotaremos a medida do outro lado de  $y$ , isto é,  $b = \overline{CF}$  e  $y = \overline{HC}$ .

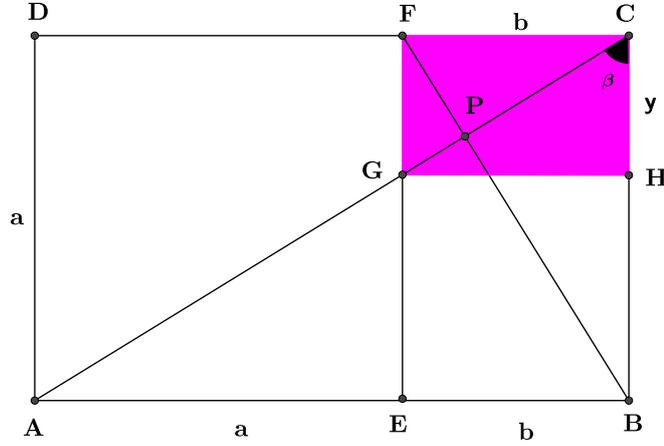


Figura 2.6: Novo retângulo áureo

Neste caso, temos que o triângulo  $GHC$  é retângulo em  $H$  e, além disso, a medida da tangente do ângulo  $\angle GCH$  é  $\phi$ , que estamos denotando por  $\beta$ . Então temos que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{GH}}{\overline{HC}} = \frac{b}{y},$$

ou seja,

$$\frac{b}{y} = \phi, \quad (2.6)$$

provando a primeira parte de (ii). Agora para segunda parte, observe que o retângulo  $EBHG$ , tem lado cuja as medidas são  $b$  e  $a - y$ , isto é,  $\overline{EB} = b$  e  $\overline{BH} = a - y$ , então temos:

$$\frac{a - y}{b} = \frac{a}{b} - \frac{y}{b}, \quad (2.7)$$

mas por hipótese,

$$\frac{a}{b} = \phi. \quad (2.8)$$

Substituindo as equações (2.6), (2.8) e (2.4) em (2.7), obtemos

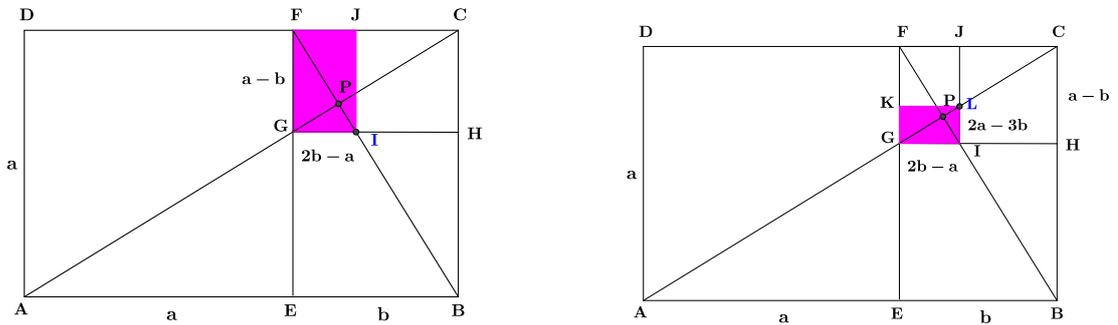
$$\frac{a - y}{b} = \phi - \frac{1}{\phi} = 1,$$

ou seja,

$$a - y = b.$$

□

Usando de forma indefinida o teorema (2.1), construímos uma sequência de novos retângulos áureos todos contidos no retângulo áureo inicial conforme destacaremos nas figuras (2.7(a)) e (2.7(b)).



(a) Retângulo  $FGIJ$ , com  $I = FB \cap GH$

(b) Retângulo  $GILK$ , com  $L = AC \cap IJ$

Figura 2.7: Sequência de retângulos áureos

Além disso, um dos vértices do novo retângulo áureo é a interseção de uma das diagonais com o retângulo áureo menor já construído, um dos lados do novo retângulo áureo é o menor lado do retângulo anterior e o outro lado é a diferença dos dois lados do retângulo anterior. Se usarmos as notações estabelecidas nos resultados anteriores para a construção dos retângulos áureos, teremos de forma consecutiva, os lados dos retângulos áureos dados abaixo:

$$a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, \dots \quad (2.9)$$

Então seguindo no raciocínio acima, segue uma ilustração da sequência de retângulos áureos na figura (2.8)

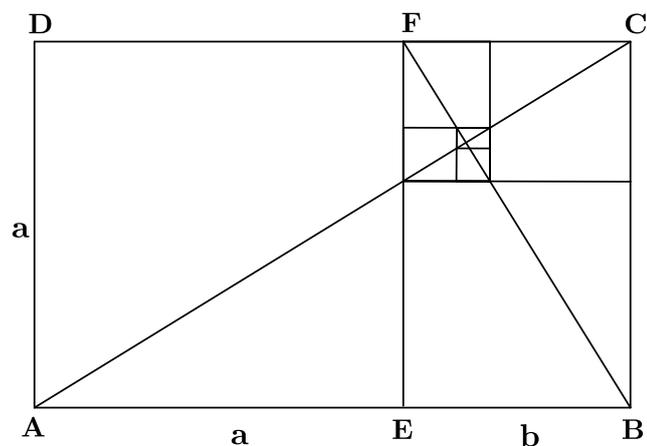


Figura 2.8: Retângulos áureos

**Teorema 2.2.** *Dadas as sequências de retângulos como nos resultados anteriores, e seja o retângulo maior cuja a medidas de seus lados são  $a$  e  $a+b$ , também como nos resultados anteriores, então:*

- (i) *Os maiores lados dos triângulos retângulos trassados a partir da diagonal dos retângulos áureos são dados pela sequência*

$$x_n = \frac{a}{\phi^{n-1}}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots$$

- (ii) *A sequência de retângulos áureos converge para um ponto.*

*Demonstração.* Inicialmente, observe que pela proposição (2.2) temos

$$\frac{a}{b} = \phi \Leftrightarrow b = \frac{a}{\phi},$$

daí,

$$a + b = a + \frac{a}{\phi} = a \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right)$$

mas,

$$\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi},$$

e daí, temos

$$a + b = a\phi.$$

Agora, como vimos na observação acima, resultado (2.9), a sequência de lados dos retângulos áureos pode ser dada pela seguinte sequência de recorrência <sup>1</sup>.

$$\begin{cases} x_0 = a\phi \\ x_1 = a \\ x_n = x_{n-2} - x_{n-1}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Lembremos que para uma equação de recorrência linear, podemos encontrar a expressão para tal, isto é existem constantes  $x$  e  $y$ , tais que,

$$x_n = yx^n.$$

Substituindo esta informação na terceira equação de (2.10), obtemos

$$yx^n = yx^{n-2} - yx^{n-1}, \quad (2.11)$$

mas, neste caso, como queremos uma sequência não nula, então dividindo a equação (2.11) por  $yx^{n-2}$ , obtemos

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (2.12)$$

resolvendo a equação do segundo grau obtemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mas lembremos que

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

logo as raízes da equação (2.12), são

$$\frac{1}{\phi} \text{ e } -\phi.$$

Agora, a solução geral de equação de recorrência linear é dada por

$$x_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n,$$

---

<sup>1</sup>O leitor que tenha interesse em ver mais sobre esse conceito verifique, por exemplo, CARVALHO e MORGADO (2014)

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que são determinadas pela condição inicial da sequência de recorrência, e  $x_1, x_2$  são as raízes do polinômio gerado após a simplificação. Portanto a sequência de recorrência é dada por

$$x_n = c_1 \left(\frac{1}{\phi}\right)^n + c_2 (-\phi)^n.$$

daí temos que

$$a\phi = x_0 = c_1 + c_2 \quad \text{e} \quad a = x_1 = \frac{c_1}{\phi} - c_2\phi,$$

ou seja,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = a\phi \\ \frac{c_1}{\phi} - c_2\phi & = a \end{cases}$$

se multiplicarmos a primeira equação do sistema por  $\phi$  obtemos:

$$\begin{cases} \phi c_1 + \phi c_2 & = a\phi^2 \\ \frac{c_1}{\phi} - c_2\phi & = a, \end{cases} \tag{2.13}$$

somando a primeira e a segunda equação do sistema (2.13), obtemos

$$\left(\phi + \frac{1}{\phi}\right)c_1 = (\phi^2 + 1)a \Leftrightarrow \frac{\phi^2 + 1}{\phi} \cdot c_1 = (\phi^2 + 1)a,$$

ou seja,

$$c_1 = a\phi,$$

daí, concluímos que  $c_2 = 0$ . Portanto

$$x_n = a\phi \left(\frac{1}{\phi}\right)^n$$

ou seja,

$$x_n = \frac{a}{\phi^{n-1}}.$$

Para a prova de (ii), observe que a sequência que descreve os lados dos retângulos

áureos, é uma progressão geométrica, de razão

$$0 < \frac{1}{\phi} < 1,$$

que converge para zero, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0. \quad (2.14)$$

Para fixarmos as ideias, na construção dos retângulos áureos, iremos considerar no primeiro retângulo o lado maior na horizontal e o lado menor na vertical. Então observemos que  $x_n$  com  $n$  par está na horizontal, e com  $n$  ímpar está na vertical. Neste caso, como os retângulos estão todos contidos nos retângulos antecessores (por construção), se colocarmos no sistema de coordenadas teremos uma sequência de intervalos encaixados na horizontal e na vertical, quando projetamos as suas medidas na horizontal e vertical respectivamente. Além disso, como tanto na horizontal quanto na vertical a medida dos comprimentos tendem a zero, então pelo teorema dos intervalos encaixados<sup>2</sup>, existe na horizontal e na vertical pontos  $x_0$  e  $y_0$  contidos em tais intervalos.

Portanto, existe um ponto  $P = (x_0, y_0)$ , no sistema de coordenadas citado, contido em todos os retângulos, e isto concluí a demonstração.

□

No próximo resultado mostraremos a aparição do retângulo áureo em um quadrado.

**Teorema 2.3.** *Seja  $ABCD$  um quadrado, e sejam  $P, Q, R, S$  pontos que estão, respectivamente, contidos nos lados  $AB, BC, CD, DA$  conforme a figura (2.9), tais que dividem os lados na razão áurea, isto é,*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{DS}} = \phi,$$

*então  $PQRS$  é um retângulo áureo.*

---

<sup>2</sup>Para maiores detalhes sobre tal resultado ver Muniz Neto (2015)

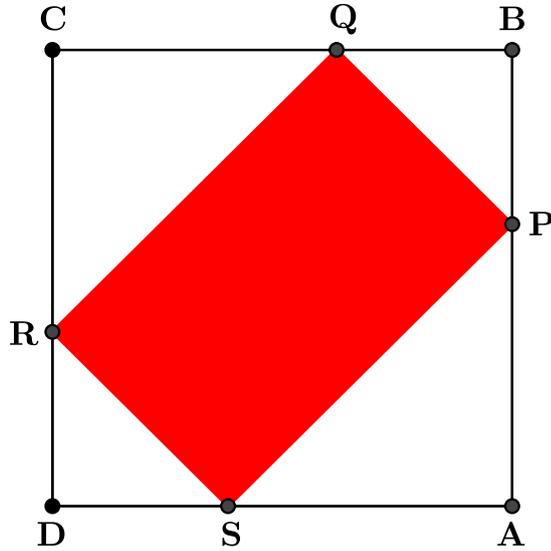


Figura 2.9: Retângulo áureo contido no quadrado

*Demonstração.* Seja  $\overline{BP} = x$  e  $l$  o lado do quadrado, então

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = l - x. \quad (2.15)$$

Lembremos que, por hipótese,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \phi \Leftrightarrow \overline{AP} = \phi \overline{BP} = x\phi, \quad (2.16)$$

substituindo (2.16) em (2.15), obtemos:

$$x\phi = l - x,$$

ou seja,

$$x = \frac{l}{1 + \phi}.$$

Lembremos que  $\phi^2 = 1 + \phi$ , logo concluímos que

$$\overline{BP} = \frac{l}{1 + \phi} \text{ e } \overline{AP} = \frac{l\phi}{1 + \phi} = \frac{l}{\phi}.$$

Procedendo de modo análogo, pois

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = l,$$

temos que

$$\overline{QB} = \overline{DR} = \overline{DS} = \frac{l}{1 + \phi} \text{ e } \overline{CQ} = \overline{CR} = \overline{AS} = \frac{l}{\phi}. \quad (2.17)$$

De acordo com a figura (2.9), temos que o triângulo  $APS$  é retângulo em  $A$  e das informações acima,

$$\overline{AP} = \overline{AS} = \frac{l}{\phi},$$

neste caso, concluímos que o triângulo  $APS$  é retângulo isóceles então

$$\hat{A}PS = \hat{A}SP = 45^\circ.$$

De maneira análoga, temos que o triângulo  $BPQ$  é retângulo isósceles, visto que

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{l}{1 + \phi},$$

neste caso, concluímos que o triângulo  $BPQ$  é retângulo isóceles então

$$\hat{B}PQ = \hat{B}QP = 45^\circ.$$

Logo, pelo fato do ângulo  $\angle BPA$  ser um ângulo raso, temos que

$$\hat{Q}PS = 90^\circ.$$

Procedendo de modo análogo, concluímos que

$$\hat{P}QR = \hat{Q}RS = \hat{R}SP = 90^\circ,$$

concluindo que  $PQRS$  é um retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo  $APS$ ,

temos que

$$\begin{aligned}\overline{PS}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AS}^2 \\ &= \frac{l^2}{\phi^2} + \frac{l^2}{\phi^2} \\ &= \frac{2l^2}{\phi^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{PS} = \overline{RQ} = \frac{l}{\phi}\sqrt{2},$$

e aplicando, novamente, o Teorema de Pitágora no triângulo  $BPQ$ , concluímos que

$$\overline{BQ} = \overline{RS} = \frac{l}{1+\phi}\sqrt{2}.$$

Então, fazendo a razão entre os lados não oposto obtemos:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{RS}} = \frac{\frac{l}{\phi}\sqrt{2}}{\frac{l}{1+\phi}\sqrt{2}} = \frac{\phi+1}{\phi} = \phi.$$

□

Em seguida, apresentaremos uma aplicação do teorema (2.1).

**Proposição 2.3.** *Seja  $ABCD$  um retângulo áureo de diagonal  $AC$  e cuja a medida de seus lados sejam  $\overline{AB} = a$   $\overline{BC} = a + b$ , e sejam  $ABGH$  e  $CDEF$ , retângulos áureos menores contidos no retângulo  $ABCD$  conforme a figura (2.10), com medidas, respectivamente,  $\overline{AB} = a$   $\overline{BG} = b$  e  $\overline{CD} = a$   $\overline{FC} = b$ . Sejam também  $I$  e  $J$ , as interções da diagonais,  $AC$  e  $BH$ ,  $AC$  e  $FD$ , também respectivamente. Então*

$$\overline{BJ} = \overline{JI} = \overline{ID} = a \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 1}}.$$

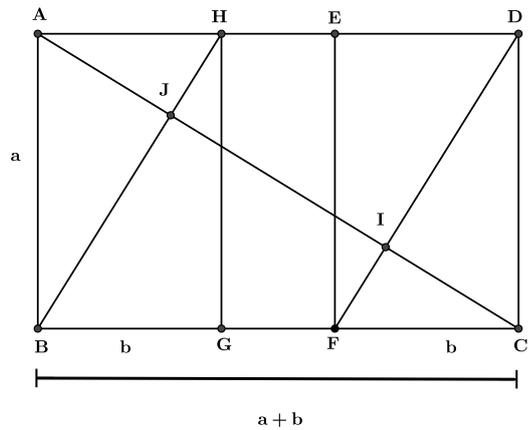


Figura 2.10: Retângulos áureos

*Demonstração.* Denotemos  $\overline{BJ} = x$ ,  $\overline{JI} = y$  e  $\overline{ID} = z$ . Iremos provar primeiramente que  $x = z$ .

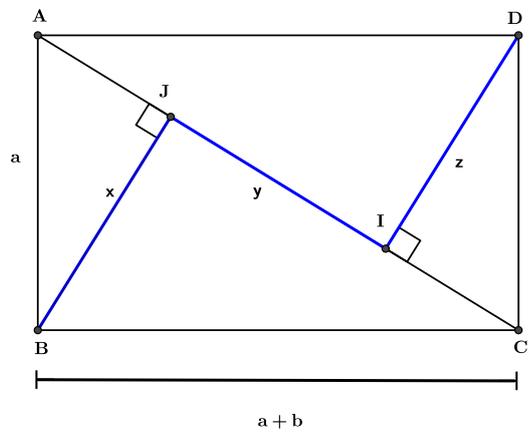


Figura 2.11: Diagonais de retângulos áureos

Para isto observe, conforme a figura (2.11), se denotarmos  $\beta$  a medida do ângulo  $\angle BAJ$  temos que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a+b}{a} = \phi,$$

e como o lado  $AB$  é paralelo a  $DC$ , segue que a medida do ângulo  $\angle ICD$  também é  $\beta$ , daí concluímos que os triângulos  $ABJ$  e  $CDI$  são congruentes, pelo caso de congruência

$LAAO$ , (pelo teorema 2.1 as diagonais dos retângulos áureos são perpendiculares) e portanto  $x = z$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

e como

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = a + b \quad \text{e} \quad a + b = a\phi,$$

temos que

$$\overline{AC} = a\sqrt{1 + \phi^2},$$

note que,

$$\overline{BD} = a\sqrt{1 + \phi^2},$$

pois, as diagonais de um retângulo são iguais.

Para facilitar alguns ajustes de notação iremos denotar, a princípio, a medida da diagonal  $AC$  por  $d$ . Seja  $M$  a interseção das diagonais do retângulo  $ABCD$ , então  $M$  é o ponto médio de tais diagonais, conforme a figura (2.12). Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $AJB$  obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{BJ}^2$$

ou seja,

$$a^2 = \left(\frac{d-y}{2}\right)^2 + x^2,$$

isto é,

$$\frac{d^2}{4} - \frac{dy}{2} + \frac{y^2}{4} + x^2 = a^2. \quad (2.18)$$

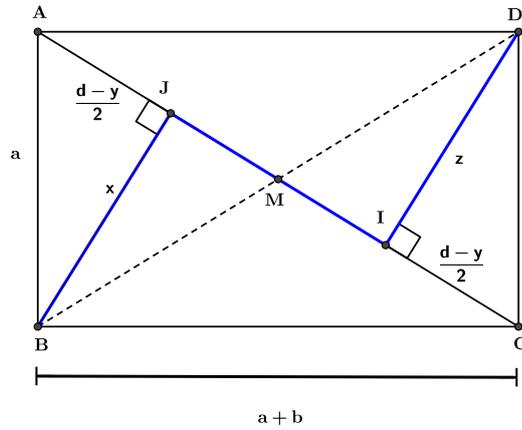


Figura 2.12: Diagonais de retângulos áureos

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $MID$ , obtemos

$$\overline{MD}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{DI}^2$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{4} = \frac{y^2}{4} + z^2,$$

como  $x = z$ , temos que,

$$\frac{y^2}{4} + x^2 = \frac{d^2}{4}. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.19) em (2.18) e multiplicando (2.19) por 2, obtemos

$$\frac{d^2}{2} - \frac{dy}{2} = a^2,$$

ou seja,

$$y = \frac{d^2 - 2a^2}{d},$$

como

$$d = a\sqrt{1 + \phi^2},$$

temos que,

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{a^2(1 + \phi^2) - 2a^2}{a\sqrt{1 + \phi^2}} \\
 &= \frac{a(\phi^2 - 1)}{\sqrt{1 + \phi^2}} \\
 &= a \frac{\phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Substituindo,  $d$  e  $y$  (encontrado em 2.20), em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{a^2(1 + \phi^2)}{4} - \frac{\frac{a^2\phi^2}{1 + \phi^2}}{4} \\
 &= \frac{a^2}{4} \cdot \left( \frac{(1 + \phi^2)^2 - \phi^2}{1 + \phi^2} \right) \\
 &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1 + \phi^2 + \phi^4}{1 + \phi^2},
 \end{aligned}$$

lembramos que

$$\phi^2 = 1 + \phi \Rightarrow \phi^4 = (1 + \phi)^2,$$

daí temos

$$x^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1 + \phi^2 + (1 + \phi)^2}{1 + \phi^2},$$

ou seja,

$$x^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2 + 2\phi + 2\phi^2}{1 + \phi^2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2(1 + \phi) + 2\phi^2}{1 + \phi^2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4\phi^2}{1 + \phi^2}.$$

Portanto,

$$x = a \frac{\phi}{\sqrt{1 + \phi^2}} = y,$$

concluindo a demonstração. □

### 2.2.2 A espiral áurea

Um retângulo áureo tem a interessante propriedade de que, se o dividirmos num quadrado e num retângulo, o novo retângulo será também áureo. Repetindo este processo infinitamente, unindo com um arco os cantos dos quadrados gerados, obtém-se uma espiral denominada espiral áurea, traçando um quarto de círculo de raio igual ao lado de cada quadrado seguindo na ordem do maior para o menor no sentido anti-horário constrói-se

a espiral dourada como na figura (2.13).

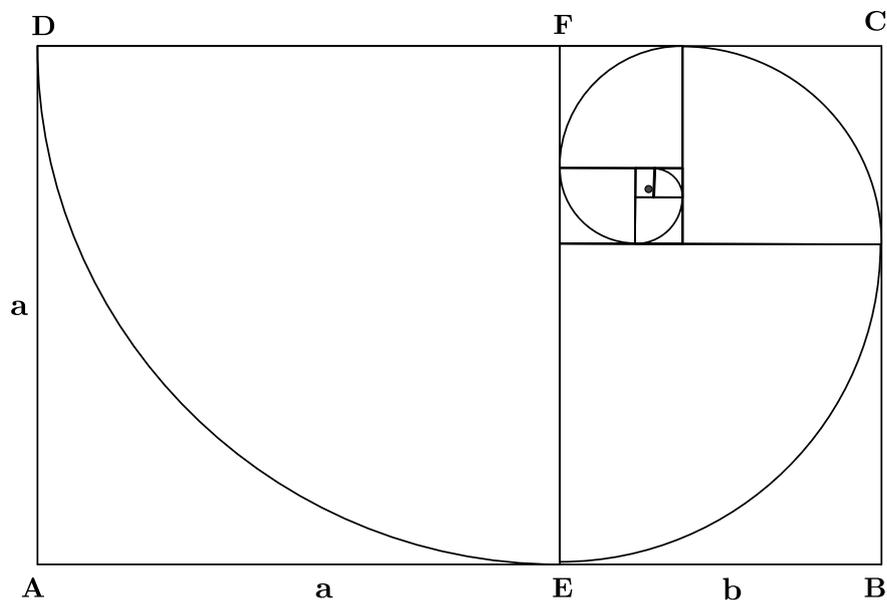


Figura 2.13: Espiral áurea

Se considerarmos a sequência de retângulos quase áureos tendo como medida dos lados os números de Fibonacci e traçarmos um quarto de círculo de raio igual ao lado de cada quadrado (as medidas dos lados dos quadrados sendo os números de Fibonacci) seguindo a ordem do maior para o menor sempre no sentido anti-horário construiremos uma espiral semelhante a espiral dourada figura (2.14), por vezes denotada como a espiral de Fibonacci (Posamentier e Lehmann, 2011).

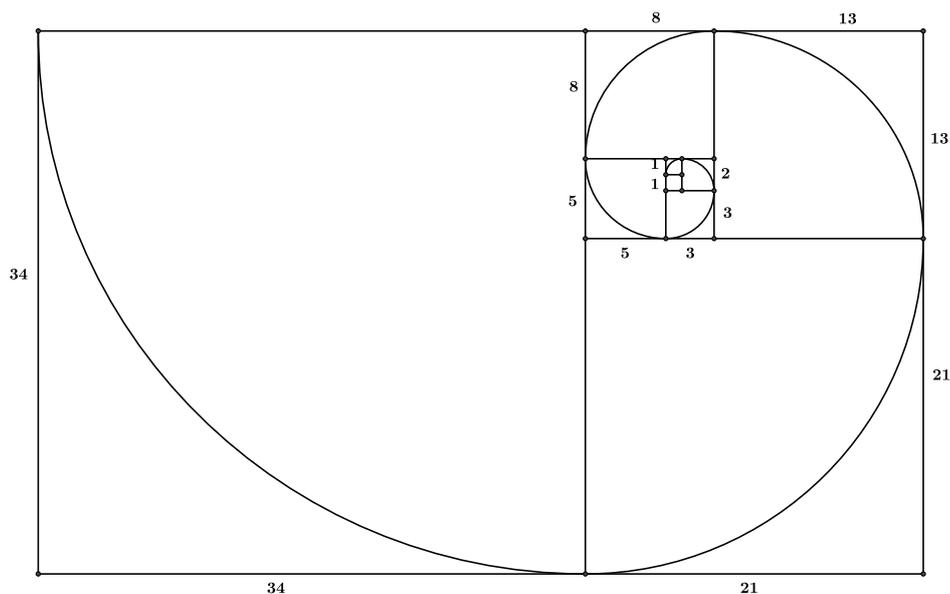


Figura 2.14: Espiral de Fibonacci

Podemos obter o comprimento da espiral áurea. Para isto, observemos que cada pedaço de espiral está contida em um quadrado e representa um quarto de círculo, a medida de um quarto de círculo de raio  $r$  é dada por:

$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}.$$

Assim, no primeiro quadrado ( $AEFD$  de lado  $a$ ) figura 2.13, o comprimento do arco de círculo é  $\frac{\pi a}{2}$ , pelo teorema (2.2)  $a = \frac{a}{\phi^0}$ , segue que o o comprimento da espiral nesse primeiro quadrado é

$$\frac{\pi a}{2} \cdot \frac{1}{\phi^0}.$$

No segundo quadrado de lado  $b$  o comprimento de um quarto de círculo é de  $\frac{\pi b}{2}$ , mas como  $b = \frac{a}{\phi^1}$  pelo teorema (2.2), segue que o comprimento da espiral no segundo quadrado é

$$\frac{\pi a}{2} \cdot \frac{1}{\phi^1}.$$

No terceiro quadrado (de lado  $a - b$ ) temos que o comprimento do quarto arco de círculo, pelo teorema (2.2), é

$$\frac{\pi a}{2} \cdot \frac{1}{\phi^2}.$$

Efetuando esses cálculos sucessivamente para cada quadrado e fazendo a soma dos comprimentos de todos os arcos temos a seguinte sequência,

$$\frac{\pi a}{2} \left( \frac{1}{\phi^0} + \frac{1}{\phi^1} + \frac{1}{\phi^2} + \dots + \frac{1}{\phi^n} + \dots \right)$$

que é uma progressão geométrica  $(PG)^3$  de razão  $\frac{1}{\phi}$ , como a soma dos termos de uma  $(PG)$  infinita é dada por,

$$a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

em que  $a_1$  é o primeiro termo e  $q$  é a razão da  $(PG)$ . Como  $0 < \frac{1}{\phi} < 1$ , segue que,

$$\frac{1}{\phi^0} + \frac{1}{\phi^1} + \frac{1}{\phi^2} + \dots + \frac{1}{\phi^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi}}.$$

Logo, sendo  $C$  o comprimento da esperial áurea segue que,

$$C = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{1}{\phi^0} + \frac{1}{\phi^1} + \frac{1}{\phi^2} + \dots + \frac{1}{\phi^n} + \dots \right) = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi}} \right) = \frac{\pi a}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\phi^2}} = \frac{\pi a}{2} \cdot \phi^2,$$

sendo que a última igualdade é obtida pela equação (2.5), logo concluímos que,

$$C = \frac{\pi a}{2} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 4,112398173 \cdot a$$

### 2.2.3 Ângulo áureo

Construindo um círculo a partir de um segmento áureo o arco menor mede  $137,5^\circ$  que é conhecido na literatura como o ângulo áureo. Este ângulo é encontrado na organização de pétalas e brotos de flores como o lótus, por exemplo, assim como também em folhas e caules de plantas como a echeveria. O ângulo áureo é utilizado pelas plantas para a máxima exposição da luz solar e da chuva, aumentando a eficiência da tofossíntese, gerando melhor umidade para as raízes possibilitando melhor e mais eficiente crescimento (Meisner, 2018).

---

<sup>3</sup>O leitor que tenha mais interesse em ver a cerca das progressões geométricas basta consultar CARVALHO e MORGADO (2014)

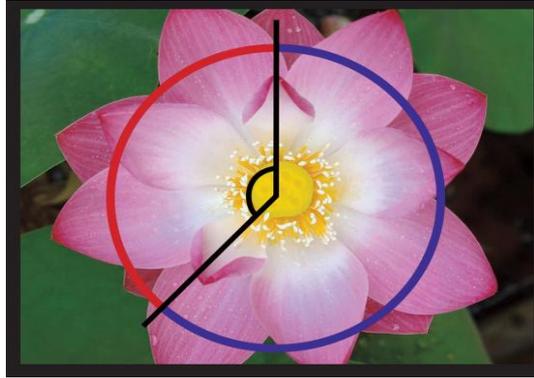


Figura 2.15: Ângulo áureo  
 Fonte: Meisner (2018)



Figura 2.16: Ângulo áureo  
 Fonte: Meisner (2018)

Considerando o segmento áureo cujo o comprimento do maior segmento é  $x$  e o comprimento do segmento menor é  $y$ , figura (2.1), contrói-se o seguinte círculo como na figura (2.17).

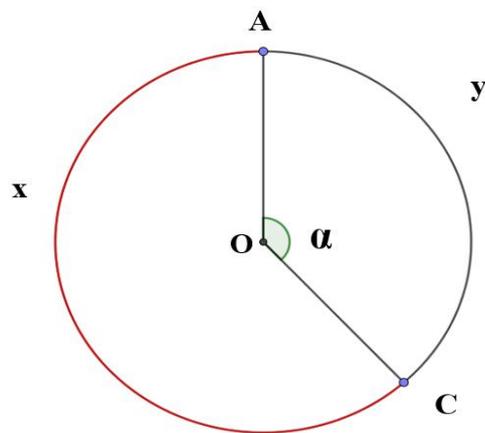


Figura 2.17: Ângulo áureo

Como o arco total é áureo vale a equação quadrática (2.1), dividindo todos os membros por  $y^2$  obtemos ;

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

Como vimos  $\frac{x}{y} = \phi$  e organizando a equação temos:

$$\phi^2 - \left(\frac{x+y}{y}\right) = 0.$$

O comprimento de um arco de círculo é igual o produto de seu ângulo em radianos e o seu raio, sendo  $r$  o raio do círculo e  $\alpha$  o ângulo correspondente a  $y$  (ao arco menor  $AC$ ) temos que,  $x + y = 2\pi r$  e que  $y = \alpha r$ , substituindo os valores dos comprimentos desses arcos na equação segue que,

$$\phi^2 - \frac{2\pi r}{\alpha r} = 0,$$

logo,

$$\alpha = \frac{2\pi}{\phi^2} = (3 - \sqrt{5})\pi \approx 137,5^\circ.$$

## 2.2.4 Triângulo equilátero

Entre as figuras geométricas que apresentam a razão áurea está o triângulo equilátero. Vejamos a seguir mais detalhes.

**Proposição 2.4.** *Considere o triângulo equilátero  $ABC$  de lados com medidas  $2x$ ,  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, e  $\Gamma$ , a circunferência circunscrita a esse triângulo. Se  $P$  e  $Q$  são os pontos de interseções dos prolongamentos do segmento  $\overline{MN}$  com  $\Gamma$  conforme a figura (2.18), então,*

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NQ}} = \phi.$$

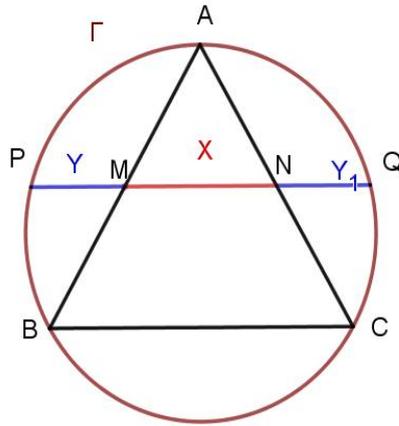


Figura 2.18: Razão áurea e triângulo equilátero

*Demonstração.* Antes de mostrar esse resultado, iremos verificar que os segmentos  $MP$  e  $NQ$  possuem mesma medida.

Como as medidas dos lados de  $ABC$  são  $2x$  e  $MN$  é base média<sup>4</sup> então  $\overline{MN} = x$ , pelo teorema das cordas<sup>5</sup> temos que:

$$\overline{MP} \cdot (\overline{MN} + \overline{NQ}) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}.$$

Substituindo os valores dos segmentos  $MN$ ,  $MA$  e  $MB$ , (novamente pelo teorema da base média,  $\overline{MN} = \overline{MA} = \overline{MB} = x$ ), segue que

$$\overline{MP} \cdot (x + \overline{NQ}) = x \cdot x,$$

isto é,

$$\overline{MP}x + \overline{MP} \cdot \overline{NQ} = x^2. \quad (2.21)$$

Aplicando o teorema das cordas agora no ponto  $N$  segue que:

$$\overline{NQ} \cdot (\overline{MN} + \overline{MP}) = \overline{NA} \cdot \overline{NB}$$

Substituindo os valores dos segmentos  $MN$ ,  $NA$  e  $NB$ , segue que

$$\overline{NQ} \cdot (x + \overline{MP}) = x \cdot x$$

<sup>4</sup>O leitor encontrará mais detalhes em Muniz Neto (2013)

<sup>5</sup>Para maiores detalhes ver Muniz Neto (2013)

isto é,

$$\overline{NQ}x + \overline{NQ} \cdot \overline{MP} = x^2. \quad (2.22)$$

Das equações (2.21) e (2.22) conclui-se que

$$\overline{MP}x + \overline{MP} \cdot \overline{NQ} = \overline{NQ}x + \overline{NQ} \cdot \overline{MP} \Leftrightarrow \overline{MP}x = \overline{NQ}x.$$

Como  $x$  é positivo, dividimos ambos os lados da equação por  $x$  temos,

$$\overline{MP} = \overline{NQ}.$$

Como já vimos, pelo teorema das cordas,

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MP} \cdot \overline{MQ} \quad (2.23)$$

substituindo os valores

$$\overline{MA} = \overline{MB} = x, \quad \overline{MP} = \overline{NQ} = y \text{ e } \overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NQ} = x + y$$

na equação (2.23) temos:

$$x \cdot x = y \cdot (x + y) \Rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0,$$

daí obtemos,

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Portanto, o segmento  $MN$  está em razão áurea com qualquer um dos segmentos  $MP$  e/ou  $NQ$ .

□

## 2.2.5 Triângulo isósceles áureo

A razão áurea aparece também no triângulo isósceles, o chamado triângulo isósceles áureo quando, a razão entre um de seus lados e a base é o número  $\phi$ . Falaremos agora

sobre o triângulo isósceles áureo, mas para isto precisaremos do seguinte resultado:

**Proposição 2.5.** *Seja  $ABC$  um triângulo tal que*

$$\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a \text{ e } \hat{A}BC = 2\hat{A}CB,$$

então,

$$b^2 = c(a + c).$$

*Demonstração.* Denotemos por  $\alpha$  a medida do ângulo  $\hat{A}CB$ , conforme a figura (2.19). Sejam  $BD$  a bissetriz do ângulo  $\hat{A}BC$ , cuja a medida é  $2\alpha$ , e  $\overline{BD} = x$ . Neste caso, o triângulo  $BCD$  é isósceles de base  $BC$ , pois, os ângulos da base são iguais, logo  $\overline{CD} = x$  e daí  $\overline{AD} = b - x$ .

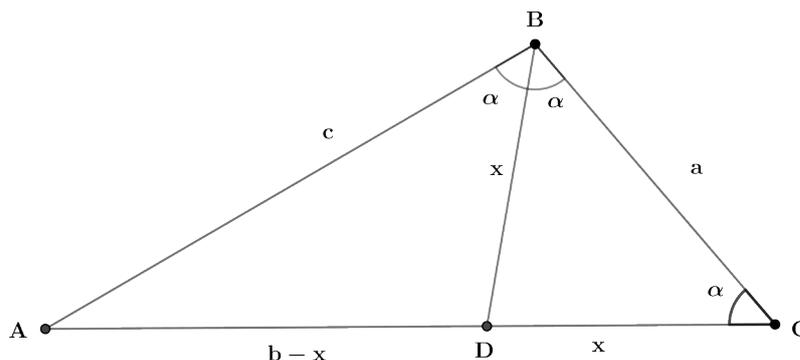


Figura 2.19: Triângulo  $ABC$

Observe que os triângulo  $ABC$  e  $ADB$  são semelhantes, pelo caso de semelhança  $AA^6$ , então temos as seguintes relações de semelhança, isto é,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{c}{b-x} = \frac{b}{c} = \frac{a}{x}. \quad (2.24)$$

Da última igualdade da equação (2.24), temos

$$x = \frac{ac}{b}, \quad (2.25)$$

e da primeira igualdade da equação (2.24), temos

$$c^2 = b^2 - bx. \quad (2.26)$$

<sup>6</sup>O leitor encontrará esse resultado em Muniz Neto (2013)

Substituindo (2.25) em (2.26), obtemos

$$c^2 = b^2 - b\frac{ac}{b} \Leftrightarrow b^2 = c(a + c).$$

□

**Proposição 2.6.** *Seja  $ABC$  um triângulo isósceles de base  $BC$ , cuja a medida dos ângulos da base é o dobro da medida do ângulo oposto a base, então a razão entre qualquer um dos lado (iguais) do triângulo e a base é correspondente a razão áurea.*

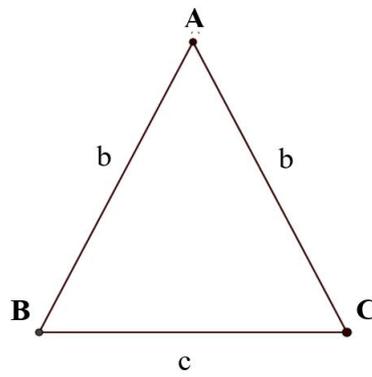


Figura 2.20: Triângulo isósceles  $ABC$

*Demonstração.* Da proposição (2.5) temos que:

$$b^2 = c(a + c).$$

Na expressão acima, fazendo  $a = b$  (já que o triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $BC$ ) segue,

$$b^2 = c(b + c),$$

isto é,

$$b^2 - cb - c^2 = 0.$$

Resolvendo essa equação de 2º grau em  $b$  obtemos:

$$b = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4c^2}}{2} \quad \text{ou} \quad b = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4c^2}}{2},$$

ou seja,

$$b = \frac{c(1 + \sqrt{5})}{2} \quad \text{ou} \quad b = \frac{c(1 - \sqrt{5})}{2},$$

isto é,

$$\frac{b}{c} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{c} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

como  $b$  e  $c$  são lados do triângulo, não assumem valores negativos assim,

$$\frac{b}{c} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

□

Observe que se colocarmos a base com medida igual a 1, teremos que os lados medem  $\phi$ . Como na figura (2.21).

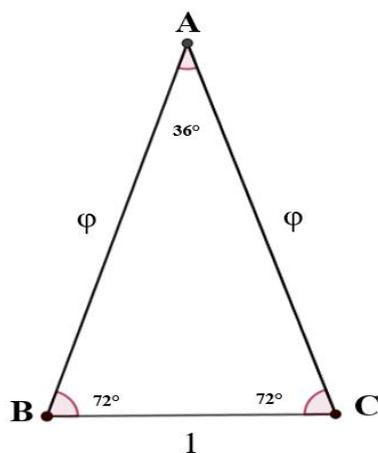


Figura 2.21: Triângulo isósceles áureo

Aqui chamaremos de triângulo isósceles áureo todo triângulo isósceles cuja o os ângulos da base são  $72^\circ$ , conforme a proposição (2.6).

**Proposição 2.7.** *Seja  $ABC$  um triângulo isósceles áureo de base  $BC$ . Então o triângulo gerado pela bissetriz de um dos ângulos da base com o lado oposto a este ângulo, e a base também é isósceles cuja a nova base é formada pelo vértice da base e a interseção da bissetriz com o lado. Em particular, se continuarmos fazendo o processo no novo triângulo isósceles áureo gerado, então teremos uma infinidade de novos triângulos isósceles áureos.*

*Demonstração.* Denotemos por  $\overline{AB} = \overline{AC} = c$  e  $\overline{BC} = a$ , e seja  $CD$  a bissetriz do ângulo  $\angle ACB$ , conforme a figura (2.22), então temos que a medida  $B\hat{C}D = 36^\circ = A\hat{C}D$ , pois a medida do ângulo  $B\hat{C}A = 72^\circ$ . Como  $C\hat{B}D = 72^\circ$ , segue que  $B\hat{D}C = 72^\circ$ .

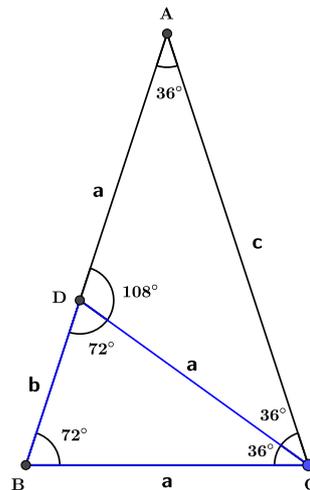


Figura 2.22: Triângulos áureos

Logo, pela proposição (2.6) segue que  $BCD$  é um triângulo isósceles áureo. Para concluirmos, basta apenas continuar fazendo o mesmo procedimento citado na prova, e como ilustra a figura (2.23), então terá uma sequência de novos triângulos isósceles áureos.

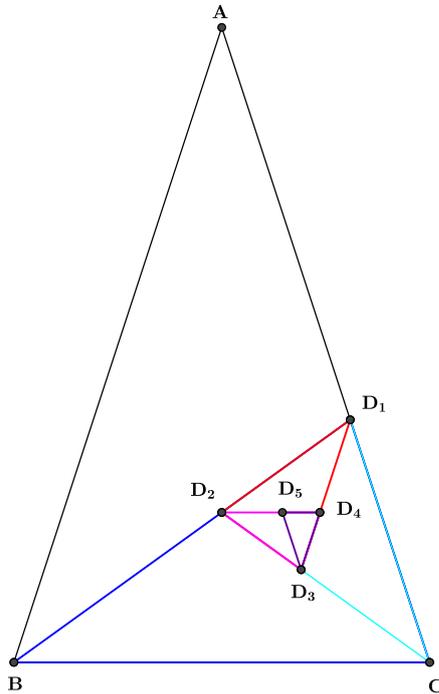


Figura 2.23: Triângulos áureos

□

**Proposição 2.8.** *Dada a sequência de triângulos isósceles áureos como na proposição (2.7). Se denotarmos por  $c = c_0$  a medida dos lados  $AB = AC$  e  $a = a_0$  a medida de sua base  $BC$ , então as medidas dos lados e das bases dos próximos triângulos isósceles áureos contruídos são dadas, respectivamente, por*

$$c_n = \frac{c}{\phi^n} \quad e \quad a_n = \frac{c}{\phi^{n+1}}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, por hipótese,

$$\frac{c}{a} = \phi \Leftrightarrow a = \frac{c}{\phi}.$$

Além disso, conforme a figura (2.24), o próximo triângulo isósceles áureo terá medidas dos lados iguais sendo  $a$  e base  $b$ , isto é

$$c_1 = a \quad e \quad a_1 = b. \tag{2.27}$$

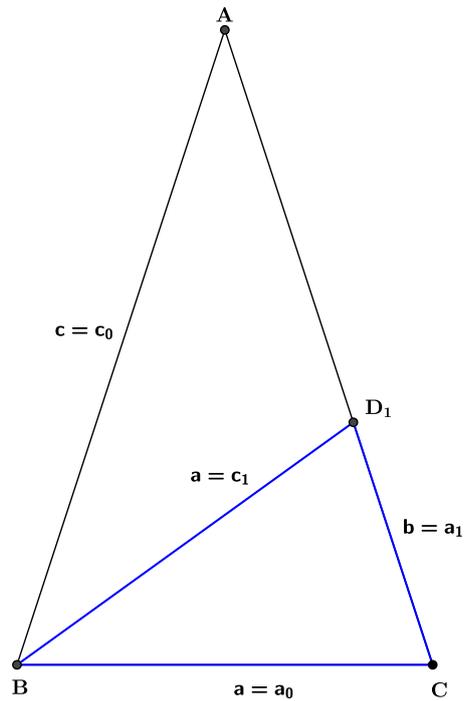


Figura 2.24: Triângulos isósceles áureos

Novamente por hipótese

$$b = \frac{a}{\phi} = \frac{c}{\phi^2}, \quad (2.28)$$

substituindo (2.28) em (2.27), obtemos

$$c_1 = \frac{c}{\phi} \text{ e } a_1 = \frac{c}{\phi^2}. \quad (2.29)$$

Em seguida, conforme a figura (2.25), temos que

$$c_2 = a_1 = \frac{c}{\phi^2},$$

e como

$$\frac{c_2}{a_2} = \phi,$$

pois são os lados de um triângulo isósceles áureo, temos que

$$a_2 = \frac{c_2}{\phi} = \frac{c}{\phi^3},$$

ou seja,

$$c_2 = \frac{c}{\phi^2} \text{ e } a_2 = \frac{c}{\phi^3}.$$

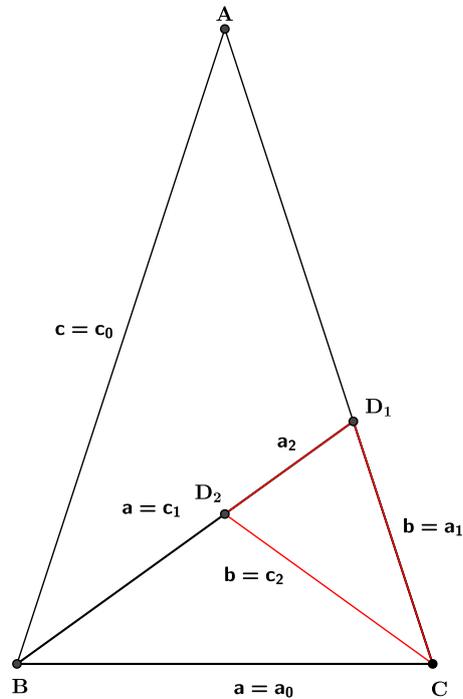


Figura 2.25: Triângulos isósceles áureos

Portanto de modo indutivo, concluímos que

$$c_n = \frac{c}{\phi^n} \text{ e } a_n = \frac{c}{\phi^{n+1}}.$$

□

Agora para mostrar um fenômeno interessante, como fizemos para infinidade de retângulos, podemos construir a espiral áurea através dos vértices dos triângulos isósceles áureos, como mostra a figura (2.26).

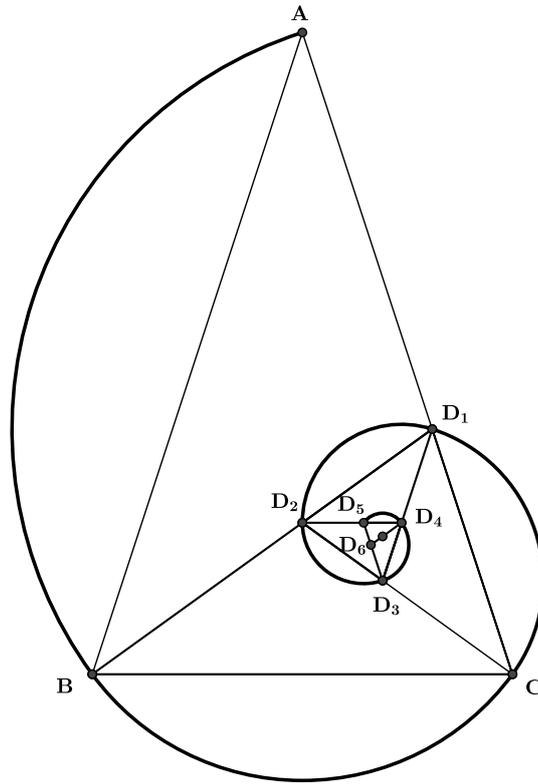


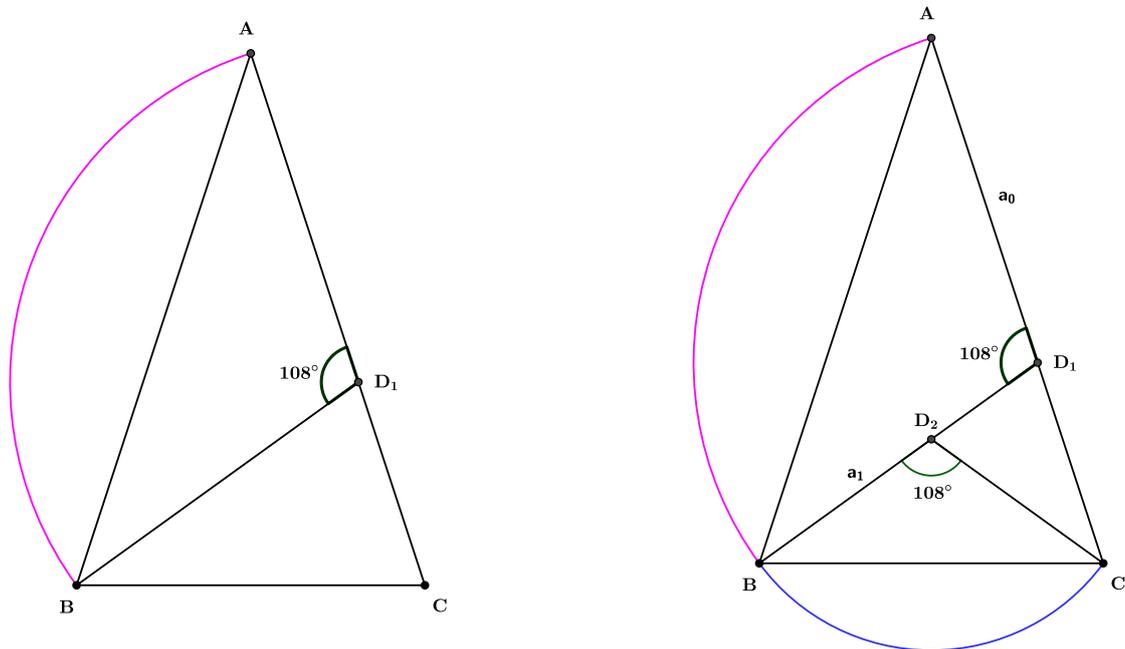
Figura 2.26: Espiral áurea

Podemos obter o comprimento da espiral áurea, figura (2.26). Para isto, observemos que cada pedaço da espiral está contida num arco de círculo cuja a medida do ângulo central é  $108^\circ$ , conforme as figuras (2.27(a)) e (2.27(b)), e a medida do comprimento de um arco de círculo de raio  $r$  e ângulo  $\alpha$  é dada por:

$$2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ},$$

então para  $\alpha = 108^\circ$ , obtemos

$$\frac{3\pi r}{5}.$$



(a) Primeiro arco da espiral áurea

(b) Segundo arco espiral áurea

Figura 2.27: Espiral áurea

Usando as notações da proposição (2.8), concluímos que o  $n$ -ésimo arco terá raio  $r = a_{n-1}$ , então comprimento da espiral será dado por:

$$L = \frac{3\pi a_0}{5} + \frac{3\pi a_1}{5} + \dots + \frac{3\pi a_n}{5} + \dots = \frac{3\pi}{5}(a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots),$$

mas da proposição (2.8), temos que  $a_n = \frac{c}{\phi^{n+1}}$ , daí temos que

$$L = \frac{3\pi}{5} \left( \frac{c}{\phi} + \frac{c}{\phi^2} + \dots + \frac{c}{\phi^{n+1}} + \dots \right) = \frac{3c\pi}{5} \left( \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \dots + \frac{1}{\phi^{n+1}} + \dots \right),$$

e como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\phi^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi}} = \frac{1}{\frac{\phi-1}{\phi}} = \phi^2,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2 - 1 = \phi.$$

Portanto,

$$L = \frac{3c\pi\phi^2}{5}.$$

## 2.2.6 Pentágono

Veremos a seguir que o número de ouro surge no pentágono regular quando calculamos a razão entre seus lados e os segmentos que formam as suas diagonais, assim como também os pontos de intersecções das diagonais além de formarem um novo pentágono regular também as transformam em segmentos áureos.

**Proposição 2.9.** *Seja  $ABCDE$  um pentágono regular então,*

- (i) *as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados;*
- (ii) *se  $P$  é um ponto de intersecção de duas diagonais como na figura (2.28), então  $P$  as divide em razão áurea.*

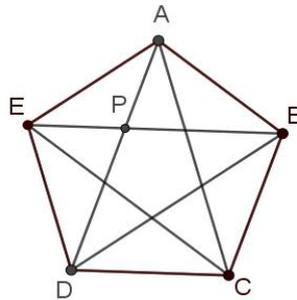


Figura 2.28: Pentagrama

*Demonstração.* (i) Considere o pentágono regular  $ABCDE$  de lados com medida 1. Lembremos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ,$$

em que  $n$  é o número de lados do polígono e  $S$  é a soma dos ângulos internos. No caso do pentágono regular, temos que,

$$S = (5 - 2) \cdot 108^\circ = 540^\circ.$$

---

<sup>7</sup>O leitor que tenha mais interesse em ver a prova desse resultado basta consultar, por exemplo, Muniz Neto (2013)

Assim, cada um dos 5 ângulos internos do pentágono mede  $108^\circ$  conforme a figura (2.29).

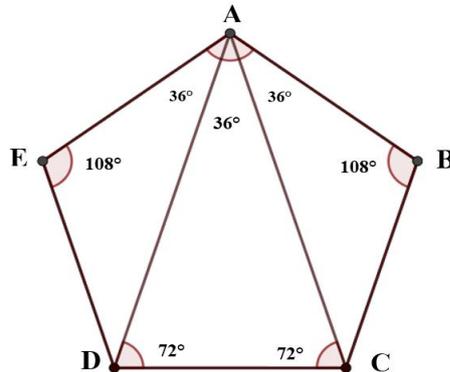


Figura 2.29: Medidas dos ângulos internos

Com isso, temos que os ângulos  $\hat{ABC}$  e  $\hat{DEA}$  medem  $108^\circ$  e os lados

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EA} = 1,$$

segue que os triângulos  $ABC$  e  $ADE$  são congruentes, pelo caso de congruência,  $LAL$ , (lados iguais a 1 e ângulos internos iguais a  $108^\circ$ , conforme a figura (2.29)), logo as diagonais  $AC$  e  $AD$  do pentágono tem mesma medida, o que leva a conclusão de que o triângulo  $ACD$  é isósceles de lados iguais as diagonais do pentágono e de base  $\overline{DC} = 1$ . Além disso, os triângulos congruentes  $ABC$  e  $ADE$  são isósceles de bases  $AC$  e  $AD$  respectivamente, como os ângulos opostos as bases medem  $108^\circ$  segue que, nos dois triângulos os ângulos das bases medem  $36^\circ$ , isto é, os ângulos

$$\hat{BCA} = \hat{ADE} = 36^\circ.$$

Como a soma dos ângulos  $\hat{BCA}$  e  $\hat{ACD}$  é  $108^\circ$ , segue que  $\hat{ACD} = 72^\circ$ , logo o ângulo  $\hat{CAD}$  é igual a  $36^\circ$ , (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ). Portanto, o triângulo  $ACD$  contém a medida dos ângulos da base o dobro da medida do ângulo oposto a base, ou seja,  $ACD$  é um triângulo isósceles áureo.

Sabemos, pela proposição (2.6) e a figura (2.21), que os lados iguais do triângulo isósceles áureo estão em razão áurea com a base, e se a base medir 1 os lados iguais do triângulo isósceles medem  $\phi$ . Então no triângulo  $ACD$ , temos que sua base  $CD$  mede 1 (pois é o lado do pentágono regular) daí, concluímos que as diagonais  $AC$  e  $AD$  do

pentágono regular medem  $\phi$ .

Como consequência disso, no triângulo  $ABC$ , (formado por dois lados e uma diagonal, conforme a figura (2.30)) também esta em razão áurea, pois a razão entre o lado  $AC$  e  $AB$  ou  $BC$  é exatamente  $\phi$ . Portanto, em um pentágono regular podemos observar que qualquer triângulo formado por dois lados e uma diagonal ou ainda qualquer triângulo formado por duas diagonais e um lado do pentágono é um triângulo isósceles áureo.

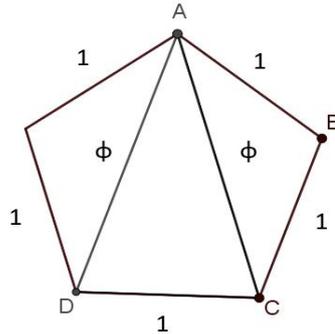


Figura 2.30: Triângulos isósceles áureos a partir do pentágono

(ii) Considere o ponto  $P$  de intersecção de duas diagonais do pentágono (como na figura 2.28). Analisando o triângulo isósceles  $ABE$  de base  $BE$ , já vimos no item (i) que o ângulo  $B\hat{A}E = 108^\circ$ , assim os ângulos da base  $A\hat{B}E$  e  $A\hat{E}B$  medem  $36^\circ$  concluindo assim, que o triângulo  $APE$  também é isósceles de base  $AE$ , isto é, o ângulo  $A\hat{P}E = 108^\circ$ , assim, sendo o ângulo  $A\hat{P}B = \alpha$  temos que  $\alpha = 72^\circ$ . Como  $A\hat{B}E$  mede  $36^\circ$  segue que  $B\hat{A}P = \alpha$ , logo o triângulo  $ABP$  também é isósceles de base  $AP$ , segue então que

$$AB = PB = 1$$

no item (i), vimos que a diagonal  $EB = \phi$ , assim,  $EP = \phi - 1$ , logo,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{EP}} = \frac{1}{\phi - 1},$$

e pela propriedade 2.4, temos que  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ , assim,

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{EP}} = \frac{1}{\phi - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi} - 1} = \phi.$$

Portanto, o ponto  $P$  de intersecção divide a diagonal  $BE$  em razão áurea. Procedendo de maneira análoga, observe que a cada intersecção de duas diagonais é um

ponto que as dividem de modo que a razão entre o comprimento do segmento maior e o comprimento do segmento menor é  $\phi$ .

□

## 2.2.7 Relações trigonométricas

Como consequência dos resultados acima podemos realizar algumas considerações a cerca das razões entre os lados desses triângulos estudados. Como vimos na seção anterior, os triângulos  $ABC$  e  $ACD$  da figura (2.30) são triângulos isósceles áureos.

No triângulo  $ABC$  os ângulos da base medem  $36^\circ$  e o ângulo oposto a base mede  $108^\circ$ , no triângulo  $ACD$  os ângulos da base medem  $72^\circ$  e o ângulo oposto a base mede  $36^\circ$ . Iremos calcular o seno, o cosseno e a tangente desses ângulos.

Iniciamos com o triângulo  $ACD$  traçando a altura relativa a base  $CD$ , pelo fato do triângulo  $ACD$  ser isósceles, então a altura relativa a base é também mediana e bissetriz. Sendo  $P$  o pé da altura traçada conforme a figura (2.31), temos que:

$$\overline{DP} = \overline{PC} = \frac{1}{2}.$$

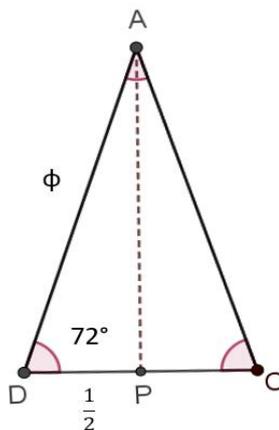


Figura 2.31: Razão trigonométrica no triângulo isósceles áureo

Assim,

$$\cos 72^\circ = \frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{2}}{\phi} = \frac{1}{2\phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\phi},$$

substituindo  $\frac{1}{\phi}$  por  $\sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}$  conforme a propriedade (2.5), obtemos:

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\phi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}.$$

Calcularemos agora o seno do ângulo  $72^\circ$ . Para isto, lembremos que,

$$\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \frac{1}{\phi} = \phi - 1,$$

daí,

$$\frac{1}{\phi^2} = (\phi - 1)^2,$$

então,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(72^\circ) &= 1 - \cos^2(72^\circ) \\ &= 1 - \frac{1}{4\phi^2} \\ &= 1 - \frac{1}{4}(\phi - 1)^2 \\ &= \frac{1}{4}(4 - (\phi^2 - 2\phi + 1)) \\ &= \frac{1}{4}(4 - (\phi^2 - \phi) + \phi - 1) \end{aligned}$$

como,  $\phi^2 - \phi = 1$ , segue que

$$\operatorname{sen}^2(72^\circ) = \frac{1}{4}(2 + \phi),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(72^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}.$$

A tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o cosseno então,

$$\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\phi}} = \phi\sqrt{2 + \phi}.$$

Calculemos agora o seno, cosseno e tangente do ângulo  $18^\circ$ . Como  $72^\circ$  e  $18^\circ$  são ângulos complementares temos que:

$$\cos 18^\circ = \operatorname{sen} 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \phi}$$

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}$$

e

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\phi}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\phi}} = \frac{\sqrt{2+\phi}}{\phi(2+\phi)}.$$

No triângulo  $ABC$ , temos os ângulos  $36^\circ$  e  $108^\circ$ , figura (2.32), usando arcos duplos temos que  $36^\circ = 2 \cdot 18^\circ$ ,  $108^\circ = 2 \cdot 54^\circ$ , e ainda que  $54^\circ = 72^\circ - 18^\circ$ . Assim,

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \operatorname{sen}(18^\circ + 18^\circ) = 2 \operatorname{sen} 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\phi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\phi},$$

pela propriedade (2.5) temos,

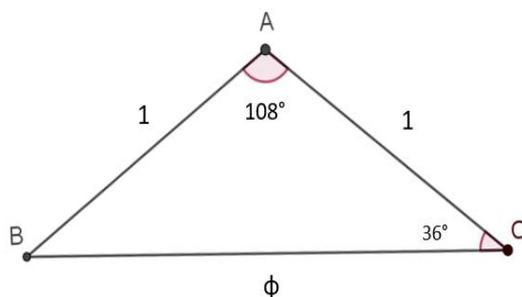


Figura 2.32: Relações trigonométricas do triângulo áureo

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{1}{\phi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\phi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\phi}{\phi^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\phi^2} + \frac{\phi}{\phi^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi}},$$

novamente pelo resultado,

$$\frac{1}{\phi^2} = 1 - \frac{1}{\phi},$$

segue que,

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) + \frac{1}{\phi}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}.$$

Calcularemos agora o cosseno de  $36^\circ$ .

$$\cos 36^\circ = \cos(18^\circ + 18^\circ) = \cos^2 18^\circ - \operatorname{sen}^2 18^\circ = \frac{1}{4} \cdot (2+\phi) - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{\phi}\right),$$

pela propriedade (2.5) temos,

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{4} \cdot (2+\phi) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\phi^2} = \frac{2\phi^2 + \phi^3 - 1}{4\phi^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2\phi^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\phi - \frac{1}{\phi^2}\right)\right],$$

aplicando as propriedades (2.4) e (2.5) obtemos,

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{\phi} + 1 - \left( 1 - \frac{1}{\phi} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\phi} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right)$$

novamente pelas propriedades (2.4) e (2.3),

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right) = \frac{1}{2} \cdot \phi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \phi},$$

e

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \phi}},$$

racionalizando obtemos;

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\sqrt{2\phi + 1 - \frac{1}{\phi}}}{1 + \phi} = \frac{\sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}}{1 + \phi}$$

pela propriedade (2.5).

Como os ângulos  $36^\circ$  e  $54^\circ$  são complementares segue que:

$$\operatorname{sen} 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \phi};$$

$$\cos 54^\circ = \operatorname{sen} 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}$$

e

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \phi}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}}$$

racionalizando resulta em:

$$\operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\phi \cdot \sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}}{2\phi - 1}.$$

Iremos calcular agora o seno, o cosseno e a tangente do ângulo  $108^\circ$ . Note que  $108^\circ$  é duas vezes o ângulo de  $54^\circ$ .

$$\operatorname{sen} 108^\circ = \operatorname{sen} (54^\circ + 54^\circ) = 2 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ \cdot \cos 54^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \phi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{\phi}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}$$

$$\cos 108^\circ = \cos(54^\circ + 54^\circ) = \cos^2 54^\circ - \sin^2 54^\circ = \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{\phi}\right) - \frac{1}{4} \cdot (1 + \phi) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \phi - \frac{1}{\phi}\right).$$

usando a propriedade (2.4), temos que:

$$\cos 108^\circ = \frac{1}{4} \cdot (1 - \phi - \phi + 1) = \frac{1}{4} \cdot 2(1 - \phi) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \phi).$$

A tangente do ângulo  $108^\circ$ ,

$$\operatorname{tg} 108^\circ = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}}{\frac{1}{2} \cdot (1 - \phi)} = \sqrt{\frac{2\phi^3 + \phi}{(1 - \phi)^2}} = \sqrt{\frac{2\phi^2 + 1}{2\phi - 3}}.$$

A tabela 2.1 ilustra todos os valores calculados.

		Ângulo				
		$18^\circ$	$36^\circ$	$54^\circ$	$72^\circ$	$108^\circ$
Relações Trigonométricas	sen	$\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1 + \phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}$
	cos	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1 + \phi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{\phi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{\phi}}$	$\frac{1}{2}(1 - \phi)$
	tg	$\frac{\sqrt{2 + \phi}}{\phi(2 + \phi)}$	$\frac{\sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}}{1 + \phi}$	$\frac{\phi\sqrt{2\phi + \frac{1}{\phi^2}}}{2\phi - 1}$	$\phi\sqrt{2 + \phi}$	$\sqrt{\frac{2\phi^2 + 1}{2\phi - 3}}$

Tabela 2.1: Valores das razões Trigonométricas

# Capítulo 3

## Resultados e discussão

### 3.1 Proposta para o ensino médio

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamentos e atitudes, cuja utilidade e alcance ultrapassam o âmbito da própria Matemática, podendo formar no estudante a capacidade de resolver problemas reais de seu cotidiano, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (Brasil, 2018).

Assim, o estudante terá uma visão de que a Matemática é um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, inclusive para a atividade profissional. Não se trata de os estudantes possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. Para isso, o ensino de Matemática, mais especificamente o ensino de geometria, deve possuir metodologias e técnicas diversificadas, incluindo a utilização de tecnologias e materiais manipuláveis de modo que desperte o interesse dos estudantes, pois quando o interesse dos alunos é despertado o aprender se torna mais natural e ainda pode resgatar aqueles que já não se importava pelo assunto. Einstein afirma que:

A melhor coisa que podemos vivenciar é o mistério. Ele é a emoção fundamental que está no berço da ciência e da arte verdadeiras. Aquele que não conhece e não mais se maravilha, não sente mais o deslumbramento, vale o mesmo que uma morte, que uma vela apagada (Einstein, apud LANDIM).

Nesse sentido, o estudo sobre a razão áurea vem despertando esse tipo de sentimento em quem o pratica. Já a construção geométrica com régua e compasso, tem sido a marca registrada da Geometria. Desde o aparecimento dos elementos de Euclides em torno de 300 a.C. os matemáticos tinham um grande interesse por estas construções.

Elas facilitam as visões dos estudantes a respeito dos conteúdos geométricos, pois qualquer desenho traçado a mão livre interfere na compreensão do conceito daqueles alunos que não possuem muita intimidade com a Geometria. Com isso, nesta seção vamos propor algumas atividades nas quais o professor de Matemática poderá realizar, desse modo o estudante pode compreender melhor os conceitos geométricos e conhecer com mais clareza o tema razão áurea.

### 3.1.1 Sequência didática 1: Construções com régua e compasso.

**Objetivo:** Construir as principais figuras geométricas e perceber como o número de ouro está presente em cada uma delas.

**Público alvo:** Estudantes do ensino básico.

**Pré-requisitos:** Conhecimentos básicos de desenho geométrico, tais como, ponto médio, reta paralela, reta perpendicular e circunferência.

**Desenvolvimento das atividades:**

**Atividade 1:** Construção do segmento áureo;

Passos:

1. Trace um segmento de reta  $AB$  de distância qualquer entre  $A$  e  $B$ ;
2. Encontre o ponto médio  $M$  de  $AB$ ;
3. Trace uma reta  $r$  perpendicular a  $AB$  passando por  $B$ ;
4. Com ponta fixa em  $B$  e abertura  $MB$ , trace um arco de círculo e marque o ponto  $C$  de interseção com a reta  $r$ ;

5. Una os pontos  $A$  e  $C$ ;
6. Com ponta fixa em  $C$  e abertura  $BC$ , marque o ponto  $D$  sobre  $AC$ ;
7. Com ponta fixa em  $A$  e abertura  $AD$ , marque o ponto  $E$  sobre  $AB$ ,  $E$  é o ponto Áureo, isto é :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \phi.$$

**Atividade 2:** Construção do retângulo áureo

Passos:

1. Construa um quadrado  $ABCD$ , sentido anti-horário, marcar os pontos médios  $M$  e  $N$  dos lados  $AB$  e  $CD$ , respectivamente;
2. Una os pontos  $M$  e  $N$ , formando dois retângulos;
3. Trace a diagonal do retângulo  $MBCN$  e prolongar o lado  $AB$ ;
4. Com a ponta fixa em  $M$  e abertura  $MC$ , marque o ponto  $P$  de interseção com o prolongamento de  $AB$ ;
5. Trace uma reta paralela a  $AD$  passando pelo ponto  $P$  e prolongue o lado  $DC$  até a nova reta criada e marque o ponto  $Q$ .

O retângulo  $APQD$  é um retângulo áureo. Isto é:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = \phi.$$

**Atividade 3:** Construção do pentágono e pentagrama

Passos:

1. Trace uma circunferência de centro  $O$  e raio qualquer;

2. Trace os diâmetros  $AB$  horizontal e  $CD$  vertical de modo  $AB$  e perpendicular a  $CD$ ;
3. Encontre o ponto médio  $M$  de  $OB$ , e trace uma reta paralela a  $CD$  passando por  $M$ ;
4. Com ponta fixa em  $M$  e abertura  $MD$ , marque o ponto  $N$  sobre  $AO$ ;
5. Com ponta fixa em  $D$  e abertura  $DN$ , marque o ponto  $E$  no arco menor  $AD$ ;
6. Com ponta fixa em  $E$  marque o ponto  $F$  no arco menor  $AC$ ;
7. Com ponta fixa em  $D$  marque o ponto  $H$  no arco menor  $DB$  e com ponta fixa em  $H$  marque o ponto  $G$  no arco menor  $BC$ ;
8. Una os pontos  $DEFGH$ , formando o pentágono regular;

Ao traçar as suas diagonais  $DF$  e  $EH$ , teremos um ponto  $S$  de interseção das diagonais e assim:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{SD}} = \phi.$$

Além disso, a razão entre qualquer uma das diagonais e os lados do pentágono é  $\phi$ .

### 3.1.2 Sequência didática 2: Construções com o Geogebra.

Para essa atividade é preciso instalar o software geogebra, disponível em <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Vamos ao passo a passo das construções.

**Atividade 4:** Construção do dodecaedro

1. Ao abrir o software geogebra, na barra menu (no canto superior esquerdo da tela) clique em **Exibir**, em seguida, **Janela de Visualização 3D**;

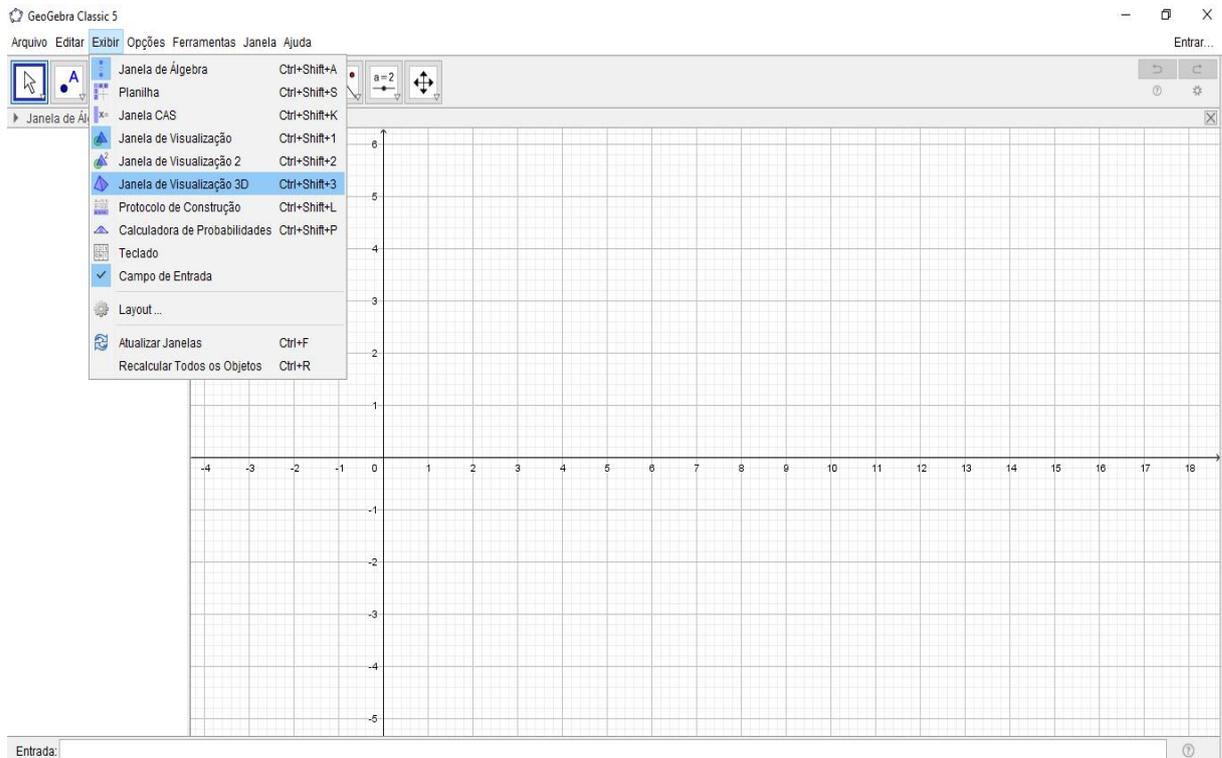


Figura 3.1: Abrindo o Geogebra

2. Na barra de ferramentas (no canto superior esquerdo da tela) clique na primeira janelinha **mover** e em seguida clique na janela de visualização 2D, na barra de ferramentas novamente, arraste o mouse sobre a quinta janelinha **Polígono**, em seguida clique em **Polígono Regular**;

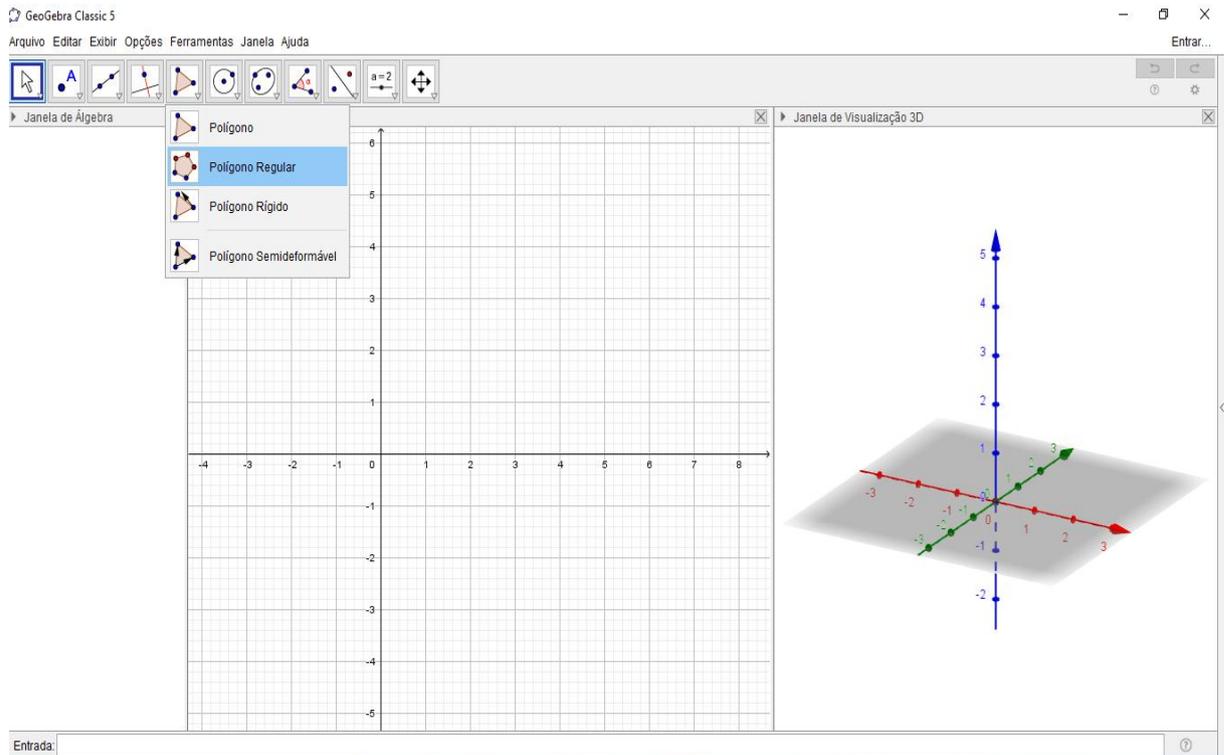


Figura 3.2: Construindo dodecaedro

3. Clique em qualquer lugar do plano construindo dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer na janela 2D, fazendo isso, abrirá uma janela perguntando a quantidade de vértices, digite 5 e clique em **ok**;

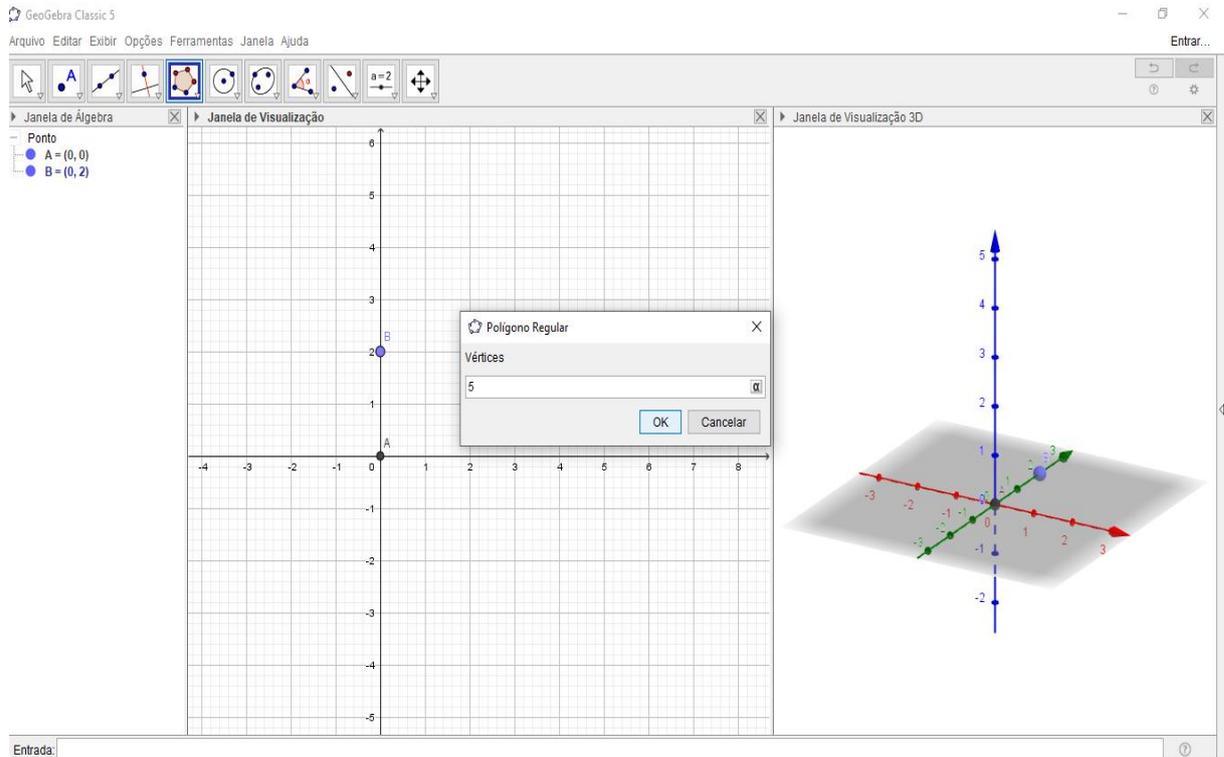


Figura 3.3: Construindo dodecaedro

4. Na caixa de entrada, no canto inferior esquerdo digite: **Dodecaedro(A,B)**, (os pontos  $A$  e  $B$  são os dois primeiros pontos criados para a construção do pentágono);

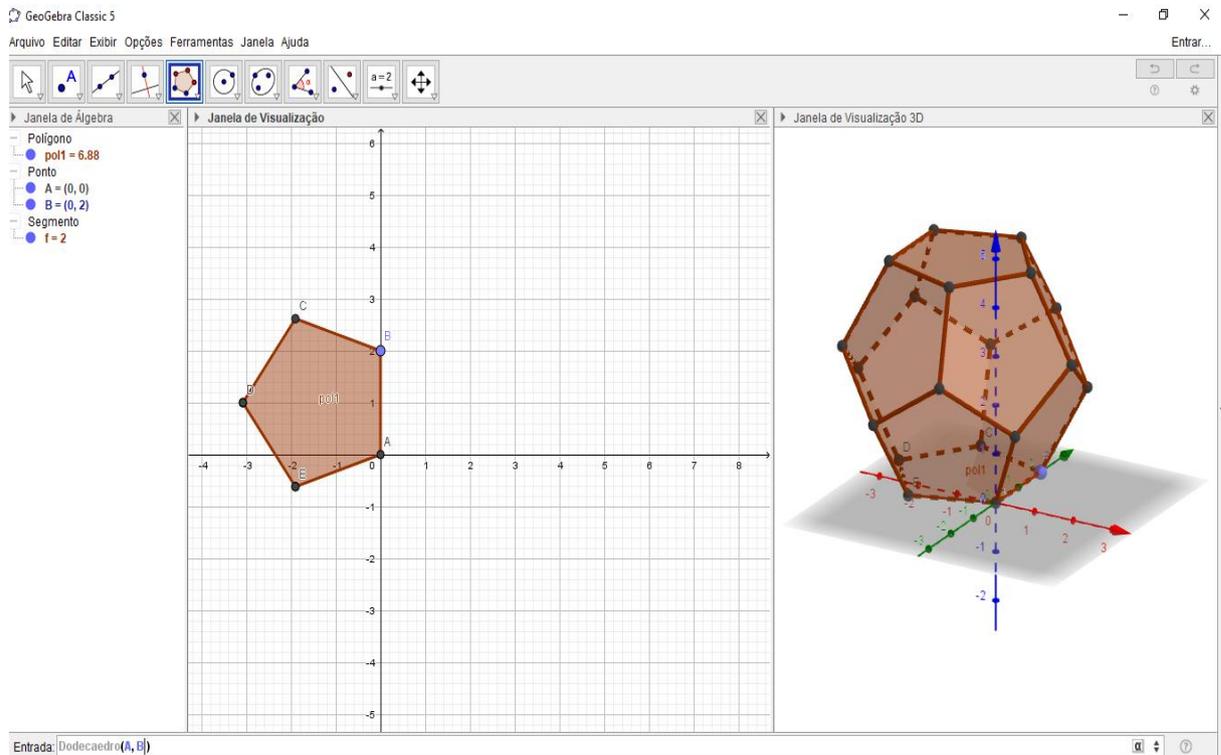


Figura 3.4: Construindo dodecaedro

- Perceba que o sólido foi criado, na primeira janelinha da barra de ferramnetas, clique em mover, em seguida clique no sólido na janela 3D, com essa ferramenta pode-se movimentar/girar o sólido como preferir;

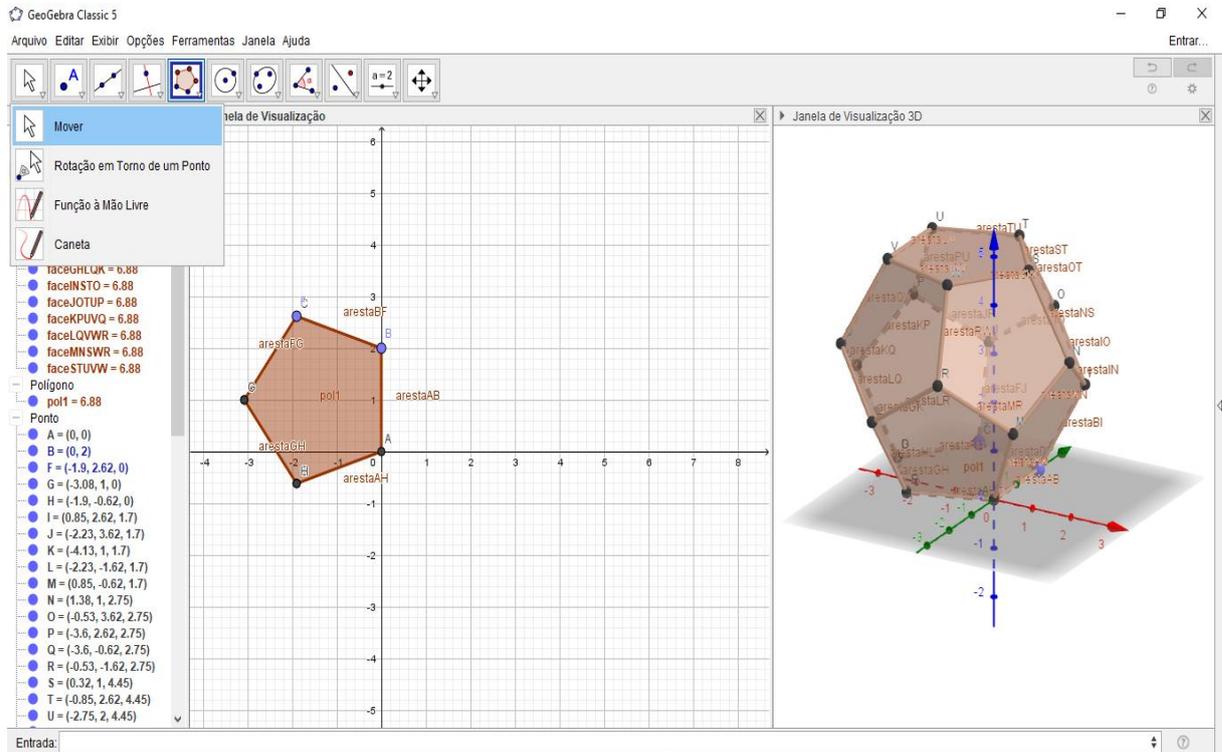


Figura 3.5: Construindo dodecaedro

6. Feche a janela de visualização 2D. Clicando com o botão direito do mouse sobre o sólido abrirá uma janela clique em **Propriedades**, abrirar uma nova janela, nesta é possível alterar a cor das faces do sólido, basta selecionar as faces desejadas e escolher a cor.

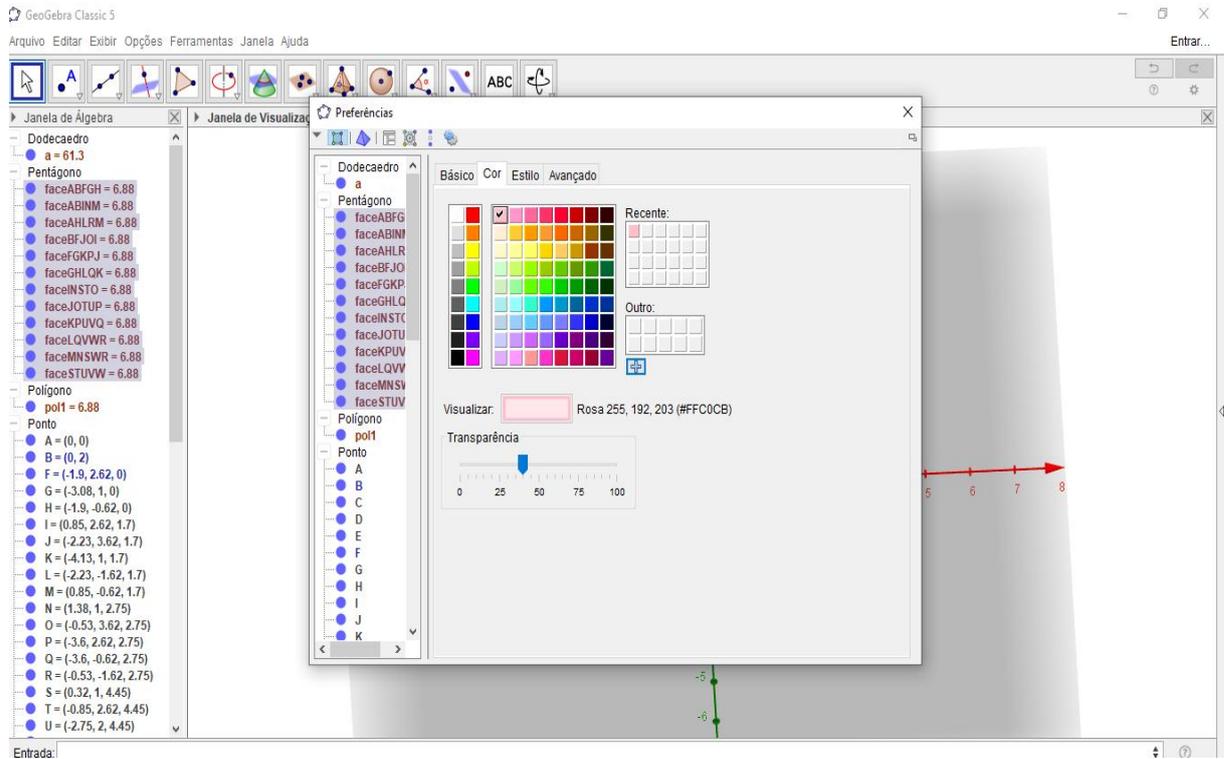


Figura 3.6: Construindo dodecaedro

7. Também é possível alterar a cor e a espessura das arestas na opção **Estilo**.

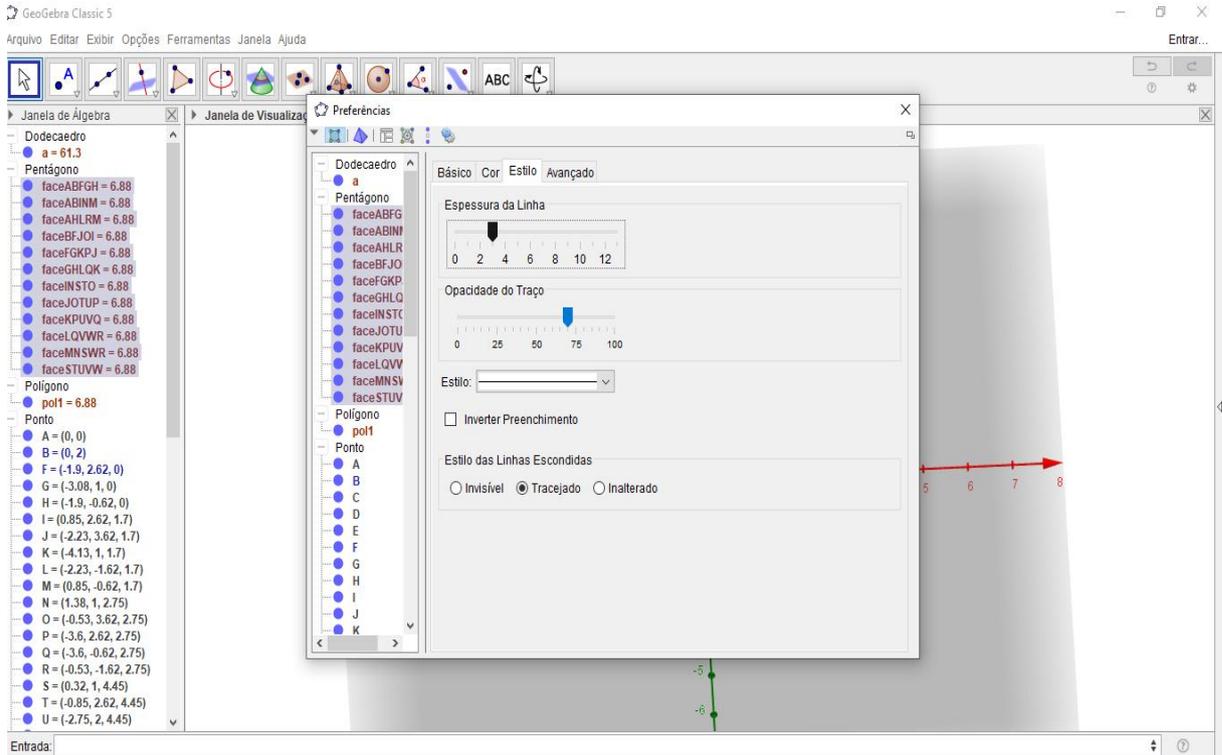


Figura 3.7: Construindo dodecaedro



9. Construa os pontos centrais de todas as faces do dodecaedro, indo na barra de ferramentas na segunda janelinha clique em **Ponto médio** ou **centro** e em seguida clique em cada uma das faces do sólido;

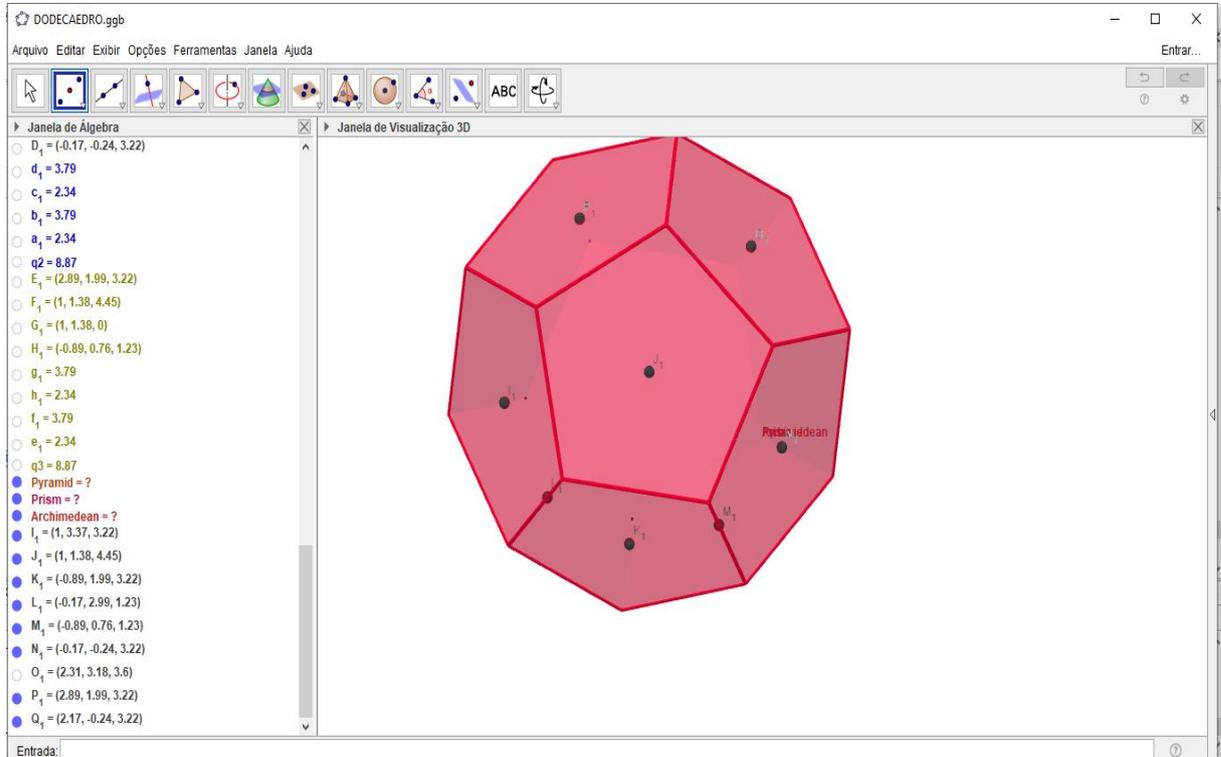


Figura 3.9: Construindo o retângulo

10. Verifique que os 12 centros das faces poderem ser divididos em três grupos de quatro pontos, sendo que os quatro pontos de cada grupo (cada 2 pontos de duas faces opostas) formam um retângulo e razão entre os lados desses retângulo e bem próximo de  $\phi$ . Obs: a razão entre os lados do retângulo e a mesma razão entre a diagonal do pentágono.

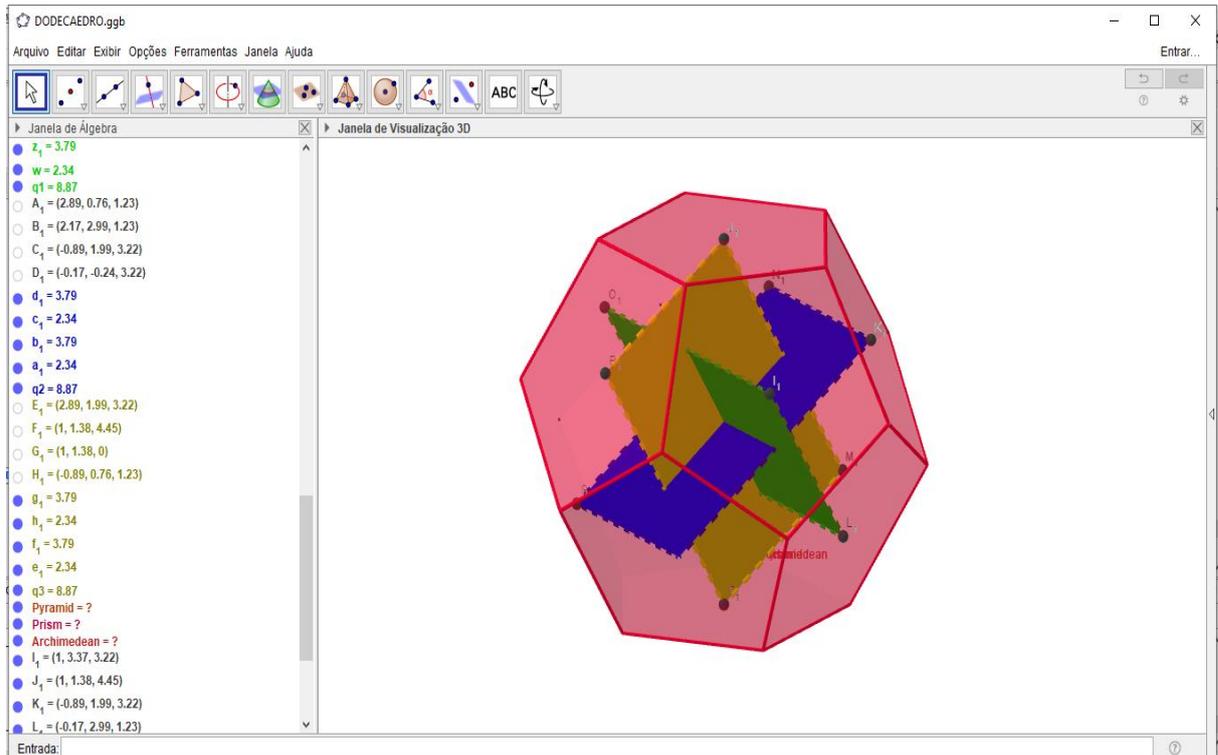


Figura 3.10: Construindo o retângulo

### Atividade 5: Construção do icosaedro

1. Com o software geogebra aberto na janela de visualização 3D clique em **Polígono Regular** na quinta janelinha da barra de ferramentas figura (3.2);

2. Clique em qualquer lugar do plano construindo dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer na janela 2D, fazendo isso, abrirá uma janela perguntando a quantidade de vértices, digite 3 e clique em **ok**;

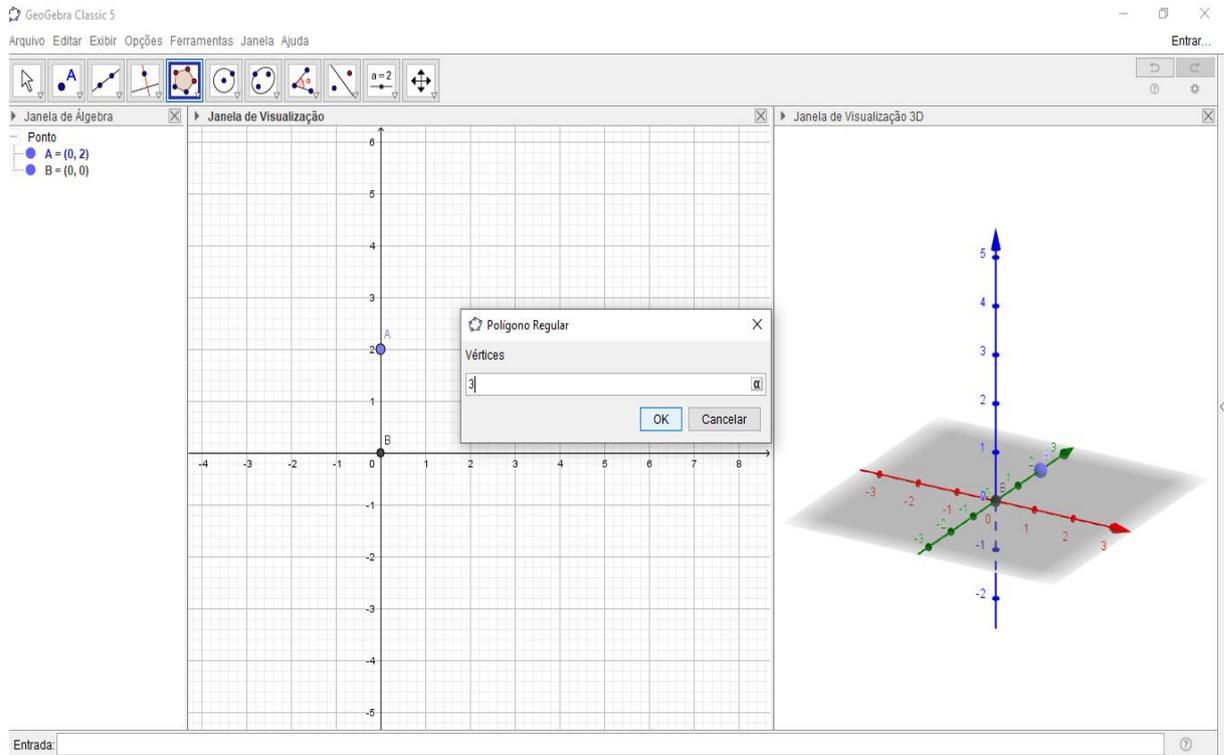


Figura 3.11: Construindo icosaedro

3. Na caixa de entrada, no canto inferior esquerdo digite: **Icosaedro(A,B)**, (os pontos  $A$  e  $B$  são os dois primeiros pontos criados para a construção do triângulo equilátero);

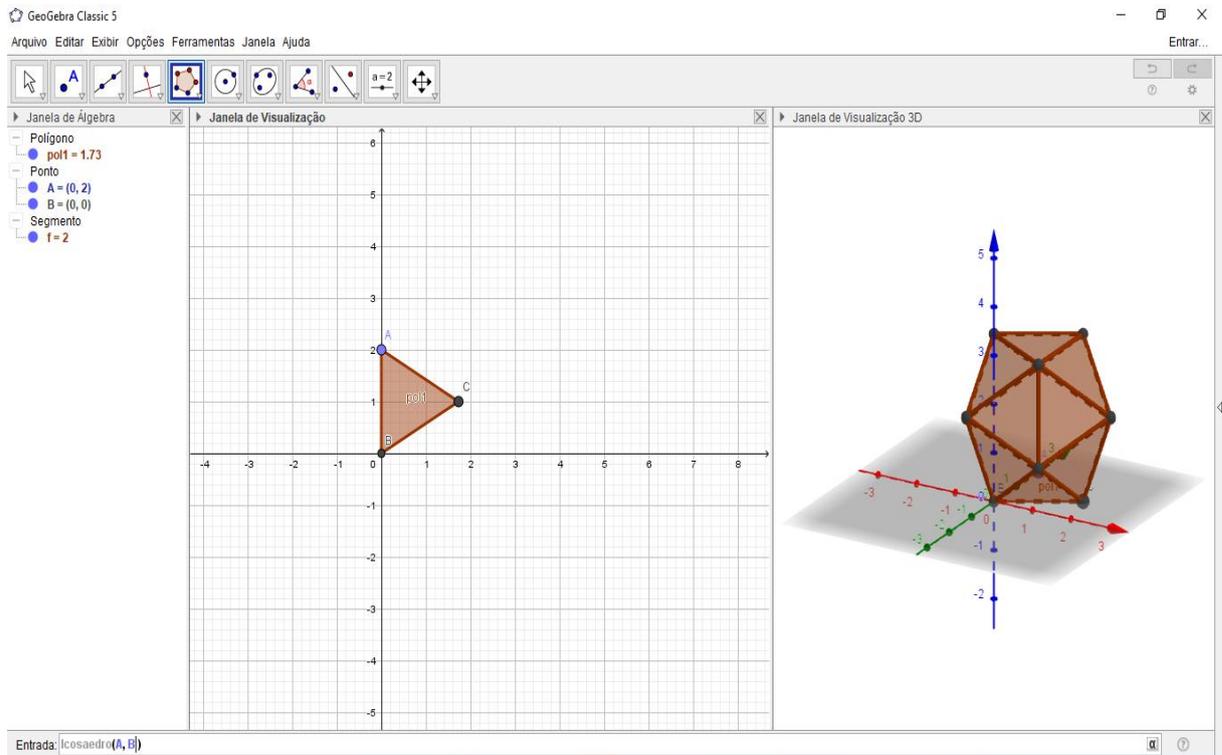


Figura 3.12: Construindo icosaedro

4. Feche a janela de visualização 2D. Na primeira janelinha da barra de ferramnetas, clique em mover, com essa ferramenta pode-se movimentar/girar o sólido como preferir;

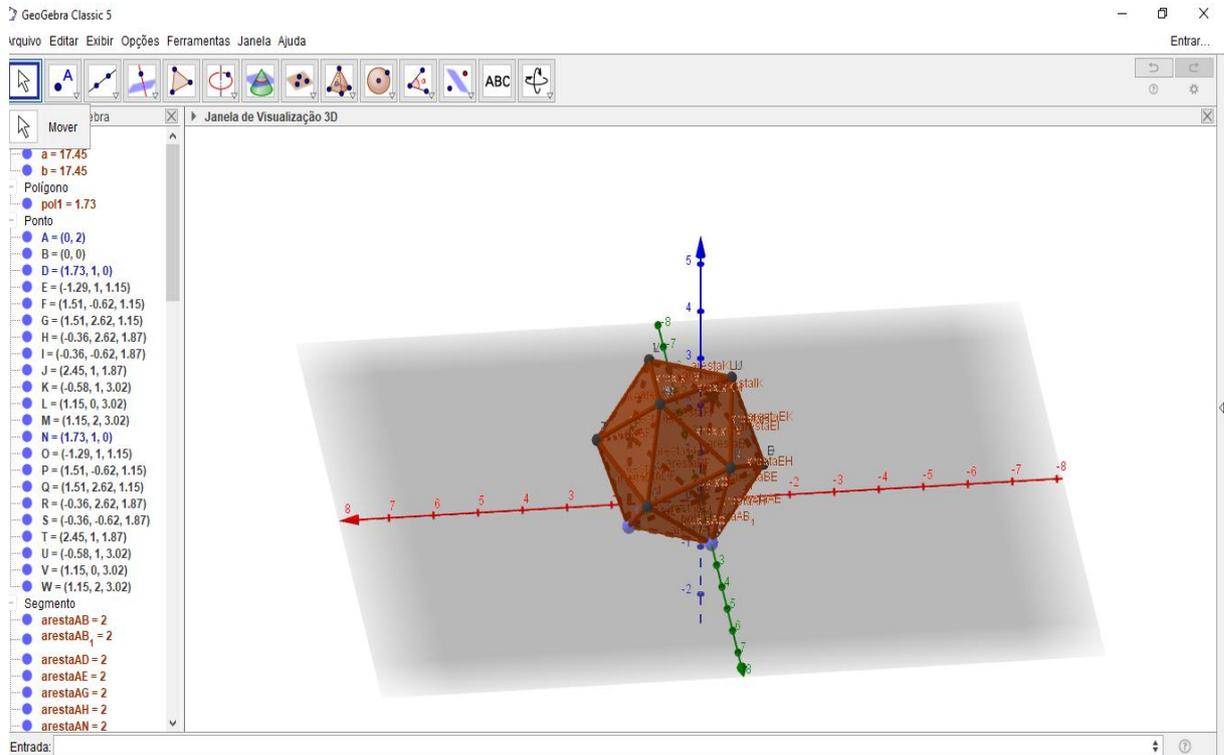


Figura 3.13: Construindo icosaedro

5. Clicando com o botão direito do mouse sobre o sólido abrirá uma janela clique em **Propriedades**;

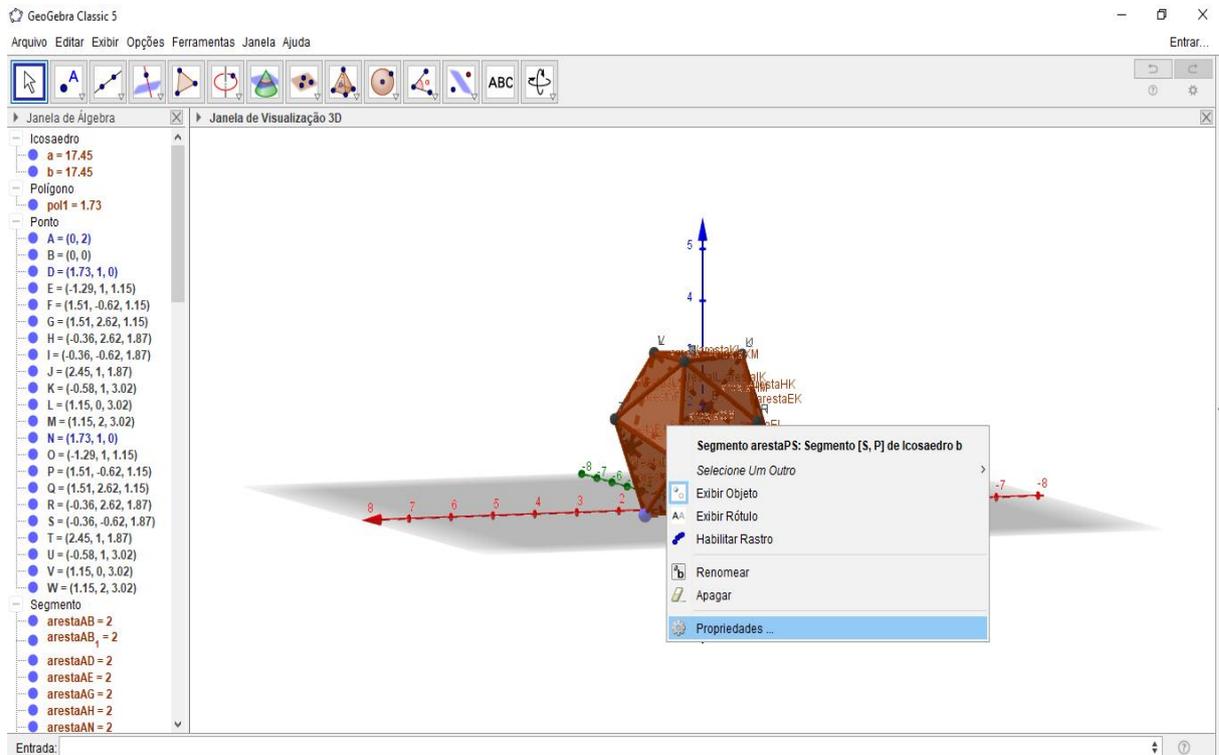


Figura 3.14: Construindo icosaedro

6. Abrir uma nova janela, nesta é possível alterar a cor das faces do sólido, basta clicar em triângulos (na janela algébrica) para selecionar as faces desejadas e escolher a cor;

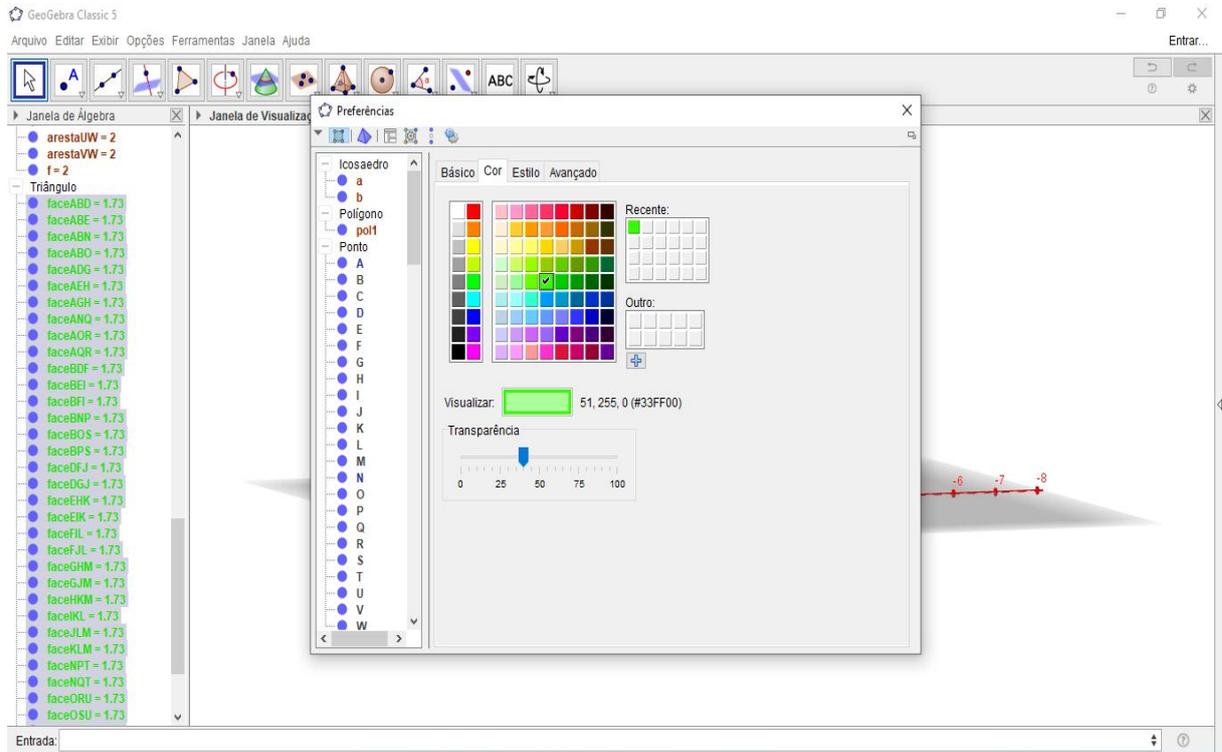


Figura 3.15: Construindo icosaedro

7. É possível alterar a cor na opção, **cor**;

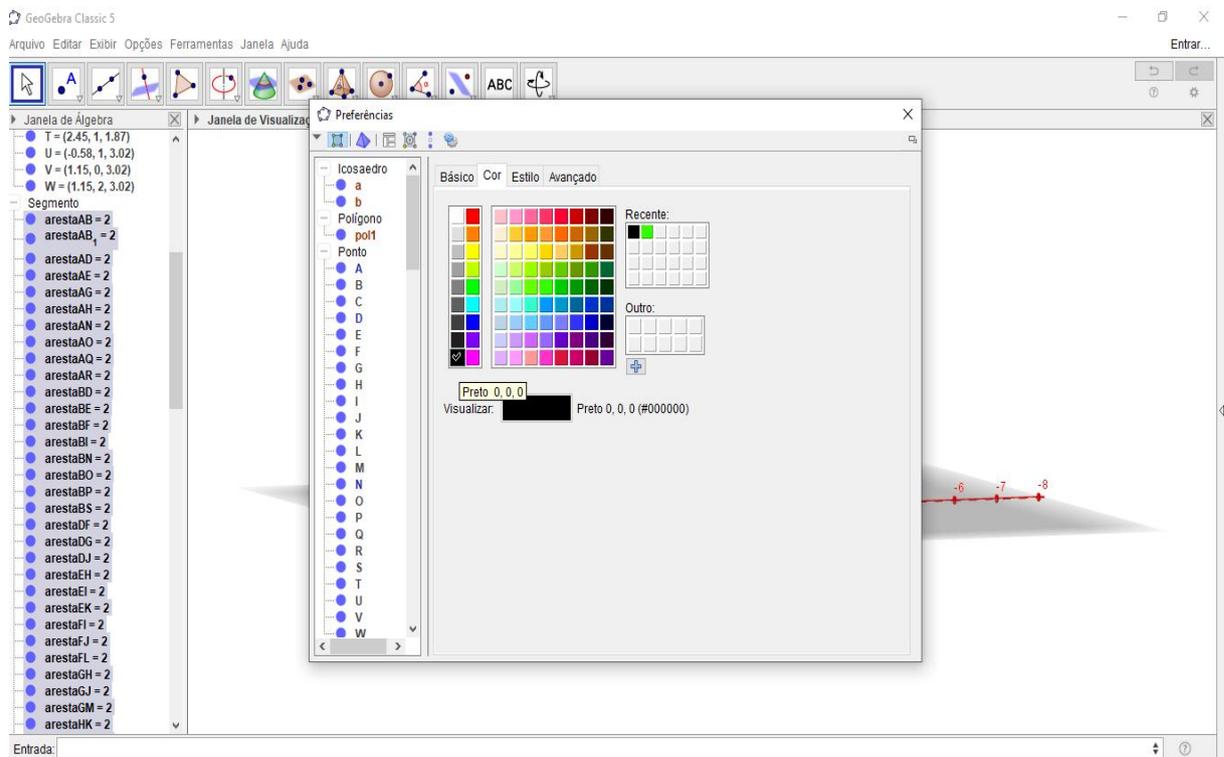


Figura 3.16: Construindo icosaedro

8. É também possível alterar a espessura das arestas e dos vértices na opção **Estilo**;

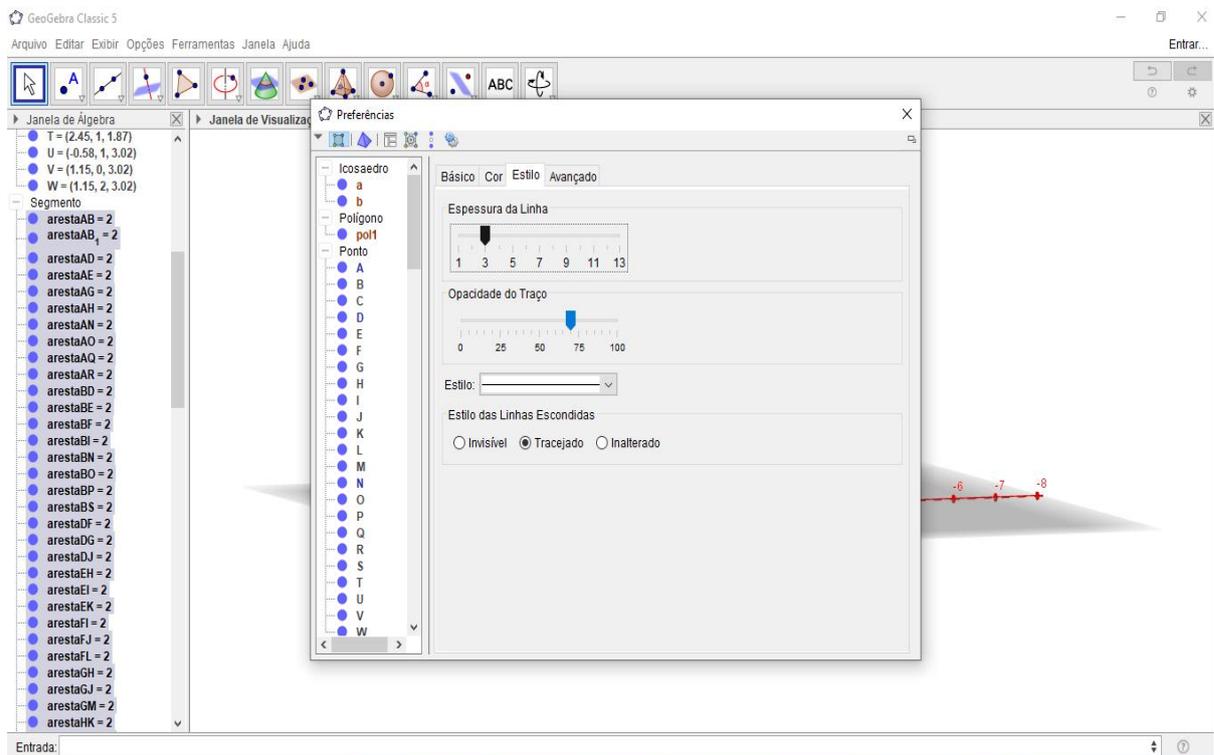


Figura 3.17: Construindo Icosaedro

9. Clicando em triângulo na janela algébrica para selecionar as faces e depois com o botão direito do mouse e em seguida em **Exibir Rótulo**, irá ocultar os nomes das faces do icosaedro, o mesmo pode ser feito com os vértices e as arestas.

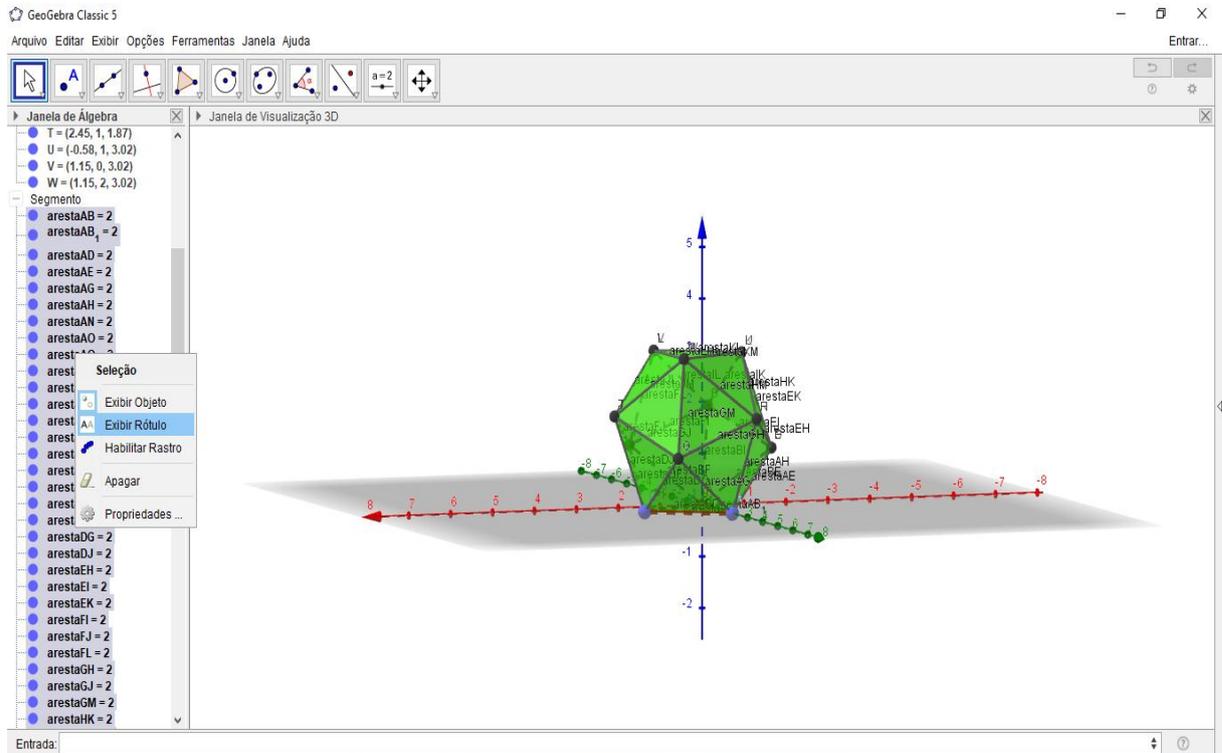


Figura 3.18: Construindo icosaedro

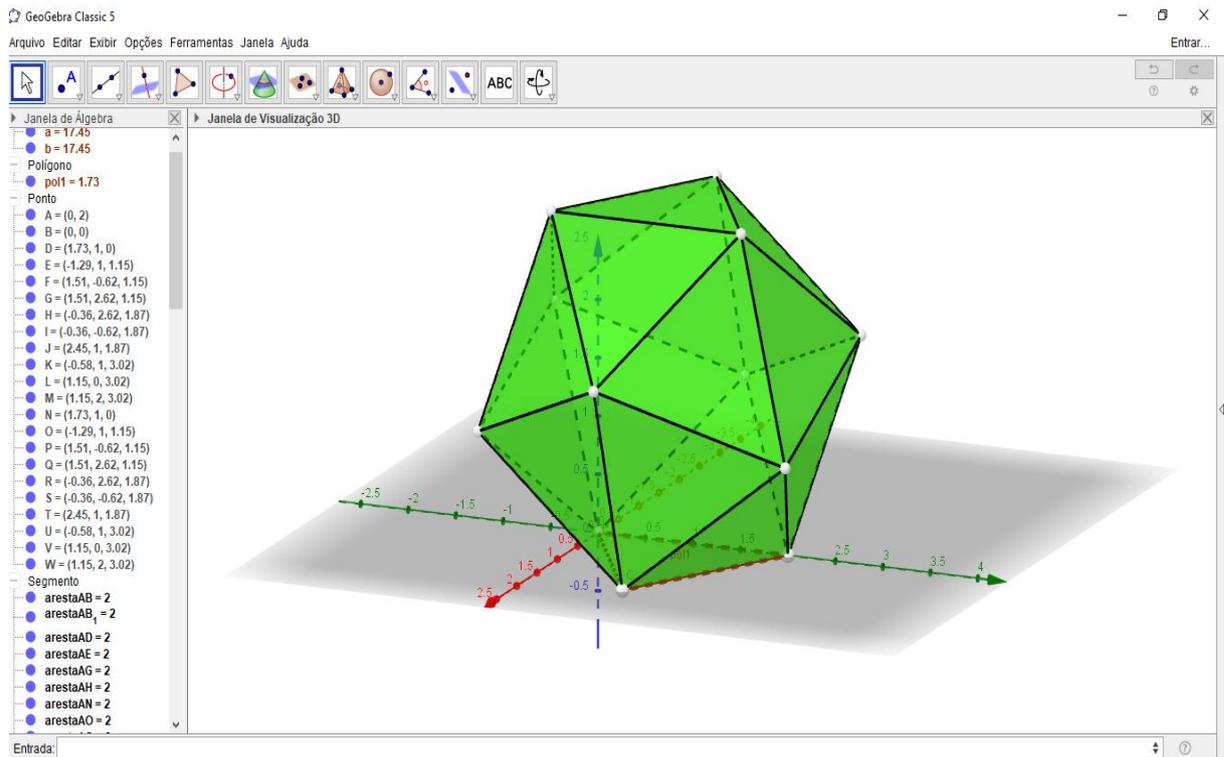


Figura 3.19: Construindo icosaedro

10. Marque os dois vertices de cada duas arestas opostas no icosaedro, indo na barra de ferramentas na segunda janelinha clique em **Inerseção de dois objetos** e em seguida clique em uma aresta por vez selecionando-as para que o vertice seja criado, vá a quinta janelinha em **Poligono** e em seguida clique nos quatro vértices que acabaram de ser criados;

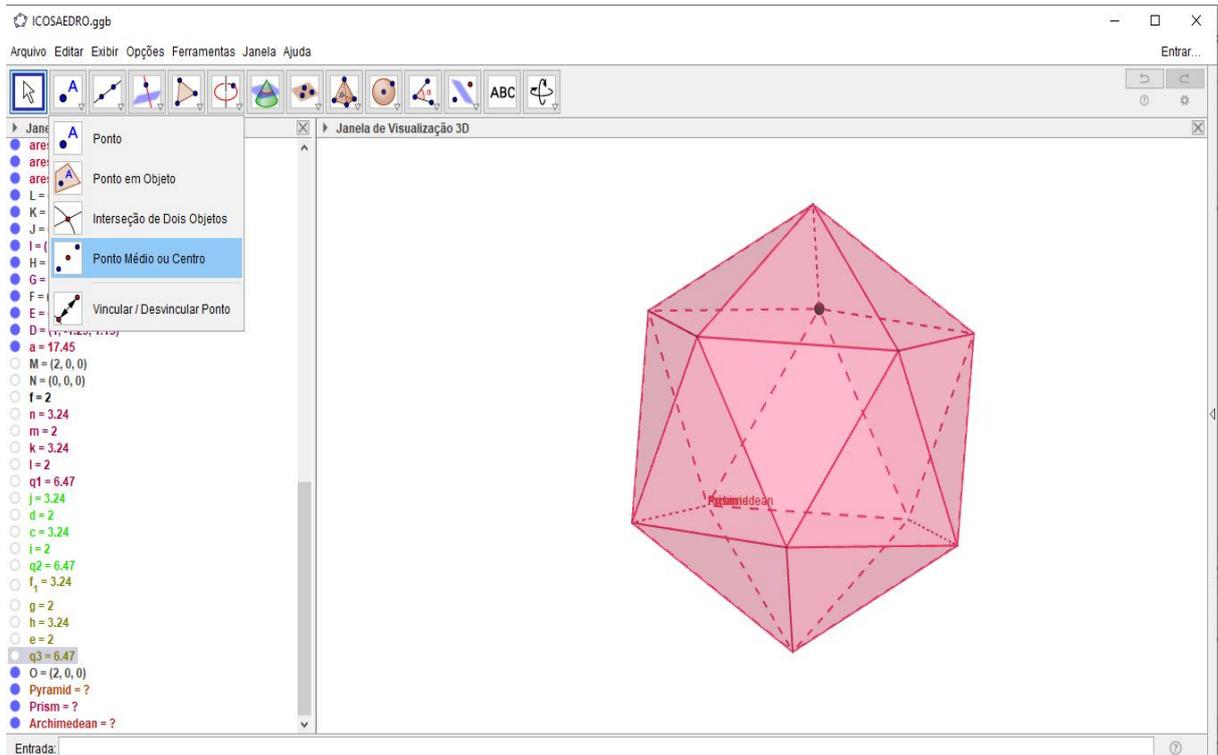


Figura 3.20: Construindo o retângulo

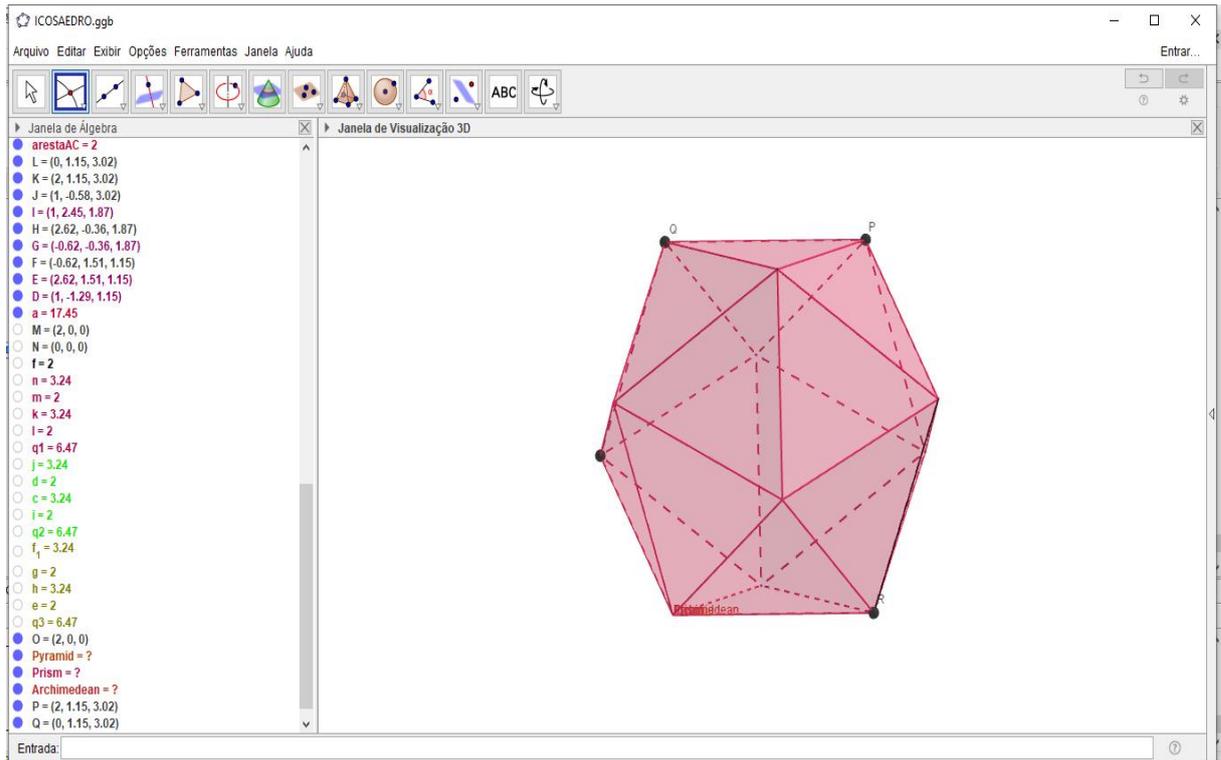


Figura 3.21: Construindo o retângulo

11. As cinco faces do icosaedro que cercam qualquer vértice determinam um pentágono. Verifique que as 20 faces são triângulos equiláteros, e cada par de arestas opostas podem formar um retângulo e a razão entre os lados desses retângulo e bem próximo de  $\phi$ .

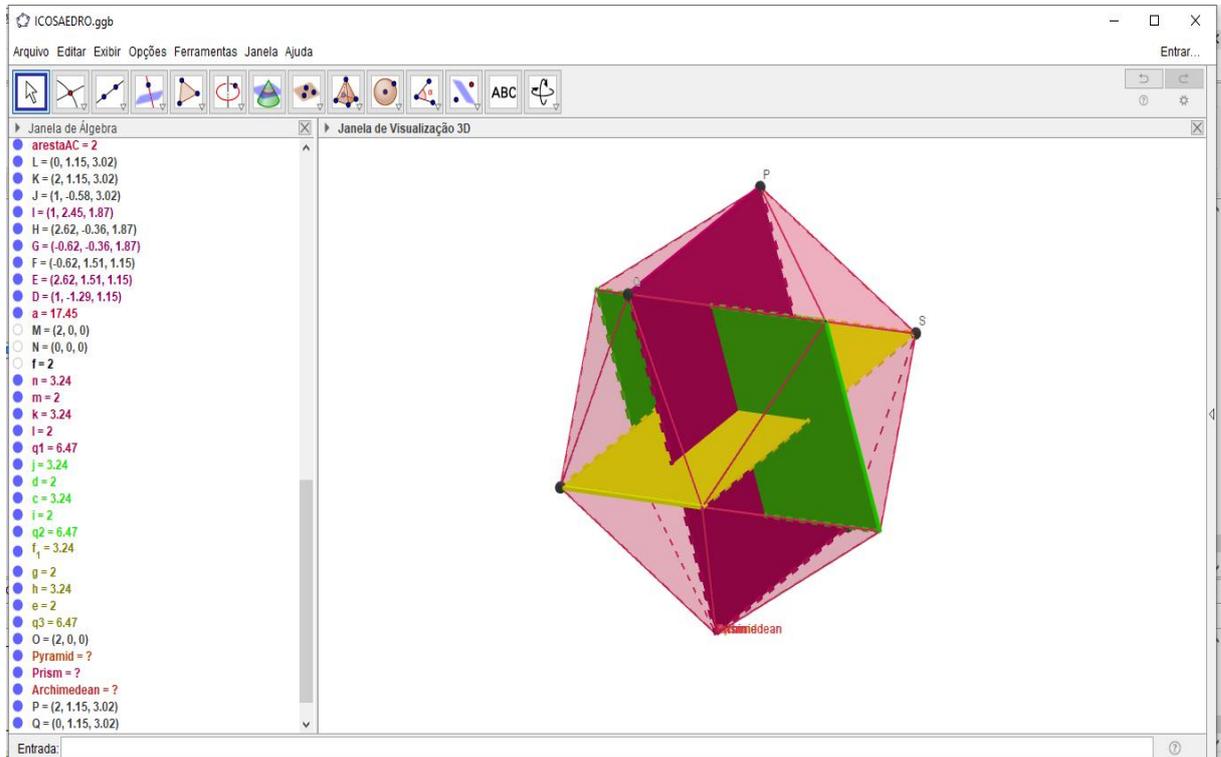


Figura 3.22: Construindo o retângulo

## Considerações finais

A partir dessa pesquisa investigativa que relaciona conceitos matemáticos com a natureza e vários feitos humanos ao longo da história, pode-se incentivar a exploração dos termos como a sequência de Fibonacci, a proporção áurea e a espiral logarítmica. Além disso, os estudantes possam relacionar as várias formas presentes na natureza, na arte e na arquitetura utilizando argumentos matemáticos.

O ensino de Matemática não deve ficar preso à decoração de fórmulas e práticas de metodologias tradicionais. A busca por metodologia de ensino que estimule o gosto do estudante pelo ensino matemático deve ser constante. Nesse sentido, a proposta envolvendo construções geométricas é um assunto nutrido de formas e técnicas que podem auxiliar o professor a alcançar esses objetivos.

Além disso, podemos trabalhar razão áurea através da sequência de Fibonacci. Esses interessantes números poderiam ser uma alternativa para o trabalho de sequências no ensino básico, uma vez que são apenas trabalhadas as progressões aritméticas e as geométricas. Uma alternativa para enriquecer o trabalho é apresentar a sequência de Fibonacci e chegar assim a razão áurea.

# Referências Bibliográficas

- Anastácio, L. R. e Ferreira, F. N. (2015). Razão áurea: um rico tesouro de surpresas.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação, Brasília.
- CARVALHO, P. C. P. e MORGADO, A. C. d. O. (2014). Matemática discreta: coleção profmat. *Rio de Janeiro: SBM*.
- Clickideia, P. (2019). URL: <http://www.clickideia.com.br/portal/conteudos/c/34/25433>,. Acesso 20 de ago de 2022.
- Conceição, A. M. (2012). URL: <http://cnat7.blogspot.com/2012/01/numero-de-ouro.html>. Acesso 19 de ago de 2022.
- Coruja (2019). URL: <https://www.insoonia.com/o-numero-perfeito/>. Acesso 19 de ago de 2022.
- CRUZ, T. (2022). URL: <https://www.vivadecora.com.br/pro/proporcao-aurea/>. Acesso 20 de ago de 2022.
- Dunlap, R. A. (1997). *The golden ratio and Fibonacci numbers*. World Scientific.
- Eliogualberto (2020). URL: <https://gerenciadeobras.com.br/proporcao-aurea-nas-construcoes/>,. Acesso 20 de ago de 2022.
- Lauro, M. M. (2005). A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. *Exacta*, (3):35–48.
- Linck, L. A. (2017). A história da matemática no ensino da geometria: uma contextualização pela razão áurea.
- Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Crown.

- Martins, R. (2016). URL: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/07/a-sequencia-de-fibonacci/>. Acesso 19 de ago de 2022.
- Meisner, G. B. (2018). *The golden ratio: The divine beauty of mathematics*. Race Point Publishing.
- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Nonel, A. (2011). URL: <https://aespeculadora.blogspot.com/2011/03/razao-de-ouro-e-natureza.html>. Acesso 19 de ago de 2022.
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, 1(1).
- Piropo, B. (2007a). URL: <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070402.htm>. Acesso 19 de ago de 2022.
- Piropo, B. (2007b). URL: <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>. Acesso 20 de ago de 2022.
- Posamentier, A. S. e Lehmann, I. (2011). *The glorious golden ratio*. Prometheus Books.
- Santos, J. (2015). URL: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/06/razao-aurea-numero-ouro.html>. Acesso 19 de ago de 2022.
- Says, M. (2014). URL: <https://ipemsp.wordpress.com/tag/numero-aureo/>. Acesso 20 de ago de 2022.
- Stumpf, M. (2020). URL: <https://estagiositiodosherdeiros.blogspot.com/2020/01/flor-de-cera-hoya-carnosa.html>. Acesso 19 de ago de 2022.