



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Carlos Gonzaga da Silva Júnior

Geometria Inversiva: A Transformação de Mutualidade Entre Retas e Circunferências

Campina Grande - PB

Dezembro/2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Carlos Gonzaga da Silva Júnior

Geometria Inversiva: A Transformação de Mutualidade Entre Retas e Circunferências

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB

Dezembro/2022

S586g

Silva Júnior, Carlos Gonzaga da.

Geometria inversiva: a transformação de mutualidade entre retas e circunferências / Carlos Gonzaga da Silva Júnior. – Campina Grande, 2022.

106 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes".

Referências.

1. Geometria. 2. Geometria Inversiva. 3. Problemas Clássicos – Inversão Geométrica. 4. Geogebra. 5. Transformações de Möbius. I. Fernandes, José de Arimatéia. II. Título.

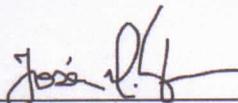
CDU 514(043)

Carlos Gonzaga da Silva Júnior

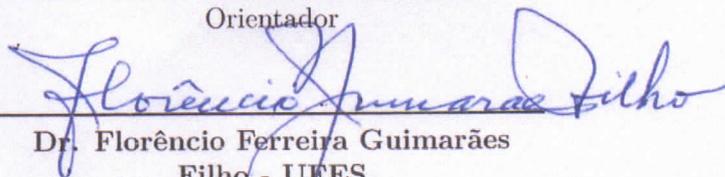
Geometria Inversiva: A Transformação de Mutualidade Entre Retas e Circunferências

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

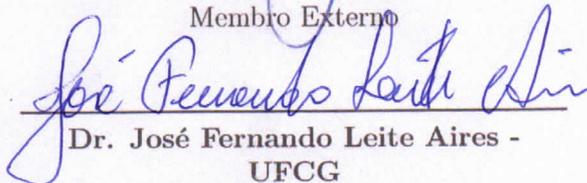
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 16 de dezembro de 2022:



Dr. José de Arimatéia Fernandes
Orientador



Dr. Florêncio Ferreira Guimarães
Filho - UFES
Membro Externo



Dr. José Fernando Leite Aires -
UFCG
Membro Interno

Campina Grande - PB
Dezembro/2022

Dedico este trabalho à minha família por sempre me incentivar e apoiar nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus pelo dom da vida, por sempre me guiar e iluminar os meus caminhos.

À minha mãe, Maria Cilene Melo da Silva, por todo amor, carinho e apoio durante essa caminhada.

Ao meu pai, Carlos Gonzaga da Silva, por todos os ensinamentos e pelos seus sacrifícios, de noites mal dormidas, com o intuito de trazer o sustento para casa.

Ao meu irmão, Érick Gonzaga da Silva, pelo incentivo e apoio em todos os momentos.

À minha namorada, Carine Maria de Melo Cosmos, por todo amor, carinho, cumplicidade e entendimento durante esse período de dedicação a este trabalho.

Ao professor, Dr. José de Arimatéia Fernandes, pela orientação, dedicação e, sobretudo, pelo apoio durante a construção deste trabalho.

Aos professores, Dr. José Fernando Leite Aires e Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, por terem aceitado o convite para compor à banca deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Aos colegas de turma, em especial, aos amigos Wirander Pereira e Wellington Faustino, companheiros das viagens para a ida ao curso.

Ao professor, Me. Bruno Lopes Oliveira da Silva, pelo apoio na graduação e, em especial, pelos ensinamentos durante o curso de mestrado.

Ao professor, Me. Olavo Otávio Nunes (in memoriam), por todos os ensinamentos e por ter me ajudado a despertar o interesse pela matemática.

Aos professores do PROFMAT-UFCG, por toda dedicação e ensinamento.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pelo oferecimento deste curso em Rede Nacional.

*“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida,
e depois que decidir,
não recue ante nenhum pretexto,
pois o mundo tentará te dissuadir.”
(Friedrich Nietzsche)*

Resumo

Resumo: Na tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides, surgiram as geometrias não euclidianas. Dentre essas geometrias não euclidianas, destacamos a Geometria Inversiva, desenvolvida pelo matemático Jacob Steiner (1796-1863). Este presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a Geometria Inversiva, dando ênfase nas propriedades básicas, nos três problemas clássicos: Porisma de Steiner, Teorema de Feuerbach e Problema de Apolônio. Além disso, trouxemos problemas de nível olímpico que são resolvidos através das propriedades de inversão e as transformações de Möbius que relaciona inversão e números complexos. Para construir as figuras, usamos o software de Geometria dinâmica: o GeoGebra.

Palavras-chave: Geometria Inversiva. Problemas Clássicos. Geogebra. Transformações de Möbius.

Abstract

In an attempt to demonstrate Euclid's fifth postulate, non-Euclidean geometries emerged. Among these non-Euclidean geometries, we highlight the Inversive Geometry, developed by the mathematician Jacob Steiner (1796-1863). This present work aims to present a study on Inversive Geometry, emphasizing the basic properties of the three classical problems; Steiner's Porism, Feuerbach's Theorem and Apollonius' Problem. In addition, we brought Olympic-level problems that are solved through the inversion properties and the Möbius transformations that relate inversion and complex numbers. To build the figures, we used the Dynamic Geometry software: GeoGebra.

Keywords: Inversive Geometry. Classic Problems. Geogebra. Möbius transformations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Lobachevsky (à esquerda) e Bolya (à direita).	17
Figura 2 – Gauss (à esquerda) e Riemann (à direita).	18
Figura 3 – Beltrami (à esquerda), Klein (ao centro) e Poincaré (à direita).	19
Figura 4 – Jacob Steiner.	20
Figura 5 – caso de congruência LAL.	22
Figura 6 – caso de congruência LLL.	22
Figura 7 – caso de congruência ALA.	22
Figura 8 – caso de congruência LAA_o .	23
Figura 9 – caso de congruência CH.	23
Figura 10 – retas paralelas cortadas por uma transversal.	24
Figura 11 – teorema do ângulo externo.	24
Figura 12 – semelhança entre os triângulos ABC e DEF .	25
Figura 13 – caso de semelhança LLL.	26
Figura 14 – caso de semelhança LAL.	26
Figura 15 – caso de semelhança AA.	27
Figura 16 – relações métricas no triângulo retângulo.	28
Figura 17 – circunferência.	29
Figura 18 – $P \in (\text{mediatriz de } AB) \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.	30
Figura 19 – $P \in (\text{mediatriz de } AB) \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.	30
Figura 20 – $P \in (\text{bissetriz de } \widehat{AOB}) \Leftrightarrow \overline{PM} = \overline{PN}$.	31
Figura 21 – Divisão harmônica.	32
Figura 22 – existência dos pontos P e Q .	33
Figura 23 – P e Q divisores harmônicos de AB .	34
Figura 24 – propriedade da existência de uma circunferência.	35
Figura 25 – ângulo central.	37
Figura 26 – ângulos inscritos.	38
Figura 27 – ângulo inscrito.	38
Figura 28 – ângulos de segmentos.	39
Figura 29 – ângulo de segmento.	39
Figura 30 – tangentes à circunferência.	40
Figura 31 – circunferências tangentes exteriores entre si e a uma reta.	41
Figura 32 – o teorema das cordas.	42
Figura 33 – caso limite do teorema das cordas.	43
Figura 34 – potência de ponto P em relação à Σ .	44
Figura 35 – quadrilátero inscritível $ABCD$.	45

Figura 36 – quadrilátero inscrito.	46
Figura 37 – quadrilátero cíclico.	46
Figura 38 – o ponto P e o seu inverso P' pela circunferência Σ .	47
Figura 39 – construção do ponto inverso de P .	48
Figura 40 – os pontos A , B e O não colineares.	49
Figura 41 – os pontos A , B e O são colineares.	50
Figura 42 – inversão de uma reta l que não passa pelo centro.	51
Figura 43 – inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.	52
Figura 44 – construção da circunferência que não passa pelo centro de inversão.	53
Figura 45 – a inversão e os ângulos.	54
Figura 46 – ângulos entre retas.	55
Figura 47 – circunferências ortogonais.	56
Figura 48 – circunferências que não se intersectam e suas inversas concêntricas.	57
Figura 49 – Porisma de Steiner.	59
Figura 50 – circunferências concêntricas.	60
Figura 51 – cadeia de n circunferências.	61
Figura 52 – inversão na cadeia de n circunferências.	63
Figura 53 – Karl Wilhelm Feuerbach.	63
Figura 54 – circunferência dos nove pontos.	64
Figura 55 – circunferências ex-inscritas ao triângulo.	64
Figura 56 – Teorema de Feuerbach.	65
Figura 57 – circunferência de nove pontos.	69
Figura 58 – esboço do Problema de Apolônio, parte 1.	71
Figura 59 – esboço do Problema de Apolônio, parte 2.	72
Figura 60 – esboço do Problema de Apolônio, parte 3.	73
Figura 61 – esboço do Problema de Apolônio, parte 4.	74
Figura 62 – esboço do Problema de Apolônio, parte 5.	75
Figura 63 – esboço do problema 1, parte 1.	76
Figura 64 – esboço do problema 1, parte 2.	77
Figura 65 – esboço do problema 2, parte 2.	79
Figura 66 – esboço do problema 2, parte 2.	79
Figura 67 – esboço do problema 2, parte 3.	80
Figura 68 – esboço do problema 3.	81
Figura 69 – esboço do problema 4, parte 1.	82
Figura 70 – esboço do problema 4, parte 2.	82
Figura 71 – esboço do problema 5, parte 1.	83
Figura 72 – esboço do problema 5, parte 2.	84
Figura 73 – esboço do problema 6, parte 1.	85

Figura 74 – esboço do problema 6, parte 2.	85
Figura 75 – esboço do problema 7.	86
Figura 76 – esboço do problema 8.	87
Figura 77 – esboço do problema 9, parte 1.	89
Figura 78 – esboço do problema 9, parte 2.	90
Figura 79 – esboço do problema 10.	90
Figura 80 – fluxograma.	93
Figura 81 – esboço do problema A.1, parte 1.	102
Figura 82 – esboço do problema A.3, parte 1.	103
Figura 83 – esboço do problema A.1, parte 2.	104
Figura 84 – esboço do problema A.2	105
Figura 85 – esboço do problema A.3, parte 2.	106

Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades da Inversão	58
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	13
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos Específicos	14
1.2	Organização	14
2	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA	16
2.1	O Quinto Postulado de Euclides e As Geometrias Não-Euclidianas	16
2.2	As Transformações Geométricas e Suas Caracterizações	19
2.3	Jacob Steiner e o Legado da Geometria Inversiva	19
3	NOÇÕES PRELIMINARES	21
3.1	Triângulos	21
3.1.1	Congruência de Triângulos	21
3.1.2	Teorema do Ângulo Externo	23
3.1.3	Semelhança de Triângulos	25
3.2	Lugares Geométricos	29
3.3	Divisão Harmônica	31
3.4	Circunferências	37
3.4.1	Ângulos na Circunferência	37
3.4.2	Propriedades Entre Tangentes e Circunferências	40
3.4.3	Relações Métricas na Circunferência e Potência de Ponto	42
3.5	Quadriláteros Inscritíveis	44
4	INVERSÃO E PROPRIEDADES	47
4.1	Construção do Ponto Inverso	47
4.2	Propriedades da Inversão	49
4.2.1	A Inversão e as Distâncias	49
4.2.2	A Inversão e as Retas	50
4.2.3	A Inversão e as Circunferências	51
4.2.4	A Inversão e os Ângulos	54
4.3	Circunferências Ortogonais	55
4.3.1	Ortogonalidade e Inversão	56
4.4	Circunferências Concêntricas	56

5	OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA INVERSÃO GEOMÉ-	
	TRICA	59
5.1	O Porisma de Steiner	59
5.2	O Teorema de Feuerbach	63
5.3	O Problema de Apolônio	69
6	A INVERSÃO GEOMÉTRICA EM PROBLEMAS OLÍMPICOS	76
7	TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS E INVERSÕES	93
8	CONCLUSÕES	98
	REFERÊNCIAS	99
	APÊNDICES	101
	APÊNDICE A – PROBLEMAS PROPOSTOS	102
	APÊNDICE B – SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS	104

1 Introdução

A Matemática é uma ciência que está em constante evolução. Em particular, um de seus ramos, a Geometria, desenvolvida por Euclides de Alexandria, em torno de 300 a.E.C, é ensinada atualmente desde os níveis básicos de ensino até os cursos de graduação em Matemática tal qual fora apresentada no livro Elementos de Euclides, porém com a linguagem modernizada.

Agora, o que talvez alguns alunos e até professores não saibam é que, essa geometria apresentada e desenvolvida por Euclides, ao longo da história, deu origem à diversas outras geometrias, especificamente, as geometrias não-euclidianas. As quais surgiram na tentativa frustrada de se demonstrar o quinto postulado, proposto por Euclides no livro Elementos, o qual detalharemos no capítulo dois deste presente trabalho.

Dentre as geometrias não euclidianas, podemos destacar a Geometria Inversiva que é considerada, conforme (OLIVEIRA, 2007), como uma poderosa ferramenta para resolver problemas de caráter geométrico que, aparentemente, seriam irresolúveis pela geometria plana desenvolvida por Euclides.

Com o intuito de desenvolver uma proposta que permita ao professor leitor deste trabalho ter contato com essa geometria e, possivelmente, levá-la para a sala de aula e compartilhá-la com seus alunos, apresentamos este estudo.

Assim, diante do que foi exposto, nesse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do PROFMAT - UFCG, apresentaremos uma pesquisa bibliográfica com ênfase no estudo da Geometria Inversiva, cujo desenvolvimento deu-se pela curiosidade em relação ao objeto de estudo e pela potencialidade dessa ferramenta em resolver determinados problemas de geometria.

É importante ressaltar que, na construção do nosso trabalho, tomamos como referência as obras de (SPIRA, 2004), (ROQUE; CARVALHO, 2012), (OLIVEIRA, 2007), (GREENBERG, 1993), (COXETER, 1969), (SOUSA et al., 2014), (NETO, 2012), (PROBLEMAS; CAPITÁN,), (SACHS, 2016), entre outros os quais citaremos ao longo de nosso trabalho.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta de trabalho para o estudo da Geometria Inversiva.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar uma breve contextualização histórica sobre as geometrias não euclidianas e, em particular, sobre o surgimento da Geometria Inversiva;
- Mostrar definições e propriedades da Geometria Inversiva;
- Expor e discutir os problemas clássicos dessa geometria;
- Resolver problemas olímpicos fazendo uso dessa ferramenta;
- Aplicar o conceito de inversão na transformação de Möbius.

1.2 Organização

Com o intuito de atender aos objetivos designados na subseção 1.1, este trabalho apresenta oito capítulos os quais estão organizados da seguinte forma: no primeiro capítulo, considerado como a introdução, destacamos a existência das geometrias não-euclidianas, enfatizando a Geometria Inversiva, a metodologia da pesquisa, a motivação para a escolha e estudo do tema, alguns autores relevantes para a construção deste trabalho, seguidos dos objetivos e da estrutura.

No segundo capítulo, apresentaremos uma breve contextualização histórica tratando sobre o quinto postulado de Euclides e o surgimento das geometrias não euclidianas. Além disso, falaremos também sobre Jacob Steiner (1796 - 1863) um dos personagens principais do nosso trabalho que é o responsável por introduzir o conceito de inversão com relação a uma circunferência.

Em relação ao terceiro capítulo, mostraremos algumas noções preliminares de conteúdos que julgamos ser pré-requisitos para um melhor entendimento do que será exposto neste trabalho, através de definições e demonstrações. Dentre esses conteúdos que serão mostrados, podemos destacar: lugar geométrico, divisão harmônica, quadriláteros inscritíveis, relações métricas na circunferência e potência de ponto.

Já, no quarto capítulo, que trataremos a “cereja do bolo”, o nosso personagem principal: a Geometria Inversiva. Neste capítulo iremos apresentar as definições e as propriedades das inversões.

No quinto capítulo, apresentaremos os três problemas clássicos da Geometria Inversiva: o Problema de Apolônio, o Porisma de Steiner e o Teorema de Feuerbach.

No que se refere ao sexto capítulo, exploraremos diversas aplicações da inversão geométrica na resolução de problemas de olimpíadas, destacando a importância dessa ferramenta para “atacar” problemas que, aparentemente, são irresolúveis diante da geometria euclidiana plana.

No que diz respeito ao sétimo capítulo, definiremos a Transformação de Möbius e, a partir disso, iremos mostrar algumas propriedades interessantes e os efeitos causados por essa transformação em circunferências no plano. Vale ressaltar que, não faremos distinção entre circunferências e círculos, ou seja, os dois entes geométricos vão possuir o mesmo significado.

Por fim, no oitavo e último capítulo, mostraremos as conclusões desta presente pesquisa, as referências usadas na construção deste trabalho e os apêndices A e B com os problemas propostos e, as respectivas resoluções, para o leitor desfrutar.

2 Contextualização Histórica

Historicamente, a Geometria era considerada, especialmente pelos gregos, fundamental para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Nesse contexto, destacamos que o mais antigo texto matemático produzido pela civilização grega é a obra desenvolvida por Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.E.C, denominada *Os Elementos*.

Conforme Roque e Carvalho (2012), a obra “*Os Elementos*” de Euclides é constituída por treze livros divididos em três grandes partes: 1) Geometria plana - Livros I - VI, 2) Aritmética - Livros VII - IX e 3) Geometria Espacial XI - XIII, além do livro X que trata dos irracionais e, em particular, dos segmentos de retas incomensuráveis. Esses treze livros expõem diversos tipos de resultados, organizados sistematicamente, tendo sido muitos deles atribuídos a outros geômetras, alguns até anteriores a Euclides.

Ainda sobre o livro “*Os Elementos*”, o método utilizado pelo livro é o *axiomático-dedutivo* que consiste em aceitar alguns fatos e resultados como evidentes e intuitivos (definições, postulados e axiomas) e, a partir destes, demonstrar as consequências (teoremas) e resolver problemas. Das definições, axiomas e postulados presentes na obra de Euclides, daremos ênfase àquele postulado cujo título está na seção imediatamente posterior. É importante ressaltar que, atualmente, não se faz distinções entre axiomas e postulados.

2.1 O Quinto Postulado de Euclides e As Geometrias Não-Euclidianas

É no livro I, de “*Os Elementos*” de Euclides que encontramos os cinco postulados dentre os quais destacaremos o quinto tal qual consta na obra (ROQUE; CARVALHO, 2012):

“E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.”

Aparentemente, quando se lê a primeira vez, o quinto postulado, é causado um certo desconforto devido a sua linguagem rebuscada, o que inclusive, acabou incitando diversos matemáticos a tentar deduzi-lo a partir dos outros postulados. Diante disso, podemos citar alguns matemáticos que tentaram provar, sem sucesso, o quinto postulado de Euclides: Ptolomeu (90 - 168), Proclus (412 - 485), Al Haytam (965 - 1040), Al Tusi (1201 - 1274), Saccheri (1667 - 1733), Lambert (1728 - 1777) e Legendre (1752 - 1833).

Na tentativa de demonstração do quinto postulado, proposto por Euclides, surgiram diversas equivalências, dentre essas, destacamos a “*equivalência das paralelas*”, que surgiu em 1795 através do matemático John Playfair (1748 - 1819), mas que já havia sido citado por Proclus em sua obra “Comentários” a respeito do livro I de Euclides. A “*equivalência das paralelas*” é conhecida atualmente por “*postulado das paralelas*” cujo enunciado está descrito em (BONGIOVANNI; JAHN, 2010) o qual consta a seguir:

“Por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.”

Na Matemática, assim como em outras ciências, as descobertas não acontecem de forma instantânea. Muitas vezes, algo interessante surge na ciência quando ocorre uma convergência de ideias entre pessoas, quase que de maneira simultânea, na mesma época. Foi a partir das tentativas frustradas de demonstrar a equivalência das paralelas do quinto postulado de Euclides que, por volta do século XIX, surgiram as geometrias não euclidianas.

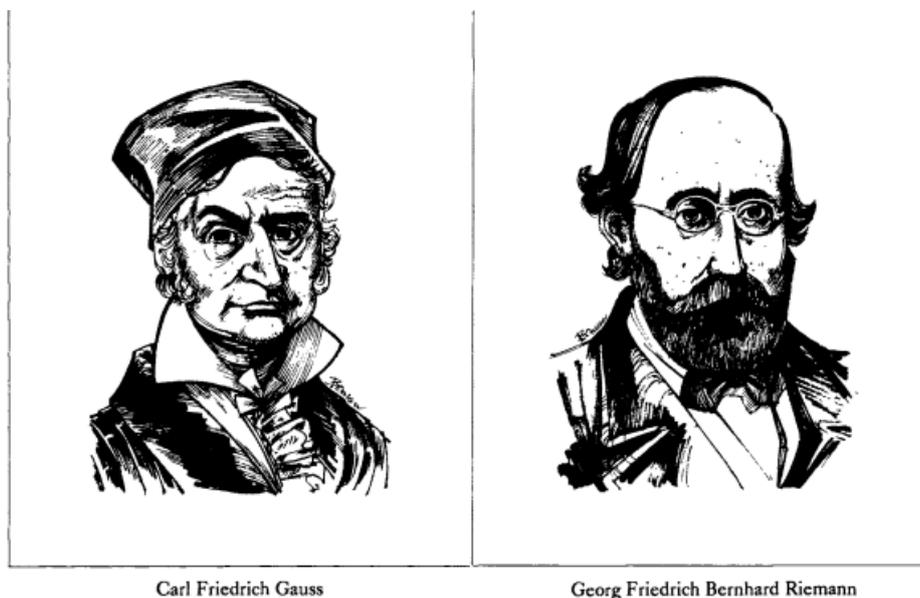
Notou-se que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado - de fato, tratava-se de um postulado -, poderia ser negado, sem que contradições ocorressem. Quatro matemáticos merecem grande destaque nesse episódio: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860), Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) e Bernhard Riemann (1826 - 1866). (SACHS, 2016)

Figura 1 – Lobachevsky (à esquerda) e Bolyia (à direita).



Fonte: ((GREENBERG, 1993), p. 199 - 204.)

Figura 2 – Gauss (à esquerda) e Riemann (à direita).

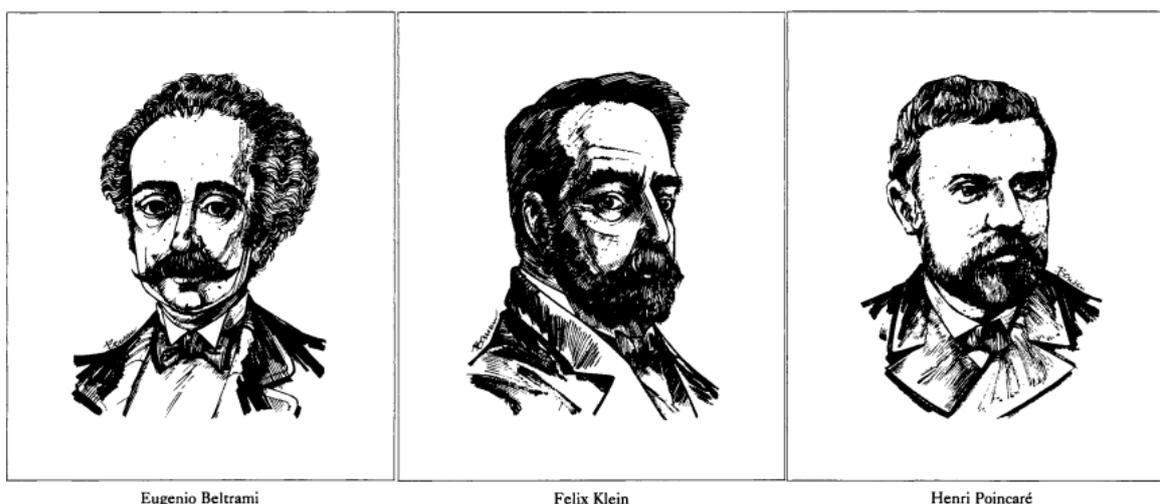


Fonte: ((GREENBERG, 1993), p. 199 - 204)

A partir daí, surgiu o dilema: quem descobriu a geometria não euclidiana? O que se sabe é que, com o intuito de negar o quinto postulado, Lobachevsky foi o primeiro a publicar essa teoria, em 1829, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas. Com isso, Lobachevsky foi considerado o precursor da geometria não euclidiana. Mais tarde, descobriu-se que Bolyai e Gauss também haviam desenvolvido essa teoria de forma independente. Essa geometria desenvolvida por eles é a chamada *Geometria Hiperbólica*.

Outro matemático que tentou negar o quinto postulado de Euclides e acabou levando à criação de uma outra geometria não-euclidiana foi o Riemann em 1854, porém ele sugeriu uma outra negação: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada. Assim, essa outra geometria não euclidiana é conhecida por *Geometria Esférica*. Entretanto, essa “nova geometria” elaborada por Lobachevsky, Gauss e Bolyia, precisava de demonstrações para que não houvesse contradições na teoria, o que só foi possível entre os anos de 1869 a 1881 através do chamado método dos modelos, pelos matemáticos Beltrami, Klein e Poincaré. (BONGIOVANNI; JAHN, 2010)

Figura 3 – Beltrami (à esquerda), Klein (ao centro) e Poincaré (à direita).



Eugenio Beltrami

Felix Klein

Henri Poincaré

Fonte: ((GREENBERG, 1993) p. 227, 228 e 234)

2.2 As Transformações Geométricas e Suas Caracterizações

No ano de 1872, Klein apresentou um trabalho cujo título é “Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas.” Nesse trabalho ele propôs uma fusão entre ramos da matemática que aparentemente eram dissociados com o intuito de relacionar a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas através da teoria dos grupos. Para ele, as transformações de translação, rotação e reflexão constituem o grupo das isometrias e, adicionando-se a esse último grupo a homotetia, juntas compõem o chamado “grupo de semelhança.” (BONGIOVANNI; JAHN, 2010).

Atualmente, quando aplicamos uma transformação em figuras que pertencem ao “grupo de semelhança” e elas permanecem inalteradas, dizemos que elas fazem parte da geometria euclidiana. Agora, o que será que acontece quando aplicamos uma transformação em uma figura geométrica e ela sofre uma alteração, por exemplo, ficando invertida? Para essa transformação dá-se o nome de inversão.

2.3 Jacob Steiner e o Legado da Geometria Inversiva

Embora pareça bastante provável que as noções primitivas de inversão tenham surgido na obra perdida de Apolônio (262 - 200 a.E.C), “Lugares geométricos planos”, o que se acredita é que a noção de “pontos inversamente relacionados” era bem conhecida no século XVI. Entretanto, o uso da inversão no estudo de problemas geométricos não havia aparecido, efetivamente, antes do século XIX.

Somente a partir do século XIX, que surgiu uma grande descoberta envolvendo a geometria que revolucionaria a forma de resolver determinados problemas geométricos: a inversão geométrica. A essa descoberta revolucionária, credita-se ao geômetra suíço Jacob Steiner (1796 - 1863), que nos deixou o seu legado envolvendo a geometria inversiva, a qual nos promove uma outra perspectiva a respeito da geometria, ultrapassando as barreiras da limitação que, por vezes, é encontrada na geometria euclidiana. (OLIVEIRA, 2007).

Figura 4 – Jacob Steiner.



JACOB STEINER (1796 - 1863)

Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steiner/>

3 Noções Preliminares

Este capítulo contém as definições, notações, convenções e alguns resultados básicos da geometria euclidiana. Por sua importância no que se refere ao uso da linguagem e notação, acreditamos que a leitura deste capítulo é crucial para uma melhor compreensão do que será apresentado neste trabalho. Antes de iniciarmos as seções deste capítulo, deixaremos claro para o leitor que, a partir deste momento, usaremos as seguintes notações:

- AB : segmento de extremidades nos pontos A e B ;
- \overline{AB} : medida do segmento AB ;
- \overrightarrow{AB} : semirreta de origem no ponto A que passa pelo ponto B ;
- \overleftrightarrow{AB} : reta que passa pelos pontos A e B ;
- \widehat{AB} : arco de extremidades nos pontos A e B ;
- \widehat{AOB} : medida do ângulo de vértice O formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} ;
- $\Sigma(O; r)$: circunferência Σ de centro O e raio r .

3.1 Triângulos

Nesta seção, traremos alguns resultados relevantes sobre triângulos como congruência, teorema do ângulo externo, semelhança e relações métricas no triângulo retângulo.

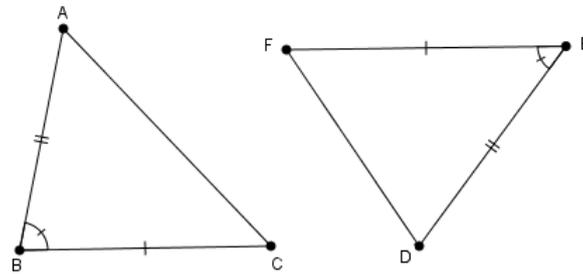
3.1.1 Congruência de Triângulos

Nesta subseção apresentaremos os casos de congruências de triângulos. É importante ressaltar que, para cumprir o objetivo deste trabalho, será suficiente listar os casos de congruência, sem a necessidade de demonstrá-los.

Caso 1: lado - ângulo - lado (LAL)

Se dois triângulos ABC e DEF têm dois lados e o ângulo formado por esses dois lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 5 – caso de congruência LAL.



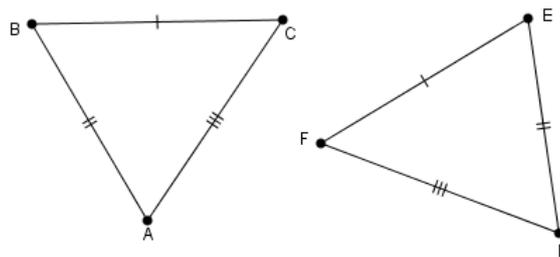
Fonte: O autor.

Os triângulos ABC e DEF , da Figura 5, são congruentes pelo caso lado - ângulo - lado, pois $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$.

Caso 2: lado - lado - lado (LLL)

Se dois triângulos ABC e DEF têm os três lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 6 – caso de congruência LLL.



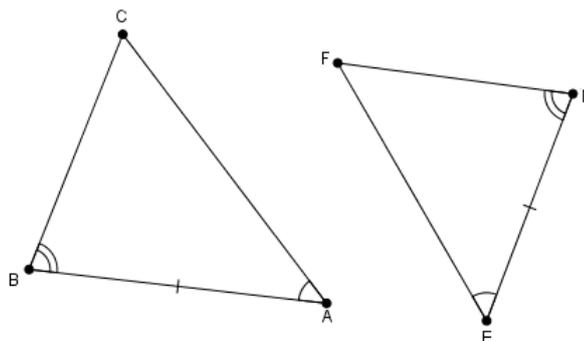
Fonte: O autor.

Na Figura 6, os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso lado - lado - lado, pois $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$.

Caso 3: ângulo - lado - ângulo (ALA)

Se dois triângulos ABC e DEF têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 7 – caso de congruência ALA.



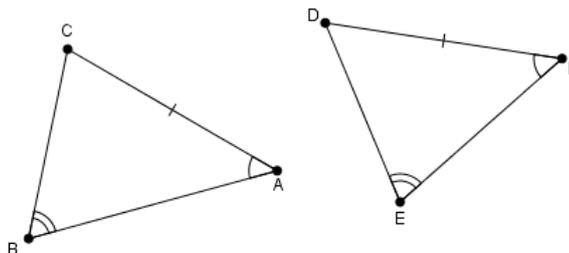
Fonte: O autor.

Perceba que, na Figura 7, os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso ângulo - lado - ângulo, pois $\widehat{CAB} = \widehat{FED}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\widehat{CBA} = \widehat{DFE}$.

Caso 4: lado - ângulo - ângulo oposto (LAA_o)

Se dois triângulos ABC e DEF têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 8 – caso de congruência LAA_o .



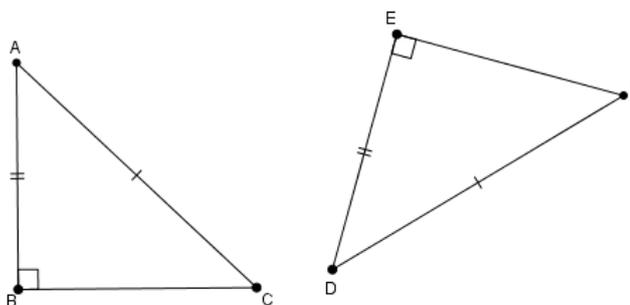
Fonte: O autor.

Nas notações da figura 8, os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso lado - ângulo - ângulo oposto, pois $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\widehat{CAB} = \widehat{DFE}$ e $\widehat{CBA} = \widehat{DEF}$.

Caso 5: Cateto - Hipotenusa (CH)

Se dois triângulos retângulos ABC e DEF têm um cateto e a hipotenusa respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 9 – caso de congruência CH.



Fonte: O autor.

Conforme Figura 9, os triângulos retângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso cateto - hipotenusa, pois $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 90^\circ$.

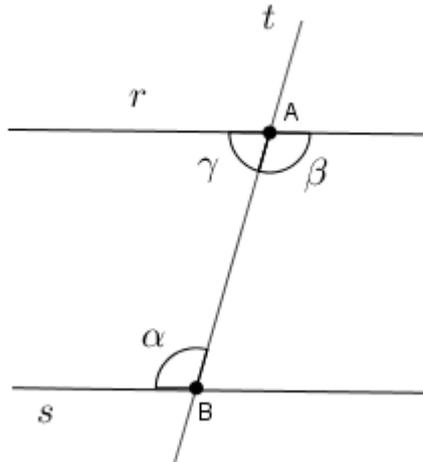
3.1.2 Teorema do Ângulo Externo

Iniciaremos essa subseção com um resultado bastante conhecido sobre triângulos: o teorema do ângulo externo. Para mostrarmos esse teorema, vamos considerar conhecidos os seguintes resultados:

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Se duas retas r e s são paralelas, então uma reta transversal t em relação às retas r e s , determina ângulos α , β e γ , tais que $\alpha = \beta$ e $\alpha + \gamma = 180^\circ$, onde α , β são denominados alternos internos e α , γ são denominados colaterais internos. (ver Figura 10)

Figura 10 – retas paralelas cortadas por uma transversal.

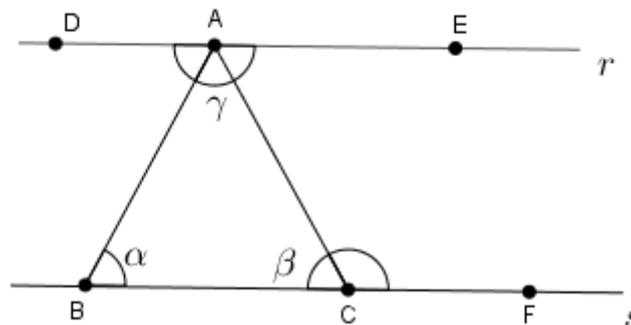


Fonte: O autor.

De posse dos resultados acima, já somos capazes de demonstrar o *teorema do ângulo externo*, conforme consta na proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos outros ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 11 – teorema do ângulo externo.



Fonte: O autor.

Demonstração. Nas notações da Figura 11, como $r \parallel s$, temos $\widehat{FCA} + \widehat{EAC} = 180^\circ$ e $\widehat{BCA} = \widehat{EAC} = \beta$. Além disso, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Assim, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ou seja, $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Daí,

segue-se que

$$\widehat{FCA} + \widehat{EAC} = 180^\circ \quad (3.1)$$

$$\widehat{FCA} = 180^\circ - \beta \quad (3.2)$$

$$\widehat{FCA} = \alpha + \gamma, \quad (3.3)$$

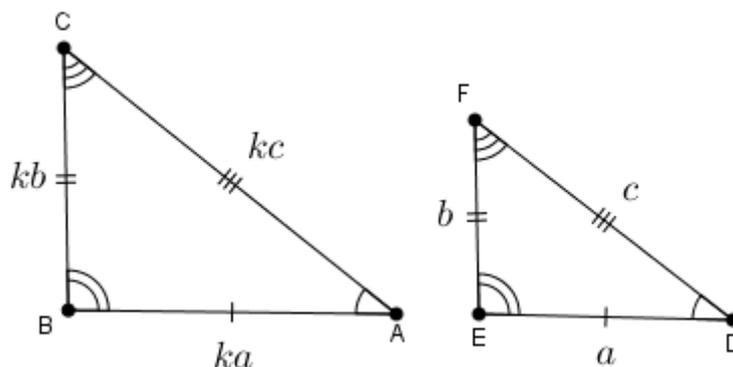
como queríamos. ■

3.1.3 Semelhança de Triângulos

Nesta subseção, traremos os casos de semelhança de triângulos, assim como fora feito na subseção [3.1.1](#). Iniciaremos com a definição de semelhança de triângulos.

Definição 3.1. *Dados dois triângulos ABC e DEF , dizemos que eles são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes são congruentes e se os lados correspondentes forem proporcionais.*

Figura 12 – semelhança entre os triângulos ABC e DEF .



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura [12](#), os triângulos ABC e DEF são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$. Daí, temos $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{FDE}$ e existe $k > 0$, tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k,$$

em que k é designado como a *razão de semelhança* entre os triângulos ABC e DEF , nessa ordem.

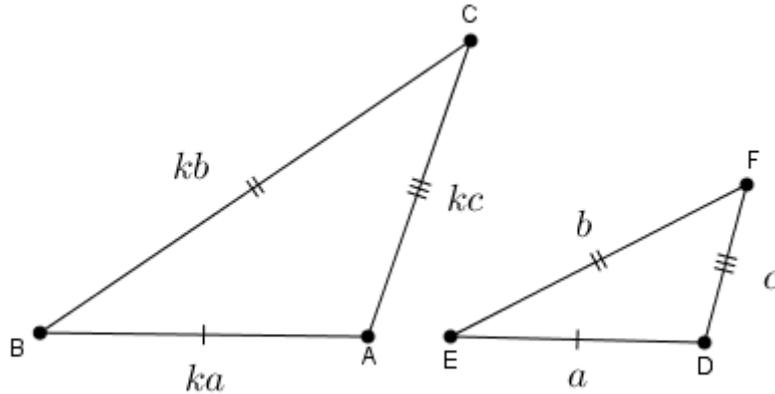
Todavia, para determinar quando dois triângulos são semelhantes, não é necessário verificar todas essas correspondências, basta observar algumas delas que apresentaremos como casos de semelhança de triângulos. Em todos os casos, vamos estabelecer a

correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.

Caso 1: lado - lado - lado (LLL)

Se dois triângulos ABC e DEF têm os três lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Figura 13 – caso de semelhança LLL.



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura 13, os triângulos ABC e DEF são semelhantes pelo caso lado - lado - lado, pois

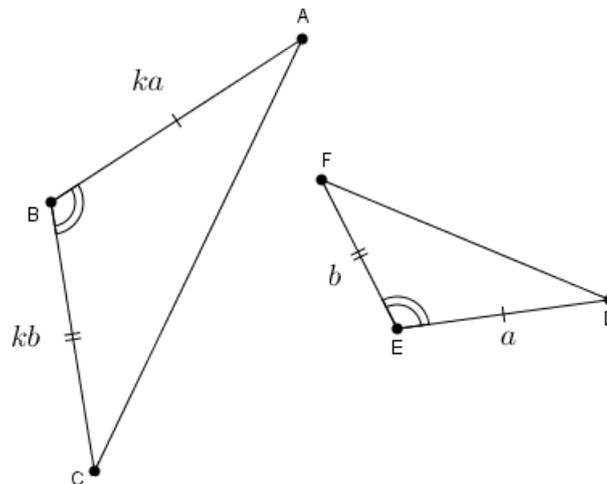
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

Conseqüentemente, dessa semelhança, obtemos também que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$.

Caso 2: lado - ângulo - lado (LAL)

Se dois triângulos ABC e DEF têm dois de seus lados correspondentes proporcionais e o ângulo compreendido entre esses dois lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Figura 14 – caso de semelhança LAL.



Fonte: O autor.

Na Figura 14, os triângulos ABC e DEF são semelhantes pelo caso lado - ângulo - lado, pois

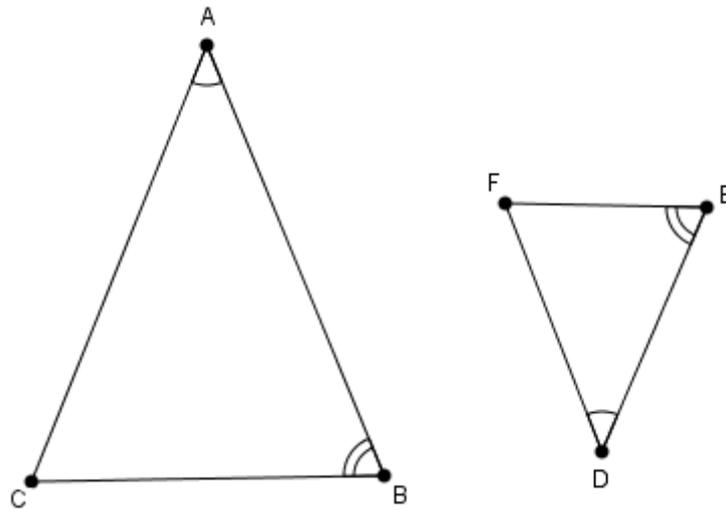
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k \quad e \quad \widehat{ABC} = \widehat{DEF}.$$

Com isso, segue-se que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k$.

Caso 3: ângulo - ângulo (AA)

Se dois triângulos ABC e DEF têm dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Figura 15 – caso de semelhança AA.



Fonte: O autor.

Conforme Figura 15, observe que os triângulos ABC e DEF são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo, pois $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$. Em decorrência dessa semelhança, obtemos

$$\widehat{BCA} = \widehat{EFD} \quad e \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

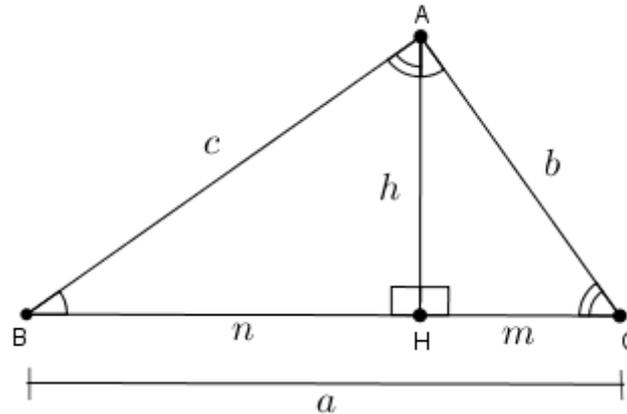
Encerraremos essa subseção trazendo, em forma de proposição, algumas relações que são conseqüências dos casos de semelhanças apresentados anteriormente. Estas relações são conhecidas como *relações métricas em triângulos retângulos*.

Proposição 3.2. *Considere ABC um triângulo retângulo em A , com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$.*

Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, temos

- (a) $ah = bc$.
- (b) $b^2 = am$ e $c^2 = an$.
- (c) $a^2 = b^2 + c^2$.
- (d) $h^2 = mn$.

Figura 16 – relações métricas no triângulo retângulo.



Fonte: O autor.

Demonstração. Com base na Figura 16, afirmamos que os triângulos BAH e BCA são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo, pois $\widehat{AHB} = \widehat{CAB}$ e $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$. Dessa semelhança, obtemos

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad e \quad \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

ou seja,

$$\frac{n}{c} = \frac{c}{a} \quad e \quad \frac{h}{b} = \frac{c}{a},$$

isto é,

$$ah = bc \quad e \quad c^2 = an$$

.

Agora, da semelhança entre os triângulos CAH e CBA , temos

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

ou seja,

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a},$$

isto é,

$$b^2 = am.$$

Com isso, mostramos os itens (a) e (b).

Para mostrarmos o item (c), somamos ambos os membros das relações do item (b), obtendo $a(m + n) = b^2 + c^2$. Como $m + n = a$, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Para o item (d), multiplicamos ambos os membros das relações do item (b), obtendo

$$b^2 c^2 = a^2 mn \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^2 = mn. \tag{3.5}$$

Mas, pelo item (a), sabemos que $ah = bc$, ou ainda,

$$h = \frac{bc}{a}. \quad (3.6)$$

Substituindo [3.6](#) em [3.5](#), obtemos

$$h^2 = mn,$$

como queríamos. ■

Observação: A relação do item (c) $a^2 = b^2 + c^2$ é conhecida como o Teorema de Pitágoras.

3.2 Lugares Geométricos

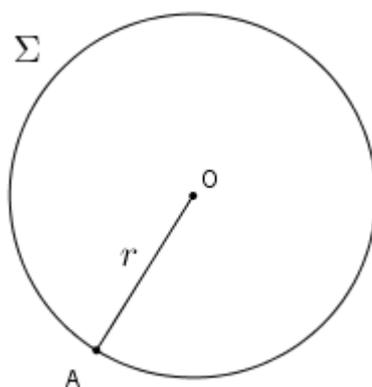
Nesta seção, apresentaremos o conceito de alguns lugares geométricos básicos: a circunferência, a mediatriz e a bissetriz. Para tanto, iniciaremos com a definição de *lugar geométrico*.

Definição 3.2. *Definimos lugar geométrico como o conjunto de todos os pontos do planos que satisfazem uma mesma propriedade. Reciprocamente, se todo ponto do plano possui uma determinada propriedade, então dizemos que eles pertencem a um determinado lugar geométrico.*

A seguir, como exemplo de *lugar geométrico*, destacaremos a circunferência.

Exemplo 1. *Dado um ponto O no plano, e um número real positivo r , o lugar geométrico de todos os pontos do plano que possuem a mesma distância r em relação ao ponto O é a circunferência Σ de centro O e raio r .*

Figura 17 – circunferência.



Fonte: O autor.

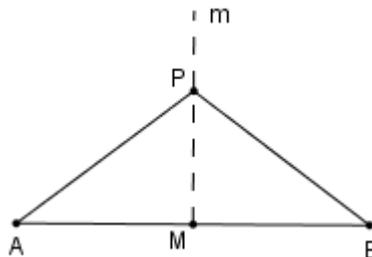
Outros dois exemplos de *lugares geométricos* básicos, que caracterizaremos como proposições, são: a mediatriz e a bissetriz. Porém, antes disso, definiremos o que é a mediatriz e, posteriormente, a bissetriz.

Definição 3.3. A mediatriz de um segmento AB é uma reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.

Proposição 3.3. Sejam A e B dois pontos do plano, a mediatriz do segmento AB é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a uma mesma distância de A e B .

Demonstração. Seja M o ponto médio de AB e P um ponto pertencente à mediatriz m de AB , conforme Figura 18 abaixo.

Figura 18 – $P \in (\text{mediatriz de } AB) \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.

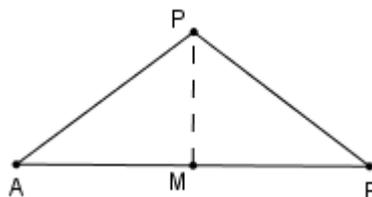


Fonte: O autor.

Afirmamos que os triângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LAL (lado - ângulo - lado). De fato, temos $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\widehat{AMP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$ e PM é um segmento comum a esses dois triângulos, isso mostra a congruência. Logo, concluímos que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Reciprocamente, considere P um ponto do plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$, conforme Figura 19.

Figura 19 – $P \in (\text{mediatriz de } AB) \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.



Fonte: O autor.

Assim, temos que o triângulo APB é isósceles de base AB . Com isso, a mediana e a altura relativas a AB são coincidentes. Porém, como PM é a mediana relativa a AB temos $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, isto é, PM é a mediatriz de AB .

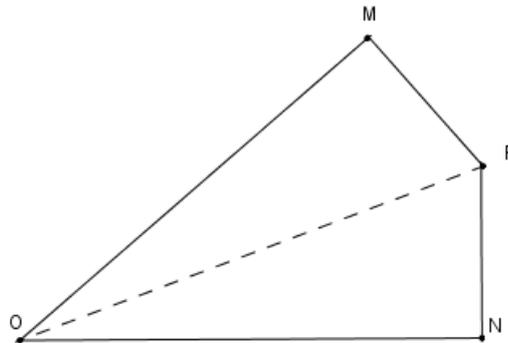


Definição 3.4. A bissetriz de um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é uma semirreta com origem em O que divide o ângulo ao meio.

Proposição 3.4. Seja $\widehat{A\hat{O}B}$ um ângulo dado. Se P é um ponto pertencente a esse ângulo, então a distância de P à semirreta \overrightarrow{OA} é igual a distância de P à semirreta \overrightarrow{OB} se, e somente, se P pertence à bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.

Demonstração. Seja \overrightarrow{OP} a bissetriz de $\widehat{A\hat{O}B}$ e sejam M e N , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P , um ponto pertencente à bissetriz, às semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , conforme Figura 20.

Figura 20 – $P \in (\text{bissetriz de } \widehat{A\hat{O}B}) \Leftrightarrow \overline{PM} = \overline{PN}$



Fonte: O autor.

Afirmamos que os triângulos OMP e ONP são congruentes pelo caso LAA_o . De fato, temos $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^\circ$, $\widehat{NOP} = \widehat{MOP}$ e OP é lado comum aos dois triângulos, o que mostra a congruência. Dessa forma, concluímos que $\overline{PM} = \overline{PN}$.

Reciprocamente, considere um ponto P no interior do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, em que M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente a \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . Com isso, os triângulos OMP e ONP são congruentes pelo caso especial CH (cateto - hipotenusa). De fato, temos que $\overline{PM} = \overline{PN}$ e OP é a hipotenusa comum. Logo, $\widehat{NOP} = \widehat{MOP}$, consequentemente, o ponto P pertence à bissetriz do ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.



3.3 Divisão Harmônica

Nesta seção, faremos uma abordagem sobre Divisão Harmônica, que é um conteúdo que está intimamente relacionado com a divisão de um segmento em uma dada razão. É a partir desse conhecimento que introduziremos a noção de *ponto no infinito*. Para tanto, iniciaremos com uma definição.

Definição 3.5. Dizemos que P e Q dividem o segmento AB harmonicamente na razão $k > 0$, com $k \neq 1$, e $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ são tais que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = k.$$

Se $P \in AB$, dizemos que P divide AB internamente e $Q \notin AB$, dizemos que Q divide AB externamente, com $P, Q \neq A, B$.

Figura 21 – Divisão harmônica.



Fonte: O autor.

A figura 21 representa o caso em que $k > 1$, pois P e Q estão mais distantes do ponto A e, conseqüentemente, mais próximos do ponto B . No caso em que $k = 1$, não há o que fazer, pois basta considerarmos o ponto médio de AB .

Agora, é possível mostrar que os pontos P e Q existem e são únicos, conforme mostraremos a seguir.

Teorema 3.5. Os pontos P e Q que dividem harmonicamente o segmento AB existem e são únicos.

Demonstração. Provaremos, inicialmente, a unicidade. Suponha, por contradição, que P e R , Q e S sejam pontos distintos que dividem AB interna e externamente, respectivamente, na razão $k \neq 1$. Dessa forma, por definição, temos

$$k = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left| \frac{\overline{PA} - \overline{RA}}{\overline{PB} - \overline{RB}} \right| = \frac{\overline{PR}}{\overline{PR}} = 1$$

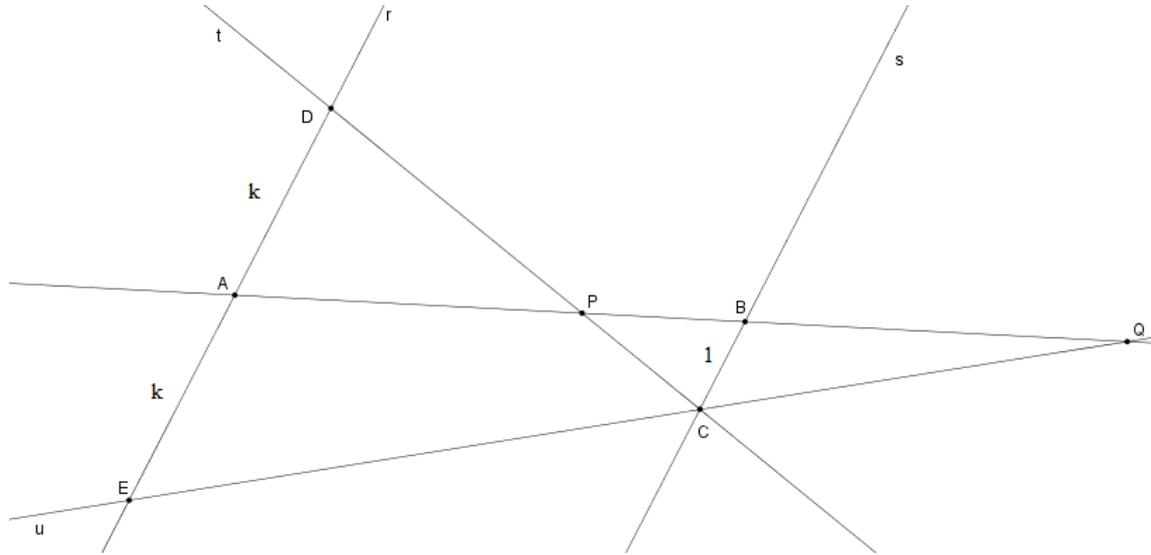
e

$$k = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \left| \frac{\overline{QA} - \overline{SA}}{\overline{QB} - \overline{SB}} \right| = \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = 1,$$

o que é um absurdo, pois $k \neq 1$. Assim, concluímos que $P = R$ e $Q = S$ e, portanto, temos a unicidade.

Para provarmos a existência, vamos considerar a Figura 22.

Figura 22 – existência dos pontos P e Q .



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura 22, dada uma reta \overleftrightarrow{AB} , traçamos pelo ponto A uma reta r , que não contenha B e, em seguida, traçamos por B uma reta s , tal que $r \parallel s$. Agora, marcamos o ponto C em s tal que $\overline{BC} = 1$ e, em r , marcamos os pontos D e E tais que $\overline{AD} = \overline{AE} = k$. Feito isso, traçamos as retas t e u com $DC \in t$ e $EC \in u$ e marcamos os pontos P e Q como as interseções da reta \overleftrightarrow{AB} com t e u , respectivamente. Dessa forma, afirmamos que os triângulos APD e BPC são semelhantes pelo caso (ângulo-ângulo). De fato, como os pontos A, P, B e D, P, C são colineares, temos $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ (opostos pelo vértice) e sendo $r \parallel s$, temos $\widehat{ADP} = \widehat{BCP}$ (alternos internos), o que mostra a semelhança. Assim, a partir da semelhança, obtemos

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k,$$

isso mostra a existência do ponto interno P .

Analogamente, afirmamos que os triângulos AQE e BQC são semelhantes pelo caso (ângulo - ângulo). De fato, $\widehat{AQE} = \widehat{BQC}$ (comum) e $\widehat{QEA} = \widehat{QCB}$ (correspondentes), isso mostra a semelhança. Daí, segue-se que

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = k,$$

mostrando a existência do ponto externo Q . ■

Como visto anteriormente, os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento AB . É comum nesse caso, dizer que P, Q são conjugados harmônicos em relação a A, B e vice-versa, isto é, A, B são conjugados harmônicos em relação a P, Q .

Essa relação, diz que todo ponto que pertence à reta \overleftrightarrow{AB} possui um conjugado harmônico em relação a AB , excetuando-se o ponto médio de AB .

Na figura 22, se consideramos M o ponto médio de AB , à medida que k se aproxima de 1, o ponto P desliza horizontalmente para a esquerda aproximando-se do ponto M e, simultaneamente, o ponto Q desliza horizontalmente para a esquerda distanciando-se cada vez mais se $k \rightarrow 1^-$, para a direita se $k \rightarrow 1^+$ e quando $k = 1$ a reta t intersecta AB em M e, com isso, $u \parallel \overleftrightarrow{AB}$. (SPIRA, 2004)

Conforme (SPIRA, 2004), "isto nos leva à ideia de postular a existência de um ponto ideal em AB dito *ponto infinito* de AB e denotando por ∞ , que é por definição, o conjugado harmônico de M . Em particular, ∞ divide AB na razão 1". Vale salientar que o *ponto infinito* é único e pode-se chegar a ele em qualquer uma das semirretas de \overleftrightarrow{AB} originadas em M . Analisando por essa ótica, isso nos leva a crer que a reta \overleftrightarrow{AB} se transformou em uma circunferência com a adição do *ponto infinito*, nos dois extremos.

No exemplo a seguir, exploraremos um resultado importante de uma aplicação envolvendo o conceito de divisão harmônica.

Exemplo 2. Considere AB um segmento de comprimento x . Sejam P e Q divisores harmônicos de AB na razão k . Então

$$\overline{PQ} = \frac{2kx}{|k^2 - 1|}.$$

Solução: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k > 1$. O caso em que $0 < k < 1$ é análogo. Se P e Q são divisores harmônicos de AB , então

$$k = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}.$$

Figura 23 – P e Q divisores harmônicos de AB .



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura 23, observa-se que

$$\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{QB}. \tag{3.7}$$

Como,

$$k = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{k} = \frac{\overline{PB}}{1} = \frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{k + 1} = \frac{\overline{AB}}{k + 1},$$

Donde,

$$\overline{PB} = \frac{\overline{AB}}{k + 1} = \frac{x}{k + 1}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, temos

$$k = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{k} = \frac{\overline{QB}}{1} = \frac{\overline{QA} - \overline{QB}}{k - 1} = \frac{\overline{AB}}{k - 1},$$

isto é,

$$\overline{QB} = \frac{\overline{AB}}{k - 1} = \frac{x}{k - 1}. \quad (3.9)$$

Substituindo [3.8](#) e [3.9](#) em [3.7](#) e efetuando os cálculos, obtemos

$$\overline{PQ} = \overline{QA} + \overline{QB} \quad (3.10)$$

$$= \frac{x}{k + 1} + \frac{x}{k - 1} \quad (3.11)$$

$$= \frac{xk - x + kx + x}{k^2 - 1} \quad (3.12)$$

$$= \frac{2xk}{k^2 - 1} \quad (3.13)$$

$$= \frac{2kx}{|k^2 - 1|}. \quad (3.14)$$

Encerraremos essa seção com uma propriedade importante que está relacionada com a inversão que será estudada no próximo capítulo.

Proposição 3.6. *Sejam P e Q os conjugados harmônicos de AB e seja M o ponto médio de AB . Então,*

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2.$$

Figura 24 – propriedade da existência de uma circunferência.



Fonte: O autor.

Demonstração. Com efeito, se P e Q são os conjugados harmônicos em relação ao segmento AB , então

$$k = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}.$$

Logo, temos

$$k \cdot \overline{PB} = \overline{PA} \Rightarrow \quad (3.15)$$

$$k \cdot \overline{PB} = \overline{AB} - \overline{PB} \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$\overline{AB} = \overline{PB}(k + 1). \quad (3.17)$$

e

$$k \cdot \overline{QB} = \overline{QA} \Rightarrow \quad (3.18)$$

$$k \cdot \overline{QB} = \overline{AB} - \overline{QB} \Rightarrow \quad (3.19)$$

$$\overline{AB} = \overline{QB}(k + 1). \quad (3.20)$$

Multiplicando [3.17](#) e [3.20](#), obtemos

$$\overline{AB}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{QB}(k^2 - 1). \quad (3.21)$$

Por outro lado, como M é ponto médio de AB , temos

$$\overline{MP} = \frac{\overline{AB}}{2} - \overline{PB} \quad e \quad \overline{MQ} = \frac{\overline{AB}}{2} + \overline{QB}.$$

Mas, como $\overline{AB} = \overline{PB}(k + 1) = \overline{QB}(k - 1)$, então

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{PB}}{2}(k + 1) = \frac{\overline{QB}}{2}(k - 1).$$

Assim,

$$\overline{MP} = \frac{\overline{PB}}{2}(k + 1) - \overline{PB} \quad (3.22)$$

$$\overline{MP} = \frac{\overline{PB}}{2}(k - 1). \quad (3.23)$$

e

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{QB}}{2}(k - 1) + \overline{QB} \quad (3.24)$$

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{QB}}{2}(k + 1). \quad (3.25)$$

Agora, multiplicando [3.23](#) e [3.25](#), e usando [3.21](#), obtemos

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{QB}}{4}(k^2 - 1) \quad (3.26)$$

$$= \frac{\overline{AB}^2}{4} \quad (3.27)$$

$$= \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \quad (3.28)$$

$$= \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2. \quad (3.29)$$

Portanto,

$$\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2.$$

■

O resultado acima nos diz que pode existir uma circunferência de centro M e raio MA ou MB de tal forma que P e Q sejam um o inverso do outro, conforme veremos na Definição [4.1](#). Em outras palavras, os conjugados harmônicos de um segmento de reta AB dado são inversos em relação à circunferência de centro M e raio $\frac{AB}{2}$.

3.4 Circunferências

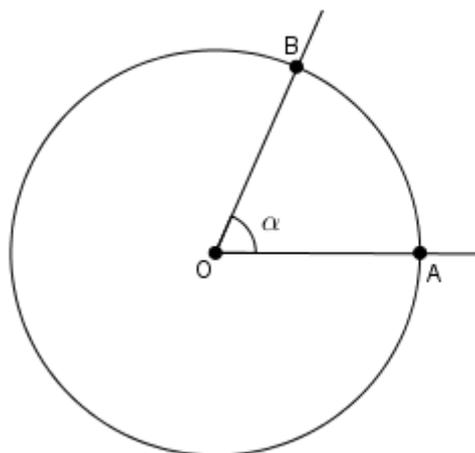
Nesta seção, apresentaremos alguns resultados envolvendo circunferência como ângulos na circunferência, segmentos tangentes a uma circunferência, medida do segmento de uma reta tangente a duas circunferências entre seus pontos de tangência, relações métricas na circunferência e potência de ponto.

3.4.1 Ângulos na Circunferência

Nesta subseção, apresentaremos alguns tipos de ângulos que surgem na circunferência como ângulo central, ângulo inscrito e ângulo de segmento, definindo-os e enfatizando suas propriedades as quais serão usadas no decorrer deste trabalho.

Definição 3.6. *Dá-se o nome de ângulo central a todo ângulo que tem o vértice no centro de uma circunferência.*

Figura 25 – ângulo central.

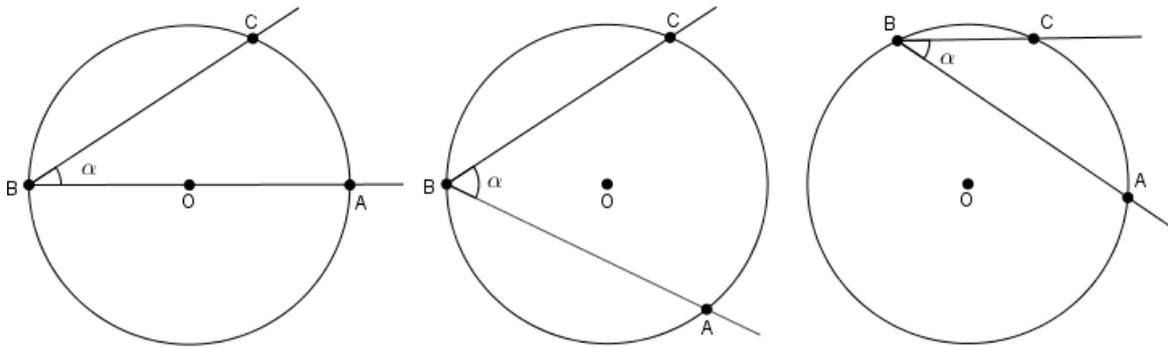


Fonte: O autor.

Um ângulo central define, em graus, a medida do menor arco por ele formado. Na Figura 25, $A\hat{O}B$ é um ângulo central cuja medida é α , isto é, $A\hat{O}B = \alpha$. Além disso, \widehat{AB} é o menor arco determinado pelo ângulo $A\hat{O}B$ e, nesse caso, temos $\widehat{AB} = \alpha$.

Definição 3.7. *Dá-se o nome de ângulo inscrito a todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são secantes a essa circunferência.*

Figura 26 – ângulos inscritos.



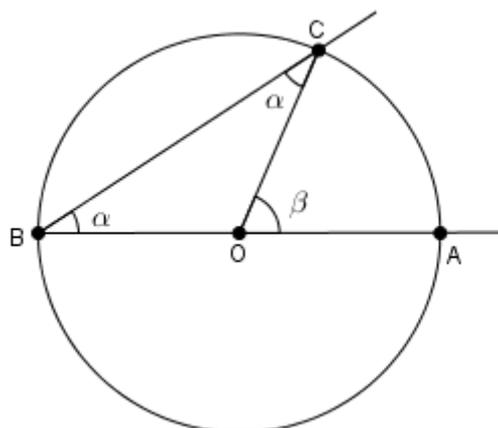
Fonte: O autor.

Na Figura 26, à esquerda, o centro O da circunferência pertence a um dos lados do ângulo \widehat{ABC} , na figura central, o centro O da circunferência pertence à região interna do ângulo \widehat{ABC} e, à direita, o centro O da circunferência pertence à região externa ao ângulo \widehat{ABC} . Em todos os casos, temos \widehat{ABC} como um ângulo inscrito na circunferência cuja medida é α , ou seja, $\widehat{ABC} = \alpha$. Além disso, \widehat{AC} é o menor arco determinado pelo ângulo \widehat{ABC} . A proposição seguir estabelece uma propriedade bastante útil envolvendo ângulos inscritos na circunferência.

Proposição 3.7. *A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central quando eles determinam o mesmo arco.*

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira situação, ou seja, quando o centro O pertence a um dos lados do ângulo \widehat{ABC} .

Figura 27 – ângulo inscrito.



Fonte: O autor.

Seja o ângulo $\widehat{ABC} = \alpha$. Traçando por C o segmento OC , ficam determinados o triângulo isósceles OBC de base BC , pois $\overline{OB} = \overline{OC}$, logo, $\widehat{ABC} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$ e o ângulo central $\widehat{AOC} = \beta$, que determina o arco \widehat{AC} . Observe, na Figura 27, que o

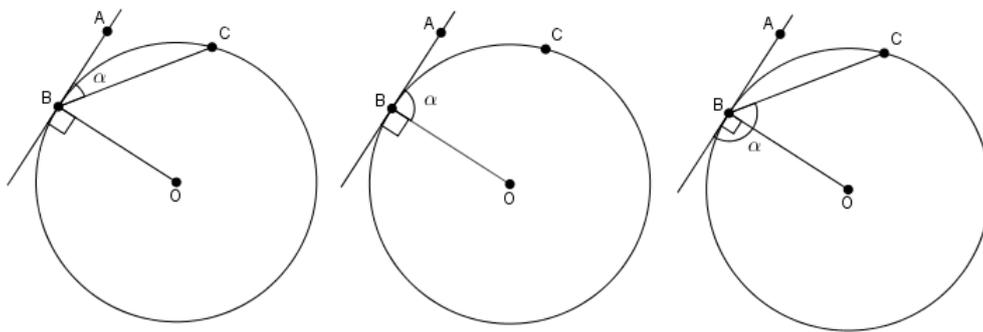
ângulo central \widehat{AOC} é um ângulo externo do triângulo OBC . Logo, pela Proposição 3.1, temos

$$\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AC}}{2},$$

como queríamos. ■

Definição 3.8. *Dá-se o nome de ângulo de segmento a todo ângulo que tem o vértice na circunferência, um dos lados é secante e o outro lado tangente a essa circunferência.*

Figura 28 – ângulos de segmentos.



Fonte: O autor.

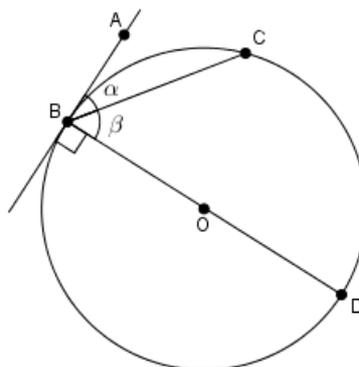
Na Figura 28, à esquerda, temos o ângulo \widehat{ABC} de medida $\alpha < 90^\circ$, na figura central, observamos o ângulo \widehat{ABC} de medida $\alpha = 90^\circ$ e, à direita, vemos o ângulo \widehat{ABC} de medida $\alpha > 90^\circ$. Em todos os casos, temos \widehat{ABC} como um ângulo de segmento.

Colocamos na proposição a seguir uma propriedade relativa a ângulo de segmento.

Proposição 3.8. *A medida do ângulo de segmento é igual à metade da medida do menor arco por ele determinado.*

Demonstração. Demonstraremos a primeira situação, isto é, quando $\alpha < 90^\circ$. Traçando o diâmetro BD , temos:

Figura 29 – ângulo de segmento.



Fonte: O autor.

Observe, na Figura 29, que β é um ângulo inscrito em relação ao arco \widehat{CD} , logo, $\beta = \frac{\widehat{CD}}{2}$. Além disso, temos $\alpha + \beta = 90^\circ$ e $\widehat{BC} + \widehat{CD} = 180^\circ$. Assim,

$$\alpha + \beta = \frac{180^\circ}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2},$$

ou seja,

$$\alpha + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2},$$

o que implica,

$$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2},$$

como queríamos. ■

Observação: Ainda na Figura 29, se traçarmos o segmento CD , obtemos o triângulo BCD retângulo em C , pois o ângulo $B\widehat{C}D$ é inscrito ao arco \widehat{BD} cuja medida é 180° , logo, $B\widehat{C}D = 90^\circ$. Daí, como $\alpha + \beta = 90^\circ$, segue-se que o ângulo $B\widehat{D}C = \alpha$. Com isso, concluímos que o ângulo inscrito é igual ao ângulo de segmento determinados pelo mesmo arco.

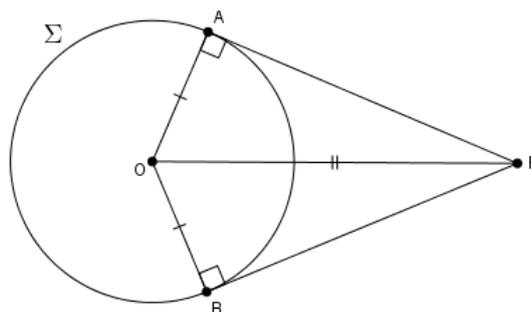
3.4.2 Propriedades Entre Tangentes e Circunferências

As proposições a seguir estabelecem duas propriedades muito úteis envolvendo tangentes e circunferências.

Proposição 3.9. *Sejam Σ uma circunferência e P um ponto em seu exterior. Se $A, B \in \Sigma$ são tais que \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} são tangentes à Σ , então $\overline{PA} = \overline{PB}$.*

Demonstração. De fato, na Figura 30 a seguir, observe que $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois são raios da circunferência Σ . Além disso, como \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} são tangentes à Σ , temos $O\widehat{A}P = O\widehat{B}P = 90^\circ$. Assim, os triângulos OAP e OBP são congruentes pelo caso cateto - hipotenusa. Daí, segue-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$, como queríamos.

Figura 30 – tangentes à circunferência.



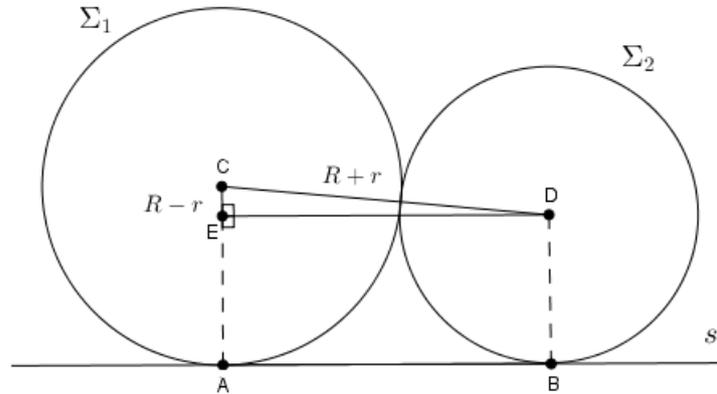
Fonte: O autor.



Proposição 3.10. *Considere, no plano, uma reta s e duas circunferências Σ_1 e Σ_2 de raios R e r , respectivamente, situadas em um mesmo semiplano dos que s determina e tangentes a s nos pontos A e B , também respectivamente, e exteriormente entre si. Nessas condições, mostre que*

$$\overline{AB} = 2\sqrt{Rr}.$$

Figura 31 – circunferências tangentes exteriores entre si e a uma reta.



Fonte: O autor.

Demonstração. Nas notações da Figura 31, sejam C e D os centros das circunferências Σ_1 e Σ_2 , respectivamente. A partir de D , traçamos o segmento DE perpendicular a AC . Se A e B são pontos de tangência, então $E\hat{A}B = D\hat{B}A = 90^\circ$, além disso, $A\hat{E}D = 90^\circ$, logo, $B\hat{D}E = 90^\circ$. Assim, o quadrilátero $ABDE$ é retângulo, logo $\overline{DE} = \overline{AB}$. Agora, como Σ_1 e Σ_2 são tangentes entre si e à reta s , podemos afirmar que $\overline{CD} = R + r$ e $\overline{CE} = R - r$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CED e isolando DE , obtemos

$$\overline{DE}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 \tag{3.30}$$

$$= (R + r)^2 - (R - r)^2 \tag{3.31}$$

$$= (R + r + R - r) \cdot (R + r - R + r) \tag{3.32}$$

$$= 2R \cdot 2r \tag{3.33}$$

$$= 4Rr, \tag{3.34}$$

$$\tag{3.35}$$

ou seja,

$$\overline{DE} = 2\sqrt{Rr}.$$

Mas como $\overline{DE} = \overline{AB}$, segue-se que

$$\overline{AB} = 2\sqrt{Rr}.$$

■

3.4.3 Relações Métricas na Circunferência e Potência de Ponto

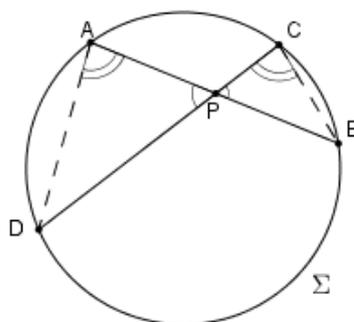
Na Seção 3.3, estudamos sobre a divisão harmônica ou conjugados harmônicos. O estudo sobre as relações métricas na circunferência nos permitirá dar um tratamento geométrico aos conjugados harmônicos.

Vamos considerar o caso em que temos duas cordas se intersectando em uma circunferência e o caso em que temos um segmento tangente e o outro secante à circunferência. Trataremos esses casos como proposições.

Proposição 3.11. *Sejam AB e CD duas cordas quaisquer de uma mesma circunferência Σ , que se cruzam num ponto P , então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Figura 32 – o teorema das cordas.



Fonte: O autor.

Demonstração. Unindo, por meio de segmentos, o ponto A ao ponto D e o ponto B ao ponto C , temos os triângulos APD e BPC são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo. De fato, $\widehat{PAD} = \widehat{PCB}$, pois são ângulos que "enxergam" o mesmo arco \widehat{BD} e $\widehat{APD} = \widehat{CPB}$ (pois são ângulos opostos pelo vértice). Logo, dessa semelhança, podemos escrever

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

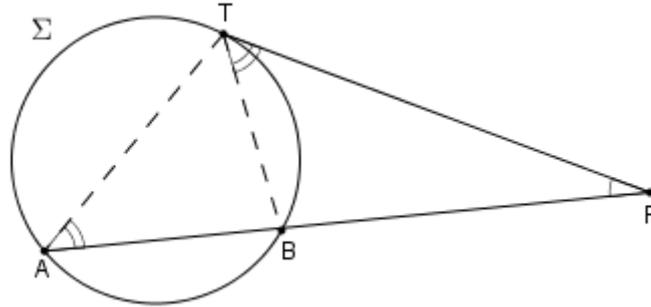
■

Proposição 3.12. *Seja P um ponto externo de uma circunferência Γ , A e T pontos quaisquer de Σ de modo que PT seja tangente e PA secante a Σ , então*

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB},$$

em que B é o ponto de interseção de PA com Σ .

Figura 33 – caso limite do teorema das cordas.



Fonte: O autor.

Demonstração. Unindo, por meio de segmentos, o ponto T ao ponto A e ao ponto B , os triângulos APT e BPT são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo. De fato, como $\widehat{PAT} = \widehat{PTB}$, pois o primeiro é um ângulo inscrito ao arco \widehat{BT} e o segundo é o ângulo de segmento do mesmo arco. Além disso, $\widehat{APT} = \widehat{BPT}$, pois são ângulos comuns. Daí, temos

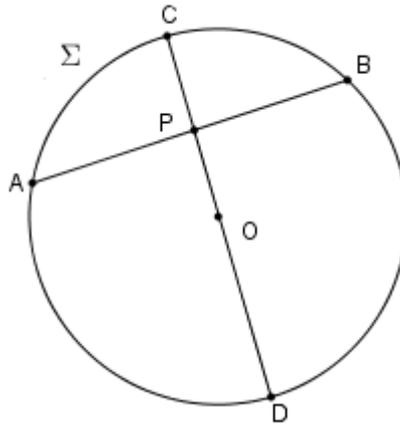
$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

■

As proposições demonstradas anteriormente, também são conhecidas como *Teorema das Cordas*. Uma decorrência imediata desse teorema é a Potência de um ponto com relação a uma circunferência, que representaremos por $Pot_{\Sigma}(P)$, onde Σ é a circunferência em questão. Faremos a demonstração do corolário a seguir baseando-nos na referência. (NETO, 2012)

Corolário 3.13. *Seja Σ a circunferência de centro O e raio R . Sejam AB e CD duas cordas tais que $AB \cap CD = P$ e $O \in CD$. Então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |R^2 - \overline{OP}^2|.$$

Figura 34 – potência de ponto P em relação à Σ .

Fonte: O autor.

Demonstração. Inicialmente, observe que estamos considerando o ponto P no interior de Σ . O caso em que P está no exterior é tratado de maneira análoga. Nas notações da Figura 34, temos

$$\overline{PC} = R - \overline{OP} \quad (3.36)$$

e

$$\overline{PD} = R + \overline{OP}. \quad (3.37)$$

Multiplicando 3.36 e 3.37, obtemos

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} = R^2 - \overline{OP}^2.$$

Sabemos, pelo teorema das cordas, que

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Logo,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = R^2 - \overline{OP}^2,$$

ou seja,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |R^2 - \overline{OP}^2|.$$

■

3.5 Quadriláteros Inscritíveis

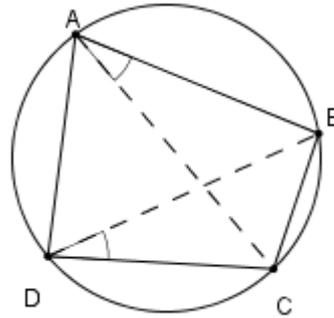
Diferentemente dos triângulos, nem todo quadrilátero é inscritível. Em outras palavras, é possível traçar uma circunferência que contenha os três vértices de um triângulo,

mas nem sempre é possível encontrar uma circunferência que passe pelos quatro vértices de um quadrilátero convexo. Porém, quando é possível, dizemos que o quadrilátero é inscrito. A proposição a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscrito.

Proposição 3.14. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Dizemos que $ABCD$ é um quadrilátero inscrito se, e somente, se qualquer uma das condições a seguir for satisfeita:*

1. $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$;
2. $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Figura 35 – quadrilátero inscrito $ABCD$.



Fonte: O autor.

Demonstração. Vamos supor, inicialmente, que $ABCD$ é inscrito. Pelo teorema do ângulo inscrito, sabemos que

$$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \tag{3.38}$$

e

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{DCB}}{2} \tag{3.39}$$

Somando [3.38](#) e [3.39](#), obtemos

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \frac{\widehat{DCB}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} \tag{3.40}$$

$$= \frac{\widehat{DCB} + \widehat{DAB}}{2} \tag{3.41}$$

$$= \frac{360^\circ}{2} \tag{3.42}$$

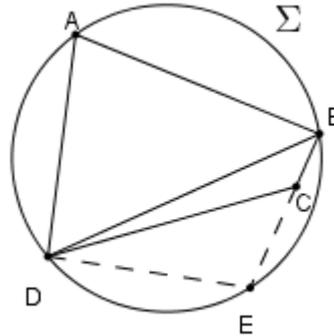
$$= 180^\circ. \tag{3.43}$$

Além disso, os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BDC} enxergam o mesmo arco \widehat{BC} , logo, também pelo teorema do ângulo inscrito, temos $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Agora, consideraremos que $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$. O caso em que $B\hat{A}C = B\hat{D}C$, o leitor poderá conferir em (NETO, 2012).

Supondo $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$. Considere a circunferência Σ circunscrita ao triângulo ABD . Sem perda de generalidade, suporemos que C está no interior de Σ , conforme Figura 36 a seguir.

Figura 36 – quadrilátero inscritível.



Fonte: O autor.

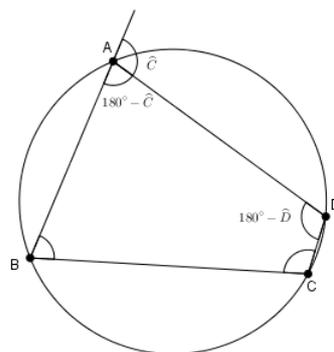
Prolongamos a semirreta \overrightarrow{BC} e marcamos o ponto E de interseção de \overrightarrow{BC} com Σ , obtendo o quadrilátero $ABDE$. Como $ABDE$ é inscritível, sabemos que $D\hat{A}B + B\hat{E}D = 180^\circ$ e, por hipótese, temos que $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$, isto é, $B\hat{E}D = B\hat{C}D$. Absurdo, pois $B\hat{C}D = C\hat{E}D + E\hat{D}C = B\hat{E}D + E\hat{D}C > B\hat{E}D$ (pelo teorema do ângulo externo).



Encerraremos essa seção com a definição de quadrilátero cíclico.

Definição 3.9. Dizemos que um quadrilátero é cíclico quando existe uma circunferência que contenha os seus quatro vértices. Além disso, se o quadrilátero for convexo, uma condição necessária e suficiente para que ele seja cíclico foi exposta e demonstrada na proposição anterior.

Figura 37 – quadrilátero cíclico.



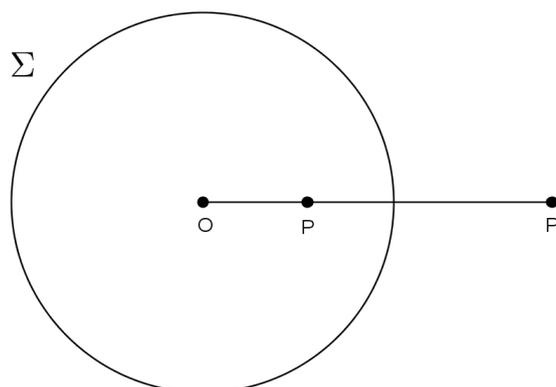
Fonte: O autor.

4 Inversão e Propriedades

Nesta seção iremos introduzir o conceito de “*inversão com relação a uma circunferência*”. Este conceito data do século XIX e é devido ao matemático suíço Jakob Steiner (1796 - 1863). A inversão que apresentaremos é uma transformação que se aplica a figuras do plano e do espaço, mas aqui nos limitaremos ao plano. Utilizaremos como referência as obras (COXETER, 1969) e (PROBLEMAS; CAPITÁN,).

Definição 4.1. *Fixemos no plano uma circunferência $\Sigma(O, r)$ de centro O e raio r . Para cada ponto P distinto de O , o ponto inverso de P em relação a Σ é o ponto P' da reta OP que satisfaz a relação $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Nos referimos a $\Sigma(O, r)$ como a circunferência de inversão e dizemos que o ponto O é o centro de inversão.*

Figura 38 – o ponto P e o seu inverso P' pela circunferência Σ .



Fonte: O autor.

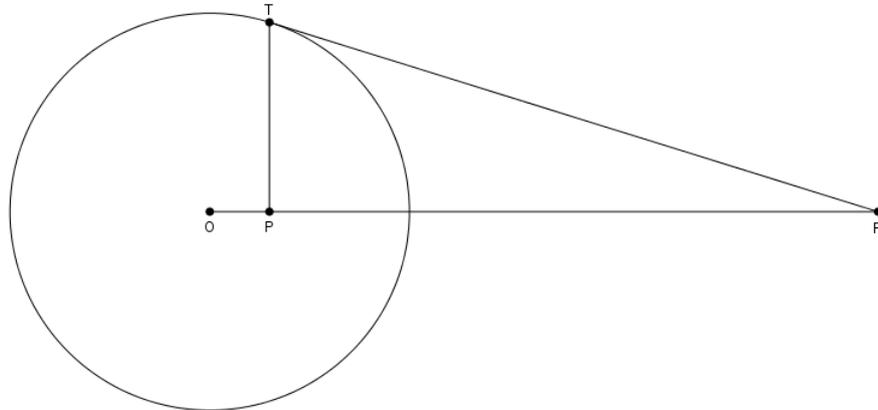
4.1 Construção do Ponto Inverso

A fim de facilitar a compreensão da definição de inversão de um ponto em relação a uma circunferência, usaremos o recurso da Geometria Dinâmica para obtermos a localização do ponto inverso P' de um ponto P , diferente de O . Aqui usamos o Software GeoGebra para fazer a construção desejada. Inicialmente, indicamos os passos para a construção de P' quando o ponto P é interior a circunferência:

1. Desenhar a circunferência de inversão Σ de centro O e raio r .
2. Marcar o ponto P , interior a Σ , e desenhe a semirreta OP .
3. Traçar a perpendicular a semirreta OP passando por P e assinalar o ponto T , um dos pontos de intersecção.

4. Por T , traçar uma tangente que corta a semirreta OP no ponto P' , inverso de P .

Figura 39 – construção do ponto inverso de P .



Fonte: O autor.

Para mostrar que o ponto P' , determinado pela construção acima descrita, é o inverso do ponto P , é suficiente observar que os triângulos OTP e $OP'T$ são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo, pois $O\hat{P}T = P'\hat{T}O = 90^\circ$, $P\hat{O}T + O\hat{T}P = 90^\circ$ e $P'\hat{O}T + O\hat{P}'T = 90^\circ$, mas $P\hat{O}T = P'\hat{O}T$, logo $O\hat{T}P = O\hat{P}'T$. Assim:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP'}} \Rightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2 = r^2$$

Para construir o inverso do ponto P quando ele é exterior a circunferência Σ , adotaremos os seguintes passos:

1. Desenhar a circunferência de inversão Σ de centro O e raio r .
2. Marcar o ponto P , exterior a Σ , e desenhe a semirreta OP .
3. Traçar uma tangente a circunferência passando pelo ponto P . O ponto de tangência indicaremos por T .
4. Por T , baixamos uma perpendicular a semirreta OP , determinando o ponto P' , inverso do ponto P em relação a Σ .

A demonstração que o ponto P' , determinado na construção acima, é o inverso do ponto P em relação $\Sigma(O, r)$ é análoga a demonstração feita no caso em que o P é interior a circunferência de inversão Σ . De fato, basta inverter os papéis de P e P' na demonstração anterior.

Diante do exposto, concluímos que um ponto interior a circunferência se transforma em um ponto exterior e um ponto exterior à circunferência se transforma em um ponto interior. Os pontos da circunferência de inversão se invertem em si mesmos, ou seja,

são pontos fixos da inversão. Por outro lado, se E^2 denota o plano euclidiano e Γ a aplicação de inversão em relação a $\Sigma(O, r)$, observamos que $\Gamma^2 - \{O\} \rightarrow E^2 - \{O\}$ é bijetiva, pela discussão anterior.

4.2 Propriedades da Inversão

É importante observar que há, exatamente um ponto do plano, o centro de inversão O , que permanece sem imagem pela transformação. Quando o ponto P se aproxima do centro de inversão O , seu inverso P' se afasta infinitamente de O , por isso, se desejarmos ampliar a aplicação Γ a todo o plano euclidiano E^2 , necessitamos ampliar o plano com um ponto ideal. Assim, acrescentando um ponto ideal ∞ ao plano E^2 e ampliando a aplicação Γ a todo E^2 e tomando $\Gamma(O) = \infty$ e $\Gamma(\infty) = O$, a inversão Γ define uma transformação involutiva de E^2 em si mesmo, isto é, quando se aplica a transformação de inversão em um elemento já transformado, retorna-se ao elemento original.

O plano E^2 é denominado *plano inversivo* e o ponto ideal ∞ se considera como *pertencente a toda reta do plano*. É útil ter esta ideia em mente para entender melhor as propriedades que veremos a seguir. As propriedades da inversão nos permitem fazer demonstrações geométricas que não são simples quando se usam outros métodos.

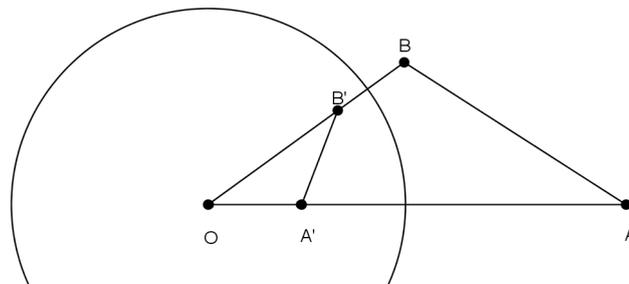
4.2.1 A Inversão e as Distâncias

Proposição 4.1. *Sejam A e B pontos distintos e diferentes de O e A' e B' seus inversos em relação a uma circunferência Σ de centro O e raio r . Então:*

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \tag{4.1}$$

Demonstração. Para o caso em que a reta \overleftrightarrow{AB} não passe pelo centro de O , e aplicando a definição de inversão $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, obtemos:

Figura 40 – os pontos A, B e O não colineares.



Fonte: O autor.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

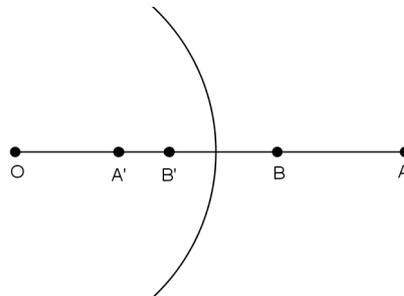
peço qual concluimos que os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes. Então:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}},$$

como queríamos demonstrar. ■

No caso em que os pontos O , A e B são colineares, A' e B' estarão em uma mesma reta:

Figura 41 – os pontos A , B e O são colineares.



Fonte: O autor.

Dessa forma:

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = \frac{r^2}{\overline{OB}} - \frac{r^2}{\overline{OA}} = \frac{r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} (\overline{OA} - \overline{OB}) = \frac{\overline{AB} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}},$$

o que comprova a relação entre inversão e distância.

A expressão descrita em [4.1](#) nos mostra como determinar o comprimento do segmento $A'B'$ conhecendo-se o raio r da circunferência de inversão e os comprimentos dos segmentos OA e OB .

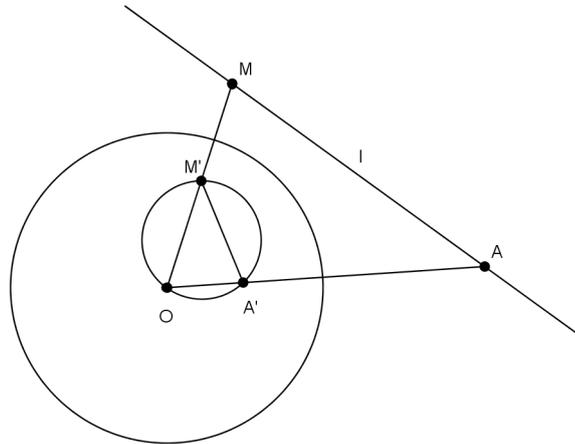
4.2.2 A Inversão e as Retas

Podemos inverter ponto a ponto qualquer curva \mathcal{C} em relação a $\Sigma(O, r)$ e denotaremos por \mathcal{C}' a curva inversa. Destacaremos agora a relação entre inversão e uma reta l . Novamente iremos analisar dois casos:

1. Quando uma reta l passa pelo centro de inversão, fica claro, diante do que já foi exposto, que l é transformada em si mesma, ou seja, $l = l'$.

2. Por outro lado, quando a reta l não passa pelo centro de inversão O , esta se transforma em uma circunferência com diâmetro OM' , sendo M a projeção ortogonal de O sobre l e M' o inverso de M .

Figura 42 – inversão de uma reta l que não passa pelo centro.



Fonte: O autor.

Esse resultado é imediato, uma vez que, pela Proposição 4.1, se consideramos um ponto qualquer A da reta l e o seu inverso A' , os triângulos $OA'M'$ e OMA são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo, pois temos o ângulo comum $\widehat{MOA} = \widehat{M'OA'}$ e, além disso, $\widehat{AMO} = 90^\circ$ porque M é a projeção ortogonal de O sobre l e $\widehat{OAM'} = 90^\circ$ porque OM é um diâmetro e $\widehat{OAM'}$ é um triângulo inscrito em uma semicircunferência, resultando que A' está na circunferência com diâmetro OM' .

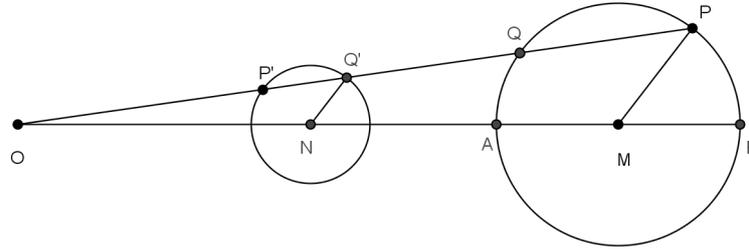
Veja que a tangente t à circunferência $\Sigma(O, \frac{OM'}{2})$ é perpendicular ao diâmetro OM' em O e como M é a projeção ortogonal de O sobre l , em M , então t é paralela à reta l .

4.2.3 A Inversão e as Circunferências

Nesta seção mostraremos o resultado de inverter uma circunferência. A Figura 42 nos ajudará a entender o resultado de inverter uma circunferência que passa pelo centro de inversão O de uma circunferência de inversão Σ se OM' é um diâmetro, então a circunferência que desejamos inverter em relação à $\Sigma(O, r)$ é transformada na reta perpendicular a OM' e que contém o ponto M , inverso de M' por Σ .

Nosso próximo passo será inverter uma circunferência que não passa pelo centro de inversão O .

Figura 43 – inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.



Fonte: O autor.

Suponhamos que a circunferência que desejamos aplicar a inversão tenha raio k e centro M . Sejam P e Q pontos de interseção desta circunferência com uma reta que contém o centro de inversão O . Representaremos por P' e Q' os seus inversos.

Através da definição de inversão, temos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2 \quad (4.2)$$

e, utilizando o corolário 3.13, temos

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = | \overline{OM}^2 - k^2 | . \quad (4.3)$$

Dividindo 4.2 por 4.3, obtemos:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{| \overline{OM}^2 - k^2 |} = cte \quad (4.4)$$

Tracemos, agora, por Q' , uma paralela a PM , determinando assim, na reta OM , o ponto N (observar a Figura 43). Os triângulos $OQ'N$ e OPM são semelhantes, uma vez que os lados $Q'N$ e PM são paralelos. Dessa forma:

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{Q'N}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{MO}} \quad (4.5)$$

Pelas equações 4.4 e 4.5, ficamos com:

$$\overline{NO} = \overline{MO} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{MO} \cdot r^2}{| \overline{OM}^2 - k^2 |} = cte. \quad (4.6)$$

$$\overline{Q'N} = \overline{PM} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP}} = \frac{k \cdot r^2}{| \overline{OM}^2 - k^2 |} = cte. \quad (4.7)$$

A partir desse raciocínio, fazendo construção análoga à anterior só que agora traçando por P' uma paralela a QM , determinando assim na reta \overleftrightarrow{OM} o ponto N para concluir que os pontos P' e Q' estão numa circunferência de centro N e raio constante sempre que os pontos P e Q estiverem na circunferência de centro M e raio k .

De fato, os triângulos OPN e OQM são semelhantes, uma vez que os lados PN' e QM são paralelos. Dessa forma:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PN'}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{MO}} \quad (4.8)$$

Pelas equações 4.6 e 4.8, ficamos com

$$\overline{NO} = \overline{MO} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{MO} \cdot r^2}{|\overline{OM}^2 - k^2|} = cte. \quad (4.9)$$

$$\overline{P'N} = \overline{QM} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{k \cdot r^2}{|\overline{OM}^2 - k^2|} = cte. \quad (4.10)$$

Logo, o ponto P' está na mesma circunferência de Q' , ou seja, a circunferência de centro N e raio constante e igual a $\frac{k \cdot r^2}{|\overline{OM}^2 - k^2|}$.

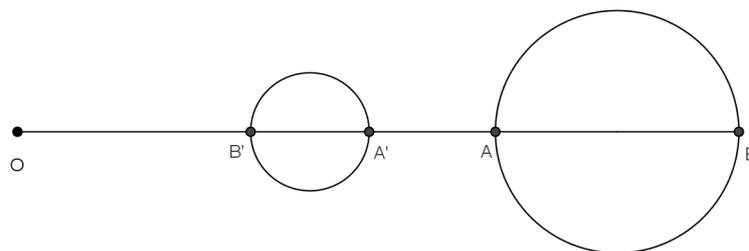
Os cálculos mostrados em 4.7 nos dizem como determinar a medida do raio k' de uma circunferência inversa de uma circunferência com centro no ponto M e raio k e que não passa pelo centro de inversão O , com

$$k' = \frac{k \cdot r^2}{|\overline{OM}^2 - k^2|}. \quad (4.11)$$

Os passos para a construção da circunferência inversa de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão é indicado abaixo:

1. Traçamos uma reta r que passa pelo centro de inversão O e pelo centro da circunferência que será invertida, aqui representada por \mathcal{C} ;
2. Destacamos os pontos A e B , interseções da reta r com \mathcal{C} ;
3. Encontramos os pontos A' e B' , inversos dos pontos A e B , respectivamente;
4. A circunferência construída com diâmetro $A'B'$ é o resultado de aplicar a inversão da circunferência dada.

Figura 44 – construção da circunferência que não passa pelo centro de inversão.



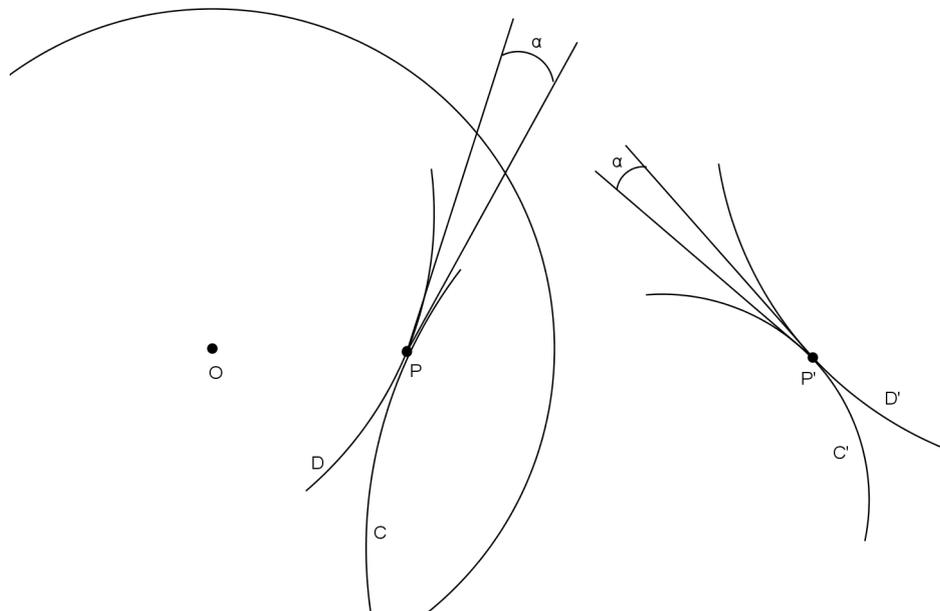
Fonte: O autor.

4.2.4 A Inversão e os Ângulos

Outra propriedade relativamente importante da inversão é aquela em que conserva-se os ângulos entre curvas, ou seja, a inversão é uma transformação *conforme*, que também pode ser denominada *involução*.

O *ângulo de interseção de duas curvas em um ponto de interseção* se define como o ângulo formado pelas retas tangentes quando essas tangentes existem. Assim, sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas curvas que se intersectam em um ponto P distinto do centro de inversão O e α o ângulo formado pelas tangentes a \mathcal{C} e \mathcal{D} no ponto P . Então as tangentes às curvas \mathcal{C}' e \mathcal{D}' no ponto P' também formam um ângulo α , em que P' é o inverso de P .

Figura 45 – a inversão e os ângulos.

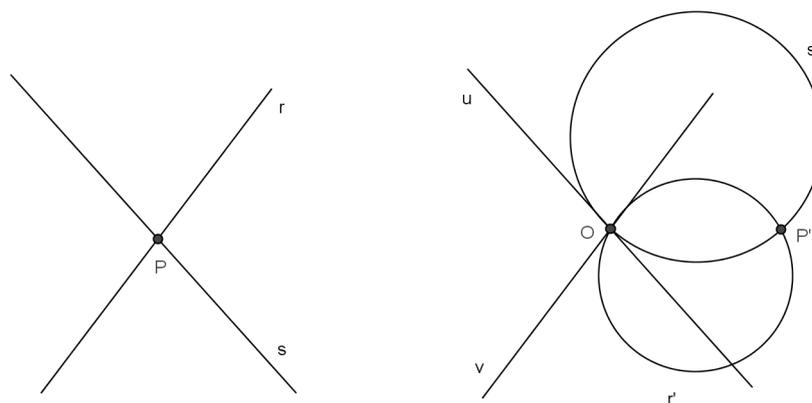


Fonte: O autor.

Para os propósitos deste trabalho, será suficiente demonstrar dois resultados sobre a propriedade da inversão e os ângulos, como veremos a seguir.

Proposição 4.2. *Sejam r e s duas retas que se intersectam em P . Então r' e s' se interceptam em P' fazendo o mesmo ângulo que o de r e s .*

Figura 46 – ângulos entre retas.



Fonte: O autor.

Demonstração. Iremos supor que $P \neq O$ e que as retas r e s não passem por O . Sabemos que r' é um círculo que passa pelo centro de inversão O e que sua tangente v em O é paralela a r ; afirmação análoga podemos fazer sobre s' e a sua tangente u em O .

■

Assim, o ângulo entre r' e s' é o ângulo entre u e v e este ângulo é também o ângulo entre r' e s' em P' , como era desejado.

O resultado a seguir é consequência da Proposição [4.2](#).

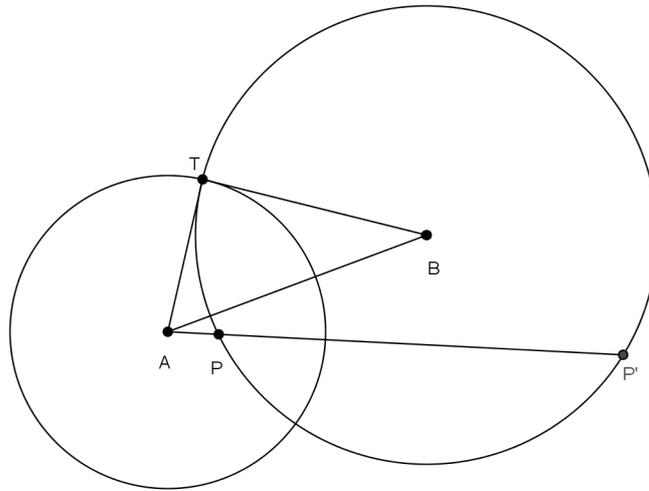
Proposição 4.3. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas circunferências que se intersectam em um ponto A e consideremos uma inversão de centro O , com $O \neq A$. Então o ângulo entre \mathcal{C}' e \mathcal{D}' em A' é o mesmo que o entre \mathcal{C} e \mathcal{D} em A .*

4.3 Circunferências Ortogonais

As circunferências ortogonais estão intimamente relacionadas com a inversão, motivo pelo qual dedicamos uma seção para o seu estudo.

Duas circunferências secantes são ortogonais quando se cortam formando ângulo reto, ou seja, quando suas tangentes (aos raios) em um dos pontos de intersecção são perpendiculares. Assim, as circunferências com centros A e B da Figura [47](#) abaixo são perpendiculares, uma vez que $BTA = 90^\circ$.

Figura 47 – circunferências ortogonais.



Fonte: O autor.

Se r e s são os raios das circunferências de centros A e B , respectivamente, representadas na Figura 47 a condição de ortogonalidade equivale a $\overline{AB}^2 = r^2 + s^2$.

4.3.1 Ortogonalidade e Inversão

Se continuarmos supondo que as circunferências da Figura 47 da Seção anterior são ortogonais, e se P e P' são os dois pontos da interseção de uma reta que passa por A e pela circunferência de centro B , a *potência* do ponto A em relação a circunferência de centro B , como definida no Capítulo 3, é dada por $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AT}^2 = r^2$, logo P' é o ponto inverso de P em relação a circunferência de centro A . Assim:

Uma inversão deixa fixa uma circunferência ortogonal em relação à circunferência de inversão.

A recíproca do resultado apresentado também é verdadeira, ou seja:

Se a circunferência de centro em B contém um ponto P e o seu inverso P' em relação a circunferência de centro no ponto A , teremos $r^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AB}^2 - s^2$, conforme Corolário 3.13. Dessa forma, as circunferências serão ortogonais.

4.4 Circunferências Concêntricas

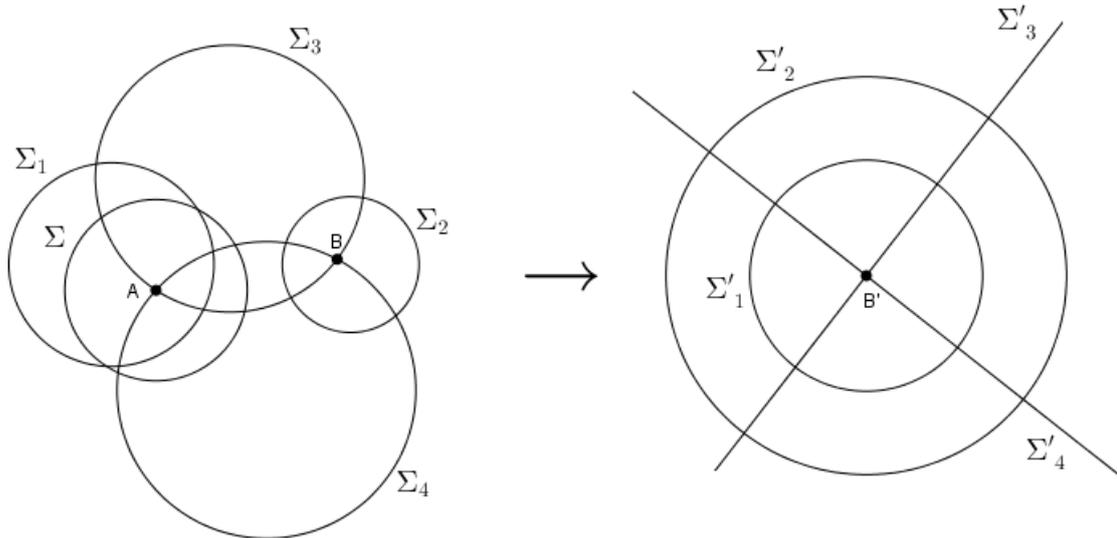
Iniciaremos esta seção definindo o que são circunferências concêntricas.

Definição 4.2. *Dizemos que duas ou mais circunferências são concêntricas quando possuem o mesmo centro mas com raios diferentes.*

A seguir apresentaremos uma proposição extremamente relevante, que será usada nos capítulos seguintes, envolvendo circunferências concêntricas.

Proposição 4.4. *Se Σ_1 e Σ_2 são duas circunferências que não se intersectam, então as suas inversas Σ'_1 e Σ'_2 são concêntricas.*

Figura 48 – circunferências que não se intersectam e suas inversas concêntricas.



Fonte: O autor.

Demonstração. De fato, sejam Σ_3 e Σ_4 duas circunferências ortogonais a Σ_1 e Σ_2 as quais se intersectam nos pontos A e B . Seja Σ a circunferência de inversão centrada em A e raio qualquer. Sabemos, por propriedade, que as circunferências ortogonais se conservam na inversão. Assim, as inversas Σ'_3 e Σ'_4 de Σ_3 e Σ_4 são retas ortogonais a Σ'_1 e Σ'_2 , inversas de Σ_1 e Σ_2 . Porém, uma reta ortogonal a uma circunferência é o diâmetro dela. Com isso, Σ'_3 e Σ'_4 se intersectam no ponto B' , inverso do ponto B , que é o centro dessas circunferências. Portanto, Σ'_1 e Σ'_2 devem ser concêntricas. ■

Observe que consideramos o caso em que as duas circunferências são disjuntas e exteriores. Esse resultado também funciona se as circunferências forem interiores. Além disso, pelo fato de que a transformação de inversão é involutiva, se aplicarmos a inversão em duas circunferências concêntricas, obtemos duas circunferências não concêntricas.

Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor deste trabalho, organizamos, em forma de tabela, as propriedades da inversão que foram desenvolvidas neste capítulo.

Tabela 1 – Propriedades da Inversão

Propriedades	Inversão
Distância entre os pontos inversos de A e B	$\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$
Reta que passa pelo centro de inversão	Transforma-se nela mesma
Reta que não passa pelo centro de inversão	Transforma-se em uma circunferência que passa pelo centro de inversão
Circunferência que não passa pelo centro de inversão	Transforma-se em uma circunferência que não passa pelo centro de inversão
Circunferências que não se intersectam	Transformam-se em circunferências concêntricas
Circunferências ortogonais	Transformam-se nelas mesmas
Ângulos formados pelas tangentes entre curvas	A transformação mantém os ângulos

Fonte: O autor.

As propriedades e resultados discutidos nesse capítulo serão abordados através de aplicações nos capítulos seguintes deste trabalho.

5 Os Três Problemas Clássicos da Inversão Geométrica

Geométrica

Neste capítulo trataremos, como o próprio nome sugere, os três problemas clássicos da inversão geométrica: o Porisma de Steiner, o Teorema de Feuerbach e o problema de Apolônio.

5.1 O Porisma de Steiner

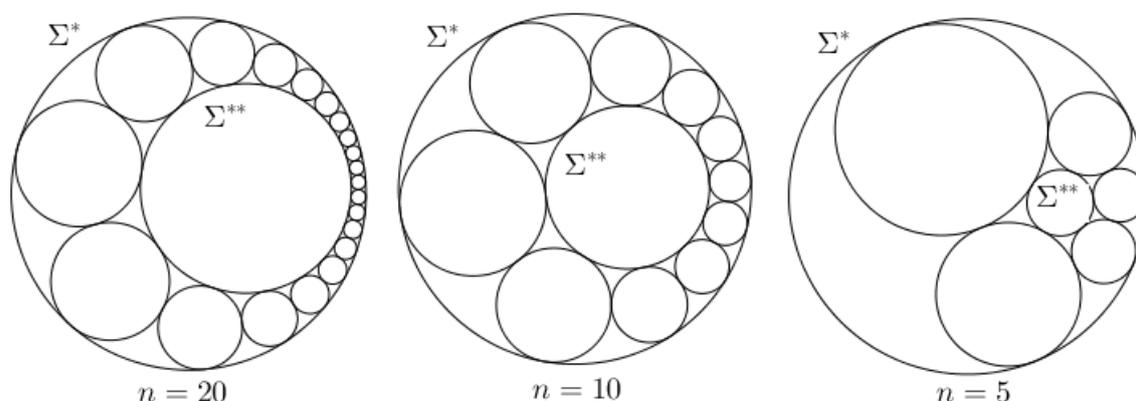
Um primeiro exemplo, em que podemos ver o poder da inversão geométrica, é o denominado Porisma ou Cadeia de Steiner, proposto pelo matemático suíço Jacob Steiner (1796 - 1863). Este problema nos diz que: dadas duas circunferências não concêntricas, uma interior a outra, queremos saber se existe uma cadeia de circunferências, cada uma delas tangente à anterior e à posterior, e todas elas tangentes às duas circunferências dadas. (TARRIDA, 2003)

A seguir, apresentaremos uma definição formal e ilustraremos a situação.

Definição 5.1. *Seja Σ^* e Σ^{**} duas circunferências não concêntricas, consideremos circunferências $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ de tal maneira que cada Σ_k , com $k \geq 2$, sejam tangentes a Σ^* , Σ^{**} e Σ_{k-1} . Se existe um número natural n tal que Σ_n é tangente a Σ^* , Σ^{**} , Σ_{n-1} e Σ_1 , então dizemos que $\{\Sigma_k\}_{k=1}^n$ é um porisma de Steiner para Σ^* e Σ^{**} .*

Na Figura 49 a seguir, ilustramos exemplos de porisma de Steiner para $n = 20$, 10 e 5.

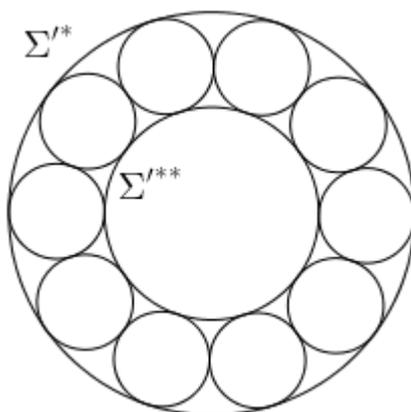
Figura 49 – Porisma de Steiner.



Fonte: O autor.

Embora nos limitemos a construir uma quantidade finita de circunferências, este problema tem infinitas soluções, isto é, há uma infinidade de circunferências que podem ser postas em forma de porisma. Observe que não é uma tarefa simples construir essas circunferências como na Figura 49 utilizando o conhecimento de geometria plana. Porém, podemos transformar o problema em um outro um tanto quanto mais simples, o qual consideramos as duas circunferências concêntricas e n circunferências tangentes, em que cada uma delas é tangente à anterior, à posterior e as duas circunferências dadas, como ilustra a Figura 50 e, a partir disso, usamos o conhecimento da inversão geométrica para construir o porisma.

Figura 50 – circunferências concêntricas.



Fonte: O autor.

Antes de justificarmos matematicamente como dispor tais circunferências, vamos descrever os passos para a construção de n circunferências, conforme Figura 50, utilizando o Software de Geometria Dinâmica: o GeoGebra.

1. Escolha o seu polígono selecionando a opção de *polígono regular* no Geogebra;
2. Use a ferramenta *ponto médio* para encontrar o ponto médio de cada lado;
3. Use a ferramenta *círculos dado centro e um de seus pontos* para construir uma circunferência centrada em cada vértice e tendo uma distância radial do vértice a um ponto adjacente;
4. Se o polígono tiver número ímpar de lados, trace uma semirreta partindo do um ponto médio ao vértice oposto. Faça isso novamente com outro ponto médio e vértice.
5. Se o polígono tiver um número par de lados, trace uma semirreta partindo de um vértice ao vértice oposto. Faça isso novamente com outros dois vértices.
6. Coloque um ponto onde as semirretas se intersectam e este é o centro do polígono.

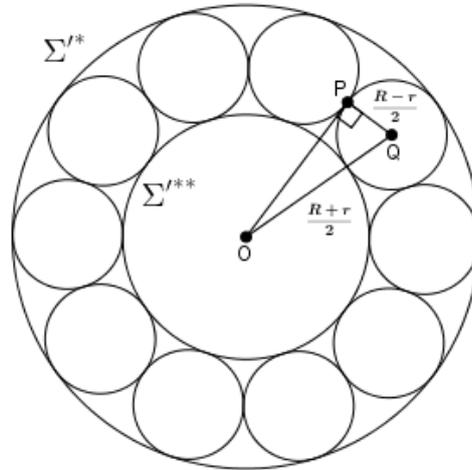
7. Coloque um ponto na parte superior e inferior da circunferência onde a semirreta intersecta a circunferência.
8. Desenhe duas circunferências: uma com um raio do centro ao ponto do círculo interno e a outra com um raio do centro ao outro ponto.
9. Limpe todos os pontos, semirretas, raios e o polígono, deixando apenas as circunferências.

A proposição a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que seja possível realizar tal construção.

Proposição 5.1. *Dois circunferências concêntricas $\Sigma^{I*}(O; R)$ e $\Sigma^{I**}(O; r)$ admitem uma cadeia de n circunferências se, e somente, se*

$$\frac{R}{r} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}.$$

Figura 51 – cadeia de n circunferências.



Fonte: O autor.

Demonstração. Nas notações da Figura 51, suponha que seja possível inscrever n pequenas circunferências entre essas duas circunferências concêntricas. Por simetria, todas essas pequenas circunferências são congruentes. Assim, se tomarmos o ponto P como o ponto de tangência entre duas dessas circunferências e o ponto Q como o centro de uma delas, o triângulo OPQ é retângulo em P , pois o raio é perpendicular no ponto de tangência.

Além disso, se PQ é o raio de uma dessas circunferências, então $2\overline{PQ} = R - r$, isto é,

$$\overline{PQ} = \frac{R - r}{2}$$

e

$$\overline{OQ} = R - \left(\frac{R-r}{2} \right) \quad (5.1)$$

$$= \frac{2R - R + r}{2} \quad (5.2)$$

$$= \frac{R+r}{2}. \quad (5.3)$$

Agora, observe que o ângulo $P\hat{O}Q = \frac{\pi}{n}$, uma vez $P\hat{O}Q$ é ângulo central, que as circunferências estão igualmente espaçadas e são congruentes. Com isso, temos

$$\text{sen } \frac{\pi}{n} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{R-r}{2} \cdot \frac{2}{R+r} = \frac{R-r}{R+r}. \quad (5.4)$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado direito de [5.4](#) por r , obtemos

$$\text{sen } \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{R}{r} - 1}{\frac{R}{r} + 1}, \quad (5.5)$$

ou seja,

$$\text{sen } \frac{\pi}{n} \cdot \frac{R}{r} + \text{sen } \frac{\pi}{n} - \frac{R}{r} + 1 = 0, \quad (5.6)$$

isto é,

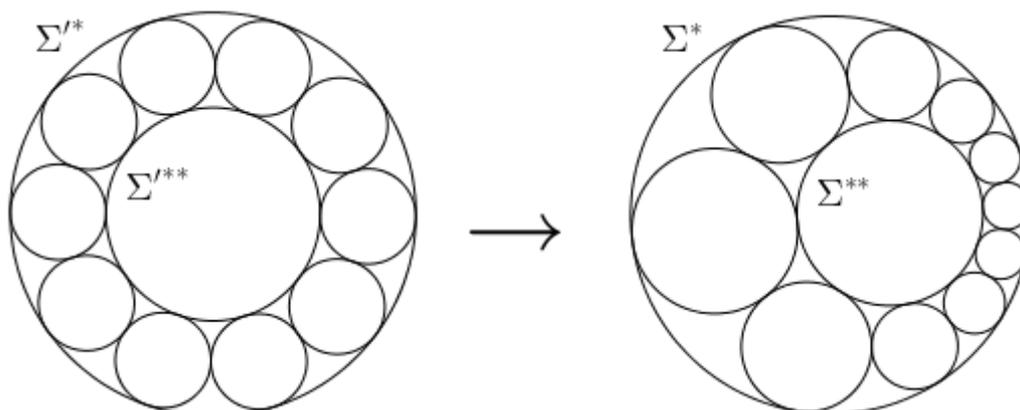
$$\frac{R}{r} \cdot \left(\text{sen } \frac{\pi}{n} - 1 \right) = - \left(1 + \text{sen } \frac{\pi}{n} \right), \quad (5.7)$$

logo,

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \text{sen } \frac{\pi}{n}}{1 - \text{sen } \frac{\pi}{n}}. \quad (5.8)$$

Para a recíproca, basta usar o argumento desenvolvido anteriormente partindo da igualdade acima. ■

Como a inversão é uma transformação involutiva, pela Proposição [4.4](#), podemos inverter as circunferências da Figura [51](#) e obter o resultado desejado. Ver Figura [52](#) a seguir.

Figura 52 – inversão na cadeia de n circunferências.

Fonte: O autor.

5.2 O Teorema de Feuerbach

Karl Wilhelm Feuerbach (1800 - 1834) foi um matemático alemão nascido em Jena. Aos 22 anos, recebeu o grau de doutor e tornou-se docente de matemática no ginásio Erlanger. Em 1822, Feuerbach desenvolveu a sua obra intitulada “*Propriedades de alguns pontos especiais no triângulo plano*”. É nessa obra que consta um dos mais surpreendentes teoremas da geometria de triângulos que envolve a circunferência dos nove pontos: o Teorema de Feuerbach.

Figura 53 – Karl Wilhelm Feuerbach.

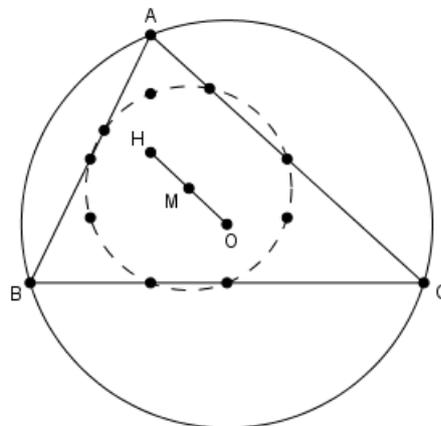


Fonte: Wikipedia.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Feuerbach, apresentaremos a circunferência dos nove pontos e, em seguida, a definição de circunferências ex-inscritas a um triângulo.

Proposição 5.2. *Seja ABC um triângulo qualquer de circuncentro O e ortocentro H . Então existe uma circunferência, de centro no ponto médio M de OH , que passa pelos pontos médios dos lados, pelos pés das alturas, pelos pontos médios que unem H aos vértices do triângulo e cujo raio mede metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. (Ver demonstração em (NETO, 2012), p.149).*

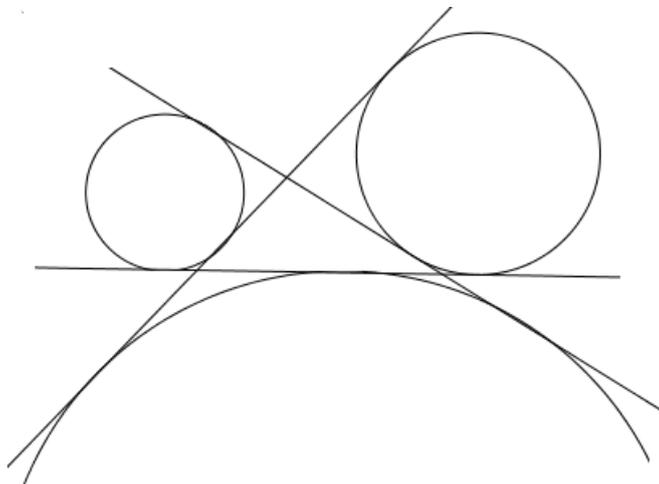
Figura 54 – circunferência dos nove pontos.



Fonte: O autor.

Definição 5.2. *Dizemos que uma circunferência é ex-inscrita a um triângulo quando é tangente a um de seus lados e aos prologamentos dos outros dois lados. Todo triângulo admite três circunferências ex-inscritas. (Ver (NETO, 2012), p.106.)*

Figura 55 – circunferências ex-inscritas ao triângulo.

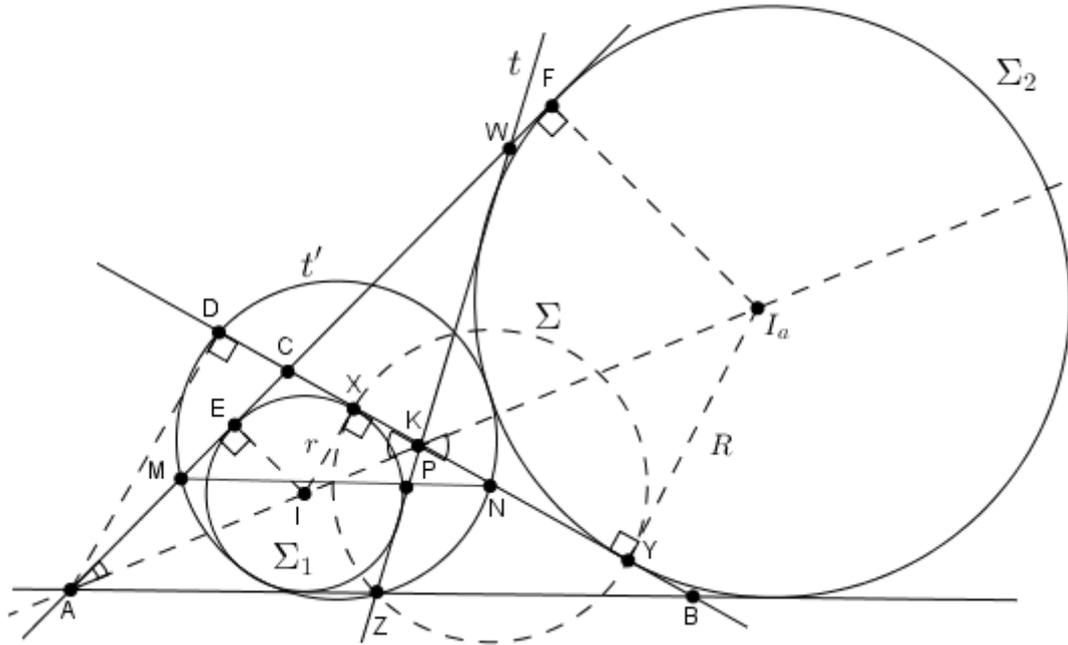


Fonte: O autor.

A seguir consta o enunciado e a demonstração do magnífico Teorema de Feuerbach.

Teorema 5.3. *A circunferência de nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e a cada uma de suas circunferências ex-inscritas.*

Figura 56 – Teorema de Feuerbach.



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $c > a > b$. Considere também as circunferências $\Sigma_1(I, r)$ e $\Sigma_2(I_a, R)$ inscrita e ex-inscrita ao triângulo ABC , e marcamos os pontos de tangência X e Y de Σ_1 e Σ_2 com o lado BC , respectivamente. Agora, seja t a outra reta tangente à Σ_1 e Σ_2 , tal que $t \cap \overleftrightarrow{AC} = W$ e $t \cap \overleftrightarrow{AB} = Z$. Feito isso, marcamos o ponto K de tal forma que $t \cap \overleftrightarrow{BC} = K$. Dessa forma, os pontos A, I, K e I_a estão sob a bissetriz interna de A e, portanto, são colineares. Além disso, perceba que os triângulos I_aYK e IXK são semelhantes. De fato, temos $I_a\hat{Y}K = I\hat{X}K = 90^\circ$ e $I_a\hat{K}Y = I\hat{K}X$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Dessa semelhança, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\overline{KI_a}}{\overline{KI}} = \frac{R}{r} \quad e \quad \frac{\overline{KY}}{\overline{KX}} = \frac{R}{r}. \tag{5.9}$$

Sejam E e F os pontos de tangência de Σ_1 e Σ_2 com as retas \overleftrightarrow{AC} , respectivamente. Note que os triângulos AI_aF e AIE são semelhantes. Com efeito, temos $I_a\hat{F}A = I\hat{E}A = 90^\circ$ e $I_a\hat{A}F = I\hat{A}E$, porque são ângulos comuns aos dois triângulos. Daí, segue-se que

$$\frac{\overline{AI_a}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{FI_a}}{\overline{EI}} = \frac{R}{r}. \quad (5.10)$$

Considere D a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A , M e N os pontos médios do lado AC e BC , respectivamente. Observe que as retas \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{XI} e $\overleftrightarrow{YI_a}$ são paralelas e estão sendo intersectadas pelas retas \overleftrightarrow{AC} e $\overleftrightarrow{AI_a}$, logo, pelo Teorema de Tales (ver (NETO, 2012), p. 120), temos

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{II_a}}{\overline{AI}}. \quad (5.11)$$

Mas, como D , X e Y são colineares, então $\overline{XY} = \overline{DY} - \overline{DX}$. Analogamente, pela colinearidade de A , I e I_a , podemos escrever que $\overline{II_a} = \overline{AI_a} - \overline{AI}$. Substituindo essas relações, em 5.11, obtemos

$$\frac{\overline{DY} - \overline{DX}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{AI_a} - \overline{AI}}{\overline{AI}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{DX}} - 1 = \frac{\overline{AI_a}}{\overline{AI}} - 1,$$

isto é,

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{AI_a}}{\overline{AI}} = \frac{R}{r},$$

pela equação 5.10.

Além disso, de 5.9, sabemos que

$$\frac{\overline{KY}}{\overline{KX}} = \frac{R}{r}.$$

Então,

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{KY}}{\overline{KX}},$$

ou seja, K e D dividem harmonicamente o segmento XY .

Agora, seja Σ uma circunferência de centro N . Essa circunferência passa pelos pontos X e Y , pois o ponto N , além de ser o ponto médio de BC , é também o ponto médio de XY (ver (NETO, 2012), p.106). Tomando Σ como a circunferência de inversão, os pontos K e D são inversos em relação à Σ . Ademais, como N é ponto médio de BC e XY , temos $\overline{XY} = \overline{BC} - \overline{CX} - \overline{BY}$. Porém, pelo fato de CX ser tangente a Σ_1 e BY ser tangente a Σ_2 , pela propriedade dos segmentos tangentes à circunferência, temos $\overline{CX} = \overline{BY}$. Assim,

$$\overline{XY} = \overline{BC} - 2\overline{CX}. \quad (5.12)$$

Denotando por p o semiperímetro de ABC , temos $p = \frac{a+b+c}{2}$. Por propriedade da geometria plana, sabemos que a distância de um vértice ao ponto de tangência da circunferência inscrita ao triângulo é igual a diferença entre o semiperímetro e o lado oposto a esse vértice (ver (NETO, 2012), p.106). Desse modo, temos $\overline{CX} = p - c = \frac{a+b+c-2c}{2}$. Substituindo $\overline{BC} = a$ e $\overline{CX} = p - c$ em 5.12, obtemos

$$\overline{XY} = a - 2 \cdot (p - c) \quad (5.13)$$

$$= a - 2 \cdot \left(\frac{a+b+c-2c}{2} \right) \quad (5.14)$$

$$= a - a - b + c \quad (5.15)$$

$$= c - b. \quad (5.16)$$

Isso nos diz que o raio de Σ é igual a $\frac{c-b}{2}$.

Traçando o segmento MN , note que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, pois MN é base média do triângulo ABC . Conseqüentemente, temos

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{c}{2}.$$

Marcamos agora o ponto P tal que $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{WZ} = P$. Aqui, vamos mostrar que M e P são inversos em relação a Σ . Para tanto, vamos mostrar que

$$\overline{NP} \cdot \overline{MN} = \left(\frac{c-b}{2} \right)^2.$$

Com efeito, sabemos que $\overline{MN} = \frac{c}{2}$. Pela semelhança dos triângulos AWZ e MWP , temos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{WM}}{\overline{WA}},$$

ou seja,

$$\overline{PM} = \frac{\overline{ZA} \cdot \overline{WM}}{\overline{WA}}. \quad (5.17)$$

Vamos, agora, mostrar que $\overline{ZA} = \overline{AC}$ e $\overline{WA} = \overline{AB}$. De fato, inicialmente, observe que os triângulos IXK e IPK são congruentes pelo caso CH. Dessa congruência, segue os ângulos $\widehat{IKX} = \widehat{IKP}$. Ademais, veja que os triângulos ACK e AZK são congruentes pelo caso ALA, pois $\widehat{CAX} = \widehat{ZAK}$, o lado AK é comum e como vimos acima $\widehat{AKC} = \widehat{IKX} = \widehat{IKP} = \widehat{AKZ}$. Portanto, dessa última congruência, temos $\overline{ZA} = \overline{AC}$. Como AI é bissetriz do ângulo \widehat{A} , e como foi provado acima, $\widehat{AKC} = \widehat{AKZ}$, segue que $\widehat{ACK} = \widehat{AZK}$, ou seja, $\widehat{ACB} = \widehat{AZW}$. Novamente, como foi provado acima, $\overline{ZA} = \overline{AC}$. O \widehat{A} é comum aos triângulos CAB e AZW . Diante disso, os triângulos

CAB e AZW são congruentes pelo caso ALA. Portanto, $\overline{WA} = \overline{AB}$. Além disso, perceba que $\overline{WM} = \overline{WA} - \overline{AM} = \overline{AB} - \overline{AM}$. Logo, substituindo em [5.17](#), obtemos

$$\overline{PM} = \frac{\overline{AC} \cdot (\overline{BA} - \overline{AM})}{\overline{AB}}. \quad (5.18)$$

Como $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AM} = \frac{b}{2}$, substituindo em [5.18](#), vem

$$\overline{PM} = \frac{b \cdot \left(c - \frac{b}{2}\right)}{c} \quad (5.19)$$

$$= \frac{bc - \frac{b^2}{2}}{c} \quad (5.20)$$

$$= \frac{2bc - b^2}{2c}. \quad (5.21)$$

Perceba que $\overline{NP} = \overline{MN} - \overline{PM}$, ou seja,

$$\overline{NP} = \frac{c}{2} - \left(\frac{2bc - b^2}{2c}\right) \quad (5.22)$$

$$= \frac{c^2 - 2bc + b^2}{2c} \quad (5.23)$$

$$= \frac{(c - b)^2}{2c}. \quad (5.24)$$

Então,

$$\overline{NP} \cdot \overline{MN} = \frac{(c - b)^2}{2c} \cdot \frac{c}{2} \quad (5.25)$$

$$= \frac{(c - b)^2}{4} \quad (5.26)$$

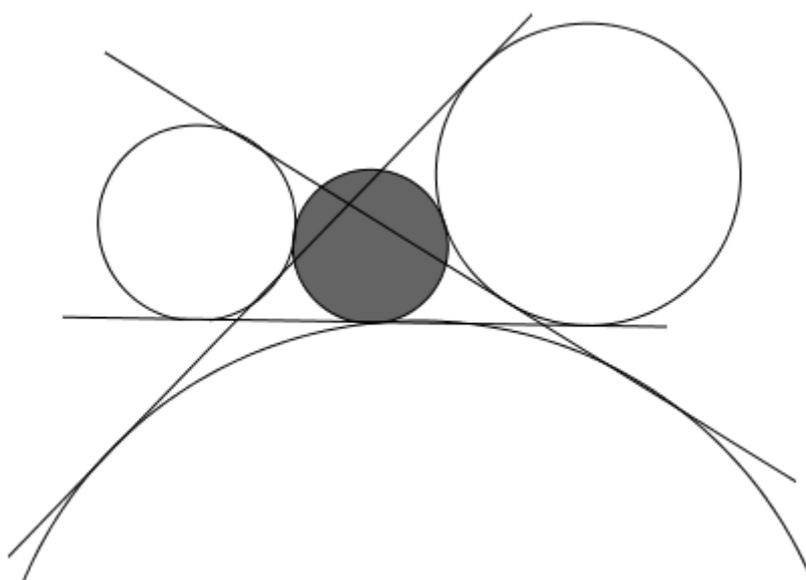
$$= \left(\frac{c - b}{2}\right)^2. \quad (5.27)$$

Agora, como $\frac{c - b}{2}$ é o raio de Σ , concluímos que M e P são inversos em relação a Σ . Com isso, observe que a reta t não passa por N , centro da circunferência de inversão, então, a sua inversa t' é uma circunferência que passa por N . Dessa maneira, como t passa por K e P , a sua inversa t' deve passar por D e M , inversos de K e P , respectivamente. Logo, a circunferência t' que passa pelos pontos N , D e M é a circunferência dos nove pontos do triângulo ABC , pois passa pelos pontos médios M , N e por D , pé da altura. Diante disso, afirmamos que t' é tangente a Σ_1 e Σ_2 . De fato, a reta t é tangente à Σ_1 e Σ_2 , logo, a sua inversa t' também é tangente à Σ'_1 e Σ'_2 , inversas de Σ_1 e Σ_2 . Porém, como Σ_1 e Σ_2 são ortogonais em relação a Σ , as

suas inversas se mantêm, isto é $\Sigma'_1 = \Sigma_1$ e $\Sigma'_2 = \Sigma_2$. Portanto, a circunferência dos nove pontos do triângulo ABC é tangente à circunferência inscrita e à circunferência ex-inscrita em relação ao lado BC . Analogamente, mostra-se que a circunferência dos nove pontos é tangente às circunferências ex-inscritas em relação aos lados AB e AC do triângulo ABC , como queríamos provar. ■

Na Figura 57 pode-se vislumbrar, em aspecto sombreado, a circunferência de nove pontos.

Figura 57 – circunferência de nove pontos.



Fonte: O autor.

5.3 O Problema de Apolônio

Apolônio foi um brilhante matemático, que nasceu em Perga por volta de 262 a.C e morreu por volta de 190 a.C. Durante sua existência, Apolônio desenvolveu diversos trabalhos no ramo da Matemática, em particular, na Geometria. Dentre esses trabalhos, há um que é considerado, por diversos matemáticos, o mais famoso e influente: o tratado das Cônicas.

Embora seja notável a relevância dos trabalhos desenvolvidos por Apolônio, sabe-se que muitos destes trabalhos foram perdidos e, o conhecimento a cerca destes, deu-se devido a Pappus, outro grande matemático que viveu por volta do século IV d.C.

No meio destes trabalhos perdidos, destacamos aqui o “*tratado das Tangências*” em que consta o “*problema de Apolônio*”, descrito por Pappus, o qual podemos enuncia-lo da seguinte forma:

Dados três objetos, cada um dos quais pode ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, trace todas as circunferências tangentes aos três simultaneamente.

Observação: é importante ressaltar que a tangência a um ponto, nesse contexto, significa que a circunferência passa pelo ponto (BOYER; MERZBACH, 2019).

Denotando P para o ponto, R para a reta e C para a circunferência, podemos verificar que há dez situações possíveis para o problema de Apolônio a partir da disposição destes três objetos no plano: 1ª - PPP , 2ª - RRR , 3ª - PPR , 4ª - PPC , 5ª - PRR , 6ª - PCC , 7ª - CRR , 8ª - PRC , 9ª - RCC e 10ª - CCC . A seguir justificaremos o porquê das dez situações descritas.

Com efeito, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há 3 possibilidades de escolha para o primeiro objeto, 3 possibilidades para a escolha do segundo objeto e 3 para a escolha do terceiro objeto, totalizando $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ possibilidades. Porém, devemos descontar os casos repetidos, pois as permutações dos objetos no plano não geram novas situações. Por exemplo, PRC e PCR , RPP e PRP , representam uma mesma situação. Dividiremos em dois casos:

1º caso: *Três objetos distintos.*

Neste caso, há $3! = 6$ possibilidades de permutar esses objetos, mas apenas uma delas nos interessa. Assim, descartamos 5 possibilidades.

2º caso: *Dois objetos de mesma forma e outro distinto.*

Neste caso, há 3 possibilidades para escolhermos dois objetos da mesma forma. Digamos que os objetos escolhidos sejam dois pontos. Dessa forma, há 2 possibilidades para escolher os outros dois objetos. Agora, permutando os três objetos, sendo dois deles de mesma forma, obtemos $\frac{3!}{2!} = 3$ possibilidades. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ possibilidades. No entanto, devemos retirar os 12 casos repetidos: RPP , PRP , RPR , PRR , PCP , CPP , RCR , CRR , CCP , CPC , CCR e RCC . Portanto, o total de situações possíveis para dispor os três objetos no plano é $27 - 5 - 12 = 10$.

Após a justificativa das dez situações possíveis de dispor os três objetos no plano, nos limitaremos aqui a resolver a décima situação, ou seja, o problema de Apolônio para três circunferências. Além disso, consideraremos as três circunferências disjuntas e externas duas a duas. Caso o leitor queria saber mais detalhes sobre o problema de Apolônio, recomendamos ver (SOUSA et al., 2014).

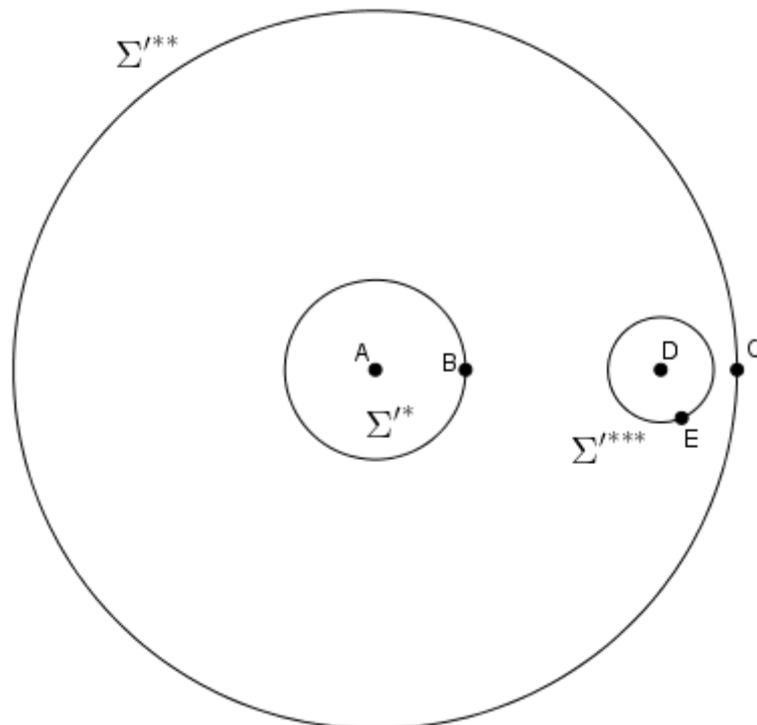
Observe que, resolver o problema de Apolônio considerando três circunferências disjuntas e externas duas a duas, não é uma tarefa fácil usando a geometria plana, uma vez que esse problema admite oito soluções, isto é, há oito circunferências tangentes a estas três circunferências dadas. De fato, se tomarmos um ponto em uma circunferência, há dois tipos de circunferências tangentes a ela: uma interna e a outra externa. Como são três circunferências, logo, pelo princípio multiplicativo, existem, no máximo,

$2^3 = 8$ circunferências tangentes a estas três circunferências dadas.

No entanto, fazendo uso da inversão e da Proposição 4.4, podemos reduzi-lo a um problema um pouco mais simples o qual segue-se:

Problema 5.4. *Dadas as circunferências concêntricas $\Sigma'^*(A, AB)$ e $\Sigma'^{**}(A, AC)$ e a circunferência $\Sigma'^{***}(D, DE)$ no interior de Σ'^{**} e no exterior de Σ'^* , construir oito circunferências tangentes simultaneamente a Σ'^* , Σ'^{**} e Σ'^{***} . □*

Figura 58 – esboço do Problema de Apolônio, parte 1.



Fonte: O autor.

Solução 5.4

Vamos dividir o problema em duas etapas.

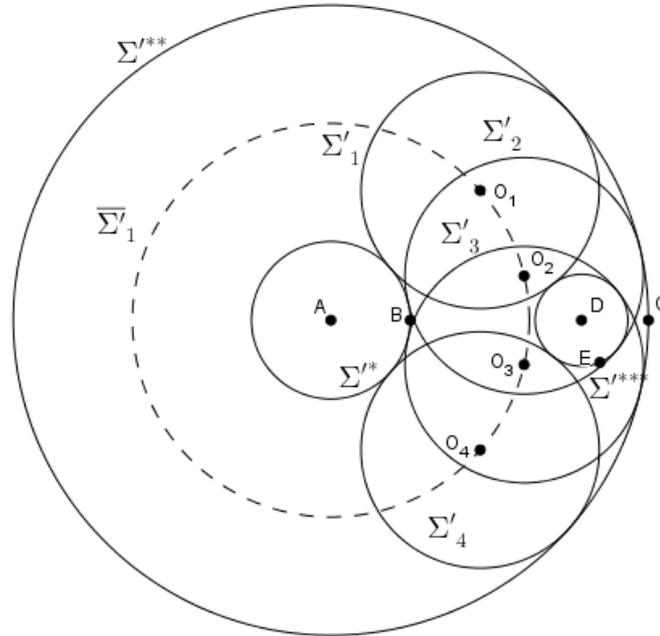
Nesta primeira etapa, construiremos quatro circunferências Σ'_1 , Σ'_2 , Σ'_3 e Σ'_4 de tal forma que:

- Σ'_1 seja tangente internamente a Σ'^{**} e externamente a Σ'^* e Σ'^{***} .
- Σ'_2 seja tangente internamente a Σ'^{**} e Σ'^{***} e externamente a Σ'^* .
- Σ'_3 seja tangente internamente a Σ'^{**} e Σ'^{***} e externamente a Σ'^* .
- Σ'_4 seja tangente internamente a Σ'^{**} e externamente a Σ'^* e Σ'^{***} .

¹ Este problema foi adaptado de (LINARES, 2021).

A Figura 59 a seguir ilustra a situação descrita acima.

Figura 59 – esboço do Problema de Apolônio, parte 2.



Fonte: O autor.

Denotando por O_1, O_2, O_3 e O_4 , os centros das circunferências, $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3$ e Σ'_4 , respectivamente, note que todos esses centros estão em uma circunferência que denotamos por $\bar{\Sigma}'_1$ de centro A e raio $\overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2}$. Além disso, perceba que as circunferências $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3$ e Σ'_4 têm o mesmo raio de medida $\frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$. Descreveremos agora os passos para construir essas quatro circunferências utilizando o software de Geometria Dinâmica: Geogebra.

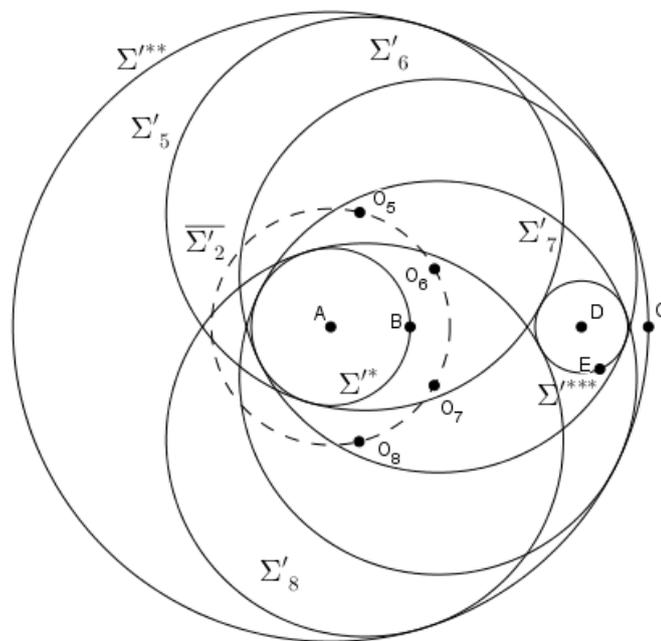
- Com centro no ponto D , construa uma circunferência de raio $\overline{DE} + \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$;
- Marque os pontos O_1 e O_4 de interseção entre a circunferência construída e $\bar{\Sigma}'_1$;
- Agora, com centro em O_1 e O_4 , construa as circunferências Σ'_1 e Σ'_4 de raio $\frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$;
- Com centro no ponto D , construa uma circunferência de raio $\frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2} - \overline{DE}$;
- Marque os pontos O_2 e O_3 de interseção entre a circunferência construída e $\bar{\Sigma}'_1$;
- Por fim, com centro em O_2 e O_3 , construa as circunferências Σ'_2 e Σ'_3 de raio $\frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$.

Nesta segunda etapa, construiremos as outras quatro circunferências Σ'_5 , Σ'_6 , Σ'_7 e Σ'_8 de tal forma que:

- Σ'_5 seja tangente internamente à Σ'^* e Σ'^{**} e externamente à Σ'^{***} .
- Σ'_6 seja tangente internamente à Σ'^* e Σ'^{**} e Σ'^{***} .
- Σ'_7 seja tangente internamente à Σ'^* e Σ'^{**} e Σ'^{***} .
- Σ'_8 seja tangente internamente à Σ'^* e Σ'^{**} e externamente à Σ'^{***} .

A Figura 60 a seguir ilustra a situação descrita acima.

Figura 60 – esboço do Problema de Apolônio, parte 3.



Fonte: O autor.

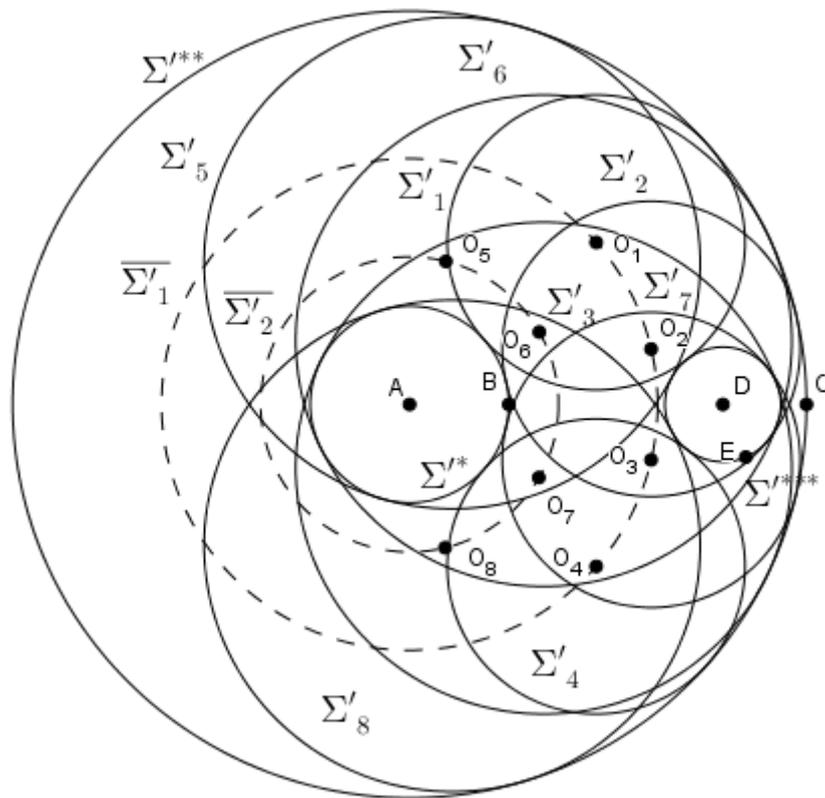
Denotando por O_5 , O_6 , O_7 e O_8 , os centros das circunferências, Σ'_5 , Σ'_6 , Σ'_7 e Σ'_8 , respectivamente, note que todos esses centros estão em uma circunferência que denotamos por $\overline{\Sigma'_2}$ de centro A e raio $\frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$. Além disso, perceba que as circunferências Σ'_5 , Σ'_6 , Σ'_7 e Σ'_8 têm o mesmo raio de medida $\frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2}$. Descreveremos agora os passos para construir essas quatro circunferências utilizando o software de Geometria Dinâmica: Geogebra.

- Com centro no ponto D , construa uma circunferência de raio $\overline{DE} + \frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2}$;
- Marque os pontos O_5 e O_8 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma'_2}$;

- Agora, com centro em O_5 e O_8 , construa as circunferências Σ'_5 e Σ'_8 de raio $\frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2}$;
- Com centro no ponto D, construa uma circunferência de raio $\frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2} - \overline{DE}$;
- Marque os pontos O_6 e O_7 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma'_2}$;
- Por fim, com centro em O_6 e O_7 , construa as circunferências Σ'_6 e Σ'_7 de raio $\frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2}$.

Na Figura 61 a seguir, estão ilustradas essas duas etapas.

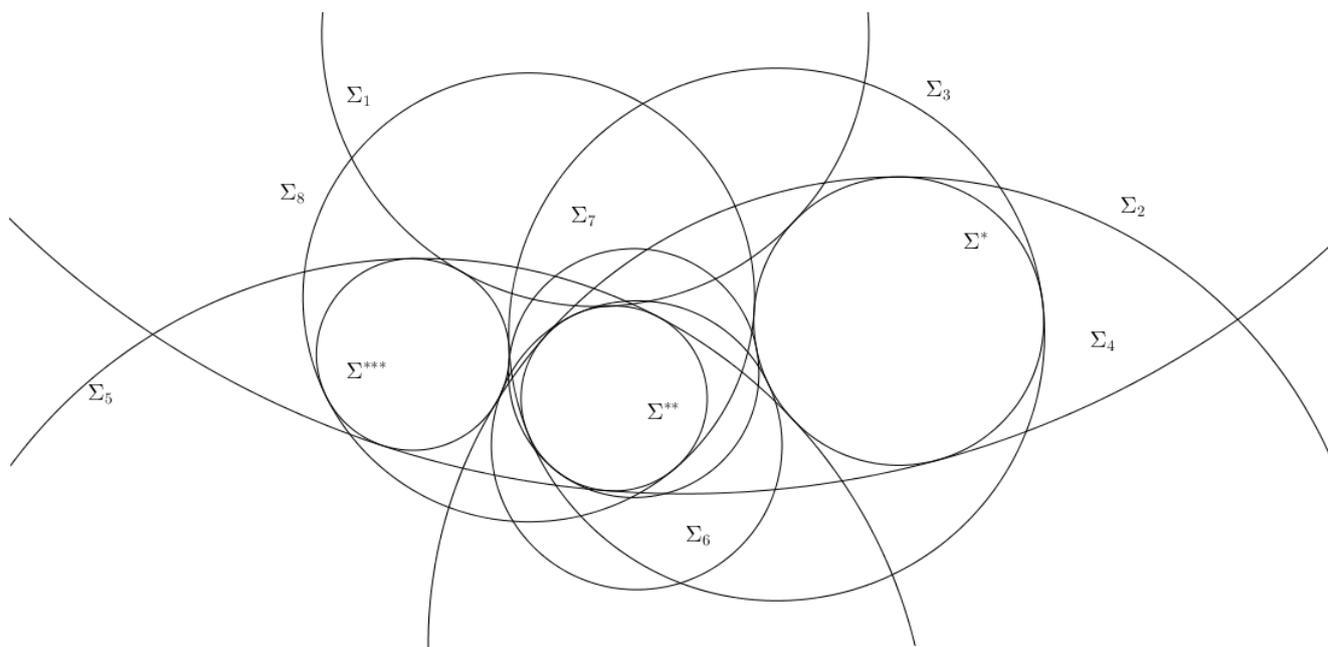
Figura 61 – esboço do Problema de Apolônio, parte 4.



Fonte: O autor.

Agora, para obtermos a solução desejada para o problema de Apolônio, basta “desinvertermos” as circunferências Σ^* , Σ^{**} , Σ^{***} , Σ'_1 , Σ'_2 , Σ'_3 , Σ'_4 , Σ'_5 , Σ'_6 , Σ'_7 e Σ'_8 , obtendo assim as circunferências Σ^* , Σ^{**} , Σ^{***} , Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , Σ_4 , Σ_5 , Σ_6 , Σ_7 e Σ_8 , conforme consta na Figura 62 a seguir.

Figura 62 – esboço do Problema de Apolônio, parte 5.



Fonte: O autor.

6 A Inversão Geométrica em Problemas Olímpicos

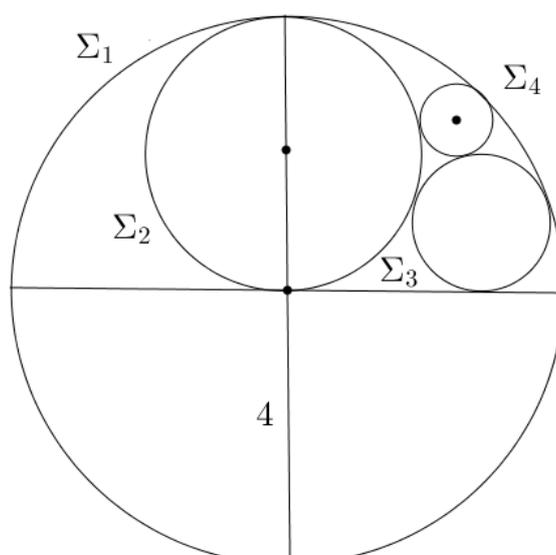
As olimpíadas de Matemática desempenham um papel fundamental na vida daqueles que as realizam, pois proporcionam uma excelente oportunidade de lidar com uma Matemática sutil e diferente. Além disso, resolver problemas olímpicos requer muita astúcia e habilidade na elaboração de ideias que convergem para a resolução deles.

Com o intuito de despertar a curiosidade e a atração de professores e estudantes de Matemática propomos, nesta seção, dez problemas envolvendo a *Geometria Inversiva*. Alguns desses problemas foram extraídos da IMO, a Olimpíada Internacional de Matemática, outros de olimpíadas da Espanha, Rússia, Romênia, do Irã e outros problemas de características olímpicas.

Os problemas seguintes foram selecionados com a intenção de aplicar as propriedades de inversão vistas no Capítulo 4 e de usar resultados explorados no Capítulo 3. Nesta seção, as figuras foram criadas pelo autor usando o software dinâmico de geometria, o GeoGebra. Além disso, ressaltamos que alguns problemas e soluções desse capítulo foram adaptados de (PROBLEMAS; CAPITÁN,).

Problema 6.1. *Sejam Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 e Σ_4 quatro circunferências tangentes entre si, conforme figura abaixo. Se o raio de Σ_1 mede 4, determine o raio de Σ_4 .*²

Figura 63 – esboço do problema 1, parte 1.

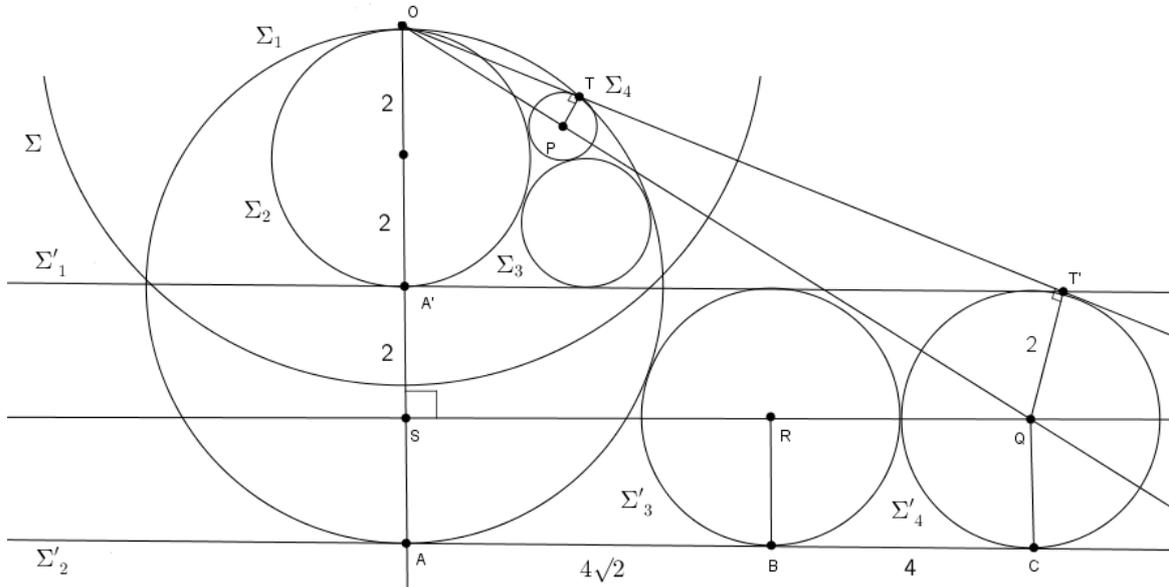


Fonte: O autor.

² Este problema foi adaptado de (OLIVEIRA, 2022).

Solução 6.1

Figura 64 – esboço do problema 1, parte 2.



Fonte: O autor.

Inicialmente, seja O o ponto de tangência de Σ_1 e Σ_2 , em que O é o centro da circunferência de inversão Σ cujo raio é r . Aplicando a transformação de inversão nas circunferências Σ_1 e Σ_2 , obtemos Σ'_1 e Σ'_2 as suas respectivas inversas. Dessa forma, Σ'_1 é uma reta perpendicular à reta que passa pelo diâmetro de Σ em A' e Σ'_2 é uma reta que passa pelo diâmetro de Σ em A , onde A' é o inverso de A . Com isso, Σ'_1 é paralela a Σ'_2 . Pela propriedade da inversão, sabemos que

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2.$$

Como $\overline{OA} = 8$ e $\overline{OA'} = 4$, temos $r^2 = 8 \cdot 4$, isto é, $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Agora, como a transformação de inversão mantém a propriedade de tangência, a circunferência inversa Σ'_3 de Σ_3 , é tangente à Σ'_1 , Σ'_2 e Σ'_4 , já que Σ_3 é tangente à Σ_1 , Σ_2 e Σ_4 . Da mesma forma, Σ'_4 é tangente a Σ'_1 , Σ'_2 e Σ'_3 . Denotando por P , Q e R os centros de Σ_4 , Σ'_4 e Σ'_3 , respectivamente, podemos afirmar, também pela inversão, que O , P e Q estão alinhados. Assim, traçando o segmento OQ e o segmento QS , perpendicular a OA , passando por R , formamos o triângulo retângulo OQS , retângulo em S . Sendo B e C os pontos de tangência de Σ'_3 e Σ'_4 com Σ'_2 , temos $\overline{BC} = 4$ e $\overline{AB} = 2\sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ (propriedade das circunferências tangentes). Daí, temos $\overline{CA} = \overline{QS} = 4 + 4\sqrt{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OQS , temos

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{QS}^2 \quad (6.1)$$

$$= 6^2 + (4 + 4\sqrt{2})^2 \quad (6.2)$$

$$= 36 + 16 + 32\sqrt{2} + 32 \quad (6.3)$$

$$= 84 + 32\sqrt{2}. \quad (6.4)$$

Traçamos, agora, partindo de O , um segmento de reta tangente a Σ_4 e Σ'_4 e marcamos os pontos T e T' como os seus respectivos pontos de tangência. Dessa maneira, temos $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = (4\sqrt{2})^2 = 32$, ou seja,

$$\overline{OT} = \frac{32}{\overline{OT'}} \quad (6.5)$$

Além disso, observe que os triângulos OQT' e OPT são semelhantes pelo caso ângulo - ângulo. A partir dessa semelhança, podemos estabelecer a seguinte relação

$$\frac{\overline{PT}}{2} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OT'}}. \quad (6.6)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, no triângulo OQT' , temos

$$\overline{OT'}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{QT'}^2 \quad (6.7)$$

$$= 84 + 32\sqrt{2} - 4 \quad (6.8)$$

$$= 80 + 32\sqrt{2} \quad (6.9)$$

$$= 16(5 + 2\sqrt{2}), \quad (6.10)$$

ou seja,

$$\overline{OT'} = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}. \quad (6.11)$$

Substituindo [6.11](#) em [6.5](#), obtemos

$$\overline{OT} = \frac{32}{\overline{OT'}} = \frac{32}{4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} \quad (6.12)$$

Assim, substituindo [6.12](#) e [6.11](#) em [6.6](#) e resolvendo, temos

$$\frac{\overline{PT}}{2} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OT'}} = \frac{32}{4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}, \quad (6.13)$$

isto é,

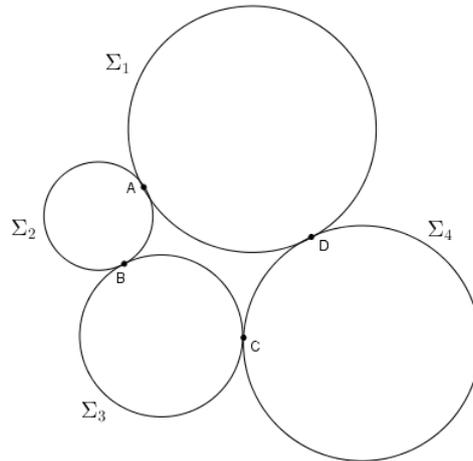
$$\overline{PT} = \frac{2 \cdot 32}{\left(4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{64}{16(5 + 2\sqrt{2})} = \frac{4}{5 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{(5 - 2\sqrt{2})}{(5 - 2\sqrt{2})} = \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17}.$$

Portanto, o raio de Σ_4 é $\frac{20 - 8\sqrt{2}}{17}$.

Problema 6.2. A figura a seguir mostra quatro círculos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ e Σ_4 , tais que cada um é tangente externamente a dois de seus vizinhos, por exemplo, os vizinhos de Σ_1 são Σ_2 e Σ_4 . Mostre que A, B, C e D , os quatro pontos de tangência, são concíclicos.

3

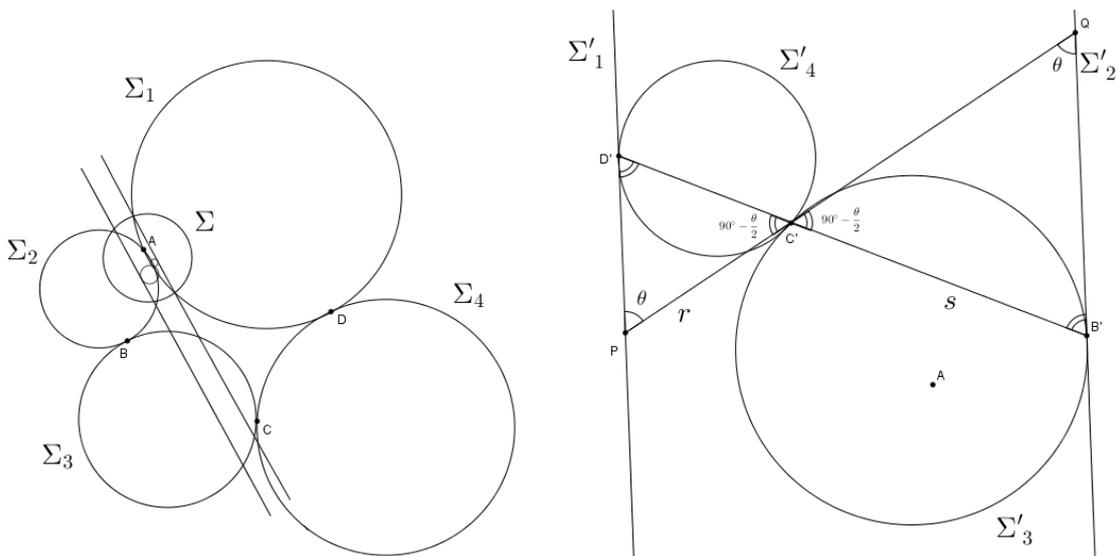
Figura 65 – esboço do problema 2, parte 2.



Fonte: O autor.

Solução 6.2

Figura 66 – esboço do problema 2, parte 2.



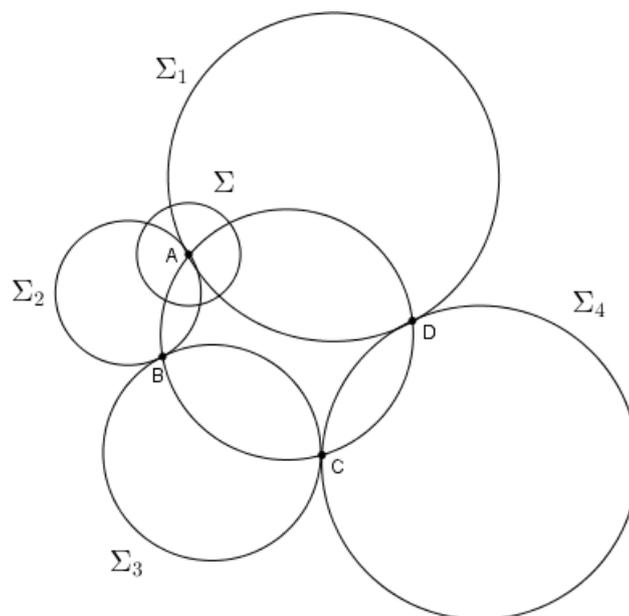
Fonte: O autor.

Seja Σ a circunferência de inversão com centro em A . Aplicando a inversão em Σ_1 e Σ_2 em relação a Σ , obtemos Σ'_1 e Σ'_2 , tal que $\Sigma'_1 \parallel \Sigma'_2$. Observe que Σ_3 é uma circunferência que não passa pelo centro de inversão, então a sua inversa será

³ Este problema foi adaptado de (MAGALHÃES, 2021).

uma circunferência que não passa pelo centro de inversão. Da mesma forma, isso ocorre com Σ'_4 a inversa de Σ_4 . Como Σ_3 é tangente a Σ_2 e Σ_4 nos pontos B e C , respectivamente, e Σ_4 é tangente a Σ_3 e Σ_1 nos pontos C e D , respectivamente, então Σ'_3 , inversa de Σ_3 , é tangente a Σ'_2 e Σ'_4 nos pontos inversos B' e C' de B e C , do mesmo modo, Σ'_4 é tangente a Σ'_1 e Σ'_2 nos pontos C' e D' , conforme Figura 66 à esquerda. Ampliando a Figura 66 à esquerda, obtemos a situação descrita na Figura 66 à direita. Feito isso, traçamos uma reta r tangente comum à Σ'_3 e Σ'_4 e marcamos os pontos P e Q tais que P pertence a interseção da reta com Σ'_1 e Q pertence a interseção da reta com Σ'_2 . Pela propriedade dos segmentos tangentes à circunferência, temos $\overline{PD'} = \overline{PC'}$ e $\overline{QC'} = \overline{QB'}$. Daí, decorre que os triângulos $D'PC'$ e $B'QC'$ são isósceles. Além disso, como $\Sigma'_1 \parallel \Sigma'_2$ e a reta que contém os pontos P e Q é transversal, temos $C'\widehat{P}D' = C'\widehat{Q}B' = \theta$, pois são ângulos alternos internos. Assim, $P\widehat{D}'C' = P\widehat{C}'D' = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ e $Q\widehat{B}'C' = Q\widehat{C}'B' = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$, ou seja, $P\widehat{C}'D' = Q\widehat{C}'B' = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ e assim eles são ângulos opostos pelo vértice. Logo, os pontos B' , C' e D' são colineares, isto é, existe uma reta s que os contém. Em relação ao ponto A , há duas possibilidades: A pode pertencer ou não pertencer à s . No nosso caso, de acordo com o problema, o ponto A não pertence à s . Dessa forma, aplicando a inversão na reta s que contém os pontos B' , C' e D' , obtemos a sua inversa s' uma circunferência que passa pelo centro da circunferência de inversão, ou seja, passa por A . Como os pontos B' , C' e D' pertencem à s , os pontos B , C e D pertencem a circunferência s' . Portanto, A , B , C e D são concíclicos, como queríamos provar. A Figura 67 ilustra a situação mostrada no problema anterior.

Figura 67 – esboço do problema 2, parte 3.

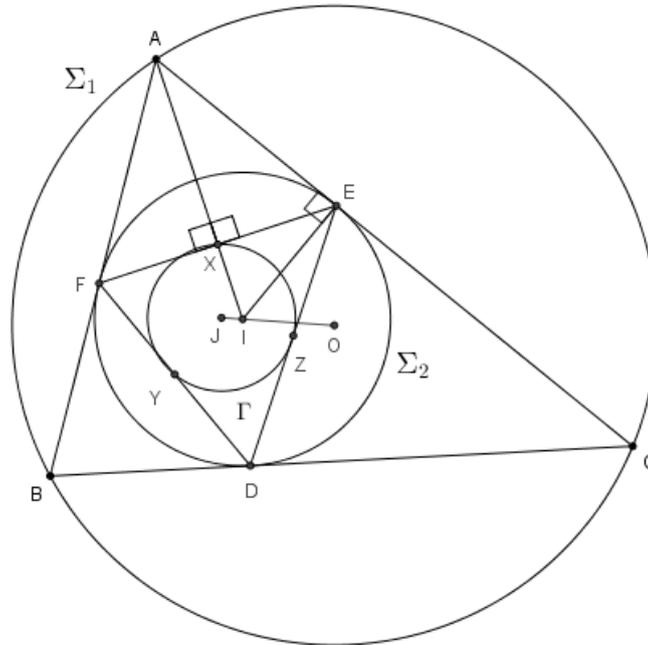


Fonte: O autor.

Problema 6.3. (IMO - 1986) A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC , CA e AB em D , E e F , respectivamente. Prove que os centros das circunferências circunscrita e inscrita ao triângulo ABC e o centro da circunferência inscrita no triângulo DEF são colineares. ⁴

Solução 6.3

Figura 68 – esboço do problema 3.



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura ⁶⁸, sejam Σ_1 e Σ_2 os círculos circunscrito e inscrito ao triângulo ABC , cujos centros denotamos por O e I , respectivamente. Pela propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência, temos $\overline{AF} = \overline{AE}$. Como X é ponto médio de FE , implica que $\overline{FX} = \overline{XE}$. Conseqüentemente, XE é altura no triângulo AEI retângulo em E . Assim, das relações métricas no triângulo retângulo, temos

$$\overline{IX} \cdot \overline{IA} = \overline{IE}^2 \tag{6.14}$$

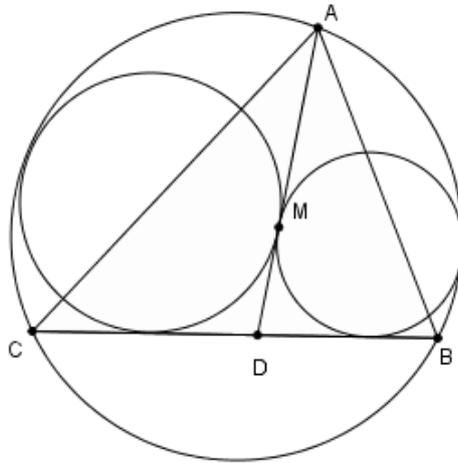
Da relação obtida em ^{6.14}, concluímos que uma inversão em relação à Σ_2 leva o ponto A para a posição do ponto X . Analogamente, Σ_2 leva B para o Y e C para o Z , isto é, sendo Σ_1 e Σ as circunferências circunscritas de ABC e XYZ , então a circunferência Σ , de centro J é a circunferência inversa de Σ_1 em relação à Σ_2 . Agora, como o centro de uma circunferência é colinear com o centro de sua circunferência inversa e o centro de inversão, temos que O (centro de Σ_1), J (centro de Σ) e I (centro de Σ_2) são colineares, como queríamos.

⁴ Este problema foi adaptado de (LINARES, 2021).

Observação: é importante ressaltar que a circunferência Σ que contém os pontos X , Y e Z é considerada como a circunferência de nove pontos do triângulo EFD . (Ver [\(NETO, 2012\)](#), p.149).

Problema 6.4. (Romênia - 1997) *Seja um triângulo ABC e um ponto D sobre BC . Duas circunferências são tangentes exteriormente a AD no mesmo ponto M e cada uma delas é tangente à circunferência circunscrita de ABC e ao lado BC , uma sobre o segmento BD e a outra sobre o segmento DC , conforme figura abaixo. Mostre que AD é a bissetriz do ângulo A .*

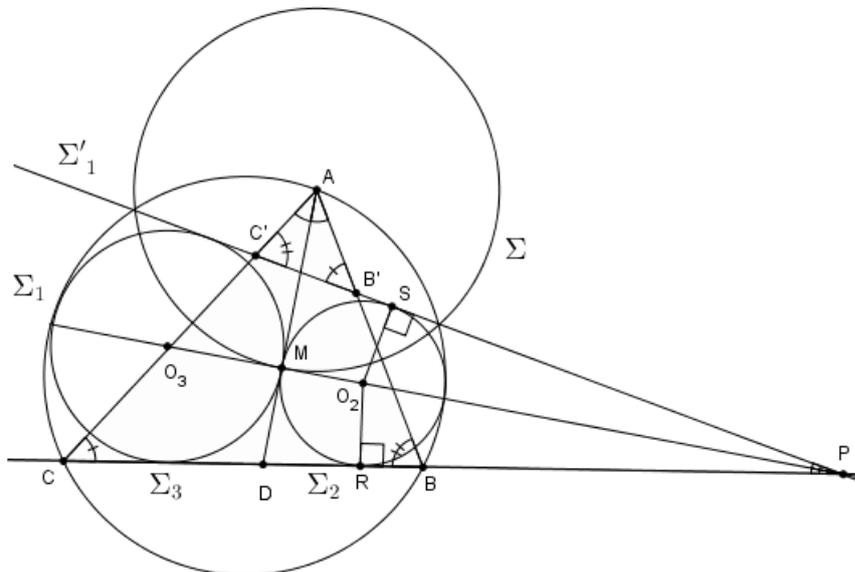
Figura 69 – esboço do problema 4, parte 1.



Fonte: O autor.

Solução 6.4

Figura 70 – esboço do problema 4, parte 2.



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura 70, sejam Σ_1 a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , Σ_2 e Σ_3 as circunferências tangentes, de centros O_2 e O_3 . Considere P o ponto de interseção entre o prolongamento de CD com a reta que contém os centros de Σ_2 e Σ_3 . Seja Σ a circunferência de inversão cujo centro é A e raio AM . Como Σ_2 e Σ_3 são tangentes externamente em M , essa inversão mantém fixa as duas circunferências. Em relação a Σ_1 , sabemos que ela é tangente a Σ_2 e Σ_3 , como Σ_1 não passa pelo centro da circunferência de inversão, a sua inversa Σ'_1 é uma reta tangente comum a Σ_2 e Σ_3 . Além disso, como Σ_1 contém B e C , a sua inversa Σ'_1 contém os inversos de B e C , isto é, B' e C' . Observe que os triângulos ABC e $AC'B'$ são semelhantes. De fato, $\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AM}^2$ e $\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = \overline{AM}^2$. Dividindo as equações obtidas anteriormente, temos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}}{\overline{AC} \cdot \overline{AC'}} = 1,$$

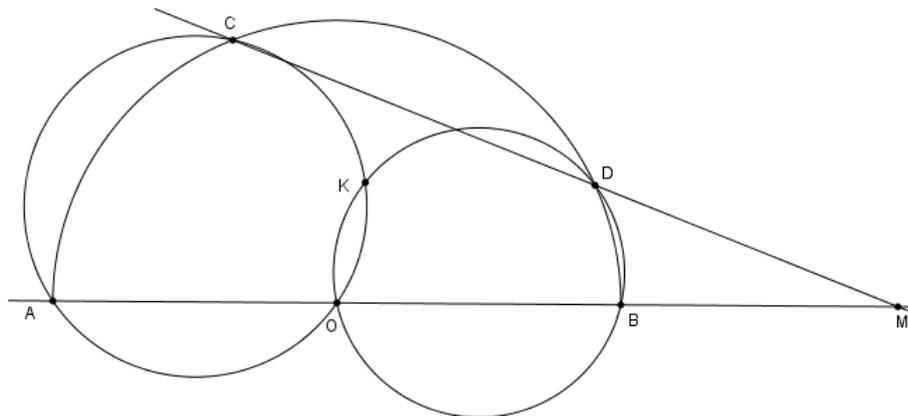
ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}.$$

Como \hat{A} é o ângulo comum aos triângulos ABC e $AC'B'$, segue que ABC e $AC'B'$ são semelhantes. Assim, temos $\widehat{BCA} = \widehat{C'B'A}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{AC'B'}$. Agora, denotando por R e S os pés das perpendiculares baixadas de O_2 à reta \overleftrightarrow{CD} e Σ'_1 , temos $\widehat{RPO}_2 = \widehat{SPO}_2$, isto é, PM é a bissetriz do ângulo $\widehat{BPB'}$. Como $AM \perp PM$, segue-se que AM deve ser a bissetriz do ângulo A , como queríamos provar.

Problema 6.5. (Rússia - 1995) *Seja uma semicircunferência com diâmetro AB e centro O , e uma reta que corta à semicircunferência nos pontos C e D , e a reta AB no ponto M , sendo $MD < MC$ e $MB < MA$). Seja K o segundo ponto de interseção das circunferências OAC e OBD . Mostre que $\widehat{MKO} = 90^\circ$.*

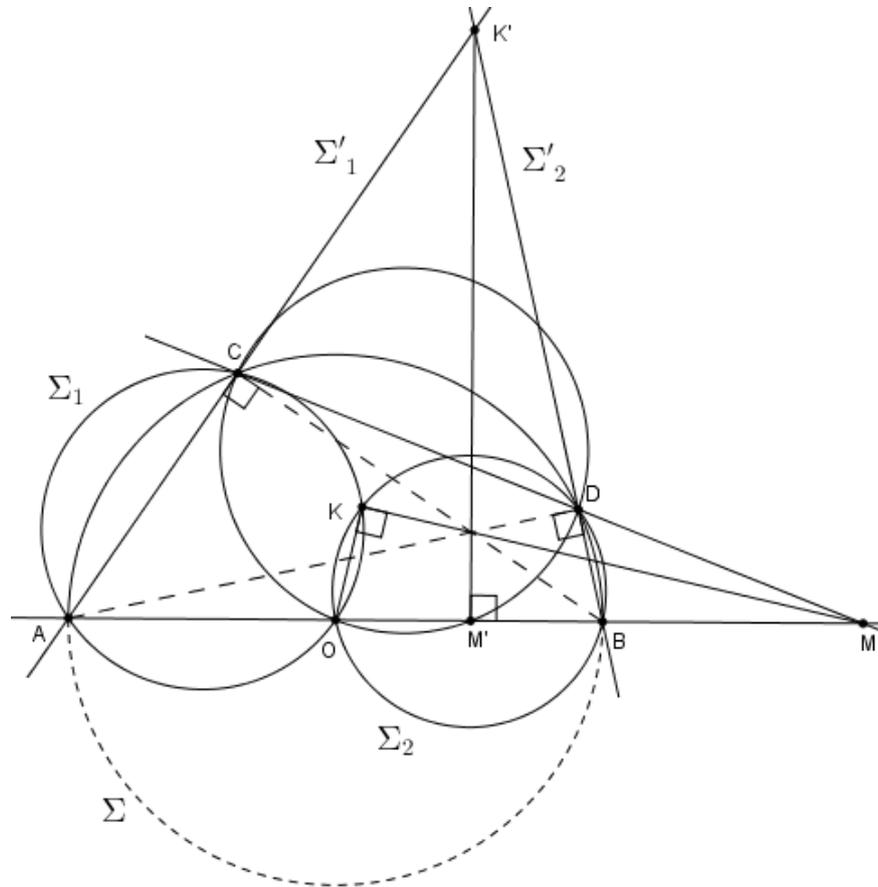
Figura 71 – esboço do problema 5, parte 1.



Fonte: O autor.

Solução 6.5

Figura 72 – esboço do problema 5, parte 2.

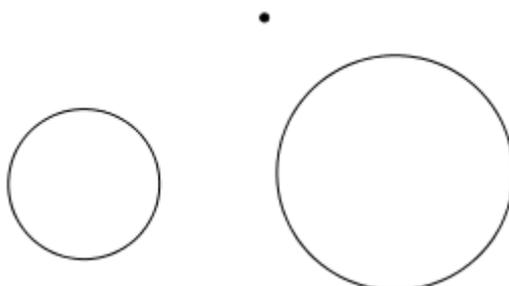


Fonte: O autor.

Seja Σ a circunferência de centro O e raio OA . Considere Σ_1 e Σ_2 as circunferências definidas pelos pontos OAC e $OB D$, respectivamente. Tomando Σ como a circunferência de inversão, a inversa da reta \overleftrightarrow{AB} é a própria, pois ela passa pelo centro de inversão O . Além disso, as inversas Σ'_1 e Σ'_2 , de Σ_1 e Σ_2 , são as retas que contém os pontos A, C e B, D respectivamente, pois são pontos que estão na interseção de ambas com Σ e se intersectam em K' , ponto inverso de K . Quanto a reta \overleftrightarrow{CD} , a inversão Σ transforma-a na circunferência que contém os pontos C, D e O , cortando a reta \overleftrightarrow{AB} no ponto M . Agora, como C e D são pontos que pertencem à semicircunferência de diâmetro AB e são pontos de tangência em relação à circunferência CDO e as retas $\overleftrightarrow{AK'}$ e $\overleftrightarrow{BK'}$, temos que $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AK'}$ e $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BK'}$. Pelo fato de O ser ponto médio de AB , a circunferência definida pelos pontos CDO é a circunferência de nove pontos do triângulo ABK' . Daí, decorre que $K'M' \perp AB$ e, dessa forma, temos $K'\widehat{M'O} = 90^\circ$. Portanto, como K' e M' são os pontos inversos de K e M , segue-se que o ângulo $M\widehat{K'O} = 90^\circ$, como queríamos provar.

Problema 6.6. *Dados um ponto e duas circunferências, traçar uma circunferência que passe pelo ponto e que seja tangente as duas circunferências.*

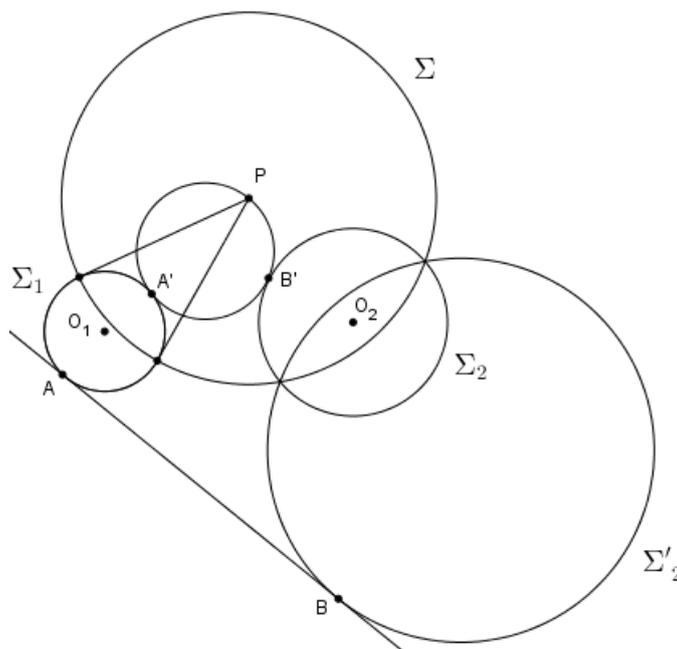
Figura 73 – esboço do problema 6, parte 1.



Fonte: O autor.

Solução 6.6

Figura 74 – esboço do problema 6, parte 2.



Fonte: O autor.

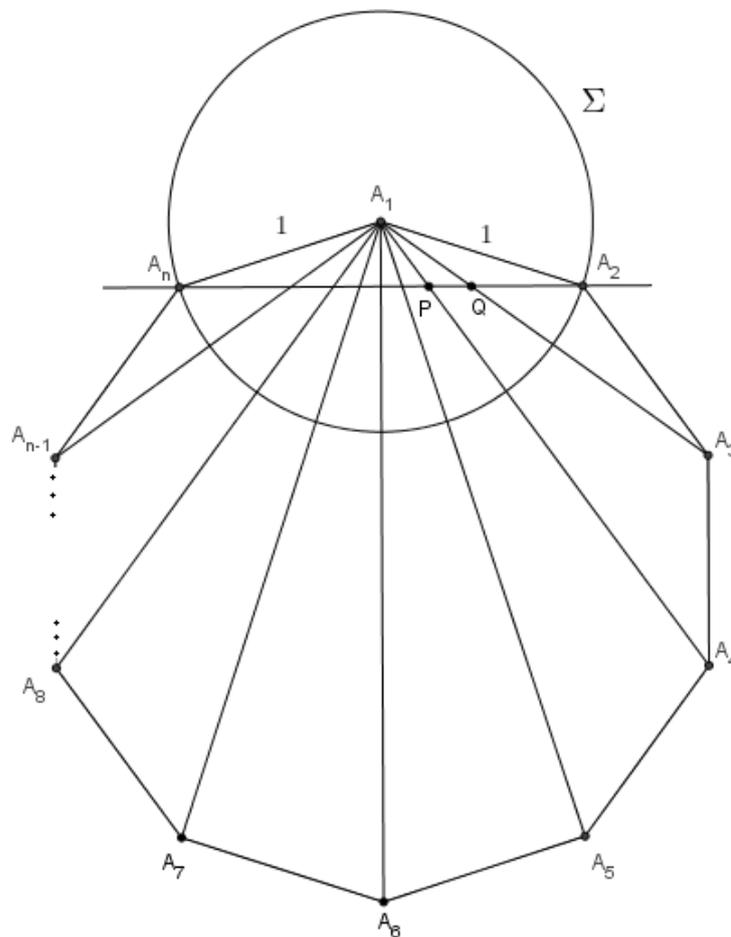
Nas notações da Figura [74](#), seja P o ponto dado e sejam Σ_1 e Σ_2 as circunferências de centros O_1 e O_2 . Considere Σ a circunferência centrada em P , o que são circunferências ortogonais em um ponto, ver Seção [4.3](#). Sendo Σ a circunferência de inversão, como Σ é ortogonal a Σ_1 , a inversa de Σ_1 permanece fixa. Em relação a Σ_2 , a sua circunferência inversa Σ'_2 é a secante a Σ . Agora, traçamos uma reta tangente à Σ_1 e Σ'_2 e marcamos os pontos A e B , respectivamente. Como a reta que passa por AB não passa pelo centro de Σ , a sua inversa é uma circunferência que passa por P e, conseqüentemente, A' e B' , inverso dos pontos A e B , também pertencem à circunferência que passa por

P . Portanto, a circunferência que passa por P é tangente à Σ_1 e Σ_2 nos pontos A' e B' .

Problema 6.7. (Espanha - 2005 - modificado) Diremos que um triângulo é multiplicativo se o produto das medidas de dois dos seus lados é igual a medida do terceiro lado. Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono regular de n lados com todos os seus lados de medida 1. As $n - 3$ diagonais que saem do vértice A_1 dividem o triângulo $A_1A_2A_n$ em $n - 2$ triângulos menores. Prove que cada um desses triângulos é multiplicativo.

Solução 6.7

Figura 75 – esboço do problema 7.



Fonte: O autor.

Na Figura [75](#), temos a representação de um polígono de n lados $A_1A_2\dots A_n$ e traçamos algumas de suas diagonais. Seja Σ a circunferência de inversão, centrada em A_1 , cujo raio mede 1. Como $A_1A_2\dots A_n$ é um polígono regular de n lados, existe uma circunferência que o circunscreve. Assim, a inversa de tal circunferência, que passa por A_1 é uma reta que contém os pontos A_2 e A_n , já que são pontos que estão na interseção de ambas. Sejam P e Q os pontos de interseção das diagonais A_1A_4 e A_1A_3 com A_2A_n ,

respectivamente. Além disso, observe que os pontos P e Q são os inversos dos vértices A_4 e A_3 do polígono. Logo, os triângulos A_1PQ e $A_1A_3A_4$ são semelhantes. Agora, usando a fórmula que relaciona inversão e distância, temos

$$\overline{A_3A_4} = \frac{\overline{PQ} \cdot r^2}{\overline{A_1P} \cdot \overline{A_1Q}},$$

onde r é o raio da circunferência de inversão. Substituindo $\overline{A_3A_4} = 1$ e $r = 1$, obtemos

$$1 = \frac{\overline{PQ} \cdot 1}{\overline{A_1P} \cdot \overline{A_1Q}} \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{A_1P} \cdot \overline{A_1Q}.$$

Portanto, o triângulo A_1PQ é multiplicativo.

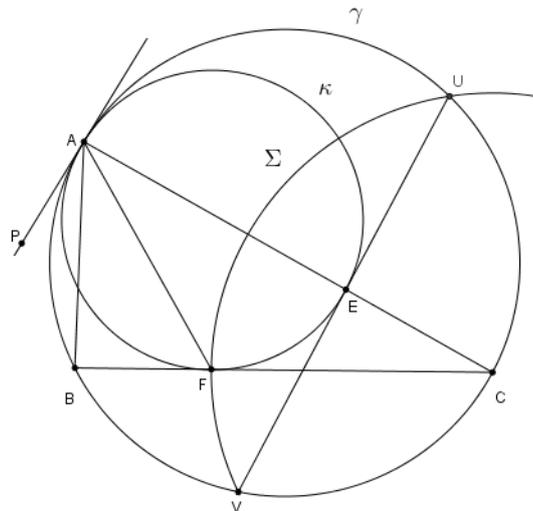
Observação: Essa relação é válida para qualquer um desses pequenos triângulos construídos nessas condições.

Problema 6.8. (Alemanha - Prática de Matemática, problema 546) Dado um triângulo ABC e sua circunferência circunscrita γ , seja κ a circunferência tangente a γ em A e tangente a BC no ponto F . Seja E o outro ponto de interseção de κ com o lado AC (além de A). Pede-se:

- Mostre que a reta AF é a bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$.
- Se U e V são dois pontos de γ tais que $\overline{CF} = \overline{CU} = \overline{CV}$, mostre que UV é tangente a circunferência κ no ponto E .

Solução 6.8

Figura 76 – esboço do problema 8.



Fonte: O autor.

Para a parte a), seja P um ponto sobre a reta tangente à γ que passa por A , de modo que os pontos P e C estejam em semiplanos opostos, em relação à reta \overleftrightarrow{AB} .

Queremos mostrar que $B\hat{A}F = F\hat{A}C$. Inicialmente, observe que $B\hat{A}P = B\hat{C}A$, pois o arco \widehat{AB} determina o ângulo $B\hat{C}A$ inscrito em γ e o ângulo de segmento $B\hat{A}P$. Assim, temos

$$B\hat{A}F = F\hat{A}P - B\hat{A}P \quad (6.15)$$

$$B\hat{A}F = F\hat{A}P - B\hat{C}A. \quad (6.16)$$

Na circunferência κ , temos $F\hat{A}P = F\hat{E}A$, ângulo de segmento e ângulo inscrito, respectivamente. Dessa forma, temos que

$$B\hat{A}F = F\hat{A}P - B\hat{C}A \quad (6.17)$$

$$B\hat{A}F = F\hat{E}A - B\hat{C}A. \quad (6.18)$$

Aplicando o teorema do ângulo externo no triângulo CEF , obtemos $F\hat{E}A = E\hat{C}F + E\hat{F}C$, ou seja,

$$E\hat{F}C = F\hat{E}A - E\hat{C}F. \quad (6.19)$$

Mas, os ângulos $E\hat{C}F$ e $B\hat{C}A$ são iguais. Daí,

$$E\hat{F}C = F\hat{E}A - B\hat{C}A. \quad (6.20)$$

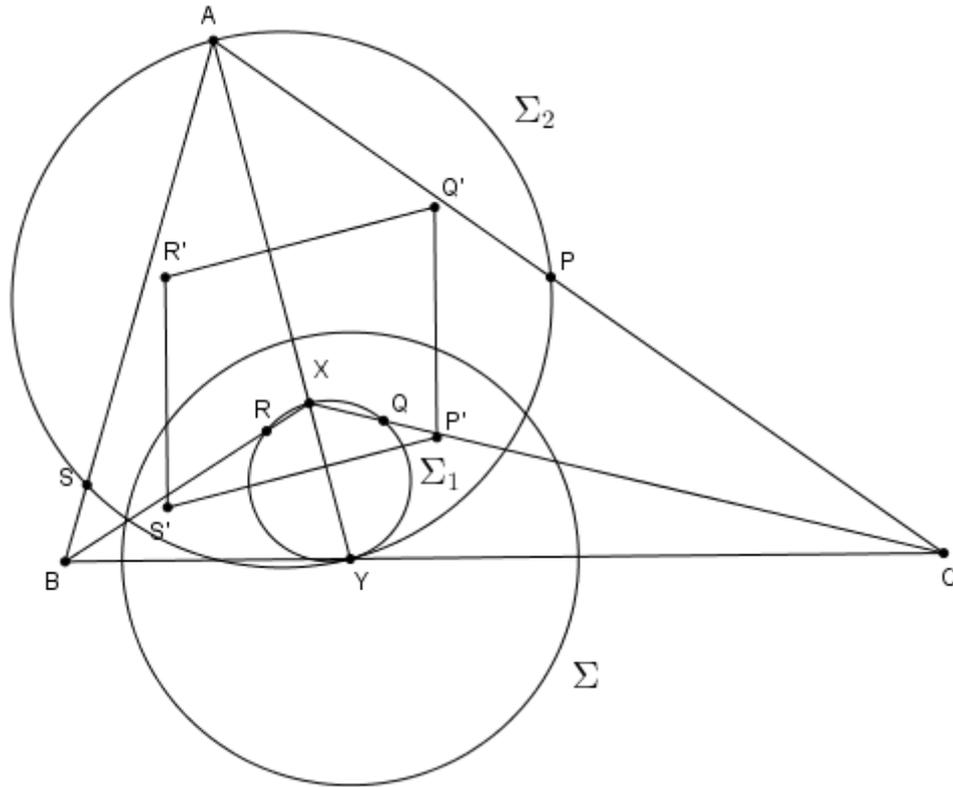
Comparando [6.18](#) com [6.20](#), obtemos $B\hat{A}F = E\hat{F}C$. Agora, perceba que $E\hat{F}C = F\hat{A}E$, pois enxergam o mesmo arco \widehat{EF} na circunferência κ . Com isso, temos $B\hat{A}F = F\hat{A}E$. Como $F\hat{A}E = F\hat{A}C$, concluímos que $B\hat{A}F = F\hat{A}C$. Portanto, AF é a bissetriz do ângulo CAB , como queríamos.

Em relação à parte b), seja Σ a circunferência de inversão de centro C e raio CF . Por hipótese, sabemos que $\overline{CF} = \overline{CU} = \overline{CV}$, logo, Σ também passa pelos pontos U e V . Assim, as circunferência Σ e κ são ortogonais. Então, a circunferência κ se mantém na inversão. Por outro lado, como a circunferência γ possui os pontos U e V em comum com Σ , a sua inversa γ' é a reta \overleftrightarrow{UV} . Além disso, o ponto A' , inverso de A , deve ser o ponto de tangência da reta \overleftrightarrow{UV} com a circunferência κ e também deve pertencer à reta \overleftrightarrow{AC} , já que o centro C o ponto A e o seu inverso A' são colineares. Daí, concluímos que A' coincide com o ponto E , ou seja, $A' = E$ e, conseqüentemente, UV é tangente à circunferência κ no ponto E .

Problema 6.9. (Irã - 2004) *Seja ABC um triângulo. Considere um ponto X no interior do triângulo e seja Y a interseção de AX e BC . Tracemos as perpendiculares YP , YQ , YR , YS às retas CA , CX , BX e BA respectivamente. Ache uma condição necessária e suficiente que X deve cumprir para que $PQRS$ seja um quadrilátero cíclico.*

Solução 6.9

Figura 77 – esboço do problema 9, parte 1.

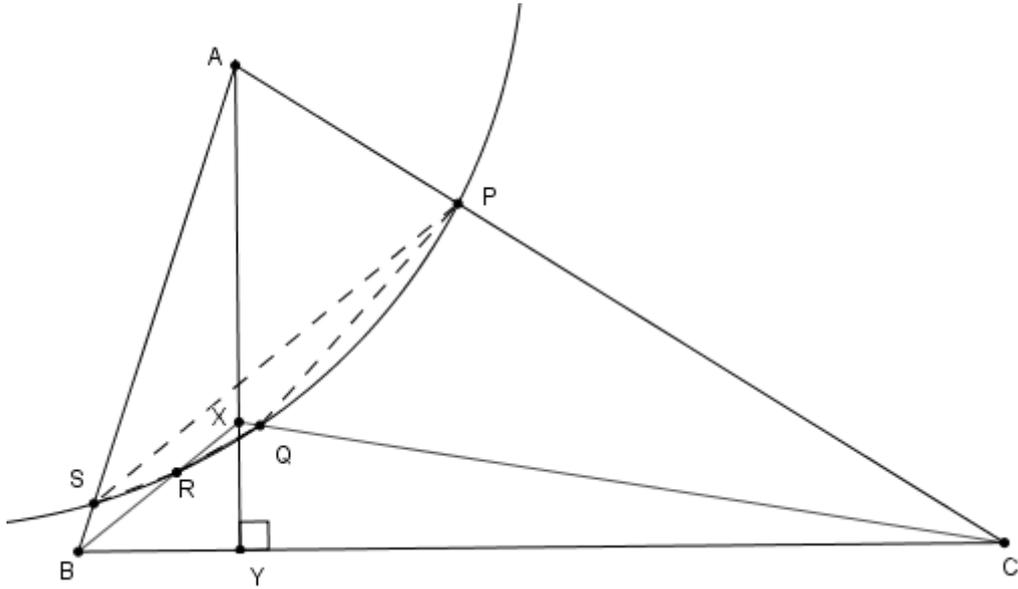


Fonte: O autor.

Seja Σ a circunferência inversa centrada em Y e raio qualquer. A circunferência de diâmetro BY passa pelos pontos R e S , pois $YS \perp AB$ e $YR \perp BX$, fazendo com que o quadrilátero $BYRS$ seja cíclico, logo, a sua inversa se transforma em uma reta que contém os pontos inversos de R' e S' de R e S e é perpendicular a BC . Analogamente, a circunferência de diâmetro CY se transforma em uma reta perpendicular a BC passando pelos pontos P' e Q' , os inversos de P e Q . Agora, considere Σ_1 e Σ_2 as circunferências definidas por YRQ e YPS , respectivamente. Como Σ_1 passa pelos pontos Y, R e Q , a sua inversa é uma reta que contém os pontos R' e Q' . Da mesma forma, a inversa de Σ_2 contém os pontos P' e S' . Nessas condições, observe que as retas $\overleftrightarrow{R'S'} \parallel \overleftrightarrow{Q'P'}$ e $\overleftrightarrow{S'P'} \parallel \overleftrightarrow{R'Q'}$. Daí, segue-se que $P'Q'R'S'$ é um paralelogramo. Mas queremos que o quadrilátero $PQRS$ seja cíclico. Para tanto, isso ocorrerá se, e somente se, $P'Q'R'S'$ for um retângulo, ou seja, quando AX for perpendicular a BC . Portanto, $PQRS$ é um quadrilátero cíclico se, e somente se, AX for perpendicular a BC .

Com o intuito de deixar claro a afirmação do problema anterior para o leitor deste trabalho, trouxemos uma representação na Figura 78 a seguir, da condição necessária e suficiente para que o quadrilátero $PQRS$ seja cíclico, isto é, quando $AX \perp BC$.

Figura 78 – esboço do problema 9, parte 2.



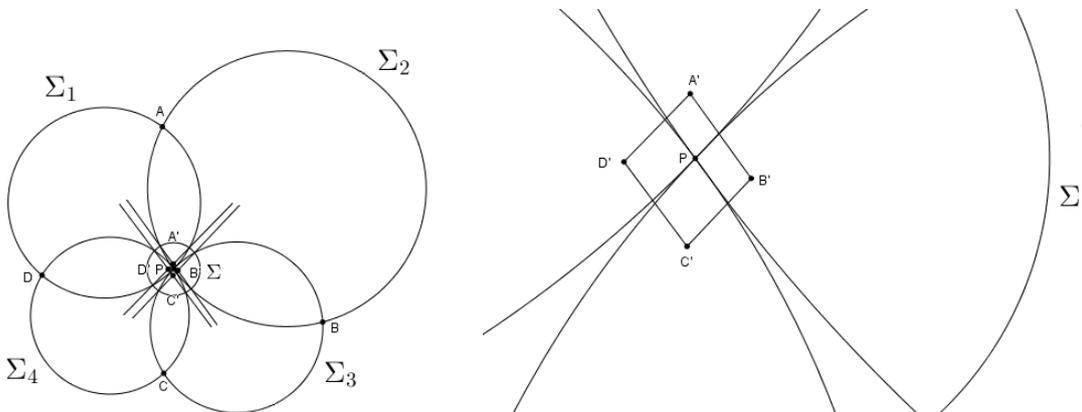
Fonte: O autor.

Problema 6.10. (IMO - Shortlist) Sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ e Σ_4 circunferências distintas tais que Σ_1, Σ_3 são tangentes externamente em P , e Σ_2, Σ_4 são tangentes externamente também em P . Se Σ_1 e Σ_2 ; Σ_2 e Σ_3 ; Σ_3 e Σ_4 ; Σ_4 e Σ_1 intersectam-se em A, B, C e D , respectivamente, e todos esses pontos são diferentes de P , prove que

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2}.$$

Solução 6.10

Figura 79 – esboço do problema 10.



Fonte: O autor.

Seja Σ a circunferência de inversão com centro no ponto P e raio r . Aplicando à inversão Σ nas circunferências $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ e Σ_4 , as suas respectivas inversas $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3$

e Σ'_4 são retas tais que $\Sigma'_1 \parallel \Sigma'_3$ e $\Sigma'_2 \parallel \Sigma'_4$, conforme consta à esquerda na Figura 79. Além disso, como $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{A\}$, $\Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{B\}$, $\Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \{C\}$ e $\Sigma_4 \cap \Sigma_1 = \{D\}$, os pontos inversos A' , B' , C' e D' , são tais que Σ'_1 contém os pontos A' e D' , Σ'_3 contém B' e C' , Σ'_2 contém A' e B' e Σ'_4 contém os pontos C' e D' . Dessa forma, o quadrilátero $A'B'C'D'$ é um paralelogramo, segundo consta no lado direito da Figura 79. Logo, temos $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ e $\overline{A'D'} = \overline{B'C'}$. Usando a propriedade envolvendo inversão e distância, temos

$$\overline{AB} = \frac{r^2 \cdot \overline{A'B'}}{\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}}, \quad \overline{BC} = \frac{r^2 \cdot \overline{B'C'}}{\overline{PB'} \cdot \overline{PC'}}, \quad \overline{AD} = \frac{r^2 \cdot \overline{A'D'}}{\overline{PA'} \cdot \overline{PD'}} \text{ e } \overline{DC} = \frac{r^2 \cdot \overline{D'C'}}{\overline{PC'} \cdot \overline{PD'}}. \quad (6.21)$$

Dividindo AB por AD , BC por DC e simplificando, obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{r^2 \cdot \overline{A'B'}}{\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}} \cdot \frac{\overline{PA'} \cdot \overline{PD'}}{r^2 \cdot \overline{A'D'}} \Rightarrow \quad (6.22)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{PD'}}{\overline{PB'}} \quad (6.23)$$

e

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{r^2 \cdot \overline{B'C'}}{\overline{PB'} \cdot \overline{PC'}} \cdot \frac{\overline{PD'} \cdot \overline{PC'}}{r^2 \cdot \overline{D'C'}} \Rightarrow \quad (6.24)$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{D'C'}} \cdot \frac{\overline{PD'}}{\overline{PB'}}. \quad (6.25)$$

Multiplicando ambos os membros das igualdades 6.23 e 6.25, temos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{PD'}}{\overline{PB'}} \cdot \frac{\overline{B'C'}}{\overline{D'C'}} \cdot \frac{\overline{PD'}}{\overline{PB'}} \Rightarrow \quad (6.26)$$

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D'}} \cdot \frac{\overline{B'C'}}{\overline{D'C'}} \cdot \frac{\overline{PD'}^2}{\overline{PB'}^2}. \quad (6.27)$$

Como $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$ e $\overline{A'D'} = \overline{B'C'}$, substituindo essas igualdades em 6.27 e simplificando, obtemos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{PD'}^2}{\overline{PB'}^2}. \quad (6.28)$$

Pela definição de inversão, sabemos que

$$\overline{PD} \cdot \overline{PD'} = r^2 \text{ e } \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = r^2, \quad (6.29)$$

isto é,

$$\overline{PD'} = \frac{r^2}{\overline{PD}} \text{ e } \overline{PB'} = \frac{r^2}{\overline{PB}}. \quad (6.30)$$

Substituindo [6.30](#) em [6.28](#), obtemos

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{PD}^2}{\overline{PB}^2} \quad (6.31)$$

$$= \left(\frac{r^2}{\overline{PD}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{PB}}{r^2}\right)^2 \quad (6.32)$$

$$= \frac{r^4}{\overline{PD}^2} \cdot \frac{\overline{PB}^2}{r^4} \quad (6.33)$$

$$= \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2}, \quad (6.34)$$

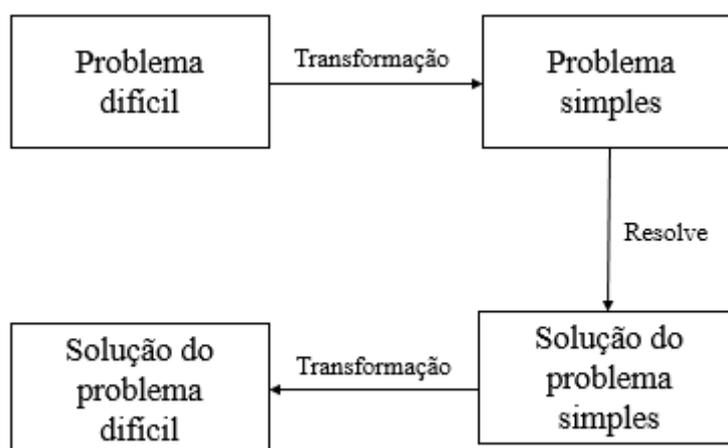
como queríamos.

7 Transformações de Möbius e Inversões

Conforme vimos nos capítulos anteriores deste presente trabalho, a transformação de inversão desempenha um papel fundamental na resolução de determinados problemas geométricos, pois consegue tornar problemas, aparentemente complexos de serem resolvidos no âmbito da geometria plana, em problemas equivalentes, menos complexos e passíveis de soluções quando submetidos à inversão.

De modo geral, a técnica para resolver alguns problemas envolvendo as transformações é baseada no raciocínio indicado no fluxograma a seguir:

Figura 80 – fluxograma.



Fonte: O autor.

Nesse contexto de transformações, destacamos o matemático alemão August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), o qual instaurou transformações de variáveis complexas que podem ser decompostas em transformações, denominadas elementares, definidas por rotação, translação, dilatação (ou contração) e inversão. Essas transformações são denominadas “transformações de Möbius.”

Neste capítulo, abordaremos as transformações de Möbius dando ênfase na inversão. Para tanto, iniciaremos com a definição:

Definição 7.1. *Dados a, b, c e $d \in \mathbb{C}$, uma transformação de Möbius é uma função racional na forma*

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

, onde $ad - bc \neq 0$.

A condição para que $ad - bc \neq 0$ está relacionada a dois fatores:

- M é injetora;
- o domínio de M é não vazio.

De fato, sejam z_1 e z_2 dois números complexos no domínio de M , o qual representaremos por $D(M)$. Observe que

$$M(z_1) = M(z_2) \Leftrightarrow \quad (7.1)$$

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \Leftrightarrow \quad (7.2)$$

$$az_1cz_2 + az_1d + bcz_2 + bd = az_2cz_1 + az_2d + bcz_1 + bd \Leftrightarrow \quad (7.3)$$

$$z_1(ad - bc) = z_2(ad - bc), \quad (7.4)$$

isso implica que M é injetora no seu domínio quando $ad - bc \neq 0$. Além disso, se $D(M) = \emptyset$, teríamos $cz + d = 0 \forall z \in \mathbb{C}$, isto é, $c = d = 0$, ou seja, $ad - bc = 0$. Assim, a condição $ad - bc \neq 0$ nos garante que $D(M)$ está definido para pelo menos um ponto.

Denotando $I_m(M)$ a imagem da transformação de Möbius M , vamos analisar $I_m(M)$ para o caso em que $c = 0$ e $c \neq 0$.

Suponha, inicialmente, que $c = 0$. Desta forma, temos $a \neq 0$ e $d \neq 0$. Logo, $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ se resume a $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Fazendo $\gamma = \frac{a}{d}$ e $\delta = \frac{b}{d}$, obtemos $M(z) = \gamma z + \delta$, o que implica que o $D(M) = \mathbb{C}$ e M é sobrejetora.

Por outro lado, se consideramos $c \neq 0$, então temos $cz + d \neq 0$, isto é, $z \neq -\frac{d}{c}$, o que implica que o $D(M) = \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Ademais, perceba que $I_m(M)$ não atinge o valor $\frac{a}{c}$. Com efeito,

$$M(Z) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \quad (7.5)$$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \quad (7.6)$$

$$acz + bc = acz + ad \Leftrightarrow \quad (7.7)$$

$$ad = bc, \quad (7.8)$$

o que não pode ocorrer.

Isso nos diz que quando $c \neq 0$, a transformação $M(z)$ tem um “buraco” no domínio em $-\frac{d}{c}$ e um “buraco” na imagem em $\frac{a}{c}$.

Como fora visto anteriormente, existem pontos no plano complexo que são problemáticos por não estarem no $D(M)$ ou na $I_m(M)$. Para resolver esse problema, podemos estender o plano complexo \mathbb{C} para $\widehat{\mathbb{C}}$, o plano complexo estendido, onde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Com isso, a transformação de Möbius $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, passa a ser uma transformação

em $\widehat{\mathbb{C}}$, pondo $M(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $M(\infty) = \frac{a}{c}$. Assim, M passa a ser uma bijeção de $\widehat{\mathbb{C}}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$. (SILVA; ALVES)

A proposição a seguir nos fornece um resultado interessante sobre as transformações de Möbius, em que a transformação M pode ser obtida pela composição de:

1. *translação*: $T_\alpha(z) = z + \alpha$, com $\alpha = \frac{d}{c}$;
2. *inversão*: $J(z) = \frac{1}{z}$;
3. *dilatação (ou contração)*: $D(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$;
4. *translação*: $T_\beta(z) = \beta + z$, com $\beta = \frac{a}{c}$.

Proposição 7.1. *Toda transformação de Möbius é obtida através da composição de transformações do tipo translação, rotação, dilatação (ou contração) e inversão (não essencialmente todas).* (DURAN, 2013)

Demonstração. De fato, se $c \neq 0$, temos

$$M(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} \quad (7.9)$$

$$= \frac{\frac{a}{c} \left(z + \frac{d}{c} \right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} \quad (7.10)$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}, \quad (7.11)$$

ou seja, a transformação M é uma composição de uma translação de $\frac{d}{c}$, seguida de uma inversão, de uma dilatação (ou contração) de $\frac{bc - ad}{c^2}$ e uma translação de $\frac{a}{c}$. Em símbolos, temos

$$M(z) = (T_\beta \circ D \circ J \circ T_\alpha)(z).$$

Portanto, a transformação M é uma composição de transformações elementares, como queríamos provar. ■

Observação: para o caso em que $c = 0$, temos $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, isto é, a transformação M é uma composição de dilatação de $\frac{a}{d}$ seguida por uma translação de $\frac{b}{d}$, ou seja, $M(z) = (T_\delta \circ D)(z)$, onde $\delta = \frac{b}{d}$ e $D(z) = \frac{a}{d} \cdot z$.

Antes de demonstrarmos que a transformação de inversão $M(z) = \frac{1}{z}$ aplica retas ou circunferências em circunferência ou retas (não necessariamente nessa ordem), vamos considerar dois fatos: o primeiro sobre números complexos e o segundo sobre a geometria analítica.

- **1º fato:** Se $z = x + yi$ é um número complexo na sua forma algébrica, então o seu conjugado \bar{z} é da forma $\bar{z} = x - yi$. Além disso, por propriedade, sabemos que $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Assim, $M(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, isso nos diz que $M(z) = \frac{1}{z}$ é uma inversão em relação à circunferência unitária centrada na origem.
- **2º fato:** Da geometria analítica, sabemos que a equação de uma circunferência é reconhecida sob a forma $p(x^2 + y^2) + 2mx - 2ny + q = 0$, com p, q, m e $n \in \mathbb{R}$ e $m^2 + n^2 - pq > 0$.

De posse desses dois fatos, encerraremos esse capítulo trazendo a demonstração do seguinte Teorema acerca da inversão relacionada à transformação de Möbius.

Teorema 7.2. *A transformação de Möbius $M(z) = \frac{1}{z}$ leva circunferências ou retas em retas ou circunferências (não necessariamente nessa ordem) de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.* □

Demonstração. De fato, considere os números complexos $z = x + yi$, $w = m + ni$, com $|w|^2 = m^2 + n^2 > pq$, e a equação

$$pz \cdot \bar{z} + wz + \bar{w} \cdot \bar{z} + q = 0. \quad (7.12)$$

Substituindo, z , \bar{z} , w e \bar{w} em 7.12, vem

$$p(x^2 + y^2) + (m + ni) \cdot (x + yi) + (m - ni) \cdot (x - yi) + q = 0. \quad (7.13)$$

Agora, observe que

$$(m + ni) \cdot (x + yi) = mx + myi + nxi - ny \quad (7.14)$$

e

$$(m - ni) \cdot (x - yi) = mx - myi - nxi - ny. \quad (7.15)$$

Assim, somando 7.14 e 7.15, obtemos

$$(m + ni) \cdot (x + yi) + (m - ni) \cdot (x - yi) = 2mx - 2ny. \quad (7.16)$$

Logo, substituindo 7.16 em 7.13, ficamos com

⁵ a demonstração foi adaptada de (CANDIDO et al., 2019, p.46).

$$p(x^2 + y^2) + 2mx - 2ny + q = 0. \quad (7.17)$$

Perceba que se $p = 0$, a equação [7.17](#) se resume a $2mx - 2ny + q = 0$, que descreve uma reta se $m^2 + n^2 > 0$. Todavia, se $p \neq 0$, podemos reescrever a equação [7.17](#) da seguinte forma:

$$px^2 + 2mx + py^2 - 2ny + q = 0,$$

isto é,

$$p \left(x^2 + 2\frac{m}{p}x + \frac{m^2}{p^2} \right) + p \left(y^2 - 2\frac{n}{p}y + \frac{n^2}{p^2} \right) + q - \frac{m^2}{p} - \frac{n^2}{p} = 0,$$

ou ainda,

$$\left(x + \frac{m}{p} \right)^2 + \left(y - \frac{n}{p} \right)^2 = \frac{m^2 + n^2 - pq}{p^2}. \quad (7.18)$$

Da condição $m^2 + n^2 > pq$, a equação [7.18](#) corresponde a uma circunferência em \mathbb{C} , cujo centro tem coordenadas $\left(-\frac{m}{p}, \frac{n}{p} \right)$ e raio $\sqrt{\frac{m^2 + n^2 - pq}{p^2}}$.

Portanto, a equação [7.12](#) representa uma família de retas e circunferências em \mathbb{C} . Ademais, se substituirmos z por $\frac{1}{z}$ (isso é possível pois z é um número complexo tal que $z \neq 0$) em [7.12](#), temos

$$p \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} + w \cdot \frac{1}{z} + \bar{w} \cdot \frac{1}{\bar{z}} + q = 0,$$

que multiplicando por $z \cdot \bar{z}$, obtemos

$$p + w \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot z + q \cdot z \cdot \bar{z} = 0,$$

que é claramente uma equação similar a [7.12](#).

Como visto na Proposição [7.1](#), uma transformação de Möbius pode ser decomposta em translação, rotação, dilatação (ou contração) e inversão. Logo, concluímos que a transformação de Möbius envia retas ou circunferências de $\widehat{\mathbb{C}}$ em circunferências ou retas de $\widehat{\mathbb{C}}$ (não necessariamente nessa ordem), como queríamos provar. ■

8 Conclusões

De maneira reflexiva, entende-se que a Matemática está presente na existência humana desde a percepção da abstração na mente, até a compreensão da aplicação em descrever movimentos de corpos celestes, por exemplo. A potencialidade e abrangência, promovidas por essa importante ciência, e os mistérios que a cercam, talvez, tenham contribuído para que os matemáticos buscassem soluções para alguns questionamentos os quais envolvessem determinados padrões. Essa perseguição por soluções de problemas, algumas vezes, levam a caminhos divergentes, mas ampliam os horizontes para uma nova descoberta, um “novo mundo”, digamos assim. Nesse contexto, destaca-se as “geometrias não euclidianas”, em particular, a Geometria Inversiva, o principal objeto desta pesquisa.

Começamos fazendo um breve contexto histórico sobre o surgimento das “geometrias não euclidianas”, com ênfase na geometria inversiva. Trouxemos um aporte teórico em relação às noções básicas de conceitos geométricos para ajudar na compreensão das propriedades e aplicabilidade da geometria inversiva. Em seguida, elencamos os três problemas clássicos dessa geometria e aplicamos a inversão geométrica na resolução de problemas olímpicos. Por fim, mostramos uma breve abordagem da geometria inversiva nas transformações de Möbius. É importante ressaltar que o GeoGebra, software dinâmico de matemática, foi extremamente fundamental na construção das figuras deste trabalho, principalmente por possuir a ferramenta padrão de inversão. Aqui cabe ressaltar que a referência (LINARES, 2021) teve uma relevante contribuição em relação às construções de algumas figuras no GeoGebra, e na resolução de alguns problemas envolvendo a inversão.

Direcionando o olhar em relação ao espectro acadêmico, desenvolvemos este trabalho com o principal objetivo de mostrar as potencialidades da geometria inversiva e, possivelmente, propiciar ao professor leitor deste trabalho, uma forma de abordagem, para com seus alunos de Ensino Médio, na perspectiva de preparação para as diversas olimpíadas de matemática. Tendo consciência da magnitude da Geometria Inversiva e, portanto, de que não há como inserir tudo sobre ela, acreditamos que este trabalho pode ser relevante para dar continuidade a pesquisas futuras nessa área do conhecimento.

Referências

- BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De euclides às geometrias não euclidianas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), v. 22, p. 37–51, 2010. Citado 3 vezes nas páginas [17](#), [18](#) e [19](#).
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página [70](#).
- CANDIDO, A. D. et al. Transformações de möbius. 2019, p.46. Citado na página [96](#).
- COXETER, H. Introduction to geometry second edition john wiley & sons. *Inc, New York*, 1969. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [47](#).
- DURAN, F. Transformações de möbius e inversões. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013. Citado na página [95](#).
- GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. [S.l.]: Macmillan, 1993. Citado 4 vezes nas páginas [13](#), [17](#), [18](#) e [19](#).
- LINARES, J. L. *Transformação de Inversão. Definição, propriedades e aplicações. Problemas de Apolônio*. 2021. Disponível em: <https://youtu.be/3HxCPcurGsE>. Acesso em: 04 sep 2022. Citado 3 vezes nas páginas [71](#), [81](#) e [98](#).
- LINARES, J. L. Transformação de inversão: Teoria, exercícios de construção geométrica, problemas olímpicos e aplicações. 2022, p.63. Citado na página [102](#).
- MAGALHÃES, C. T. B. *33º CBM - Inversão: a mais bela transformação geométrica*. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jT938JWAVyI>. Acesso em: 04 sep 2022. Citado na página [79](#).
- NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 2, 2012. Citado 7 vezes nas páginas [13](#), [43](#), [46](#), [64](#), [66](#), [67](#) e [82](#).
- OLIVEIRA, D. *Mini curso: inversão geométrica*. 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gExZCahiEYc>. Acesso em: 04 sep 2022. Citado na página [76](#).
- OLIVEIRA, P. M. Notas sobre o ensino da geometria: Será o infinito um ponto? *Educação e Matemática*, n. 95, p. 76–79, 2007. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [20](#).
- PROBLEMAS, R. de; CAPITÁN, F. J. G. Inversión en olimpiadas. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [47](#) e [76](#).
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [16](#).
- SACHS, L. O quinto postulado de euclides como história de problemas. *HIPÁTIA-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática*, v. 1, n. 1, p. 11–29, 2016. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [17](#).

- SILVA, M. F. da; ALVES, M. T. Transformações de möbius. Citado na página [95](#).
- SOUSA, C. B. d. et al. Inversão geométrica aplicada à resolução dos problemas de apolônio. Universidade Federal da Paraíba, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [70](#).
- SPIRA, M. Como transformar retas em círculos e vice versa: A inversao e construções geométricas. ii bienal da sociedade brasileira de matemática. *Bahia: Universidade Federal da Bahia*, v. 16, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [34](#).
- STANKOVA, Z.; RIKE, T. *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume II*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2015, p.1. v. 14. Citado na página [102](#).
- TARRIDA, A. R. Geometria inversiva. *LA GACETA DE LA RSME*, v. 6, p. 39–79, 2003. Citado na página [59](#).

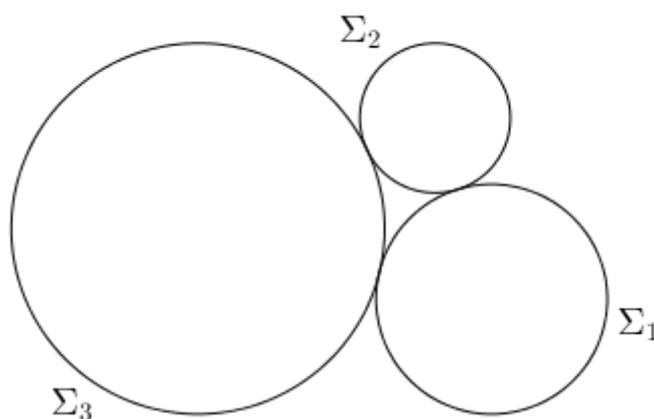
Apêndices

APÊNDICE A – Problemas Propostos

Neste Apêndice propomos, ao leitor deste trabalho, três problemas envolvendo a Geometria Inversiva. Em cada problema, daremos uma sugestão. O leitor poderá fazer uso das propriedades vistas nos capítulos 4 e usar estratégias de resolução de problemas desenvolvidas no capítulo 6. Traremos as soluções desses problemas no Apêndice B.

Problema A.1. *Dadas três circunferências tangentes exteriormente duas a duas Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 , conforme figura abaixo. Construa as duas circunferências simultaneamente com as três dadas. (LINARES, 2022, p.63).*

Figura 81 – esboço do problema A.1, parte 1.



Fonte: O autor.

Sugestão: Considere os três pontos de tangência das circunferências, tome a circunferência de inversão com centro em um desses pontos.

Problema A.2. (Teorema de Ptolomeu)⁶ *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito na circunferência Σ_1 , cujos lados medem $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$ e diagonais medindo $\overline{AC} = m$, $\overline{BD} = n$. Mostre, usando inversão, que*

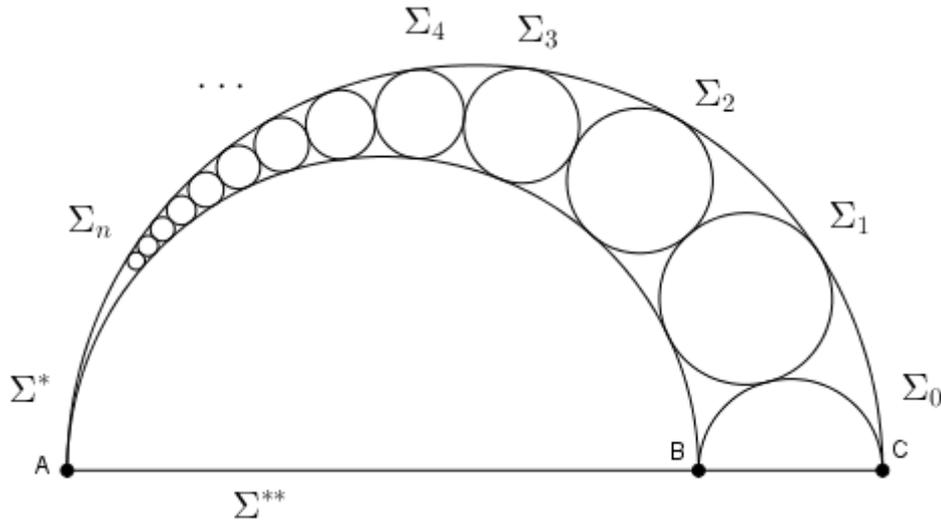
$$mn = ac + bd.$$

Sugestão: Considere a circunferência de inversão com centro em A raio qualquer, use a semelhança de triângulos e, em seguida, a propriedade da inversão que relaciona a distância entre pontos transformados.

⁶ Este problema foi adaptado de (STANKOVA; RIKE, 2015, p.1).

Problema A.3. (*The Shoemaker's knife*) Sejam A , B e C três pontos colineares, nessa ordem, e construa três semicircunferências Σ^* , Σ^{**} e Σ_0 , do mesmo lado de AC , com diâmetros AC , AB e BC , respectivamente. Para cada inteiro positivo k , seja Σ_k a circunferência tangente à Σ^* , Σ^{**} e Σ_{k-1} . Considere n um inteiro positivo. Prove que a distância do centro da circunferência Σ_n a AC é n vezes o seu diâmetro.

Figura 82 – esboço do problema A.3, parte 1.



Fonte: O autor.

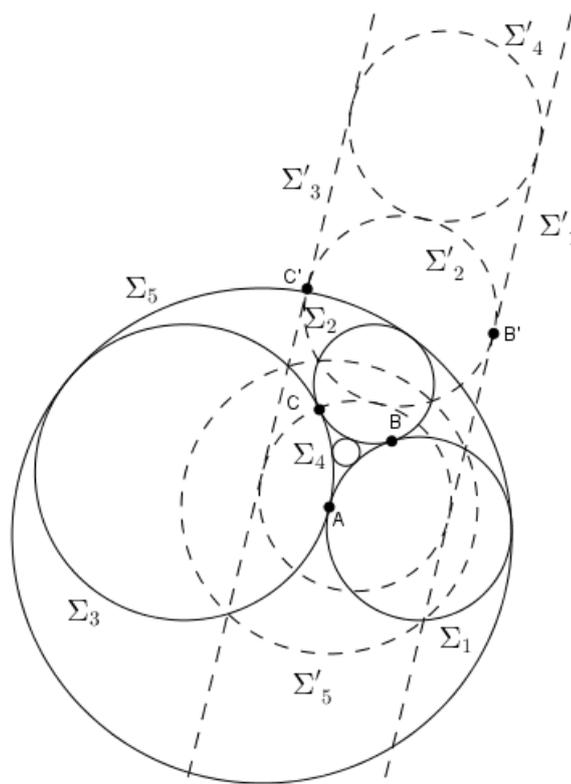
Sugestão: Considere a circunferência de inversão com centro em A que seja ortogonal à Σ_2 . Em seguida, conclua usando as propriedades de inversão.

APÊNDICE B – Solução dos Problemas Propostos

Neste Apêndice traremos as soluções dos problemas propostos no Apêndice A.

Solução do problema A.1

Figura 83 – esboço do problema A.1, parte 2.



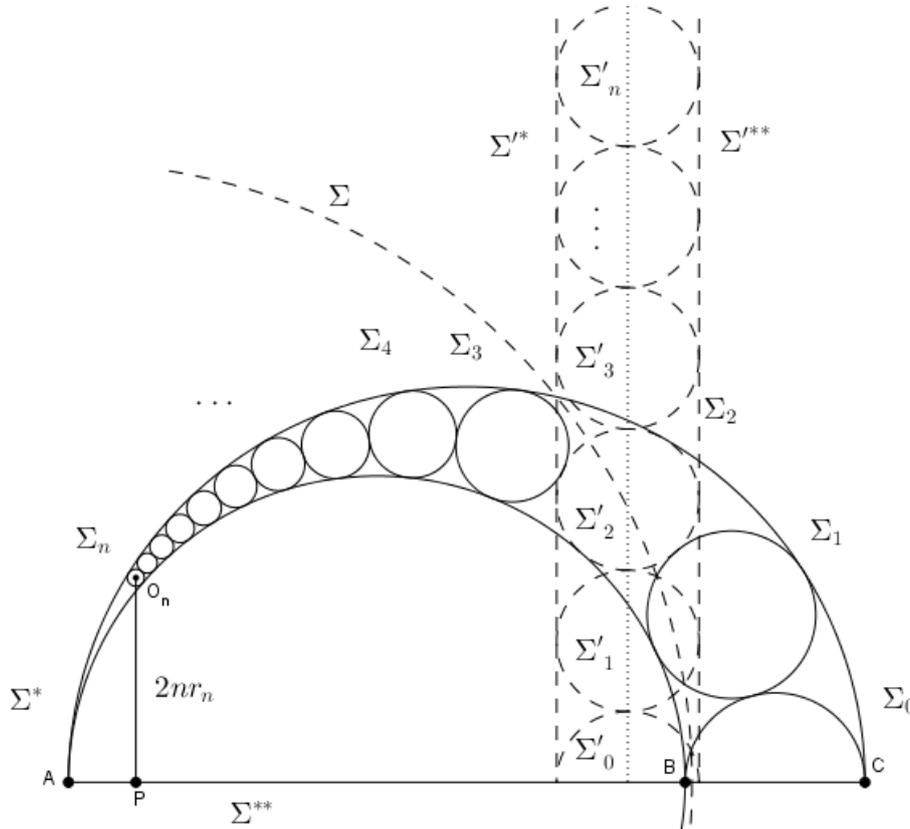
Fonte: O autor.

Sejam A , B e C , os pontos de tangência entre Σ_1 , Σ_3 ; Σ_1 , Σ_2 e Σ_2 , Σ_3 , respectivamente. Considere, agora, a circunferência de inversão Σ centrada em A e raio qualquer. Como as circunferências Σ_1 e Σ_3 são tangentes e passam pelo centro de inversão, as suas inversas Σ'_1 e Σ'_3 são retas paralelas. Além disso, a circunferência Σ_2 é tangente à Σ_1 e Σ_3 , mas não passa pelo centro de inversão, logo, a sua inversa Σ'_2 é uma circunferência tangente à Σ'_1 e Σ'_3 , nos pontos B' e C' , inversos de B e C , respectivamente. Construimos, agora, duas circunferências Σ'_4 e Σ'_5 , tangente à Σ'_1 , Σ'_2 e Σ'_3 . Assim, aplicando a inversão em relação à Σ'_4 e Σ'_5 , obtemos as circunferências Σ_4 e Σ_5 as quais são tangentes à Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 .

como queríamos provar.

Solução do problema A.3

Figura 85 – esboço do problema A.3, parte 2.



Fonte: O autor.

Seja Σ a circunferência de inversão com centro em A e ortogonal a Σ_2 . Considere O_n, r_n , o centro e o raio da circunferência Σ_n , e o ponto P pé da perpendicular baixada de O_n à AC . Queremos mostrar que $\overline{O_nP} = 2nr_n$. De fato, aplicando a inversão nas semicircunferências Σ^* e Σ^{**} , obtemos suas respectivas inversas Σ'^* e Σ'^{**} as quais são retas paralelas, uma vez que Σ^* e Σ^{**} passam pelo centro de inversão. Como Σ_2 é ortogonal a Σ , então, a sua inversa Σ'_2 se mantém. Agora, como a circunferência Σ_k , com $k = 1, 2, \dots, n$ são tangentes à Σ^* e Σ^{**} e Σ_{k-1} , então, as suas inversas $\Sigma'_0, \Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_n$ são tangentes à Σ'^*, Σ'^{**} e Σ'_n . Dessa forma, observe que todas as circunferências têm o mesmo raio r_n de Σ_n e isso nos mostra que o centro de Σ_n está a uma distância $2nr_n$ acima da reta que passa por AC , ou seja, $\overline{O_nP} = 2nr_n$, como queríamos provar.