UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FÁBIO SAMPAIO MARIANO

GRUPOS DE ISOMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

REDENÇÃO, CEARÁ
2022

FÁBIO SAMPAIO MARIANO

GRUPOS DE ISOMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

REDENÇÃO, CEARÁ

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Mariano, Fabio Sampaio.

M333g

Grupos de isometrias no plano Euclidiano e suas aplicações na educação básica através da transposição didática / Fabio Sampaio Mariano. - Redenção, 2022.
48f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof.° Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Isometria. 2. Transposição didática. 3. Teoria de Grupos. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 516.36

FÁBIO SAMPAIO MARIANO

GRUPOS DE ISOMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Matemática, na Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira, UNILAB – Campus Auroras.

Aprovada em: 04/11/2022

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA – UNILAB

Marcelo Dário dos S. Amaral
____

Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA – UNILAB

Pedro Henrique Ferreira de Oliveira
____

Prof. Me. Pedro Henrique Ferreira de Oliveira
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC

À minha esposa (Kelly Araújo)

À minha mãe (Maria Jose Sampaio)

Aos meus irmãos

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida.

À minha querida e amada esposa Francisca Kelly Araújo Leite Sampaio, pelo apoio, paciência, e por estar presente em todos os momentos de estudos e sacrifícios diários para uma vida vivida a dois, e pelo amor de cada dia.

À minha mãe Maria José Sampaio pelo apoio, amor e carinho.

Aos professores do curso que mesmo durante a pandemia conseguiram ministrar as disciplinas da melhor forma possível, e aos colegas de turma que por muitas vezes durante reuniões de estudos deram força e ajudaram na solução de problemas propostos.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga que acreditou no trabalho e sempre muito acessível as dúvidas, buscando orientar e ao mesmo tempo preservar a individualidade do trabalho.

"Quanto às investigações fundamentais da
matemática, não há nenhum último fim...
nenhum primeiro começo." (Felix Klein)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar as isometrias no plano euclidiano, e que algumas delas formam grupo, e como podemos analisar e ensinar, na educação básica, através da transposição didática esses conceitos matemáticos, pois a teoria moderna de grupos não é ensinada a nível médio e as isometrias mal são abordadas e/ou são apenas estudadas de forma superficial. Definiremos grupos e subgrupos, conheceremos as isometrias no plano euclidiano, a saber, Reflexão, Translação, Rotação e Reflexão com Deslizamento. Também verificaremos quais delas são grupos, abordaremos o conceito de transposição didática, e por fim, traremos questões que abordam as isometrias no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Para obter tais resultados fizemos um estudo geométrico das isometrias, e também analisamos problemas do ENEM e da OBMEP que abordam o conteúdo.

Palavras-chave – Isometria; Transposição didática; Teoria de Grupos.

ABSTRACT

The objective of this work is to show the isometries in the Euclidean plane, and that some of them form a group, and how we can analyze and teach, in basic education, through the didactic transposition of these mathematical concepts, because modern group theory is not taught at an average level and isometries are barely addressed and/or are only studied superficially. We will define groups and subgroups, we will know the isometries in the Euclidean plane, namely, Reflection, Translation, Rotation and Reflection with Gliding. We will also verify which of them are groups, we will approach the concept of didactic transposition, and finally, we will bring questions that address isometries in the National High School Exam (ENEM) and in the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP). To obtain such results, we did a geometric study of isometries, and we also analyzed problems from ENEM and OBMEP that address the content.

Keywords – Isometry; Didactic transposition; Group Theory.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na referência [1] podemos verificar que a Matemática que é aprendida e ensinada nos dias atuais, foi pesquisada em uma ordem bem diferente da apresentada, visto que muito do que foi feito veio de um trabalho árduo e na busca por resolver problemas. No Brasil o maior centro de pesquisa em matemática é o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), e que tem como objetivos, estimular à pesquisa científica em Matemática, formar pesquisadores, difundir e aprimorar a cultura matemática no Brasil. Dentre as diversas áreas de pesquisa no IMPA, podemos citar a Álgebra, Análise e Equações Diferenciais Parciais, Computação Gráfica, Dinâmica dos Fluidos, Economia Matemática, Geometria Complexa e Folheações Holomorfas, Geometria Diferencial, Geometria Simplética, Otimização, Probabilidade e Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica. No Ceará, essas pesquisas também podem ser encontradas no departamento de matemática na Universidade Federal do Ceará (UFC), que é um dos precursores, no país, da pesquisa e ensino de pós-graduação nos diversos campos da Matemática Pura e Aplicada. Sendo criada em 1965, para promover uma ampla e profunda disseminação do conhecimento matemático na região. Na UFC as áreas de concentração são Geometria Diferencial, Análise, Topologia e Singularidades, Combinatória e Álgebra. Nesse trabalho, buscamos fazer parte, nem que seja de forma ínfima, do quadro de pesquisas realizadas no Ceará.

Nas universidades brasileiras, o estudante ingressa no curso de licenciatura em matemática e busca sair conhecedor da Matemática necessária a ser ensinada na educação básica, e das práticas que devem ser exercidas, mas será que isso é suficiente para suprir as necessidades no ensino de matemática na educação básica? Se o discente só se limita ao conhecimento que ele irá expor, lhe fará falta a capacidade de levar aos alunos aos horizontes insuspeitados da matemática. Citamos a geometria plana, como exemplo, o que nesta é essencial? Como poderíamos a partir desta construir outras geometrias?

Na educação básica adquirimos o conhecimento do plano cartesiano e também o de isometrias. Constatamos isso no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) onde encontramos questões sobre projeção que remetem ao conhecimento de rotação e também de reflexão. No ano de 2017 tivemos no caderno azul questão 144 um bom exemplo de rotação, e também, na segunda aplicação do Enem de 2018 verificamos várias isometrias utilizadas, como rotação e reflexão.

Nesse trabalho pretendemos especificamente abordar a moderna teoria de grupos e isometrias, e quais das isometrias no plano podem verificar como sendo grupo. Além disso, iremos fornecer material didático para os docentes utilizarem na educação básica, principalmente no que diz respeito a levar o conhecimento científico até sua adequação/adaptação ao conhecimento escolar, abordando problemas e deixando evidente a aplicação desse conhecimento, e sugerimos soluções para que o docente possa ter um norte na hora de sanar dúvidas, ou até mesmo, buscar caminhos distintos para resolver o mesmo problema. Assim, queremos ir mais além do conhecimento de isometrias e grupos, visando melhorar a formação do professor de matemática, e para esse momento procuramos ressignificar o ensino de grupos e expandir as aplicações em geometria, de modo que possamos associar grupos a isometrias.

Essa dissertação tem como objetivo ajudar a conhecer e demonstrar as isometrias do plano $\mathbb{R}^2$, estudar a teoria moderna de grupos e quais das isometrias do $\mathbb{R}^2$ podemos classificar como grupo, e também como o discente pode introduzir esses conhecimento aos estudantes da educação básica, e assim o estudante do curso de licenciatura poderá observar várias estruturas interessantes, a saber: as reflexões podem ser compostas, e a partir disso podemos formar grupos, como por exemplo, a translação, e como podemos abordar, mesmo que de forma superficial, essas ideias matemáticas na educação básica.

Iremos estudar isometria a partir de sua definição verificada em [2], que pode, de maneira menos rigorosa, ser visto em [3], que diz que “as isometrias são transformações geométricas que preservam as distâncias entre pontos e as amplitudes de ângulos”. Em [3] verificamos que uma isometria entre os planos Π e Π’ em $\mathbb{R}^2$ é uma função T: Π → Π’ que preserva distância. Isto significa que, para quaisquer pontos X, Y ∈ Π, pondo X’ = T(X) e Y’ = T(Y), tem-se que d (X, Y) = d (X’, Y’). Em [2] verificamos distância no plano como sendo uma função D: ℝ x ℝ → ℝ, tal que D (u, v) = w, onde u = (x_1, y_1) e v = (x_2, y_2). Também verificamos que podemos calcular d (u, v) = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Ainda em [3] verificamos que as isometrias no plano são: a translação, rotação, reflexão, e reflexão com deslizamento. O que nos leva a conhecer tais conceitos um a um, para que assim possamos melhor entender o produto final do estudo.

1.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

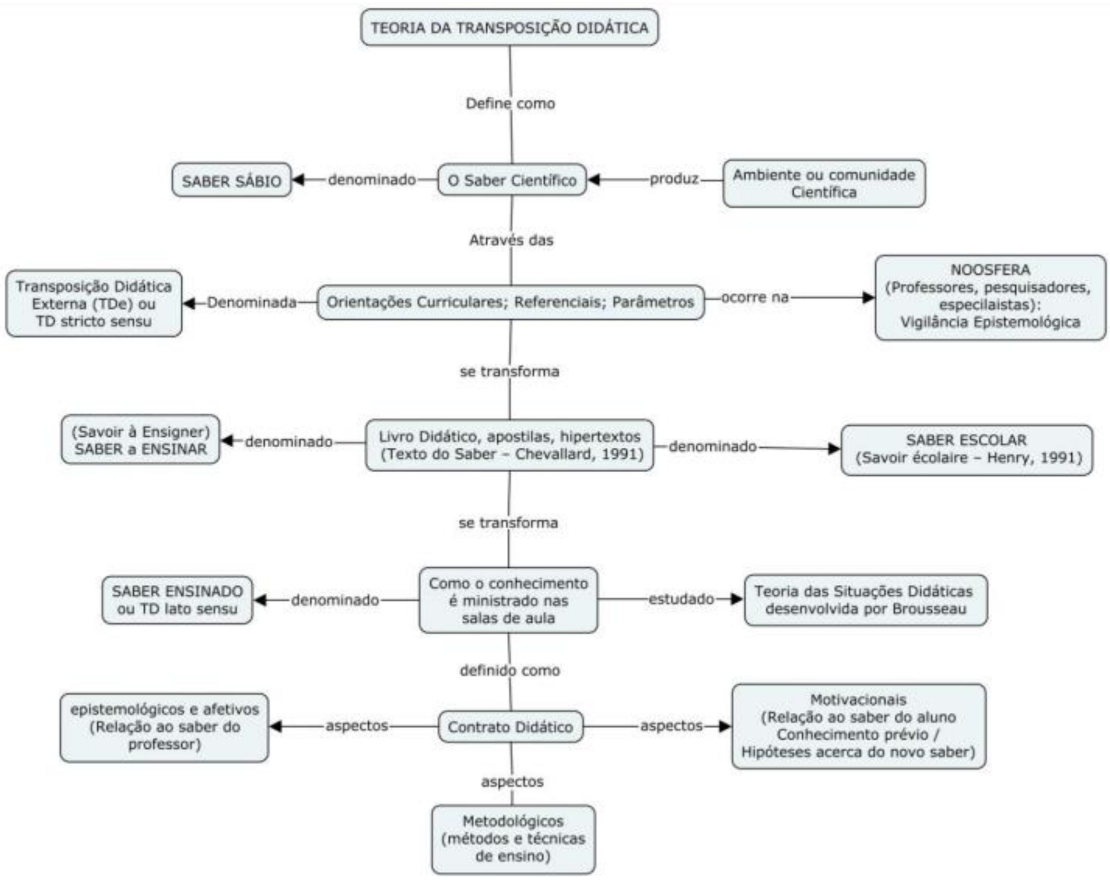
Para que o estudante aprenda certo conteúdo, é evidente que se faz necessário o uso de “ajustes” na abordagem a ser feita, pois ao apresentar o conhecimento científico na sua forma mais pura encontramos barreiras na aprendizagem, visto que os estudantes não possuem a base necessária para isso. Sendo assim, a transposição didática visa suavizar as barreiras do "saber sábio" até chegar ao estudante através do "saber ensinado".

Em [4] podemos verificar que o termo "transposição didática" foi empregado inicialmente pelo sociólogo Michel Verret em sua tese de doutorado *Le temps des études*, publicada em 1975. Ainda em [4], verificamos que didática "é a transmissão de um saber adquirido. Transmissão dos que sabem para os que ainda não sabem. Daqueles que aprenderam para aqueles que aprendem", sendo assim, a didática se desdobra em duas: a prática do saber e a prática da transmissão.

Yves Chevallard tem uma grande importância para essa dissertação, pois segundo [4] ele é do campo do ensino de matemática e leciona no *Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie d'Aix-Marseille*, onde coordena a pesquisa sobre formação docente em matemática. Ele publicou o livro *La Transposition Didactique* (1985) que é uma referência marcante para a pesquisa educacional brasileira. Em [4] verificamos que para Chevallard a terminologia, inicialmente abordada, por Verret "transmissão" é recusável, visto que para ele "Falar de um saber e da sua transmissão, com efeito, é reconduzir a imagem da caixa preta, aquela da sala de aula onde supõe-se a transmissão de um suposto saber, onde não iremos olhar e, se formos, veremos primeiro o professor, depois os alunos, e quase nunca o saber, sempre invisível, como a filosofia medieval, segundo Alain de Libera. De fato, carecemos cruelmente de conhecimento sobre a vida 'íntima' dos saberes nas salas de aula: a metáfora substancialista que comporta a pretensa transmissão do saber explica, em grande parte, esse desconhecimento."

Em [4] observamos que o trabalho de Chevallard, que foi atualizado em 1991, acrescenta estudo de caso, e com isso mostra um exemplo sobre como ocorreu e foi feita a investigação da transposição didática, através do conhecimento sobre distância, ou seja, algo que será discutido nessa dissertação, sendo assim, essa análise que vem a colabora com o abordado, no capítulo 3 veremos a definição formal sobre distância, nos capítulos 4 e 5 iremos abordar estratégias didáticas para ensinar tal conceito e ainda verificar situações problemas onde o "saber sábio" sofre a transposição até chegar ao "saber ensinado".

Figura 1 - Mapa conceitual da teoria da Transposição Didática incluindo o contrato didático.



Fonte: Mello, 2019.

O mapa conceitual representado na figura 1.1 nos traz desde a definição da teoria da Transposição Didática, até os aspectos do contrato didático, sendo esse último bastante conhecido, pois engloba a epistemologia, as motivações e as metodologias. No escopo do mapa podemos identificar que através dos parâmetros e/ou orientações curriculares o “saber sábio” se transforma no “saber ensinado” (com o uso do material didático), ou seja, no saber escolar e/ou no saber a ser ensinado.

1.2 ESCOPO DO TRABALHO

Alguns estudos relacionados a isometrias foram identificados no repositório nacional do PROFMAT, a saber [5], [6] e [7], todas abordam isometrias, algumas com particularidades incluindo plano de aula e/ou exemplos em questões OBMEP, mas sem abordagem na teoria de grupos, e nem intencionalmente introduzindo os conceitos de transposição didática, da mesma forma, podemos verificar as dissertações sobre grupos em [8] e [9], que abordam teoria de grupos, em particular de simetrias, mas sem mostrar qual isometria seria grupo e como ensinar na educação básica, e por fim, transposição didática é abordada em [10] e [11], mas não define realmente o que seria a transposição e nem associa a grupos e/ou isometrias.

Considerando as ponderações feitas, esse trabalho consegue reunir os conceitos de grupos, isometrias e transposição didática, fazendo assim uma conexão entre esses três conceitos em um único trabalho, tornando assim esse trabalho relevante e de contribuição para o repositório PROFMAT.

Por fim, essa pesquisa foi realizada em cinco etapas, na primeira fizemos um estudo de outras dissertações ou artigos, [1], [3] a [11] e [16] que tenha alguma ligação com o tema escolhido, logo temos conhecimento preliminar de outros escritores sobre tópicos que contribuíram para a realização dessa dissertação.

Na segunda etapa estudamos alguns livros que contribuem para nosso tema [2], [12] e [13], e assim fechamos o embasamento teórico do que nos proporcionou a dissertar a respeito, e obviamente ter uma bagagem de informações para escrever e refletir sobre o tema, e assim construir verdadeiramente uma pesquisa.

Na terceira etapa focamos nas reuniões com o orientador, pois já havia tido reuniões para definir o objeto estudado e as referências bibliográficas, então pela continuidade fizemos um fechamento dos dados e da proposta de pesquisa, visando assim termos algo mais consolidado, e assim orientando e orientador puderam interagir.

A quarta etapa foi a de escrever tudo que foi verificado e refletido sobre a produção da dissertação, e nesse momento foram tomadas as devidas cautelas, para que ficasse tudo nos conforme segundo as normas estabelecidas no programa de mestrado PROFMAT.

Na quinta etapa ocorreram os últimos ajustes e correções para que a defesa fosse tranquila e organizada, visto que após todo o trabalho realizado, esse significa o momento de maior gratificação, pois é o termino de uma jornada que iniciou desde o primeiro dia, na primeira disciplina, e agora se torna realidade.

2 TEORIA DE GRUPOS

2.1 GRUPOS

Para esse capítulo utilizamos a referência [12], onde abordaremos a noção de grupos e suas propriedades. Este conceito, aparentemente pouco geométrico, nos surpreenderá quando fizermos a conexão com os grupos que iremos estudar.

Em [16] verificamos que o matemático francês Évariste Galois (1811-1832) foi quem deu origem a teoria moderna de grupos quando estudou sobre solubilidade por radicais de equações polinomiais, mas foi o britânico Arthur Cayley (1821-1895) que em 1854 inseriu a definição moderna sobre grupos, a saber

Definição 1. Um conjunto G não vazio munido de uma operação binária (G, .), tal que

$$\mu: G \times G \to G$$
$$(a, b) \to a.b$$

é um grupo se, e só se, segue as seguintes condições:

i) A operação é associativa, isto é $a.(b.c) = (a.b).c$, para todo a,b e c $\in$ G
ii) Existe um elemento neutro, isto é, existe $e \in G$ tal que $e.a = a.e = a$, para todo $a \in G$.
iii) Todo elemento possui o seu inverso com relação a operação, isto é, para todo $a \in G$ temos $a' \in G$ tal que $a.a' = a'.a = e$.

Ainda podemos verificar uma quarta condição, que não é obrigatória para ser grupo, mas que acrescenta uma classificação como grupo comutativo (ou Abeliano)

iv) O grupo será Abeliano (ou comutativo), se os elementos comutam, isto é, $a.b = b.a$, para todo $a, b \in G$.

Observações. O elemento neutro é único, pois supondo que temos dois neutros $e,e' \in G$, então $e = e.e' = e'$, portanto $e = e'$. O elemento inverso também será único, pois seja $a \in G$ e $b,b' \in G$ inversos de a, daí temos que $b = b.e = b.(a.b') = (b.a).b' = b'$, portanto $b = b'$.

Exemplos de Grupos:

1) $(\mathbb{Z}, +)$, pois temos válida a associatividade. O elemento neutro será o 0 e cada elemento a teremos o - a como inverso. Da mesma forma teremos $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$. (obs.: Todos com a soma usual)

2) ($\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, .), ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$, .) e ($\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 0) são grupos multiplicativos Abelianos. As propriedades acima seguem diretamente da definição de cada conjunto.
3) O Conjunto das Matrizes com entradas reais de ordem n (n>1) invertíveis $GL_n(\mathbb{R})$ munido com a Operação Multiplicação formam um grupo. Este é um grupo não comutativo. Este grupo é denominado grupo linear geral de grau n.

Demonstração. Para verificar que é um grupo basta considerar A, B $\in GL_n(\mathbb{R})$. Logo det A $\neq$ 0 e det B $\neq$ 0. Como o det(A.B) = det A.det B $\neq$ 0, segue que A.B $\in GL_n(\mathbb{R})$. A associatividade decorre das propriedades das matrizes e o elemento neutro é a matriz identidade I. (Como queríamos demonstrar – CQD)

Observação. Este grupo não é comutativo, pois tomando A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtemos que A.B $\neq$ B.A

4) O conjunto das funções contínuas que admite inversa f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um grupo com a operação composição. O elemento neutro é a função $f(x) = x$, para todo x pertencente a $\mathbb{R}$.

2.2 SUBGRUPOS

Definição 2. Seja (G, .) um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos H < G) quando utilizando a operação de G, o conjunto H ainda é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

i) $h_1.h_2 \in H$, para todo $h_1,h_2 \in H$
ii) $h_1.(h_2.h_3) = (h_1.h_2).h_3$, para todo $h_1,h_2,h_3 \in H$.
iii) Existe $e_h \in H$ tal que $e_h.h = h.e_h = h$, para todo $h \in H$.
iv) Para todo $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h.k = k.h = e_h$.

A condição ii) é sempre satisfeita, pois essa igualdade é válida para todos os elementos de G e isso inclui os de H. O elemento neutro de H será necessariamente o mesmo de G, pois tomando a $\in$ H, que está contido em G, temos que $e_h.a = a$, mas daí temos que $e_h.a.a^{-} = a.a^{-}$ que por fim obtemos que $e_h = e$. E por fim, dado h $\in$ H, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G, pois tomando k como o inverso de h em H, temos que $h.k = k.h = e_h$, logo $h.k = k.h = e$, portanto k é o inverso de h em G. (CQD)

Proposição 1. Seja H um subconjunto não vazio do grupo G. Então H é um subgrupo de G se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:

1) $h_1.h_2 \in H$, para todo $h_1.h_2 \in H$.
2) $h^{-1} \in H$, para todo $h \in H$.

Demonstração. Suponhamos que H seja um subgrupo de G. A condição 1) é satisfeita por definição. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, temos que h possui um inverso em H, mas como havíamos verificado anteriormente, o inverso em H também será inverso em G, isto é, tem que ser necessariamente igual a h^{-1}, portanto $h^{-1} \in H$. Reciprocamente, suponhamos que as condições 1) e 2) são satisfeitas.

Como já vimos a condição ii) é sempre satisfeita, também verificamos que o elemento neutro $e \in H$, pois tomando $h \in H$, temos pela condição 2) que $h^{-1} \in H$, logo $e = h.h^{-1}$. Por fim, a condição 2) já defini a existência do elemento inverso. (CQD)

Exemplos de Subgrupos

1) Seja $2\mathbb{Z}$ os múltiplos de 2 em $\mathbb{Z}$ $(2\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. De maneira geral seja $n \in \mathbb{Z}$, $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
2) Se G é um grupo, então $\{e\}$ e G são subgrupos de G. (Esses são denominados subgrupos próprios de G)
3) O grupo linear especial $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); \det A = 1\}$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$. Basta ver que $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$,então $\det(A.B) = \det A \,.\, \det B = 1$, ou seja, $A.B \in SL_n(\mathbb{R})$. Além disso, $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$, pois $\det(A^{-1}) = \frac{1}{det\,(A)} = 1$.
4) O grupo O(n) das matrizes ortogonais, onde A^t é a transposta da matriz A. O(n) é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

2.3 CLASSES LATERAIS, SUBGRUPOS NORMAIS E GRUPOS QUOCIENTES

A ideia principal dessa sessão é conhecer de forma mais específica os grupos quocientes, dando assim uma maior profundidade sobre a continuidade das pesquisas modernas sobre grupos e seus elementos.

2.3.1 Relação de Equivalência

Definição 3. O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) \,;\, a \in A, b \in B\}.$$

Definição 4. Uma relação R entre conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano A × B. Define-se semelhantemente uma relação entre vários conjuntos A_i, onde i pertence aos naturais, como subconjunto do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Uma relação é, portanto, um conjunto de n-uplas ordenadas.

Se um par (x, y) pertence a uma relação R, denotamos xRy. Podemos também denotar xRy quando $(x, y) \in R$.

Definição 5. Uma relação R em um conjunto A é:

• reflexiva se aRa para todo $a \in A$,

• transitiva se aRb e bRc implicam em aRc para todos $a, b, c \in A$,

• simétrica se aRb implica em bRa para todos $a, b \in A$,

• antissimétrica se aRb e bRa implica que $a = b$.

Definição 6. Uma relação é dita de equivalência se é simétrica, reflexiva e transitiva.

Exemplos de relações de Equivalência:

1) Seja F o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Defina que fRg se e somente se existe uma constante c tal que $f(x) = g(x) + c$, para todo x. Então R é uma relação de equivalência.

• (reflexiva): $f(x) = f(x) + 0$.

• (simétrica) se $f(x) = g(x) + c$, então $g(x) = f(x) + (-c)$.

• (transitiva) se $f(x) = g(x) + c_1$ e $g(x) = h(x) + c_2$, então $f(x) = h(x) + c_2 + c_1$.

2) Dados a, b e $m \in \mathbb{Z}$ dizemos que a é congruente ($\equiv$) a b módulo m, se e só se, m divide b menos a (a menos b). A congruência módulo m, com m pertencente aos inteiros, é uma relação de equivalência. Para todo $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$.

• (reflexiva): trivialmente, $a \equiv a \bmod m$, se e só, $m|(a - a = 0)$, pois todo número divide 0.

• (simétrica) se $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv a \pmod m$, ora, se $m|(a - b)$, que equivale a $m| -(b - a)$, daí $m|(b - a)$

• (transitiva) se $m|(a - b)$, e $m|(b - c)$, então $m|[(a - b) + (b - c)]$, e claramente $m|(a - c)$.

2.3.2 Classes Laterais

Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Sobre G, defina a relação de equivalência ~ da maneira seguinte:

$$y \sim x \leftrightarrow \exists\, h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

• (reflexiva) $x \sim x$, pois basta tomar o elemento neutro h_e, daí temos que $x = xh_e$

• (simétrica) $y \sim x$ e $x \sim y$, pois $y = xh \leftrightarrow yh^{-1} = x$, portanto $x = yh'$, onde $h' \in H$

• (transitiva) $y \sim x$ e $x \sim z$ temos que $y = xh$ e $x = zk$, daí $y = zkh$ portanto $y \sim z$.

Definição 7. A classe de equivalência que contém x é o conjunto $\{y \in G \setminus y \sim x\} = \{xh \setminus h \in H\}$; denotaremos esse conjunto por xH e o chamaremos de classe lateral à esquerda de H em G que contém x. Analogamente podemos definir a classe à direita de H, daí teremos que $y \sim x \leftrightarrow \exists\, h \in H$ tal que $y = hx$, ou seja, a classe lateral a direita de H em G, que seria $Hx = \{hx \setminus h \in H\}$.

Proposição 2. Todas as classes laterais de H em G têm a mesma cardinalidade de H.

Demonstração. Basta utiliza a função $f: H \rightarrow xH$, onde $h \rightarrow xh$, como para cada $h \in H$ teremos um único $xh \in xH$, essa função é biunívoca. (CQD)

2.3.3 Subgrupos Normais e Grupos Quocientes

Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Queremos ver se a operação de G induz de maneira natural uma operação sobre o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G, isto é, se a operação $(xH, yH) \rightarrow xyH$ é bem definida, no sentido de não depender da escolha dos representantes x e y.

Demonstração. Dados $x, y \in G$ e $h,k \in H$ arbitrários, então x e xh são representantes da mesma classe xH e, y e yk são representantes da mesma classe yH. Assim, a operação induzida sobre as classes laterais à esquerda é bem definida se e só se

$$xyH = xhykH, \text{ para todo } x,y \in G \text{ e para todo } h,k \in H;$$

logo, se e só se,

$$y^{-1}x^{-1}xyH = y^{-1}x^{-1}xhykH, \text{ ou seja, } H = y^{-1}hyH, \text{ para todo } y \in G \text{ e para todo } h \in H,$$

e, portanto, se e só se $ghg^{-1} \in H$, para todo $g \in G$, e para todo $h \in H$ (CQD)

Proposição 3. Seja H um subgrupo de um grupo G. As afirmações seguintes são equivalentes:

i) A operação induzida sobre as classes laterais à esquerda de H em G é bem definida.

ii) $gHg^{-1} \subseteq H$, para todo $g \in G$.

iii) $gH\,g^{-1} = H$, para todo $g \in G$.

iv) $gH = Hg$, para todo $g \in G$.

Demonstração.

i) $\leftrightarrow$ ii) foi feito anteriormente.

iii) $\leftrightarrow$ iv) $gH\,g^{-1} = H \leftrightarrow gH\,g^{-1}g = Hg \leftrightarrow gH = Hg$.

iii) $\leftrightarrow$ ii) é imediato, pois se $gH\,g^{-1} = H$, então $gHg^{-1} \subseteq H$. Para demonstrar a volta Suponhamos que $gHg^{-1} \subseteq H$, para todo $g \in G$; queremos mostrar que $H \subseteq gHg^{-1}$ para todo $g \in G$. sejam então $h \in H$ e $g \in G$; temos $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$. (CQD)

Definição 8. Um subgrupo H é um subgrupo normal de G (escrevemos $H \blacktriangleleft G$) se ele satisfaz as afirmações equivalentes da proposição anterior. Neste caso, as classes laterais à esquerda de H são iguais às classes laterais à direita de H; vamos chamá-las apenas de classes laterais de H.

Definição 9. Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G. O grupo de suas classes laterais, com a operação induzida de G, é chamado de grupo quociente de G por H; ele será denotado por G/H.

Exemplos. $\mathbb{Z}_{12}/\ H$ onde os elementos desse novo grupo são definidos como sendo as classes laterais, ou seja, $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{11}\}$ e $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, teremos:

$\mathbb{Z}_{12}/\ \mathbb{Z}_{2} = \{\overline{0} + H, \overline{1} + H, ..., \overline{11} + H\} = \{H, \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}\}, \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}\}\} = \{H, \overline{1} + H, \overline{2} + H\}$,

onde $\overline{n}$ significa a classe representante dos restos da divisão por 12.

Exemplo. Seja $G = \{1, i, -1, -i\}$ e $H = \{1, -1\}$, temos que $(G, .)$ é um grupo e que $H \blacktriangleleft G$, como $xH = Hx$, então H é um subgrupo normal, e portanto podemos fazer o quociente de G por H. Os elementos desse conjunto $G/H = \{xH \mid x \in G\}$, ou seja, $G/H = \{1.H, i.H, -1.H, -i.H\} = \{1.H, i.H\}$ (onde i é a unidade imaginária dos complexos).

3 ISOMETRIAS NO PLANO

Nesse capítulo abordaremos desde definição de métrica a de isometria no plano euclidiano, utilizando [2] como referência, e buscando formalizar o conhecimento científico na formação do docente. Iremos formalizar o conceito de métrica e quais propriedades devem ser obedecidas, e daremos o exemplo da métrica usual no $\mathbb{R}^2$.

3.1 MÉTRICA

Em Matemática, a métrica generaliza o conceito de distância e torna mais preciso o que é "medir", ou seja, nos diz como generalizamos o conceito de distância em um conjunto qualquer, espaço e/ou superfície, como é feito logo em seguida.

Definição 10. Uma métrica sobre um conjunto Π não vazio é uma aplicação

$$d : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

verificando, para quaisquer x, y, z $\in \Pi$, as seguintes propriedades:

i) $d(x, y) \geq 0$. (é positivamente definida)

ii) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$. (é nula apenas em pontos coincidentes)

iii) $d(x, y) = d(y, x)$. (é simétrica)

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Obedece a Desigualdade Triangular)

Exemplo: A métrica canônica no $\mathbb{R}^2$ é a função

$$d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(A, B) = z \; ; \; A,B \in \mathbb{R}^2 \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

Sendo A = (a, b) e B = (c, d) temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Demonstração. i), ii) e iii) são imediatos. Supondo X = (a,b), Y = (c,d) e Z = (e,f), temos que $d^2(X, Y) = (a - c)^2 + (b - d)^2$, daí, $d^2(Y,Z) = (c - e)^2 + (d - f)^2$, e $d^2(X,Z) = (a - e)^2 + (b - f)^2$. Logo, $d^2(X,Y) + d^2(Y,Z) = (a - c)^2 + (b - d)^2 + (c - e)^2 + (d - f)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 + c^2 - 2ce + e^2 + d^2 - 2df + f^2 \geq c^2 - 2ce + e^2 + b^2 - 2bf + f^2 = d^2(X,Z)$, então $d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z)$. (CQD)

3.2 ISOMETRIAS NO PLANO

As isometrias no plano cartesiano são conceitos abordados, em algum nível, no Ensino Fundamental, mas aqui iremos formalizar cada uma delas. E as utilizaremos para fazer o “link” entre o plano cartesiano e os problemas encontrados no cotidiano, e assim mostrar ao final dessa dissertação como são e quais são os contextos aplicáveis utilizando isométricas ao plano. Em [2] verificamos que

Definição 11. Uma isometria no plano é uma função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva distância, ou seja, para quaisquer pontos X, Y $\in \mathbb{R}^2$, com T(X) = X’ e T(Y) = Y’, tem-se que d(X, Y) = d(X’,Y’)

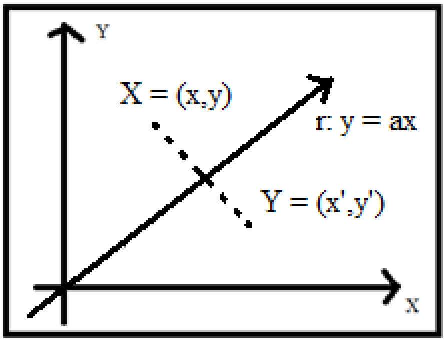
Proposição 4. Toda isometria leva reta em reta.

Demonstração. Seja r contida no $\mathbb{R}^2$ uma reta. Tomemos dois pontos distintos A e B em r, temos que T(A) = A’ e T(B) = B’ e iremos chamar de r’ a reta que passa pelos pontos A’ e B’. Dado qualquer ponto X $\in$ r, um dos três pontos A, B ou X está entre os outros dois. Suponha sem perda de generalidade que seja B, daí temos que AX = AB + BX, como T(X) = X’ temos que A’X’ = A’B’ + B’X’, portanto o ponto B’ está entre os pontos A’ e X’, portanto A’, B’ e X’ são colineares, logo se X $\in$ r, então X’ $\in$ r’. Portanto para todo ponto X pertencente a reta r, obtemos X’ pertencente a r’, assim, temos uma isometria entre r e r’. (CQD)

Definição 12. Dada à função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que A é um ponto fixo de T se T(A) = A.

Definição 13. A reflexão R em torno de uma reta r: y = ax, a $\in \mathbb{R}^*$, é uma função $R_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ assim definida, $R_r(x,y) = (x',y')$, tal que a distância d(X,r) = d(Y,r) e a reta r é perpendicular a reta formada por X e Y.

Figura 2 – Reflexão em torno da reta r.



Fonte: Arquivo próprio

Daremos um significado mais algébrico à definição. Sejam x' e y' como na figura 3.1, podemos observar que o ponto médio do segmento XY está contido na reta r, e tem como coordenadas $X_m = (\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$, logo temos que

$$y + y' = a(x + x')$$

A inclinação da reta XY é $\frac{y-y'}{x-x'}$, como essa reta é perpendicular a reta r, temos que $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{-1}{a}$. Daí, temos que

$$\begin{cases} y + y' = a(x + x') \\ y' - y = \dfrac{-1}{a}(x' - x) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior temos que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}y \\ y' = \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}$$

Podemos também generalizar reflexão para a reta r: y = ax + b, daí y – b = ax, que se refere a reta utilizada anteriormente, portanto obteremos no caso mais geral,

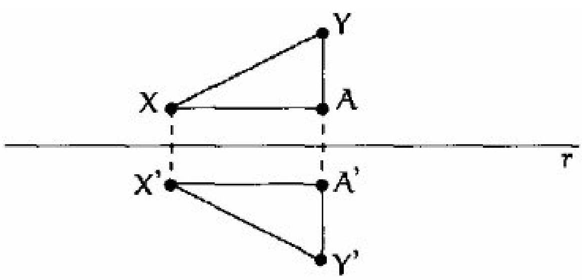
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}x + \dfrac{2a}{1+a^2}(y-b) \\ y' = \dfrac{2a}{1+a^2}x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) \end{cases}$$

Proposição 5. A reflexão é uma isometria.

Demonstração. Dados os pontos X,Y ∈ $\mathbb{R}^2$ e a reta r, analisaremos dois casos, primeiro com X e Y do mesmo lado da reta, e no segundo em lados opostos. (obs.: $R_r(X)$ = X' e $R_r(Y)$ = Y').

i) Estando X e Y no mesmo semi-plano, traçamos os segmentos XA e X'A', paralelos a r, com A e A' no segmento YY'. Os triângulos retângulos XAY e X'A'Y' têm os catetos com o mesmo comprimento, logo com mesma hipotenusa, assim d(X,Y) = d(X',Y').

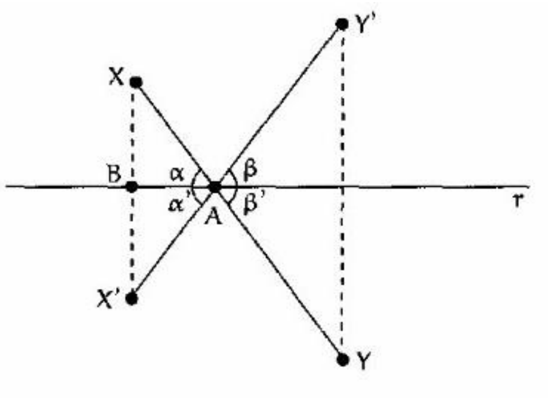
Figura 3 – Caso I de isometria de reflexão



Fonte: Arquivo próprio

ii) Estando X e Y em semi-planos opostos, sejam A e B os pontos de interseção de XY e XX’ com a reta r. Os triângulos retângulos ABX e ABX’, tem o mesmo cateto AB, e como d(B,X) = d(B,X’), então suas hipotenusas têm o mesmo comprimento, ou seja, AX = AX’. Analogamente, d(A,Y) = d(A,Y’). Assim os triângulos AXX’ e AYY’ são isósceles, portanto, suas medianas são bissetrizes, ou ainda, XÂB = X’ÂB e Y’ÂC = YÂC (sendo C o ponto de encontro entre r e YY’). Por outro lado, XÂB = YÂC, pois são opostos pelo vértice. Então XÂB + X’ÂB = Y’ÂC + YÂC. Como Y’ÂC + YÂC é o suplemento de XÂY’, segue-se que XÂB + X’ÂB também é, logo X’, A e Y’ são colineares. Portanto, X’Y’ = X’A + AY’ = XA + AY = XY (CQD)

Figura 4 – Caso II de isometria de reflexão



Fonte: Arquivo próprio

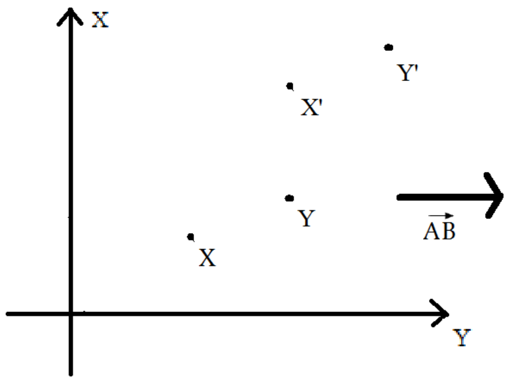
Definição 14. A translação T_v: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, determinada pelo vetor v não nulo, é a transformação que leva cada ponto P do plano no ponto $T_v(P) = P + v$, ou seja, dados o ponto P = (x,y) e o vetor AB = (α, β), a translação de $T_v(P) = P'$, onde P’ = (x’,y’) = (x + α, y + β).

Também podemos verificar que a translação é a composição de duas reflexões em torno de duas retas r e r’ paralelas, ou seja, r: y = ax e r’: ax + b

$R_{r'}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x+\frac{2a}{1+a^2}y,\ \frac{2a}{1+a^2}x-\frac{1-a^2}{1+a^2}y\right) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}.\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x+\frac{2a}{1+a^2}y\right)+\frac{2a}{1+a^2}\left(\left(\frac{2a}{1+a^2}x-\frac{1-a^2}{1+a^2}y\right)-b\right),\right.$

$\left.\frac{2a}{1+a^2}.\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x+\frac{2a}{1+a^2}y\right)-\frac{1-a^2}{1+a^2}\left(\left(\frac{2a}{1+a^2}x-\frac{1-a^2}{1+a^2}y\right)-b\right)+b\right) = \left(x-\frac{2ab}{1+a^2},\ y+\frac{1-a^2}{1+a^2}.b\right) = (x+\alpha,\ y+\beta).$

Figura 5 – Translação.



Fonte: Arquivo próprio

Proposição 6. As translações T formam um grupo.

Utilizaremos v = (α, β), u = (α_1, β_1) e w = (α_2, β_2).

i) É fechado.

Demonstração. $T_v \circ T_u(x,y) = Tv(Tu(x, y)) = Tv(x + \alpha_1, y + \beta_1) = (x + \alpha + \alpha_1, y + \beta + \beta_1)$ que pertence a T.

ii) O elemento neutro I é a identidade, pois $I \circ T_v(x, y) = I(x + \alpha, y + \beta) = (x + \alpha, y + \beta) = T_v(x,y)$

iii) É associativo, pela associatividade de funções.

iv) Todos têm inverso, pois $T_v \circ T_{-v}(x, y) = T_v(T_{-v}(x, y)) = T_v(x + \alpha^*, y + \beta^*) = (x + \alpha + \alpha^*, y + \beta + \beta^*)$. Portanto, se $\alpha^* = - \alpha$ e $\beta^* = - \beta$, então $T_v \circ T_{-v}(x, y) = I(x,y)$

v) Comutativo. $T_v \circ T_u(x,y) = T_v(T_u(x,y)) = T_v(x + \alpha_1, y + \beta_1) = (x + \alpha + \alpha_1, y + \beta + \beta_1) = T_u(x + \alpha, y + \beta) = T_u(T_v(x, y)) = T_u \circ T_v(x,y)$.

Proposição 7. Toda translação é uma isometria.

Demonstração. Basta tomarmos dois pontos arbitrários X e Y ∈ R² e suas imagens $T_v(X)$ = X' e $T_v(Y)$ = Y'. Daí temos que d(X, Y) = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, fazendo o mesmo passo com relação a X' e Y' obtemos, d(X', Y') = $\sqrt{[(x_1 + \alpha) - (x_2 + \alpha)]^2 + [(y_1 + \beta) - (y_2 + \beta)]^2}$, portanto d(X,Y) = d(X',Y'). (CQD)

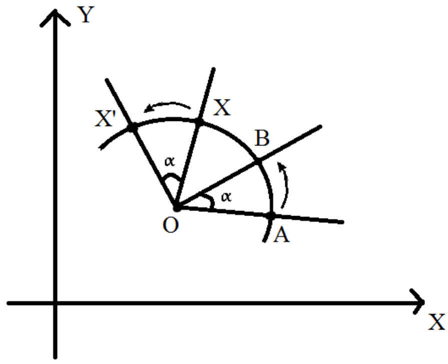
Observação. A translação não possui pontos fixos. Salvo a função I(x,y).

Definição 15. Sejam O um ponto tomado no plano ℝ² e α = AÔB um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}$: ℝ² → ℝ², tal que, $\rho_{O,\alpha}(O)$ = O e, para todo X ≠ O em $\mathbb{R}^2$, $\rho_{O,\alpha}(X)$ = X’ é o ponto do plano $\mathbb{R}^2$ tal que d(X,O) = d(X’,O), XÔX’ = α e o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X’.

Também podemos verificar que a rotação é a composição da reflexão em torno da reta r e r’, tal que r e r’ são retas concorrentes.

A condição XÔX’ = α significa, em termos geométricos, que se tomarmos os pontos A e B tais que AO = OB = OX = OX’ então AB = XX’.

Figura 6 – Rotação de ângulo α.



Fonte: Arquivo próprio

A exigência de que o sentido de rotação de X para X’ seja o mesmo que o sentido de A para B é bem clara intuitivamente e pode ser formulada em termos precisos dizendo-se que os ângulos BÔX e AÔX’ têm a mesma bissetriz. Ainda podemos ter a rotação de centro O’ = (a,b) e o ângulo α transformando o ponto P = (x,y) no ponto P’ = (x’,y’) tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Proposição 8. Toda rotação é uma isometria.

Demonstração. Dados os pontos X, Y ∈ $\mathbb{R}^2$, diferentes de O, e sejam X’ e Y’ suas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}(X)$ = X’ e $\rho_{O,\alpha}(Y)$ = Y’. Temos que, d(X,Y) = $\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$,e que ,

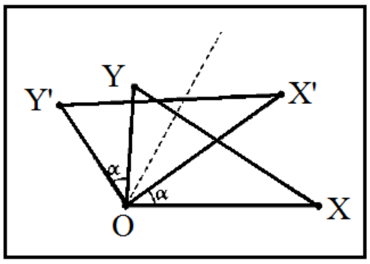
$$d(X',Y') = \sqrt{\begin{array}{l}\{[(x'-a).cos\alpha - (y'-b).sen\alpha] - [(x''-a).cos\alpha - (y''-b).sen\alpha]\}^2 + \\ \{[(x'-a).sen\alpha - (y'-b).cos\alpha]^2 - [(x''-a).sen\alpha - (y''-b).cos\alpha]\}^2\end{array}}$$

fazendo as contas, iremos obter que d(X, Y) = d(X’,Y’), como queríamos demonstrar.

Observação: A rotação possui o ponto O como ponto fixo, por definição.

Observação: Também podemos demonstrar utilizando a geometria sintética[1], pois dados os pontos X, Y $\in \mathbb{R}^2$, diferentes de O, sejam X' e Y' suas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ e $\rho_{O,\alpha}(Y) = Y'$ como ângulos $X'\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Y'$ têm a mesma bissetriz, segue-se que $X\hat{O}Y = X'\hat{O}Y'$. Sendo OX = OX' e OY = OY', concluímos que os triângulos XOY X'OY' são congruentes pelo caso LAL. Portanto, X'Y' = XY, ou seja, $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, tendo O como ponto fixo.

Figura 7 – Rotação como Isometria.

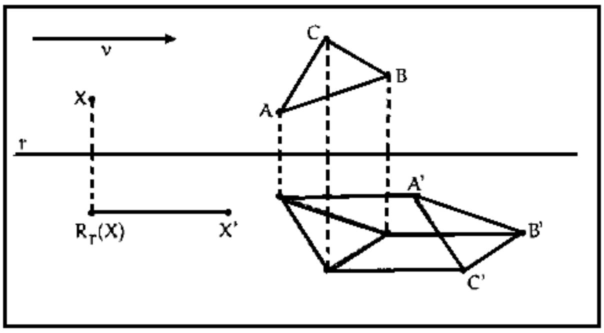


Fonte: Arquivo próprio

Definição 16. Sejam v um vetor não nulo e r uma reta no plano $\mathbb{R}^2$. A reflexão com deslizamento D, determinada pelo vetor v e pela reta r, é a função D: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, obtida fazendo a translação T_v e a reflexão R_r.

Observação.: Assim como na translação, a reflexão com deslizamento também não possui ponto fixo. Exceto na identidade I. Também podemos verificar que a reflexão com deslizamento D transforma o ponto arbitrário D = (x,y) no ponto D', tal que $D(x, y) = T_v \circ R_r(x, y) = R_r \circ T_v(x, y)$.

Figura 8 – Reflexão com Deslizamento.



Fonte: Arquivo próprio

[1] Geometria sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas, enquanto que na analítica essas se aplicam constantemente mediante o uso dos sistemas coordenados. Na realidade, a diferença entre ambas espécies de Geometria é puramente qualitativa: segundo que predominem as fórmulas ou as figuras, se tem uma ou outra Geometria, já que uma Geometria Analítica não pode, sem perder seu nome, prescindir em absoluto da representação geométrica, nem pelo contrário, a Geometria Sintética pode ir muito além sem expressar de um modo preciso, com fórmulas adequadas, seus resultados. (KLEIN, 1927)

Proposição 9. A reflexão com deslizamento D é um grupo.

i) É fechado, pois $(R_r \text{ o } T_v) \text{ o } (R_{r'} \text{ o } T_u)(x, y) = (R_r \text{ o } T_v) \text{ o } (T_u \text{ o } R_{r'})(x, y) = R_r \text{ o } (T_v \text{ o } T_u) \text{ o } R_{r'}(x, y) = R_r \text{ o } (T \text{ o } R_{r'})(x, y) = R_r \text{ o } (R_{r'} \text{ o } T) = (R_r \text{ o } R_{r'}) \text{ o } T = R \text{ o } S \in D$

ii) O elemento neutro I é a identidade, pois $I \circ D(x, y) = I \circ(R_r \text{ o } T_v(x, y)) = (I \circ R_r) \text{ o } T_v(x, y) = T_v \text{ o } R_r(x, y)$.

iii) É associativo, pois toda composição de função é.

iv) Todos têm inverso, pois $D_1 \circ D_2 = (T_v \circ R_r) \circ (T_{v'} \circ R_{r'}) = (T_v) \circ (R_r \circ T_{v'}) \circ (R_{r'}) = (T_v \circ T_{v'}) \circ (R_r \circ R_{r'}) = T_i \circ R_i = D_i$, onde r' = r e v' = -v.

v) É Comutativo, pois $D_1 \circ D_2 = (T_v \circ R_r) \circ (T_{v'} \circ R_{r'}) = (T_{v'} \circ R_{r'}) \circ (T_v \circ R_r) = D_2 \circ D_1$

Proposição 10. A reflexão com deslizamento é uma isometria.

Demonstração. A reflexão com deslizamento é a composição de duas isometrias, logo é uma isometria.

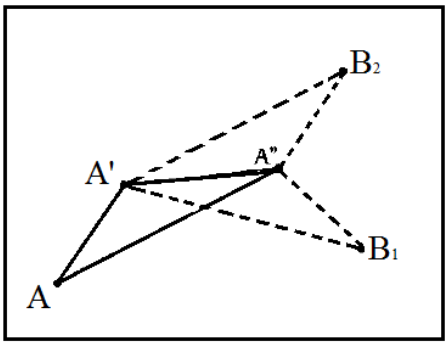
Já verificamos as isometrias no plano $\mathbb{R}^2$, mas poderia haver outras, e para não ficar dúvidas temos a proposição a seguir.

Proposição 11. Existem apenas quatro tipos de isometrias T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento.

Demonstração. Seja T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria diferente da identidade. Existe um ponto A $\in \mathbb{R}^2$ tal que T(A) = A' $\neq$ A. Seja T(A') = A''. Como T é uma isometria fica evidente que d(A',A'') = d(A,A') > 0. Assim, há três casos a considerar.

Primeiro caso: A, A' e A'' são não colineares.

Figura 9 – Casos não colineares dos pontos A, A' e A''.

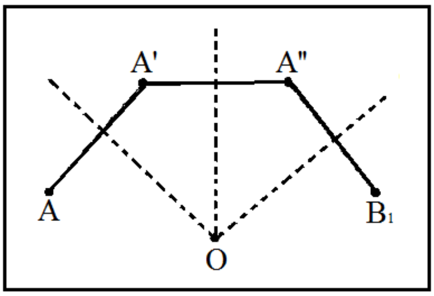


Fonte: Arquivo próprio

A imagem do triângulo AA'A'' pela isometria T é um triângulo que tem A' e A'' como vértices. Como os lados desse triângulo têm medidas iguais às dos lados AA'A'', existem duas posições possíveis, B_1 e B_2, para o seu terceiro vértice, conforme ele e o ponto A estejam ou não do mesmo lado da reta A'A''.

Na primeira hipótese, o ponto B_1 = T(A'') forma com A, A' e A'' a poligonal convexa AA'A''B_1, na qual os lados têm a mesma medida e os ângulos Â' e Â'' são iguais, logo ela pode ser inscrita numa circunferência de raio AO, cujo centro O é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos AA', A'A'' e A''B_1, donde O' = O. Assim, se considerarmos a rotação ρ de centro O e ângulo AÔA', teremos ρ(A) = A' = T(A), ρ(A'') = A'' = T(A') e ρ(A'') = B_1 = T(A''). Segue-se então que T é uma rotação.

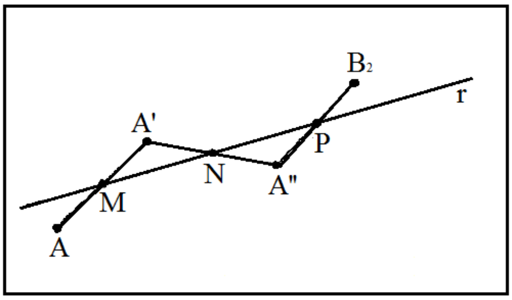
Figura 10 – Primeiro caso não colinear.



Fonte: Arquivo próprio

Na segunda hipótese temos em paralelogramo no qual AA' e A''B_2 são lados opostos e A'A'' é uma diagonal.

Figura 11 – Segundo caso não colinear.



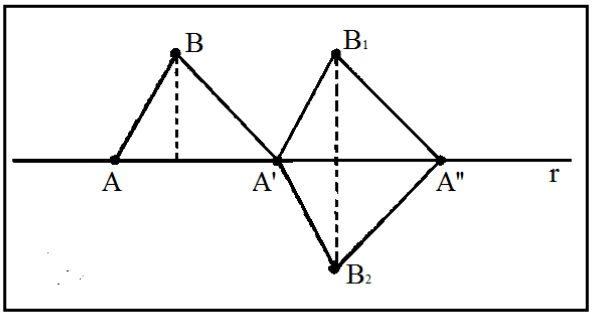
Fonte: Arquivo próprio

Segue-se que os pontos médios M, P e N desses três segmentos estão sobre uma reta r. Se considerarmos a isometria S = T_{MN} o R_r, composta da translação T_{MN} com a reflexão em torno de r, vermos que S e T coincidem nos pontos não colineares A, A' e A'', logo T = S. Concluímos então que T é uma reflexão com deslizamento. Finalizando o primeiro caso.

Segundo Caso: A, A' e A'' são pontos distintos e colineares.

Como AA' = A'A'', vemos que A' é o ponto médio do segmento AA''. A reta r, que contém os três pontos dados, é transformada em si mesma pela isometria T. Além disso, T coincide, nos pontos A e A' com a translação T_r, onde r = AA´. Segue-se que, em todos os pontos de r, T coincide com esta translação. Consideremos um ponto B fora dessa reta r.

Figura 12 – Casos colineares dos pontos A, A' e A''.



Fonte: Arquivo próprio

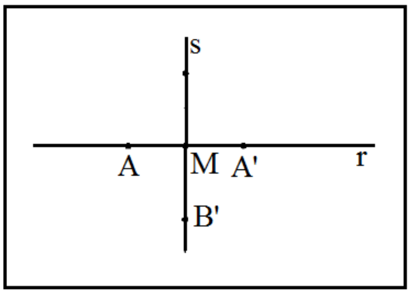
O triângulo AA'B é transformado pela isometria T em outro triângulo que tem A' e A'' como vértices e lados com as mesmas medidas que os de AA'B. Existem duas possibilidades, B_1 e B_2, para o terceiro vértice desse triângulo, conforme ele e B estejam do mesmo lado ou em lados opostos da reta r.

Na primeira hipótese, AB e A'B_1 são lados opostos de um paralelogramo, logo considerando a translação $T_{AA'}$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, vemos que ela coincide com a isometria T nos pontos não colineares A, A' e B. Segue-se que T = $T_{AA'}$, portanto T é uma translação.

Na segunda hipótese, como o ponto B_2 é simétrico de B_1 em relação à reta r, considerando a reflexão com deslizamento S = $T_{AA'}$ o Rr: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, vemos que S(A) = T(A) = A, S(A') = T(A') = A'' e S(B) = T(B) = B_2, logo S = T. Assim é uma reflexão com deslizamento. Finalizando o segundo caso.

Terceiro Caso: A'' = A. Nesse caso, a isometria T transforma o segmento de reta AA' em si mesmo, logo T(M) = M se M é o ponto médio de AA'. A mediatriz 's' desse segmento é então transformada em si mesma por T.

Figura 13 – Hipóteses de A’’ = A.



Fonte: Arquivo próprio

Seja B um ponto dessa mediatriz, diferente de M. Há duas possiblidades, ou T(B) = B ou T(B) = B’, ponto simétrico de B relativamente à reta r = AA’. Na primeira hipótese, T coincide com a reflexão R_s: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nos pontos A, A’ e B, logo T = R_s. Na segunda hipótese, T coincide com a rotação ρ: $\Pi \rightarrow \Pi$ em torno do ponto M, com ângulo de 180°, nos pontos não colineares A, B e M, logo T = ρ. (CQD)

4 PROBLEMAS ENVOLVENDO GRUPOS E ISOMETRIAS

Nesse capítulo vamos analisar problemas envolvendo grupo e principalmente as isometrias e como podemos lecionar através desses problemas, ou seja, antes de aplicar as definições mais formais, como podemos construir a noção mais básica sobre o conteúdo, tornando assim o “saber ensinado” mais intuitivo e aos poucos ir introduzindo o “saber sábio” aos estudantes, que devem conseguir acompanhar e até mesmo descrever melhor cada objeto estudado.

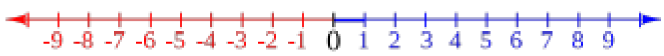
4.1 GRUPO ADITIVO

Ao estudarmos o conjunto dos números naturais, os estudantes chegam no ensino médio já tendo a noção sobre os algarismos, mas podemos ir além do algoritmo aprendido, pois podemos aprofundar um pouco mais o conceito sobre grupos utilizando esse conhecimento prévio.

No material estruturado organizado pela equipe do projeto Cientista Chefe, que faz parte de uma iniciativa do governo do estado do Ceará, através da secretaria de educação, observamos uma breve abordagem sobre os números inteiros, onde conceitos como simétrico, neutro, valor absoluto, dentre outros são expostos.

Inicialmente podemos abordar a ideia básica que somar dois números inteiros resulta como sendo um número inteiro, e tendo como principal ferramenta para ensinar sobre o grupo aditivo no conjunto dos inteiros pode utilizar a reta numérica, marcando apenas o valor discreto que ela contém, conforme a figura 4.1, daí, fica bem visual o comportamento da operação soma, pois podemos observar que para cada valor positivo, temos um simétrico negativo, que ao somarmos obtemos o valor nulo (0), ou seja, para qualquer n inteiro, obtemos k, tal que n + k = 0, ou melhor ainda, n + (-n) = 0.

Figura 14 – Pontos na Reta.



Fonte: Arquivo próprio

Assim o estudante pode perceber que ao juntar um número com o seu simétrico obtemos o valor nulo, e isso sempre ocorre. E para finalizar, eles podem utilizar quaisquer três inteiros e a ordem de soma não fará diferença, assim podemos finalizar afirmando que chamamos esse conjunto com essa operação tendo essas características de grupo.

Esse exercício abordado anteriormente faz com que o estudante comece a perceber mais a natureza dos conjuntos e operações e menos o algoritmo metódico. Podemos agora, pedir ao estudante, como exercício individual, que cada um tente utilizar a operação produto e verifica se encontramos as mesmas características no conjunto dos inteiros, e por fim, pedir para eles, depois de verificar que não funciona produto nos inteiros, façam a mesma coisa utilizando os números racionais.

4.2 PROBLEMAS ENVOLVENDO ISOMETRIAS

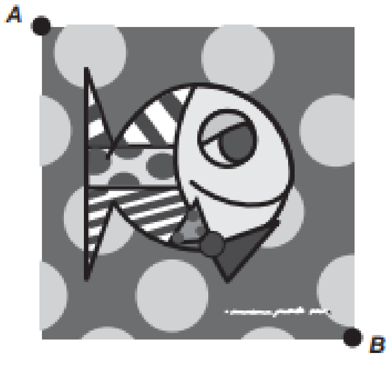
4.2.1 ENEM

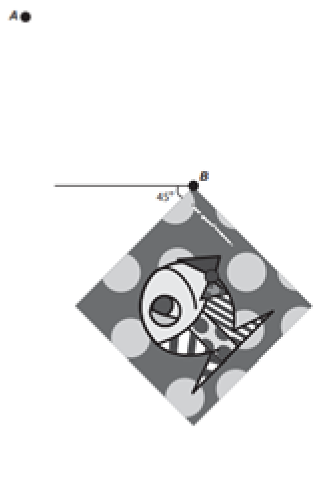
No ano de 2017 o ENEM nos trouxe uma questão que tratava basicamente do conhecimento de rotação, pois tendo um ponto fixo B deveríamos girar um quadro de tal forma que ele voltasse a sua posição original, vejamos a questão:

(ENEM 2017 – Questão 147 caderno amarelo)

A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um angulo de 45° com a linha do horizonte.





Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°.

A forma de recolocar a tela a posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um angulo de

A) 90° no sentido horário

B) 135° no sentido horário

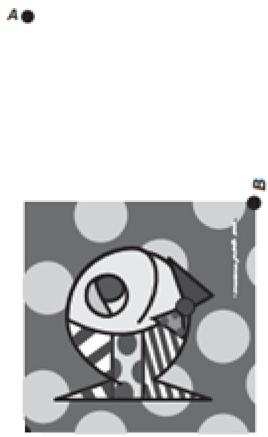
C) 180° no sentido anti-horário

D) 270° no sentido anti-horário

E) 315° no sentido horário

Ao analisarmos o quadro antes de soltar o prego, vemos que se houvesse uma rotação inicial de 90º teríamos, figura abaixo,

Figura 15 – Rotação de 90º no sentido anti-horário.

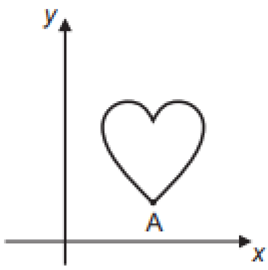


Fonte: Arquivo próprio

E por fim, basta fazer mais uma rotação de 45º, então teremos no final uma rotação de 135º no sentido anti-horário, portanto para voltar a posição original basta fazer a mesma rotação de 135º no sentido horário, logo devemos marcar como correto o item B).

(ENEM 2018 Reaplicação PPL – Questão 175 caderno amarelo)

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



1ª) Reflexão no eixo x;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

3ª) Reflexão no eixo y;

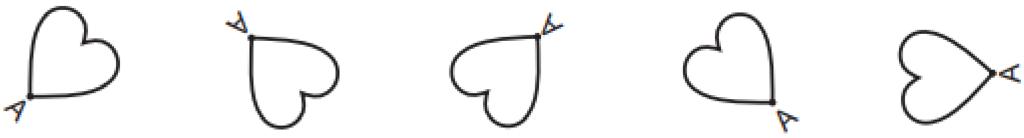
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

5ª) Reflexão no eixo x;

Disponível em: www.pucsp.br. Acesso em: 2 ago. 2012

Qual a posição final da figura?

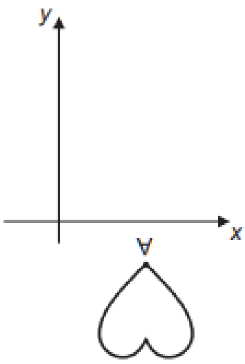
A) B) C) D) E)



Analisaremos as instruções dadas uma a uma.

1ª) Reflexão no eixo x.

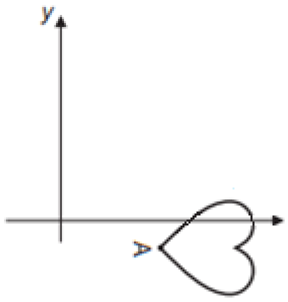
Figura 16 – Reflexão no eixo x – parte I



Fonte: Arquivo próprio

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A.

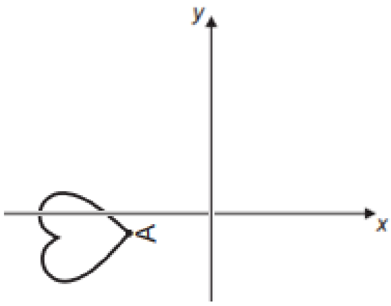
Figura 17 – Rotação de 90 graus no sentido anti-horário.



Fonte: Arquivo próprio

3ª) Reflexão no eixo y;

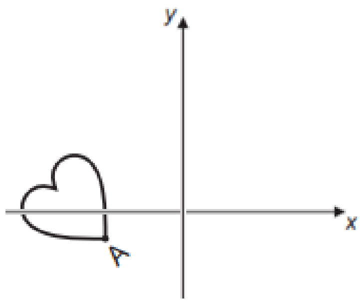
Figura 18 – Reflexão no eixo y.



Fonte: Arquivo próprio

4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A.

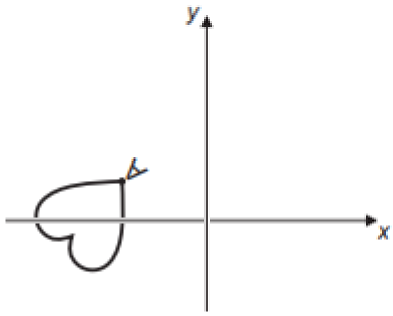
Figura 19 – Rotação de 45 graus no sentido horário.



Fonte: Arquivo próprio

5ª) Reflexão no eixo x.

Figura 20 – Reflexão no eixo x – parte II



Fonte: Arquivo próprio

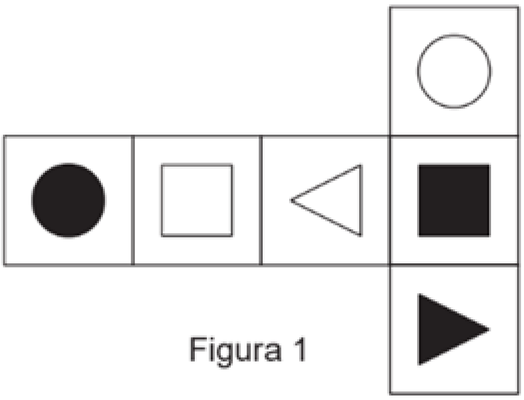
Portanto, depois da analisarmos cada uma das instruções, temos então como resposta o item C.

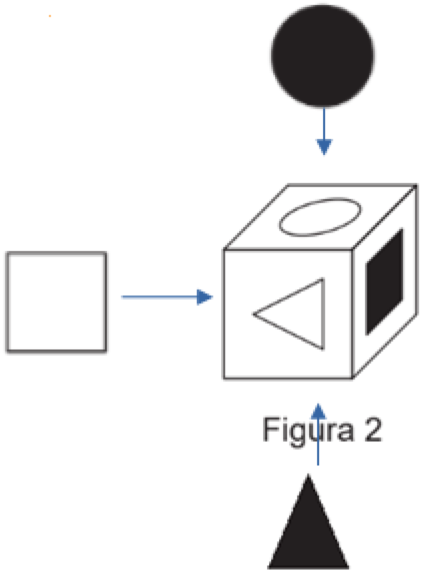
4.2.2 OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP teve sua primeira edição em 2005 visando estimular talentos na matemática nas escolas públicas do Brasil, são estudantes do 6° ano do ensino fundamental até o 3° ano do ensino médio. A olimpíada possui duas fases, sendo a primeira fase voltada para seleção local onde cada escola seleciona seus candidatos representantes, já na segunda fase os selecionados resolvem seis questões abertas de acordo com cada nível, que são no total de três, no nível 1 temos alunos do 6° e 7° ano do ensino fundamental, no nível 2 são alunos do 8° e 9° ano, e por fim, no nível 3 são alunos do ensino médio.

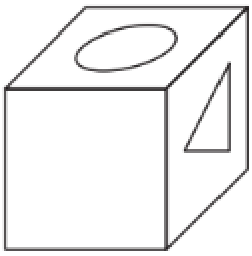
Nesse capítulo, vamos apresentar e discutir problemas OBMEP que utilizam os conhecimentos abordados.

OBMEP 2019 – Questão 01. A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



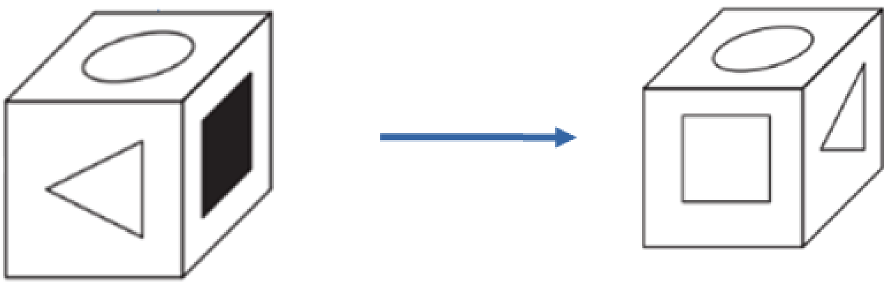


a) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



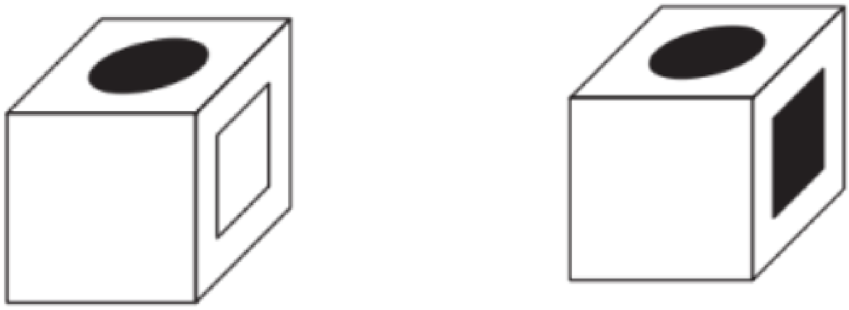
Solução: Verifique que o círculo vazado está marcado na face superior e que o triângulo com base paralela a aresta está na frente e se deslocou para a direita, isso significa que houve uma rotação no sentido anti-horário com relação às faces laterais, portanto:

Figura 21 – Rotação no sentido anti-horário



Fonte: Arquivo próprio

b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



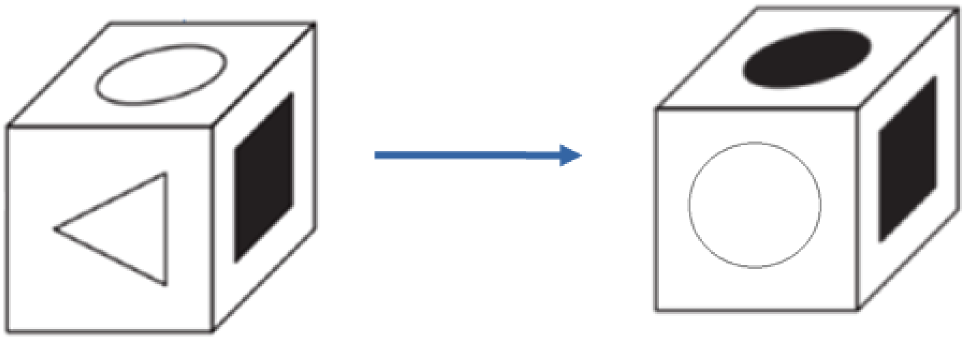
Solução para figura 4.13: Nesse caso basta fazer a rotação de 90°, ou seja, fazer o giro uma única vez trazendo a bola pintada que estava na face de trás para a parte superior e depois fazer uma reflexão lateral, levando o quadrado vazado da esquerda para a direita, sendo assim a face da frente fica com triangulo pintado apontando para a face superior.

Figura 22 – Rotação em dois eixos.

Fonte: Arquivo próprio

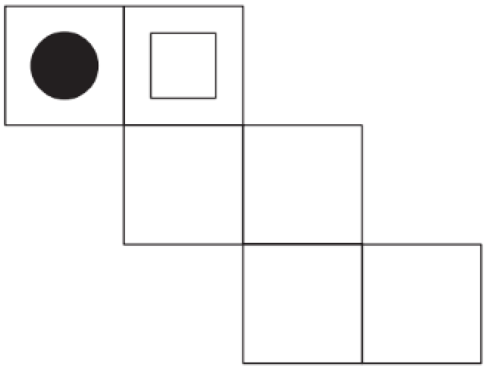
Solução para segunda figura: Nesse caso basta fazer a rotação e trazer o círculo pintado para a parte superior, e assim o círculo vazado fica na frente do cubo.

Figura 23 – Rotação Simples.



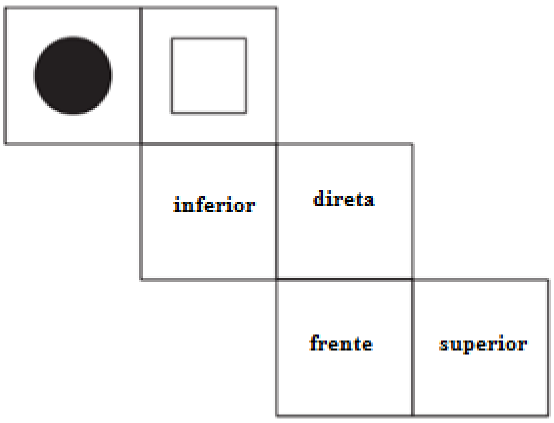
Fonte: Arquivo próprio

c) Abaixo temos outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



Solução: Posicionando a figura original, tal que a bola pintada fique a esquerda e o quadrado vazado fique na parte de trás, obtemos a figura a baixo

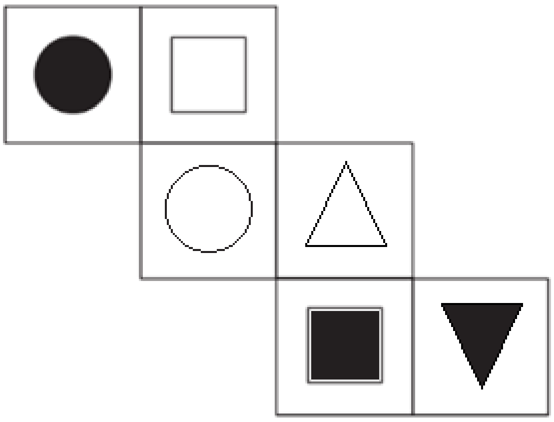
Figura 24 – Planificação.



Fonte: Arquivo próprio

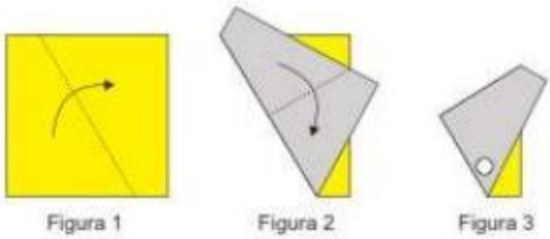
Agora basta verificar quem fica oposto à bola pintada e quem fica oposto ao quadrado vazado, e por fim para onde cada triângulo aponta, portanto obtemos,

Figura 25 – Planificação com Figuras Laterais.

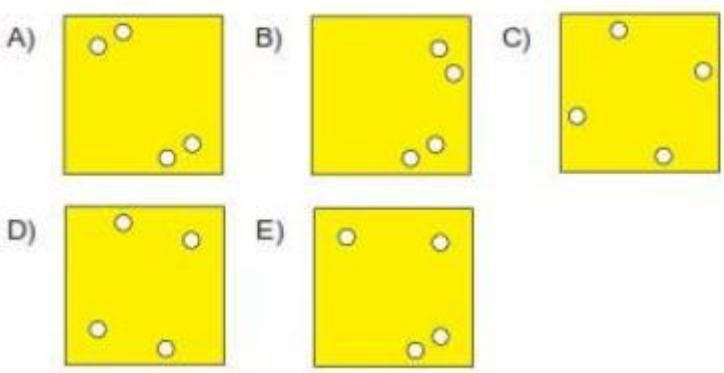


Fonte: Arquivo próprio

OBMEP 2016 – Questão 09. Joãozinho fez duas dobras em uma folha de papel quadrada ambas passando pelo centro da folha como indicado na figura 1 e na figura 2. Depois ele fez um furo na folha dobrada, como indica na figura 3.

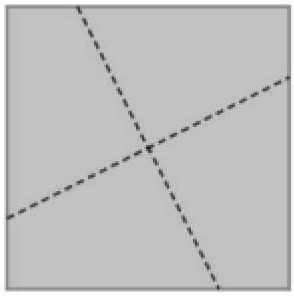


Qual das figuras abaixo representa a folha desdobrada?



Solução: Joãozinho fez duas dobras na folha conforme indicado na abaixo.

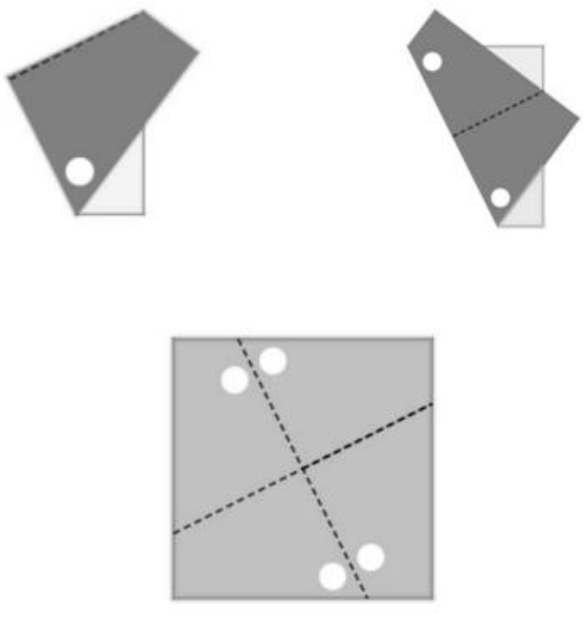
Figura 26 – Cortes Diagonais.



Fonte: Arquivo próprio

Ao verificarmos a Figura 4.21, podemos notar que o buraco é feito na parte inferior na direita do papel, logo ao desdobrarmos esse buraco reflete no superior esquerdo, e ao desdobramos novamente, os buracos ficam a direita e a esquerda da linha diagonal da esquerda para a direita, tanto na parte inferior como superior, isso utilizando do conceito de reflexão.

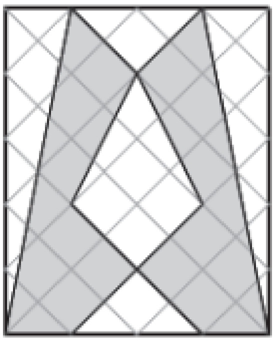
Figura 27 – Furos Simétricos.



Fonte: Arquivo próprio

Portanto, o item correto é o A).

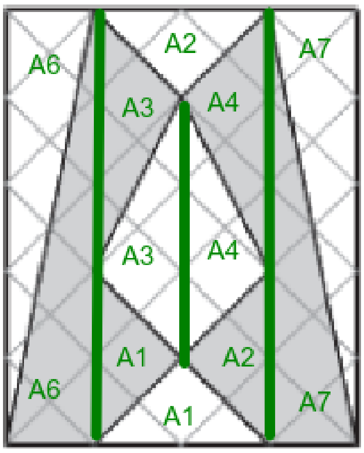
OBMEP 2012 – Questão 12. O retângulo abaixo que foi recortado de uma folha de papel quadriculado mede 4 centímetros de largura por 5 centímetros de altura. Qual é a área da região cinzenta?



A) 10 cm^2 B) 11 cm^2 C) 12, 5 cm^2 D) 13 cm^2 E) 14, 5 cm^2

Resolução: Usando reflexões e translações, figura abaixo, podemos reduzir o problema a verificar apenas que a área hachurada é a metade da área do retângulo, portanto A = 10 cm^2.

Figura 28 – Simetria de Áreas.



Fonte: Arquivo próprio

5 PLANOS DE AULAS PARA O ENSINO DE GRUPOS E ISOMETRIAS

Neste capítulo fazemos sugestões de planos de aula, sendo dividido em grupos e isometrias, buscando organizar as aulas e a sequência didática que acreditamos ser a adequada, nessa perspectiva, sugerimos que primeiro sejam apresentados os problemas propostos (CAPÍTULO 6), e que depois de resolvido o primeiro, seja iniciado a aula teórica, pois, na nossa visão, fica mais evidente o motivo de estudarmos algo que já precisamos para resolver problemas que anteriormente fomos desafiados.

5.1 PLANO DE AULA SOBRE GRUPOS

TEMA: Grupos na Álgebra Moderna
CARGA HORÁRIA: 2 horas-aulas
PÚBLICO ALVO: 1ª série do Ensino Médio
OBJETIVO GERAL: Compreender o conceito moderno de grupos utilizando conhecimentos prévios adquiridos pelos estudantes durante o ensino fundamental.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Aprender as operações básicas e associar o que foi aprendido à matemática moderna que conceitua os grupos; Dar exemplos de grupos que os estudantes já conhecem, mas que não sabem que são grupos.
CONTEÚDO: Conjuntos numéricos; Operações com números naturais, inteiros e Racionais;
METODOLOGIA: Utilizar o conhecimento prévio do estudante sobre o conjunto dos números inteiros para fazer perguntas sobre as operações conhecidas nesses conjuntos, e depois disso abordar as propriedades já conhecidas, a saber, associatividade, elemento neutro, a existência do elemento inverso (considerando a operação soma) e comutatividade, e por fim completar a ideia de que podemos ter uma operação fechada (explicando o que isso significa) para o conjunto e com essas propriedades, e daí obtemos o estudo da álgebra moderna, que estuda grupos.
AVALIAÇÃO: Pediremos para que o estudante identifique qual conjunto consegue ser grupo utilizando a operação produto e para ele justificar sua resposta.

5.2 PLANO DE AULA SOBRE ISOMETRIA

TEMA: Métrica e Isometria

CARGA HORÁRIA: 6 horas-aulas

PÚBLICO ALVO: 9ª série do Ensino Fundamental

OBJETIVO GERAL: Compreender o conceito de métrica e utilizar esse conceito para aprender sobre isometria, e finalizar estudando cada isometria separadamente.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Entender a definição de métrica utilizando como exemplo o pano; Aplicar a ideia de métrica para observar uma isometria (sugiro utilizar a ideia de triângulos congruentes), aprender as isometrias de forma mais específica, a saber, reflexão, rotação, translação, e reflexão com deslocamento; Resolver problemas utilizando o que foi aprendido com as isometrias.

CONTEÚDO: Métrica; Isometria; Reflexão; Rotação; Translação; Reflexão com Deslizamento.

METODOLOGIA: Utilizar o conhecimento prévio do estudante sobre o conteúdo abordado, perguntando o que é medir, e utilizar as respostas para intuir que medir é ter como resultado um número real, além de retornar sempre aos problemas para fazer a analogia entre teoria e prática, isso no momento de compreender o que é um isometria utilizando triângulos congruentes, visando sempre deixar claro para o estudante que podemos utilizar da geometria para nos dar a ideia intuitiva do que ocorre (uma ideia é usar o geogebra), mas que no final precisamos amadurecer a escrita descrevendo o que está ocorrendo. Por fim, utilizando o que a forma feita antes, devemos estudar as quatro isometrias abordadas, cada uma com suas características e seus exemplos, sendo alguns deles abordados nessa dissertação. Sempre ressaltando a importância da intuição do problema e dos desenhos para poder descrever melhor cada uma e utilizar essa ideia em outros conteúdos da Matemática.

AVALIAÇÃO: Resolver problemas em vestibulares e olimpíadas utilizando o que foi aprendido de isometrias, e fazer isso detalhando qual delas está sendo utilizada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho conseguiu obter êxito em fazer um estudo sobre teoria de grupos e as isometrias no plano euclidiano, e utilizando a transposição didática no intuito de conduzir o “saber sábio” na direção do “saber ensinado”, fazendo assim com que sejam evidenciadas as mudanças necessárias para que chegue aos estudantes o “saber ensinado”. Mostramos análises de casos onde podemos averiguar e conhecer problemas a serem resolvidos, ajudando assim a compreender melhor o que foi ensino, e na prática entender como os problemas ocorrem e como eles podem ser resolvidos. Caso o leitor queira continuar seus estudos sobre esse assunto, existem maneiras de buscar essa mesma pesquisa utilizando as dissertações, os artigos e os livros referenciados. Buscamos fazer todo o embasamento teórico matemático, mas com o objetivo final de deixar claro que a transposição se faz necessária, pois aplicar esses conceitos da forma que o “saber sábio” aponta, traria não apenas dificuldades aos estudantes, mas também não consegue alcançar a melhor forma de compreender os conceitos, sendo assim, ir imediatamente para as definições e a formalidade, causa o distanciamento da intuição e imaginação do estudante, nos levando ao enrijecimento da matemática e a aversão das crianças e jovens do querer aprender mais.

REFERÊNCIAS

[1] MILIES, F.C.P. (São Paulo). IME (Org.). **A Matemática Interativa:** História da Matemática. Disponível em: <http:// https://matematica.br/historia/. Acesso em: 28 jul. 2022.

[2] LIMA, E. L. **Isometrias**. 14. ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática, 1995. 99 p.

[3] WAGNER, A. (Rio de Janeiro). Impa (Org.). **Disseminando o estudo da Matemática:** Clubes de Matemática da OBMEP. 20--. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-isometrias/>. Acesso em: 20 jul. 2022.

[4] DOMINGUINI, L. A transposição didática como intermediadora entre o conhecimento científico e o conhecimento escolar. **Revista Eletrônica de Ciências da Educação**, v. 7, n. 2, nov. 2008.

[5] JESUS, I. S. **Isometrias no plano: Uma abordagem aplicável ao ensino básico**. 2017. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2017.

[6] COSTA, D. E. V. **Isometrias na reta e no plano**. 2020. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Ouro Preto, Bahia, 2020.

[7] BULGARELLI, C. C. B. **Isometrias no ensino básico**. 2018. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2018.

[8] LIMA, C. H. **Grupos de simetrias no plano euclidiano**. 2017. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2017.

[9] COSTA, C. S. **Alguns grupos de isometrias na geometria euclidiana**. 2017. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2017.

[10] MOTOKI, M. E. **Aplicações da função logarítmica em sala de aula no ensino médio: Uma proposta de soluções de problemas pela transposição para a linguagem matemática**. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2016.

[11] SILVA, A. C. Filtros de imagens digitais: uma transposição didática para o ensino médio. 2018. Dissertação (PROFMAT) – Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2018.

[12] HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo, SP: Editora da Universidade de São Paulo: Poligono, 1970. 414 p.

[13] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** 5. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2013. 337 p.

[14] ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em:<http//www.enem.inep.gov.br/>. Acessado em agosto de 2019.

[15] ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http//www.enem.inep.gov.br/>. Acessado em agosto de 2019.

[16] SOUZA, J. A. Uma nota sobre a teoria de grupos: da teoria de Galois à teoria de Gauge. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 12, n. 24, (abril/2012 – agosto/2012). 2012.

[17] MELLO, L. A. A teoria da Transposição Didática de Chevallard, Izquierdo e de Mello (CHIM). Curso de Mecânica Quântica para programa de mestrado nacional profissional em ensino de física (MNPEF). Universidade Federal de Sergipe. 2019.

[18] KLEIN, F. (1927). Matemática Elemental desde un punto de vista superior. Trad. Roberto Araujo. v. II, Geometria. Madrid: Biblioteca Matemática.