Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Logaritmos e algumas aplicações

Luiz Antonio Tavares Rodrigues Feitosa

Juazeiro do Norte - CE

2022

Logaritmos e algumas aplicações

Luiz Antonio Tavares Rodrigues Feitosa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz

Juazeiro do Norte - CE

2022

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Feitosa, Luiz Antonio Tavares Rodrigues

F311l Logaritmos e algumas aplicações / Luiz Antonio Tavares Rodrigues Feitosa. Juazeiro do Norte - CE, 2022.

74p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz

1.Logaritmos, 2.Propriedades, 3.Aplicações; I.Título.

CDD: 510

Logaritmos e algumas aplicações

Luiz Antonio Tavares Rodrigues Feitosa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovoda em: 24 / 02 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
JOSE TIAGO NOGUEIRA CRUZ
Data: 19/11/2022 14:59:38-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz - Orientador (URCA)

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (URCA)

Ana Josicleide Maia

Profa. Dra. Ana Josicleide Maia (URCA)

Documento assinado digitalmente
FRANCISCA DAMIANA VIEIRA
Data: 14/12/2022 09:34:26-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Francisca Damiana Vieira (UFCA)

Dedico aos meus pais, à minha esposa, familiares e aos melhores amigos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela vida que tenho, pela saúde e força que me fazem buscar meus objetivos e tentar fazer do mundo um lugar melhor.

À minha Mãe, Maria Marlene Tavares Rodrigues, grande exemplo de mulher, por ser minha base, responsável pelo homem que sou, por me ensinar os valores e o que realmente importa na vida.

À minha família, em especial, meu pai, João Batista Feitosa Santos; irmãos, Lucas Tavares, Saulo Weslley e Pedro Lucas e minha tia Rita Tavares, pela confiança, respeito, carinho e estarem sempre comigo.

À minha esposa, Lívia Fernanda Ferreira de Freitas, que esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, que me ajudou quando fui acometido pela covid, que me fez continuar quando estava cansado e que me acalmava quando dizia que ficaria tudo bem apenas com um olhar.

Ao meu primo, George Ronan Pereira Pinheiro (*in memoriam*), uma pessoa inspiradora e um exemplo de profissional, que tanto me incentivou, apoiou meus estudos e que hoje sinto orgulho e saudades.

Aos meus melhores amigos, Luiz, Karlos Kelvin, Agnis, Elson, Raquel, Shayanny, Tássia, André, Shiller e Charleston, que estiveram muito presentes na minha vida, desde a época da escola e que mesmo distantes hoje em dia, sei que a amizade continua forte e que posso sempre contar com eles.

À minha instituição formadora, a Universidade Regional do Cariri (URCA), e a todos os seus professores e funcionários, pela contribuição acadêmica e profissional.

A todos os professores e profissionais que viabilizam, com excelência e maestria, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Ao meu orientador, José Tiago Nogueira Cruz, pela paciência, competência e por me conduzir da melhor maneira na construção dessa dissertação.

Aos meus colegas de turma, que me ajudaram muito nesse período e que juntos fizemos nossos momentos mais divertidos.

Aos professores, coordenadores e diretoras das escolas Prefeito Antônio Conserva Feitosa, Vera Cristo e Êxito do Cariri, pela paciência, compreensão nos momentos que precisei me ausentar, pelo incentivo aos meus estudos e por terem me proporcionado condições para eu me tornar um profissional melhor.

Agradeço aos que não foram citados, mas que de alguma forma me ajudaram nessa árdua trajetória.

“A educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo. ” (Paulo Freire)

Resumo

Os logaritmos representaram um grande avanço nos estudos da astronomia e da navegação, trazendo desenvolvimento e prosperidade. E hoje, é de grande importância o conhecimento de logaritmo, suas propriedades e aplicações em diversas áreas do conhecimento, principalmente para estudantes que estão ingressando na carreira acadêmica ou se preparando para ingressar, seja numa área relacionada a matemática ou não. O estudo dos logaritmos enfrenta algumas dificuldades por parte dos estudantes, seja pela deficiência na base do conhecimento necessário para compreensão ou pelo preconceito de achar o assunto difícil e não se motivar a tentar compreender. Sabendo disso, o presente trabalho apresenta uma abordagem simples e didática da definição, propriedades, funções, séries e algumas aplicações com logaritmos, aproximando os estudantes dos logaritmos, deixando de ser algo tão abstrato, mostrando que é algo muito importante para a sociedade e que ele poderá precisar fora da Matemática.

Palavras-chave: logaritmos; propriedades; aplicações.

Abstract

Logarithms represented a great advance in the studies of astronomy and navigation, bringing development and prosperity. And today, the knowledge of logarithm, its properties and applications in several areas of knowledge is of great importance, especially for students who are entering an academic career or preparing to enter, whether in an area related to mathematics or not. The study of logarithms faces some difficulties on the part of students, either because of the deficiency in the knowledge base necessary for understanding or because of the prejudice of finding the subject difficult and not being motivated to try to understand. Knowing this, the present work presents a simple and didactic approach to the definition, properties, functions, series and some applications with logarithms, bringing students closer to logarithms, ceasing to be something so abstract, showing that it is something very important for society and that he may need outside of Mathematics.

Keywords: logarithms; properties; applications.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Os logaritmos surgiram da necessidade de realizar cálculos de multiplicação e divisão de números muito grandes. Assim, os navegadores e astrônomos da época podiam facilitar os extensos e trabalhosos cálculos que enfrentavam em suas longas viagens. Então, em 1614, O escocês Jonh Napier (1550 – 1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisa, publicou os resultados de seus estudos, intitulado como teoria dos logaritmos. Na decodificação dos logaritmos, Napier usou uma constante que, embora não tenha descrito, foi a primeira referência ao notável e, descrito quase cem anos depois por Leonhard Euler, e que se tornou conhecido como número de Euler ou número de Napier.

Atualmente, temos softwares como o ZGrapher, Geogebra, Mathematica, entre outros e calculadoras científicas para realizar esses cálculos, mesmo assim, é de grande importância o conhecimento de logaritmo, suas propriedades e aplicações, principalmente para estudantes que estão ingressando na carreira acadêmica ou se preparando para ingressar, seja numa área relacionada a matemática ou não.

O primeiro contato do estudante com logaritmos se dá na primeira série do ensino médio, e durante os três anos, vê partes específicas que podem-se aplicar logaritmos, até a parte revisional na terceira série do ensino médio, já na preparação para os vestibulares.

O ensino de logaritmo apresenta grande resistência por parte dos estudantes, e em alguns casos até mesmo de professores, que enfrentam essa dificuldade na compreensão e aplicação das propriedades na resolução de situações problema envolvendo o conteúdo.

Muitas vezes o estudante acha que o problema está na definição de logaritmo, que é até simples de entender, mas a dificuldade pode estar nos conteúdos suporte para aplicação dessa definição e suas propriedades, conteúdos base que o aluno precisa compreender para que possa entender o conceito de logaritmo e aplicações.

Este trabalho visa contextualizar e simplificar o conceito de logaritmo, suas propriedades, funções, equações e aplicações na matemática e em outras áreas, como biologia, química, geografia e física, melhorando a compreensão do leitor, seja ele estudante ou professor.

2 POTENCIAÇÃO

A potenciação é uma operação que envolve multiplicações sucessivas de um número por ele mesmo. Nesta seção abordaremos a definição e algumas propriedades importantes.

Definição 1. *Dados $a \in \mathbb{R}_+ - \{0, 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos o número a^n*

- *Para $n = 1$, denotamos $a^1 = a$;*
- *Se $n = k \in \mathbb{N}$ com $k > 1$, definimos*

$$a^{k+1} = a \cdot a^k.$$

O valor a^n é chamado de potência de a, o natural n é o expoente e o número a é chamado de base.

Observação 2.1. *Para $a = 1$, a potência a^n é sempre igual a 1.*

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Usando a definição acima, obtemos a propriedade

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Mais geralmente, temos

i) Dados $m_1, m_2, \ldots, m_i \in \mathbb{N}$ temos

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_i} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_i};$$

ii) Dado $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Dividiremos a base da potência em dois casos:

Caso 1: $a > 1$.

Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos

$$a^{n+1} > a^n.$$

Portanto, se

$$a > 1$$

então

$$1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots .$$

Caso 2: $0 < a < 1$.

Nesse caso,

$$1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots .$$

Portanto, definindo a função

$$\begin{aligned} f \;:\; \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ n &\longmapsto a^n \end{aligned}$$

temos que f é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Note que f goza da seguinte propriedade

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

É possível estender o domínio da função f para os números inteiros. Para isso, dado

$a \in \mathbb{R}_+ - \{0, 1\}$, definimos a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ por $f(n) = a^n$. Se $n = 0$ temos

$$a^0 \cdot a = a^{0+1} = a.$$

Portanto, $a^0 = 1$. Agora, da igualdade

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

obtemos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Note que f é contínua[1] e

i) crescente para $a > 1$;

ii) decrescente quando $0 < a < 1$.

E mais, f satisfaz a igualdade

$$f(m + n) = f(m) \cdot f(n).$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

De fato,

$$f(m + n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n).$$

Agora, vamos estender o domínio da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ para o racionais.

Seja a^r. Suponha que $r = \dfrac{m}{n}$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$.

[1] Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. A demonstração pode ser encontrada no livro Análise Real volume 1, do autor Elon Lages Lima.

Segue que

$$\begin{aligned}(a^r)^n &= a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r \\ &= a^{n \cdot r} \\ &= a^{n \cdot \frac{m}{n}} \\ &= a^m.\end{aligned}$$

Portanto,

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Além disso, denotando $r = \dfrac{m}{n}$ como anteriormente, e $s = \dfrac{u}{v}$ nas mesmas condições, temos que

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

seja qual for $r, s \in \mathbb{Q}$.

De fato, como sabemos

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mv}{nv}} = \sqrt[nv]{a^{mv}},$$

e também

$$a^s = \sqrt[v]{a^u} = a^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{nu}{nv}} = \sqrt[nv]{a^{nu}}.$$

E assim

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[nv]{a^{mv}} \cdot \sqrt[nv]{a^{nu}} = \sqrt[nv]{a^{mv} \cdot a^{nu}} = \sqrt[nv]{a^{mv+nu}} = a^{\frac{mv+nu}{nv}}.$$

Portanto

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{mv+nu}{nv}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{u}{v}} = a^{r+s}.$$

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$, definida como sendo

$$f(r) = a^r,$$

ainda é contínua e satisfaz as propriedades citadas acima.

Vamos agora estender o domínio da f para o conjunto dos números reais, ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Dessa maneira, devemos analisar a potência a^x, onde $x \in \mathbb{R}$. Essa nova função pode ser definida usando a continuidade da função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ e a densidade dos números racionais $\mathbb{Q}$ sobre os números reais $\mathbb{R}$ para aproximar qualquer irracional via sequência de números racionais. Outra maneira de calcular o número a^x é usando aproximações racionais por falta e por excesso. Veja o livro *Fundamentos de Cálculo Numérico*, do autor Dornelles Filho.

3 LOGARITMOS E SUAS PROPRIEDADES

Podemos definir o logaritmo considerando dois números reais a e b positivos e $b \neq 1$. Denomina-se logaritmo de a na base b o número x de modo que $b^x = a$. Assim, dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a,$$

onde:

- a é o logaritmando;
- b é a base do logaritmo;
- x é o logaritmo.

Como consequência da definição de logaritmos, considerando a, b e c positivos e $b \neq 1$, temos as seguintes propriedades:

a) Quando logaritmando e base são iguais, o logaritmo é 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a.$$

b) Quando o logaritmando é 1, independente da base, o logaritmo é igual a 0.

$$\log_b 1 = 0, \text{ pois } b^0 = 1.$$

c) Em qualquer base b, com $0 < b \neq 1$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_b a^x = x \cdot \log_b a.$$

Considerando $\log_b a = m$ e $\log_b a^x = n$, temos:

$b^m = a$;

$b^n = a^x \Rightarrow b^n = (b^m)^x \Rightarrow n = x \cdot m$, logo $\log_b a^x = x \cdot \log_b a$.

d) Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos são iguais.

$$\log_b a = \log_b c \Rightarrow a = c.$$

Considerando $\log_b a = m$ e $\log_b c = n$, temos:

$b^m = a$;

$b^n = c$;

$m = n \Rightarrow b^m = b^n, \text{ pois } 0 < b \neq 1, \; logo \; a = c.$

e) Uma potência de base b e expoente $\log_b a$ é igual a a.

$$b^{\log_b a} = a$$

Considerando $b^{\log_b a} = m$ e $\log_b a = n$, temos:

$m = b^{\log_b a} \Rightarrow m = b^n \Rightarrow \log_b m = n \Rightarrow \log_b m = \log_b a \Rightarrow m = a.$

Logo, $b^{\log_b a} = a$.

f) O logaritmo de a na base b, essa base elevada à x, é igual ao produto entre o inverso de x e logaritmo de a na base b.

$$\log_{b^x} a = \frac{1}{x} \cdot \log_b a.$$

Considerando $\log_b a = m$ e $\log_{b^x} a = n$, temos:

$b^m = a$;

$(b^x)^n = a$;

$b^m = b^{xn} \Rightarrow m = xn \Rightarrow n = \dfrac{1}{x} \cdot m.$

Logo, $\log_{b^x} a = \dfrac{1}{x} \cdot \log_b a.$

Ainda considerando a, b e c positivos e $b \neq 1$, vejamos as proposições operatórias:

Proposição 3.1. *Adição de logaritmos de mesma base.*

$$\log_b a + \log_b c = \log_b(a \cdot c).$$

Demonstração:

Considerando $\log_b a = m$ *e* $\log_b c = n$, *temos:*

$\log_b a = m \Rightarrow a = b^m$ *(I);*

$\log_b c = n \Rightarrow c = b^n$ *(II);*

Multiplicando (I) e (II):

$ac = b^m \cdot b^n \Rightarrow ac = b^{m+n} \Rightarrow m + n = \log_b(a \cdot c).$

Portanto, $\log_b a + \log_b c = \log_b(a \cdot c).$

Proposição 3.2. *Subtração de logaritmos de mesma base.*

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\frac{a}{c}\right).$$

Demonstração:

Considerando $\log_b a = m$ *e* $\log_b c = n$, *temos:*

$\log_b a = m \Rightarrow a = b^m$ *(I);*

$\log_b c = n \Rightarrow c = b^n$ *(II);*

Dividindo (I) e (II):

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b^m}{b^n} \Rightarrow \dfrac{a}{c} = b^{m-n} \Rightarrow m - n = \log_b \left(\dfrac{a}{c}\right).$

Portanto, $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\dfrac{a}{c}\right).$

Proposição 3.3. *Mudança de base.*

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, com\ 0 < c \neq 1.$$

Demonstração:

Considerando $\log_b a = m$ *e* $\log_b c = n$*, temos:*

$\log_b a = m \Rightarrow a = b^m$ *(I);*

$\log_c a = n \Rightarrow a = c^n$ *(II);*

De (I) e (II):

$b^m = c^n \Rightarrow n = \log_c b^m \Rightarrow n = m \cdot \log_c b \Rightarrow \log_c a = \log_b a \cdot \log_c b \Rightarrow \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}.$

Podemos destacar também o Cologaritmo e o Antilogaritmo, como propriedades dos logaritmos. Essas duas propriedades são pouco notórias, mas podem nos ajudar nas soluções de problemas específicos.

Denomina-se o cologaritmo de a na base b, o oposto do logaritmo de a na base b ou, por propriedade, o logaritmo do inverso de a na base b, considerando a e b reais positivos com $b \neq 1$.

$$co \log_b a = -\log_b a = \log_b \frac{1}{a}.$$

Se $\log_b a = x$, então a é o antilogaritmo de x na base b, também considerando a e b reais positivos com $b \neq 1$.

$$\log_b a = x \Rightarrow a = anti \log_b x.$$

As proposições 3.1 e 3.2, garantem que o objetivo de Napier foi atingido, transformando as multiplicações e divisões em adições e subtrações, conseguindo assim, facilitar o trabalho dos cientistas nos cálculos.

O conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos nessa base, é denominado sistema de logaritmos na base b. Diante dos diversos valores que podem assumir a base do logaritmo, podemos destacar dois muito importantes: A base 10 e o número de Euler.

Os logaritmos de base 10 formam o sistema de logaritmos decimais, representados por $\log_{10} x$ ou simplesmente $\log x$, ou seja, quando não houver indicador na base, esta será uma base 10. O sistema de logaritmos decimais é muito útil nos cálculos em que são necessárias potências de base 10. Nesses cálculos, quando é necessário operar com esses valores, são utilizados procedimentos reversos à potenciação.

O número de Euler é um número irracional com valor aproximado de $2,7182818$ e representado por e. Os logaritmos de base e formam o sistema de logaritmos neperianos, em homenagem a John Napier, ou sistema de logaritmos naturais. Para qualquer $x > 0$, o logaritmo neperiano $\log_e x$ é indicado por $\ln x$ e lê-se logaritmo natural de x.

3.1 Tábua de logaritmos

Dado qualquer número real positivo x, estará compreendido entre duas potências de 10 com expoente inteiros consecutivos.

Assim, dado $x > 0$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$10^c \leq x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^c \leq \log x < \log 10^{c+1} \Rightarrow c \leq \log x < c + 1.$$

Então, podemos afirmar que

$$\log x = c + m, \ onde \ c \in \mathbb{Z} \ e \ 0 \leq m < 1,$$

isto é, o logaritmo decimal de x é a soma de um número inteiro c com um número decimal m não negativo e menor que 1.

Por exemplo:

- $x = 0,03 \Rightarrow 10^{-2} < 0,03 < 10^{-1}$
- $x = 0,351 \Rightarrow 10^{-1} < 0,351 < 10^{0}$
- $x = 41,8 \Rightarrow 10^{1} < 41,8 < 10^{2}$

O número inteiro c é por definição chamada característica do logaritmo de x e o número decimal m $(0 \leq m < 1)$ é, por definição, chamada mantissa do logaritmo decimal de x.

A característica do logaritmo decimal de um número x real positivo será calculada por uma das duas condições seguintes:

- Quando $x > 1$:

  A característica do logaritmo decimal de um número $x > 1$ é igual ao número de algarismos de sua parte inteira, menos 1.

  Como $x > 1$ e x tem $(n+1)$ algarismos na sua parte inteira, então temos:

  $$10^n \leq x < 10^{n+1} \Rightarrow \log 10^n \leq \log x < \log 10^{n+1} \Rightarrow n \leq \log x < n+1$$

  isto é, a característica de $\log x$ é n.

  Por exemplo, em $\log 3,5$ a característica é $c = 0$, em $\log 108$ a característica é $c = 2$.

- Quando $0 < x < 1$:

  A característica do logaritmo decimal de um número $0 < x < 1$ é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

Seja $0 < x < 1$ e x tem n algarismos zeros precedendo o primeiro algarismo não nulo, temos então:

$$10^{-n} \leq x < 10^{-n+1} \Rightarrow \log 10^{-n} \leq \log x < \log 10^{-n+1} \Rightarrow -n \leq \log x < -n+1,$$

isto é, a característica de $\log x$ é $-n$.

Por exemplo, em $\log 0,025$ a característica é $c = -2$, em $\log 0,8$ a característica é $c = -1$.

Observe que a mantissa do logaritmo decimal de x não se altera se multiplicarmos x por uma potência de 10 com expoente inteiro.

Considerando $p \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\log(10^p \cdot x) - \log x = \log\left(\frac{10^p \cdot x}{x}\right) = \log 10^p = p \in \mathbb{Z}.$$

Como consequência disso, os logaritmos de dois números cujas representações decimais diferem apenas pela posição da vírgula tem mantissas iguais.

Assim os logaritmos decimais dos números 5, 500, 5000, 0,5; 0,005 tem todos a mesma mantissa 0,6990; mas as características são respectivamente 0, 2, 3, -1 e -3.

A mantissa pode ser obtida através da tábua de logaritmos. Em geral, a mantissa é um número irracional e por esse motivo as tábuas de logaritmos são tabelas que fornecem os valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros, geralmente de 1 a 10000.

A primeira tábua de logaritmos foi construída por Henry Briggs (1561-1631), um dos primeiros e mais entusiastas do trabalho de Neper. Os primeiros logaritmos neperianos tinham sérios inconvenientes e foram logo modificados pelo próprio Neper e por Briggs. O resultado foi o aparecimento dos logaritmos de Briggs, ou logaritmos decimais. Briggs publicou sua primeira tábua em 1617; depois, em versão bem mais ampliada, em 1624.

Briggs começou extraindo a raiz quadrada de 10, seguida das extrações sucessivas das raízes quadradas dos resultados obtidos em cada extração. Isso equivale a elevar 10 aos expoentes $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ e assim sucessivamente.

Assim,

$$\sqrt{10} = 3,1622 \Rightarrow \log 3,1622 = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$10^{1/4} = \sqrt{3,1622} = 1,7783 \Rightarrow \log 1,7783 = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$10^{1/8} = \sqrt{1,7783} = 1,3352 \Rightarrow \log 1,3352 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Briggs usou esse procedimento de ir extraindo a raiz quadrada sucessivamente por 54 vezes, ou seja, elevou 10 até o expoente $\frac{1}{2^{54}}$ e obteve os logaritmos de vários números. Ele foi aumentando sua tabela, utilizando os resultados já obtidos e as propriedades dos logaritmos, por exemplo:

$$\log(10^{1/2} \cdot 10^{1/4}) = \log 10^{1/2} + \log 10^{1/4};$$

$$\log(3,1622 \cdot 1,7783) = 0,5 + 0,25;$$

$$\log 5,6234 = 0,75.$$

Vejamos abaixo a tábua de logaritmos decimais, que na verdade trata-se de uma tabela contendo não logaritmos, mas somente mantissas de logaritmos na base dez.

Para obtermos a mantissa do $\log 0,000504$ através da tabela, vamos transformar o número 0,000504 em um número de três algarismos, entre 1,00 e 9,99, simplesmente

Figura 3.1: Tábua de logaritmos I

Mantissas										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7464	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Iezzi, 1977

Figura 3.2: Tábua de logaritmos II

Mantissas										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Iezzi, 1977

mudando a posição da vírgula para a direita do primeiro algarismo diferente de zero:

$$0,000504 \Rightarrow 5,04$$

Agora vamos separar o 5,04 em duas partes. O terceiro algarismo (4) será utilizado para identificarmos a coluna na tabela e o número 50, formado pela outra parte (5,0) sem a vírgula, será utilizado para identificar a linha da mantissa na tabela.

Procurando na tabela vemos que no cruzamento da linha 50 com a coluna 4 temos exatamente a mantissa 7024. Note na linha 50 estão as mantissas dos números de três algarismos de 5,00 a 5,09. A mantissa do número 5,04 está justamente na coluna 4.

Esta é a mantissa do log 0,000504 e de qualquer outro número que difira de 0,000504 apenas pela posição da vírgula, como 0,0504, 5,04, 504, 50400, ...

Podemos obter, a partir da tabela acima, a mantissa do logaritmo de qualquer número real positivo, que após a colocação da vírgula à direita do primeiro algarismo diferente de zero, resulte em um número com até três algarismos.

Existem números cujas mantissas de seus logaritmos não se encontram na tabela. Nesses casos, para determiná-los, utiliza-se um processo chamado interpolação logarítmica.

Para calcular $\log 57,65$, a mantissa de $57,65$ é a mesma de 57650, de 5765, de 576,5 e assim por diante. Dentre eles, podemos escolher $576,5$ para escolher sua mantissa, porém na tabela só podemos encontrar as mantissas de 576 e 577.

Como a mantissa de 576 é 7604 e a mantissa de 577 é 7612, a mantissa de $576,5$ está compreendida entre 7604 e 7612. Assim, por interpolação, temos:

$$\frac{576 - 576,5}{576,5 - 577} = \frac{7604 - k}{k - 7612} \Rightarrow k = 7608.$$

Dessa forma, a mantissa de $576,5$ é $0,7608$ e o $\log 57,65$ é $1,7608$.

3.2 Logaritmos em uma série

Como $\ln x$ não tem sentido para $x = 0$, consideraremos a função $\ln(1 + x)$, definida para todo $x > -1$. Por definição,

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{(1 + t)}.$$

Integrando termo a termo a série de Taylor,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x},\ x \neq -1.$$

Obtemos,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

é a série de Taylor de $\ln(1+x)$, convergente no intervalo aberto $(-1,1)$, pois 1 é seu raio de convergência.

Trocando x por $-x$ nessa série, obtemos também,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

finalmente, subtraindo uma série da outra, obtemos uma série para a função,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

ou seja,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\cdot\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right).$$

Essa série permite calcular o logaritmo natural de qualquer número. De fato, à medida que x varia no intervalo $-1 < x < 1$, $y = \dfrac{(1+x)}{(1-x)}$ varia de zero a infinito.

Integrando termo a termo o desenvolvimento finito de $\dfrac{1}{(1+x)}$ visto acima, obtemos até a ordem n:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

onde

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Para $x = 1$, temos $|r_n(1)| \leq \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$.

Portanto $\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0$. Segue que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

Essa é uma expressão interessante de $\ln 2$ como soma de uma série alternada. Ela mostra que a série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n/n$ coincide com $\ln(x+1)$ quando $|x| < 1$ e $x = 1$, mas diverge para $x = -1$, logo representa $\ln(x+1)$ no intervalo $(-1, 1]$.

4 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

A função logarítmica, bem como sua inversa, a exponencial, são ferramentas para demonstrar matematicamente a evolução de grandezas, nas quais o crescimento ou decrescimento são proporcionais à quantidade dessa grandeza em um determinado tempo, apresentado inúmeras aplicações que modelam fenômenos cotidianos em diversas áreas como biologia, física, química e geografia.

Definiremos a Função Exponencial de acordo com Lima (2012,v.1) [11]:

Definição 2. *Seja a um número real positivo e diferente de* 1*. A função exponencial de base* a*,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, indicada pela notação* $f(x) = a^x$*, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$*;*

b) $a^1 = a$*;*

c) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$ *e* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ *quando* $0 < a < 1$*.*

Como decorrência dessas propriedades, temos:

d) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, tal que $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;

De fato, todo intervalo de $\mathbb{R}_+$ contém valores a^r, $r \in \mathbb{Q}$, provando que f cresce sem limites quando $x > 0$ com $a > 1$ e quando $x < 0$ com $0 < a < 1$.

Essa propriedade reitera o fato de que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \ \ se\ a > 1\ e$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \ \ se\ 0 < a < 1.$$

e) A função exponencial é contínua;

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Ou seja, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Fazendo $x = x_0 + h$, temos $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, sabemos que a^h pode ser tomado tão próximo de 1 quanto desejemos , desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, logo $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

f) A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é bijetiva, logo, admite inversa.

A injetividade de f decorre de sua monotonicidade. Se $a > 1$, então

$$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \; e \; x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Portanto $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$. De modo análogo chegamos à essa conclusão para $0 < a < 1$. Agora vamos provar que f é sobrejetora, ou seja, que para todo número real $y > 0$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$. Por propriedade temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, que pertence ao intervalo $\left(y - \dfrac{1}{n}, y + \dfrac{1}{n}\right)$. Logo, $|a^{r_n} - y| < \dfrac{1}{n}$, e assim vale, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = y$. Suponhamos $a > 1$, e escolhemos potências a^{r_n} que se aproximam por falta de y com a propriedade $a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < y$. Como a função exponencial é ilimitada superiormente, podemos assegurar que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $y < a^s$.

Usando a monotonicidade de f, verificamos que

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s.$$

Portanto, (r_n) é uma sequência monótona e limitada superiormente por s. Usando o Axioma da Completeza, os valores r_n se aproximam por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Como f é contínua, obtemos

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = y.$$

Assim f é sobrejetora. O caso $0 < a < 1$ é provado de modo análogo.

Agora, vamos caracterizar a Função Exponencial. A caracterização aqui proposta é a encontrada em Lima (2012,v.1) [11]:

Teorema 4.1. *(Caracterização da função exponencial)*

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente, são equivalentes as seguintes informações:

1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2).

Iniciemos provando que a hipótese (1) é válida para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $f(rx) = f(x)^r$. Escrevendo $nr = m$, temos

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Se fixarmos $f(1) = a$, teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \ \textit{para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Agora suponhamos que f seja crescente. Então $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é provado de modo análogo), então pelo que já vimos, existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x \Rightarrow f(x) < f(r) < a^x.$$

Como f é crescente, então $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$. Mas $a^r < a^x \Rightarrow r < x$. Assim temos uma contradição, provando que (1) $\Rightarrow$ (2) quando f for crescente. A prova é análoga se f for decrescente.

(2) $\Rightarrow$ (3).

Seja $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

(3) $\Rightarrow$ (1).

Seja $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = \underbrace{f(x + x + x + \cdots + x)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \ldots f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n.$$

Agora falta provarmos o caso $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso

$f(-x)$. Então

$$f(-x)\cdot f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo

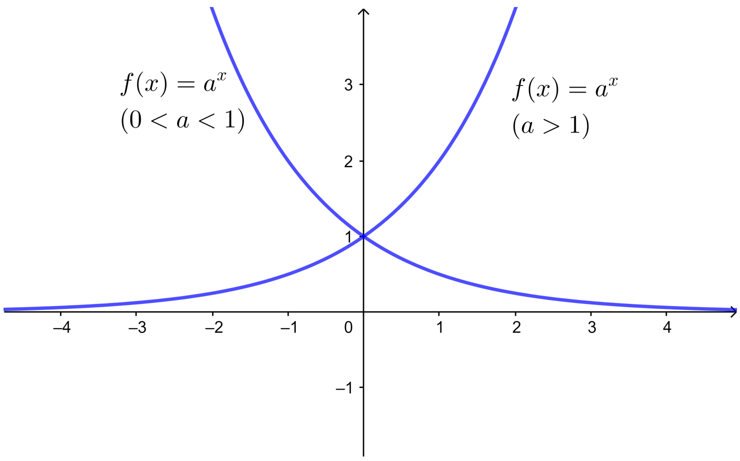
$$f(-nx) = \underbrace{f(-x-x-x\cdots-x)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f(-x)\cdot f(-x)\cdots f(-x)}_{n \text{ vezes}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdots\frac{1}{f(x)}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}.$$

□

A figura abaixo exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Figura 4.1: Esboço do gráfico da função $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$



Fonte: Autor (Software Geogebra)

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. A medida que x cresce, o crescimento de y torna-se cada vez mais acelerado.

De modo geral, a função $f(x) = a^x$ é crescente em todo o seu domínio quando $a > 1$

e é decrescente em todo o seu domínio quando $0 < a < 1$.

Tal característica também acompanha sua inversa, já que a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, portanto possui uma função inversa, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Tomando como inversa da função exponencial f a função: $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa, devemos ter:

$$\log_a(a^x) = x \ e \ a^{\log_a x} = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Segue-se, por propriedade, que

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

Agora, vamos caracterizar a Função Logarítmica. A caracterização aqui proposta é a encontrada em Lima (2012,v.1) [11]:

Teorema 4.2. *(Caracterização da função logarítmica)*

Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Admitamos f crescente e se for decrescente, será tratado analogamente. Temos que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Inicialmente, vamos supor que exista $a \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional.

Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = f(a) + f(a) + f(a) + \cdots + f(a)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = m.$$

Então,

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}) \Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $r \cdot n = m$, logo $m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$. Portanto,

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então para $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim, todo número racional r, menor do que x, é também menor que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo número racional s, maior do que x, é também maior que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto se $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$ pois $f(x) = a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y).$$

Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$ vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)};\ com\ a = 2^{1/b}$$

Aplicando $\log_a$ em ambos os membros, temos:

$$g(x) = \log_a x.$$

□

Como consequência do Teorema 4.2 acima, teremos uma série de propriedades importantes das funções logarítmicas:

a) Uma função logarítmica $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.
Se $x, y \in \mathbb{R}_+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, pelo Teorema 4.2, como f é monótona, vamos fixar como crescente, resulta que $f(x) < f(y)$. No segundo caso tem-se $f(y) < f(x)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se $f(x) \neq f(y)$, portanto a função é injetiva.

b) O logaritmo de 1 é zero.

De fato, temos

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1), \ logo \ f(1) = 0.$$

c) Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números entre 0 e 1 têm logaritmos negativos.

De fato, sendo f crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, ou seja $f(x) < 0 < f(y)$.

d) Para todo $x > 0$, tem-se $f(1/x) = -f(x)$.

Como $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ temos que $f(x) + f(1/x) = f(1) = 0$, portanto $f(1/x) = -f(x)$.

e) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$, vale $f(x/y) = f(x) - f(y)$.

Como $f(x/y) = f\left(x \cdot \dfrac{1}{y}\right) = f(x) + f(1/y) = f(x) - f(y)$.

f) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e todo número racional $r = p/q$ tem-se $f(x^r) = r \cdot f(x)$.

Primeiro verificamos se a propriedade funciona para $r = n \in \mathbb{N}$.

(i) Para $n = 1$, temos:

$$f(x^1) = f(x) = 1 \cdot f(x).$$

(ii) Por outro lado, supondo $f(x^n) = n \cdot f(x)$, temos que:

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x^1) = f(x^n) + f(x) = n \cdot f(x) + 1 \cdot f(x) = (n+1) \cdot f(x).$$

Demonstrando por indução matemática a propriedade para $n \in \mathbb{N}$. Quando $r = 0$, a propriedade também vale, pois como $x^0 = 1$ para todo número real positivo, temos que $f(x^0) = f(1) = 0 = 0 \cdot f(x)$.

Consideremos agora $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$. Logo, $f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = f(1) = 0$, então, $f(x^{-n}) = -f(x^n) =$

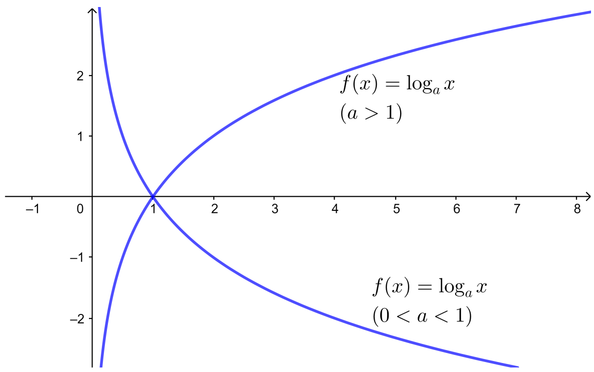
$-n \cdot f(x)$.

Finalmente, o caso geral, em que $r = p/q$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ teremos: $(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$, logo $q \cdot f(x^r) = p \cdot f(x)$ temos que $f(x^r) = (p/q) \cdot f(x)$, ou seja,

$$f(x^r) = r \cdot f(x).$$

Analisaremos o comportamento da função logarítmica através do gráfico de $f(x) = \log_a x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

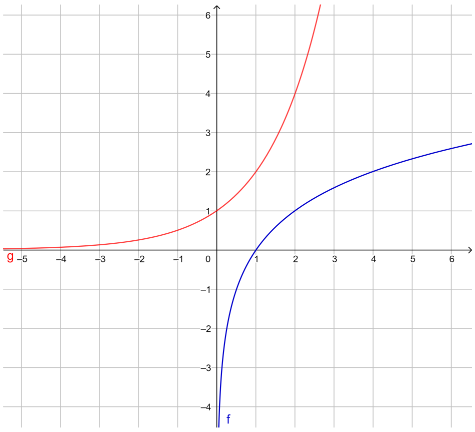
Figura 4.2: Esboço do gráfico da função $f(x) = \log_a x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$



Fonte: Autor (Software Geogebra)

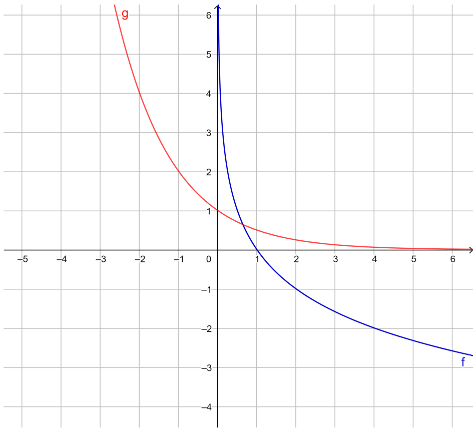
Observando o gráfico esboçado acima, podemos indicar que o domínio é $\mathbb{R}_+^*$; a imagem é $\mathbb{R}$ e a função $f(x) = \log_a x$ é crescente em todo o seu domínio se $a > 1$ e decrescente em todo o seu domínio, se $0 < a < 1$. Esse crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelo gráfico abaixo, que, como sabemos, são simétricos em relação à diagonal de $\mathbb{R}^2$.

Figura 4.3: Funções $g(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$



Fonte: Autor (Software Geogebra)

Figura 4.4: Funções $g(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$



Fonte: Autor (Software Geogebra)

Notemos, em cada esboço, a simetria dos gráficos em relação aos quadrantes ímpares e analisando os gráficos das funções exponenciais, podemos destacar que o domínio e contradomínio são $\mathbb{R}$ e a imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

5 LOGARITMO E EXPONENCIAL SOB O PONTO DE VISTA DO CÁLCULO

Definiremos a função real $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0.$$

O número $\ln x$ é o logaritmo natural de x e a existência dessa função depende do fato de a integral de uma função contínua sempre existir.

Sobre os extremos do intervalo de integração, temos:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \ e \ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Com isso, $\ln 1 = 0$, $\ln x < 0$ se $0 < x < 1$ e $\ln x > 0$ quando $x > 1$, por ser a integral da função positiva $\dfrac{1}{t}$ no intervalo $[1, x]$.

A função $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é monótona crescente e derivável, com $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, sendo infinitamente derivável.

Agora, usaremos esta regra de derivação para demonstrar as seguintes propriedades sobre a função logaritmo.

Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então teremos as seguintes propriedades sobre a função logarítmo:

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Temos:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln x + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Quando s varia de 1 a y, o produto xs varia de x a xy. Assim a mudança de variável $t = xs$, $dt = xds$ nos dá:

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{xds}{sx} = \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln y.$$

Portanto, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

Usando a Propriedade a) com $x = \frac{1}{y}$, temos:

$$\ln\frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y}\cdot y\right) = \ln 1 = 0.$$

Assim,

$$\ln\frac{1}{y} = -\ln y.$$

Usando a Propriedade a) novamente, temos:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

Portanto, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

c) $\ln(x^r) = r\cdot\ln x$

Consideremos um número natural n. Segue-se diretamente da propriedade a) que $\ln(x^n) = n\cdot\ln x$. Como $x^n\cdot x^{-n} = 1$, temos:

$$0 = \ln 1 = \ln(x^n\cdot x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n}) = n\cdot\ln x + \ln(x^{-n})$$

E, portanto,

$$\ln(x^{-n}) = -n\cdot\ln x.$$

Fica estabelecida a propriedade quando $r \in \mathbb{Q}$.

De modo geral, temos $r = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros.

Por definição, temos $(x^{p/q})^q = x^p$, daí $p \cdot \ln x = \ln(x^p) = \ln[(x^{p/q})^q] = q \cdot \ln(x^{p/q})$.

Segue-se que $\ln(x^{p/q}) = \frac{p}{q} \ln x$.

Agora, determinaremos os limites da função $\ln x$:

Usando a propriedade c) com $x = 2$ e $r = n$, onde n é um inteiro positivo arbitrário, temos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Como $\ln 2 > 0$, segue que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Mas $\ln x$ é uma função crescente, já que sua derivada $\frac{1}{x} > 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

Se tomarmos $t = \frac{1}{x}$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Então, aplicando no limite determinado acima, temos:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln \left(\frac{1}{t} \right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Agora, sabemos que $\ln x$ é ilimitada superior e inferiormente, é contínua e sua imagem é um intervalo, logo é sobrejetiva. Sendo uma função crescente, ln é uma bijeção de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa, $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é a função exponencial, definida como $exp(x) = y \Leftrightarrow \ln y = x$, ou seja, $\ln(exp(x)) = x$ e $exp(\ln y) = y$.

Observação 5.1. *Existe um único número real cujo logaritmo natural é igual a 1. Ele* *é muito importante e é denotado por e. E assim, definimos,*

$$\ln e = 1$$

Esta definição é consistente com a definição do número e como um limite.

O teorema a seguir demonstra o número e como um limite.

Teorema 5.1.

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Demonstração. Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, logo $f'(1) = 1$.
Pela definição de derivada, temos:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Como $f'(1) = 1$, temos:

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Assim, pela continuidade da função exponencial e propriedades de limite, temos:

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$\square$

6 APLICAÇÕES COM LOGARITMOS

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento, tais como: Física, Geografia, Química e Biologia. Apresentaremos algumas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento.

6.1 Matemática Financeira

Na Matemática Financeira, mais precisamente na parte dos Juros Compostos, aplicamos constantemente os logaritmos. Quando nos deparamos com a fórmula do montante $M = C \cdot (1+i)^t$, em que a variável do período é exponencial, precisamos descobri-la, recorremos ao logaritmo e suas propriedades operatórias.

Os juros compostos são importantes nas relações comerciais, como financiamentos, empréstimos, compras com parcelas a longo prazo e é importante conhecer os fatores que influenciam o seu cálculo, que são o capital (C), a taxa de juros (i), o tempo (t) e o montante (M).

Analisando a fórmula para o montante, podemos fazer algumas considerações:

$$M = C \cdot (1+i)^t \Rightarrow \frac{M}{C} = (1+i)^t \Rightarrow t = \log_{1+i} \frac{M}{C}.$$

Com $1+i > 0$ e $1+i \neq 1$, ou seja, $i > -1$ e $i \neq 0$.

Vejamos uma situação em que um capital de R$ 5000,00 é aplicado à uma taxa de juros compostos de 20% ao ano, para sabermos em quanto tempo esse capital vai gerar um montante de R$ 6000,00.

Para encontrarmos o período, podemos utilizar a fórmula em que o tempo fica em função do logaritmo. Lembrando que os 20% são 0,2 na fórmula. Então teremos:

$$t = \log_{1+i} \frac{M}{C} \Rightarrow t = \log_{1+0,2} \frac{6000}{5000} \Rightarrow t = \log_{1,2} 1,2 \Rightarrow t = 1 \ ano.$$

Portanto, o capital aplicado vai gerar um montante de R$ 6000,00 em 1 ano.

Considere uma situação em que uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 em uma determinada instituição financeira, que paga juros mensais de 3%, no regime de juros compostos. Vamos determinar em quanto tempo após a aplicação o montante atingirá R$ 2000,00.

$$M = C \cdot (1+i)^t \Rightarrow 2000 = 500 \cdot (1+0,03)^t \Rightarrow \frac{2000}{500} = 1,03^t \Rightarrow 4 = 1,03^t$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros e considerando $\log 4 = 0,602$ e $\log 1,03 = 0,012$, temos:

$$4 = 1,03^t \Rightarrow \log 4 = \log 1,03^t \Rightarrow \log 4 = t \cdot \log 1,03 \Rightarrow \frac{\log 4}{\log 1,03} = t$$

$$t = \frac{0,602}{0,012} \Rightarrow t \cong 50,16 \ meses.$$

Portanto, o montante atingirá R$ 2000,00 após aproximadamente 50 meses da aplicação.

6.2 Lei de Benford

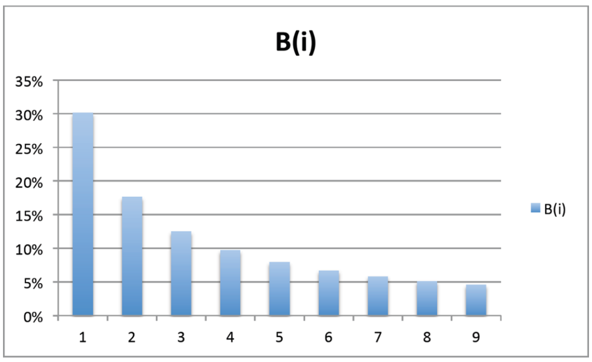
Segundo Chavante (2016), antes das calculadoras, os livros com tabelas logarítmicas eram utilizados para facilitar os cálculos com números grandes, ou seja, números com muitos algarismos. Em 1881, o astrônomo Simon Newcomb percebeu que as primeiras páginas desses livros, que continham logaritmos de números iniciados com os algarismos $1, 2$ e 3, estavam bem mais desgastadas que as demais.

Para ele, isso foi indício de que os cálculos com números grandes começados com $1, 2$ e 3 são muito mais frequentes do que com os iniciados com $7, 8$ e 9, por exemplo. Conforme seu interesse, Newcomb escreveu um artigo sobre a frequência dos primeiros dígitos significativos de um número, que segue uma determinada distribuição de probabilidade. O primeiro algarismo significativo de um número positivo é o dígito não nulo, mais à esquerda em sua representação decimal. Por exemplo, o primeiro algarismo significativo de $5,167$ é o 5, o de $0,065$ é o 6.

Em 1938, o físico Frank Benford, sem ter conhecimento do artigo de Newcomb, após analisar mais de 20000 números (taxa de mortalidade, quantidade da população, área de rios, entre outros dados), verificou que a distribuição dos primeiros dígitos significativos seguia certa regularidade e demonstrou uma fórmula para determinar tal padrão de probabilidade, a Lei de Benford.

A lei de Benford afirma que números coletados de maneira aleatória, apresentam probabilidade de frequência de seus primeiros dígitos significativos de 30% para o dígito 1 e apenas $4,5\%$ para o dígito 9. Abaixo segue uma tabela com os resultados da Lei de Benford.

Figura 6.1: Resultados da Lei de Benford



Fonte: Nectoux, 2012

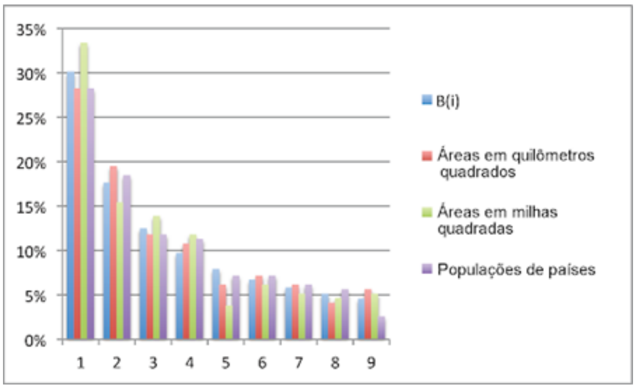
A frequência $B(i)$ do primeiro dígito significativo i, de números aleatórios é

$$B(i) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{i}\right), com\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Algo bem interessante nessa lei é que muitos conjuntos que não são aleatórios também se encaixam: populações de países, de comprimentos, de áreas e outros. Além disso, esta lei é uma das únicas que não varia por mudança de escala, ou seja, a medição pode ser em metros ou quilômetros que a probabilidade dos números se mantém constante.

Na tabela abaixo temos estatísticas de áreas e populações relacionadas com a Lei de Benford.

Figura 6.2: Estatísticas de áreas e populações relacionadas com a Lei de Benford



Fonte: Nectoux, 2012

Muitas empresas de auditoria utilizam programas baseados na Lei de Benford, essa lei é muito importante na detecção de fraudes, sonegações de impostos, erros e manipulações de demonstrações contábeis, nas eleições, entre outras ocorrências. São resultados confiáveis e não variam por mudança de escala.

Baseado nessas informações, fizemos a análise da tabela abaixo:

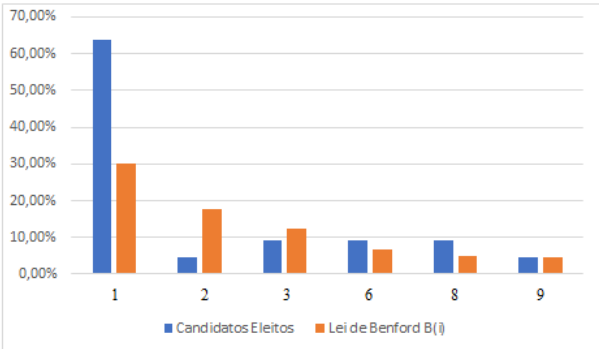
Figura 6.3: Resultado das eleições para deputado federal no Ceará em 2018

Deputados Federais Eleitos pelo Ceará em 2018			
Pos	Candidato (Partido)	Nº de Votos	1º dígito significativo
1	Capitão Wagner (Pros)	303.593	3
2	Célio Studart (PV)	208.854	2
3	Luizianne (PT)	173.777	1
4	Guimarães (PT)	173.039	1
5	Idilvan (PDT)	154.338	1
6	Mauro Filho (PDT)	157.510	1
7	AJ Albuquerque (PP)	132.319	1
8	Robério Monteiro (PDT)	131.275	1
9	Moses Rodrigues (MDB)	128.526	1
10	Pedro Bezerra (PTB)	119.030	1
11	Genecias Noronha (Solidariedade)	113.515	1
12	Domingos Neto (PSD)	111.154	1
13	Denis Bezerra (PSB)	111.154	1
14	André Figueiredo (PDT)	103.385	1
15	Roberto Pessoa (PSDB)	102.470	1
16	Leônidas Cristino (PDT)	102.417	1
17	Heitor Freire (PSL)	97.201	9
18	Eduardo Bismarck (PDT)	87.009	8
19	José Aírton (PT)	87.009	8
20	Júnior Mano (Patriotas)	67.917	6
21	Dr. Jaziel (PR)	67.917	6
22	Vaidon Oliveira (Pros)	30.392	3

Fonte: G1

Calculando a probabilidade de cada dígito, podemos montar um gráfico comparando com a Lei de Benford.

Figura 6.4: Relação da Lei de Benford com os dados da figura 6.3



Fonte: Autor

Considerando que os dígitos que não apareceram nos dados foram omitidos, podemos observar que com uma pequena variação, os resultados da tabela acima estão de acordo com a Lei de Benford, o que poderia garantir a veracidade dos dados.

6.3 Números Complexos

Os números complexos surgiram da necessidade de trabalhar com números não reais para resolver certos problemas matemáticos, como por exemplo, na obtenção das raízes de uma equação cúbica, nesses cálculos surgem raízes do tipo $\sqrt{-25}$, onde sabemos que no universo dos números reais essa raiz não é possível.

Para que essa radiciação fosse sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número não real i, chamado de unidade imaginária e que satisfaz a condição $i^2 = -1$. Conhecendo essa unidade imaginária, podemos calcular

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25 \cdot i^2} = 5i$$

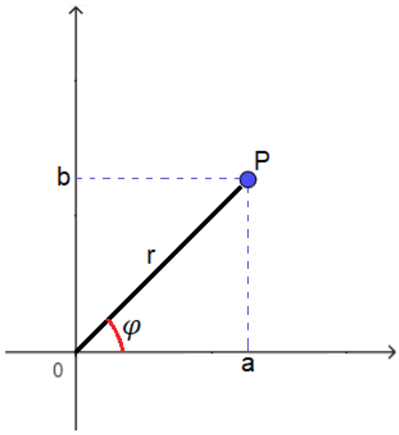
Conhecendo a unidade imaginária, podemos definir um número complexo como todo número da forma $z = a + bi$, em que a e b são reais e i é a unidade imaginária. Essa forma é chamada de forma algébrica de um número complexo, sendo a é a parte real e b é a parte imaginária.

Quando o número complexo possui apenas a parte real, é chamado de número real, por exemplo, $8 + 0i = 8$. Quando ele possui apenas a parte imaginária, é chamado imaginário puro, por exemplo $0 + 5i = 5i$. Quando nem a e nem b são nulos, é chamado número imaginário.

O conjunto dos números complexos é representado por $\mathbb{C}$ e sabendo que um número complexo que possui parte imaginária nula é um número real, podemos concluir que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado no plano cartesiano determinado pelo par ordenado (a, b), onde a será marcado no eixo das abscissas, chamado de eixo real e b será marcado no eixo das ordenadas, chamado de eixo imaginário. Cada ponto $P(a, b)$ desse plano é a imagem do número complexo $a+bi$. Analisando os pontos do plano cartesiano como números complexos, temos uma representação geométrica de $\mathbb{C}$, chamada de plano complexo.

Figura 6.5: Representação geométrica de um número complexo no plano complexo



Fonte: Autor

O módulo ou valor absoluto de um número complexo, representado na figura 6.5 por r, é a distância entre a origem do plano e o ponto $P(a, b)$. Aplicando distância entre dois pontos temos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. O ângulo φ é chamado de argumento de z.

Aplicando as funções trigonométricas no triângulo retângulo que contém o argumento φ, podemos chegar a forma polar de um número complexo que é

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Relacionando com a fórmula de Euler $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, temos que $z = re^{i\varphi}$.

Os números complexos w que resolvem a equação $e^w = z$ são chamados logaritmos complexos e dessa igualdade temos $w = \ln z$. Considerando $w = a + bi$ com a e b reais e $z = re^{i\varphi}$, podemos fazer a seguinte associação:

$$e^w = z \Rightarrow e^{a+bi} = re^{i\varphi} \Rightarrow e^a \cdot e^{bi} = re^{i\varphi}$$

$$e^a = r \Rightarrow a = \ln r$$

$$e^{bi} = e^{i\varphi} \Rightarrow b = (\varphi + 2k\pi)$$

Portanto

$$w = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),\ com\ k \in \mathbb{Z}.$$

O ângulo φ é o argumento principal de z e o $2k\pi$ aparece pelo fato de termos o argumento principal φ quando $k = 0$ e nesse caso w será o valor principal do logaritmo, ou teremos um outro argumento φ' quando $k \neq 0$, sendo k um inteiro arbitrário.

Como aplicação desse logaritmo complexo, encontraremos o $\ln z$ para $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Para $z = -1 - \sqrt{3}i$, temos $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ e $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-1}{2}$, pelas coordenadas polares teremos $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$, então:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \Rightarrow \ln z = \ln 2 + i(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi),\ com\ k \in \mathbb{Z}.$$

6.4 Entropia de Shannon e Tsallis

A Entropia de Shannon, também conhecida como Teoria da informação, foi criada por Claude Elwood Shannon, 1916 – 2001, um matemático e engenheiro norte americano que trabalhou por 15 anos com uma teoria que lidava com criptografia de dados, o que o influenciou na criação da teoria da informação.

Em 1948, Shannon lança a base para a teoria da informação, em um artigo intitulado como *A Mathematical Theory of Communication*. O artigo tratava de como reproduzir em um ponto a mensagem exata ou a mais aproximadamente possível da mensagem emitida originalmente, em outro ponto.

O objetivo era buscar uma grandeza que quantificasse ou caracterizasse uma mensagem sem ambiguidades, passando-se a estudar um modelo de comunicação de uma fonte discreta, com emissão de símbolos para compor uma mensagem.

Quanto maior for a variabilidade de símbolos, maior será a quantidade de informação, por outro lado, também aumentará a incerteza probabilística. A quantidade de informação está ligada a quantidade de estados microscópicos permitidos ao sistema. Desta maneira, quanto mais estados microscópicos o sistema tiver maior será a quantidade de informação contida nele.

No lançamento de um dado, por exemplo, temos seis possibilidades, ou seja, seis microestados acessíveis ao sistema. Comparando com o lançamento de uma moeda, ela terá uma menor incerteza probabilística, justamente por ter uma quantidade de informação inferior.

Segundo Shannon (1948), a definição de quantidade de informação ou incerteza probabilística, utiliza um tratamento probabilístico e faz uso de uma função logarítmica, tendo sua forma funcional sendo representada por

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p_i \log_2(p_i),$$

onde p_i é a probabilidade de ocorrência de cada evento i e $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Por exemplo, vamos calcular a entropia de um dado honesto, considerando o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em que $p_i = \dfrac{1}{n}$ é a probabilidade associada a x_i. Partindo da definição de entropia de Shannon, e considerando a base arbitrária do logaritmo como e, temos:

$$H(p_1,\ldots,p_n) = -\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p_i \ln(p_i) \Rightarrow H(p_1,\ldots,p_n) = -\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p_i \left(\ln \cdot \frac{1}{n}\right) = -\left(\ln \cdot \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p_i$$

$$H(p_1,\ldots,p_n) = -\ln(n^{-1}) = \ln(n)$$

Como trata-se de um dado honesto, temos:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow p_i = \frac{1}{6}, i = 1,2,\ldots,6.$$

Como as possibilidades da entropia são equiprováveis, tomaremos $H = \log_2 n$

$$H = \log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$$

Por definição, $\log_2 2 = 1$ e considerando $\log_2 3 = 1,6$, temos:

$$\log_2 2 + \log_2 3 = 1 + 1,6 = 2,6$$

Portanto, a entropia de um dado honesto é $2,6$.

Com o intuito de aumentar o escopo de aplicações no contexto de mecânica estatística, em 1994, o físico Constantino Tsallis introduziu um conceito que generaliza a exponencial e logaritmo: a $q-$exponencial e o $q-$logaritmo.

A partir do parâmetro q podemos deformar continuamente a função exponencial.

O ponto de partida dessas deformações é o $q = 1$. A $q-$exponencial é a aplicação

$$e_q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1-q)x \leq 0, \\ \exp(x) & \text{se } q = 1, \\ [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \text{ e } 1 + (1-q)x > 0, \end{cases}$$

A função $q-$logaritmo é a inversa da $q-$exponencial

$$\ln_q(x) = \begin{cases} \text{não está definida} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^{1-q}-1}{1-q} & \text{se } x > 0 \text{ e } q \neq 1 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \text{ e } q = 1 \end{cases}$$

Por continuidade, é fácil verificar que

$$\lim_{q \to 1} \ln_q x = \ln x.$$

A entropia de Tsallis pode ser definida como sendo

$$H_q^T(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i^q \ln_q p_i.$$

Essa entropia, generaliza a entropia de Shannon.

6.5 Psicologia

Na psicologia temos leis que descrevem a percepção humana e essas leis são representadas por funções logarítmicas. A lei de Hick, também conhecida como lei de Hick-Hyman, formulada por William Edmund Hick e Ray Hyman, é uma lei que descreve uma relação entre o tempo que os indivíduos escolhem uma alternativa e o número de opções que eles possuem para decidir e está ligada à capacidade cognitiva informacional em experimentos baseados em escolhas. A taxa de ganho de informação é o tempo levado para processar uma certa quantidade de bits na lei.

Hick realizou um primeiro experimento que envolvia dez lâmpadas com chaves de código Morse que acendiam aleatoriamente a cada cinco segundos e a reação da escolha foi registrada com um número de escolhas de duas a dez lâmpadas. Um segundo experimento foi realizado mantendo as dez alternativas, mas o participante realizou a tarefa nas duas primeiras vezes orientado a ser mais preciso e na terceira vez, ser mais rápido.

Hick preocupou-se com a relação logarítmica entre tempo de reação e número de escolhas, Hyman se propôs a entender melhor a relação entre tempo de reação e a média do número de escolhas. Hyman fez um experimento onde havia oito focos luminosos diferentes, organizados numa matriz seis por seis. Cada luz tinha um nome e foi registrado o tempo que o participante demorava para dizer o nome da luz depois de acender. A contribuição de Hyman foi determinar uma relação linear entre o tempo de reação e a informação transmitida.

Para n alternativas igualmente prováveis de escolhas, com tempo médio T para a escolha dentre as alternativas, a lei de Hick-Hyman ficou definida como:

$$T = k \cdot \log_2(n+1),$$

onde k é uma constante que pode ser determinada empiricamente ao ajustar uma linha a dados coletados. O logaritmo expressa a profundidade da hierarquia de árvore de escolha, $\log_2$ indica a pesquisa binária que é realizada. A adição de 1 a n considera a incerteza sobre responder ou não, além de decidir sobre a resposta a dar.

Podemos utilizar a lei na forma $T = k \cdot H$, para escolhas com probabilidades desiguais, onde H está associada à entropia de decisão, definida como:

$$H = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} + 1 \right),$$

onde p_i é a probabilidade de ocorrência de cada evento i. Essa lei descreve o tempo que a pessoa leva para tomar uma decisão com base no número de opções possíveis a serem escolhidas, ou seja, quanto maior o número de alternativas e maior a complexidade ou divergência destas, maior será o tempo necessário para que a pessoa chegue a uma decisão.

Pensando nisso essa lei pode ser aplicada, por exemplo, no agrupamento das escolhas de um menu em categorias e mostrá-las quando houver alguma interação, dividir algum processo complexo ou extenso em etapas mais amigáveis. Em um restaurante, em dia de lotação máxima, seria interessante utilizar um cardápio mais reduzido, para que os clientes demorassem menos tempo para tomar suas decisões.

Em relação ao tempo necessário para mover rapidamente um objeto para uma área alvo, foi desenvolvido um modelo preditivo do movimento humano usado principalmente na interação humano-computador, denominada lei de Fitts.

A lei de Fitts, publicada por Paul Fitts em 1954, descreve um modelo de movimento humano e define o tempo necessário para mover-se rapidamente, desde uma posição inicial até uma zona destino final, como uma função da distância até o objeto e o tamanho deste.

Em outras palavras, a lei de Fitts afirma que o tempo necessário para mover-se rapidamente de uma posição inicial até uma posição final é proporcional ao tamanho do objeto de destino.

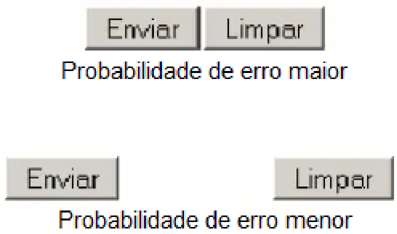
Uma forma consolidada da lei de Fitts é:

$$T = a + b \log_2 \left(\frac{D}{W} + 1 \right),$$

onde T é o tempo médio para completar o movimento, a e b são constantes empíricas, determinadas por dados medidos em uma linha reta, onde a define a interseção no eixo y e é interpretada como um atraso, b é uma inclinação e descreve uma aceleração, D é a distância entre o ponto inicial até o ponto final e W é a largura do objeto.

Um exemplo de sua aplicação seria a área de um elemento de interação, como o botão, que deve ser maior para se destacar na região onde for colocado. Aumentando a área do botão, aumenta-se o nível de precisão para interagir. Quando tivermos mais de um botão, as posições que esses botões estão dispostos também é importante. Vejamos como a posição de dois botões, um com a função de enviar a mensagem e o outro com a função de limpar a mensagem, pode aumentar ou diminuir a probabilidade de erro.

Figura 6.6: Posições entre os botões



Fonte: Autor

Sendo assim, devemos ter o cuidado de como posicionar os elementos clicáveis numa tela, tendo como propósito diminuir a probabilidade de erro.

6.6 Física

A acústica é a parte da Física que estuda os sons e a qualidade da propagação dos sons em um ambiente, considerada do ponto de vista da percepção dos ouvintes.

A utilização de logaritmos está presente no estudo das ondas sonoras, onde percebe-se que o som apresenta características: Altura, intensidade (I) e timbre.

A intensidade representa a potência de uma onda sonora por unidade de área. O tímpano humano só percebe uma onda sonora, medido em watt por metro quadrado (W/m^2), se essa intensidade for no mínimo

$$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2.$$

Conhecida como limiar de audibilidade e suporta no máximo 1 W/m^2, conhecida como limiar da dor. O nível sonoro (N), é a comparação entre a intensidade sonora (I) e o limiar de audibilidade (I_0), e sua unidade de medida mais utilizada é o decibel (dB). O nível sonoro obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Por exemplo, o nível de intensidade sonora em um estádio de futebol é 60 dB, esse nível aumenta em 1000 vezes no momento de um gol. Vamos calcular o nível de intensidade sonora no momento do gol.

Fazendo $N = 60$, temos:

$$60 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 6 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow \left(\frac{I}{I_0}\right) = 10^6$$

Agora, calculando o nível de intensidade sonora no momento do gol:

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{10^3 \cdot I}{I_0}\right) \Rightarrow N = 10 \cdot \log(10^3 \cdot 10^6) \Rightarrow N = 10 \cdot \log 10^9 \Rightarrow N = 10 \cdot 9 = 90\, dB$$

Portanto, o nível de intensidade sonora no momento do gol é de 90 dB.

Outra aplicação interessante dos logaritmos, é na lei de resfriamento de Newton, onde a diferença de temperatura entre um corpo e o meio que o contém decresce a uma taxa de variação proporcional à diferença de temperatura.

Considerando ΔT_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $\Delta T(t)$ a diferença em um instante t qualquer, essa lei se traduz pela expressão $\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que a constante depende do corpo.

Suponha que em uma cozinha, cuja temperatura ambiente constante é de 30 °C, um bolo é retirado do forno e colocado sobre a pia. Nesse momento, a temperatura do bolo é de 100 °C. Após 5 minutos, verifica-se a temperatura do bolo e o termômetro marca 65 °C. Se o bolo estiver no ponto para servir quando sua temperatura atingir 37 °C, vamos calcular quanto tempo, a partir do momento em que foi colocado sobre a pia, ele estará pronto para ser servido.

Considerando que a temperatura do bolo quando sai do forno é de 100 °C, temos:

$$\Delta T_0 = 100 - 30 = 70\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Após 5 minutos:

$$\Delta T(5) = 65 - 30 = 35\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Como $\Delta T(5) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha \cdot 5}$, então:

$$35 = 70 \cdot e^{-\alpha \cdot 5} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-5\alpha}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros, temos:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log e^{-5\alpha} \Rightarrow \log 2^{-1} = \log(e^{-\alpha})^5 \Rightarrow -\log 2 = 5 \cdot \log e^{-\alpha}.$$

Considerando $\log 2 = 0,3$, temos:

$$-0,3 = 5 \cdot \log e^{-\alpha} \Rightarrow \log e^{-\alpha} = \frac{-0,3}{5} = -0,06.$$

Após t minutos:

$$\Delta T(t) = 37 - 30 = 7\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Então:

$$7 = 70 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-\alpha \cdot t}.$$

Aplicando novamente logaritmo em ambos os membros, encontramos:

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log e^{-\alpha \cdot t} \Rightarrow \log 10^{-1} = \log(e^{-\alpha})^t \Rightarrow -1 = t \cdot \log e^{-\alpha}.$$

Como $\log e^{-\alpha} = -0,06$, vem:

$$-1 = t \cdot (-0,06) \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,06} \cong 16,66\ minutos.$$

Portanto, o bolo estará pronto para ser servido aproximadamente 16 minutos após sair do forno.

6.7 Geografia

A Geografia é a ciência que estuda elementos físicos, biológicos e humanos, e suas relações com o planeta Terra e seu principal objetivo é compreender a relação do homem com o meio ambiente, as condições climáticas e as características do espaço geográfico.

Essas características do espaço geográfico incluem as populações, que em sua totalidade, crescem sempre exponencialmente, fazendo com que sejam utilizados logaritmos para facilitar esses cálculos.

Vamos imaginar que em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional seja de 3% ao ano, aproximadamente. Vamos calcular em quantos anos a população dessa cidade dobrará, sabendo que a taxa de crescimento continuará a mesma.

Considerando a população inicial como P_0, a população da cidade em x anos, será $P_x = P_0 \cdot (1,03)^x$. Supondo que a população da cidade dobrará em relação a população inicial em x anos, temos:

$$P_x = 2 \cdot P_0 \Rightarrow P_0 \cdot (1,03)^x = 2 \cdot P_0 \Rightarrow (1,03)^x = 2.$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros e considerando $\log 1,03 = 0,0128$ e $\log 2 = 0,3010$, temos:

$$(1,03)^x = 2 \Rightarrow \log(1,03)^x = \log 2 \Rightarrow x \cdot \log 1,03 = \log 2 \Rightarrow x \cdot 0,0128 = 0,3010$$

$$x = \frac{0,3010}{0,0128} \Rightarrow x \cong 23,5.$$

Portanto, a população dobrará em aproximadamente 23 anos.

Os logaritmos também têm aplicações na Geologia. A escala Richter é baseada em logaritmos e foi desenvolvida para medir a magnitude de abalos sísmicos provocados pelo movimento das placas tectônicas.

O número de pontos que um terremoto atinge na escala Richter é determinado pelo logaritmo da amplitude máxima medida pelo sismógrafo a certa distância do centro do fenômeno. A escala utiliza logaritmos na base 10, isso significa que, se um terremoto foi de 6 pontos, ele teve sua oscilação máxima dez vezes maior do que um terreno de 5 pontos. A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0},$$

onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}\ kWh$. Por exemplo, podemos calcular a energia liberada por um terremoto de intensidade 8 na escala Richter.

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0} \Rightarrow 8 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 12 = \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$$

Pela definição dos logaritmos, temos:

$$\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} = 10^{12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{9}\ kWh.$$

Portanto, a energia liberada por um terremoto de intensidade 8 na escala Richter é de $7 \cdot 10^9\ kWh$.

6.8 Química

Na química, são realizados vários cálculos que envolvem taxas, períodos, reações de substâncias, tempo de desintegração de elementos e entre esses cálculos, muitas vezes envolvendo logaritmos, precisamos recorrer às propriedades logarítmicas.

Desintegração radioativa ou decaimento radioativo, é o nome dado ao fenômeno da transformação de um átomo em outro por meio da emissão de radiação a partir de seu núcleo instável. Essa instabilidade se dá quando o número de prótons e o número de nêutrons em seu interior não apresentam estabilidade.

Esses átomos possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa.

Para determinar o tempo de desintegração de uma substância radioativa, utilizamos a fórmula $Q = Q_0 \cdot e^{-r \cdot t}$, em que Q é a massa da substância, Q_0 é a massa inicial, r é taxa de redução da radiatividade e t é o tempo em anos.

Para aplicar essa fórmula, vamos determinar o tempo em que 250 g de certa substância radioativa leva para se reduzir a 50 g, sabendo que a mesma se desintegra a uma taxa de 2% ao ano.

Aplicando os valores, temos:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-r \cdot t} \Rightarrow 50 = 250 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \Rightarrow e^{-0{,}02 \cdot t} = \frac{50}{250} \Rightarrow e^{-0{,}02 \cdot t} = \frac{1}{5}.$$

Aplicando ln em ambos os membros, temos:

$$e^{-0{,}02 \cdot t} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ln e^{-0{,}02 \cdot t} = \ln \frac{1}{5} \Rightarrow \ln e^{-0{,}02 \cdot t} = \ln 5^{-1} \Rightarrow -0,02 \cdot t = -1,6094$$

$$0,02 \cdot t = 1,6094 \Rightarrow t = \frac{1,6094}{0,02} \Rightarrow t \cong 80 \; anos.$$

Portanto, substância levará 80 anos para reduzir-se a 50 g.

Temos também uma escala logarítmica que expressa o grau de acidez de uma solução aquosa, que é o potencial hidrogeniônico, o pH. Dessa forma, tem-se que o pH de uma solução é o cologaritmo de base 10.

Na tabela abaixo, temos a classificação de uma substância de acordo com seu pH.

Tabela 6.1: Classificação de uma substância de acordo com o pH

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7,5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7,5$	Neutra
$3,5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3,5$	Muito ácida

Fonte: Autor

O cálculo do pH é realizado pela fórmula

$$pH = \log \frac{1}{H}.$$

Em que H é a concentração de íons de hidrogênio em mol por decímetro cúbico. Por exemplo, ao medir a concentração de íons de uma xícara de café obteve-se que esta é de 10^{-5} mol/dm^3. Assim, aplicando a fórmula do pH, podemos classificar o café.

$$pH = \log \frac{1}{H} \Rightarrow pH = \log \frac{1}{10^{-5}} \Rightarrow pH = \log 10^5 \Rightarrow pH = 5.$$

Portanto, o pH do café é 5, sendo assim, o café é uma solução ácida.

6.9 Biologia

Na biologia, a função logarítmica e sua inversa, a exponencial, estão bem presentes descrevendo diversos fenômenos naturais. Um desses fenômenos é o crescimento de uma árvore. Por exemplo:

A função $h(t) = 1,5 + \log_3(t+1)$, representa a altura média de um tronco de certa espécie de árvore, desde que é plantada, com $h(t)$ em metros e t em anos. Uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, vamos calcular o tempo, em anos, transcorrido do momento da plantação até o do corte.

Sabendo que $h(t) = 3,5$ em t anos, temos:

$$h(t) = 1,5 + \log_3(t+1) \Rightarrow 3,5 = 1,5 + \log_3(t+1) \Rightarrow 2 = \log_3(t+1) \Rightarrow t+1 = 3^2$$

$$t + 1 = 9 \Rightarrow t = 8 \ anos.$$

Portanto, a árvore foi cortada 8 anos após sua plantação.

Temos também que o crescimento de uma pessoa ou a expectativa de vida também podem ser representados e calculados com aplicação de logaritmos. Por exemplo:

A expectativa de vida, em anos, em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x é dada por $L(x) = 12(199 \log x - 651)$. Vamos calcular a expectativa de vida de uma pessoa que nasceu no ano 2000.

$$L(x) = 12(199 \log x - 651) \Rightarrow L(x) = 12(199 \log 2000 - 651)$$

$$L(x) = 12(199 \log 1000 \cdot 2 - 651) \Rightarrow L(x) = 12(199(\log 1000 + \log 2) - 651)$$

Considerando $\log 2 = 0,3$, temos:

$$L(x) = 12(199(3 + 0,3) - 651 \Rightarrow L(x) = 12(656,7 - 651) \Rightarrow L(x) = 12(5,7)$$

$$L(x) = 68,4 \ anos.$$

Portanto, uma pessoa que nasceu no ano 2000, nessa região, é de 68,4 anos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi realizado com o propósito de auxiliar os estudantes na compreensão dos logaritmos. Alunos e professores que queiram utilizar o trabalho como base de estudo para melhorar a compreensão ou até aprofundar os conhecimentos em seguida.

Neste trabalho temos uma abordagem contextualizada sobre os logaritmos e suas aplicações, começando pelo contexto histórico e definição, passando pelas suas propriedades que são consequências da definição, propriedades operatórias, função logarítmica, equações e inequações logarítmicas, finalizando com aplicações dos logaritmos na matemática e em outras áreas do conhecimento. Todos os tópicos foram feitos com o cuidado de aliar a explicação à prática, de maneira que mais facilitasse a compreensão quanto ao conteúdo.

O ensino de logaritmo no Brasil ainda enfrenta uma certa resistência por parte dos estuantes, seja pelo preconceito de que é algo muito difícil de aprender, o que realmente dificulta, começar a estudar algo pensando que não vai conseguir aprender ou por uma deficiência na base de conteúdos que servem como pré-requisito para uma boa compreensão e aplicação dos logaritmos.

Por isso, este trabalho apresenta uma abordagem simples e didática, com uma ligação entre os tópicos, fazendo o estudante buscar cada vez mais os exemplos que ajudam na compreensão e com as aplicações em outras áreas do conhecimento, o aluno se aproxima mais dos logaritmos, deixa de ser algo tão abstrato e torna mais concreto, vendo que é algo muito importante para a sociedade e que ele poderá precisar fora da Matemática.

Referências

[1] ÁVILLA, G. **Como se constrói uma tábua de logaritmos** Revista do Professor de Matemática, ed. 26. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm>. Acesso em 20/01/2022.

[2] CALCULAR E CONVERTER. **Log na base 10, calculadora logarítmica**. Disponível em: <https://calculareconverter.com.br/log-base-10/>. Acesso em 22/11/2021.

[3] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática**, 1º ano/ensino médio. 1 ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

[4] DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

[5] FEITOSA, A. **Aplicações dos Logaritmos**. Infoescola. Disponível em:<https://www.infoescola.com/matematica/aplicacoes-dos-logaritmos/>. Acesso em 23/12/2021.

[6] FERREIRA, R. L. **Uma sequência de ensino para o estudo de Logaritmos usando a Engenharia Didática**. 2006. 149f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2006.

[7] FRANCISCO, W. de C. e. **Escala Richter; Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escala-richter.htm>. Acesso em 23/12/2021.

[8] G1 CE. **Veja quem são os deputados federais eleitos pelo CE**. G1- O portal de notícias a globo. Disponível em:

<https://g1.globo.com/ce/ceara/eleicoes/2018/noticia/2018/10/08/veja-quem-sao-os-deputados-federais-eleitos-pelo-ce.ghtml>. Acesso em 25/12/2021.

[9] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 2. 3 ed. São Paulo: Atual, 1977.

[10] LIMA, E. L. **Análise Real**, vol. 1. 11 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[11] LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 1. 10 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[12] LIMA, E. L. **Curso de análise**, vol. 1. 14 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[13] MARCUS VINICIUS. **Equação logarítmica**. Quero bolsa. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/matematica/equacao-logaritmica >. Acesso em 25/11/2021.

[14] MATEMÁTICA DIDÁTICA. **Tábua de logaritmos decimais**. Disponível em: <https://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogaritmosDecimais.aspx>. Acesso em 20/01/2022.

[15] NASCIMENTO, W. S. **Sobre algumas características da entropia de Shannon para sistemas atômicos confinados**. 2013. Dissertação (Mestrado de Física) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

[16] NECTOUX, A. **A Lei de Benford: aprendendo a fazer ou a detectar fraudes?**. Blog Projeto Klein. Disponível em:<http://blog.kleinproject.org/?p=1446&lang=pt-br>. Acesso em 25/12/2021.

[17] OLIVEIRA, G. A de. **O logaritmo na matemática financeira**. Mundo Educação UOL. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/o-logaritmo-na-matematica-financeira.htm>. Acesso em 21/12/2021.

[18] OLIVEIRA, R. H. de. **Um Estudo sobre a Função Exponencial**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

[19] OLIVEIRA, R. R. de. **Juros compostos**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/juros-compostos.htm>. Acesso em 10/01/2021.

[20] PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 1 ed. Vol. 1- São Paulo: Moderna, 2009.

[21] PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 1 ed. Vol. 3- São Paulo: Moderna, 2009.

[22] PARDO, T. **Logaritmos e suas maravilhas**. Estado e Minas Enem. Disponível em: <https://www.em.com.br/app/noticia/especiais/educacao/enem/2015/04/28/noticia-especial-enem,641856/logaritmos-e-suas-maravilhas.shtml >. Acesso em: 22/12/2021.

[23] PECORARI, M. **Logaritmos e Aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

[24] RAMOS, S. S. A. **Logaritmos: uma abordagem didática**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

[25] ROCHA, L. L. **Logaritmos: Conceito, história, aplicações e ensino**. 2021.

Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campina Grande, 2021.

[26] SAS - Sistema Ari de Sá. **Matemática**, ensino médio, 1ª série, livro 6, 2018.

[27] SANTOS, T. **Usabilidade: Lei de Hick, Fitts e Consistência**. Medium. Disponível em:<https://medium.com/@thaysasantos/usabilidade-lei-de-hick-fitts-e-consist%C3%AAncia-ace948fba147 >. Acesso em 06/01/2021.

[28] SILVA, J. P. da. **Logaritmos e Aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

[29] SILVA, L. L. da. **Logaritmos: Uma abordagem didática**. Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019.

[30] SILVA, M. N. P. da. **Aplicação dos logaritmos**. Mundo educação UOL. Disponível em:<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/aplicacao-dos-logaritmos.htm>. Acesso em 21/12/2021.

[31] SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato Matemática** 1º ano. 1 ed. - São Paulo: FTD, 2016.

[32] STEWART, J. **Cálculo**. vol. 1. 1 ed. - São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[33] TEIXEIRA, F. **Entendendo a lei de Fitts no Design Digital**. Disponível em:<https://brasil.uxdesign.cc/entendendo-a-lei-de-fitts-no-design-digital-91a395971194>.Acesso em 06/01/2021.

[34] VASCONCELOS, K. W. C. de. **Logaritmos e suas Aplicações**. 2011. Trabalho de Conclusão do curso de Matemática. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.