

DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: Uma
abordagem histórica e prática desde a
antiguidade até as aulas atuais

Danilo Bernardini Silva

27 de agosto de 2013

Sumário

1	Introdução	7
2	História da Matemática	9
2.1	Egito e Mesopotâmia	9
2.2	Grécia Antiga	11
2.3	Lógica e Teoria Axiomática	15
2.4	Euclides e <i>Os Elementos</i>	18
2.5	O Quinto Postulado de Euclides	28
3	Hilbert e a Geometria	33
3.1	Os elementos da Geometria	35
3.1.1	Axiomas de Incidência	35
3.1.2	Axiomas de Ordem	36
3.1.3	Axiomas da Congruência	39
3.1.4	Axioma das paralelas	44
3.1.5	Axiomas da continuidade	45
3.1.6	Exemplificando um dos “defeitos lógicos” de <i>Os Ele-</i> <i>mentos</i>	47
3.2	Geometria Neutra	50
3.3	Geometria Hiperbólica e o Quinto Postulado	55
4	Considerações Finais	60
5	Apêndice	65

Dedico este trabalho a meus pais Solange e
Edson que sempre me incentivaram e
serviram de exemplos.
A minha esposa Carla pelo amor, apoio,
paciência e compreensão durante este
Mestrado, me auxiliando em todos os
momentos, sempre com muito carinho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida e força em todos os momentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM que, por meio do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, possibilitou a realização deste Mestrado, através de convênio com o Conselho Técnico-Científico da Educação Superior CTC-ES da CAPES e da Universidade Federal do ABC (UFABC).

Ao Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici, da UFABC, pela participação ativa e direta neste passo gigantesco a caminho do nosso engrandecimento profissional, minha eterna gratidão.

A todos os meus familiares, especialmente aos meus avós Lydia, Ana (I.M.), Armando (I.M.) e Antônio (I.M.), por todo o carinho e por terem alicerçado a vida dos meus pais e também a minha, em todos os momentos.

Aos colegas profissionais e alunos das escolas EE Alexandre de Gusmão e EMEF Padre Manoel de Paiva, pelo apoio e coleguismo durante este trabalho.

Aos professores e membros da turma de 2011 da UFABC, que prestaram apoio fundamental para a realização deste trabalho, o meu agradecimento.

A todas as pessoas que participaram, contribuindo para a realização deste trabalho, direta ou indiretamente.

“Embora os matemáticos não gastem todo seu tempo descobrindo ou demonstrando teoremas, já que seu trabalho, em geral, envolve outras atividades de várias naturezas, a prova, demonstração ou justificativa lógica é a essência, a verdadeira marca registrada da Matemática. É ela que distingue a Rainha das Ciências de todos os demais campos do conhecimento”.

Gilberto Geraldo Garbi

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo apresentar a importância das demonstrações para o ensino e a aprendizagem da matemática. A História da Matemática é peça fundamental para que isso ocorra com clareza. Desde as civilizações mais antigas, a matemática sempre esteve presente. Porém, as provas e teoremas surgiram na Grécia Antiga devido, entre outros fatores, aos conhecimentos e viagens ao Egito e Mesopotâmia. A matemática grega, sobretudo a geometria, teve grande destaque após o surgimento de *Os Elementos* de Euclides. Esta obra foi responsável pelo surgimento da teoria axiomática do que conhecemos por Geometria Plana e suas respectivas demonstrações.

Mas um dos cinco Postulados de Euclides, o quinto, causaria grande impacto na história da matemática, devido as suas diversas tentativas de provas, realizadas por inúmeros matemáticos. Isso resultou na aparição de outras geometrias, tão consistentes quanto a Euclidiana, porém sem a veracidade do quinto postulado: as Geometrias Não-Euclidianas.

Além disso, este trabalho destaca a obra *Fundamentos da Geometria* de David Hilbert que, preocupado com alguns “defeitos lógicos” de *Os Elementos*, reescreve esta obra, incluindo axiomas, teoremas e proposições, com suas respectivas demonstrações.

Ao término do trabalho, são apresentados alguns resultados importantes de pesquisas relacionadas à importância das demonstrações para o ensino e a aprendizagem da matemática atualmente na Educação Básica. As provas, segundo pesquisas, principalmente as geométricas, devem estar presentes não apenas nas aulas, como também nas disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática, ou seja, na formação dos respectivos professores.

No Apêndice é apresentada uma sugestão de Sequência Didática onde se destaca, dentre outros fatores, a presença de demonstrações a serem realizadas por alunos como exercício e discutidas coletivamente, através de atividades investigativas não formais, até chegar em provas formais, quando necessário.

Palavras-Chave: Demonstrações matemáticas; Geometria Não-Euclidiana; Provas Geométricas; Quinto Postulado de Euclides.

Os símbolos lógicos mais utilizados são:

Símbolos de variáveis: $x, y, z, m, \dots, x_1, x_2, \dots$ (qualquer letra minúscula, indexada ou não por números naturais);

Conectivos lógicos: sim ou \neg (não), \wedge (e), \vee (ou), \Rightarrow (se ... então; implica), \Leftrightarrow (se e somente se; é equivalente a);

Quantificadores: \exists (existe), \forall (para todo; qualquer).

NOTAÇÃO: Utilizaremos alguns símbolos matemáticos ao longo do trabalho. São eles:

Pontos A, B, C, ... representaremos por letra maiúscula A, B, C.

Segmento de reta entre os pontos A e B: AB

Semirreta de origem em A e que passa por B: \overleftrightarrow{AB}

Reta que passa pelos pontos A e B: \overleftrightarrow{AB}

Dados três pontos A, B, C, o ângulo $\angle ABC$ será aquele com vértice em B, formado pelas semirretas \overleftrightarrow{BA} e \overleftrightarrow{BC}

Medida em graus do ângulo $\angle ABC$: $m(\angle ABC)$

Triângulo ABC: $\triangle ABC$ ou somente triângulo ABC

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, entre os professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio, percebe-se certa resistência, dificuldade ou até mesmo negligência no uso de demonstrações matemáticas rigorosas em seus planos de aulas. Em geral as justificativas para isso são falhas e nem sempre condizem com a realidade. Muitas vezes afirmam os professores “os alunos não compreendem as demonstrações e acabam apenas realizando cópias” ou “o aluno tem muita dificuldade da transição das argumentações para as provas formais”.

Este trabalho tem como objetivo enfatizar o uso de provas e demonstrações matemáticas, ressaltando sua importância histórica e educacional. Traçaremos inicialmente um histórico sobre o desenvolvimento do rigor matemático, sobretudo em geometria. Em seguida destacaremos a importância de tal rigor na formação e na aprendizagem de matemática, bem como sua contribuição para professores de matemática, seja em sua formação, seja em sua prática docente.

Segundo Ruy C. Pietropaolo:

“os estudos referenciados indicam, de modo geral, que a não-proposição de provas nas aulas de matemática pode significar erro de representação do papel e da natureza da prova na Matemática. Além disso, sugerem que essa ausência pode privar os alunos de uma educação mais ampla...”

(PIETROPAAOLO 2005, p. 206)

De modo a que possamos alcançar essa formação mais ampla, faremos um estudo sobre uma perspectiva histórica para o desenvolvimento de parte da matemática, desde as civilizações mais antigas até os dias de hoje. Para tal, estudaremos um pouco de uma das obras mais importantes e antiga da

geometria, *Os Elementos* de Euclides, e analisaremos consequências ao desenvolvimento da matemática devido a um novo nível de rigor proposto por este livro. Destacaremos o problema envolvendo a tentativa de se provar o postulado da paralelas (quinto postulado de Euclides) a partir dos demais postulados desse livro. O desenvolvimento de tal problema realizado por diversos matemáticos ao longo de mais de dois mil anos propiciou o surgimento de geometrias não-euclidianas, mas principalmente um questionamento aprofundado do rigor matemático. Dessa forma traçaremos um breve histórico até a reorganização da geometria Euclidiana feita por David Hilbert (1862-1943) em seu livro *Fundamentos de Geometria*, no qual os postulados de Euclides são reformulados, ilustrando o nível de rigor atualmente aceitos pela comunidade matemática.

Apresentaremos, então, resultados de algumas pesquisas recentes que focam-se na importância das demonstrações e de sua presença nas aulas de matemática do ensino básico, tanto no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, quanto na formação de docentes. Finalmente encerraremos o trabalho com a apresentação de uma sequência didática focada no Ensino Fundamental e Médio e desenvolvida com o intuito de ressaltar a presença da demonstração matemática em seu conteúdo.

Capítulo 2

História da Matemática

Não se pode afirmar ao certo qual é a origem da matemática, tanto da geometria quanto da aritmética, pois a arte de escrever é mais recente que os primórdios do assunto. O homem só foi capaz de colocar seus registros e pensamentos em forma escrita nos últimos seis mil anos. Heródoto e Aristóteles mantinham ideias opostas com relação ao motivo de origem da geometria, mas concordavam onde se originava: no Egito, apesar dela obviamente possuir raízes mais antigas, afirma (BOYER 1996, p. 4). Nos tópicos seguintes é abordado um pouco dessa história da matemática, sobretudo da geometria, iniciando no Egito, e seguindo na Mesopotâmia e Grécia Antiga.

2.1 Egito e Mesopotâmia

As civilizações egípcia e mesopotâmica (ou babilônica) foram as primeiras a possuírem registros escritos de sua cultura, apesar de o fazerem de modos distintos. Enquanto os egípcios adotaram os papiros para seus registros pictográficos, na Mesopotâmia, onde o barro era abundante, foi adotada a escrita cuneiforme onde tudo era registrado em peças de barro cozido.

Segundo Carl C. Boyer:

“... o uso da escrita cuneiforme formou um forte laço. Leis, registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais – tais coisas e muitas outras eram incisas em tabelas de barro mole com um estilete, e as tabelas eram cozidas ao sol ou em fornos. Tais documentos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios; por isso se dispõe hoje de muito mais documentação sobre a matemática da Mesopotâmia que sobre a do Egito”...

(BOYER 1996, p. 16)

Os egípcios, segundo alguns desses registros, já possuíam conhecimentos matemáticos e de engenharia. Como afirma Howard Eves em [9]: “A grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2600 a.C. e indubitavelmente envolvia alguns problemas de matemática e de engenharia”. Ele ainda ressalta que registros evidenciam uma grande perícia na arte da engenharia uma vez que “... o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $1/14000$ e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excede $1/27000$ ”.

Diversos problemas geométricos podem ser também encontrados nos papiros egípcios. Boyer destaca:

“O Prob. 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. [...] Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além. [...] Uma deficiência séria em sua geometria era a falta de uma distinção claramente estabelecida entre relações que são exatas e as que são apenas afirmações”.

(BOYER 1996, p. 12)

O teorema de Pitágoras, um marco no desenvolvimento na geometria Euclidiana, no entanto não parece ter sido conhecido pelos egípcios.

Para os babilônios, por sua vez, o resultado parecia amplamente conhecido. Uma tableta, de aproximadamente 1900 a 1600 a.C., chamada Plimpton 322, apresenta o problema de medir áreas de quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo, ou seja, destaca a versão geométrica da clássica expressão algébrica $a^2 = b^2 + c^2$ que afirma que a área do quadrado cujo lado tem comprimento da hipotenusa é igual a soma da área dos quadrados cujos lados são os catetos.

Três pontos da geometria mesopotâmica merecem ser aqui destacados: a presença de problemas de álgebra não-triviais; a divisão da circunferência em 360 partes iguais, dando origem ao grau; o conhecimento de que o ângulo inscrito num semicírculo é reto. Para os babilônios, “a geometria não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em que os números são ligados a figura.” (BOYER 1996, p.12).

Apesar dos fatos acima descritos, percebe-se que tanto egípcios quanto babilônios possuíam apenas um conhecimento prático da matemática, trabalhando sempre com valores e dados específicos, sem preocupação em for-

malizar seus conhecimentos, fazer grandes generalizações em cima de seus problemas. Para Boyer:

“... não há frases explícitas do período pré-helênico que indiquem que é percebida a necessidade de provas ou que há preocupações com questões de princípios lógicos. A falta de tais expressões freqüentemente levou a um juízo de que as civilizações pré-helênicas não tinham verdadeira matemática, apesar do alto nível evidente de habilidade técnica”.

(BOYER 1996, p. 28-29)

H. Eves, falando sobre o assunto, também ressalta:

“Deve-se notar, contudo, que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: ‘Faça assim e assim’”.

(EVES 2004, p. 58)

No entanto, mesmo sem formalismos ou demonstrações, as contribuições dos egípcios e mesopotâmicos devem ser ressaltadas, dada sua importância para a matemática como ilustram seus registros.

Com o tempo, a matemática se desenvolveu e encontrou na filosofia um ponto de apoio. Nesse momento uma formulação mais precisa da matemática fez-se necessária. Seguiremos, então, a uma descrição de como isso aconteceu no lugar onde as provas formais supostamente surgiram: na Grécia Antiga.

2.2 Grécia Antiga

Na Grécia Antiga, como veremos nesta seção, houve um grande avanço na matemática. Apesar disso, os gregos muito respeitaram e utilizaram dos conhecimentos dos orientais, sobretudo aqueles do Egito e Mesopotâmia. Pode-se considerar de grande importância para o sucesso grego a absorção, na cultura helenística, de tais conhecimentos. No entanto, diferentemente dos orientais, os gregos começaram a se questionar sobre o por quê da validade de certas fórmulas e conceitos matemáticos, até então empíricas no oriente antigo. Dessa forma, as demonstrações foram aparecendo e se impondo na matemática grega. Contudo, cálculos bem complexos e de grande utilidade foram feitos por egípcios e babilônios. Um exemplo disso é o cálculo do volume do tronco de uma pirâmide, como colocam A. Miguel e A. J. Brito:

“Desconhecemos como os egípcios chegaram à fórmula do cálculo do volume do tronco da pirâmide de base quadrada, mas eles já a possuíam. As fórmulas do volume da pirâmide e da esfera foram demonstradas pelos gregos na mesma época”.

(MIGUEL 2009, p. 79)

No início da Era Helenística, que perdurou de 800a. C. a 336 a. C., dois gregos foram fundamentais para a matemática e outras áreas do conhecimento : Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (600-580 a.C. aproximadamente). Suas contribuições se devem em parte ao fato de que ambos puderam viajar ao oriente e obter informações sobre matemática e astronomia. Tales foi o primeiro, de acordo com historiadores, a empregar o raciocínio dedutivo em matemática. Por exemplo, os resultados abaixo são referidos a ele:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.

Pitágoras, por sua vez, destacou-se pelo teorema sobre triângulos retângulos que hoje é conhecido mundialmente por Teorema de Pitágoras – que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. Várias são as hipóteses sobre como Pitágoras demonstrou esse teorema, mas a mais aceita é aquela que usa a decomposição como a sugerida na Figura 2.1. Denotam-se por a e b os catetos e c a hipotenusa de um triângulo retângulo, e consideram-se os dois quadrados da figura anexa, ambos com lados iguais medindo $a+b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes: dois quadrados de lados a e b , e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes: o quadrado de lado medindo c e quatro triângulos congruentes ao triângulo dado. Subtraindo-se iguais de iguais, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

Para provar que o lado do quadrado da segunda figura mede c , usa-se o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois retos, fato conhecido na época por meio do Sumário Eudemiano. Muitas demonstrações do teorema em consideração foram dadas. E. S. Loomis, em [16], coletou e classificou nada menos que 370 demonstrações.

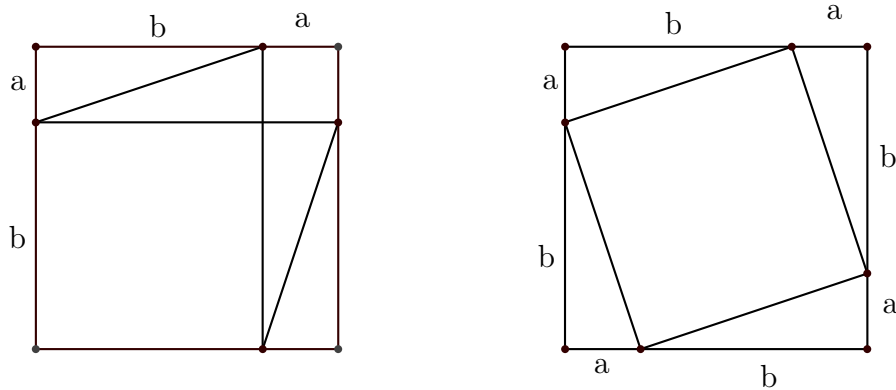


Figura 2.1: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Partindo-se das necessidades cotidianas de medirem-se comprimentos, áreas, volumes, pesos e tempo, os pitagóricos precisaram de outros números além dos inteiros. Desse modo eles desenvolveram uma “*álgebra geométrica*”, na qual problemas de natureza algébrica eram identificadas com problemas geométricos e resolvidos geometricamente. Um exemplo bem ilustrativo e simples é a representação dos números racionais em uma reta horizontal. Sejam A e B dois pontos dessa reta horizontal (B a direita de A) e tomemos o segmento AB como unidade de comprimento. Se admitirmos que A e B representam os números 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por um conjunto de pontos da reta convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos à direita de A e os negativos a sua esquerda. As frações com denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Então, para cada número racional, há um ponto da reta (se considerarmos a definição de um número racional como um quociente p/q , $q \neq 0, p, q$ inteiros). Mas os pitagóricos descobriram que nem todos os números que apareceriam nessa reta eram racionais e provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que AP é igual a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade, como mostra a Figura 2.2. Novos números foram inventados para serem associados a esses pontos. Como não eram racionais, vieram a se chamar *números irracionais*. Segundo H. Eves:

“A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso

comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. A contrapartida geométrica era igualmente espantosa, pois quem poderia duvidar que, dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados”?

(EVES 2004, p. 106)

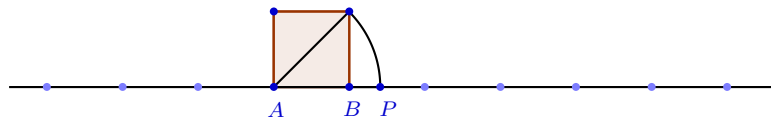


Figura 2.2: A representação do $\sqrt{2}$

A álgebra geométrica aparece em diversos trechos dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Por exemplo, como ilustra C. Boyer:

“A lei distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ era sem dúvida muito mais evidente para um estudioso grego que para o estudante que se inicia na álgebra hoje, pois o primeiro podia facilmente representar as áreas dos retângulos nesse teorema, que diz simplesmente que o retângulo sobre a e cada um dos segmentos b, c, d é igual à soma dos retângulos sobre a e cada um dos segmentos b, c, d tomados separadamente. (Figura 2)”

(BOYER 1996, p. 54)

Também devem ser mencionadas, duas pessoas importantes para o desenvolvimento da matemática na Grécia: Platão, pelo seu papel de inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção que se fez na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de computação) e Aristóteles, por ter fundado a lógica e por suas freqüentes alusões a teoremas e conceitos matemáticos.

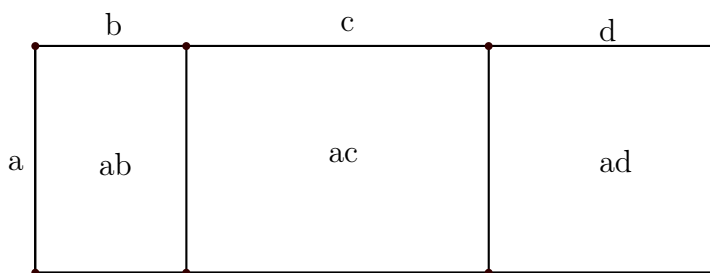


Figura 2.3: Lei Distributiva

2.3 Lógica e Teoria Axiomática

Toda teoria axiomática pretende descrever o funcionamento de certas propriedades e relações entre determinados tipos de objetos. Assim, por exemplo, a geometria axiomática fala das relações entre pontos, retas e planos; a aritmética fala das propriedades específicas dos números inteiros e a teoria dos conjuntos descreve o comportamento matematicamente relevante sobre coleções em geral. Ao fazer uma teoria axiomática parte-se dos objetos básicos de que se fala, sem defini-los. O que a teoria faz é dar uma descrição, ou seja, postular as propriedades ou relações essenciais (ou básicas) que algo deve satisfazer para poder ser considerado um objeto do qual a teoria fala. Esse é o papel dos axiomas. Assim, os axiomas de uma teoria são determinadas afirmações que servem para indicar o que é cada objeto ou para validar ou invalidar a suspeita de que algo possa ser um determinado objeto da teoria. Os axiomas próprios de uma teoria fixam as propriedades básicas ou as verdades iniciais da teoria. O desenvolvimento de uma teoria axiomática se faz por meio do estudo das consequências lógicas destes axiomas. Os axiomas (ou postulados) devem ser aceitos sem provas.

Podemos definir *Teorema* de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. Uma teoria axiomática, como dissemos antes, busca provar teoremas. Uma prova ou demonstração de um teorema é um conjunto de argumentações, podendo incluir verdades lógicas ou axiomas da teoria, que nos permita concluir a verdade do teorema. Para G. Garbi:

“Prova de uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas.”

Claramente não podemos tomar como conjunto de postulados de uma teoria axiomática qualquer conjunto de afirmações sobre os conceitos primitivos. É essencial, por exemplo, que não ocorram contradições no conjunto de postulados.

Todos os Teoremas Matemáticos são afirmações condicionais, afirmações da forma: “Se [hipóteses] então [tese]”

Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode, apesar de tudo, ser colocado nesta forma.

Exemplo: *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.* Poderia ser transformado para:

Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

Se denotarmos a hipótese de H e a tese de T, e a palavra “implicação” por \Rightarrow , então cada teorema será da forma $H \Rightarrow T$.

No exemplo anterior, H seria: “Dois lados de um triângulo são congruentes” e T seria “Os ângulos opostos destes lados são congruentes”.

Podemos dizer também que uma demonstração é um conjunto de afirmações, todas justificadas logicamente a partir das Hipóteses, que implicam na conclusão da Tese.

Seis tipos de justificativas são permitidas para as afirmações nas demonstrações:

- (1) “Por hipótese...”
- (2) “Pelo axioma...”
- (3) “Pelo teorema...” (comprovado anteriormente)
- (4) “Por definição...” (sendo coerente à teoria axiomática a que se refere)
- (5) “Pelos passos...” (um passo anterior na argumentação)
- (6) “Pelas regras... da lógica”.

Palavras como *proposição, corolário, lema*, podem ser consideradas como sinônimos de teoremas. Normalmente na Matemática essas palavras só diferem no sentido de cada uma indicar um grau diferente na dificuldade das suas demonstrações - mas todas elas indicam afirmações que são decorrentes dos axiomas.

Além disso, se $P \Rightarrow Q$ e P representa um ou mais passos em uma demonstração, então Q é um passo justificado. Notamos que se vale $P \Rightarrow Q$, não necessariamente é verdade que $Q \Rightarrow P$. Por exemplo, podemos afirmar que todo paulista é brasileiro. Representemos, nesse caso, ser paulista por P e ser brasileiro por Q. Então, podemos dizer que sempre vale $P \Rightarrow Q$. Mas a recíproca não é sempre verdadeira! Sabemos que nem todo brasileiro é paulista! Logo, não é sempre verdade que $Q \Rightarrow P$.

Quando as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são ambas verdadeiras, escrevemos apenas $P \Leftrightarrow Q$ e lê-se “ P é verdadeira se e somente se Q é válida”. Por exemplo: “Três pontos são colineares se e somente se eles pertencem a uma mesma reta”. Isso quer dizer que são válidas: “Se três pontos são colineares, então eles pertencem a uma mesma reta” e “Se três pontos pertencem a uma mesma reta então eles são colineares”.

Uma justificação lógica amplamente usada e aceita é a denominada *Redução ao absurdo*. Neste tipo de prova, você quer demonstrar uma afirmação condicional, $H \Rightarrow T$, e você assume inicialmente que a Tese é contrária ao que deseja demonstrar (negar a Tese). Essa contradição ou absurdo só podem ter sido resultado da negação da tese, então ela é verdadeira. Ou ainda e de mesma forma, se a negação da tese se reduz a um absurdo, então ela deve ser verdadeira. Por isso, redução ao absurdo.

Outras regras lógicas:

- Negar por duas vezes determinada afirmação P equivale a própria afirmação P .
- Negar uma implicação do tipo $P \Rightarrow Q$ é o mesmo que dizer que vale P e não vale Q .
- Negar duas afirmações válidas P e Q , por exemplo, significa que não vale P ou não vale Q .
- Negar para todo x vale uma afirmação P referente a x é equivalente a existir um x tal que não é válida a afirmação P referente a x .
- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x .
- Se uma afirmação P implica numa afirmação Q dentro de uma demonstração, dizemos que a afirmação Q é justificável.
- Se P implica Q e Q implica R , então P implica R .
- Se as afirmações P e Q sempre ocorrem juntas, e vale P , então vale Q .
- Dizer que P implica Q equivale a dizer que se não ocorre Q então não ocorre P .
- Dada uma afirmação P , temos que ou vale P ou não vale P . Isto é, uma afirmação não pode ser simultaneamente válida e inválida. Além disso, necessariamente deve valer uma das duas opções: validade ou invalidade.

- Suponha que diferentes casos ou afirmações S_1, S_2, \dots, S_n sejam válidos numa demonstração e tais que necessariamente um deles ocorre. Se cada uma das afirmações S_1, S_2, \dots, S_n implicam numa afirmação C , então a afirmação C é válida na demonstração.

Observamos finalmente que mesmo as regras da lógica podem ser axiomatizadas. Na filosofia ocidental, reconhecem-se quatro *leis do pensamento* clássicas. Na formulação de Leibniz tais leis ou princípios são:

- **Lei da Não Contradição:** uma proposição verdadeira não pode ser falsa e uma proposição falsa não pode ser verdadeira.
- **Lei do Terceiro Excluído:** uma proposição só pode ser verdadeira se não for falsa e só pode ser falsa se não for verdadeira, porque o terceiro valor é excluído.
- **Princípio da Razão Suficiente:** é um princípio filosófico segundo o qual tudo o que acontece tem uma razão suficiente para ser assim e não de outra forma
- **Princípio da Identidade dos Indiscerníveis:** se x e y compartilham todas suas propriedades, x e y são idênticos.

As regras, leis e princípios descritos nessa seção formam uma estrutura lógica básica sobre a qual a matemática pode ser alicerçada. As demonstrações e argumentações apresentadas no restante do trabalho e cuja utilização no ensino fundamental e médio defendemos, terão suas bases nessas ideias.

2.4 Euclides e *Os Elementos*

“*Os Elementos*” de Euclides é um tratado de matemática formado por 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.. Tal obra é tida como o principal legado desse matemático à posteridade, seja pela excelente excelente compilação do conhecimento matemático da época, seja pelo formalismo adotado que contribuiu de modo decisivo para a evolução da matemática para como a conhecemos hoje. Apesar disso, destacam-se outras quatro que sobreviveram até hoje deste ilustre matemático grego: “Os Dados”, “Divisão de Figuras”, “Os Fenômenos e Óptica”.

Os Dados foram escritos para servir de complemento aos seis primeiros capítulos (ou livros) de *Os Elementos*. Divisão de Figuras é um livro com trinta e seis proposições referentes à divisão de figuras planas. Os Fenômenos

abordam a geometria esférica necessária para a astronomia de observação. E Óptica trata, sobretudo dos efeitos da perspectiva e visão.

Apesar da importância das obras mencionadas anteriormente, *Os Elementos* merece especial destaque, pois como disse Eves: “*Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico*”. (EVES 2004, p. 167)

Há quem diga que esta obra seja uma junção bem sucedida e um arranjo de trabalhos anteriores. Mesmo que isso tenha ocorrido, Euclides teve que demonstrar e aperfeiçoar muitas coisas, mas deve-se destacar sua capacidade de organizar em uma sequência lógica as proposições, baseando-se em suposições iniciais da matemática elementar. Além disso, H. Eves destaca:

“Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio. A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não-demonstradas [...] essas afirmações assumidas inicialmente se denominam postulados ou axiomas do discurso e delas devem decorrer todas as demais afirmações do discurso”.

(EVES 2004, p. 179)

Ao contrário do que muitos pensam, *Os Elementos* não é uma obra composta apenas por geometria. Ela cobre toda a matemática elementar, ou seja, aritmética, geometria e álgebra, sendo esta última não simbólica como a moderna, mas auxiliada por problemas geométricos.

O livro está dividido em treze capítulos ou volumes, dos quais os seis primeiros dedicam-se à geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre as relações entre números que não podem ser escritos como um quociente de outros dois quaisquer (incomensuráveis) e os três últimos sobre geometria do espaço.

O primeiro livro começa com vinte e três definições, sem introdução ou preâmbulo. “*A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos*”. (BOYER 1996, p. 72).

Para Eves:

“Não se sabe com precisão que afirmações Euclides assumiu como seus postulados e axiomas, nem tampouco, quantos ele empregou, devido às mudanças e acréscimos feitos por editores subsequentes. Há, porém, razoáveis evidências de que ele aceitava que um axioma (ou noção comum) é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo”.

(EVES 2004, p. 179)

Seguem abaixo os Postulados e as Noções Comuns, apresentadas em *Os Elementos*:

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.

9. E duas retas não contêm uma área.

(EUCLIDES 2009, p. 98-99)

Boa parte das proposições do Livro I de *Os Elementos* é dada em cursos de geometria do Ensino Fundamental e Médio. Tratam-se de teoremas sobre congruência de triângulos, sobre construções simples com régua e compasso, sobre desigualdades relativas a ângulos e lados de um triângulo, sobre a teoria de retas paralelas e propriedades envolvendo ângulos formados por elas e uma transversal (levando ao fato de a soma dos ângulos de um triângulo igual a dois retos), e sobre paralelogramos. O livro I termina com a demonstração do Teorema de Pitágoras e sua recíproca. “A prova do teorema dada por Euclides não é usualmente dada nos livros de hoje, nos quais são aplicadas proporções simples aos lados de triângulos semelhantes formados baixando a altura sobre a hipotenusa”. (BOYER 1996, p. 74). Apresentaremos essa demonstração mais adiante.

Outras demonstrações que merecem destaque no Livro I de *Os Elementos* são as proposições I 5 e I 6, que provam a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles e a sua recíproca. Então, enunciemos as Proposições I 3, I 4, I 5 e I 6, conforme (EUCLIDES 2009, p. 101-103) e demonstremos essas duas últimas, segundo (EVES 2004, p. 169-170):

Proposição I 3: *Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual a menor.* (Em outras palavras, dados dois segmentos de reta com medidas diferentes, podemos subtrair o de medida menor do maior, obtendo outro segmento.)

Proposição I 4: *Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.* (Ou seja, Dados dois triângulos quaisquer, se um deles possuir dois lados congruentes a outros dois lados do outro triângulo e se os ângulos formados por esses dois lados envolvidos também forem congruentes, então os triângulos serão congruentes - Caso LAL de congruência de triângulos).

Proposição I 5: *Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si.* (Em outras palavras, dado triângulo isósceles $\triangle ABC$, com AB e AC congruentes entre si, os ângulos da base desse triângulo $\angle CBA$ e $\angle BCA$ também são congruentes e se as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} forem prolongadas até pontos quaisquer D e E , respectivamente, de modo que AD e AE ainda sejam congruentes, então também os ângulos $\angle DEA$ e $\angle EDA$ serão congruentes).

Demonstração (EVES): No caso os lados iguais AB e AC de um triângulo isósceles dado $\triangle BAC$ são prolongados igualmente até D e F , traçando-se então CD e BF . Segue-se então (pela proposição I 4) que os triângulos $\triangle AFB$ e $\triangle ADC$ são congruentes o que implica $BF = DC$ e $\angle BDC = \angle CFB$. Daí que (novamente pela proposição I 4) os triângulos $\triangle BDC$ e $\triangle CFB$ são congruentes, garantindo a congruência dos ângulos $\angle DBC$ e $\angle FCB$ e, então, dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$.

Apresentemos uma forma mais detalhada da *Demonstração* da Proposição I 5 (Figura 2.4).

- Demonstração.* (1) Seja o triângulo $\triangle ABC$ isósceles, onde $AB = AC$.
- (2) Pelo Postulado 2, prolonguemos as semirretas \vec{AB} e \vec{AC} , de modo que D seja ponto de \vec{AB} e E seja ponto de \vec{AC} , com B entre A e D e C entre A e E , de forma que $AD = AE$.
- (3) Tomemos sobre BD um ponto F e sobre CE um ponto G , de forma que $AF = AG$.
- (4) Tracemos então os segmentos FC e GB .
- (5) Como, por construção, $AF = AG$, e também $AB = AC$, então $FA = GA$ (Pela Proposição I 3, de subtração de segmentos).
- (6) E ambos os triângulos $\triangle FAC$ e $\triangle GAB$ têm o ângulo $\angle FAG$ em comum. Logo, por (5) e pela Proposição I 4, as bases FC e GB são iguais e também $\triangle AFC \equiv \triangle AGB$.
- (7) Por (6), $\angle ACF \equiv \angle ABG$ e $\angle AFC \equiv \angle AGB$.
- (8) Como $AF = AG$, $AB = AC$, então pela Proposição I 3, $BF = CG$.
- (9) Mas por (6), $FC = GB$. Com isso e por (8), $\angle BFC \equiv \angle CGB$, com BC como base comum a ambos.
- (10) Logo, por (9) e pela Proposição I 4, $\triangle BFC \equiv \triangle CGB$. Consequentemente, $\angle FBC \equiv \angle GCB$.
- (11) Assim, por (7) e por (10), como $\angle ACF \equiv \angle ABG$ e $\angle BCF \equiv \angle CBG$, teremos $\angle ABC \equiv \angle ACB$ (ângulos da base do $\triangle ABC$).

□

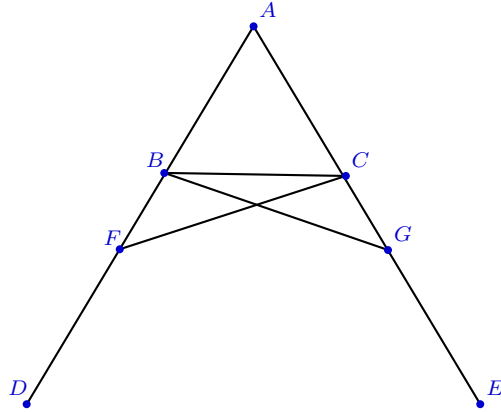


Figura 2.4: Ilustração da Proposição I 5

Proposição I 6: *Caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si.*

Demonstração (EVES): Sabe-se que no triângulo BAC se $\angle ABC = \angle ACB$ e se deseja provar que $BA = CA$. Euclides procede por *reductio ad absurdum*, admitindo que, por exemplo, $BA > CA$. Então se pode tomar em BA um ponto M tal que $BM = CA$. Pela proposição I 4 os triângulos CBM e BCA são congruentes, o que é um absurdo pois o primeiro deles é parte do segundo. Logo não se pode ter BA maior que CA . Analogamente não se pode ter CA maior que BA . Donde $BA = CA$.

Apresentemos uma forma mais detalhada da *Demonstração* da Proposição I 6 (Figura 2.5).

Demonstração. (1) Seja o triângulo ABC com $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Queremos mostrar que $AB = AC$.

- (2) Vamos supor, por absurdo, que $AB \neq AC$. E, sem perda de generalidade, que $AB > AC$.
- (3) Pela Proposição I 3, seja D ponto pertencente a AB de modo que $DB = AC$. Tracemos DC .
- (4) Como $DB = AC$ e BC é comum aos dois lados, então $\angle DBC \equiv \angle ACB$.
- (5) Por (4) e pela Proposição I 4, a base DC é igual à base AB e o triângulo DBC é igual ao triângulo ABC .
- (6) Mas, por (2), $AB > AC$, não podemos ter $DB = AB$. Absurdo!

(7) Logo, AB não é diferente de AC . Portanto, $AB = AC$.

□

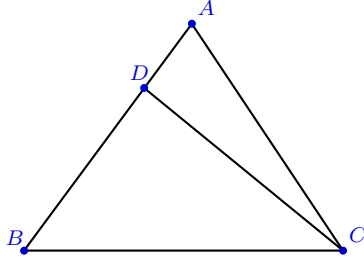


Figura 2.5: Ilustração da Proposição I 6

Apresentemos a seguir a demonstração do Teorema de Pitágoras feita por Euclides em *Os Elementos*:

Demonstração. A prova é feita mostrando que o quadrado sobre AC é igual a duas vezes o triângulo $\triangle FBA$ ou a duas vezes o $\triangle CAD$ ou ao retângulo AL , como mostra a Figura 2.6, e que o quadrado sobre BC é igual a duas vezes o $\triangle ABK$ ou a duas vezes o $\triangle BCE$ ou ao retângulo BL . Logo a soma dos quadrados é igual à soma dos retângulos, isto é, ao quadrado sobre AB . □

Detalhemos agora tal demonstração:

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ retângulo em C , com catetos AC e BC e hipotenusa AB . Seja c a medida da hipotenusa e consideremos o quadrado $ABED$. Sejam b e a as medidas, respectivamente, dos catetos AC e BC . Analogamente, consideramos os quadrados $ACGF$ e $BCHK$, como na Figura 2.6. Seja L o ponto em DE de modo que \overleftrightarrow{CL} é perpendicular a \overleftrightarrow{AB} e considere o ponto M de intersecção entre AB e CL . O quadrado $ABED$ é dividido, dessa forma, em dois retângulos: $AMLD$ e $BELM$. Agora observe que:

1. Base comum AD e a área do $\triangle ADC$ é igual a metade da área do retângulo $AMDL$, pois a altura desse triângulo é igual a medida de AM . Em outras palavras, a área do retângulo $AMDL$ é o dobro da área do $\triangle ADC$.
2. Base comum AF e a área do $\triangle FAB$ é igual a metade da área do quadrado $ACGF$, pois a altura desse triângulo é igual a medida de AC . Em outras palavras, a área do quadrado $ACGF$ é o dobro da área do $\triangle FAB$.

3. Base comum BE e a área do $\triangle EBC$ é igual a metade da área do retângulo $MBEL$, pois a altura desse triângulo é igual a medida de MB. Em outras palavras, a área do retângulo $MBEL$ é o dobro da área do $\triangle EBC$.
4. Base comum BK e a área do $\triangle ABK$ é igual a metade da área do quadrado $BCHK$, pois a altura desse triângulo é igual a medida de BC. Em outras palavras, a área do quadrado $BCHK$ é o dobro da área do $\triangle ABK$.

Por outro lado, como os ângulos $\angle DAB$ e $\angle FAC$ são retos e $\angle CAB$ é comum aos ângulos $\angle FAB$ e $\angle CAD$, concluímos que esses dois últimos são congruentes. Assim, como $AC = AF$, $\angle CAD \equiv \angle FAB$ e $AD = AB$, pelo critério de Congruência de Triângulos (LAL), temos (I) $\triangle FAB \equiv \triangle CAD$. Analogamente, concluímos que (II) $\triangle EBC \equiv \triangle KBA$.

Dessa forma, por (2), a área do quadrado $ACGF$ é igual ao dobro da área do $\triangle FAB$. Por (I), a área do quadrado $ACGF$ é o dobro da área do $\triangle CAD$. E por (1), a área do quadrado $ACGF$ é igual a área do retângulo $AMDL$.

De modo análogo e organizadamente, concluímos que a área do quadrado $BCHK$ é igual a área do retângulo $MBEL$.

Diante dessas duas últimas afirmações, concluímos que a área do quadrado $ACGF$ somada à área do quadrado $BCHK$ é igual à soma das áreas dos dois retângulos $AMDL$ e $MBEL$, que juntos formam o quadrado $ABED$.

Euclides apresenta nos *Elementos* a prova da recíproca do Teorema de Pitágoras logo em seguida de sua demonstração: se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos seus outros dois lados, o ângulo entre esses outros dois lados é reto. \square

Em relação à álgebra presente em *Os Elementos*, pode-se destacar seu aspecto de grandezas sendo representadas como segmentos de reta, satisfazendo os axiomas e teoremas da geometria. Segundo C. Boyer:

Diz-se às vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o Livro II de Os Elementos, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. [...] Um geômetra grego conhecendo quatorze teoremas da ‘álgebra’ de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje. [...] A afirmação de Euclides (Proposição II 4), ‘Se uma reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos’ é uma maneira de prolixa de dizer $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mas seu apelo

visual para um escolar de Alexandria deve ter sido muito mais vívido do que seu equivalente algébrico pode ser (Figura 5).

(BOYER 1996, p. 75)

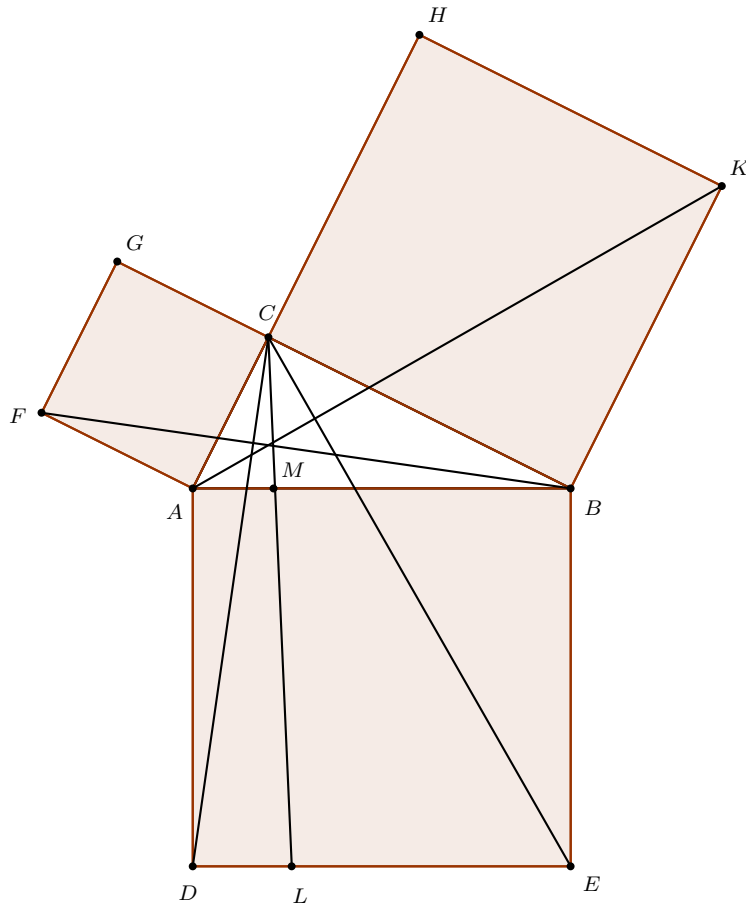


Figura 2.6: Demonstração do Teorema de Pitágoras (Euclides)

Sobre os demais livros de “Os Elementos”, vemos que nos Livros III e IV dos *Elementos*, aborda-se a geometria do círculo, por meio de tópicos como construção, ponto exterior traçando-se retas tangente e secante ao mesmo e problemas com figuras inscritas e circunscritas a um círculo. O Livro V tem grande importância por tratar-se da teoria das proporções. Muitos dos teoremas relativos a esse tema foram explorados no Livro VI, que também possui uma generalização do método de aplicação de áreas, usando-se conceitos de semelhança. Os Livros VII, VIII e IX tratam da teoria dos números, inclusive

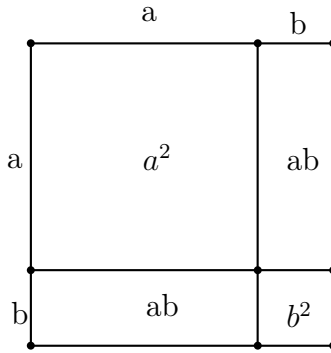


Figura 2.7: Demonstração do trinômio do quadrado perfeito

dos números primos. A incomensurabilidade dos números, tópico que levou filósofos e matemáticos a acaloradas discussões ao longo de séculos, aparece no Livro X. A incomensurabilidade dos números trata do fato de que nem todo número pode ser escrito como um quociente de outros dois quaisquer (irracionais).

Euclides volta à geometria em seus últimos livros. No Livro XI, geometria em três dimensões, familiar aos elementos de geometria no espaço. Mais uma vez há críticas com relação a algumas definições. Segundo Boyer em [5, p. 81] “*novamente é fácil criticar as definições, pois Euclides define sólido como ‘aquilo que tem comprimento, largura e espessura’ e então nos diz que uma extremidade de um sólido é uma superfície*”. Todas as proposições do Livro XII referem-se à medida de figuras usando o método de exaustão, ou seja, inscrevendo-se uma sequência de polígonos na figura que se deseja calcular a área, obtendo-se assim uma boa aproximação (convergente) para essa área. E finalmente, no Livro XIII e último, o grego dedica-se a propriedades dos cinco sólidos regulares mostrando inclusive, em uma das proposições, que não pode haver outro poliedro regular além do tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Mesmo com todo o formalismo dos Elementos, com sua sequência de postulados, teoremas e demonstrações, para Boyer “...*por padrões modernos de rigor, as pressuposições euclidianas são inadequadas, e em suas provas Euclides freqüentemente usa postulados tácitos*”. (BOYER 1996, p. 73) Um ótimo exemplo disso é a afirmação, sem provas e explicações, que dois círculos se interceptam em dois pontos distintos se tomarmos um segmento AB qualquer e traçarmos esses dois círculos com centros em A e em B com raio de medida AB . Tais “falhas” levaram por exemplo a formulação axiomática da geometria Euclideana proposta por David Hilbert em “Fundamentos da

Geometria”, tópicos que serão abordados no próximo capítulo deste trabalho.

Antes de discutirmos uma formulação moderna da geometria, no entanto, passemos pelo problema das paralelas criado pelo Quinto Postulado de Euclides, responsável por uma grande evolução da geometria e do formalismo axiomático.

2.5 O Quinto Postulado de Euclides

O Quinto Postulado de Euclides, também conhecido como Postulado das Paralelas, gerou diversas discussões por mais de dois mil anos, desde o surgimento dos Elementos.

“As referidas discussões se deram em função de uma crença na não necessidade da afirmação contida nele figurar como um postulado, ou seja, como uma afirmação que deva ser aceita sem prova como premissa básica de suporte”.

(LODOVICI, TÁBOAS 2011, p. 9)

Dessa forma, por muito tempo a comunidade matemática tentou sem sucesso provar tal postulado como teorema decorrente dos quatro postulados anteriores.

É interessante notar que, ao longo dos Elementos, o próprio Euclides retardou a utilização do Quinto Postulado até onde pode. Na sua forma original, esse postulado assim aparece:

“(Fique postulado que) caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos”.

(EUCLIDES 2009, p. 98)

A curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário ou se podia ser provado levou muitos matemáticos a apresentarem algumas “demonstrações” que, cedo ou tarde, mostraram-se serem afirmações e postulados equivalentes a ele.

A título de exemplo, abaixo apresentamos a demonstração da equivalência do *Quinto Postulado de Euclides* que talvez seja a mais conhecida de todas, a equivalência sobre a *unicidade das paralelas*.

Numa geometria neutra plana, que é aquela na qual são válidos os quatro primeiros postulados de Euclides mas não o quinto, as seguintes proposições são equivalentes:

Afirmção I: O Quinto Postulado de Euclides (escrito de outra maneira): Se \overleftrightarrow{BC} é uma transversal a \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{DC} com A e D do mesmo lado de \overleftrightarrow{BC} e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$ então $\overleftrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$.

Afirmção II: (A unicidade das paralelas) Dadas uma reta r e um ponto P não pertencente a r existe no máximo uma reta que contém P e é paralela a r .

Vamos demonstrar que *Afirmção I* \implies *Afirmção II* (Observe a Figura 2.8).

- (1) Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, considere uma reta s que contém P e é paralela a r (essa reta existe pela Proposição I 31 de *Os Elementos*).
- (2) Seja \overleftrightarrow{AB} uma reta qualquer, distinta de s , com P entre A e B.
- (3) Sendo Q o pé da perpendicular a r a partir de P, um dos ângulos $\angle APQ$ ou $\angle BPQ$ é necessariamente agudo. Suponha, sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle APQ$ seja agudo.
- (4) Tomando $D \in r$, com A e D do mesmo lado de \overleftrightarrow{PQ} , como $m(\angle APQ) + m(\angle DPQ) = m(\angle APQ) + 90 < 180$ segue, do quinto postulado de Euclides, que $\overleftrightarrow{PA} \cap \overleftrightarrow{QD} \neq \emptyset$
- (5) Portanto, $\overleftrightarrow{AB} \cap r \neq \emptyset$. Concluimos que s é a única reta paralela a r contendo P.

Vamos demonstrar agora que *Afirmção II* \implies *Afirmção I* (Figura 2.9):

- (1) Seja \overleftrightarrow{BC} uma transversal a \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{DC} com A e D do mesmo lado de \overleftrightarrow{BC} e suponha que $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$.
- (2) Escolhendo E, com E e A do mesmo lado de \overleftrightarrow{BC} , tal que $\angle EBC$ e $\angle DCB$ são ângulos suplementares temos $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. (ângulos alternos internos)
- (3) Mas $\overleftrightarrow{BA} \neq \overleftrightarrow{BE}$ e, como estamos supondo que a paralela é única, segue que $\overleftrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$.

Vejam alguns dos matemáticos que tentaram demonstrar o Quinto Postulado, seus argumentos e respectivas falhas: Ptolomeu, que viveu na época

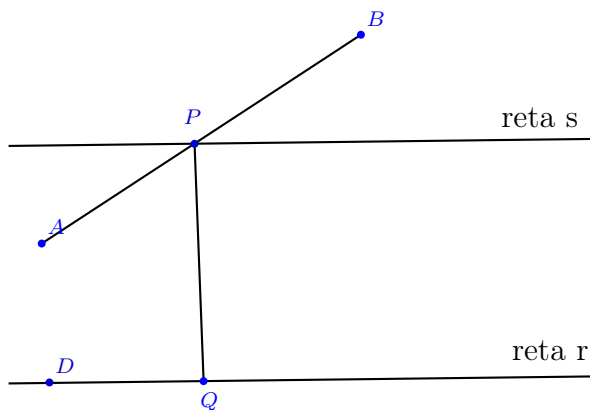


Figura 2.8: Afirmação I \implies Afirmação II

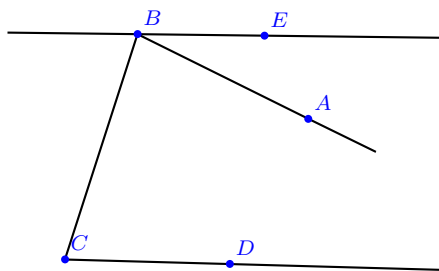


Figura 2.9: Afirmação II \implies Afirmação I

de Euclides, escreveu um livro que apresentava uma prova do quinto postulado, mas essa tinha um erro, pois assumia que se uma reta intercepta um segunda reta, também interceptará todas as retas paralelas a esta segunda. Essa afirmação é verdadeira apenas na Geometria Euclidiana.

Proclus (410 - 485), em sua tentativa de demonstração, utiliza o argumento que retas paralelas são equidistantes. Uma “prova” em que o argumento é parecido com o de Proclus aparece a seguir (Figura 2.10): Sejam \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} duas retas paralelas tais que \overleftrightarrow{EF} intercepta \overleftrightarrow{AB} em E. Suponha que F e os pontos de \overleftrightarrow{CD} estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} e considere G o pé da perpendicular a \overleftrightarrow{CD} a partir de E. Seja $H \in \overleftrightarrow{EF}$ tal que, se J é o pé da

perpendicular a \overleftrightarrow{EG} a partir de H, então $EJ > EG$. Temos então que H e J estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{CD} enquanto que E e J estão em lados opostos de \overleftrightarrow{CD} . Logo E e H estão em lados opostos de \overleftrightarrow{CD} de modo que \overleftrightarrow{EF} intersecta \overleftrightarrow{CD} . A falha está em admitir que existirá $H \in \overleftrightarrow{EF}$ tal que, se J é o pé da perpendicular a \overleftrightarrow{EG} a partir de H, então $EJ > EG$ (equivalente ao quinto postulado).

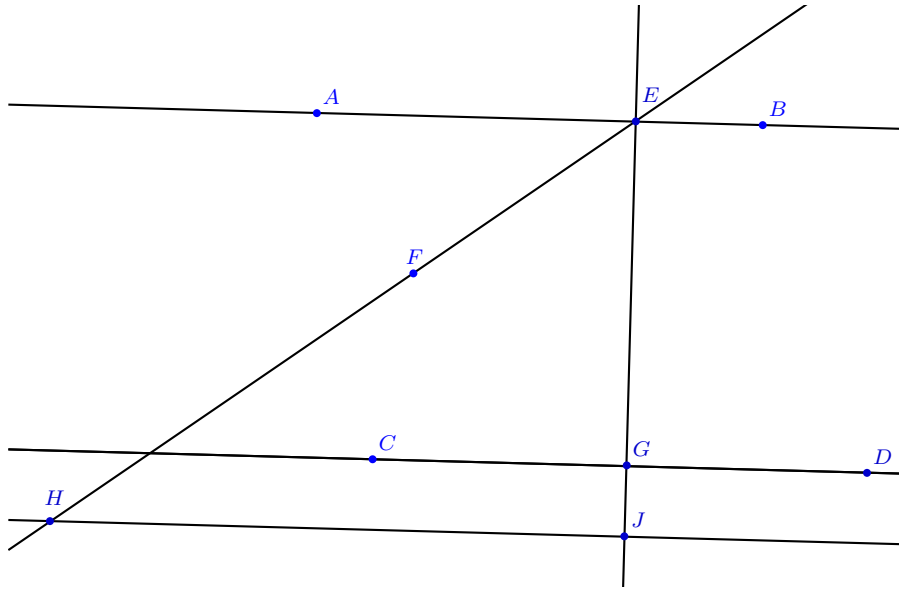


Figura 2.10: Configuração do Problema de Proclus na Geometria Euclidiana

Nasir Eddin All Tusin (1201 - 1274), Astrônomo, matemático persa e editor de uma versão dos Elementos para o árabe, Nasir supôs, sem demonstração, o seguinte axioma para tentar deduzir o quinto postulado: “sejam m e n duas retas, A um ponto de m e B um ponto de n , tais que \overleftrightarrow{AB} é perpendicular a n e forma um ângulo agudo com m . Então as perpendiculares baixadas de m a reta n , do lado do ângulo agudo, são menores do que \overleftrightarrow{AB} e as que ficam do outro lado são maiores do que \overleftrightarrow{AB} ”. Em sua demonstração, Nasir usou um quadrilátero $ABCD$ que possui dois ângulos retos, A e B , e os lados AC e BD são iguais, hoje conhecido como Quadrilátero de Saccheri, que será mencionado futuramente. E concluiu que a figura é um retângulo, traçando a diagonal, dividindo o retângulo em dois triângulos e provando a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos internos é 180° , equivalentemente ao quinto postulado.

John Wallis (1616 - 1703) utilizou o seguinte argumento em sua tentativa, também equivalente ao quinto postulado: “dado um triângulo, é possível

construir um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes”. Em linguagem matemática, isso significa que: Dados $\triangle ABC$ e \overline{DE} , existe ponto F, não colinear com D e E, tal que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Wolfgang Bolyai (1775 - 1856) apresentou a seguinte “prova” da unicidade da paralela, como mostra a Figura 2.11: Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, seja Q o pé da perpendicular a r a partir de P. Sendo s a perpendicular a \overline{PQ} com $P \in s$, temos $r \parallel s$. Seja \overleftrightarrow{AB} uma linha qualquer, distinta de s , com P entre A e B. Supondo, sem perda de generalidade, que $\angle QPA$ seja um ângulo agudo consideramos R e S tais que R está entre P e Q e Q é ponto médio de \overline{RS} . Sendo T o simétrico de R em relação à linha \overleftrightarrow{AB} temos que R, S e T são pontos não colineares e como r e \overleftrightarrow{AB} são, respectivamente, as mediatrizes de \overline{RS} e \overline{RT} , concluímos que $r \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$. Logo s é a única reta paralela a r contendo P. A falha de W. Bolyai foi concluir no final que, se r e \overleftrightarrow{AB} são, respectivamente, as mediatrizes de \overline{RS} e \overline{RT} , então $r \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$. Essa afirmação é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides.

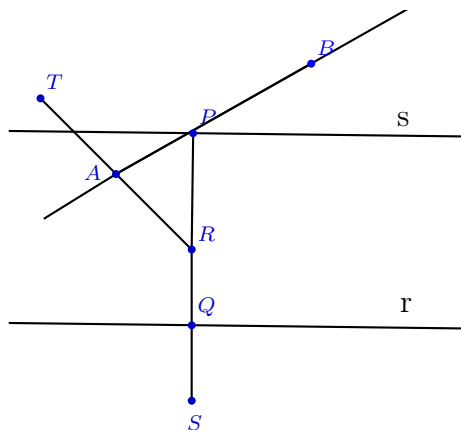


Figura 2.11: Configuração do problema de W. Bolyai

Após inúmeras tentativas de provas do quinto postulado de Euclides, alguns matemáticos desenvolveram estudos em geometria onde esse postulado não vigoraria. Assim, descobriram algumas geometrias que existiriam sem a presença do Postulado das Paralelas. Tais geometrias foram chamadas de Não-Euclidianas e serão abordadas neste trabalho mais adiante.

Capítulo 3

Hilbert e a Geometria

O desenvolvimento da estrutura axiomática da matemática como a conhecemos hoje se deu por diversos motivos, sendo um dos principais as pesquisas modernas na tentativa de se encontrar um conjunto minimal de postulados para a geometria euclidiana (em parte motivado pela descoberta de geometrias não-euclidianas). Áreas como a teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a topologia passaram por grandes evoluções e generalizações e se desenvolveram grandemente. Mesmo assim, como aponta Eves: “a maioria dessas considerações modernas têm suas raízes no trabalho dos gregos antigos, muito em particular nos *Elementos de Euclides*”. (EVES 2004, p. 655)

Os matemáticos modernos buscaram, dessa forma, analisar *Os Elementos*. Sendo esta uma das obras mais antigas e monumentais na qual se aplica o método postulacional, encontraram diversos “defeitos lógicos”. Dentre eles, podemos destacar suposições tácitas, sem base nos postulados, como, por exemplo, garantir que “*uma reta pode ser prolongada indefinidamente*” (sem apresentar postulados que suportem sua validade). Outras definições inadequadas dadas por Euclides, do ponto de vista lógico, são: “ponto é aquilo que não tem partes” e “reta é um comprimento sem largura”, já que para os gregos, não havia uma lista de conceitos primitivos, diferentemente da concepção moderna. Ainda H. Eves cita:

“Uma das armadilhas que ameaçam os que trabalham com um sistema dedutivo consiste na excessiva familiaridade com a matéria objeto do sistema. Essa armadilha responde pela maioria dos defeitos dos Elementos de Euclides. Para evitar essa armadilha é conveniente substituir os conceitos primitivos do discurso por símbolos, por exemplo, x , y , z e assim por diante. Então os postulados do discurso tornam-se afirmações sobre esses símbolos e se despem assim de significado concreto; as conclusões são obtidas, portanto, a partir de uma base

estritamente lógica, sem a intromissão de fatores intuitivos”.

(EVES 2004, p. 657)

Vários matemáticos contribuíram para o surgimento de conjuntos de postulados logicamente satisfatórios para embasar a geometria euclidiana, plana e espacial. Podemos citar M. Pasch, G. Peano, M. Pieri, D. Hilbert, O. Veblen, E. V. Huntington, G. D. Birkhoff e L. M. Blumenthal. Hilbert, por exemplo, utilizou os conceitos primitivos de ponto, reta, plano, estar em, congruente e entre, para estruturar sua geometria.

Depois de escrever seu relatório sobre “A Teoria dos Campos de Números Algébricos”, conhecido como Zahlbericht, e de fazer conferências sobre geometria não-euclidiana, David Hilbert publicou um volume pequeno chamado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da geometria). Nessa época, a maior parte da matemática, exceto a geometria, foi axiomatizada. Com esta obra, *“Hilbert deu um caráter formal à geometria, já presente na álgebra e análise”*. (BOYER 1996, p. 424) Como *Os Elementos* apresentava hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas, ele resolveu escrever um livro onde algumas relações e elementos matemáticos não poderiam ser definidos: ponto, reta, plano e as relações estar sobre, estar em, estar entre, ser congruente, ser paralelo e ser contínuo.

Ao invés dos cinco axiomas de Euclides e cinco postulados, Hilbert formulou para sua geometria uma coleção de vinte e um postulados. Foram divididos da seguinte forma: oito referentes à incidência, quatro sobre propriedades de ordem, cinco sobre congruência, três sobre continuidade (não mencionadas explicitamente por Euclides) e uma é um postulado das paralelas equivalente ao quinto postulado de Euclides. Sobre os *Fundamentos da Geometria*, Boyer afirma:

“Hilbert, através de seus Grundlagen, tornou-se o principal representante de uma ‘escola axiomática’ que foi influente na formação das atitudes contemporâneas na matemática e no ensino da matemática. Os Grundlagen iniciavam com uma frase de Kant: ‘Todo conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com ideias’. [...] Dava ênfase a que não se deve assumir, para os termos não definidos na geometria, propriedades além das indicadas nos axiomas”.

(BOYER 1996, p. 424)

Assim, o nível intuitivo na geometria deveria ser abandonado e, as relações não definidas, vistas como abstrações, indicando uma aplicação ou

correspondência. Para Hilbert “deve-se sempre poder substituir ‘pontos, retas, planos’ por ‘mesas, cadeiras, canecas de cerveja’”. Ou seja, os termos não definidos devem fazer parte de uma teoria axiomática e podem ser substituídos por outros termos de modo que os axiomas e teoremas permaneçam válidos. Os Axiomas de Hilbert estão apresentados no tópico seguinte para que possamos deduzir, por meio deles, importantes teoremas geométricos e estudarmos suas consequências.

3.1 Os elementos da Geometria

Imaginemos três sistemas diferentes de objetos: os objetos do primeiro sistema chamemos pontos e os representemos por A, B, C, \dots ; os objetos do segundo sistema chamemos retas e os representemos por a, b, c, \dots ; os objetos do terceiro sistema chamemos planos e os representemos por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Imaginemos os pontos, retas e planos como tendo certas relações mútuas e indiquemos estas relações por palavras tais como estar situado, entre, congruente; a descrição precisa e, para fins matemáticos, completa destas relações é dada por meio dos axiomas da geometria. Podemos dividi-los em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, paralelas e continuidade.

3.1.1 Axiomas de Incidência

- I 1. Para cada dois pontos A, B há sempre uma reta a que está associada com cada um dos dois pontos A, B .
- I 2. Para dois pontos A, B não há mais do que uma reta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .

Aqui, como no que segue, por dois, três,... pontos, retas, planos, entende-se sempre, respectivamente, pontos, retas, planos, *diferentes*. Notamos também que em lugar de *estar associados* empregaremos também outras expressões como por exemplo: a passa por A e por B ; a liga A e, ou com B ; A está sobre a ; A é um ponto de a ; o ponto A existe sobre a , etc. Quando A está sobre a reta a e, além disso, sobre uma reta b , utilizaremos também expressões: as retas a e b cortam-se em A , têm em comum o ponto A , etc.

- I 3. Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.
- I 4. Para quaisquer três pontos A, B, C que não estão sobre uma mesma reta, há sempre um plano α , que está associado com qualquer dos três

pontos A, B, C . Para cada plano há sempre um ponto que está associado com ele.

Empregamos também as expressões: A está em α ; A é ponto de α ; etc.

I 5. Para cada três pontos que não estão sobre uma mesma reta, não há mais do que um plano que está associado com qualquer dos três pontos A, B, C .

I 6. Se dois pontos A, B duma reta a estão num plano α , então cada ponto de a está no plano α .

Neste caso dizemos: a reta a está no plano α , etc.

I 7. Se dois planos α, β têm um ponto comum A , então têm, pelo menos, mais um outro ponto comum.

I 8. Há, pelo menos, quatro pontos que não estão no mesmo plano.

O axioma I 7, exprime que o espaço não tem mais do que três dimensões, o axioma I 8, pelo contrário, que o espaço não tem menos do que três dimensões.

3.1.2 Axiomas de Ordem

Vejam agora os quatro axiomas de Ordem, que definem a noção de *entre* e tornam possível, com base nesta noção, a ordenação dos pontos sobre uma reta, num plano e no espaço:

Assumimos que os pontos de uma reta dispõem-se com certas relações entre si, para cuja descrição nos serve, em particular, a palavra *entre*.

II 1. Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C , então A, B, C são três pontos distintos de uma reta, e B está também entre C e A . (Figura 3.1)

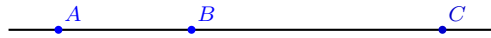


Figura 3.1: Ponto B entre A e C

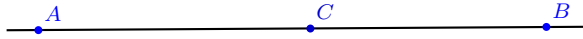


Figura 3.2: Ponto C entre A e B

II 2. Para cada dois pontos A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a reta \overleftrightarrow{AB} tal que C está entre A e B. (Figura 3.2)

II 3. Dados três pontos quaisquer de uma reta, não há mais do que um que está entre os outros dois.

Além destes axiomas lineares de ordem servimo-nos ainda de um axioma de ordem para o plano.

Definição 3.1.1. Consideremos sobre uma reta a dois pontos A e B; chamemos ao sistema dos dois pontos A e B, um *segmento* e representamo-lo por AB ou BA. Os pontos entre A e B chamam-se pontos do segmento AB, ou também *interiores* ao segmento AB; os pontos A e B chamam-se pontos *extremos* do segmento AB. Todos os restantes pontos da reta a dizem-se *exteriores* ao segmento AB.

II 4. Sejam A, B, C três pontos que não estão alinhados e a uma reta no plano ABC , que não encontra nenhum dos pontos A, B, C; se a reta a passa por um ponto do segmento AB, então, seguramente, passa também ou por um ponto do segmento AC ou por um ponto do segmento BC. (Figura 3.3)

A seguir apresentamos dois teoremas que são consequências dos axiomas de incidência e da ordem:

Teorema 3.1.2. Para cada dois pontos A e C há sempre pelo menos um ponto D, sobre a reta AC, que está entre A e C.

Demonstração. Segundo o axioma I 3, há um ponto E exterior à reta AC e, segundo o axioma II 2, há sobre AE um ponto F tal que E é um ponto do segmento AF. Ainda segundo o mesmo axioma e pelo axioma II 3, há sobre FC um ponto G que não está sobre o segmento FC. Em vista do axioma II 4, a reta \overleftrightarrow{EG} deve portanto cortar o segmento AC num ponto D. Aplicando agora o axioma II 4, ao triângulo $\triangle AEG$ e à reta \overleftrightarrow{CF} , mostra-se que D está entre A e E, e pela aplicação do mesmo axioma ao triângulo $\triangle AEC$ e à reta \overleftrightarrow{DG} reconhece-se que D está entre A e C, como mostra a Figura 3.4.

□

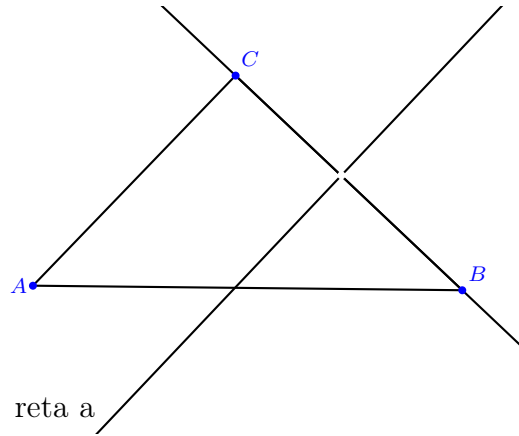


Figura 3.3: Ilustração do Axioma II 4

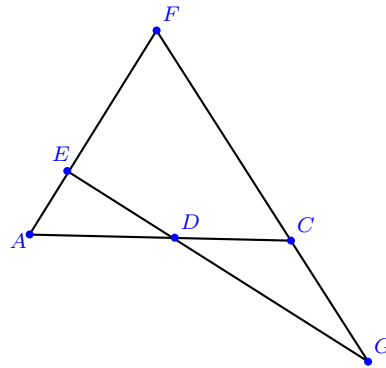


Figura 3.4: Ilustração do Teorema 3.1.2

Teorema 3.1.3. *Dados três pontos A, B, C , quaisquer de uma reta, há sempre um que está entre os outros dois.*

Demonstração. (devida a A. Wald) Suponhamos que A não está entre B e C , e que C também não está entre A e B . Unamos um ponto D , que não esteja sobre a reta \overleftrightarrow{AC} , com B e escolhamos segundo o axioma II 2, um ponto G sobre a reta BD , tal que D esteja entre B e G . A aplicação do axioma II 4, ao triângulo $\triangle BCG$ e à reta \overleftrightarrow{AD} mostra que as retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{CG} se cortam em um ponto E que está entre C e G ; do mesmo modo se vê que as retas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{AG} se encontram num ponto F que está entre A e G , como mostra a Figura 3.5. \square

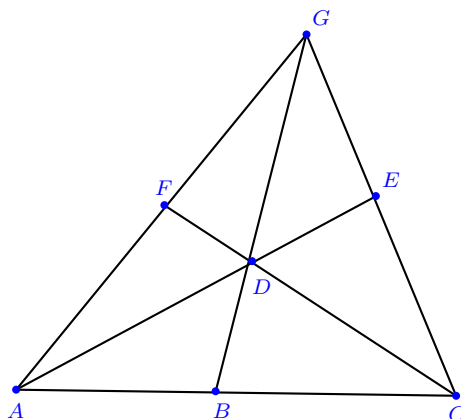


Figura 3.5: Ilustração do Teorema 3.1.3

3.1.3 Axiomas da Congruência

Assumimos inicialmente que os segmentos têm certas relações entre si, que descreveremos servindo-nos das palavras *congruente* ou *igual*.

- III 1.** Se A, B são dois pontos sobre uma reta a e se, além disso, A' é um ponto sobre a mesma ou outra reta a' , então pode encontrar-se sempre um ponto B' sobre um dado lado da reta a' , e a partir de A' , tal que o segmento AB é congruente com, ou igual, ao segmento $A'B'$, simbolicamente: $AB \equiv A'B'$.

Com este axioma exige-se a possibilidade da construção [ou deslocamento] de segmentos. A unicidade demonstrar-se-á mais tarde. Além disso, têm o mesmo significado as seguintes fórmulas:

$$AB \equiv A'B', AB \equiv B'A', BA \equiv A'B' \text{ e } BA \equiv B'A'.$$

- III 2.** Se um segmento $A'B'$ e um segmento $A''B''$ são congruentes com o mesmo segmento AB , então, também o segmento $A'B'$ é congruente ao segmento $A''B''$; ou, abreviadamente: se dois segmentos são congruentes a um terceiro, então são congruentes entre si.

Ainda valem a *simetria* e a *transitividade* da congruência de segmentos:

$$\begin{aligned} &\text{Se } AB \equiv A'B', \text{ então também é } A'B' \equiv AB; \\ &\text{Se } AB \equiv A'B' \text{ e } A'B' \equiv A''B'', \text{ então também é } AB \equiv A''B''. \end{aligned}$$

Como consequência da simetria da congruência de segmentos, podemos utilizar a seguinte maneira de dizer: dois segmentos são *congruentes entre si*.

III 3. Sejam AB e BC dois segmentos, sem pontos comuns, sobre a reta a e sejam, além disso, $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos sobre a mesma ou sobre uma outra reta a' , e do mesmo modo sem pontos comuns; então se for:

$AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, será também $AC \equiv A'C'$. (Figura 3.6)

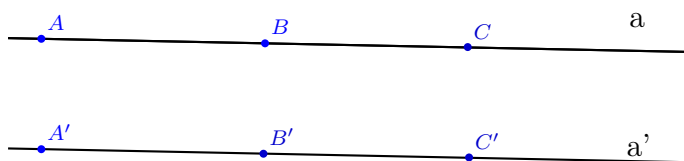


Figura 3.6: Ilustração do Axioma III 3

Trataremos a construção [ou deslocamento] de ângulos precisamente como a construção de segmentos. Além da *possibilidade* da construção de ângulos, deveremos exigir também, sem dúvida axiomáticamente, a *unicidade*; mas a transitividade e a aditividade serão demonstráveis.

Definição 3.1.4. Seja α um plano qualquer e sejam \vec{AB} e \vec{AC} duas semirretas quaisquer, diferentes, no plano α , que partem do ponto A e que pertencem a retas distintas. Ao sistema dessas semirretas \vec{AB} e \vec{AC} chamamos ângulo e representamo-lo por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$.

As semirretas \vec{AB} e \vec{AC} tomadas juntamente com o ponto A repartem os restantes pontos do plano em dois domínios: de todos os pontos que estão com \vec{AB} do mesmo lado de \overleftrightarrow{AC} e com \vec{AC} do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} , diz-se então no *interior* do ângulo $\angle BAC$; de todos os outros pontos diz-se que estão fora ou no *exterior* deste ângulo. Reconhece-se facilmente, com base nos axiomas I e II, que os dois domínios contém pontos, e que um segmento que una dois pontos do interior do ângulo está inteiramente no interior desse ângulo.

Assumiremos também para os ângulos a existência de certas relações, que descreveremos servindo-nos das palavras *congruente* ou *igual*.

III 4. Sejam dados um ângulo $\angle BAC$ num plano α e uma reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ num plano α' assim como um determinado lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$ em α' . Seja $\vec{A'B'}$ uma semirreta da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, que parta do ponto A' . Então há no plano α' uma, e uma só semirreta $\vec{A'C'}$, tal que o ângulo $\angle BAC$ é congruente

com, ou igual ao ângulo $\angle B'A'C'$ e, ao mesmo tempo, tal que todos os pontos interiores ao ângulo $\angle B'A'C'$ estão no lado dado de $\overrightarrow{A'B'}$; simbolicamente:

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

Cada ângulo é congruente a si próprio, isto é, tem-se sempre

$$\angle BAC \equiv \angle BAC$$

Dizemos também abreviadamente: cada ângulo pode ser *construído* num dado lado duma reta de um plano dado, e a partir de uma semirreta dessa reta, de única maneira.

Um ângulo com vértice B tendo, sobre qualquer um dos lados, o ponto A e sobre o outro o ponto C designar-se-á também por $\angle ABC$ ou abreviadamente $\angle B$.

III 5. Se para dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são válidas as congruências $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, então é sempre verificada também a congruência $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

A *unicidade* da construção de segmentos resulta, com o auxílio do axioma III 5, da unicidade da construção de ângulos.

De fato, suponhamos que o segmento AB é deslocado a partir de A' para uma semirreta que parte de A', de duas maneiras, até B' e até B''. Então, escolhendo um ponto C' fora da reta A'B' obtemos as congruências:

$A'B' \equiv A'B''$, $A'C' \equiv A'C'$, $\angle B'A'C' \equiv \angle B''A'C'$, segundo o axioma III 5,

$$\angle A'C'B' \equiv \angle A'C'B'',$$

contradizendo a unicidade da construção de ângulos, exigida no axioma III 4. (Conforme Figura 3.7)

A seguir são apresentados quatro teoremas que são conseqüências dos axiomas da congruência:

Definição 3.1.5. Dois ângulos que têm o vértice e um lado comuns e cujos lados não comuns constituem uma reta chamam-se ângulos *adjacentes suplementares*. Dois ângulos com o vértice comum em que cada lado dum deles constitui com um dos lados do outro de uma reta, chamam-se ângulos *opostos pelo mesmo vértice*. Um ângulo que é congruente com seu ângulo adjacente suplementar chama-se *ângulo reto*.

Demonstremos agora alguns teoremas:

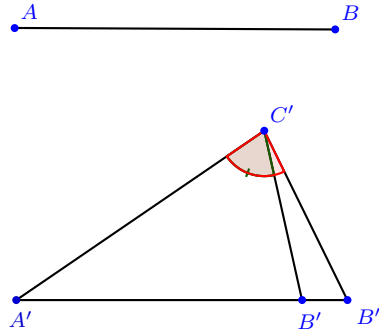


Figura 3.7: Unicidade da construção de ângulos

Teorema 3.1.6. *Num triângulo com dois lados congruentes, os ângulos opostos a esses lados são congruentes, ou abreviadamente: em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.*

Demonstração. Este teorema resulta do axioma III 5 e da última parte do axioma III 4. \square

Teorema 3.1.7. *(Caso LAL) Um triângulo ABC é congruente com um triângulo $A'B'C'$ desde que se verifiquem as congruências:*

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle A \equiv \angle A'$$

Demonstração. Pelo axioma III 5 são verificadas as congruências:

$\angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'$ e só precisamos verificar a validade da congruência: $BC \equiv B'C'$. Suponhamos, pelo contrário, que BC e $B'C'$ não sejam congruentes, e determinemos sobre $B'C'$ o ponto D' tal que $BC \equiv B'D'$; então afirma o axioma III 5, aplicado aos dois triângulos ABC e $A'B'D'$, que é $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ e também com $\angle B'A'C'$; isto não é possível visto que cada ângulo só pode ser de uma única maneira, deslocado num plano, a partir de uma semirreta dada, para um dado lado. Com isto demonstrou-se que o triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$, como mostra a Figura 3.8. \square

Do mesmo modo se demonstra facilmente o teorema:

Teorema 3.1.8. *(Caso ALA) Um triângulo ABC é congruente a um outro triângulo $A'B'C'$ desde que se verifiquem as congruências*

$$AB \equiv A'B', \angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B'$$

Teorema 3.1.9. *Se um ângulo $\angle ABC$ é congruente a outro ângulo $\angle A'B'C'$, então também o ângulo adjacente suplementar $\angle CBD$ é congruente com o ângulo adjacente suplementar $\angle C'B'D'$ do outro (Figura 3.9).*

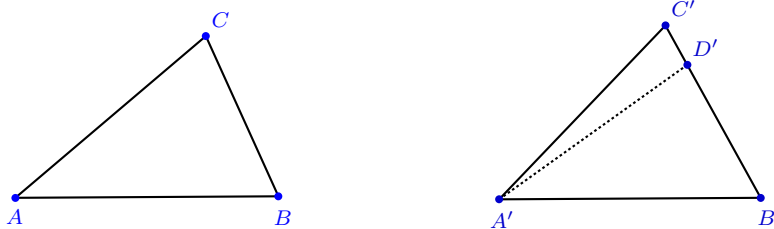


Figura 3.8: Ilustração do Teorema 3.1.7

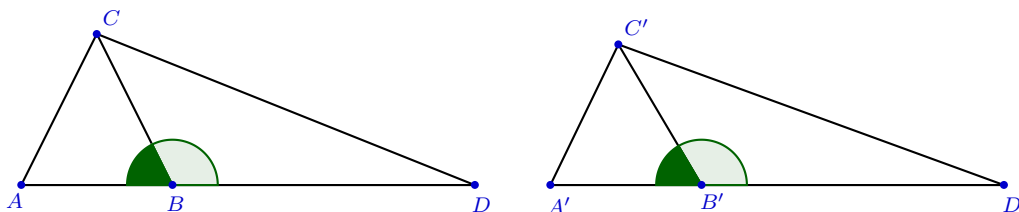


Figura 3.9: Ilustração do Teorema 3.1.9

Demonstração. Escolhamos os pontos A' , C' , D' sobre os lados que partem de B' de tal modo que seja $AB \equiv A'B'$, $CB \equiv C'B'$, $DB \equiv D'B'$.

Do Teorema 3.1.8 resulta então que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$, isto é, são válidas as congruências

$$AC \equiv A'C' \text{ e } \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

Porque, além disso, pelo axioma III 3 o segmento AD é congruente ao segmento $A'D'$, resulta outra vez pelo Teorema 3.1.8, que o triângulo CAD é congruente ao triângulo $C'A'D'$, isto é, são válidas as congruências

$$CD \equiv C'D' \text{ e } \angle ADC \equiv \angle A'D'C'$$

e daqui resulta segundo o axioma III 5, considerando os triângulos BCD e $B'C'D'$, que $\angle CBD \equiv \angle C'B'D'$. \square

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema referente à Congruência de triângulos conhecido como (Caso LLL), segue um teorema que será útil em nossa demonstração:

Teorema 3.1.10. *Sejam Z e W dois pontos que estão em lados diferentes duma reta XY e suponhamos válidas as congruências $XZ \equiv XW$ e $YZ \equiv YW$. Então, também o ângulo $\angle XYZ$ é congruente ao ângulo $\angle XYW$.*

Teorema 3.1.11. *(Caso LLL) Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$ os lados correspondentes são respectivamente, congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Em virtude da simetria da congruência de segmentos, é suficiente demonstrar que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$. Desloquemos o ângulo $\angle BAC$ para A' e para um e outro lado da semirreta $A'C'$. Escolhamos no lado do ângulo que está com B' do mesmo lado de $A'C'$ o ponto B_0 tal que $A'B_0 \equiv AB$; e no outro lado livre escolhamos B'' de modo que $A'B'' \equiv AB$ (Figura 3.10). Pelo Teorema 3.1.8 $BC \equiv B_0C'$ e também $BC \equiv B''C'$. Estas congruências, juntamente com as da hipótese, dão segundo o axioma III 2, as congruências

$A'B'' \equiv A'B_0$, $B''C' \equiv B_0C'$ e, correspondentemente, $A'B'' \equiv A'B'$, $B''C' \equiv B'C'$. \square

As hipóteses do Teorema 3.1.10 servem, portanto, tanto aos dois triângulos $A'B''C'$ e $A'B_0C'$, como aos dois triângulos $A'B''C'$ e $A'B'C'$, isto é, o ângulo $\angle B''A'C'$ é congruente não só com o ângulo $\angle B_0A'C'$, mas também com o ângulo $\angle B'A'C'$. Porém, visto que pelo axioma III 4, cada ângulo pode ser deslocado num plano, de uma única maneira, a partir de uma semirreta dada, e para um dado lado desta, então a semirreta $A'\vec{B}_0$ coincide com a semirreta $A'\vec{B}'$, isto é, aquele ângulo congruente com $\angle BAC$ que parte de $A'C'$ para o referido lado, é o ângulo $\angle B'A'C'$. Da congruência $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ e da congruência de segmentos pressuposta, resulta então, pelo Teorema 3.2.4, a tese.

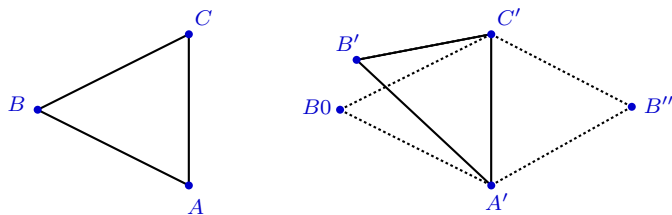


Figura 3.10: Ilustração do Teorema 3.1.11

3.1.4 Axioma das paralelas

O axioma das paralelas, como proposto por Hilbert, afirma:

- IV. Seja a uma reta qualquer e A um ponto exterior a a ; então, no plano determinado por a e A há, no máximo, uma reta que passa por A e não corta a . Chama-se essa única reta de *paralela* a a passando por A .

Note que o axioma não pede a existência da reta paralela, pois essa é decorrente dos demais axiomas da geometria. De fato, o teorema dos ângulos

alternos internos (Teorema 3.2.2), demonstrado mais a frente (sem o uso do axioma da paralelas), garante a existência de uma reta paralela a a pelo ponto A .

Tomando, além dos axiomas da congruência, o axioma das paralelas, chegamos facilmente ao teorema:

Teorema 3.1.12. *Se duas paralelas são cortadas por uma terceira reta, então os ângulos correspondentes e os ângulos alternos são congruentes.*

Observamos que a recíproca deste teorema, ou seja, o fato de que a congruência dos ângulos correspondentes, ou a dos ângulos alternos, tem como consequência que as retas são paralelas, é resultado imediato do teorema dos ângulos alternos internos (Teorema 3.2.2), consequência dos axiomas de incidência, ordem e congruência, apenas.

Ainda assumindo o axiomas das paralelas é fácil ver que vale:

Teorema 3.1.13. *Os ângulos de um triângulo perfazem dois retos.*

3.1.5 Axiomas da continuidade

Apresentam-se a seguir os axiomas de continuidade:

- V 1.** (Axioma da medida ou axioma de Arquimedes) Se AB e CD são dois segmentos quaisquer, então há na reta \overleftrightarrow{AB} um número finito de pontos A_1, A_2, \dots, A_n tais que os segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ são congruentes com o segmento CD e B está entre A e A_n .
- V 2.** (Axioma linear da completabilidade) Os pontos de uma reta constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas I - III e V 1.

Os dois axiomas da continuidade são axiomas ditos *lineares*.

É essencialmente do *axioma* linear da completabilidade que resulta a seguinte afirmação mais geral:

Teorema 3.1.14. *(Teorema da completabilidade) Os elementos da geometria (isto é, os pontos, retas, planos) constituem um sistema que já não pode ser ampliado por meio de pontos, retas e planos, se se quer manter os axiomas de incidência, da ordem, de congruência e o axioma de Arquimedes; eles constituem um sistema que já não pode ser assim ampliado se se quer manter todos os axiomas.*

Demonstração. Designemos por elementos *velhos* os elementos existentes antes da ampliação, e por elementos *novos* os que foram introduzidos pela ampliação. A admissão de elementos novos conduz imediatamente à admissão de um ponto novo N .

Pelo axioma I 8 há quatro pontos velhos A, B, C, D , não existentes num plano. Os símbolos podem ser escolhidos de modo que A, B, N , não estejam numa reta. Os dois planos distintos, ABN e ACD têm, pelo axioma I 7, além de A , mais um ponto E , comum. E não está na reta AB , porque do contrário B estaria no plano ACD . No caso de E ser um ponto novo, então no plano velho ACD está um ponto novo E ; caso contrário, de ser E um ponto velho, então está o ponto novo N num plano velho, no plano ABE . Portanto, em qualquer caso há um ponto novo num plano velho.

Num plano velho há um triângulo velho FGH e sobre o segmento FG há um ponto velho I (Figura 3.11). Unamos um ponto novo L com I , então pelo axioma II 4, as retas IL e FH , ou as retas IL e GH encontram-se num ponto K , se o ponto L não estiver na reta IH .

Qualquer das três suposições está, por isso, em contradição com o axioma linear da completabilidade. Portanto é de rejeitar a admissão dum ponto novo num plano velho e, conseqüentemente, a simples admissão de elementos novos. \square

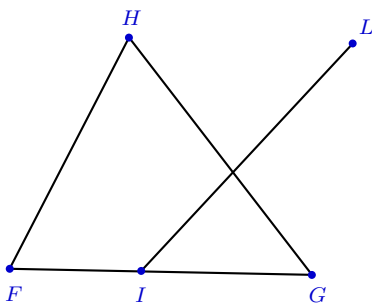


Figura 3.11: Ilustração do Teorema 3.1.14

Percebe-se, diante dos Axiomas de Hilbert, sua intensa preocupação com o rigor matemático e, segundo R. Pietropaolo em [18, p.57], “*abandonando experiências com o mundo sensível e a intuição*”. Ainda afirma que este trabalho se afastou, de alguma forma, da tradição aristotélica grega, onde “*os axiomas deveriam simplesmente exprimir os fatos óbvios acerca de conceitos já conhecidos intuitivamente*”.

3.1.6 Exemplificando um dos “defeitos lógicos” de *Os Elementos*

Como já mencionado neste trabalho, Euclides utilizou em suas demonstrações algumas ideias “auto-evidentes”, citadas em *Os Elementos* sem serem provadas. Essas falhas foram evidenciadas ao longo do tempo por diversos matemáticos. Vejamos a seguir um exemplo de “defeito lógico”, presente na demonstração da Proposição I 1 de *Os Elementos*. Em seguida, como esse “defeito” fora corrigido por meio do Princípio da Continuidade Circular, utilizando-se em sua demonstração o Postulados da Continuidade de Dedekind (que se assemelha a um dos Axiomas de Continuidade de Hilbert).

Proposição I 1: É possível construir um triângulo equilátero a partir de um dado segmento.

Demonstração. Dado o segmento AB, constrói-se um círculo de centro em A passando por B, ou seja, com raio medindo AB. Também se constrói outro círculo de centro em B passando por A, com raio medindo BA. A partir de C, *ponto de interseção entre os dois círculos*, traça-se os segmentos CA e CB. Como C pertence às duas circunferências e A e B são os centros delas, os segmentos CA e CB têm medidas iguais ao segmento AB. Portanto, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero. \square

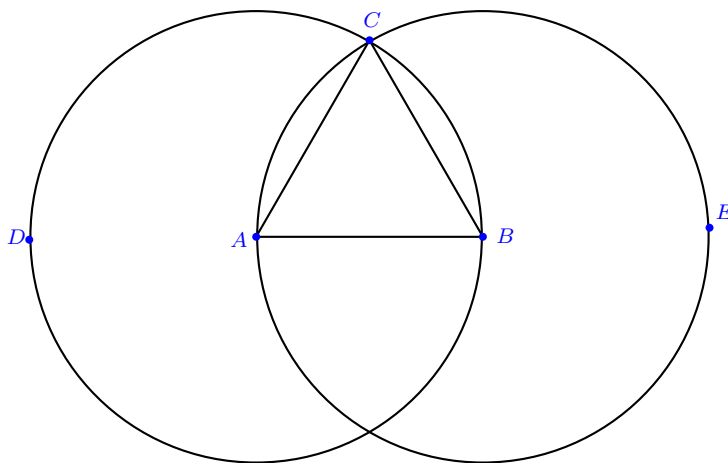


Figura 3.12: Ilustração da Proposição I 1 de *Os Elementos*

Nessa demonstração, Euclides afirma que os dois círculos construídos com raio medindo AB se encontram num ponto C. O autor não incluiu nenhum

axioma ou postulado em sua prova que verifica esse fato, como o Princípio da Continuidade Circular, que prova que os círculos se encontram. Os axiomas de continuidade de Hilbert, mencionados no tópico anterior, garantem a demonstração rigorosa de tal resultado, como podemos observar de forma mais detalhada no terceiro capítulo de (GREENBERG, 2008). Antes de apresentarmos uma demonstração do Princípio de Continuidade Circular, enunciemos o Postulado de Dedekind, que será utilizado em tal prova:

Postulado de Dedekind: “Se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tal que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão”.

Demonstremos então o Princípio da Continuidade Circular, segundo (HEATH 1956, p. 238-240):

Princípio da Continuidade Circular: Se em um determinado plano um círculo C tem um ponto X pertencente a ele e um ponto Y fora de C mas pertencente a outro círculo C' , então os dois círculos se interceptam em dois pontos.

Demonstração. Seja o círculo C , dividido pelos pontos A e B em dois semicírculos, com os pontos movendo-se de A para B . Consideremos um desses semicírculos e dois pontos P e Q , pertencentes a esse semicírculo, de forma que P precede Q (de A para B).

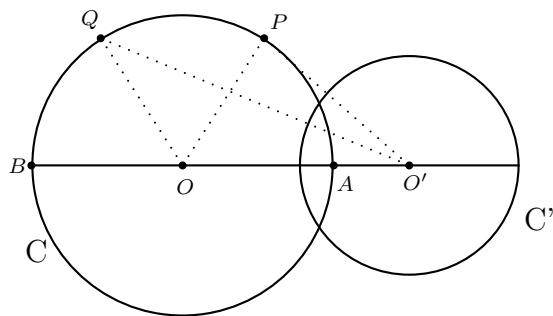


Figura 3.13: Demonstração do Princípio da Continuidade Circular - I

Comparando-se os triângulos $\triangle OO'P$ e $\triangle OO'Q$, observamos que o segmento OO' é comum a ambos, OP é congruente a OQ e o ângulo $\angle POO'$ é menor que o ângulo $\angle QOO'$. Assim $O'P < O'Q$.

Agora, consideremos o semicírculo $APQB$ dividido em duas partes, em que os pontos da primeira parte estão dentro do círculo C' e os demais pontos (da segunda parte), fora do círculo C' . Aplicando o Postulado de Dedekind

(que é válido para arcos de círculos e para segmentos), existe um ponto M de interseção entre C e C' .

Mostraremos que $O'M = R'$.

Vamos supor, por absurdo, que $O'M < R'$. Seja σ a diferença entre R' e $O'M$ e seja M' um ponto tal que a corda MM' não é maior que σ . Dessa forma, M' está no semicírculo entre os pontos B e M .

Então, no triângulo $\triangle O'MM'$,

$O'M' < O'M + MM' < O'M + \sigma$, onde $O'M' < R'$.

Isso mostraria que M' , ponto pertencente ao arco MB , estaria no interior do círculo C' . Mas isso é um absurdo, pois contradiz a ideia de que o arco MB era a “segunda parte” no Postulado de Dedekind, onde construiu o ponto M para ser o ponto de interseção do círculo C' com o arco $APQB$, separando o arco em duas partes. Como os pontos seguem de A para B , qualquer ponto de MB estaria fora do círculo C' .

Analogamente é possível provar que $O'M$ não é maior que R . Portanto, $O'M = R$. Dessa forma, demonstra-se que os círculos se intersectam em dois pontos.

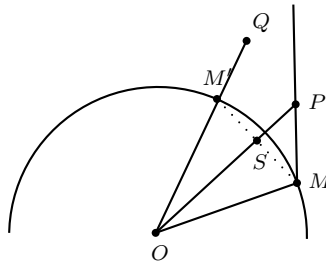


Figura 3.14: Demonstração do Princípio da Continuidade Circular - II

OBS: Para encontrar um ponto M' tal que a corda MM' não é maior que σ , devemos ter M de modo que o segmento MP seja prolongado partindo de OM , e MP será interceptado quando igual a $\sigma/2$.

Trace OP e prolongue outro raio OQ de modo que o ângulo $\angle POQ$ seja igual ao ângulo $\angle MOP$.

A interseção M' , de OQ com o círculo, satisfaz a condição requerida. Para MM' interceptar OP no ponto S , o ângulo deve ser reto.

Portanto, no triângulo retângulo $\triangle MSP$, MS não será maior que MP (será menor, a menos que MP coincida com MS , quando iguais).

Portanto MS não é maior do que $\sigma/2$, então MM' não é maior do que σ . \square

Portanto, diante dos resultados apresentados, percebemos que a demonstração rigorosa da Proposição I 1 de *Os Elementos* depende da utilização do

Princípio da Continuidade Circular. Os argumentos de Euclides aliados a este princípio, garantem a prova formal de tal Proposição, livrando-a de sua “falha” ou “defeito” lógico.

3.2 Geometria Neutra

Após enunciar os Axiomas de Hilbert, nosso objetivo agora é discorrer a respeito da Geometria Neutra, que é uma geometria elementar na qual admitem-se como verdadeiros os axiomas de incidência, ordem, congruência e continuidade, sem assumir o axioma das paralelas, ou seja, sem assumir qualquer afirmação equivalente ao Quinto Postulado de Euclides (O Postulado das Paralelas). Todos os resultados já apresentados, como proposições, teoremas, lemas, corolários, em que não se utilizou o Quinto Postulado em algum momento, são pertencentes e válidos na Geometria Neutra. Ressalta-se que o próprio Euclides adiou o uso do Quinto Postulado o máximo que pôde. Seu primeiro uso apareceu apenas na Proposição I 29 do primeiro livro de *Os Elementos*.

Enunciemos alguns dos principais resultados da chamada Geometria Neutra:

Definição 3.2.1. Quando dois ângulos quaisquer $\angle BAC$ e $\angle ABC$ são tais que $m(\angle BAC) + m(\angle ABC) = 90^\circ$, os ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABC$ são chamados de *complementares*. Já se dois ângulos quaisquer $\angle ACD$ e $\angle ADC$ são tais que $m(\angle ACD) + m(\angle ADC) = 180^\circ$, os ângulos $\angle ACD$ e $\angle ADC$ são chamados ângulos *suplementares*.

Teorema 3.2.2. (*Ângulos Alternos Internos*) No plano de Hilbert, se duas retas são cortadas por uma transversal e se elas tiverem um par de ângulos alternos internos (com relação a essa transversal) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Demonstração. (1) Sejam as retas l (com pontos A , B e C) e l' (com pontos A' , B' e C') e a reta t transversal as duas primeiras nos pontos B e B' , respectivamente. Sejam os ângulos $\angle A'B'B$ e $\angle CBB'$ alternos internos e congruentes entre si.

(2) Vamos supor, por absurdo, que l e l' se interceptam em um ponto D , como mostra a Figura 3.12.

(3) O ponto D está do mesmo lado de C e C' em relação à reta t .

(4) Então existe um ponto E em $\vec{B'A'}$ tal que $B'E \equiv BD$ (pelo Axioma III 1).

- (5) O segmento BB' é comum aos dois e como $\angle A'B'B$ e $\angle CBB'$ então pelo Teorema (LAL) temos que $\triangle B'BD \equiv \triangle BB'E$.
- (6) Em particular, temos $\angle DB'B \equiv \angle EBB'$.
- (7) Como $\angle DB'B$ é suplementar de $\angle EB'B$, pois juntos formam um ângulo de medida 180° , então $\angle EBB'$ também é suplementar de $\angle DBB'$ (por III 4).
- (8) Isto significa que E pertenceria a l , e concluímos que l e l' tem dois pontos, D e E , em comum, contradizendo a Proposição que duas retas concorrentes só se interceptam em um único ponto.
- (9) Assim, por Redução ao Absurdo, l e l' são paralelas. □

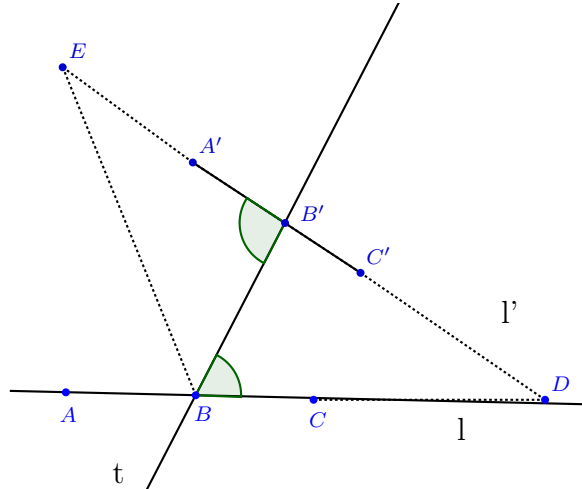


Figura 3.15: Ilustração do Teorema 3.2.2

Teorema 3.2.3. (*Ângulo Externo*) *Em nenhum plano de Hilbert, um ângulo externo de um triângulo é maior do que outro interno remoto. (Figura 3.13) Ou seja, temos que provar que $\angle ACD$ é maior que $\angle B$ e $\angle A$.*

Demonstração. (1) Considere o ângulo remoto interior $\angle BAC$.

- (2) Se $\angle BAC \equiv \angle ACD$, então \overleftrightarrow{AB} é paralela a \overleftrightarrow{CD} , pelo Teorema 3.2.2, contradizendo a hipótese de que estas retas encontram-se em B .
- (3) Suponha, por absurdo, que $\angle BAC$ é maior que $\angle ACD$.

- (4) Então existe um ponto E tal que a semirreta \vec{AE} está entre \vec{AB} e \vec{AC} e que $\angle ACD \equiv \angle CAE$ (por definição).
- (5) Esta semirreta \vec{AE} intercepta BC num ponto G (pelo Teorema das Barras Cruzadas, que diz: *Se \vec{AD} está entre \vec{AC} e \vec{AB} , então \vec{AD} intercepta o segmento BC.*
- (6) Mas de acordo com o Teorema 3.2.2, as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{CD} são paralelas.
- (7) Portanto, $\angle BAC$ não pode ser maior do que $\angle ACD$ (Absurdo!).
- (8) Logo, $\angle BAC$ deve ser menor que $\angle ACD$ (pela Proposição da tricotomia dos ângulos, ou seja, um ângulo é maior, menor ou congruente a outro ângulo.)

Obs. Para um ângulo remoto $\angle ABC$ basta utilizar o mesmo argumento aplicado ao ângulo externo $\angle BCF$, o qual será congruente a $\angle ACD$.

□

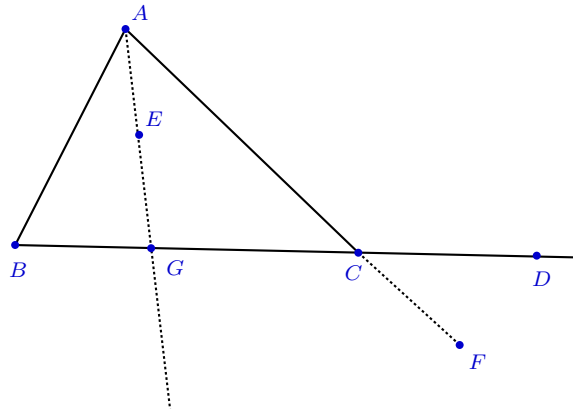


Figura 3.16: Ilustração do Teorema 3.2.3

Um corolário importante do Teorema do Ângulo Externo será apresentado a seguir:

Corolário 3.2.4. *A soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .*

Demonstração. (1) Observe a Figura 3.14, onde pelo Teorema do Ângulo Externo, temos $m(\angle CBD) > m(\angle CAB)$.

- (2) Adicionando-se o ângulo $\angle CBA$ em ambos os lados desta inequação, obteremos:
- $$m(\angle CAB) + m(\angle CBA) < m(\angle CBD) + m(\angle CBA).$$
- (3) Mas, por construção, os ângulos $\angle CBD$ e $\angle CBA$ são suplementares. Ou seja, $m(\angle CBD) + m(\angle CBA) = 180^\circ$.
- (4) Substituindo (3) na inequação obtida em (2) temos: $m(\angle CAB) + m(\angle CBA) < 180^\circ$, obtendo a Tese.

□

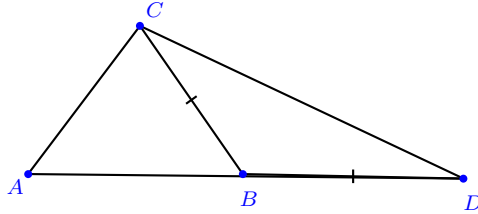


Figura 3.17: Ilustração do Corolário 3.2.4

Agora, enunciemos e demonstremos o teorema de Saccheri-Legendre:

Teorema 3.2.5. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é $\leq 180^\circ$.*

Demonstração. Façamos a demonstração passo a passo:

(1) Seja $\triangle A_1A_2B_1$ um triângulo qualquer, e façamos n segmentos congruentes a A_1A_2 , construindo dessa forma uma série de triângulos $\triangle A_jA_{j+1}B_j$, $j=1, \dots, n$, congruentes ao triângulo $\triangle A_1A_2B_1$, como mostra a Figura 3.16.

(2) Os triângulos da forma $\triangle B_jA_{j+1}B_{j+1}$, $j=1, \dots, n$ também serão todos congruentes entre si, pela construção dos vértices B_{n+1} .

(3) Sejam os ângulos α, β, γ , como os apresentados na Figura. Dessa forma, $\alpha + \gamma + \delta = 180^\circ$ e sabemos que $\beta + \gamma + \delta$ representa a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle A_1A_2B_1$. Nesse caso, basta provar que $\beta \leq \alpha$.

(4) Vamos supor, por absurdo, que $\beta > \alpha$.

(5) Então $A_1A_2 > B_1B_2$, pela Proposição que afirma: “Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, então $\angle B < \angle B'$ se e somente se $AC < A'C'$.”

(6) Também sabemos, por repetidas aplicações da desigualdade triangular^(*), que $A_1B_1 + n \cdot B_1B_2 + B_{n+1}A_{n+1} > n \cdot A_1A_2$.

(7) Mas sabemos, por congruência de triângulos, que $A_1B_1 \equiv B_{n+1}A_{n+1}$.

(8) Logo, por (6) e por (7), temos: $2 \cdot A_1B_1 > n \cdot (A_1A_2 - B_1B_2)$.

(9) Como n é arbitrário, isso contradiz o Axioma de Arquimedes (Absurdo).

(10) Logo, a soma dos ângulos do triângulo será $\leq 180^\circ$.

(*) *Desigualdade Triangular*: Sejam \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} as medidas dos lados de um triângulo $\triangle ABC$, então $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. \square

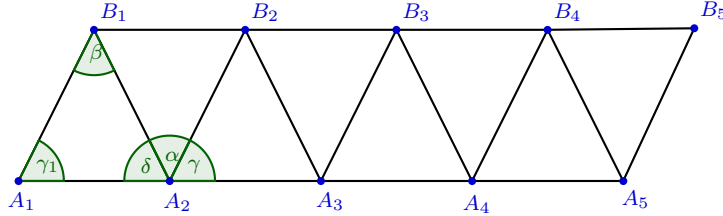


Figura 3.18: Ilustração do Teorema 3.2.5

Note que, no teorema acima, a tão conhecida e aceita igualdade na geometria Euclidiana é consequência do axioma das paralelas:

Proposição 3.2.6. *Em qualquer plano de Hilbert, o postulado das paralelas euclidianas de Hilbert implica que para todo triângulo $\triangle ABC$,*
 $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ$.

Em palavras: A soma dos ângulos de um triângulo é 180° se assumirmos o postulado euclidiano das paralelas de Hilbert.

Demonstração. (1) Observe a Figura 3.15. Pelo Corolário do Teorema dos Ângulos Alternos Internos, que diz “Se r é uma reta e P é um ponto não pertencente a r , então existe uma reta r' que passa por P e é paralela a r ”, há uma reta passando por B que é paralela à reta \overleftrightarrow{AC} .

(2) Assumindo-se que o postulado das paralelas euclidianas de Hilbert é equivalente ao teorema dos ângulos alternos internos, os ângulos alternos internos com as respectivas transversais \overleftrightarrow{BA} e \overleftrightarrow{BC} são congruentes, como mostrados.

(3) Mas os três ângulos em questão formam, juntos, um ângulo de 180° .

(4) Logo, a soma dos ângulos internos desse triângulo é 180° . \square

De fato, é possível ver que a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° equivale ao postulado das paralelas.

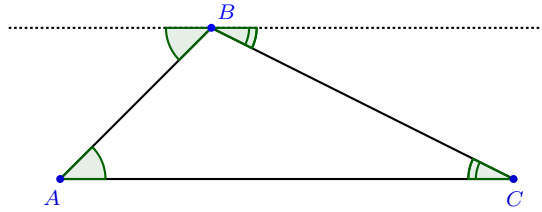


Figura 3.19: Ilustração do Teorema 3.2.6

3.3 Geometria Hiperbólica e o Quinto Postulado

A chamada Geometria Hiperbólica surgiu na primeira metade do século XIX como consequência das buscas por uma demonstração do Quinto Postulado de Euclides. Os principais contribuidores do seu desenvolvimento foram János Bolyai, Nikolai Lobatchevsky e Carl Friedrich Gauss, que apresentaram uma geometria na qual valiam todos os axiomas da Geometria Neutra, mas não valia o postulado das paralelas. Finalmente com os trabalhos de Klein, Beltrami e Poincaré, modelos de tal geometria foram feitos demonstrando que tal geometria era tão consistente quanto a geometria euclideana. Isso encerrou a busca por demonstrações do quinto postulado uma vez que ficou provado que era perfeitamente possível desenvolver uma geometria com sua negação.

A Geometria Hiperbólica é, por definição, a geometria obtida assumindo-se todos os axiomas da Geometria Neutra e substituindo o postulado das paralelas de Hilbert por sua negação, chamado de Axioma Hiperbólico, enunciado a seguir:

Axioma Hiperbólico: Na geometria hiperbólica existe uma reta r e um ponto P não pertencente a r tal que, por P , passam pelo menos duas retas distintas paralelas à r .

Uma vez que a existência de um triângulo com soma dos ângulos internos igual a 180° equivale ao axioma das paralelas, uma das primeiras consequências do Axioma Hiperbólico é a não existência de triângulos com soma dos ângulos internos igual a 180° . Disso segue o seguinte lema:

Lema 3.3.1. *Na geometria hiperbólica, não existem retângulos, isto é, não existem quadriláteros com todos os ângulos internos retos.*

A partir deste Lema, conseguimos provar a seguinte versão do axioma hiperbólico:

Teorema 3.3.2. (TEOREMA UNIVERSAL HIPERBÓLICO): Na geometria hiperbólica, para toda reta r e todo P não pertencente a r , passam por P pelo menos duas paralelas a r .

Demonstração. (1) Sabemos que duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas (pois seus ângulos alternos internos são retos e congruentes, pelo Quarto Postulado de Euclides).

(2) Assim, tomemos uma reta r qualquer e P não pertencente a r , como na Figura 3.17.

(3) Tracemos uma reta \overleftrightarrow{PQ} perpendicular a r e, então, uma reta perpendicular m à reta \overleftrightarrow{PQ} por P .

(4) Seja R um ponto de r distinto de Q e tracemos uma perpendicular t à reta r por R .

(5) Finalmente tracemos uma perpendicular \overleftrightarrow{PS} à t passando por P .

(6) Como ambas as retas, \overleftrightarrow{PS} e m , são perpendiculares a retas perpendiculares à r , temos que ambas são paralelas a r .

(7) Observe agora que as retas \overleftrightarrow{PS} e m são distintas, caso contrário teríamos que o quadrilátero $PQRS$ seria um retângulo, o que, pelo lema anterior seria um absurdo.

(8) Logo, passam pelo menos duas retas paralelas a r por P , P fora de r . □

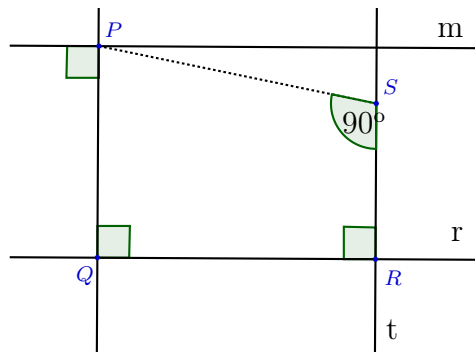


Figura 3.20: Ilustração do Teorema Universal Hiperbólico

Se variarmos o ponto R na situação anterior, podemos concluir o seguinte:

Corolário 3.3.3. *Na geometria hiperbólica, para cada reta r e cada ponto P não pertencente a r , existem infinitas paralelas a r passando por P .*

Vale ressaltar que, mesmo antes de Hilbert, várias foram as tentativas de se provar o Quinto Postulado de Euclides. No entanto, segundo (EVES 2004, p. 541), “a primeira investigação científica foi publicada em 1773 e é de autoria do jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733)”. Ele aceita, neste trabalho, todas as proposições iniciais de Euclides. Assim, ele estudou o quadrilátero $ABCD$ no qual os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ e os lados AD e BC são iguais (Ver Figura 3.18). Traçando as diagonais AC e BD e usando então teoremas simples de congruência (que se encontram entre as proposições iniciais de Euclides), Saccheri mostrou facilmente que os ângulos $\angle C$ e $\angle D$ são iguais. Há então três possibilidades, que ele chamou de: hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso.

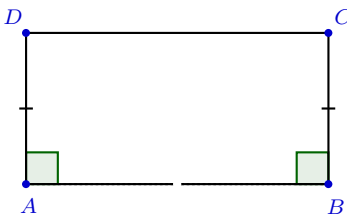


Figura 3.21: Quadrilátero de Saccheri

Assumindo tacitamente a infinitude da reta, Saccheri eliminou de imediato a hipótese do ângulo obtuso. Assim, bastaria mostrar que a hipótese do ângulo agudo leva a uma contradição que, por *reductio ad absurdum*, deve valer a hipótese do ângulo reto. Mas isso se mostrou muito mais difícil. E de modo insatisfatório e inconvincente, forçou uma contradição no desenvolvimento de suas ideias. Seu trabalho recebeu pouca consideração e foi ressuscitado somente em 1889 por seu conterrâneo Eugenio Beltrami.

Investigação semelhante a de Saccheri realizou o suíço Johann H. Lambert, publicada após sua morte. Ele tomou um quadrilátero contendo três ângulos retos como figura fundamental e considerou três hipóteses conforme o ângulo fosse agudo, reto ou obtuso. Ele foi além do italiano na dedução de proposições com as hipóteses do ângulo agudo ou obtuso. Com a mesma suposição de Saccheri, eliminou a hipótese do ângulo obtuso. Porém, suas conclusões com respeito à hipótese do ângulo agudo foram imprecisas e insatisfatórias.

Debruçaram-se nos estudos sobre o Quinto Postulado de Euclides matemáticos importantes, que contribuíram para a criação das Geometrias Não-Euclidianas: János Bolyai (1802-1860), Carl F. Gauss (1777-1855) e Nikolai

Lobachevsky (1792-1856). Gauss era amigo do pai de János, Farkas Bolyai, também matemático. As mais de 14000 páginas de anotações que János escreveu sobre o Postulado das Paralelas nunca foram publicadas, porém seu pai enviou alguns dos seus resultados a Gauss, trabalho semelhante ao desenvolvido pelo alemão. Gauss, segundo Greenberg, tinha conhecimento de que “*uma geometria onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos não continha nada de impossível*”. (GREENBERG 2008, p. 243). Mas Gauss talvez não tenha se dedicado da forma que gostaria aos estudos da geometria não-euclidiana e foram encontrados, após sua morte, seus poucos resultados escritos.

O russo Lobachevsky “*foi o primeiro que, de fato, publicou uma demonstração da geometria não-euclidiana em 1829. Ele chamava no início sua geometria de imaginária*”. Ainda para Greenberg, sobre Bolyai e Lobachevsky:

“É incrível como são similares os resultados de J. Bolyai e Lobachevsky e quão são diferentes seus trabalhos iniciais. Ambos desenvolveram o tema bem mais do que Gauss. Ambos atacaram o plano geométrico por meio da “semiesfera” no espaço hiperbólico tridimensional. [...] Ambos têm uma constante em suas formulas sem explicação; o trabalho posterior de Riemann demonstrou que se tratava da curvatura do plano hiperbólico”.

(GREENBERG 2008, p. 245-247)

Diante de todos esses trabalhos acerca da Geometria Não-Euclidiana, pode-se chegar ao chamado Teorema da Consistência:

Teorema 3.3.4. *Se a geometria euclidiana é consistente, então o mesmo ocorre com a geometria hiperbólica.*

Deste segue então o resultado:

Teorema 3.3.5. *É impossível demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos axiomas da geometria neutra.*

Demonstração. Assumindo provado o Teorema 3.3.4, suponha consistente a geometria euclidiana e que existe uma demonstração de que o postulado das paralelas pode ser derivado dos demais postulados. Tal suposição leva a uma inconsistência na geometria hiperbólica, pois o axioma hiperbólico seria provado contraditório. Pelo Teorema 3.3.4 concluiríamos então que a geometria euclidiana seria inconsistente. Absurdo! \square

(LODOVICI, TÁBOAS 2011, p. 38)

O Teorema da Consistência na forma apresentada acima foi provado por Eugenio Beltrami (1835-1900) e uma prova alternativa foi dada depois por Felix Klein (1849-1925). Beltrami provou em 1868 esse teorema a partir do uso da geometria diferencial. Klein, por sua vez, encontrou na geometria projetiva um caminho para uma nova demonstração.

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, tentamos apresentar alguns fatores que destacam a importância das demonstrações matemáticas numa perspectiva histórica da disciplina. Neste capítulo, enfatizar-se-á o destaque das provas matemáticas na atualidade, baseando-se em alguns trabalhos recentes.

Segundo G. Garbi:

“A Matemática não é uma ciência experimental. Suas leis são de uma natureza totalmente diferente e peculiar: elas não se fundamentam em experiências mas sim em provas de natureza lógica. Uma verdade matemática provada na Grécia há 24 séculos continuará válida por toda a eternidade, na Terra, em Marte ou em qualquer outro lugar do Universo. Um teorema não sai de moda nem se desgasta com o tempo. Uma nova teoria matemática não destrói as anteriores. Normalmente, ela apenas as engloba e torna-as casos particulares de um arcabouço teórico mais amplo. Os conhecimentos matemáticos são cumulativos; um matemático não desfaz as obras corretas dos outros: ele as amplia, generaliza, expande, aprimora”.

(GARBI 2010, p. 20)

A geometria em particular pode ser considerada uma ferramenta importante no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Assim, para R. Pietropaolo: *“poder-se-ia inferir que o trabalho com demonstrações em Geometria habilitaria o aluno a transferir o raciocínio empregado para outras áreas da Matemática e do currículo em geral”.* (PIETROPAOLO 2005, p. 84) Logo, a utilização das demonstrações em geometria é fundamental não apenas para a disciplina Matemática, mas para as demais também, que é uma característica exigida cada vez mais nos currículos básicos: uma disciplina dando suporte

e ligada às demais. E também de acordo com alguns currículos atuais, os trabalhos envolvendo provas geométricas devem aparecer em todos os graus de ensino. Para o autor:

“...compartilhamos da ideia de que seria necessário transmitir o caráter axiomático das teorias matemáticas ao aluno, o que pode ser feito por meio de experiências de organização local, que ensejem a conexão lógica de uma reduzida quantidade de resultados conjecturados pelos próprios alunos”.

(PIETROPAOLO 2005, p. 91)

Por meio da observação de algumas coleções de livros didáticos, percebe-se que a maior parte deles possui provas e demonstrações. Porém, restringem-se a resoluções feitas pelo próprio autor, ou seja, raramente são propostas aos alunos. O trabalho de R. Pietropaolo mostrou ainda em (PIETROPAOLO 2005, p. 206-212) outros fatores, com destaque para os seguintes tópicos:

- *Há consenso sobre a importância das provas nas aulas de Matemática da Educação Básica:* os estudos indicam, de modo geral, que a não proposição de provas nas aulas de matemática pode significar erro de representação do papel e da natureza da prova nessa disciplina, além de sugerir que essa ausência pode privar os alunos de uma educação mais ampla.
- *Há necessidade de ampliar o significado de prova, para trabalhar com elas nas aulas de Matemática na Educação Básica:* apesar de haver convergência e respeito com relação à importância da demonstração nas aulas de Matemática, deve-se impor limites ao desenvolvimento de provas, essencialmente pela sua intrínseca dificuldade e pela consequente falta de motivação de alunos e professores em realizá-lo.
- *O ensino da prova deve ser desenvolvido como processo de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação:* apesar disso, muitos professores da pesquisa acreditam que, mesmo com a importância das provas, elas estariam destinadas apenas a uma parcela de alunos, os mais privilegiados e talentosos para a Matemática. Contudo, eles consideram importante que o trabalho com provas seja inserido na Educação Básica, tendo assim um sentido mais amplo aos alunos, não incluindo dessa forma o status de rigorosa.

Com relação à formação dos docentes, segundo os próprios professores entrevistados no trabalho de R. Pietropaolo, há um consenso que merece ênfase:

“...é necessária a inclusão de provas rigorosas e formais nos currículos de diversas disciplinas das Licenciaturas ? as diferenças entre os pontos de vista dos educadores estariam apenas na ênfase dada a este assunto. Ressaltaram também que a implementação de provas nas escolas de Educação Básica exige que os cursos de formação inicial problematizem essa questão. Outro aspecto em que houve convergência refere-se à dificuldade do trabalho com esse tema”.

(PIETROPAOLO 2005, p. 179)

Além disso, há também a necessidade do professor conhecer outros conceitos e procedimentos que vão além daqueles que ele vai ensinar, ou seja, ele deve ter uma “bagagem suplementar” necessária ao desenvolvimento adequado da sua função. A História da Matemática e a Filosofia podem motivar o processo de ensino e de aprendizagem da prova. Para isso, deve-se implementar o processo de investigação na sala de aula, utilizando-se o questionamento e instigando sempre os alunos.

Diante dessas colocações e da realidade dos professores de Matemática e suas respectivas formações, também há clara necessidade de se reestruturar os cursos de Licenciatura, revendo assim a necessidade de maior inserção das demonstrações e sua importância para a formação do professor e, consequentemente, nas aulas por ele ministradas.

Este Trabalho de Conclusão de Curso propôs indicar o quanto as demonstrações matemáticas foram e são importantes para o ensino e a aprendizagem da matemática. Descrevemos um pouco de como as provas surgiram ao longo do tempo, falando sobre os gregos que, com a colaboração e todo o conhecimento adquirido no oriente, principalmente na Mesopotâmia e no Egito, trouxeram a matemática a um novo patamar de rigor com os trabalhos de Tales, Pitágoras e, sobretudo Euclides. Este último, aliás, com “Os Elementos” revolucionou muitos conceitos matemáticos referentes à álgebra, aritmética e sobretudo à geometria e permaneceu por anos como referência básica de qualquer estudioso de matemática. Finalmente, tentamos enfatizar, contando um pouco do desenvolvimento da geometria, o quanto é importante que os professores utilizem a História e provas matemáticas nas aulas do Ensino Básico.

Tentamos evidenciar que, ao longo dos anos, percebeu-se que *Os Elementos* de Euclides possuíam muitos “defeitos” e “falhas” lógicas descobertos

por matemáticos que o sucederam. Houve então a necessidade de se reestruturar muitos dos conceitos e definições matemáticas presentes nesta obra. Um dos que realizou isso de maneira brilhante na geometria euclidiana foi David Hilbert, destacado neste Trabalho de Conclusão de Curso através de trechos pertencentes à obra *Fundamentos da Geometria*, de sua autoria. A axiomatização de Hilbert foi extremamente importante e, após essa e outras reestruturações, o estudo da Geometria e suas demonstrações tornaram-se mais detalhados e concisos, sendo muitos destes conceitos utilizados até os dias atuais.

Após inúmeras tentativas de matemáticos demonstrarem o Quinto Postulado de Euclides, os rumores e a investigação geométrica perduraram por séculos e séculos, surgindo dessa forma, além da necessidade uma séria reflexão sobre o rigor matemático que culminou com uma reestruturação da geometria apresentada por Euclides. O problema das paralelas, que surgiu com “Os Elementos” nos levou às chamadas Geometrias Não-Euclidianas, as quais se tornaram objetos de estudos e interesse de muitos matemáticos modernos. Nas diversas geometrias, Euclidianas ou não, as demonstrações são fundamentais e têm um papel fundamental em teoremas e proposições.

Tópicos da pesquisa recente de Ruy Pietropaolo citados acima são fundamentais para ilustrar o quanto as provas matemáticas são necessárias para a melhoria do ensino e da aprendizagem atual referentes aos conceitos matemáticos. Além desse aspecto, ressalta-se também como as demonstrações ainda não estão presentes como deveriam, não apenas nas aulas de matemática da Educação Básica, mas também nos cursos de Licenciatura, ou seja, na formação dos professores. Há, como citado anteriormente, muitas falhas nos currículos destes cursos, além da ausência de uma abordagem consistente e suficiente no que diz respeito às provas e demonstrações, isto quando são apresentadas.

No Apêndice que segue, construiremos uma sugestão de Sequência Didática, visando ressaltar aspectos de investigação necessários à aprendizagem de matemática, como situações não formais de demonstrações até chegarmos ao rigor matemático, quando necessário. A História da Matemática e a lógica são peças chave nessa trajetória. Sugerimos que o professor desenvolva duas características importantes: o fazer e o comunicar Matemática. E que consiga fazer isso de modo prático, elaborando situações de aprendizagem, atividades, projetos, etc. e, sempre que necessário, apoiando-se em livros e materiais didáticos. Enfim, é preciso compreender que o processo de implementação das provas e demonstrações no Ensino Básico não é um trabalho fácil e cômodo. Entretanto, quando este trabalho é realizado com preparo, organização, gosto e motivação, a possibilidade de fazer com que nossos alunos saibam mais matemática e desenvolvam o gosto por ela, inclusive pelas

demonstrações e provas geométricas, aumenta significativamente.

Capítulo 5

Apêndice

MODALIDADE 1: Elaboração de proposta de atividades educacionais

SEQUÊNCIA DIDÁTICA - ÂNGULOS E POLÍGONOS

Objetivos :

- Identificar ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais, reconhecendo propriedades e utilizando-as para resolver situações-problema;
- Medir e calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer - investigação inicial em busca de uma prova;
- Demonstrar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer - a princípio, intuitivamente, para depois realizar a demonstração formal;
- Determinar a soma dos ângulos de um polígono convexo qualquer e descobrir uma fórmula que sirva para quaisquer polígonos, instigando sua possível demonstração.

Público alvo :

Alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental

Pré-requisitos :

Conhecer os critérios de Congruência de Triângulos; Operar o transferidor adequadamente; Conhecimento do programa *GeoGebra* (aula introdutória).

Materiais e tecnologia :

Cópia das atividades; Transferidor; Software *GeoGebra* (Sala de Informática ou Datashow).

Recomendações metodológicas

Dificuldades previstas

Possíveis continuações ou desdobramentos :

Os itens anteriores aparecem na descrição geral das atividades e nas suas respectivas resoluções e comentários.

Descrição geral

ÂNGULOS E POLÍGONOS

I. Retas paralelas e transversais

1. Observe o mapa abaixo (Figura 5.1), que mostra uma parte do bairro Ipiranga, localizado na Zona Sul de São Paulo:

a) Localize três ruas paralelas à rua Silva Bueno.

b) A rua Almirante Lobo é transversal à rua Dom Lucas Obes? Justifique.

c) Cite uma rua transversal à R. Agostinho Gomes.

d) Identifique duas retas que são paralelas cortadas por uma mesma transversal.



Figura 5.1: Fonte: <http://mapas.guiamais.com.br>

Resolução e comentários: 1. a) Três dessas ruas: Manifesto, Lino Coutinho, Agostinho Gomes, Cipriano Barata. b) Não. Elas são paralelas, não se cruzam. c) Uma dessas: Brigadeiro Jordão, Cisplatina, Dom Lucas Obes, Almirante Lobo. d) Resposta pessoal.

O mapa de um bairro ou seu trecho é apropriado para idealizar retas paralelas, perpendiculares e transversais. A utilização de um trecho da cidade onde se localiza a escola em que os alunos estudam facilita e significa a aprendizagem. Nesse caso, é interessante conversar com os alunos a respeito de ruas paralelas, transversais (ou travessas), e quando são perpendiculares. O professor pode comentar o item d) de acordo com as respostas obtidas, destacando o fato de que quando duas ou mais ruas (ou retas) são paralelas, como por exemplo as ruas Lino Coutinho e Agostinho Gomes, ambas são cortadas pela mesma transversal (no caso a R. Cisplatina ou a Almirante Lobo, por exemplo). E pode-se dizer que, com base nas ruas do mapa

e após esse exercício, estudarão nas próximas atividades propriedades relativas às retas e aos ângulos formados entre elas.

II. Retas e ângulos

Na atividade anterior, vimos por meio de ruas, algumas posições relativas às retas. A seguir, você vai aprender algumas propriedades referentes aos ângulos formados por retas. Observe as retas r e s e os ângulos \hat{a} , \hat{n} , \hat{c} , \hat{m} na Figura 5.2. Os ângulos \hat{a} e \hat{c} são chamados de ângulos opostos pelo mesmo vértice (OPV). O mesmo acontece com os ângulos \hat{n} e \hat{m} .

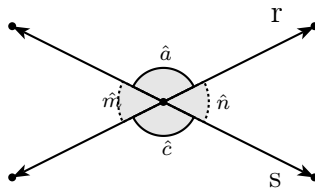


Figura 5.2: Ângulos OPV

Ângulos opostos pelo vértice são *congruentes*, ou seja, possuem mesma medida.

1. Suponha, por exemplo, que os ângulos apresentados tenham medidas: $\hat{a} = \hat{c} = 125^\circ$ e $\hat{n} = \hat{m} = 55^\circ$. Calcule as seguintes somas dos ângulos:

- a) $\hat{a} + \hat{m} =$ _____
- b) $\hat{a} + \hat{n} =$ _____
- c) $\hat{c} + \hat{m} =$ _____
- d) $\hat{c} + \hat{n} =$ _____

O que você pode observar a respeito dos resultados obtidos?

2. Complete: Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a eles são chamados ângulos suplementares. Já quando a soma dos dois ângulos vale 90° , são chamados ângulos _____.

3. Será que agora você consegue provar que os ângulos \hat{a} e \hat{c} possuem a mesma medida, sem utilizar o transferidor? Tente escrever sua resolução logo abaixo:

4. De acordo com a Figura 5.3, responda:

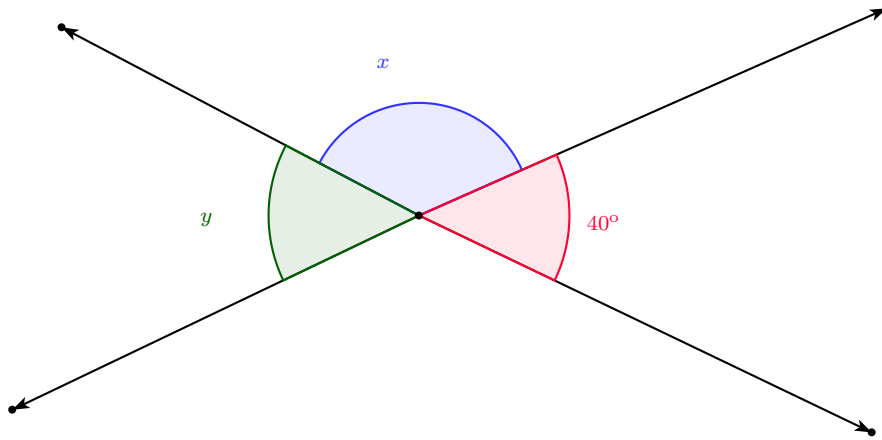


Figura 5.3: Ângulos OPV

a) Qual a medida do ângulo y ? Por quê?

b) Qual a medida do ângulo x ? Justifique.

5. Determine o valor de x nos seguintes casos:

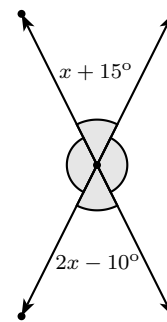
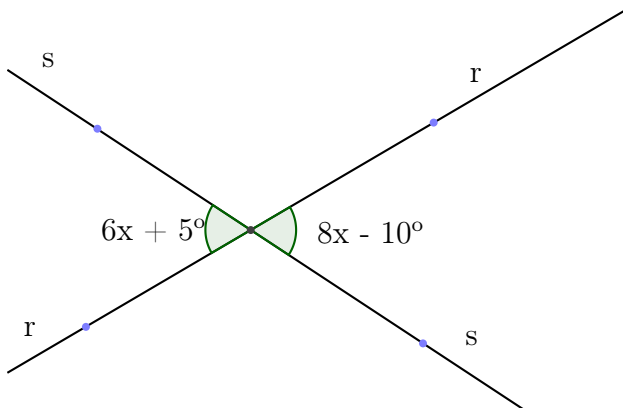
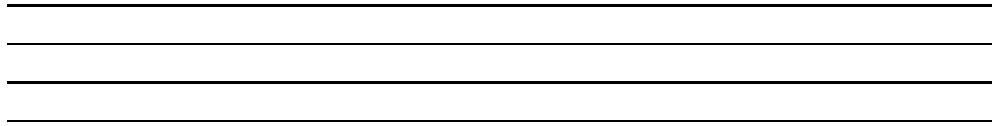


Figura 5.4: OPV



Resolução e comentários:

1. Todas as somas são iguais a 180° .
2. 180° ; complementares.
3. Demonstração passo a passo: (i) Por serem pares de ângulos suplementares, temos $\hat{a} + \hat{m} = 180^\circ$ e $\hat{c} + \hat{m} = 180^\circ$. (ii) Logo $\hat{m} = 180^\circ - \hat{a}$ e $\hat{m} = 180^\circ - \hat{c}$. (iii) Assim, temos que $180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - \hat{c}$. (iv) Ou seja, $\hat{a} = \hat{c}$.
4. a) $y = 40^\circ$, por ser OPV.
b) Como x e y são suplementares e $y = 40^\circ$, temos: $x + 40^\circ = 180^\circ$. Logo, $x = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.
5. a) $6x + 5^\circ = 8x - 10^\circ$ (OPV) Logo, $15^\circ = 2x$ Dessa forma, $x = 7,5^\circ$ ou $x = 7^\circ 30\checkmark$.
b) $x + 15^\circ = 2x - 10^\circ$ (OPV) Logo, $15^\circ + 10^\circ = 2x - x$ Assim, $x = 25^\circ$.

As atividades retomam conceitos e propriedades dos ângulos formados por retas concorrentes. O professor deve explorar no exercício 1, de acordo com as respostas obtidas, se esse resultado igual a 180° foi só para esse caso ou para quaisquer ângulos vale a propriedade. No caso do exercício 2, se for necessário, o professor auxilia os alunos ou pede para que pesquisem em outros livros, na internet ou em dicionários os significados das palavras. Já no exercício 3, o aluno de fato **demonstrará** que ângulos opostos pelo vértice possuem mesma medida. O professor pode ajudar, orientando-os a usarem a relação entre os ângulos suplementares (no caso, é o que o aluno terá como hipótese). E que utilizem a relação adequada de acordo com o par de ângulos que escolherem mostrar que são congruentes. ($\hat{a} = \hat{c}$ ou $\hat{m} = \hat{n}$). Por exemplo, na resolução apresentada acima, foi necessário escolher duas relações envolvendo o ângulo \hat{m} , sendo uma com o ângulo \hat{a} e outra com \hat{c} . Os exercícios 4 e 5 são de aplicações das ideias aprendidas anteriormente.

III. Ângulos Correspondentes

1. Observe as retas r , m e t , representadas na Figura 5.5:

Note que, traçando-se a reta t , são formados oito ângulos: quatro ângulos internos, \hat{c} , \hat{d} , \hat{e} , \hat{f} , e quatro ângulos externos, \hat{a} , \hat{b} , \hat{g} , \hat{h} . Usaremos a seguinte notação: para nos referirmos ao ângulo, utilizaremos \hat{c} . Já para a medida do ângulo, apenas c . Os ângulos \hat{c} e \hat{f} são chamados *ângulos correspondentes* - estão do mesmo lado da transversal, um externo e outro interno. Da mesma

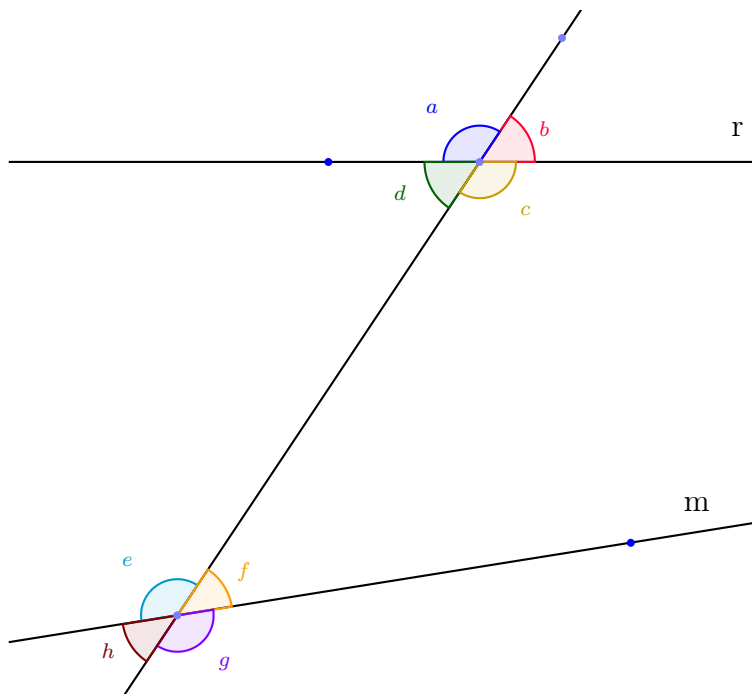


Figura 5.5: Ângulos correspondentes

forma, \hat{c} e \hat{g} também são correspondentes, pois atendem essa propriedade.

a) Cite os outros dois pares de ângulos da figura que são correspondentes.

b) O que ocorreria com qualquer um dos pares de ângulos correspondentes se as retas r e m fossem paralelas?

2. Para entendermos melhor o que ocorre no item b) do exercício 1, trace no espaço abaixo duas retas paralelas quaisquer, digamos r e s , e uma reta t transversal a r e a s .

a) Com o auxílio do transferidor, meça cada um dos oito ângulos formados entre as três retas.

b) O que ocorreu com os pares de ângulos correspondentes?

Resolução e comentários:

1.a) Ângulos correspondentes: \hat{a} e \hat{e} , \hat{h} e \hat{d} .

b) Seriam congruentes.

2. Pessoal.

*Na questão 2, com o uso do transferidor, os alunos poderão perceber que os ângulos são congruentes mas, se necessário, o professor pode usar a ideia de deslocar uma reta, como ocorre na translação. Uma reta se desloca, paralelamente a outra, até se sobrepor a mesma. Com a sobreposição, conclui-se que os ângulos correspondentes coincidem e que, conseqüentemente, são congruentes. É fundamental que os alunos percebam que essa relação só acontece quando as retas são **paralelas**.*

IV. Descobertas de Propriedades

1. Observe agora a Figura 5.6, onde r e s são retas paralelas e t uma transversal:

a) Sabemos que o ângulo \hat{b} é correspondente ao ângulo \hat{e} . Logo, \hat{b} e \hat{e} são congruentes.

b) Por outro lado, \hat{b} é oposto pelo vértice ao ângulo \hat{c} . Logo, \hat{b} e \hat{c} também são ângulos congruentes.

c) Dessa forma, podemos concluir que os ângulos \hat{c} e \hat{e} têm a mesma medida.

Os ângulos \hat{f} e \hat{d} são chamados de *alternos internos*.

Os ângulos \hat{b} e \hat{h} são chamados de *alternos externos*.

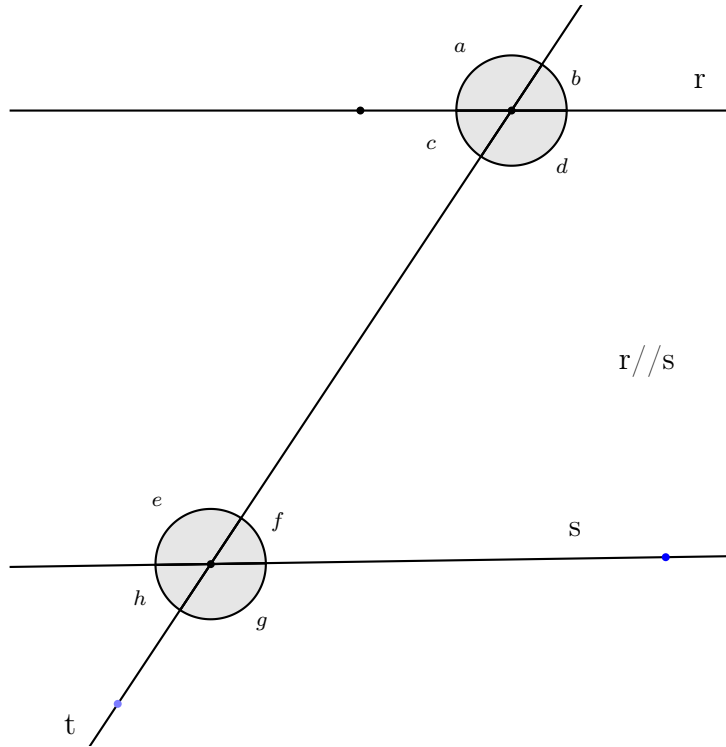


Figura 5.6: Paralelas e transversal

d) Podemos concluir que, se as retas são paralelas, os ângulos alternos internos são congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos alternos externos.

2. Vamos agora tentar **provar**, sem o auxílio do transferidor, que de fato os ângulos \hat{f} e \hat{d} são congruentes. Para isso, utilizemos a Figura 5.7 como apoio:

Note que essa figura tenta reproduzir a anterior, só que restringindo o espaço a ser trabalhado. O ponto P foi construído de forma que $PA = PB$ e a reta \overleftrightarrow{AB} é perpendicular às retas r e s . Lembre-se da propriedade ALA (Ângulo Lado Ângulo) de congruência de triângulos e tente, no espaço abaixo, mostrar passo a passo que \hat{f} e \hat{d} são congruentes.

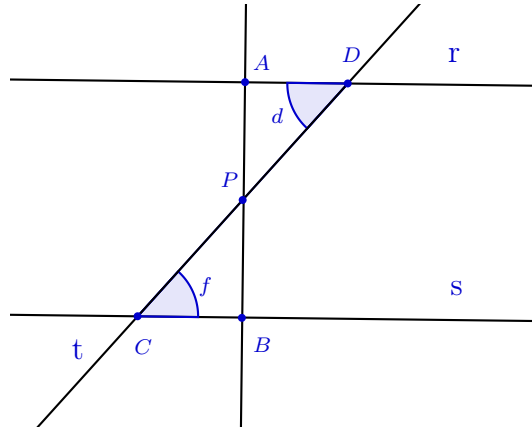


Figura 5.7: Demonstração da Congruência dos ângulos Alternos Internos

3. Sabendo que as retas r e s são paralelas, determine as medidas de x , y e z nos seguintes casos:

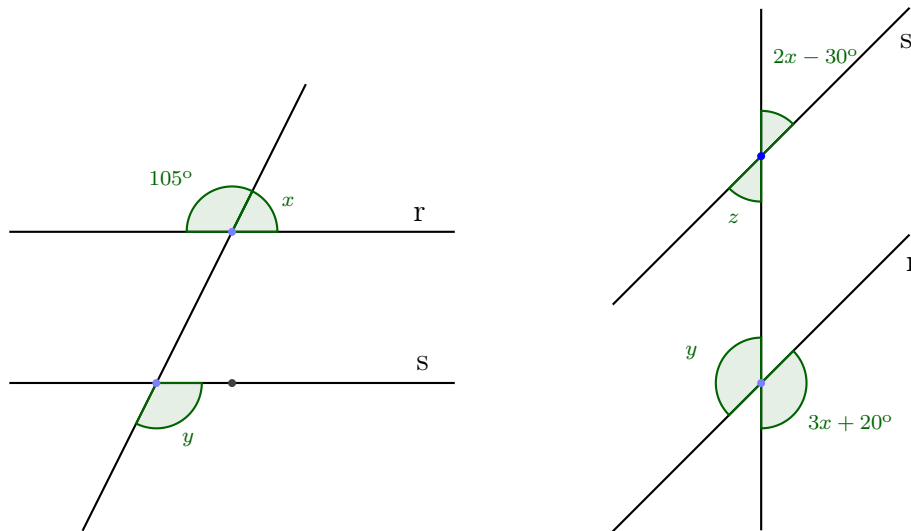


Figura 5.8: Propriedades

Resolução e comentários:

1. a) \hat{f} em ambas. b) \hat{d} em ambas. c) \hat{f} e \hat{d} . d) congruentes.
2. *Demonstremos passo a passo:* (i) Pela figura, os ângulos $\angle DAP$ e $\angle CBP$ são retos. (ii) $AP = PB$ (por construção). (iii) Os ângulos $\angle APC$ e $\angle BPC$

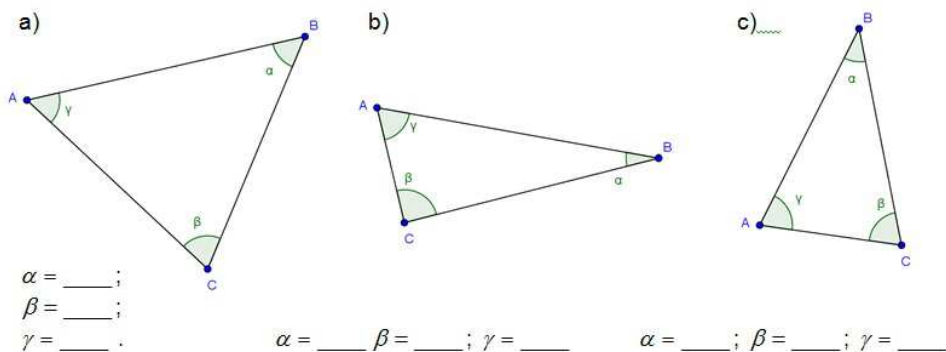
são congruentes (OPV). (iv) Logo, pelo critério de congruência ALA (Ângulo Lado Ângulo), os triângulos $\triangle DAP$ e $\triangle CBP$ são congruentes. (v) Assim, também há congruência entre os ângulos \hat{f} e \hat{d} (no caso, são respectivamente os ângulos $\angle PCB$ e $\angle PDA$).

3. a) $x = 75^\circ$ e $y = 105^\circ$. b) $2x - 30^\circ + 3x + 20^\circ = 180^\circ$ Logo, $5x = 190^\circ$ Assim, $x = 38^\circ$. $y = 134^\circ$ e $z = 2 \cdot 38^\circ - 30^\circ = 76^\circ - 30^\circ = 46^\circ$.

Aqui, também estabelecemos relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Vale ressaltar que as nomenclaturas são importantes, mas o fundamental é que o aluno reconheça quais ângulos que são correspondentes. O exercício 2 tem que ser conduzido pelo professor de forma que o aluno consiga realizar a **demonstração** corretamente, sem pular etapas. Em provas como essas, se não tomarmos cuidado, muitas vezes os alunos se esquecem de alguma passagem ou de algum detalhe primordial para a conclusão da mesma. O professor também deve ressaltar que a figura é genérica e sempre o ponto P, nesse caso, pode ser escolhido da forma apresentada. Não é um caso particular. O exercício 3 visa a aplicação de propriedades aprendidas até então.

V. Soma dos Ângulos internos de um triângulo

1. Dados os triângulos abaixo, calcule as medidas dos seus ângulos internos α, β, γ utilizando o transferidor:



2. Agora, some as medidas dos ângulos de cada um dos triângulos do exercício anterior. O que você obteve?

3. Com o auxílio do Programa GeoGebra, contruir um triângulo $\triangle ABC$ qualquer. Peça para o programa apresentar as respectivas medidas dos ângulos α, β, γ e calcule a soma dessas três medidas. Agora mova um dos vértices (A, B ou C) livremente. Calcule novamente a soma dessas três medidas, nesta nova configuração. O que você obteve?

4. Agora, com o auxílio de um colega, construa um triângulo qualquer em uma folha de papel. Corte-o em três partes, de forma que cada um de seus ângulos fique em uma parte diferente. Em seguida, encaixe essas três partes, de maneira que elas formem um único ângulo, como mostra a Figura 5.9. O que esse ângulo tem de especial?

5. Baseado nos exercícios anteriores, tente apresentar uma demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180° . **Dica:** Construa, em uma figura auxiliar, um triângulo qualquer e trace uma reta por um dos vértices, que seja paralela ao lado oposto a este vértice.

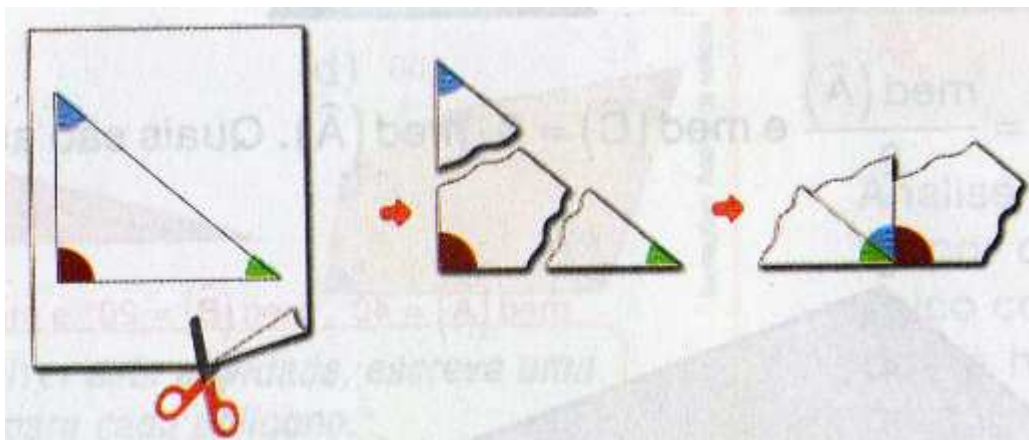


Figura 5.9: Fonte: (SOUZA, PATARO 2009, p. 213)

Resolução e comentários:

1. a) $\alpha=54^\circ$, $\beta=70^\circ$, $\gamma=71^\circ$;

b) $\alpha=24^\circ$, $\beta=89^\circ$, $\gamma=67^\circ$;

c) $\alpha=38^\circ$, $\beta=71^\circ$, $\gamma=71^\circ$;

2. Nos três casos, a soma foi igual a 180° .

3. Pessoal.

4. O ângulo formado é raso, ou seja, mede 180° .

5. Demonstração: (i) Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, construímos uma reta r , passando pelo vértice A , que é paralela à reta \overleftrightarrow{BC} . (ii) Sejam os ângulos α , β , γ como os mencionados na Figura 5.10. (iii) Note que, pela propriedade dos ângulos alternos internos, vista anteriormente, os ângulos β e γ aparecem ao lado de α formando, os três juntos, um ângulo de 180° . (iv) Logo $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, como queríamos demonstrar.

No exercício 1, o professor deve auxiliar aqueles alunos que ainda não possuem prática com o transferidor. O aluno deve obter, nos três casos, ângulos cuja soma da terna seja sempre 180° .

O exercício que envolve o uso do programa GeoGebra deve enriquecer a aprendizagem. Exige um preparo do professor, tomando conhecimento das ferramentas do software, que é bem explicativo, para que possa instruir os alunos adequadamente. Após ter baixado o programa, que é gratuito e após aberto, ele apresenta vários

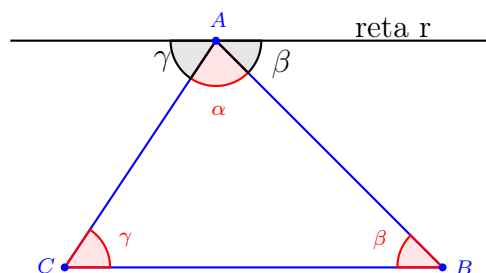


Figura 5.10: Demonstração Soma dos ângulos igual a 180°

ícones no canto esquerdo superior, de construção de pontos, retas e segmentos, circunferências, cônicas, ângulos, polígonos, transformações (reflexão, translação, homotetia), caixa de texto. Ao selecionar algum desses ícones e clicando novamente na tela principal, ele obedece a esse comando construindo o objeto selecionado. Além disso, é possível: medir os ângulos de um triângulo, selecionando seus vértices; trabalhar ou não no plano cartesiano; alterar os rótulos (nomes) dos objetos e acrescentar textos, se necessário; a dinâmica do programa facilita e muito a visualização da variação da posição dos vértices, conforme o deslocamento do mouse, e a soma das medidas dos ângulos dando sempre 180° , independente dessa posição escolhida. É uma atividade a ser desenvolvida na Sala de Informática da escola. Caso isso não seja possível, que o professor pelo menos consiga projetar com o auxílio de um Datashow, para a visualização dos alunos. O mais interessante é que eles possam visualizar e, preferencialmente, manipulem e pratiquem.

No caso do exercício três teremos: (i) após selecionar o ícone ponto, ele vai clicar na tela principal três vezes, criando os pontos A, B, C livremente. (ii) Depois, seleciona o botão segmento de reta e clica nos vértices dois a dois, criando os segmentos AB, BC e AC, obtendo dessa forma o triângulo $\triangle ABC$. (iii) Selecionando depois no ícone ângulo, ele clica nos três vértices do triângulo e obtém dessa forma a medida do ângulo central. Por exemplo, se clicar em A, B e C, nesta ordem, ele obtém a medida do ângulo $\angle ABC$. (iv) Assim, executando esse processo três vezes, obterá as medidas dos três ângulos internos do triângulo. (v) Dessa forma, ele soma esses três valores, obtendo 180° como resultado. (vi) Depois disso, seleciona o ícone “mover” e depois clica em um dos três vértices, movendo-o livremente. (vii) Assim, obterá um novo triângulo $\triangle ABC$, com novos ângulos e outras medidas. Mas, se somar as três medidas, obterá novamente 180° .

O exercício 4 é lúdico e também serve para consolidar a soma dos ângulos internos de um triângulo como igual a 180° . É uma atividade a ser desenvolvida preferencialmente em duplas, favorecendo a cooperação e troca de informações.

Finalmente o quinto exercício é para que os alunos **demonstrem**, de maneira for-

mal, que a soma dos ângulos internos de um triângulo, na Geometria Plana, é sempre igual a 180° . O professor deve dizer que, na matemática, mesmo que os alunos façam milhares de exercícios que apresentem sempre o mesmo resultado, ele deve sempre ser “demonstrado”, como fizemos neste exercício. Além disso, a escolha da reta r independe dos vértices e dos lados do triângulo, desde que essa reta fique oposta ao lado mencionado. Após a correção desse exercício, o professor pode recomendar algumas leituras que mostram outros tipos de Geometria, as chamadas Geometrias Não-Euclidianas, onde a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que 180° , como no Semi-Plano de Poincaré, ou maior que 180° , como na Geometria Esférica. Também pode ser recomendada uma pesquisa sobre as chamadas “Geometrias Não-Euclidianas”. Se necessário, apresente a Figura 3.26 deste trabalho, mostrando que existem triângulos, em algumas dessas geometrias, cuja soma dos ângulos é menor que 180° , no caso a soma vale 155° .

VI. Soma dos ângulos internos de um polígono

1. Pela atividade anterior, constatamos que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo, na Geometria Plana, é sempre igual a 180° . Mas o que será que acontece com os outros polígonos convexos? Vamos começar pelo quadrilátero. Observe a Figura 5.11:

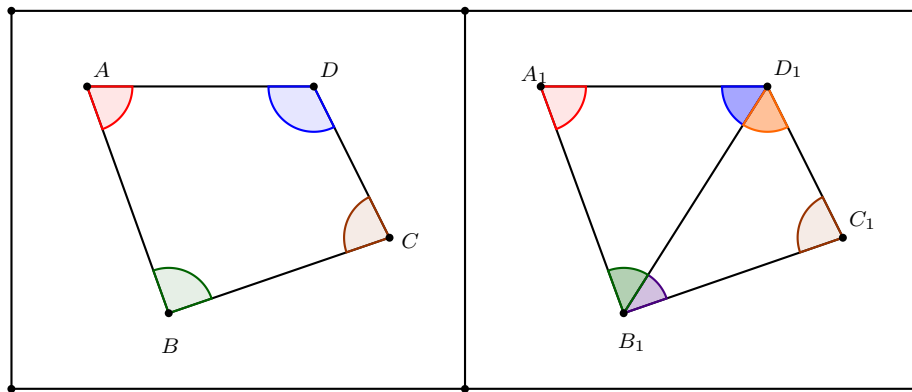


Figura 5.11: Quadriláteros

a) Qual a diferença de uma figura para a outra?

b) Na segunda figura, qual a soma dos ângulos internos do quadrilátero? Por quê?

2. Agora, observe a Figura 5.12:

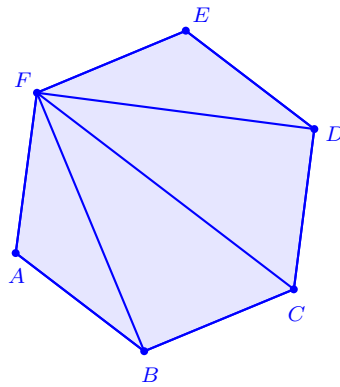


Figura 5.12: Polígono

Esse polígono, com seis lados chama-se .Nesse caso, qual a
soma das medidas dos seus ângulos internos?

3. E para a Figura 5.13, qual será a soma das medidas dos seus ângulos? Justifique.

4. Compare os resultados obtidos nos exercícios 2 e 3.

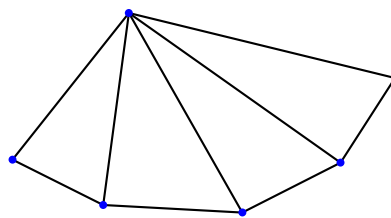


Figura 5.13: Hexágono

Resolução e comentários:

- 1. a) O quadrilátero da primeira figura foi dividido em dois triângulos, como na segunda figura. b) A soma dos ângulos será 360° . Pois são dois triângulos, $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.*
- 2. Hexágono. Quatro triângulos: $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.*
- 3. $720^\circ = 4 \cdot 180^\circ$*
- 4. Ambos apresentam resposta 720° . Não importa como seja o hexágono convexo. Qualquer um deles pode ser dividido em 4 triângulos. Portanto, $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.*

A divisão do quadrilátero (e posteriormente dos hexágonos) em triângulos é a peça chave para o entendimento do aluno a respeito da soma de ângulos internos de um polígono qualquer. O professor pode, no caso, dar outros exemplos com pentágonos, heptágonos e outros polígonos.

Essa atividade desencadeia o trabalho de construção e entendimento da fórmula para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

VII. Buscando a generalização

1. Até o momento, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , a de um quadrilátero é 360° , ou $2 \cdot 180^\circ$, pois podemos dividi-lo em dois triângulos. Também vimos que o hexágono pode ser dividido em quatro triângulos e, portanto, a soma de seus ângulos internos é $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Dessa forma, observe a Figura 5.14 a seguir e responda:

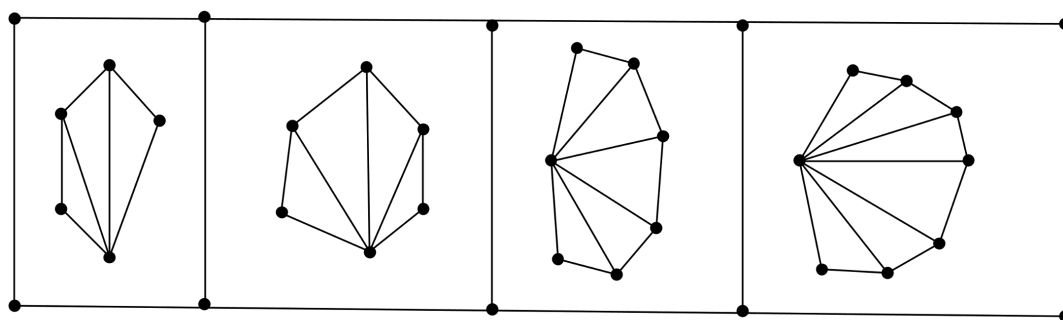


Figura 5.14: Polígonos

a) O pentágono está dividido em \quad triângulos. Portanto, a soma dos seus ângulos internos será \quad .

b) Já o hexágono, como vimos anteriormente, está dividido em quatro triângulos. Portanto, a soma dos seus ângulos internos será 720° , pois $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Conclua, seguindo o mesmo raciocínio, qual será a soma dos ângulos internos de um heptágono e de um octógono.

2. Seguindo a lógica do exercício anterior, responda:

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono, que é um polígono de 9 lados?

b) E a de um dodecágono, que é um polígono de 12 lados?

c) Analisando as questões anteriores, é possível generalizar, ou seja, escrever uma fórmula para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer com n lados. Escreva-a.

3. A partir da fórmula descoberta, calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 17 lados.

4. Existe um polígono cuja soma dos ângulos internos seja igual a 400° ? Justifique.

Resolução e comentários:

1. a) 3; $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. b) como o heptágono pode ser dividido em 5 triângulos, a soma será $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. Já o octógono pode ser dividido em 6 triângulos, ou seja, a soma será $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$.

2. a) $7 \cdot 180^\circ = 1260^\circ$.

b) $10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

c) Generalizando, a soma será sempre igual ao número de lados do polígono menos dois, multiplicado por 180° . Matematicamente falando, $S =$

$(n - 2) \cdot 180^\circ$, onde S é a soma dos ângulos internos e n é o número de lados do polígono.

3. $15 \cdot 180^\circ = 2700^\circ$ 4. A soma jamais poderá ser 400° , pois 400 não é um múltiplo de 180. Se dividirmos 400 por 180, não obteremos um número natural e n , que representa o número de lados do polígono, deve ser um número natural.

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno perceba, as regularidades presentes nos exercícios, envolvendo a soma dos ângulos internos, o número de lados e o número de triângulos em que o polígono é dividido. Após a descoberta de uma fórmula, no exercício 2 item c), que vale para qualquer polígono, o professor deve dizer que isso facilita o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono com muitos lados, no qual o desenho se complicaria e tornaria-se trabalhoso realizá-lo. Vale a pena também o professor comentar que há um método, chamado de Princípio da Indução Finita, onde é possível demonstrar essa e outras fórmulas matematicamente, garantindo sua veracidade. O exercício 3 é uma aplicação dessa fórmula e o 4, uma boa oportunidade para o aluno perceber como a divisibilidade nos auxilia na geometria. Se a soma for um número que não é múltiplo de 180° , jamais será possível que um polígono apresente esse valor como soma de seus ângulos internos. Afinal, n deve ser um número natural, pois representa o número de lados do polígono. Essa percepção pode vir de duas formas: ou da ideia de múltiplo de 180° ou da aplicação da fórmula, verificando-se posteriormente que n não será natural.

Referências Bibliográficas

- [1] *Geometria Não Euclidiana (videocast). Tópicos de História da Matemática.* Legendagem: @bobdirlei. Disponível em [https : //www.youtube.com/watch?v = gqyY_vSQWEw](https://www.youtube.com/watch?v=gqyY_vSQWEw) . Acesso em 21 dez. 2012.
- [2] ANDRADE, Maria L. T., *Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico* Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP),2011
- [3] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. C. *Novo Praticando Matemática, 7ª série.* São Paulo: Editora do Brasil, 2002.
- [4] BARROSO, Juliana M. *Projeto Araribá Matemática, 6ª série.* São Paulo: Moderna, 2006.
- [5] BOYER, Carl B., *História da Matemática* . Tradução de Elza Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.
- [6] BRAZ, Fernanda M. *História da Geometria Hiperbólica.* Monografia (Especialização). Universidade Federal de Minas Gerais (UF-MG), 2009.
- [7] DRUCK, Iole F. *Teorias Axiomáticas de 1ª Ordem.* Introdução à Lógica. Universidade de São Paulo (USP), 2006.
- [8] EUCLIDES. *Os Elementos* . Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [9] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [10] GARBI, Gilberto G. *C.Q.D.: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.* São Paulo: Livraria da Física, 2010.

- [11] GIOVANNI, J., J. R.; CASTRUCCI, B. *emphA conquista da Matemática*, 8º Ano. São Paulo: FTD, 2009.
- [12] GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 4. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 2008.
- [13] HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements* Vol. 1. 2. ed. New York: Dover Publications, 1956.
- [14] HILBERT, David. *Fundamentos da Geometria*. Lisboa: Gradiva, 2003.
- [15] LODOVICI, S. D. B; TÁBOAS, P. Z. *Quinto Postulado de Euclides e o Axioma de Pash: resenha histórica e análise de viabilidade de abordagem axiomática para o ensino de Geometria Euclidiana*. São Paulo, 2011.
- [16] LOOMIS, Elisha S. *The Pythagorean Proposition*. Natl Council of Teachers, 1968.
- [17] MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. *História da Matemática em Atividades Didáticas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- [18] PIETROPAOLO, Ruy C. *(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2005.
- [19] SÃO PAULO, (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática, ensino fundamental, 6ª série, volume 2*. São Paulo: SEE, 2009.
- [20] SÃO PAULO, (Município) Secretaria Municipal de Educação. *Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática, 7º Ano volume 2 / Programa de Orientações Curriculares. Livro do Professor*. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010.
- [21] SÃO PAULO, (Município) Secretaria Municipal de Educação. *Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática, 8º Ano volume 2 / Programa de Orientações Curriculares. Livro do Professor*. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010.

- [22] SÃO PAULO, (Município) Secretaria Municipal de Educação. *Orientações Curriculares* Proposição de Expectativas de Aprendizagem para o Ensino Fundamental: Ciclo II, Matemática. São Paulo, 2007.
- [23] SOUZA, J.; PATARO, P. M.. *Vontade de saber Matemática - 7º Ano*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.