



**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diego Mariano Valero

**Matemática Financeira como Eletiva do  
Programa Inova Educação do Governo do  
Estado de São Paulo**

Campinas

2021

# Diego Mariano Valero

Matemática Financeira como Eletiva do Programa Inova Educação do Governo do Estado de São Paulo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador: Laércio Luís Vendite**

Este trabalho corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Diego Mariano Valero e orientada pelo Prof. Dr. Laércio Luís Vendite.

Campinas

2021

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

V237m Valero, Diego Mariano, 1989-  
Matemática financeira como eletiva do Programa Inova Educação do  
Governo do Estado de São Paulo / Diego Mariano Valero. – Campinas, SP :  
[s.n.], 2021.

Orientador: Laércio Luís Vendite.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matemática financeira. 2. Juros simples. 3. Juros compostos. 4.  
Amortização. 5. Ensino médio. I. Vendite, Laércio Luís, 1954-. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Financial mathematics as an elective of the Inova Educação  
Program of the Government of the State of São Paulo

**Palavras-chave em inglês:**

Financial mathematics

Simple interest

Compound interest

Amortization

High school

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Laércio Luís Vendite [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Luiz Leduino de Salles Neto

**Data de defesa:** 07-04-2021

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0864-4041>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3078208761356776>

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 07 de abril de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). LAÉRCIO LUÍS VENDITE**

**Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES**

**Prof(a). Dr(a). LUIZ LEDUINO DE SALLES NETO**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

## Agradecimentos

Agradeço, primeiramente e sobretudo, ao meu orientador, professor Laércio Luís Vendite, pela atenção e por toda ajuda durante o processo de aperfeiçoamento e apresentação deste trabalho.

Em segundo lugar, agradeço à minha mãe Gilda, ao meu pai Sidnei, ao meu irmão Douglas, aos meus avós Ataliba e Odete e à toda minha família por todo apoio e incentivo aos meus estudos.

Agradeço também aos meus colegas de turma de mestrado por todo o convívio e aprendizado: Alexandre Soares, Almir Lanzoni, Ana Cláudia Piau, Bruno Tafarello, Caio Bargas, Claudia Meneghin, Fábio Simon, Francisco C. de Souza, Gustavo Batista, Raul Cid e Rodrigo Palma.

Agradeço também aos muitos amigos e colegas de trabalho que marcaram minha trajetória no ambiente escolar da rede pública de ensino, em especial à professora de inglês Graziela Giberti, que me auxiliou na correção gramatical e ortográfica da seção intitulada “*Abstract*” desta dissertação.

Agradeço aos professores do IMECC que lecionaram disciplinas do PROFMAT: Angelo C. Bianchi, Claudina Izepe Rodrigues, Lino Anderson da Silva Grama, Pedro Jose Catuogno, Ricardo Miranda Martins, Roberto Andreani, Verónica Andrea González-López e Sergio Antonio Tozoni.

Por último agradeço a Deus, por colocar estas pessoas tão especiais no meu caminho, por me dar forças para enfrentar todas as dificuldades encontradas e por sempre conseguir superá-las.

“Mais importante que as riquezas naturais são as  
riquezas artificiais da educação e tecnologia.”

Roberto Campos (1917 - 2001)

## Resumo

O Inova Educação foi implementado no ano de 2020 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Um dos propósitos deste programa é oferecer eletivas como componentes curriculares. O objetivo deste trabalho é oferecer aos professores da rede pública de ensino uma metodologia de ensino sequencial, completa e detalhada sobre como introduzir conceitos de Matemática Financeira aos estudantes do Ensino Médio. Inicialmente, o texto traz uma abordagem teórica sobre o contexto histórico do surgimento do dinheiro como moeda de troca em substituição à prática primitiva de escambo. Em seguida, conceitos matemáticos e problemas fundamentais, tais como: porcentagem, aumentos e descontos são apresentados ao leitor. Posteriormente, discute-se a origem do crédito financeiro e a construção do conceito de taxa de juros. Utilizando elementos de Matemática Discreta, pretende-se mostrar que o Regime de Juros Simples está associado às Progressões Aritméticas, enquanto o Regime de Juros Compostos é análogo às Progressões Geométricas. Aproveitando tais ideias, aprofunda-se no tema com a discussão sobre Taxas de Juros Equivalentes, Inflação e Taxa de Juros Real de uma economia. Também será apresentado um estudo sobre as modalidades de financiamento e seus principais sistemas de amortização: SAC e Price, ambos com o uso de planilhas eletrônicas do software Microsoft Excel. Por fim, mas não menos importante, um panorama geral sobre a estrutura do mercado financeiro brasileiro será apresentado. Nesta última etapa, o leitor entenderá como o Banco Central do Brasil utiliza instrumentos de políticas monetárias no controle de índices de preços nacionais como o IPCA. Neste contexto, a última proposta deste trabalho é uma análise qualitativa dos principais meios de investimentos, tais como: renda fixa (títulos públicos federais, emissão bancária e crédito privado), renda variável (ações, ETFs e fundos imobiliários) e ativos que funcionam como reservas de valor (moeda estrangeira, metais preciosos e criptomoedas). Ainda dentro do tema e com a finalidade de mostrar a evolução tecnológica do conceito de dinheiro, uma abordagem sobre os sistemas de pagamentos instantâneos será apresentada. Todas estas propostas contemplam as cinco habilidades da BNCC relacionadas ao tema: Matemática Financeira no Ensino Médio. Portanto, a eletiva aqui sugerida deverá contribuir de forma substancial no alcance do projeto de vida dos estudantes, independentemente das características pessoais de cada aluno ou da carreira profissional por cada um deles escolhida.

**Palavras-Chave:** Inova Educação; BNCC; Matemática Financeira; Juros Simples; Juros Compostos; Sistemas de Amortização; Renda Fixa, Renda Variável, Pagamentos Instantâneos; Ensino Médio.

## **Abstract**

Inova Educação was implemented in 2020 by the São Paulo State Department of Education. One of the purposes of this program is to offer electives as curricular components. The objective of this work is to offer to public school teachers a complete and detailed sequential teaching methodology about how to introduce concepts of Financial Mathematics to High School students. Initially, the text brings a theoretical approach about historical context of the emergence of money as a bargaining chip to replace the primitive barter practice. Then, mathematical concepts and fundamental problems, such as: percentage, increases and discounts are introduced to the reader. Subsequently, the origin of financial credit and the construction of the interest rate concept are discussed. Using elements of Discrete Mathematics, it is intended to show that the Simple Interest Regime is associated with Arithmetic Progressions, while the Compound Interest Regime is analogous to Geometric Progressions. Taking advantage of these ideas, it delves into the topic with the discussion about Equivalent Interest Rates, Inflation and the Real Interest Rate of an economy. This study will also be presented about financing modalities and their main amortization systems: SAC and Price, both using electronic spreadsheets from Microsoft Excel software. At last, and not less important, an overview about the structure of the Brazilian financial market will be showed. In this last step, the reader will understand how the Central Bank of Brazil uses monetary policies instruments to control national prices indices such as the IPCA. In this context, the last proposal of this work is a qualitative analysis of the main means of investments, such as: fixed income (federal public bonds, bank titles and private credit), variable income (stocks, ETFs and real estate funds) and assets that works as value reserves (foreign currency, precious metals and cryptocurrencies). Still within the theme and in order to show the technological evolution of the concept of money, an approach on instant payment systems will be showed. All of these proposals contemplate the five skills of BNCC related to the theme: Financial Mathematics in High School. Therefore, the elective here suggested, should contribute substantially to the achievement of the student's life project, regardless of the student's personal characteristics or the professional career chosen by then.

**Keywords:** Inova Educação; BNCC; Financial Mathematics; Simple Interest; Compound Interest; Amortization Systems; Fixed Income; Variable Income, Instant Payments; High School.



## Lista de Figuras

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 1.1.1  | Componentes curriculares do programa Inova Educação.....   | 14 |
| 2.1.1  | Grécia, reino da Lídia - 620-550 a.C. - Peso: 4,69 g - Diâmetro: 12,5mm.....   | 25 |
| 2.1.2  | Cauri.....   | 26 |
| 2.1.3  | A Parábola do Pescador e do Cozinheiro.....  | 28 |
| 2.1.4  | Cédula (cem dólares) de 1934. Dizeres: “gold certificate” em destaque.....   | 29 |
| 2.1.5  | Nota recente (2009) de cem dólares. Nenhuma menção sobre um certificado de ouro pode ser lida. Isso ocorreu porque, em 1971, o então presidente dos Estados Unidos, Richard Nixon, impôs o fim do padrão ouro.....       | 29 |
| 2.3.1  | The “Esaglia” Tablet (Louvre) – Cálculos matemáticos usados pelos babilônios.....  | 34 |
| 2.3.2  | A Parábola do Agricultor e do Apicultor.....   | 36 |
| 2.6.1  | Gráfico comparativo entre juros simples e compostos no curto prazo.....  | 47 |
| 2.6.2  | Funções: Afim e Exponencial.....   | 48 |
| 2.8.1  | Sobre o IPCA – Fonte: <a href="http://www.bcb.gov.br">www.bcb.gov.br</a> .....   | 52 |
| 2.8.2  | Inflação (IPCA) e Taxa SELIC – Fonte: <a href="http://www.bcb.gov.br">www.bcb.gov.br</a> .....   | 53 |
| 2.10.1 | Motivação para o estudo das Curvas de Oferta e Demanda.....  | 60 |
| 2.10.2 | Exemplo de curvas de oferta e demanda lineares para o saco de arroz de 5kg.....  | 61 |
| 2.10.3 | Em setembro de 2020 o preço do arroz disparou nos supermercados.....   | 61 |
| 2.11.1 | Motivação para o estudo dos sistemas de amortização SAC e Price.....   | 65 |
| 3.1.1  | Meta para taxa Selic.<br><a href="https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/metaselic">https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/metaselic</a> .....                           | 74 |
| 3.1.2  | Em agosto de 2020, o Copom decidiu baixar a meta da taxa Selic para 2% a.a.....  | 75 |
| 3.1.3  | Devido à crise causada pela pandemia de coronavírus, o congresso brasileiro aprovou a PEC do Orçamento de Guerra, que autorizou o Bacen a negociar títulos públicos de forma de forma mais ampla do que fazia antes..... | 75 |
| 3.1.4  | Em março de 2020, o Bacen decidiu reduzir a alíquota de compulsório sobre depósitos a prazo.....   | 76 |
| 3.1.5  | A soma da PG converge em aproximadamente cinquenta ciclos de depósito seguido de empréstimo.....   | 77 |
| 3.1.6  | O projeto de lei PLP 19/2019, que trata da autonomia do Bacen, está em pauta no Congresso Nacional.....  | 78 |
| 3.1.7  | IPCA e meta para a inflação.<br><a href="https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/precos">https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/precos</a> .....                          | 78 |
| 3.2.1  | Acesse: <a href="https://www.tesourodireto.com.br">https://www.tesourodireto.com.br</a> .....  | 79 |
| 3.2.2  | Alguns títulos públicos prefixados disponíveis ao investidor em 02/09/2020.....  | 79 |
| 3.2.3  | Título público Tesouro Selic 2025, disponível ao investidor em 02/09/2020.....   | 80 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3.2.4 | Títulos públicos Tesouro IPCA+ disponíveis em 02/09/2020.....   | 81  |
| 3.2.5 | Tesouro IPCA+ 2026 – Esquerda: preço do título. Direita: valor, ao ano, da taxa prefixada. Fonte: <a href="https://www.tesourodireto.com.br/titulos/historico-de-precos-e-taxas.htm">https://www.tesourodireto.com.br/titulos/historico-de-precos-e-taxas.htm</a> ..... | 81  |
| 3.3.1 | Taxa dos Depósitos Interfinanceiros (DI) e meta para taxa Selic. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com">https://br.tradingview.com</a> .....   | 83  |
| 3.3.2 | Em fevereiro de 2020, o Bacen declarou liquidação extrajudicial da Dacasa Financeira.....   | 85  |
| 3.3.3 | Em março de 2020, o FGC liberou o pagamento a credores da Dacasa Financeira.....  | 85  |
| 3.4.1 | Moody’s, S&P e Fitch: as três principais agências de classificação de risco.....  | 87  |
| 3.4.2 | Escala de “notas de crédito” ou, em inglês: “ <i>credit rating notes</i> ” .....  | 88  |
| 3.5.1 | Os fenícios realizavam comércio através das galés, veículos marítimos movidos a vela e remos.....   | 89  |
| 3.5.2 | As carteiras teóricas dos índices da B3 podem ser obtidas em: <a href="http://www.b3.com.br">www.b3.com.br</a> .....  | 95  |
| 3.5.3 | Índice Bovespa, em vermelho, e fundo (ETF) BOVA11, em azul, quase perfeitamente correlacionados.....  | 97  |
| 3.5.4 | Comprar cotas de um ETF (cesta de ações) é tão prático como adquirir laranjas.....  | 98  |
| 3.6.1 | Performance de três FIMs (categoria macro) nos últimos 24 meses. Fonte: <a href="https://maisretorno.com">https://maisretorno.com</a> .....   | 103 |
| 3.6.2 | Um trabalhador pode completar sua previdência através de um plano privado.....  | 104 |
| 3.7.1 | Gráfico USDBRL. Fonte: <a href="https://br.tradingview.com/symbols/USDBRL/">https://br.tradingview.com/symbols/USDBRL/</a> .....  | 107 |
| 3.7.2 | Ouro e prata atuam como reserva de valor há muito tempo.....  | 109 |
| 3.7.3 | A dúvida sobre ter ouro no portfólio é muito comum entre os investidores.....   | 109 |
| 3.7.4 | Pequenas frações do metal tornam a compra de ouro físico muito acessível.....   | 110 |
| 3.7.5 | American Eagle e Maple Leaf, uma onça troy equivale a cerca de 31,1 g.....  | 110 |
| 3.8.1 | O Bitcoin é atualmente a maior rede blockchain por capitalização de mercado.....  | 113 |
| 3.8.2 | Em setembro de 2020, a Vale realizou sua primeira transação via blockchain.....   | 114 |
| 3.9.1 | Cerca de 50 países têm ou planejam ter meios de pagamento instantâneo.....  | 115 |
| 3.9.2 | Cerca de 85% da população mundial já possui o seu próprio smartphone.....   | 115 |
| 3.9.3 | Pagamentos instantâneos substituem o uso do dinheiro físico.....  | 115 |
| 3.9.4 | Logomarca do Pix, do Bacen.....   | 116 |
| 3.9.5 | O smartphone lê o QR Code e o pagamento é processado de forma instantânea.....  | 116 |
| 3.9.6 | Transporte poderá ser pago apenas aproximando um smartphone ao terminal.....  | 116 |
| 3.9.7 | Em abril de 2020, descobriu-se que 40% da população ativa do país atuava no mercado informal.....   | 117 |
| 3.9.8 | O Pix substituirá serviços como TED, DOC e a modalidade débito.....   | 117 |

## Lista de Tabelas

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 1.1.1 | Modelo de Plano da Eletiva do Programa Inova São Paulo.....                    | 17  |
| 1.1.2 | De acordo com o engajamento do estudante, são três os possíveis conceitos..... | 18  |
| 1.3.1 | Plano da Eletiva de Matemática Financeira no Ensino Médio.....                 | 22  |
| 2.4.1 | Resolução do Exemplo 2.4.1.....  | 37  |
| 2.5.1 | Resolução do Exemplo 2.5.1.....  | 41  |
| 2.6.1 | Resolução do Exemplo 2.6.1.....  | 46  |
| 2.7.1 | Equivalência entre prazos.....   | 49  |
| 3.1.1 | Experimento Multiplicador de Base Monetária.....                               | 76  |
| 3.1.2 | Alíquota vs Fator Multiplicador Monetário.....                                 | 77  |
| 3.2.1 | Tributação Regressiva de Imposto de Renda.....                                 | 82  |
| 3.6.1 | Alíquotas de Imposto sobre Operações Financeiras (IOF).....                    | 102 |
| 3.6.2 | Quanto maior o período, menor será a alíquota de IR paga pelo cotista.....     | 103 |
| 3.6.3 | Confira as Alíquotas da Tabela Regressiva de IR.....                           | 106 |

## Lista de Abreviaturas e Siglas

|           |  |
|-----------|--|
| BNCC      | Base Nacional Comum Curricular                     |
| FED       | Federal Reserve                                    |
| COPOM     | Comitê de Política Monetária                       |
| IPCA      | Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo      |
| IBGE      | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística    |
| IPI       | Imposto sobre Produtos Industrializados            |
| ICMS      | Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços |
| CDB       | Certificado de Depósito Bancário                   |
| SELIC     | Sistema Especial de Liquidação e de Custódia       |
| SAC       | Sistema de Amortização Constante                   |
| Price/SFA | Sistema Francês de Amortização                     |
| BACEN     | Banco Central do Brasil                            |
| DEMAB     | Departamento de Operações do Mercado Aberto        |
| CMN       | Conselho Monetário Nacional                        |
| LTN       | Letras do Tesouro Nacional                         |
| LFT       | Letras Financeiras do Tesouro                      |
| NTN       | Notas do Tesouro Nacional                          |
| LCI       | Letras de Crédito Imobiliário                      |
| LCA       | Letras de Crédito do Agronegócio                   |
| CDI       | Certificado de Depósito Interbancário              |
| FGC       | Fundo Garantidor de Crédito                        |
| IR        | Imposto de Renda                                   |
| IOF       | Imposto sobre Operações Financeiras                |
| CRI       | Certificados de Recebíveis Imobiliários            |
| CRA       | Certificados de Recebíveis do Agronegócio          |
| B3        | Brasil, Bolsa, Balcão                              |
| IBOV      | Índice Bovespa                                     |
| ETF       | Exchange Traded Funds                              |
| FIA       | Fundo de Investimento em Ações                     |
| FII       | Fundo de Investimento Imobiliário                  |
| BTC       | Bitcoin  |

## Sumário

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>14</b>  |
|          | 1.1 - Sobre o Programa Inova Educação e as Eletivas.....                              | 14         |
|          | 1.2 - A Educação Financeira na BNCC.....  | 19         |
|          | 1.3 - Plano de Matemática Financeira como Eletiva do Ensino Médio.....                | 21         |
| <b>2</b> | <b>Fundamentos de Matemática Financeira</b>   | <b>25</b>  |
|          | 2.1 - Conceito de Dinheiro ou Moeda Fiduciária.....                                   | 25         |
|          | 2.2 - Porcentagem - Aumentos e Descontos.....   | 31         |
|          | 2.3 - A Origem do Crédito e Taxa de Juros.....  | 34         |
|          | 2.4 - Regime de Juros Simples como uma Progressão Aritmética (PA).....                | 37         |
|          | 2.5 - Regime de Juros Compostos como uma Progressão Geométrica (PG).....              | 41         |
|          | 2.6 - Juros Simples versus Juros Compostos no Curto Prazo.....                        | 45         |
|          | 2.7 - Taxas de Juros Equivalentes.....  | 49         |
|          | 2.8 - Inflação.....   | 52         |
|          | 2.9 - Taxa de Juros Real.....   | 56         |
|          | 2.10 – Curvas de Demanda e Oferta.....  | 60         |
|          | 2.11 - Sistemas de Amortização SAC e Price com o uso do software Microsoft Excel..... | 65         |
| <b>3</b> | <b>Estrutura do Mercado Financeiro</b>  | <b>74</b>  |
|          | 3.1 - Meta da Taxa SELIC e a Atuação do Bacen no Controle da Inflação.....            | 74         |
|          | 3.2 - Renda Fixa - Títulos Públicos Federais.....                                     | 79         |
|          | 3.3 - Renda Fixa - Emissão Bancária.....  | 83         |
|          | 3.4 - Renda Fixa - Crédito Privado.....   | 86         |
|          | 3.5 - Renda Variável – Ações, ETFs e Fundos Imobiliários.....                         | 89         |
|          | 3.6 - Fundos de Investimentos Multimercados e Planos de Previdência Privada.....      | 101        |
|          | 3.7 - Reservas de Valor – Taxa de Câmbio e Metais Preciosos.....                      | 107        |
|          | 3.8 - Tecnologia Blockchain e as Criptomoedas.....                                    | 111        |
|          | 3.9 - Pagamentos Instantâneos e o PIX do Banco Central.....                           | 116        |
| <b>4</b> | <b>Considerações Finais</b>   | <b>118</b> |
| <b>5</b> | <b>Referências</b>  | <b>119</b> |

## 1.1 - Sobre o Programa Inova Educação

### 1.1.1 – Introdução

O programa Inova Educação foi anunciado em 2019 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo com o propósito de oferecer novas oportunidades para todos os estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio do Estado de São Paulo.

O Programa traz inovações para que as atividades educativas sejam mais alinhadas às vocações, desejos e realidades de cada indivíduo. Essas novidades são essenciais para promover o desenvolvimento intelectual, emocional, social e cultural dos estudantes; reduzir a evasão escolar; melhorar o ambiente escolar e fortalecer a ação dos professores.

Eletiva é um componente curricular do programa Inova Educação, assim como tecnologia e projeto de vida também são.

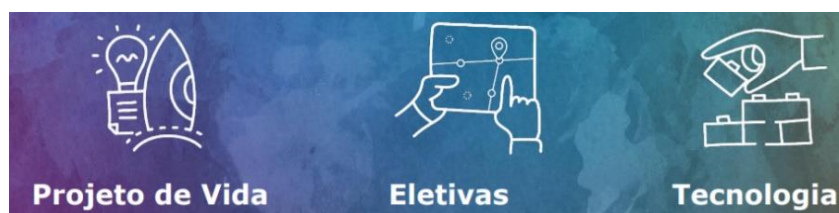


Figura 1.1.1 – Componentes curriculares do programa Inova Educação.

### 1.1.2 - Principais Características de uma Eletiva

- Esse componente curricular tem duração semestral e é de livre escolha do indivíduo.
- Serão duas aulas semanais de 45 minutos cada, ministradas por um professor que elabora o plano de eletiva com base no projeto de vida comum a um conjunto de estudantes.
- As eletivas levam em consideração o diagnóstico das produções realizadas pelos alunos na dinâmica de acolhimento do início do ano letivo, conhecida como “Varal de Sonhos”.
- A publicação das ementas de cada eletiva permite aos estudantes escolher de forma consciente aquela que efetivamente deseja cursar.
- As eletivas estão conectadas diretamente ao projeto de vida do estudante e às habilidades do Currículo Paulista.
- Ela é planejada para combinar com um produto (culminância) ou evento a ser apresentado para toda a escola.
- Por último, ela tem como princípio a questão da interdisciplinaridade e da integração de estudantes de diversos anos e séries, haja vista que ela trabalha com a reenturmação.

É importante ressaltar que só as eletivas são componentes curriculares diferenciados.

Elas possuem uma organização diferenciada, que é a questão da reenturmação, em que alunos de diferentes séries e anos são agrupados de acordo com o tema ou de acordo com a área de interesse que percorre seu projeto de vida.

### 1.1.3 – Principais Objetivos de uma Eletiva

- Aprofundar, enriquecer e ampliar conceitos, procedimentos ou temáticas relativos a uma disciplina ou a uma área de conhecimento.

- Proporcionar o desenvolvimento de projetos relacionados aos interesses dos estudantes e da comunidade a que pertencem.

- Desenvolver a autonomia e a capacidade de tomada de decisões.

- Promover a aquisição de competências relevantes para a vida.

As eletivas partem de um problema em que os estudantes são mobilizados, ou melhor, instigados de diferentes maneiras a tomarem decisões sobre o seu percurso formativo.

Elas podem então ser consideradas como um caminho para diversificação das experiências escolares com o objetivo de aprofundar, enriquecer e ampliar os estudos relativos às áreas do conhecimento contempladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

### 1.1.4 – O que as eletivas devem possibilitar ao aluno?

- Exercitar suas escolhas para aprimorar a autonomia e o protagonismo.

- Participar da construção do currículo escolar.

- Realizar atividades relacionadas ao seu projeto de vida.

- Ampliar, diversificar e/ou aprofundar conteúdos e habilidades de um ou mais componentes curriculares do Currículo Paulista.

- Desenvolver competências específicas para a continuidade dos estudos.

- Aproximar a teoria da prática utilizando o que foi aprendido para construir algo de concreto, um produto chamado de culminância.

Os alunos são articulados para o desenvolvimento de habilidades e competências socioemocionais. Essas habilidades estão presentes no currículo e as competências socioemocionais estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), portanto, o trabalho com eletivas ele pressupõe um trabalho diferenciado com os alunos.

### 1.1.5 – O que deve constar na ementa de uma eletiva?

- Por que essa eletiva é imperdível?

- Como essa eletiva se relaciona com a cidadania, a continuidade dos estudos e o mundo do trabalho?

- Quais habilidades e conhecimentos do Currículo Paulista serão desenvolvidos?

- Quais são os espaços e os recursos didáticos utilizados?

- Quais atividades serão realizadas em cada aula?

- Qual é o projeto para o evento de culminância?

### 1.1.6 – Por que a culminância das eletivas é importante?

- Oportunidade para que os estudantes compartilhem o que foi aprendido durante a eletiva e os produtos criados ao longo do semestre.
- Possibilidade de contar mais sobre o que é cada eletiva para estudantes que ainda não a tenham cursado.
- Concretizar e valorizar o trabalho realizado no semestre.
- Momento de celebração de conquistas.
- Elemento importante para que o estudante perceba e avalie seu próprio desenvolvimento.
- Suporte para que os professores acompanhem o desenvolvimento dos estudantes e, assim, aprimorem a eletiva para uma oferta futura.

### 1.1.7 – Exemplos de eletiva e de culminância:

- Iniciação científica: estudantes constroem uma dissertação científica.
- Empreendedorismo: estudantes criam uma empresa ou ONG.
- Oficina de teatro: estudantes criam um espetáculo teatral/musical.
- Clube de debate: estudantes realizam debates estruturados.
- Fórum de mediação de conflitos: alunos criam estratégias e espaços para lidar com conflitos que acontecem na escola.
- MONU: alunos realizam simulações de reuniões de organismos internacionais.
- Olimpíadas de Matemática: alunos se preparam para uma olimpíada e simulam o evento.

Saiba mais, acesse: [www.inova.educacao.sp.gov.br](http://www.inova.educacao.sp.gov.br)

### 1.1.8 – Como elaborar o Plano da Eletiva

As eletivas não possuem um organizador curricular como os demais componentes, pois ela deve ser planejada para apoiar o desenvolvimento do projeto de vida dos estudantes. Então nós temos que propor situações didáticas diversificadas, com foco principal no desenvolvimento e consolidação de áreas do conhecimento, de habilidades curriculares e de competências presentes na Base Nacional Comum Curricular.

E como fazer isso de forma prática e contextualizada?



Elaborar o Plano da Eletiva conforme o modelo a seguir:

Tabela 1.1.1 - Modelo de Plano da Eletiva do Programa Inova São Paulo

| <b>Plano da Eletiva</b>   |  |
|---|--|
| <b>Título:</b>  |  |
| <b>Professor:</b>   |  |
| <b>Ementa</b>   |  |
| Descrição discursiva da Eletiva.  |  |
| <b>Justificativa</b>  |  |
| Embasa a relevância da Eletiva para a vida do aluno e como ela dialoga com as diversas áreas do conhecimento. |  |
| <b>Objetivos</b>  |  |
| O que se pretende alcançar com o desenvolvimento da Eletiva.  |  |
| <b>Habilidades Desenvolvidas</b>  |  |
| Três habilidades do Currículo que serão desenvolvidas pela Eletiva.   |  |
| <b>Eixos Temáticos – Indicar quais dos seguintes eixos serão trabalhados na Eletiva.</b>                      |  |
| <input type="checkbox"/> Investigação Científica  | <input type="checkbox"/> Processos criativos |
| <input type="checkbox"/> Mediação e intervenção sociocultural   | <input type="checkbox"/> Empreendedorismo    |

| <b>Conteúdo Programático</b>  |
|---|
| O que essa eletiva vai abordar?   |
| <b>Metodologia</b>  |
| A forma de desenvolvimento das aulas.   |
| <b>Recursos Didáticos</b>   |
| Materiais, instrumentos, espaços, equipamentos e suportes para a realização da Eletiva. |
| <b>Culminância</b>  |
| Exemplos: uma apresentação, um sarau, uma intervenção social.                           |
| <b>Avaliação</b>  |
| Instrumentos de acompanhamento do processo de aprendizagem dos alunos.                  |
| <b>Cronograma Semestral</b>   |
| Datas do desenvolvimento de cada conteúdo programático.                                 |
| <b>Referências</b>  |
| Referências utilizadas na elaboração do Plano da Eletiva.                               |

Fonte: Modelo de Plano de Eletiva – Curso INOVA – Formação Aprofundada – Eletivas

Disponível em: <http://avaefape.educacao.sp.gov.br>

### 1.1.9 - Um pouco mais sobre a culminância.

A culminância é o produto da eletiva. Nela os estudantes têm a oportunidade de mostrar o que aprenderam, que saberes construíram e que valores agregaram às suas vidas. Os estudantes expõem o que produziram ao longo do processo para aqueles que comparecerem à culminância.

### 1.1.10 - Como avaliar as disciplinas do Inova Educação?

O Currículo Paulista indica que:

*“[...] a avaliação, no âmbito escolar, deve ser encarada como um recurso pedagógico que permite aos professores, gestores e demais profissionais da educação acompanhar a progressão das aprendizagens, oferecendo subsídios para a análise do próprio processo de ensino.”*

(São Paulo, Currículo Paulista, 2019, p. 41)

A avaliação deve ser composta pela combinação de:

- Avaliação Diagnóstica: no início do processo formativo;
- Avaliação Formativa: ao longo do processo formativo;
- Avaliação Somativa: ao final do processo formativo;

A cada bimestre, o processo avaliativo dos novos componentes será sistematizado em um conceito que seguirá a lógica apresentada na tabela a seguir:

Tabela 1.1.2 - De acordo com o engajamento do estudante, são três os possíveis conceitos.

| Engajamento Total   | Engajamento Satisfatório  | Engajamento Parcial   |
|---|---|---|
| Comprometeu-se de forma produtiva e efetiva nas ações e atividades desenvolvidas ao longo do bimestre/semestre, dedicando-se e apoiando os colegas. | Comprometeu-se em parte das ações e atividades desenvolvidas ao longo do bimestre/semestre, dedicando-se e apoiando os colegas. | Comprometeu-se pouco com as ações e atividades desenvolvidas ao longo do bimestre/semestre, dedicando-se e apoiando os colegas. |

Os professores podem diversificar as estratégias de avaliação, como autoavaliação, criação de portfólios e observação. Para que esse conceito faça sentido para o estudante e ele entenda como pode se desenvolver e como está evoluindo, é essencial que o professor:

- Faça registros sobre o desenvolvimento dos estudantes;
- Garanta momentos de devolutivas para os estudantes;

Na próxima seção do capítulo, serão apresentados alguns trechos da BNCC que tratam exclusivamente das habilidades de Matemática Financeira no Ensino Médio. Em seguida, será proposto um plano deste componente curricular como eletiva do Programa Inova Educação.

## 1.2 - A Matemática Financeira na BNCC

### 1.2.1 - Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. [3]

Confira a seguir a versão final da BNCC. O documento completo contém 600 páginas.



Disponível em:

[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)

### 1.2.2 - Diretrizes da BNCC sobre Matemática Financeira

Confira alguns trechos da BNCC que mencionam diretrizes sobre Matemática Financeira:

BNCC, página 269:

Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos.

Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro.

É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing.

Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos.

### 1.2.3 - Um pouco mais sobre a BNCC e o ensino de Matemática Financeira

A versão mais recente da BNCC foi homologada pelo Ministério da Educação no final do ano de 2017. No referido documento consta, de forma explícita e clara, a obrigatoriedade da introdução de elementos de Matemática Financeira no Ensino Médio.

São exatamente cinco habilidades relacionadas, confira abaixo todas elas na íntegra:

BNCC, página 534:

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

BNCC, página 536:

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

BNCC - Página 541:

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

### 1.2.4 – Sobre o Produto Final desta Dissertação de Mestrado

O produto final desta dissertação de mestrado, consiste em uma sequência didática completa e detalhada sobre como introduzir conceitos de Matemática Financeira no Ensino Médio. O objetivo principal da proposta é oferecer subsídio teórico e também suporte prático aos professores de Matemática da Rede de Estadual de São Paulo que desejam oferecer Matemática Financeira como componente curricular eletiva do Programa Inova Educação.

Dessa forma, um Plano de Eletiva baseado no modelo apresentado na seção anterior e que contemple todas as habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de Matemática Financeira será apresentado e desenvolvido nas próximas seções desta dissertação.

### 1.3 - Plano de Matemática Financeira como Eletiva do Ensino Médio

#### 1.3.1 - Introdução

Disseminar conceitos sobre educação financeira é uma das maiores contribuições sociais que um professor de Matemática pode oferecer aos seus discentes. Isso porque, independente do projeto de vida que um estudante escolha desenvolver, saber lidar com as finanças pessoais sempre será de extrema importância no alcance de objetivos de longo prazo.

No cenário atual em que vivemos, diante de um mercado cada vez mais exigente e competitivo, o domínio das habilidades matemáticas aqui descritas pode representar um enorme aumento de produtividade daquele que decide colocá-las em prática no seu trabalho, possibilitando assim maiores chances de se obter sucesso profissional na carreira escolhida.

Pensando agora na vida particular de um cidadão, possuir conhecimentos satisfatórios sobre finanças pessoais certamente o auxiliará no processo de tomada de decisões sobre poupança, investimentos, construção de patrimônio e consumo consciente dos bens e serviços.

Uma pessoa jovem, em fase inicial de sua carreira profissional, tem nos dias de hoje a oportunidade de empreender naquilo que escolheu estudar e se especializar. Essa pessoa, portanto, tem a liberdade de ganhar a vida naquilo que sabe fazer de melhor para a sociedade. Também pode escolher o que é melhor para consumir num determinado momento, o quanto deseja poupar de sua renda mensal e onde deseja investir esse dinheiro fruto de seu trabalho. Assim, portanto, ela contribui de forma positiva para o crescimento econômico de sua nação.

Por outro lado, se mal administradas forem as finanças dos indivíduos de uma população, mais cedo ou mais tarde um cenário de pobreza social generalizada será observado. Além disso, a má gestão do capital nos leva a observar fenômenos indesejáveis como a destruição dos recursos naturais e a recessão ou até depressão econômica de um país inteiro.

Perceba a dualidade aqui existente. Nós desejamos formar cidadãos lúcidos e conscientes, capazes de viver num ambiente de estabilidade econômica e, portanto, promover um estado de equilíbrio e bem estar social. Caso contrário, a falta ou impossibilidade de se obter experiências educativas e/ou vivenciar essas práticas pedagógicas pode nos levar ao caos generalizado, arruinar planos de prosperidade do indivíduo ou até mesmo de um povo inteiro.

Podemos concluir que a educação financeira é essencial para todos que desejam proteger e valorizar o patrimônio que acumularam durante anos e anos de trabalho árduo. Afinal, sabemos que obter dinheiro a partir do esforço diário não é uma tarefa fácil pra ninguém.

No futuro, quando a capacidade de trabalho do cidadão for eventualmente reduzida ou cessada permanentemente, todo patrimônio acumulado durante sua vida: imóveis, títulos públicos, ações e outros tipos de ativos financeiros, poderá lhe gerar uma renda passiva complementar à sua aposentadoria legal e lhe proporcionar a tão sonhada liberdade financeira.

#### 1.3.2 – Íntegra do Plano da Eletiva

O Plano da Eletiva, documento baseado no modelo apresentado na seção anterior, que contempla todas as habilidades da BNCC relacionadas à abordagem de Matemática Financeira no Ensino Médio será apresentado em sua totalidade e desenvolvido, em detalhes, a seguir.

Plano da Eletiva, conforme modelo apresentado em seção anterior:

Tabela 1.3.1 - Plano da Eletiva de Matemática Financeira no Ensino Médio.

| <b>Plano da Eletiva</b>   |   |
|---|---|
| <b>Título:</b>  | Matemática Financeira                                   |
| <b>Professor:</b>   | Diego Mariano Valero                                    |
| <b>Ementa</b>   |   |
| <p>O mundo gira em torno do dinheiro, de tempos em tempos a economia de um país passa por diversas fases de um ciclo econômico. Você quer entendê-las? Quer saber como tomar as melhores decisões de investimento ao longo da sua vida? Aperfeiçoe suas habilidades matemáticas por meio de estudos sobre a origem do dinheiro, noções como os conceitos de inflação, taxas de juros, financiamentos e seus principais sistemas de amortização. Aqui você aprenderá por meio de planilhas computacionais. Venha fazer parte do mercado financeiro!</p>  |   |
| <b>Justificativa</b>  |   |
| <p>No final da década de 90, o Plano Real dominou a inflação e estabilizou a economia brasileira. Recentemente, mudanças estruturais asseguram juros baixos e permanentes no longo prazo. Diante desse cenário, é essencial que os estudantes, recém ingressos no mercado de trabalho, estejam preparados para analisar as diversas opções de investimento disponíveis no mercado. Nosso trabalho passará por conceitos conectados à leitura e à interpretação e análise de notícias, manchetes de jornal e do material publicitário das empresas do setor de varejo.</p>   |   |
| <b>Objetivos</b>  |   |
| <p>Motivar o estudante sobre a importância na tomada correta de decisões sobre consumo, como por exemplo: o que comprar no supermercado? Ou ainda: como financiar um imóvel? Ao escolher um padrão de consumo sustentável, o indivíduo se conecta com a sua saúde financeira, evitando assim o endividamento excessivo. Conseqüentemente, esta eletiva visa contribuir para o estado de bem-estar social da comunidade escolar. Além de desenvolver o conhecimento científico e gerar engajamento na área de Matemática e suas Tecnologias.</p>   |   |
| <b>Habilidades Desenvolvidas</b>  |   |
| <p>(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.</p> <p>(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.</p> <p>(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.</p> |   |
| <b>Eixos Temáticos</b>  |   |
| <input checked="" type="checkbox"/> Investigação Científica   | <input checked="" type="checkbox"/> Processos criativos |
| <input checked="" type="checkbox"/> Mediação e intervenção sociocultural  | <input checked="" type="checkbox"/> Empreendedorismo    |

| <b>Conteúdo Programático</b>  |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- Conceito de Dinheiro ou Moeda Fiduciária</li><li>- Porcentagem - Aumentos e Descontos</li><li>- A Origem do Crédito e Taxa de Juros</li><li>- Regime de Juros Simples como uma Progressão Aritmética (PA)</li><li>- Regime de Juros Compostos como uma Progressão Geométrica (PG)</li><li>- Juros Simples versus Juros Compostos no Curto Prazo</li><li>- Taxas de Juros Equivalentes</li><li>- Inflação</li><li>- Taxa de Juros Real</li><li>- Curvas de Demanda e Oferta</li><li>- Sistemas de Amortização SAC e Price com o uso do software Microsoft Excel</li><li>- Aplicações da Teoria e Problemas Propostos</li><li>- Meta da Taxa SELIC e a Atuação do Bacen no Controle da Inflação</li><li>- Renda Fixa - Títulos Públicos Federais</li><li>- Renda Fixa - Emissão Bancária</li><li>- Renda Fixa - Crédito Privado</li><li>- Renda Variável – Ações, ETFs e Fundos Imobiliários</li><li>- Fundos de Investimentos Multimercados e Planos de Previdência Privada</li><li>- Reservas de Valor – Taxa de Câmbio e Metais Preciosos</li><li>- Tecnologia Blockchain e as Criptomoedas</li><li>- Pagamentos Instantâneos e o PIX do Banco Central</li></ul> |
| <b>Metodologia</b>  |
| Criação de soluções a partir de situações-problema, elaboração de projetos de intervenção social e uso da sala de aula invertida (envio de sugestões de leitura prévia para os estudantes).   |
| <b>Recursos didáticos</b>   |
| Sala com equipamento multimídia e computadores conectados à internet, ambiente virtual de aprendizagem, tal como o Google <i>Classroom</i> e uso de ambientes externos da escola.   |
| <b>Culminância</b>  |
| A oficina (workshop) de Matemática Financeira será o evento de culminância, momento em que os estudantes compartilharão o resultado concreto de seu trabalho na Eletiva com o restante da comunidade escolar.   |
| <b>Avaliação</b>  |
| Autoavaliação e análise dos planos de trabalho semestral elaborados pelos diversos grupos. Observação direta do desempenho e engajamento de cada estudante durante a oficina (workshop) de Matemática Financeira, evento de culminância da Eletiva.   |

| <b>Cronograma Semestral</b>   |
|---|
| <p>Semanas 1 e 2: Dinâmica de Acolhimento: “Varal dos Sonhos”, Avaliação Diagnóstica, Apresentação da Ementa da Disciplina.</p> <p>Semanas 3 e 4: - Conceito de Dinheiro ou Moeda Fiduciária, Porcentagem - Aumentos e Descontos, A Origem do Crédito e Taxa de Juros.</p> <p>Semanas 5 e 6: Regime de Juros Simples como uma Progressão Aritmética (PA), Regime de Juros Compostos como uma Progressão Geométrica (PG).</p> <p>Semanas 7 e 8: Juros Simples versus Juros Compostos no Curto Prazo, Taxas de Juros Equivalentes, Inflação, Taxa de Juros Real. Curvas de Demanda e Oferta.</p> <p>Semanas 9 e 10: - Sistemas de Amortização SAC e Price com o uso do software Microsoft Excel, aplicações da Teoria e Problemas Propostos.</p> <p>Semanas 11 e 12: - Renda Fixa - Títulos Públicos Federais, Renda Fixa - Emissão Bancária, Renda Fixa - Crédito Privado.</p> <p>Semanas 13 e 14: - Renda Variável – Ações, ETFs e Fundos Imobiliários, Fundos de Investimentos Multimercados e Planos de Previdência Privada.</p> <p>Semanas 15 e 16: Reservas de Valor – Taxa de Câmbio e Metais Preciosos, Tecnologia Blockchain e as Criptomoedas, Pagamentos Instantâneos e o PIX do Banco Central.</p> <p>Semanas 17 e 18: Formação de Grupos e Preparação para o Evento de Culminância.</p> <p>Semanas 19 e 20: Apresentação à Comunidade Escolar do Evento de Culminância: Oficina (Workshop) de Matemática Financeira. Avaliação Somativa.</p> |
| <b>Referências</b>  |
| <p>- VENDITE, L. L. Matemática Financeira e a Utilização de Planilhas Eletrônicas. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2017. v. 1.</p> <p>- Ministério da Educação. Governo Federal do Brasil. BNCC (Base Nacional Comum Curricular). 2017</p> <p>- Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Currículo Paulista. 2019</p> <p>- LIMA, E. L. ; CARVALHO P. C. P; WAGNER E; MORGADO A. C. A Matemática do Ensino Médio 3. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. v.2.</p> <p>- ANBIMA, Fundamentos de Economia e Finanças, Educação Continuada, 01/03/2017.</p> <p>- ANBIMA, O Mercado Financeiro de A à Z, Educação Continuada, 01/03/2017.</p> <p>- ULRICH, F. L. Bitcoin a Moeda na Era Digital 1. ed. Editora Instituto Ludwig Von Mises Brasil, 2017.</p>   |

Fonte: Modelo de Plano de Eletiva – Curso INOVA – Formação Aprofundada – Eletivas

Disponível em: <http://avaefape.educacao.sp.gov.br>



## 2.1 - Conceito de Dinheiro e as Moedas Fiduciárias

### 2.1.1 – A Origem do Dinheiro

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [6]

A História da Civilização nos conta que o homem primitivo procurava defender-se do frio e da fome, abrigando-se em cavernas e alimentando-se de frutos silvestres ou do que conseguia obter da caça e da pesca. Ao longo dos séculos, com o desenvolvimento da inteligência, passou a espécie humana a sentir a necessidade de maior conforto e a reparar no seu semelhante. Nômade por vezes, verificou o homem que, em algumas regiões, podia conseguir diferentes espécies de caça e, com o correr dos tempos, diferentes espécies de objetos e utensílios. Assim, como decorrência das necessidades individuais, surgiram as trocas.

Em face das características de uma região, esses objetos, utensílios, produtos e mais tarde mercadorias, circulavam com maior ou menor procura, acabando sempre um deles por se destacar, adquirindo o sentido daquilo que passou a ser conhecido como MOEDA, isto é, unidade representativa de valor, aceita em uma comunidade, como instrumento de troca. Centenas de objetos e diversos tipos de metais circularam como moeda, notadamente: peles, sal, fumo, mandíbulas de porco, conchas, gado, ferro, cobre, prata e ouro.

Ainda hoje, termos como: pecuniário e salário são amplamente empregados no sentido de dinheiro originários. O primeiro, da palavra latina “pecus”, que significa rebanho, gado e, o segundo, da tradição dos pagamentos, em sal, por bens adquiridos ou serviços prestados.

O gado substituiu diversos objetos que funcionavam como moeda pela vantagem de ser grandemente aceito e aumentar com a reprodução. Tratando-se, entretanto, de mercadoria muito volumosa, difícil de transportar e perecível, surgiu a ideia de se representar o boi por pequenina peça, nela gravando-se a figura do animal.

De acordo com a maioria dos estudiosos, a primeira moeda apareceu na Lídia, na Ásia Menor. Com a descoberta do metal, passou o homem a utilizá-lo também como moeda. Inicialmente, em seu estado natural; depois, sob a forma de barras e objetos. Ainda hoje os museus expõem moedas dos formatos mais diversos: moeda-faca, cunhada em bronze e utilizada na China, a partir do século XII a.C.; moeda-chave, também utilizada na China; o “talento”, peça de cobre e bronze, em forma de pele de animal, usada na Grécia e em Chipre. Na Índia, circulou a “árvore de dinheiro”, da qual se retiravam as moedas, à proporção que delas se necessitava. Existem evidências da cunhagem, na Lídia e na Jônia, no século VII a.C., de moedas em “electrum”, uma liga natural de ouro e prata.



Figura 2.1.1 – Grécia, reino da Lídia - 620-550 a.C. - Peso: 4,69 g - Diâmetro: 12,5 mm

As dimensões e pesos de moedas chegaram a apresentar extraordinário contraste: o submúltiplo do “stater”, unidade monetária da cidade de Aradus, na Fenícia, possuía pouco mais de três milímetros de diâmetro e peso ínfimo, enquanto o “daler”, cunhado na Suécia, em 1644, media 30 centímetros de largura por 70 centímetros de comprimento e pesava 19,71 quilos.

Em várias regiões banhadas pelo mar, especialmente na Ásia, África, América e Oceania, destacadamente em Angola, Madagascar, Gabão, Zanzibar, Moçambique e Brasil, por largo tempo, funcionaram como moeda pequenas conchas de rara beleza pouco diferindo em seu tipo, e que variava entre o "cauri" e o "zimbo", também conhecido como "guimbo" ou "guimbombo".



Figura 2.1.2 – Cauri

Embora a evolução dos tempos tenha levado à substituição do ouro e da prata por metais menos raros ou suas ligas, preservou-se, com o passar dos séculos, a associação dos atributos de beleza e expressão cultural ao valor monetário das moedas, que quase sempre, na atualidade, apresentam figuras representativas da história, da cultura, das riquezas e do poder das sociedades.

A necessidade de guardar as moedas em segurança deu surgimento aos bancos. Os negociantes de ouro e prata, por terem cofres e guardas a seu serviço, passaram a aceitar a responsabilidade de cuidar do dinheiro de seus clientes e a dar recibos escritos das quantias guardadas. Esses recibos (então conhecidos como "*goldsmith's notes*") passaram, com o tempo, a servir como meio de pagamento por seus possuidores, por serem mais seguros de portar do que o dinheiro vivo. Assim surgiram as primeiras cédulas de "papel moeda", ou cédulas de banco, ao mesmo tempo em que a guarda dos valores em espécie dava origem a instituições bancárias.

Os primeiros bancos reconhecidos oficialmente surgiram, respectivamente, na Suécia, em 1656; na Inglaterra, em 1694; na França, em 1700 e no Brasil, em 1808 e a palavra "*bank*" veio da italiana "*banco*", peça de madeira que os comerciantes de valores oriundos da Itália e estabelecidos em Londres usavam para operar seus negócios no mercado público londrino.

### Alguns Comentários

Uma das principais características da humanidade sempre foi a luta pela garantia de sua sobrevivência. Os indivíduos, portanto, sempre estiveram à procura de recursos naturais básicos como alimentos e abrigo seguro para repousarem. Na medida em que as civilizações se tornaram tecnologicamente mais sofisticadas, principalmente com o desenvolvimento da agricultura, pecuária e a possibilidade de construção de moradias fixas, naturalmente surgiu o hábito de acumular "bens" de algum valor intrínseco. Esses "bens" eram então trocados, em comum acordo e com base na necessidade momentânea, entre habitantes de uma mesma comunidade. Tal prática, denominada "escambo", consistia em troca de mercadorias ou serviços sem fazer qualquer uso de moeda.

Uma importante definição será enunciada nesse exato momento: são as chamadas "*commodities*", que nada mais são do que recursos naturais que funcionam essencialmente como matéria-prima para manufatura de produtos de maior valor agregado. Geralmente são produzidos em larga escala e podem ser estocados sem perder a qualidade. Alguns exemplos são: ouro, prata, cobre, minério de ferro, petróleo, etanol, sal, boi gordo, soja, milho, café, açúcar, dentre vários outros exemplos.

Por uma série de conveniências e características especiais, ouro, prata e cobre historicamente foram as principais *commodities* escolhidas como "moeda de troca" pelas civilizações a fim de substituir a prática primitiva de escambo. Essas primeiras moedas basicamente consistiam em pequenas porções uniformes de um determinado metal precioso, que eram devidamente pesadas e acreditadas por um ourives de confiança do rei, imperador, ou qualquer outra autoridade "soberana" de uma determinada sociedade.

Dentre as principais características dos metais preciosos, podemos destacar:

- Alta escassez na natureza e, portanto, dificuldade de mineração.
- Ouro, prata e cobre são menos reativos do que outros metais. Portanto, permanecerão em perfeito estado de conservação por um longo período de tempo.
- Suas propriedades químicas, tais como: densidade, dureza e brilho podem ser facilmente medidas a fim de detectar possíveis amostras fraudulentas.
- Historicamente, povos antigos utilizavam ouro e prata para confeccionar obras de arte e joalheria em geral. Em outras palavras, sempre houve alta demanda por metais preciosos.

Portanto, a humanidade civilizada se acostumou a utilizar metais preciosos como reserva de valor e moeda de troca que possibilitava aos cidadãos efetivar operações comerciais. Resumidamente, um indivíduo que possuía determinada quantidade de bens ou produtos em excesso, poderia vendê-los a outro indivíduo, trocando esse excedente de bens por uma quantidade de moedas de ouro ou prata, em comum acordo entre as duas partes. Dessa forma, era possível "converter" o excesso de riquezas produzidas em reserva de valor, acumulando-as com o tempo na forma de patrimônio individual ou familiar.

### 2.1.2 – A Parábola do Pescador e do Cozinheiro

Leia a história a seguir:

Um pescador voltou de uma viagem ao alto mar e trouxe um excedente de vinte peixes frescos. Um cozinheiro da região, que não possuía barco de pesca, estava muito interessado nos peixes recém capturados. O pescador então decidiu vender todo seu peixe excedente ao cozinheiro por cinco moedas de ouro, em comum acordo entre as duas partes. Naquela noite, os peixes adquiridos pelo cozinheiro serviram oitenta pessoas em seu movimentado restaurante no centro da cidade. Preparar e servir o jantar para todas aquelas pessoas renderam cem moedas de ouro ao cozinheiro!

No dia seguinte, o pescador decide lançar seu barco novamente ao mar. Porém, dessa vez a sorte não o acompanhava e algo raro aconteceu: nenhum peixe fora capturado! Sem alimento fresco e enjoado de comer peixes todos os dias, o pescador decide então levar sua esposa e dois filhos para jantar no restaurante do centro da cidade.

Chegando lá, o dono do estabelecimento rapidamente reconheceu o pescador, que agora era seu cliente. Os dois começaram a conversar sobre as opções do cardápio, foi então sugerido pelo cozinheiro sopa de cogumelos. Os vegetais utilizados no preparo da sopa estavam muito frescos, tudo havia sido comprado naquela manhã, pelo chefe de cozinha, de um agricultor que passava pelo centro da cidade. A família do pescador aceitou a sugestão de cardápio e tiveram um delicioso e farto jantar, saindo todos muito satisfeitos do local. O pescador pagou, em comum acordo entre as duas partes, exatamente cinco moedas de ouro ao cozinheiro pelo jantar. Aliás, foram exatamente as cinco moedas que ele havia ganho vendendo peixes ao cozinheiro no dia anterior.



Figura 2.1.3 – A Parábola do Pescador e do Cozinheiro

#### Alguns Comentários

Na parábola que você acabou de ler, o que houve essencialmente foi uma simples troca. O pescador cedeu vinte peixes frescos por um delicioso jantar servido pelo chefe de cozinha aos quatro integrantes de sua família. Note que o uso de moedas facilitou a troca e a tornou muito mais prática e segura para ambos envolvidos no processo. Você provavelmente está se perguntando se foi uma troca justa e se a precificação ocorreu de forma correta. A resposta para tal questionamento é relativa, pois os preços das mercadorias e serviços são determinados pelas condições de oferta e demanda do "mercado". Aqui, entenda "mercado" como um conjunto de compradores e vendedores que negociam bens e serviços livremente entre si.

Ainda considerando o exemplo anterior, veja como os preços podem se alterar de acordo com as "condições ambientes" do mercado. Considere quatro possíveis cenários:

Cenário I - O pescador, percebendo a presença de mais pessoas "rodeando" seu barco e interessadas nos seus vinte peixes frescos, poderia sim aumentar o preço e ganhar dez moedas de ouro por eles.

Cenário II - Em outro cenário possível, o pescador volta do alto mar e não avista pessoa alguma na praia. Ele decide então levar seus vinte peixes frescos para a cidade e só consegue vendê-los, após muita insistência, por apenas duas moedas de ouro.

Cenário III - Na cidade havia apenas um restaurante. O cozinheiro percebeu que não daria conta de atender a todos os clientes devido à enorme fila que todos os dias se formava em frente ao local. A solução foi reajustar o preço das refeições para dez moedas de ouro por família de quatro pessoas.

Cenário IV - O cozinheiro estava preocupado porque seu restaurante não recebia diariamente um número mínimo previsto de famílias, alimentos frescos estragavam e tinham de ser descartados no lixo. A solução foi abaixar o preço das refeições para apenas duas moedas de ouro por família de quatro pessoas.

### 2.1.3 – A Origem das Moedas Fiduciárias

Já sabemos que as moedas de ouro, prata e outros metais preciosos se tornaram meio de troca e permitiram que indivíduos de uma sociedade pudessem adquirir diversos bens de consumo e serviços. Além disso, tais moedas eram reservas de valor para aqueles que desejavam "poupar" o excesso de produção ou riquezas geradas no momento presente com objetivo de usufruir de tal patrimônio acumulado num momento futuro, em que a capacidade de produção do indivíduo fosse eventualmente reduzida ou cessada permanentemente. Por último, e não menos importante, o uso de uma moeda padrão amplamente aceita por todas as pessoas e instituições facilitava a cobrança de impostos e taxas previstas em lei e aplicadas por governos soberanos de um determinado território ou nação.

Entretanto, existiam algumas desvantagens no uso de moedas metálicas. Dependendo da quantidade acumulada, questões essenciais como transporte com segurança e armazenagem eram muito comprometidas devido ao grande peso e enorme volume ocupado por tais objetos de valor. Como já lemos anteriormente no trecho intitulado " A Origem do Dinheiro", presente na referência [6], a solução encontrada foi armazenar barras e moedas metálicas em cofres seguros e muito bem guardados, nos locais hoje conhecidos como bancos. Assim, ao fazer um depósito, o indivíduo recebia um certificado da quantidade de metal precioso que havia sido deixado sob custódia da instituição bancária. Num momento futuro, por garantia da lei, tais certificados eram utilizados para realizar "saques" dos valores devidos pelo banco ao cliente. Mais tarde, tais "certificados" dariam origem às cédulas de "papel-moeda", que até hoje são emitidas pelos bancos centrais das nações pelo mundo afora.



Figura 2.1.4 – Cédula (cem dólares) de 1934. Dizeres: "gold certificate" em destaque.

Quero agora chamar a sua atenção para um importante detalhe: note bem como o papel moeda foi descrito no parágrafo anterior. Foi dito que os bancos, chamados de instituições financeiras, eram obrigados por lei a converter tais certificados de depósito em reservas de valor físicas, tais como barras ou moedas de ouro e prata. Porém, esse "lastro" físico do papel moeda foi aos poucos simplesmente eliminado ou abolido pelas grandes nações, principalmente durante o século XX, após o período das duas grandes guerras mundiais.

Surge então o conceito de moeda fiduciária: que se trata de papel moeda, não conversível em bens físicos, que é simplesmente impresso pelo banco central de uma nação de acordo com suas políticas monetárias e interesses particulares. Portanto, o valor acreditado numa moeda fiduciária advém da confiança que uma sociedade deposita em seu governo soberano e em suas respectivas instituições financeiras, nada mais do que isso.



Figura 2.1.5 – Nota recente (2009) de cem dólares. Nenhuma menção sobre um certificado de ouro pode ser lida. Isso ocorre porque, em 1971, o então presidente dos Estados Unidos, Richard Nixon, impôs o fim do padrão-ouro.

Nesse contexto, as instituições responsáveis pela emissão de cédulas de papel e moedas fiduciárias tinham, indiscutivelmente, dois grandes e importantes desafios:

- O primeiro deles era assegurar a estabilidade da moeda, ou seja, a manutenção dos preços aos consumidores dentro de patamares estáveis ao longo do tempo. Para atingir tal objetivo, era preciso garantir que a quantidade de dinheiro produzido e colocado em circulação na economia real fosse diretamente proporcional ao volume de riquezas geradas pela respectiva nação. Em outras palavras, que a emissão de moeda fosse diretamente proporcional à quantidade de bens produzidos e serviços prestados pela população economicamente ativa.

- Outra questão importante era o câmbio entre moedas de diferentes nações. Isso porque, por definição, uma moeda fiduciária não poderia ser convertida em determinada quantidade de ouro, prata ou qualquer outra commodity global. Dessa forma, a cotação cambial das moedas fiduciárias sempre foi "flutuante", ou seja, sempre esteve atrelada à fatores externos como saldo entre importações e exportações de mercadorias, demanda de investidores estrangeiros ou até mesmo de turistas interessados em adquirir determinada moeda aceita em seu destino escolhido para uma viagem.

Perceba o tamanho do nível de complexidade e alto grau de abstração que o dinheiro (ou moeda fiduciária) ganhou com o avanço do tempo, desde os primórdios da humanidade, até os dias de hoje. É por esse motivo que os chamados bancos centrais (ou governamentais), entidades responsáveis pela política monetária de cada país, são atualmente uma das instituições mais poderosas e influentes sobre a sociedade moderna. Nos Estados Unidos da América, maior economia global, existe o FED (Federal Reserve) que emite o dólar americano (USD) e é responsável pela política monetária daquele país.

É importante saber que o dólar é atualmente considerado a moeda de reserva mundial e, portanto, é amplamente utilizado como forma de pagamento em boa parte das transações comerciais pelo mundo desde a metade do século XX. Um exemplo prático de seu uso é na negociação de contratos de compra e venda de petróleo entre países produtores (exportadores) e aqueles que, por serem energeticamente deficitários, necessitam importar tal fonte de energia para garantir seu abastecimento.

O Brasil é considerado um país emergente, ainda em desenvolvimento. Por aqui, a estabilidade dos preços só foi conquistada recentemente, no ano de 1994 com a implementação com sucesso do Plano Real. Antes disso, no final dos anos 80 e início dos anos 90, vários planos monetários fracassaram. O país então viveu cenários desconfortáveis como ondas de hiperinflação e conseqüentemente, conviveu com altíssimas taxas de juros e ambiente hostil à continuidade do desenvolvimento de sua economia.

O cenário atual felizmente é outro, nossos indicadores econômicos são muito mais estáveis e previsíveis. O Comitê de Política Monetária (Copom) é um órgão do Banco Central do Brasil (Bacen) que se reúne a cada 45 dias a fim de decidir uma meta para taxa básica de juros de nossa economia, chamada Selic. Essa decisão é tomada com base na avaliação do cenário macroeconômico do país. O principal objetivo do controle da Selic é garantir que a inflação medida pelo IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo, fornecido pelo IBGE) situe-se em linha com uma meta pré-estabelecida pela equipe econômica do país.

Na próxima seção trataremos em detalhes sobre os conceitos de taxa de juros e inflação, além claro de explicar qual é a relação direta entre eles.

## 2.2 – Porcentagem – Aumentos e Descontos

## 2.2.1 – Motivação Teórica

Como visto na seção anterior, a disponibilidade e uso de uma moeda fiduciária tem como única e exclusiva finalidade facilitar trocas entre indivíduos de uma mesma sociedade. Dito de outra forma, o poder de emissão da moeda vigente em um determinado país não deve ser utilizado pelo seu respectivo banco central com a finalidade de tabelar ou “congelar” preços, sob risco sério de provocar graves distorções não desejadas em seu próprio sistema monetário.

Dessa forma, numa economia de livre mercado, os preços são determinados pelo equilíbrio entre a oferta e a demanda por um determinado bem ou serviço a ser prestado. Esse fenômeno provoca, de forma natural, aumentos e descontos nos diversos itens de consumo ofertados.

## 2.2.2 – O que é porcentagem?

Um dos conceitos matemáticos mais desenvolvidos pelos docentes e estudantes do Ensino Fundamental, porcentagem nada mais é do que uma razão, mais precisamente uma fração de denominador 100.

Porcentagens são amplamente utilizadas em artigos da comunidade científica, em textos publicados pelos meios de comunicação e também pelos mais variados documentos elaborados por diversas instituições mundo afora. Ao longo da história, as porcentagens escritas em algarismos indo-arábicos receberam uma notação própria.

% - Notação (ou símbolo) de porcentagem.

Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.1 – Cinco por cento.

| Fração de denominador 100 | Notação de Porcentagem | Número decimal equivalente |
|---------------------------|------------------------|----------------------------|
| $\frac{5}{100}$           | 5%                     | 0,05                       |

Exemplo 2.2.2 – Vinte e cinco por cento.

| Fração de denominador 100 | Notação de Porcentagem | Número decimal equivalente |
|---------------------------|------------------------|----------------------------|
| $\frac{25}{100}$          | 25%                    | 0,25                       |

Exemplo 2.2.3 – Cento e vinte e cinco por cento.

| Fração de denominador 100 | Notação de Porcentagem | Número decimal equivalente |
|---------------------------|------------------------|----------------------------|
| $\frac{125}{100}$         | 125%                   | 1,25                       |

## Problemas Propostos - Aumentos e Descontos

Problema 2.4.1 – Manchete publicada em 23/03/2020 pelo jornal Agora São Paulo:



Seu José paga, mensalmente, R\$ 300,00 por uma cesta de medicamentos de uso contínuo. Quanto ele pagará pelos mesmos remédios após o aumento noticiado em março de 2020?

Solução. Cálculo do aumento:

$$A = 4\% \cdot 300$$

$$A = 0,04 \cdot 300$$

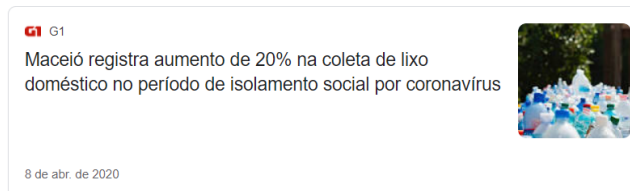
$$A = R\$ 12,00$$

Novo preço:

$$R\$ 300,00 + R\$ 12,00 = R\$ 312,00$$

Resposta: Seu José pagará R\$ 312,00 pelos remédios após o aumento de março de 2020.

Problema 2.4.2 – Manchete publicada em 08/04/2020 pelo portal G1:



Antes do período da pandemia do coronavírus, a prefeitura de Maceió coletava, diariamente, aproximadamente 1.600 toneladas de resíduos domésticos. Calcule o novo montante de lixo coletado após o aumento noticiado em abril de 2020 causado pelo isolamento social na cidade.

Solução. Cálculo do aumento:

$$A = 20\% \cdot 1.600$$

$$A = 0,20 \cdot 1.600$$

$$A = 320 \text{ toneladas}$$

Novo montante:

$$1.600 + 320 = 1.920 \text{ toneladas}$$

Resposta: O novo montante de lixo coletado será de aproximadamente 1.920 toneladas.



Problema 2.4.3 – Manchete publicada em 16/01/2020 pelo jornal Valor Investe:



A enorme vantagem de comprar um carro com CNPJ é a isenção nos impostos de IPI e ICMS.

Se o preço final de venda, sem isenção fiscal, de um veículo utilitário leve é de R\$ 50.000,00.

Quanto um feirante de verduras pagará pelo veículo se conseguir o desconto máximo oferecido?

Solução. Cálculo do desconto:

$$D = 30\% \cdot 50.000$$

$$D = 0,30 \cdot 50.000$$

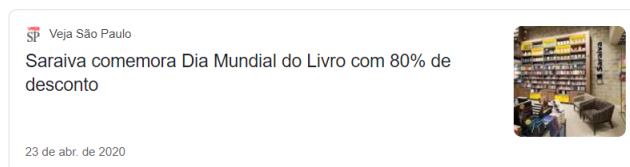
$$D = R\$ 15.000,00$$

Novo preço:

$$R\$ 50.000,00 - R\$ 15.000,00 = R\$ 35.000,00$$

Resposta: Se conseguir o desconto máximo, o feirante pagará R\$ 35.000,00 pelo veículo.

Problema 2.4.4 – Manchete publicada em 23/04/2020 pelo site da Veja São Paulo:



Maria decidiu aproveitar o desconto oferecido pela Saraiva em razão do Dia Mundial do Livro. Depois de muito pesquisar no aplicativo da livraria, a menina finalmente escolheu comprar uma das maiores obras clássicas da literatura universal: “Robin Hood”, por apenas R\$ 9,90 graças ao incrível desconto de 80% oferecido por um cupom do site da revista Veja São Paulo.

Qual é o valor original do livro escolhido por Maria?

Solução. Devido ao desconto, a menina pagou vinte por cento do preço original do livro.

$$20\% \cdot P = 9,90$$

$$0,20 \cdot P = 9,90$$

$$P = R\$ 49,50$$

Resposta: O valor original do livro escolhido por Maria é de R\$ 49,50.

Nota: os problemas aqui propostos foram elaborados a partir de manchetes retiradas de diversos sites e portais agregados ao aplicativo Google Notícias.

## 2.3 - A Origem do Crédito e Taxa de Juros

### 2.3.1 - Introdução

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [7]

É bastante antigo o conceito de juros, tendo sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem percebeu uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acúmulo de capital e a desvalorização da moeda levariam, normalmente, a ideia de juros, pois se realizavam, basicamente, devido ao valor temporal do dinheiro.

As tábuas mais antigas mostram alto grau de habilidade algorítmica e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional estava, de longa data, estabelecido. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. Os sumérios antigos (cerca de 3 000 a.C.) estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, tais como: faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos. Há tábuas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas.

Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda dessa tecnologia de escrita. Das mais de 400 tábuas sumérias encontradas, cerca de metade delas eram de teor matemático. Muitas delas inclusive envolviam multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados e cubos. Tábuas exponenciais eram utilizadas como interpelação em problemas de juros compostos. Também chamadas de tábuas de inversos, eram utilizadas para reduzir a divisão à multiplicação.

### Alguns Comentários

O conceito de juros, conhecido até hoje como o valor temporal do dinheiro, parece ter nascido simultaneamente com as primeiras civilizações. Dessa forma, tão natural como plantar, colher, caçar animais e também construir casas, os sumérios antigos se desenvolveram como sociedade graças às frequentes práticas comerciais entre si e do conseqüente estabelecimento de um sistema financeiro próprio.

Não é apenas uma simples coincidência. O surgimento da escrita, mesmo que de forma rude: cunhada em tábuas de barro por exemplo, garantiu aos povos da Mesopotâmia o registro de uma Matemática muito sofisticada para a época. Há milênios, portanto, a humanidade já passava por uma evolução tecnológica sem precedentes, que no futuro influenciaria diversas outras civilizações pelo mundo afora.

#### Sistema Numérico da Babilônia

|    |            |    |             |    |              |    |               |    |                |    |                 |
|----|------------|----|-------------|----|--------------|----|---------------|----|----------------|----|-----------------|
| 1  | ∩          | 11 | ∩           | 21 | ∩∩           | 31 | ∩∩∩           | 41 | ∩∩∩∩           | 51 | ∩∩∩∩∩           |
| 2  | ∩∩         | 12 | ∩∩          | 22 | ∩∩∩          | 32 | ∩∩∩∩          | 42 | ∩∩∩∩∩          | 52 | ∩∩∩∩∩∩          |
| 3  | ∩∩∩        | 13 | ∩∩∩         | 23 | ∩∩∩∩         | 33 | ∩∩∩∩∩         | 43 | ∩∩∩∩∩∩         | 53 | ∩∩∩∩∩∩∩         |
| 4  | ∩∩∩∩       | 14 | ∩∩∩∩        | 24 | ∩∩∩∩∩        | 34 | ∩∩∩∩∩∩        | 44 | ∩∩∩∩∩∩∩        | 54 | ∩∩∩∩∩∩∩∩        |
| 5  | ∩∩∩∩∩      | 15 | ∩∩∩∩∩       | 25 | ∩∩∩∩∩∩       | 35 | ∩∩∩∩∩∩∩       | 45 | ∩∩∩∩∩∩∩∩       | 55 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩       |
| 6  | ∩∩∩∩∩∩     | 16 | ∩∩∩∩∩∩      | 26 | ∩∩∩∩∩∩∩      | 36 | ∩∩∩∩∩∩∩∩      | 46 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩      | 56 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩      |
| 7  | ∩∩∩∩∩∩∩    | 17 | ∩∩∩∩∩∩∩     | 27 | ∩∩∩∩∩∩∩∩     | 37 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩     | 47 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩     | 57 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩     |
| 8  | ∩∩∩∩∩∩∩∩   | 18 | ∩∩∩∩∩∩∩∩    | 28 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩    | 38 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩    | 48 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩    | 58 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩    |
| 9  | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩  | 19 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩   | 29 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩   | 39 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩   | 49 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩   | 59 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩   |
| 10 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | 20 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | 30 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | 40 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | 50 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | 60 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ |



The "Esagila" tablet  
Department of Near Eastern Antiquities, Metropolitan

Figura 2.3.1 – The "Esagila" Tablet (Louvre) – Cálculos matemáticos usados pelos babilônios.

### 2.3.2 - Os Juros e os Impostos

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [6]

Os juros e os impostos existem desde os primeiros registros de civilizações. Um dos primeiros indícios apareceram na Babilônia, por volta de 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou outras conveniências emprestadas, tais como outros bens. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

A História também revela que a ideia de juro estava tão bem estabelecida que data-se uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da matemática financeira e economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos.

Como em todas as instituições que têm existido por milhares de anos, algumas das práticas relativas aos juros têm sido modificadas para satisfazerem às exigências posteriores. Mas alguns dos antigos costumes ainda persistem, de tal modo que o seu uso, nos dias atuais, ainda os envolvem. Entretanto, devemos lembrar de que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente “lógicas” no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros em uma base anual era mais razoável tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais. Essas não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época e período da história, foi se criando novas formas de se trabalhar com a relação tempo e juros: semestral, bimestral, diário etc.

Há tábuas nas coleções de Berlin, de Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos e há algumas tábuas em Istambul que resolviam algumas equações exponenciais. Por exemplo, em uma tábua do Louvre (cerca de 1700 a.C.) há o seguinte problema: “por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?”.

#### Alguns comentários

Na seção 2.1, discutimos o conceito básico de dinheiro ou moeda fiduciária. Agora é preciso ampliar um pouco mais essa definição. Note que o dinheiro, seja ele impresso em cédulas de papel ou cunhado em moedas metálicas, representava, nos primórdios das civilizações, nada mais nada menos do que uma espécie de “estoque físico” do trabalho realizado por um indivíduo durante a produção de bens de consumo ou prestação de serviços diversos.

Dessa forma, aquele que mais trabalhava do que era capaz de consumir, se tornava naturalmente um poupador de dinheiro. Em outras palavras, descobriu-se que era possível acumular dinheiro no tempo presente para poder gastá-lo no futuro. Naturalmente, percebeu-se ainda que era justo e razoável remunerar aqueles que dispunham de dinheiro para empréstimo. E foi assim que nasceu o mercado de capitais: a partir da conveniência e comum acordo entre poupadores de dinheiro e tomadores de recursos financeiros.

### 2.3.3 – A Parábola do Agricultor e do Apicultor

Leia a história a seguir:

Com o desenvolvimento do comércio, a ideia de poupar dinheiro parecia muito razoável. Um agricultor, por exemplo, poderia proteger-se de uma eventual “quebra de safra” devido a uma praga ou fenômeno meteorológico adverso simplesmente poupando, todos os anos, uma pequena parte do dinheiro arrecadado com a venda de seus produtos agrícolas. Essa “poupança” ou “reserva de emergência” funcionaria como uma espécie de seguro contra possíveis impactos negativos na produtividade futura de sua propriedade.

Suponha que, num determinado ano, uma infestação de gafanhotos tenha devorado toda a lavoura de milho do agricultor. O sábio homem, que acumulou dinheiro nos anos anteriores, poderá agora utilizar sua “reserva de emergência” para comprar novas sementes, frutas da época e peixes frescos no comércio da cidade. Ou seja, graças ao virtuoso hábito de poupar dinheiro, sua família não correrá risco de passar fome ou necessidades básicas em caso de catástrofes ou imprevistos, como desastres naturais ou pragas agrícolas.

Entretanto, do outro lado da cerca, o vizinho apicultor deste sábio agricultor não teve a mesma sorte. Isso porque, no combate à infestação de gafanhotos, foram utilizados potentes agrotóxicos que acabaram por dizimar a população de abelhas da região. Sem a presença dos insetos polinizadores, o apicultor ficou simplesmente impedido de produzir seu mel silvestre. Existe, porém, um agravante nesse caso: o apicultor não teve a mesma precaução de seu vizinho e simplesmente não poupou dinheiro algum! O que fazer nessa situação? Como ele sobreviverá?

A solução natural para tal problema seria a elaboração de um “contrato” entre as duas partes: o agricultor emprestaria certa quantidade de dinheiro ao apicultor, que devolveria a mesma quantia acrescida de juros após um certo período de tempo, assim que este recuperasse sua produção de mel silvestre. É muito importante ressaltar que os “termos do contrato”, tais como: valor total do empréstimo, taxa percentual de juros e os prazos dos pagamentos seriam livremente negociados entre as duas partes até chegarem num acordo comum.



Figura 2.3.2 – A Parábola do Agricultor e do Apicultor

#### Alguns Comentários

A palavra crédito, do latim “*creditu*” significa acreditar ou confiar em algo ou alguém. No campo das finanças, em particular, crédito é a confiança de que se vai receber de volta o dinheiro emprestado. Aquele que empresta dinheiro a um indivíduo ou a uma instituição, se chama credor, pois ele “crê” que receberá seu dinheiro de volta. Na parábola que você acabou de ler, o que houve essencialmente foi uma simples operação de crédito. O agricultor (credor) acredita nos “termos do contrato” que firmou com o apicultor, que é o devedor do empréstimo.

Na próxima secção vamos estudar detalhes sobre as operações de crédito mais comuns.

## 2.4 - Regime de Juros Simples como uma Progressão Aritmética (PA)

## Definição 2.4.1

O cálculo de juros, sob o regime simples, significa calcular os juros de cada período sempre em função do capital inicial empregado. [1]

## Definição 2.4.2

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada razão da progressão e representada pela letra  $r$ . [2]

## Exemplo 2.4.1

Sob regime de juros simples, um comerciante empresta um capital inicial ( $C$ ) de R\$ 500,00 ao seu cliente a uma taxa ( $i$ ) combinada de 1% a.m. Utilize a tabela abaixo para calcular o montante total dessa dívida ao final de um período ( $t$ ) de 12 meses.

Solução. Pela definição de juros simples:

$$C \cdot i = 500 \cdot 1\%$$

$$C \cdot i = 500 \cdot 0,01$$

$$C \cdot i = \text{R\$ } 5,00$$

A quantia de R\$ 5,00 será o juro (constante) de cada período. Observe:

Tabela 2.4.1 - Resolução do Exemplo 2.4.1.

| Período – $t$<br>(em meses) | Juros Acumulados - $J(t)$<br>(em reais) | Montante - $M(t)$<br>(em reais) |
|-----------------------------|---|---------------------------------|
| 0                           | R\$ 0,00                                | R\$ 500,00                      |
| 1                           | R\$ 5,00                                | R\$ 505,00                      |
| 2                           | R\$ 10,00                               | R\$ 510,00                      |
| 3                           | R\$ 15,00                               | R\$ 515,00                      |
| 4                           | R\$ 20,00                               | R\$ 520,00                      |
| 5                           | R\$ 25,00                               | R\$ 525,00                      |
| 6                           | R\$ 30,00                               | R\$ 530,00                      |
| 7                           | R\$ 35,00                               | R\$ 535,00                      |
| 8                           | R\$ 40,00                               | R\$ 540,00                      |
| 9                           | R\$ 45,00                               | R\$ 545,00                      |
| 10                          | R\$ 50,00                               | R\$ 550,00                      |
| 11                          | R\$ 55,00                               | R\$ 555,00                      |
| 12                          | R\$ 60,00                               | R\$ 560,00                      |

O montante total da dívida, ao final de um período de 12 meses, será de R\$ 560,00.

Note que 12% de R\$ 500,00 corresponde a R\$ 60,00. Ou seja, o empréstimo ocorreu a uma taxa equivalente de 12% ao ano.

A coluna dos juros acumulados obtidos pelo comerciante durante o empréstimo pode ser representada por uma progressão aritmética de razão:  $C \cdot i = \text{R\$ } 5,00$ .

Observe abaixo a representação do termo geral:

$$J(t) = C \cdot i \cdot t \quad (\text{Equação 2.4.1})$$

Substituindo os valores do exemplo, temos:

$$J(t) = 5 \cdot t$$

O montante total da dívida também pode ser representada por uma progressão aritmética de razão:  $C \cdot i = \text{R\$ } 5,00$ .

Observe abaixo a representação do termo geral da PA:

$$M(t) = C + J(t)$$

$$M(t) = C + C \cdot i \cdot t$$

Após fatoração:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) \quad (\text{Equação 2.4.2})$$

Substituindo os valores do exemplo, temos:

$$M(t) = 500 + 5t$$

Com visto, o regime de capitalização simples é representado aritmeticamente pela equação de uma reta, portanto, o capital cresce de forma linear. Disso conclui-se que é indiferente se os juros são pagos periodicamente ou no final do período total. [1]

Veja o gráfico abaixo:



## Problemas Propostos - Regime de Juros Simples

Problema 2.4.1 - Mariana fará quinze anos daqui dois anos e meio. Os pais dela, que pretendem fazer uma surpresa nesse dia tão especial, se planejaram e decidiram investir a quantia de R\$ 8.000,00 sob regime de juros simples a uma taxa de 0,5% ao mês. Sendo assim, que quantia em dinheiro eles terão para gastar no dia da festa da menina?

Solução. A cada mês o investimento rende:

$$C \cdot i = 8.000 \cdot 0,005$$

$$C \cdot i = R\$ 40,00$$

O montante do investimento cresce sob regime de juros simples segundo a função:

$$M(t) = 8.000 + 40t$$

Dois anos e meio correspondem ao período de 30 meses:

$$t = 2,5 \cdot 12 \text{ meses}$$

$$t = 30 \text{ meses}$$

Substituindo:

$$M(30) = 8.000 + 40 \cdot 30$$

$$M(30) = R\$ 9.200,00$$

Resposta: Os pais da menina terão a quantia de R\$ 9.200,00 no dia da festa.

Problema 2.4.2 – Pedro esqueceu de pagar seu plano mensal de internet móvel. A fatura no valor de R\$ 40,00 está vencida há quinze dias. A empresa de telefonia cobra “juros de mora” de 0,8% ao dia sob regime simples de capitalização. Qual será o valor atual corrigido dessa conta?

Solução. Juros de mora cobrados diariamente:

$$C \cdot i = 40 \cdot 0,8\%$$

$$C \cdot i = 40 \cdot 0,008$$

$$C \cdot i = R\$ 0,32$$

O valor corrigido da fatura cresce sob regime de juros simples segundo a função:

$$M(t) = 40 + 0,32t$$

Pagamento será feito com quinze dias de atraso:

$$M(15) = 40 + 0,32 \cdot 15$$

$$M(15) = 44,80$$

Resposta: O valor atual corrigido da conta de Pedro será de R\$ 44,80.

Problema 2.4.3 – A loja de eletrodomésticos Magazine PA vende o console de videogame Microsoft Xbox One em duas condições possíveis:

1. Pagamento à vista no valor de R\$ 2.000,00.
2. Pagamento após seis meses no valor de R\$ 2.240,00.

Sob regime de juros simples, calcule a taxa mensal de juros paga pelo cliente que decidiu comprar o aparelho a prazo.

Solução. Modelo de capitalização sob regime de juros simples:

$$J(t) = C \cdot i \cdot t$$

$$J(6) = 240$$

$$C = 2.000$$

$$t = 6$$

$$i = \frac{240}{2.000 \cdot 6}$$

$$i = 0,02$$

$$i = 2\% \text{ a. m.}$$

Resposta: A taxa mensal de juros paga pelo cliente foi de 2% a.m.

Problema 2.4.4 – Um fundo de previdência do Banco Progressão Aritmética promete dobrar o capital inicial de um cliente em vinte e cinco anos. Sabendo que o produto financeiro remunera sob regime de juros simples, responda:

Qual é a taxa anual de rentabilidade desse fundo?

Solução. Modelo de capitalização sob regime de juros simples:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

O Banco PA promete dobrar o capital inicial do cliente em 25 anos:

$$2 \cdot C = C \cdot (1 + i \cdot 25)$$

Simplificando:

$$2 = 1 + i \cdot 25$$

$$25 \cdot i = 2 - 1$$

Isolando a taxa de juros:

$$i = \frac{1}{25}$$

$$i = 0,04$$

$$i = 4\% \text{ a.a.}$$

Resposta: A taxa anual de rentabilidade desse fundo é de 4% a.a.



## 2.5 - Regime de Juros Compostos como uma Progressão Geométrica (PG)

## Definição 2.5.1

No regime de juros compostos, o valor dos juros de cada período é obtido pela aplicação de sua taxa sobre o saldo do período antecessor. É o regime mais amplamente adotado nas práticas comerciais brasileiras e no mercado financeiro. Todos os papéis de renda fixa, sistema de habitação, crediário e outros se utilizam do regime de juros compostos. [1]

## Definição 2.5.2

Progressões Geométricas (PG) são sequências nas quais a taxa de crescimento ( $i$ ) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. [2]

## Exemplo 2.5.1

Sob regime de juros compostos, um lojista empresta um capital inicial ( $C$ ) de R\$ 500,00 ao seu cliente a uma taxa ( $i$ ) combinada de 1% a.m. Utilize a tabela abaixo para calcular o montante dessa dívida ao final de um período de 12 meses.

Solução. Observe:

Tabela 2.5.1 - Resolução do Exemplo 2.5.1.

| Período – $t$<br>(em meses) | Juros Acumulados - $J(t)$<br>(em reais) | Montante - $M(t)$<br>(em reais) |
|-----------------------------|---|---------------------------------|
| 0                           | R\$ 0,00                                | R\$ 500,00                      |
| 1                           | R\$ 5,00                                | R\$ 505,00                      |
| 2                           | R\$ 10,05                               | R\$ 510,05                      |
| 3                           | R\$ 15,15                               | R\$ 515,15                      |
| 4                           | R\$ 20,30                               | R\$ 520,30                      |
| 5                           | R\$ 25,51                               | R\$ 525,51                      |
| 6                           | R\$ 30,76                               | R\$ 530,76                      |
| 7                           | R\$ 36,06                               | R\$ 536,06                      |
| 8                           | R\$ 41,43                               | R\$ 541,43                      |
| 9                           | R\$ 46,84                               | R\$ 546,84                      |
| 10                          | R\$ 52,31                               | R\$ 552,31                      |
| 11                          | R\$ 57,83                               | R\$ 557,83                      |
| 12                          | R\$ 63,41                               | R\$ 563,41                      |

O montante da dívida, ao final de um período de 12 meses, será de R\$ 563,41.

Note que R\$ 63,41 corresponde aproximadamente a 12,68% de R\$ 500,00. Ou seja, o empréstimo ocorreu a uma taxa de juros equivalente de aproximadamente 12,68% ao ano.

Sugestão: verifique o resultado abaixo com uso da calculadora científica.

$$\text{Se } i = 1\% \text{ ou } i = 0,01 \text{ então: } (1 + i)^{12} \cong 1,1268$$

O montante total da dívida pode ser representado por uma progressão geométrica de razão:  $(1 + i)$ .

Observe abaixo a representação do termo geral da PG:

Para  $t = 0$ :

$$M(0) = C$$

Para  $t = 1$ :

$$M(1) = C \cdot (1 + i)^1$$

Assim, de forma geral:

$$M(t) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \dots [t \text{ vezes}] \dots (1 + i)$$

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t \quad (\text{Equação 2.5.1})$$

Substituindo os valores do exemplo, temos:

$$M(t) = 500 \cdot (1,01)^t$$

No regime de capitalização sob juros compostos, o montante da dívida é representado por uma progressão geométrica crescente, portanto, o capital emprestado cresce de forma exponencial.

Veja o gráfico abaixo:



Observe como a curva exponencial se “desvia” cada vez mais da reta que representa o Exemplo 2.4.1, em que calculamos o montante sob regime de juros simples. Dessa forma, podemos concluir que o regime de juros compostos é mais vantajoso quando se pretende emprestar um capital inicial por um longo prazo ( $t > 1$ ).

## Problemas Propostos - Regime de Juros Compostos

Problema 2.5.1 - Sob regime de juros compostos, Paulo emprestou do Banco Progressão Geométrica a quantia de R\$ 18.000,00 a uma taxa contratada de 1% ao mês. Quanto ele deverá pagar caso a dívida seja quitada depois de:

Sugestão: utilize uma calculadora científica.

a) três meses?

b) seis meses?

c) dois anos?

Solução.

a) Para  $t = 3$  meses:

$$M(3) = 18.000 \cdot (1,01)^3$$

$$M(3) \cong R\$ 18.545,42$$

b) Para  $t = 6$  meses:

$$M(6) = 18.000 \cdot (1,01)^6$$

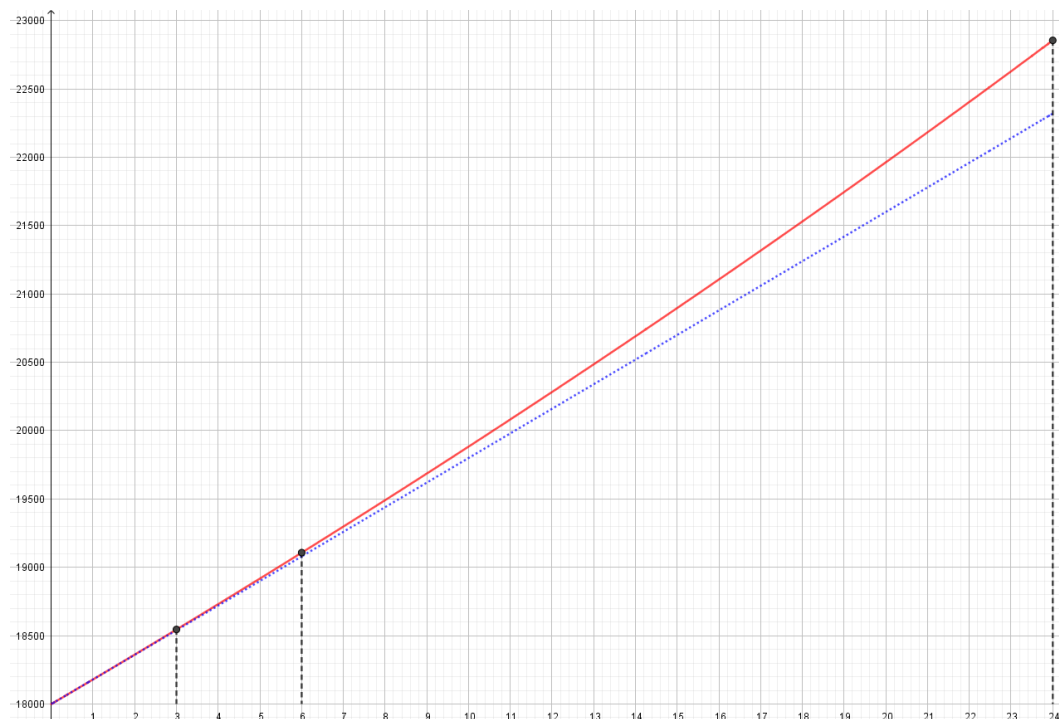
$$M(6) \cong R\$ 19.107,36$$

c) Para  $t = 24$  meses:

$$M(24) = 18.000 \cdot (1,01)^{24}$$

$$M(24) \cong R\$ 22.855,22$$

Graficamente:



Problema 2.5.3 – A plataforma de e-commerce do Shopping PG vende o smartphone iPhone 11 em duas condições possíveis:

1. Pagamento à vista no valor de R\$ 5.000,00.
2. Pagamento após doze meses no valor de R\$ 5.500,00.

Sob regime de juros compostos, calcule a taxa mensal de juros paga pelo cliente que decidiu comprar o aparelho a prazo.

Solução.

Para  $t = 12$  meses:

$$M(12) = C \cdot (1 + i)^{12}$$

Substituindo os dados do problema:

$$5.500 = 5.000 \cdot (1 + i)^{12}$$

$$(1 + i)^{12} = \frac{5.500}{5.000}$$

$$(1 + i)^{12} = 1,1$$

$$1 + i = \sqrt[12]{1,1}$$

$$1 + i \cong 1,008$$

$$i \cong 0,8\% \text{ a.m.}$$

Resposta: A taxa mensal de juros paga pelo cliente foi de 0,8% a. m.

Problema 2.5.4 - Um CDB prefixado emitido pelo Banco Progressão Geométrica promete ao cliente uma rentabilidade líquida de 40% em cinco anos. Sabendo que o produto financeiro remunera sob regime de juros compostos, responda:

Qual é a taxa anual de rentabilidade líquida desse certificado de depósito bancário?

Solução.

Para  $t = 5$  anos:

$$M(5) = C \cdot (1 + i)^5$$

Substituindo os dados do problema:

$$1,4 \cdot C = C \cdot (1 + i)^5$$

Simplificando:

$$(1 + i)^5 = 1,4$$

$$1 + i = \sqrt[5]{1,4}$$

$$1 + i \cong 1,07$$

$$i \cong 7,0\% \text{ a.a.}$$

Resposta: A taxa anual de rentabilidade líquida desse CDB é de 7,0% a.a.

## 2.6 – Juros Simples versus Juros Compostos no Curto Prazo

Na seção anterior, concluímos que o regime de juros compostos é mais vantajoso quando se pretende emprestar um capital inicial por um longo prazo ( $t > 1$ ).

Mas e no “curtíssimo” prazo?

Ou seja, para ( $0 < t < 1$ ). Qual regime de juros é mais vantajoso nesse caso?

Uma breve explicação sobre boletos bancários.

A maioria da população brasileira ainda tem o costume de pagar suas contas domésticas, tais como: água, energia elétrica, telefonia móvel, internet e TV por assinatura através dos chamados boletos bancários.

Boletos nada mais são do que faturas de cobranças emitidas por um banco que intermedia o pagamento mensal de um cliente a uma prestadora de serviços essenciais, como as citadas anteriormente.

Portanto, boletos bancários tem data de vencimento mensal e, caso ocorra atraso no pagamento por parte do cliente, “juros de mora” devem ser aplicados sobre o número de dias que se passaram desde o vencimento da fatura.

Veja o exemplo a seguir:

## Exemplo 2.6.1

Uma fatura de energia elétrica no valor de R\$ 200,00 venceu e será paga com atraso.

| <input type="checkbox"/> Selecionar Todas | Mês Ref. | Descrição da fatura | Valor     | Vencimento | Visualizar |
|---|----------|---------------------|-----------|------------|------------|
| <input type="checkbox"/>                  | Dez/2019 | Fatura Energia      | R\$200,00 | 06/01/2020 | 2ª via     |

Suponha que os “juros de mora” cobrados são de 10% a.m. Utilize uma tabela e compare o comportamento da dívida do cliente ao longo dos dias de atraso nos dois regimes de juros conhecidos: simples e compostos. Fracione o intervalo de um mês em 30 dias corridos.

Qual regime de juros é mais vantajoso para a prestadora de serviços?

Solução.

Tabela 2.6.1 - Resolução do Exemplo 2.6.1.

| Período – $t$<br>(em meses) | $M_S(t) = 200 + 20t$<br>(Juros Simples) | $M_C(t) = 200 \cdot (1,10)^t$<br>(Juros Compostos) |
|-----------------------------|---|--|
| 0                           | R\$ 200,00                              | R\$ 200,00   |
| $\frac{1}{30}$              | R\$ 200,67                              | R\$ 200,64   |
| $\frac{2}{30}$              | R\$ 201,33                              | R\$ 201,27   |
| $\frac{3}{30}$              | R\$ 202,00                              | R\$ 201,92   |
| $\frac{4}{30}$              | R\$ 202,67                              | R\$ 202,56   |
| $\frac{5}{30}$              | R\$ 203,33                              | R\$ 203,20   |
| $\frac{6}{30}$              | R\$ 204,00                              | R\$ 203,85   |
| $\frac{7}{30}$              | R\$ 204,67                              | R\$ 204,50   |
| $\frac{8}{30}$              | R\$ 205,33                              | R\$ 205,15   |
| $\frac{9}{30}$              | R\$ 206,00                              | R\$ 205,80   |
| $\frac{10}{30}$             | R\$ 206,67                              | R\$ 206,46   |
| $\frac{11}{30}$             | R\$ 207,33                              | R\$ 207,11   |
| $\frac{12}{30}$             | R\$ 208,00                              | R\$ 207,77   |
| $\frac{13}{30}$             | R\$ 208,67                              | R\$ 208,43   |
| $\frac{14}{30}$             | R\$ 209,33                              | R\$ 209,10   |
| $\frac{15}{30}$             | R\$ 210,00                              | R\$ 209,76   |
| $\frac{16}{30}$             | R\$ 210,67                              | R\$ 210,43   |
| $\frac{17}{30}$             | R\$ 211,33                              | R\$ 211,10   |
| $\frac{18}{30}$             | R\$ 212,00                              | R\$ 211,77   |
| $\frac{19}{30}$             | R\$ 212,67                              | R\$ 212,44   |
| $\frac{20}{30}$             | R\$ 213,33                              | R\$ 213,12   |
| $\frac{21}{30}$             | R\$ 214,00                              | R\$ 213,80   |
| $\frac{22}{30}$             | R\$ 214,67                              | R\$ 214,48   |
| $\frac{23}{30}$             | R\$ 215,33                              | R\$ 215,16   |
| $\frac{24}{30}$             | R\$ 216,00                              | R\$ 215,85   |
| $\frac{25}{30}$             | R\$ 216,67                              | R\$ 216,53   |
| $\frac{26}{30}$             | R\$ 217,33                              | R\$ 217,22   |
| $\frac{27}{30}$             | R\$ 218,00                              | R\$ 217,91   |
| $\frac{28}{30}$             | R\$ 218,67                              | R\$ 218,61   |
| $\frac{29}{30}$             | R\$ 219,33                              | R\$ 219,30   |
| 1                           | R\$ 220,00                              | R\$ 220,00   |

Após observar cuidadosamente cada célula da tabela da página anterior, podemos concluir que, no “curtíssimo” prazo, o regime de juros simples é sempre mais vantajoso para a prestadora de serviços. Ou seja, para clientes que atrasam o pagamento por um período de até 29 dias ( $0 < t < 1$ ) a empresa consegue arrecadar mais recursos aplicando “juros de mora” no regime simples de capitalização. Veja a seguir a resolução gráfica do problema:

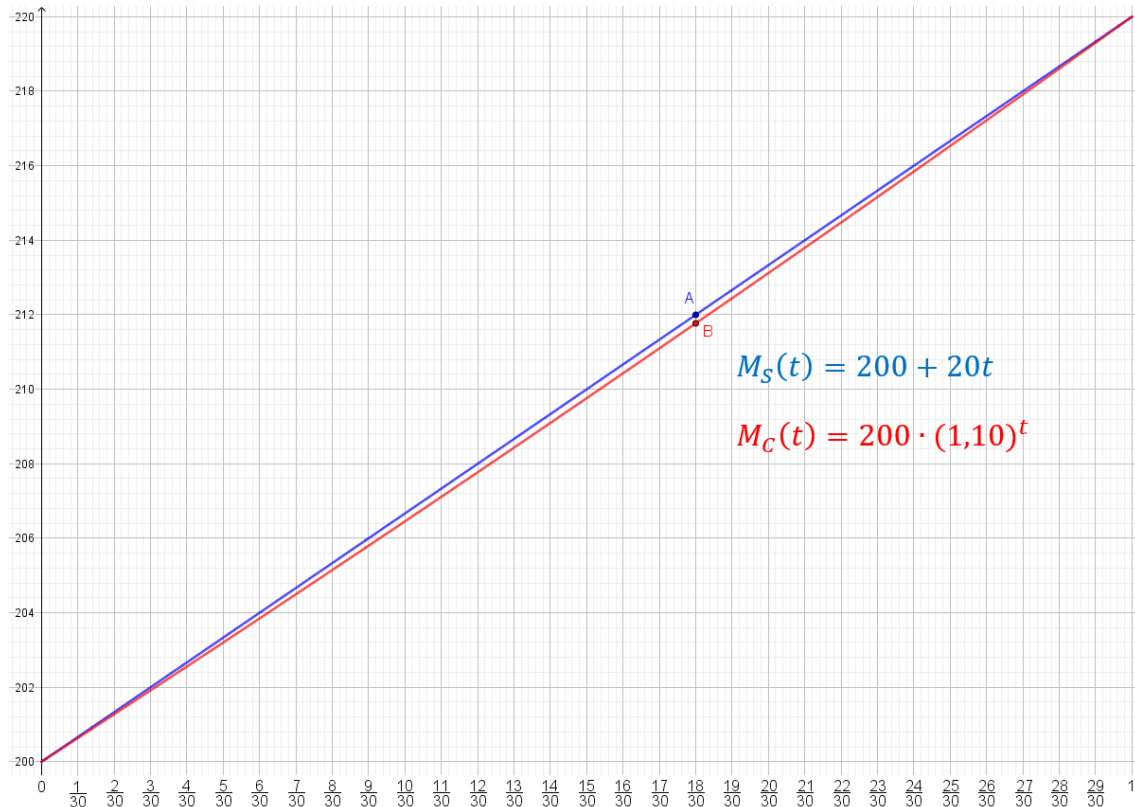


Figura 2.6.1 – Gráfico comparativo entre juros simples e compostos no curto prazo.

Suponha que o cliente pagou sua fatura de energia elétrica com 18 dias de atraso.

O ponto *A* no gráfico representa o valor da fatura corrigido sob regime de juros simples:

$$M_S(t) = 200 + 20t$$

$$M_S\left(\frac{18}{30}\right) = 200 + 20 \cdot \left(\frac{18}{30}\right)$$

$$M_S\left(\frac{18}{30}\right) = 212,00$$

$$A = \left(\frac{18}{30}; 212,00\right)$$

Nesse caso, o cliente deverá pagar R\$ 212,00 pela fatura de energia elétrica em atraso.

O ponto  $B$  no gráfico representa o valor da fatura corrigido sob regime de juros compostos:

$$M_c(t) = 200 \cdot (1,10)^t$$

$$M_c\left(\frac{18}{30}\right) = 200 \cdot (1,10)^{\left(\frac{18}{30}\right)}$$

$$M_c\left(\frac{18}{30}\right) \cong 211,77$$

$$B = \left(\frac{18}{30}; 211,77\right)$$

Nesse caso, o cliente deverá pagar R\$ 211,77 pela fatura de energia elétrica em atraso.

A diferença absoluta entre as duas formas de aplicação de correção monetária será de:

$$M_s\left(\frac{18}{30}\right) - M_c\left(\frac{18}{30}\right) = R\$ 212,00 - R\$ 211,77$$

$$M_s\left(\frac{18}{30}\right) - M_c\left(\frac{18}{30}\right) = R\$ 0,23$$

Note que são apenas vinte e três centavos de diferença. Entretanto, quando olhamos para um universo de milhares de clientes que a companhia possui, a melhor escolha entre dois modelos de correção monetária pode representar um aumento muito relevante da receita total.

Experimentalmente comprovamos, de forma algébrica (tabela) e geométrica (gráfico), que a aplicação de juros simples no “curtíssimo prazo” ( $0 < t < 1$ ) é sempre mais vantajosa para a empresa prestadora de serviços.

#### Alguns Comentários

Considere as duas funções:

$$f(x) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$g(x) = 2^x - 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Observe que:

$$f(0) = g(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = g(1) = 1$$

Uma função afim crescente possui taxa de variação constante e positiva, característica esta que não é válida para uma função exponencial. Veja os gráficos ao lado:

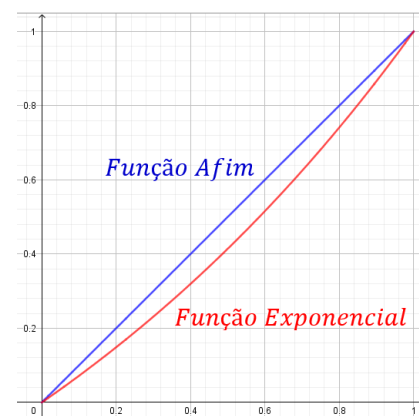


Figura 2.6.2 - Funções: Afim e Exponencial.



## 2.7 – Taxas de Juros Equivalentes

## Definição 2.7.1.

Duas ou mais taxas de juros são equivalentes quando ao serem aplicadas sobre um mesmo capital inicial ( $C$ ), durante um mesmo prazo, produzirem um mesmo montante ( $M$ ), no regime de juros compostos. [1]

Matematicamente, temos as seguintes relações:

$$M = C(1 + i_a) = C(1 + i_s)^2 = C(1 + i_t)^4 = C(1 + i_m)^{12} = C(1 + i_d)^{360}$$

Em que:

$i_a$ : taxa de juros anual

$i_s$ : taxa de juros semestral

$i_t$ : taxa de juros trimestral

$i_m$ : taxa de juros mensal

$i_d$ : taxa de juros diária

Tabela 2.7.1 – Equivalência entre prazos.

| Período- base de tempo | Prazo equivalente |
|------------------------|-------------------|
| 1 ano                  | 2 semestres       |
|                        | 4 trimestres      |
|                        | 12 meses          |
|                        | 360 dias          |

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.7.1 - Determinar a taxa anual equivalente a  $i_m = 0,80\%$  ao mês.

Solução. Matematicamente, temos que:

$$C(1 + i_a) = C(1 + i_m)^{12}$$

Simplificando e substituindo:

$$(1 + i_a) = (1 + 0,008)^{12}$$

$$(1 + i_a) = (1,008)^{12}$$

$$1 + i_a \cong 1,100$$

$$i_a \cong 0,10$$

$$i_a \cong 10\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Uma taxa de juros de 0,80% a.m. equivale aproximadamente a 10% a.a.

Exemplo 2.7.2 - Determinar a taxa mensal equivalente a  $i_a = 6,3\%$  ao ano.

Solução. Matematicamente, temos que:

$$C(1 + i_m)^{12} = C(1 + i_a)$$

Simplificando e substituindo:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + 0,063)$$

$$(1 + i_m)^{12} = (1,063)$$

$$1 + i_m = \sqrt[12]{1,063}$$

$$1 + i_m \cong 1,0051$$

$$i_m \cong 0,0051$$

$$i_m \cong 0,51\% \text{ a.m.}$$

Resposta: Uma taxa de juros de 6,3% a.a. equivale aproximadamente a 0,51% a.m.

Exemplo 2.7.3 - Determinar a taxa trimestral equivalente a  $i_a = 7,0\%$  ao ano.

Solução. Matematicamente, temos que:

$$C(1 + i_t)^4 = C(1 + i_a)$$

Simplificando e substituindo:

$$(1 + i_t)^4 = (1 + 0,07)$$

$$(1 + i_t)^4 = (1,07)$$

$$1 + i_t = \sqrt[4]{1,07}$$

$$1 + i_t \cong 1,017$$

$$i_t \cong 1,7\% \text{ a.t.}$$

Resposta: Uma taxa de juros de 7,0% a.a. equivale aproximadamente a 1,7% a.t.

Exemplo 2.7.4 - Determinar a taxa anual equivalente a  $i_d = 0,12\%$  ao dia.

Solução. Matematicamente, temos que:

$$C(1 + i_a) = C(1 + i_d)^{360}$$

Simplificando e substituindo:

$$(1 + i_a) = (1 + i_d)^{360}$$

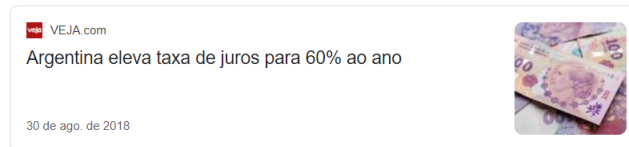
$$1 + i_a = 1,0012^{360}$$

$$i_a \cong 54\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Uma taxa de juros de 0,12% a.d. equivale aproximadamente a 54% a.a.

## Problemas Propostos – Taxas Equivalentes

Problema 2.7.1 – Manchete publicada em 30/08/2018 pelo site da revista Veja:



Determinar a taxa mensal equivalente de juros argentina praticada no dia de 30/08/2018.

Solução. Matematicamente, temos que:

$$C(1 + i_m)^{12} = C(1 + i_a)$$

Simplificando e substituindo:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + 0,60)$$

$$(1 + i_m)^{12} = 1,60$$

$$1 + i_m = \sqrt[12]{1,60}$$

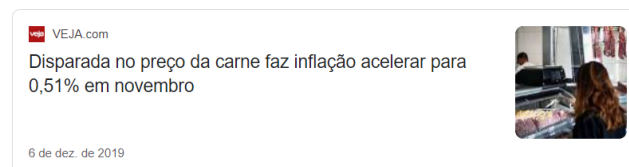
$$1 + i_m \cong 1,04$$

$$i_m \cong 0,04$$

$$i_m \cong 4\% \text{ a.m.}$$

Resposta: A taxa mensal de juros argentina equivale a aproximadamente 4% a.m.

Problema 2.7.2 – Manchete publicada em 06/12/2019 pelo site da revista Veja:



Considere que os preços aumentem, de forma constante, a uma taxa de 0,51% ao mês.

Nessas essas condições, determinar de quanto será a inflação acumulada em doze meses.

Em outras palavras, determinar a taxa anual equivalente a  $i_m = 0,51\%$  ao mês.

Solução. Basta revisar o Exemplo 2.7.2.

Resposta: Uma taxa mensal de 0,51% equivale aproximadamente a 6,3% a.a.

O conceito econômico de inflação será discutido, em detalhes, na próxima seção.

Nota: os problemas aqui propostos foram elaborados a partir de manchetes retiradas de diversos sites e portais agregados ao aplicativo Google Notícias.

## 2.8 – Inflação

### Definição 2.8.1

A inflação é a taxa de aumento médio ponderado, de um determinado período, para o conjunto de itens e serviços. Esses itens são definidos pelos produtos que compõem a cesta básica e serviços considerados essenciais, como aluguel, transporte e vestuário.[1]

### Definição 2.8.2

IPCA, sigla que significa Índice de Preços ao Consumidor Amplo. É medido pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e considerado pelo Bacen (Banco Central do Brasil) como referência principal na elaboração do regime de metas para a inflação brasileira.

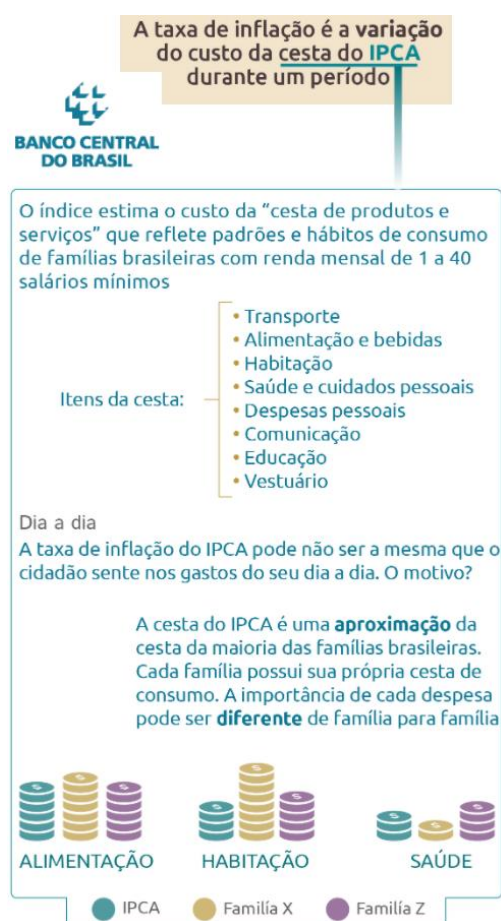


Figura 2.8.1 – Sobre o IPCA - Fonte: [www.bcb.gov.br](http://www.bcb.gov.br)

### Alguns Comentários

O Bacen trabalha para manter a inflação baixa, dentro de uma meta pré-estabelecida e um intervalo de tolerância. Isso porque, numa economia "saudável" os preços devem ser relativamente estáveis ao longo do tempo.

Mas ao contrário do que possa parecer, preços em queda muito acentuada (deflação) podem ser prejudiciais para o bom funcionamento da economia.

Observe o gráfico a seguir:

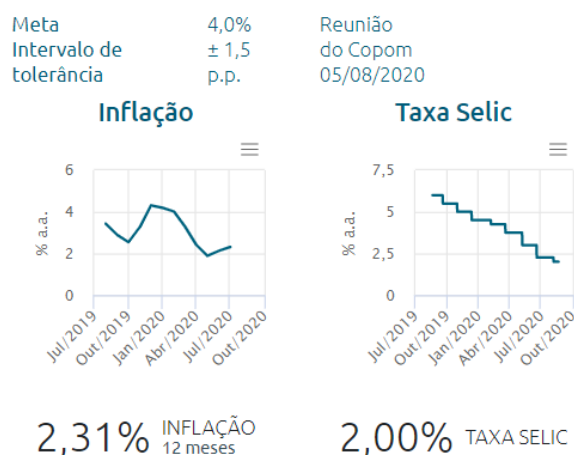


Figura 2.8.2 – Inflação (IPCA) e Taxa SELIC - Fonte: [www.bcb.gov.br](http://www.bcb.gov.br)

No primeiro semestre de 2020, a inflação brasileira acumulada em doze meses chegou a atingir o patamar de 2,31% ao ano, valor este abaixo do intervalo de tolerância. Tal fenômeno ocorreu devido ao choque de demanda causado pela pandemia mundial de coronavírus. Várias cidades fecharam seus comércios, pessoas ficaram meses em quarentena, muitas famílias tiveram queda de renda expressiva e, conseqüentemente, deixaram de consumir como antes. A categoria “Transporte” foi a que registrou maior deflação, pois o preço dos combustíveis despencou devido a não circulação de veículos nas ruas durante o período de “lockdown”.

É importante lembrar de que, nos anos em que a inflação encerra o ano acima ou abaixo do intervalo de tolerância, o presidente do Bacen precisa escrever uma carta aberta ao ministro da Fazenda, informando os motivos para tal descumprimento e esclarecendo quais medidas corretivas serão tomadas. Como consequência desse cenário deflacionário, o Copom (Comitê de Política Monetária) decidiu, no mês de agosto, dar continuidade ao ciclo de cortes da taxa básica de juros (Selic) que chegou ao menor patamar da história: valendo apenas 2,00% ao ano!

Inflação baixa e previsível é importante para o planejamento de todos. Entretanto, cenários de deflação nunca serão bem-vindos. Um comerciante, por exemplo, poderá ter prejuízo se ganhar menos amanhã pelo estoque que fez hoje. As famílias e as empresas poderão adiar suas decisões de consumo e investimento se houver a perspectiva de que os preços serão mais baixos amanhã, deprimindo assim a atividade econômica.

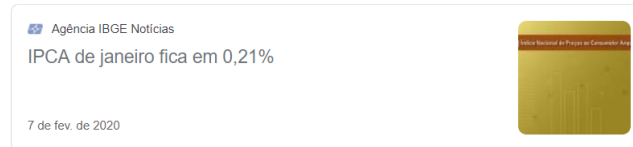
Foi exatamente com a intenção de reverter esse cenário de depressão econômica que o Copom decidiu tornar ainda mais baixa a taxa básica de juros (Selic). A ideia é que, com crédito mais barato, empresas e famílias tenham acesso mais fácil ao capital que necessitam para passar por esse período de turbulência financeira.

Quando a taxa básica de juros (Selic) é MENOR do que a inflação (IPCA) acumulada em doze meses, dizemos que o país atravessa um período de taxa de juros real negativa! Ou seja, aquele cidadão que deseja poupar seu dinheiro PERDERÁ seu poder de compra no longo prazo.

O conceito de taxa de juros real será discutido, em detalhes, na próxima seção.

## Problemas Propostos – Inflação

Problema 2.8.1 – Manchete publicada em 07/02/2020 pela Agência IBGE Notícias:



Considere que, até o início do mês de janeiro de 2020, os itens da cesta básica mensal de produtos e serviços essenciais para uma família brasileira custe, em média, o valor de R\$600,00.

Calcule o valor da mesma cesta básica, após o aumento noticiado no início de fevereiro de 2020.

Solução. Cálculo do aumento da cesta básica:

$$A = 0,21\% \cdot R\$ 600,00$$

$$A = 0,0021 \cdot R\$ 600,00$$

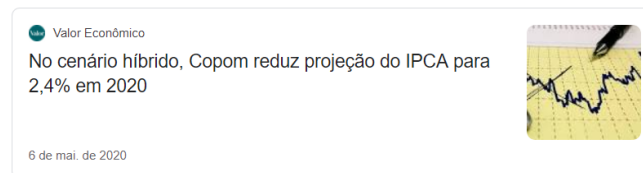
$$A = R\$ 1,26$$

Novo preço:

$$R\$ 600,00 + R\$ 1,26 = R\$ 601,26$$

Resposta: O novo valor da cesta básica será de R\$ 601,26.

Problema 2.8.2 – Manchete publicada em 06/05/2020 pelo site Valor Econômico:



Carlos mora em um apartamento alugado. De acordo com o contrato entre ele e o proprietário do imóvel, todo início de ano o valor mensal pago sofre reajuste de acordo com o IPCA acumulado em doze meses. Até o final do ano de 2020, o rapaz pagou R\$1.200,00 mensalmente.

Se a projeção do Copom se confirmar, qual deverá ser o novo valor mensal do aluguel em 2021?

Solução. Cálculo do aumento do valor mensal do aluguel:

$$A = 2,4\% \cdot R\$ 1.200,00$$

$$A = 0,024 \cdot R\$ 1.200,00$$

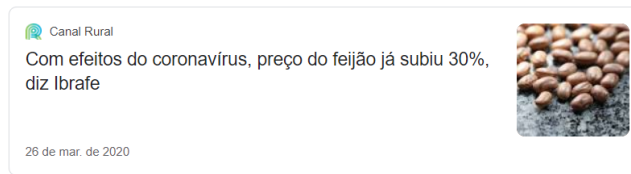
$$A = R\$ 28,80$$

Novo valor mensal do aluguel:

$$R\$ 1.200,00 + R\$ 28,80 = R\$ 1.228,80$$

Resposta: Em 2021, o novo valor mensal do aluguel será de R\$ 1.228,80.

Problema 2.8.3 – Manchete publicada em 26/03/2020 pelo site do Canal Rural:



Luana é gerente de uma grande rede de atacadista. Preocupada com os efeitos do coronavírus, ela foi obrigada a repassar o aumento de 30% no preço do feijão carioca. Dessa forma ela garante que as margens de lucro se manterão constantes, sem prejudicar o fluxo de caixa da companhia. Se antes da pandemia o pacote de 1 kg de feijão carioca custava R\$ 3,49, então responda:



Qual deve ser o novo preço do produto?

Solução. Cálculo do aumento de preço:

$$A = 30\% \cdot R\$ 3,49$$

$$A = 0,30 \cdot R\$ 3,49$$

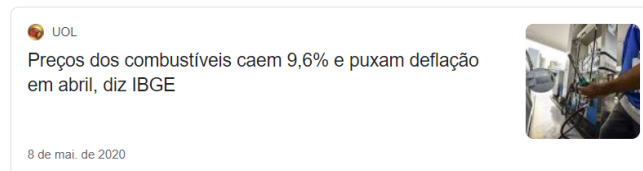
$$A \cong R\$ 1,05$$

Novo preço do produto:

$$R\$ 3,49 + R\$ 1,05 = R\$ 4,54$$

Resposta: O novo preço do pacote de 1 kg de feijão carioca será de R\$ 4,54.

Problema 2.8.4 – Manchete publicada em 08/05/2020 pelo portal de notícias UOL:



Antes da pandemia mundial de coronavírus, o preço de tabela do etanol comum era de R\$ 3,599 por litro. Seu Geraldo enchia o tanque de 50 litros de seu carro por R\$ 179,95. Dado que o preço do etanol caiu 9,6% no mês de abril, responda: Quanto ele economizará agora ao encher o tanque?

Solução. Desconto sobre o custo total dos 50 litros de etanol:

$$D = 9,6\% \cdot R\$ 179,95$$

$$D \cong R\$ 17,28$$

Resposta: Em abril, seu Geraldo economizará R\$ 17,28 ao encher o tanque.



Nota: os problemas aqui propostos foram elaborados a partir de manchetes retiradas de diversos sites e portais agregados ao aplicativo Google Notícias.

## 2.9 – Taxa de Juros Real

## Definição 2.9.1

Uma taxa de juros real é aquela obtida pelo desconto da taxa de inflação da taxa de juros nominal de uma determinada transação financeira.

Matematicamente, temos a seguinte relação empírica:

$$i_r = \left( \frac{1+i_n}{1+i_{IPCA}} \right) - 1 \quad (\text{Equação 2.9.1})$$

Em que:

$i_r$ : taxa de juros real

$i_n$ : taxa de juros nominal

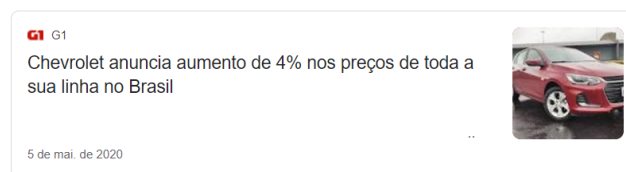
$i_{IPCA}$ : taxa de inflação

## Alguns Comentários

Uma taxa de juros real reflete o quanto um poupador de dinheiro realmente ganhou com uma determinada transação financeira. Como essa taxa desconta a inflação registrada durante o período, se for positiva, ela indica que um determinado investimento rendeu o suficiente para elevar o poder de compra daquele que o fez. Caso contrário, se a taxa de juros real for negativa, ela indica que o poder de compra do investidor diminuiu no período analisado.

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.9.1 – Manchete publicada em 05/05/2020 pelo portal de notícias G1:



Sabe-se que, em maio de 2019, o preço de um automóvel Chevrolet Onix era de R\$ 50.000,00.

Um ano depois, em maio de 2020, o valor do aumento no preço do automóvel será de:

$$A = 4\% \cdot R\$ 50.000,00$$

$$A = 0,04 \cdot R\$ 50.000,00$$

$$A = R\$ 2.000,00$$

O novo preço será de:

$$R\$ 50.000,00 + R\$ 2.000,00 = R\$ 52.000,00$$

Portanto, em maio de 2020, o preço do automóvel Chevrolet Onix será de R\$ 52.000,00.



Em maio de 2019, o senhor Rubens dispunha de R\$ 50.000,00 para comprar um automóvel Chevrolet Onix à vista. Entretanto, naquele momento ele decidiu adiar a compra, aplicando seu capital em um CDB prefixado com taxa de juros nominal líquida de 9% ao ano.

Caso o senhor Rubens efetive a compra de seu automóvel em maio de 2020, responda:

a) Qual foi a taxa de juros real do investimento? O poder de compra dele aumentou ou diminuiu no período analisado?

Solução: A taxa de juros real do investimento foi de:

$$i_r = \left( \frac{1,09}{1,04} \right) - 1$$

$$i_r \cong 0,048$$

$$i_r \cong 4,8\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Como a taxa de juros real do investimento foi positiva, podemos dizer que o poder de compra do senhor Rubens aumentou no período de um ano.

b) Qual foi o retorno real, em termos absolutos, do investimento por ele feito?

Solução: No período de um ano, o CDB prefixado rendeu 9%

$$R = 9\% \cdot R\$ 50.000,00$$

$$R = 0,09 \cdot R\$ 50.000,00$$

$$R = R\$ 4.500,00$$

Retorno real, em termos absolutos:

$$R - A = R\$ 4.500,00 - R\$ 2.000,00$$

$$R - A = R\$ 2.500,00$$

Resposta: O Senhor Rubens obteve retorno real absoluto de R\$ 2.500,00.

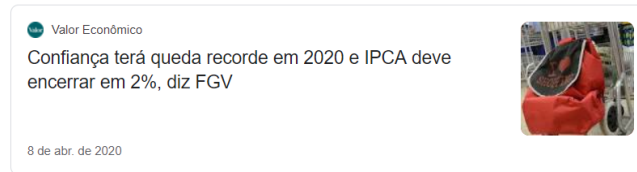
### Alguns Comentários

A decisão do senhor Rubens de adiar a compra de seu automóvel em um ano foi muito vantajosa para ele. Isso porque a taxa de juros nominal líquida do CDB prefixado escolhido por ele se mostrou maior do que o reajuste percentual no preço do automóvel no mesmo período. Dessa forma, ele obteve um aumento do seu poder de compra que resultou em um retorno real, em termos absolutos, de R\$ 2.500,00. Esse valor poderia ajudá-lo, por exemplo, com os custos referente aos impostos, licenciamento e emplacamento de seu recém adquirido Chevrolet Onix.

Caso a taxa de juros nominal líquida do CDB prefixado fosse muito baixa, o senhor Rubens correria sério risco de perder seu poder de compra ao longo do tempo, podendo chegar em maio de 2020 com um montante insuficiente para comprar seu automóvel zero quilômetro à vista. A ocorrência desse fenômeno é justamente um dos motivos pelos quais bancos centrais no mundo todo baixam suas respectivas taxas básicas de juros: a intenção é desestimular a poupança de dinheiro e estimular o consumo da população, consequentemente, promovendo crescimento econômico de um país que se encontra em recessão.

## Problemas Propostos – Taxa de Juros Real

Problema 2.9.1 – Manchete publicada em 08/04/2020 pelo site Valor Econômico:



Em 2020, a renda fixa prefixada do Banco DMV entrega uma taxa de juros nominal, isenta de impostos, no valor de 3,0% a.a. Considere que a inflação oficial (IPCA) prevista naquele ano é de 2,0% a.a. Calcule então a taxa de juros real que um investidor obterá se optar por esse produto.

Solução. Cálculo direto da taxa de juros real:

$$i_r = \left( \frac{1,03}{1,02} \right) - 1$$

$$i_r \cong 0,0098$$

$$i_r \cong 0,98\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Em 2020, o Banco DMV paga taxa de juros real de 0,98% a.a.

Problema 2.9.2 – Manchete publicada em 18/03/2020 pelo site da revista Veja:



Em março de 2020, a inflação brasileira (IPCA) acumulada em doze meses foi de 4,01% a.a. Podemos concluir que, naquele exato momento, o país tinha uma taxa de juros real negativa! Calcule o valor exato da referida taxa.

Solução. Cálculo direto da taxa de juros real:

$$i_r = \left( \frac{1,0375}{1,0401} \right) - 1$$

$$i_r \cong -0,0025$$

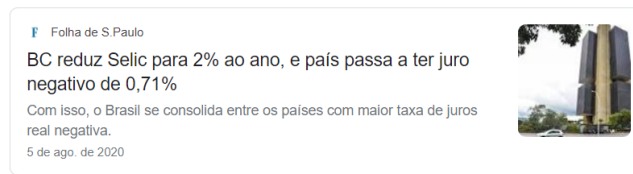
$$i_r \cong -0,25\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Em março de 2020, o país tinha uma taxa de juros real de -0,25% a.a.

## Alguns Comentários

Quando a taxa de juros real se torna negativa, investidores migram parte de seu capital para ativos de renda variável, com maior risco e geralmente maior rentabilidade no longo prazo.

Problema 2.9.3 – Manchete publicada em 05/08/2020 pelo jornal Folha de S. Paulo:



Dados a seguir retirados do site: [tradingeconomics.com/countries](http://tradingeconomics.com/countries) (acesso em 23/08/2020)

Calcule a taxa real de juros dos seguintes países:

a) África do Sul, que tem inflação de 2,20% a.a. e taxa de juros nominais de 3,50% a.a.

Solução. Cálculo direto da taxa de juros real:

$$i_r = \left( \frac{1,0350}{1,0220} \right) - 1$$

$$i_r \cong 1,27\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Em agosto de 2020, a taxa de juros real na África do Sul era de 1,27% a.a.

Taxa de juros real positiva gera aumento do poder de compra dos investidores locais.

b) Chile, que tem inflação de 2,50% a.a. e taxa de juros nominais de 0,50% a.a.

Solução. Cálculo direto da taxa de juros real:

$$i_r = \left( \frac{1,0050}{1,0250} \right) - 1$$

$$i_r \cong -1,95\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Em agosto de 2020, a taxa de juros real no Chile era de -1,95% a.a.

Taxa de juros real negativa gera perda do poder de compra dos investidores locais.

c) Suíça, que tem inflação de -0,90% a.a. e taxa de juros nominais de -0,75% a.a.

Solução. Cálculo direto da taxa de juros real:

$$i_r = \left( \frac{0,9925}{0,9910} \right) - 1$$

$$i_r \cong 0,15\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Em agosto de 2020, a taxa de juros real na Suíça era de 0,15% a.a.

Na Suíça, a taxa de juros nominal é negativa! Na prática, um investidor paga para ter seu dinheiro em títulos públicos suíços. Esse fenômeno ocorre porque a classificação de crédito da dívida soberana suíça é uma das mais altas do mundo, oferecendo baixíssimo risco aos detentores de títulos públicos daquele país. Mesmo assim, a taxa de juros real é positiva, isso ocorre porque a deflação (inflação negativa) é maior do que a taxa de juros nominal em termos absolutos. Assim, no longo prazo, os investidores locais tem leve aumento do poder de compra.

## 2.10 – Curvas de Demanda e Oferta

### 2.10.1 - Introdução

#### Definição 2.10.1 – Parte 1

Numa economia de livre mercado, a precificação dos produtos (bens de consumo) e serviços em geral é dada pela lei empírica de oferta e demanda, dois conceitos definidos a seguir:

- Demanda é a quantidade de um bem ou serviço que os consumidores desejam adquirir.
- Oferta é a quantidade de bens ou serviços disponibilizados à venda. [1]

#### Definição 2.10.1 – Parte 2

Curvas de oferta e demanda são gráficos da relação entre preços, quantidade ofertada e procura por um determinado bem ou serviço. Dessa forma, vamos aqui admitir duas hipóteses:

- A demanda tende a cair quanto maior for o preço de um produto.
- A oferta tende a crescer à medida que se aumenta o preço de um produto. [1]

#### Alguns Comentários

O processo de formação de preços de uma economia de livre mercado é, sem dúvidas, a relação mais importante entre os comerciantes, aqueles responsáveis pela oferta de bens e serviços e os consumidores, que por sua vez são responsáveis pela respectiva demanda destes.

Alguns dos fatores determinantes da demanda são: a renda das famílias, as preferências dos consumidores e o preço de bens relacionados, como os substitutos e os complementares. Já a oferta pode ser influenciada pela tecnologia e custos de produção, tais como: mão de obra, juros e matérias-primas. Além do número de produtores e vendedores disponíveis no mercado.

Criada nos Estados Unidos, a “Black Friday” é uma data aguardada o ano todo por consumidores e comerciantes do mundo inteiro. Neste dia, os preços em geral diminuem consideravelmente e as vendas tendem a aumentar muito. Tal evento acontece em novembro, na sexta-feira seguinte ao Dia de Ação de Graças, comemorado na última quinta-feira do mês. No Brasil, iniciou-se em 2010 e hoje já se tornou uma das principais datas do comércio nacional. Segundo levantamento da consultoria Ebit/Nielsen, em 2020, a data foi responsável por movimentar cerca de R\$ 4,02 bilhões no varejo online, um aumento de 25,1% em relação à 2019.

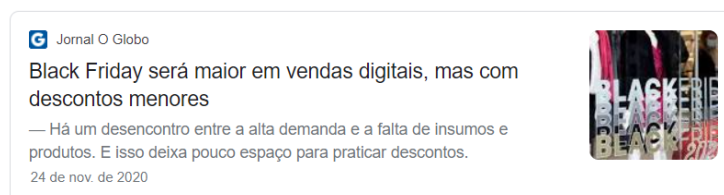


Figura 2.10.1 - Motivação para o estudo das Curvas de Demanda e Oferta.

## 2.10.2 – Construindo Curvas de Demanda e Oferta pelo Modelo Linear

Para construir as curvas de demanda, de oferta e de receita variável aceita-se a hipótese de que esses eventos podem ser bem descritos por funções lineares (retas). Essas curvas são construídas a partir de pontos obtidos por amostras de práticas de preço, consumo e demanda.

Observe a figura a seguir:

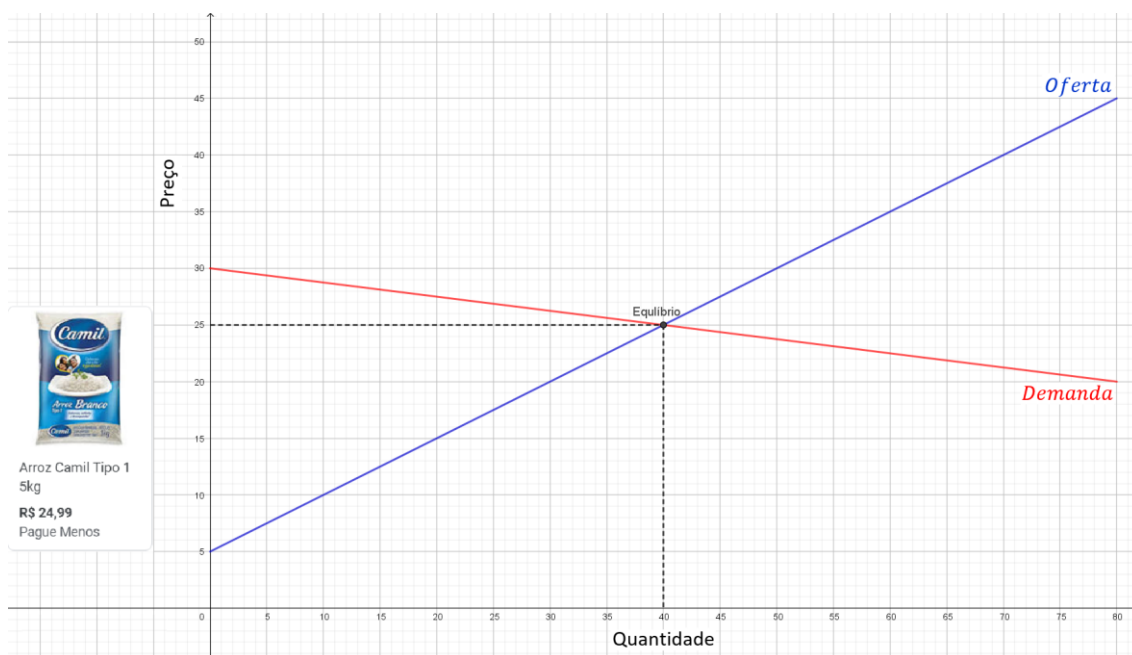


Figura 2.10.2 – Exemplo de curvas de oferta e demanda lineares para o saco de arroz de 5 kg.

## Alguns Comentários

O ponto de equilíbrio do mercado é o preço que um determinado produto deve ter para que a quantidade demandada seja igual a quantidade ofertada. No mês de setembro de 2020, um dono de supermercado percebeu que deveria cobrar R\$ 25,00 pelo pacote de 5 kg de arroz. Caso cobrasse menos, a demanda seria maior que a oferta, e o produto iria faltar nas prateleiras. Caso cobrasse mais, a oferta seria maior que a demanda, e o produto poderia estragar ou vencer.

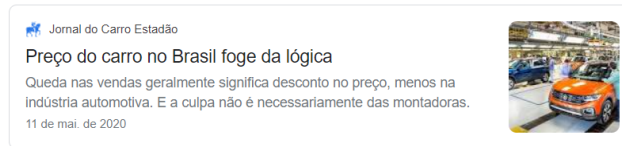


Figura 2.10.3 – Em setembro de 2020 o preço do arroz disparou nos supermercados.

É importante lembrar de que modelos matemáticos são simplificações e não contemplam todos os diversos fatores que verdadeiramente compõem os mecanismos por trás do funcionamento das atividades comerciais. Aqui propomos um meio simples de introduzir um dos principais parâmetros que influenciam nossa vida financeira: a precificação das mercadorias.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 2.10.1 – Manchete publicada em 11/05/2020 pelo Jornal do Carro Estadão:



Uma concessionária de veículos realizou uma pesquisa para medir as variações de vendas de seu modelo motor 1.0 de passeio. Descobriu-se que ao preço de R\$ 50.000,00 foram vendidas 50 unidades no mês, enquanto ao preço de R\$ 60.000,00 foram vendidas 25 unidades mensais. Qual deve ser o valor praticado para que NENHUM veículo seja vendido num determinado mês?

Solução. A Curva de Demanda Linear é dada pela equação linear que passa pelos pontos:

$$A = (50, 50.000)$$

$$B = (25, 60.000)$$

Em que  $x$  representa a quantidade demandada e  $y$  representa o preço praticado. Assim sendo:

$$y = mx + n$$

Em que:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60.000 - 50.000}{25 - 50} = -\frac{10.000}{25} = -400$$

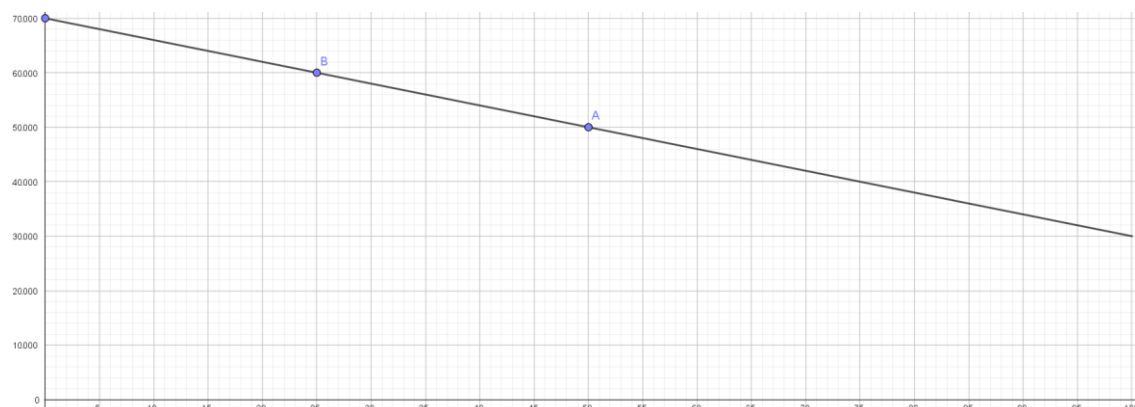
Ou seja, para cada aumento de R\$ 400,00 a demanda pelo automóvel diminui em uma unidade. Substituindo qualquer ponto na expressão de demanda linear, obtemos o termo independente:

$$50.000 = 50 \cdot (-400) + n$$

$$n = 50.000 + 20.000$$

$$n = 70.000$$

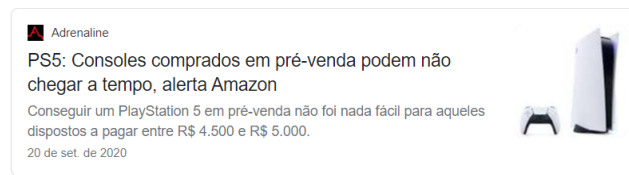
Veja a solução gráfica abaixo:



Alguns Comentários

A rigor, qualquer valor acima de R\$ 69.600,00, preço para a venda de um único veículo, já implicará em nenhuma compra. Neste patamar de preço, os consumidores tenderão a procurar automóveis de outras montadoras ou até mesmo veículos de uma categoria superior.

Exemplo 2.10.2 – Manchete publicada em 20/09/2020 pelo site Adrenaline:



O console de videogames Playstation 5 chegou na Amazon Brasil no mês setembro de 2020. Devido ao grande sucesso do lançamento, o site de “ecommerce” decidiu levantar as curvas de demanda e oferta diárias do respectivo produto. Os resultados, obtidos por amostragem, foram:

$$y = 40x + 1000 \quad (\text{Oferta})$$

$$y = -10x + 6000 \quad (\text{Demanda})$$

A partir das curvas obtidas, responda: Qual deverá ser o preço de equilíbrio do Playstation 5?

Solução. Algebricamente, o ponto de equilíbrio pode ser encontrado resolvendo o sistema linear formado pelas duas equações:

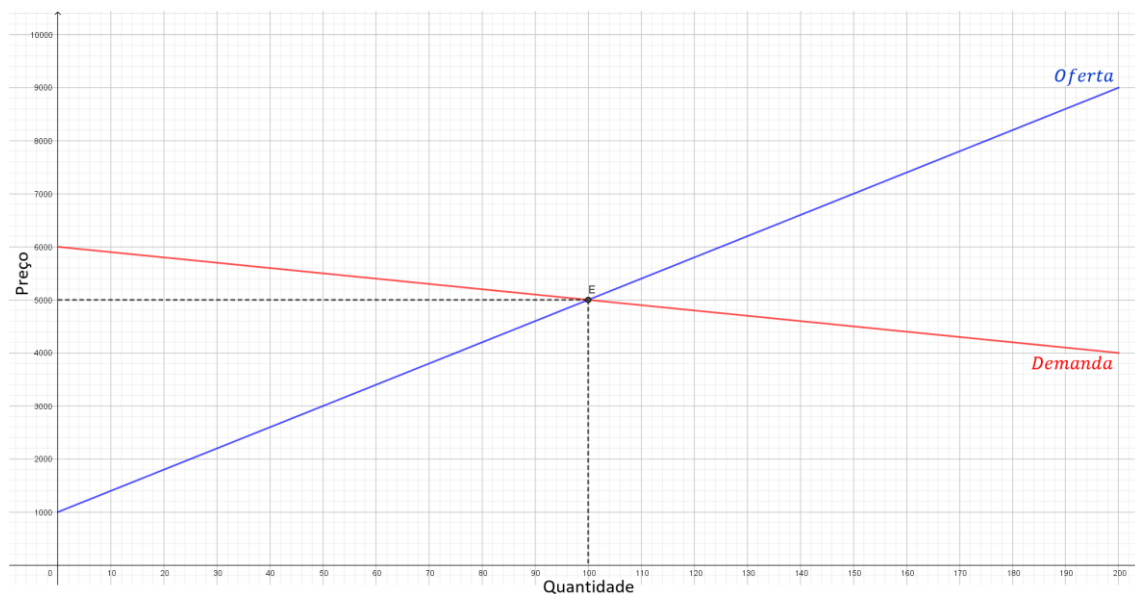
$$\begin{cases} y = 40x + 1000 \\ y = -10x + 6000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$E = (100, 5000)$$

Ou seja, para o preço de R\$ 5.000,00 as quantidades demandada e ofertada serão iguais. Portanto, não haverá excesso e nem falta de procura ou oferta. Trata-se do preço de equilíbrio.

Veja a solução gráfica abaixo:



Alguns Comentários

Caso a Amazon Brasil cobrasse menos pelo console, a demanda seria maior que a oferta, e o produto rapidamente se esgotaria no site. Caso cobrasse mais, a oferta seria maior do que a demanda e os estoques poderiam “encalhar” nos galpões logísticos causando grandes prejuízos.

## 2.10.3 – Análise de Receita Variável

Para qualquer função de demanda linear ( $y = mx + n$ ) em que o coeficiente angular ( $m$ ) é negativo, podemos associar a função que representa a receita total, dada pela expressão:

$$R(x) = x \cdot y$$

$$R(x) = x \cdot (mx + n)$$

$$R(x) = mx^2 + nx$$

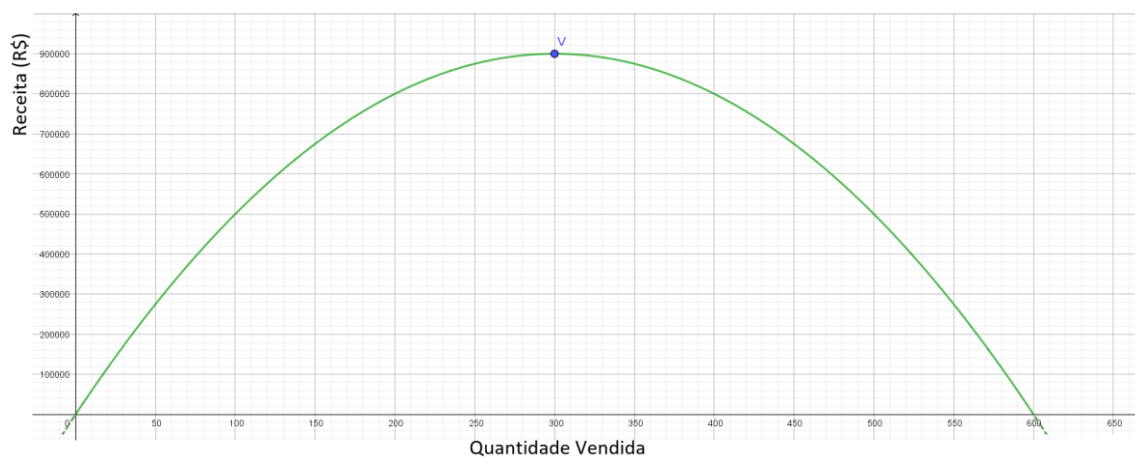
Exemplo 2.10.3 – Considere a curva de demanda anteriormente estudada. (Exemplo 2.10.2)

O que se pode dizer sobre a receita total do site Amazon Brasil com a venda de consoles PS5?

Solução. Sendo a demanda linear diária definida por  $y = -10x + 6000$ , temos:

$$R(x) = -10x^2 + 6000x$$

Trata-se de uma função quadrática em que o gráfico é uma parábola com concavidade negativa:



Dessa maneira, o valor máximo da função se dá no vértice da parábola:  $V = (x_{max}, R_{max})$

Resolvendo, temos:

$$x_{max} = 300$$

$$R_{max} = 900000$$

Ou seja, trezentos clientes desta rede de varejo online estão dispostos a pagar R\$ 3.000,00 cada um pelo console de videogame e assim a companhia obterá a receita máxima de R\$900.000,00.

## Alguns Comentários

Observe que, se juntarmos todas as hipóteses apresentadas existe um grave problema. Ao preço de R\$ 3.000,00 cada PS5, a quantidade ofertada pelo site será de apenas 50 unidades. Isto ocorre porque, com margem de lucro menor, fornecedores não aceitarão correr altos riscos de variação cambial do dólar e incidência de taxas e impostos sobre a importação dos produtos.



## 2.11 - Sistemas de Amortização SAC e Price com o uso do software Microsoft Excel

### 2.11.1 – Introdução

#### Definição 2.11.1

Sistemas de amortização são formas de se realizar o pagamento de uma dívida. A amortização é um processo de abatimento de uma dívida através de pagamentos periódicos. Esses pagamentos são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação se destina a reembolsar parte do capital emprestado e/ou pagar os juros da dívida. O juro é uma espécie de aluguel do dinheiro e deve ser sempre contabilizado sobre o valor do saldo devedor. [1]

Em outras palavras, o pagamento de uma prestação pode ser entendido como o pagamento composto entre o ônus do empréstimo (juros) e sua efetiva quitação (amortização).

Matematicamente, temos a seguinte relação:

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{AMORTIZAÇÃO} + \text{JUROS} \quad (\text{Equação 2.11.1})$$

#### Alguns Comentários

No Brasil é muito comum recorrer aos chamados financiamentos através de pagamentos periódicos. Geralmente, a população recorre a essa modalidade com o objetivo de adquirir bens ou serviços de elevado valor monetário, tais como: imóveis, automóveis e até mesmo financiamento estudantil.

Os bancos (credores), sejam eles públicos ou privados, são instituições que oferecem financiamentos aos seus clientes (devedores). Portanto, financiamentos nada mais são do que contratos que especificam direitos e obrigações entre essas duas partes. Ou seja, o devedor toma dinheiro emprestado do credor, que por sua vez estabelece as condições de pagamento. Dentre as condições, destacam-se: taxa de juros, número de prestações e seus respectivos prazos, além claro da escolha do sistema que será utilizado para amortizar o saldo devedor até a quitação total da dívida.

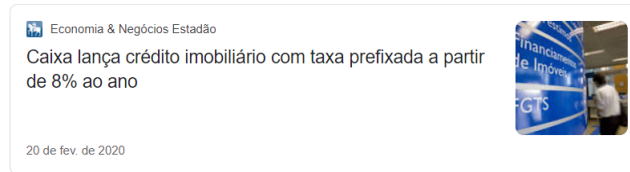
No Capítulo 5 da referência [1] você encontrará ao menos oito sistemas de amortização! Nesta dissertação abordaremos apenas os dois mais utilizados no mercado financeiro brasileiro: Sistema de Amortização Constante (SAC) e Tabela Price ou Sistema Francês.



Figura 2.11.1 – Manchete de 26/10/2016 traz motivação para o estudo dos sistemas de amortização SAC e Price.

## 2.11.2 - Sistema de Amortizações Constantes (SAC)

Exemplo 2.11.2 – Manchete publicada em 20/02/2020 pelo site Economia & Negócios Estadão:



Simule o financiamento de um apartamento no valor de R\$ 600.000,00 nas seguintes condições: vencimento da primeira parcela em doze meses e taxa de juros prefixadas de 8% a.a.

Sistema de Amortizações: SAC

Período do Financiamento: 30 anos

Solução. Cálculo do valor da amortização constante:

$$A = \frac{600.000}{30}$$

$$A = R\$ 20.000,00$$

Para  $n = 1$ :

Cálculo dos juros em relação ao saldo devedor:

$$J_1 = 8\% \cdot 600.000$$

$$J_1 = 0,08 \cdot 600.000$$

$$J_1 = R\$ 48.000,00$$

Portanto, a primeira parcela será de:

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS

$$P_1 = A + J_1$$

$$P_1 = 20.000 + 48.000$$

$$P_1 = R\$ 68.000,00$$

O novo saldo devedor será igual ao anterior descontado da primeira amortização:

$$SD_n = SD_{(n-1)} - A$$

$$SD_1 = SD_0 - A$$

$$SD_1 = 600.000 - 20.000$$

$$SD_1 = R\$ 580.000,00$$

A partir de agora, uma tabela será muito útil para organização do problema:

| Nº de Parcelas | Parcela      | Juros         | Amortização   | Saldo Devedor  |
|----------------|--------------|---------------|---------------|----------------|
| 0              |              |               |               | R\$ 600.000,00 |
| 1              | R\$68.000,00 | R\$ 48.000,00 | R\$ 20.000,00 | R\$ 580.000,00 |

E por praticidade, a tabela continua com o uso do software Microsoft Excel:

Para  $n = 2$ :

C9    X    ✓    fx    =0,08\*E8

$$J_2 = 8\% \cdot 580.000$$

$$J_2 = R\$ 46.400,00$$

Portanto, a segunda parcela será de:

B9    X    ✓    fx    =C9+D9

$$P_2 = A + J_2$$

$$P_2 = 20.000 + 46.400$$

$$P_2 = R\$ 66.400,00$$

O novo saldo devedor será:

E9    X    ✓    fx    =E8-D9

$$SD_2 = SD_1 - A$$

$$SD_2 = 580.000 - 20.000$$

$$SD_2 = R\$ 560.000,00$$

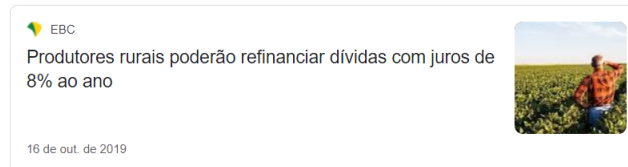
E assim por diante:

|    | A                     | B              | C            | D                  | E                    |
|----|-----------------------|----------------|--------------|--------------------|----------------------|
| 1  | <b>Tabela SAC</b>     |                |              |                    |                      |
| 2  | Principal             | R\$ 600.000,00 |              |                    |                      |
| 3  | Taxa de Juros a.a.    | 8%             |              |                    |                      |
| 4  | nº de prestações      | 30             |              |                    |                      |
| 5  |                       |                |              |                    |                      |
| 6  | <b>nº de Parcelas</b> | <b>Parcela</b> | <b>Juros</b> | <b>Amortização</b> | <b>Saldo Devedor</b> |
| 7  | 0                     |                |              |                    | 600.000,00           |
| 8  | 1                     | 68.000,00      | 48.000,00    | 20.000,00          | 580.000,00           |
| 9  | 2                     | 66.400,00      | 46.400,00    | 20.000,00          | 560.000,00           |
| 10 | 3                     | 64.800,00      | 44.800,00    | 20.000,00          | 540.000,00           |
| 11 | 4                     | 63.200,00      | 43.200,00    | 20.000,00          | 520.000,00           |
| 12 | 5                     | 61.600,00      | 41.600,00    | 20.000,00          | 500.000,00           |
| 13 | 6                     | 60.000,00      | 40.000,00    | 20.000,00          | 480.000,00           |
| 14 | 7                     | 58.400,00      | 38.400,00    | 20.000,00          | 460.000,00           |
| 15 | 8                     | 56.800,00      | 36.800,00    | 20.000,00          | 440.000,00           |
| 16 | 9                     | 55.200,00      | 35.200,00    | 20.000,00          | 420.000,00           |
| 17 | 10                    | 53.600,00      | 33.600,00    | 20.000,00          | 400.000,00           |
| 18 | 11                    | 52.000,00      | 32.000,00    | 20.000,00          | 380.000,00           |
| 19 | 12                    | 50.400,00      | 30.400,00    | 20.000,00          | 360.000,00           |
| 20 | 13                    | 48.800,00      | 28.800,00    | 20.000,00          | 340.000,00           |
| 21 | 14                    | 47.200,00      | 27.200,00    | 20.000,00          | 320.000,00           |
| 22 | 15                    | 45.600,00      | 25.600,00    | 20.000,00          | 300.000,00           |
| 23 | 16                    | 44.000,00      | 24.000,00    | 20.000,00          | 280.000,00           |
| 24 | 17                    | 42.400,00      | 22.400,00    | 20.000,00          | 260.000,00           |
| 25 | 18                    | 40.800,00      | 20.800,00    | 20.000,00          | 240.000,00           |
| 26 | 19                    | 39.200,00      | 19.200,00    | 20.000,00          | 220.000,00           |
| 27 | 20                    | 37.600,00      | 17.600,00    | 20.000,00          | 200.000,00           |
| 28 | 21                    | 36.000,00      | 16.000,00    | 20.000,00          | 180.000,00           |
| 29 | 22                    | 34.400,00      | 14.400,00    | 20.000,00          | 160.000,00           |
| 30 | 23                    | 32.800,00      | 12.800,00    | 20.000,00          | 140.000,00           |
| 31 | 24                    | 31.200,00      | 11.200,00    | 20.000,00          | 120.000,00           |
| 32 | 25                    | 29.600,00      | 9.600,00     | 20.000,00          | 100.000,00           |
| 33 | 26                    | 28.000,00      | 8.000,00     | 20.000,00          | 80.000,00            |
| 34 | 27                    | 26.400,00      | 6.400,00     | 20.000,00          | 60.000,00            |
| 35 | 28                    | 24.800,00      | 4.800,00     | 20.000,00          | 40.000,00            |
| 36 | 29                    | 23.200,00      | 3.200,00     | 20.000,00          | 20.000,00            |
| 37 | 30                    | 21.600,00      | 1.600,00     | 20.000,00          | 0,00                 |

Observe que, no Sistema de Amortizações Constantes (SAC), as sequências de parcelas, juros e saldo devedor são todas progressões aritméticas decrescentes.

## 2.11.3 - Tabela Price ou Sistema Francês

Exemplo 2.11.3 – Manchete publicada em 16/10/2019 pelo site de notícias EBC:



O refinanciamento do custeio, beneficiamento e industrialização de uma propriedade rural está orçada em R\$ 600.000,00. Considere as seguintes condições: vencimento da primeira parcela em doze meses e taxa de juros prefixadas de 8% a.a.

Sistema de Amortizações: Price

Período do Financiamento: 30 anos

Solução. De acordo com a referência bibliográfica: [1]

Um financiamento Price é pago em prestações iguais, que são a união de duas partes:

Juros do Período: São calculados sobre o saldo da dívida no início do período.

Amortização no Principal: Correspondente à parte da prestação que é destinada ao pagamento do principal, ou seja, a parte da parcela que pagará realmente a dívida.

Observe a figura a seguir:

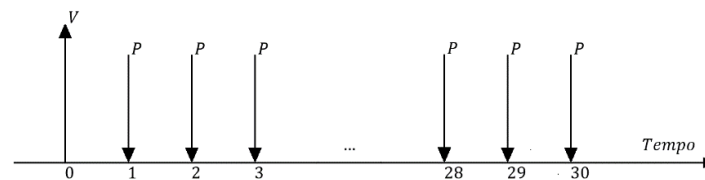


Figura 2.10.3 – Diagrama de fluxo de caixa que ilustra o problema analisado.

No Sistema Francês, quando o devedor tem caixa de sobra, é muito comum o hábito de antecipar parcelas da dívida. Dito de maneira informal, basta “trazer a valor presente” sob regime de juros compostos, qualquer parcela futura que se deseja antecipar o respectivo pagamento. Utilizando esse raciocínio, é perfeitamente possível determinar o valor das parcelas.

A soma de todas as parcelas “trazidas a valor presente” é igual ao principal da dívida:

$$V = \frac{P}{(1+i)^{30}} + \frac{P}{(1+i)^{29}} + \frac{P}{(1+i)^{28}} + \dots + \frac{P}{(1+i)^3} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)}$$

Trata-se da soma de Progressão Geométrica de razão  $(1+i)$ .

$$V = \frac{P}{(1+i)^{30}} \cdot \left[ \frac{(1+i)^{30} - 1}{i} \right]$$

Isolando a parcela do financiamento:

$$P = \frac{V \cdot i \cdot (1+i)^{30}}{(1+i)^{30} - 1}$$

Basta substituir os dois parâmetros restantes: principal ( $V$ ) e taxa de juros ( $i$ ).

$$V = 600.000$$

$$i = 0,08$$

$$P = \frac{600.000 \cdot 0,08 \cdot (1 + 0,08)^{30}}{(1 + 0,08)^{30} - 1}$$

Com o uso de uma calculadora científica, obtemos:

$$P \cong R\$ 53.296,46$$

Agora já podemos começar a construir a Tabela Price:

| Nº de Parcelas | Parcela       | Juros | Amortização | Saldo Devedor  |
|----------------|---------------|-------|-------------|----------------|
| 0              |               |       |             | R\$ 600.000,00 |
| 1              | R\$ 53.296,46 |       |             |                |

Cálculo dos juros em relação ao saldo devedor:

Para  $n = 1$ :

$$J_1 = 8\% \cdot 600.000$$

$$J_1 = 0,08 \cdot 600.000$$

$$J_1 = R\$ 48.000,00$$

Portanto, a primeira amortização será de:

$$\text{AMORTIZAÇÃO} = \text{PRESTAÇÃO} - \text{JUROS}$$

$$A_1 = P - J_1$$

$$A_1 = 53.296,46 - 48.000,00$$

$$A_1 = R\$ 5.296,46$$

O novo saldo devedor será de igual ao anterior descontado da primeira amortização:

$$SD_n = SD_{(n-1)} - A_n$$

$$SD_1 = SD_0 - A_1$$

$$SD_1 = 600.000,00 - 5.296,46$$

$$SD_1 = R\$ 594.703,54$$

A tabela atualizada fica:

| Nº de Parcelas | Parcela       | Juros         | Amortização  | Saldo Devedor  |
|----------------|---------------|---------------|--------------|----------------|
| 0              |               |               |              | R\$ 600.000,00 |
| 1              | R\$ 53.296,46 | R\$ 48.000,00 | R\$ 5.296,46 | R\$ 594.703,54 |

E por praticidade, a tabela continua com o uso do software Microsoft Excel:

Para  $n = 2$ :

C9    X    ✓    fx    =0,08\*E8

$$J_2 = 8\% \cdot 594.703,54$$

$$J_2 = R\$ 47.576,28$$

Portanto, a segunda amortização será de:

D9    X    ✓    fx    =B9-C9

$$A_2 = P - J_2$$

$$A_2 = 53.296,46 - 47.576,28$$

$$A_2 = R\$ 5.720,18$$

O novo saldo devedor será:

E9    X    ✓    fx    =E8-D9

$$SD_2 = SD_1 - A_2$$

$$SD_2 = 594.703,54 - 5.720,18$$

$$SD_2 = R\$ 588.983,36$$

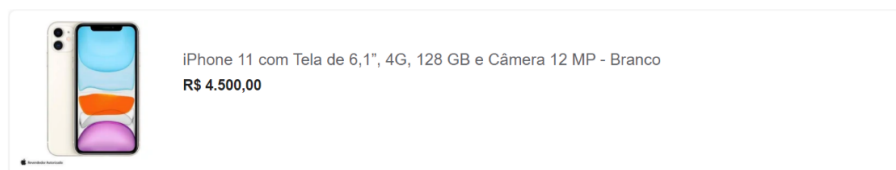
E assim por diante:

|    | A                                       | B              | C             | D                  | E                    |
|----|---|----------------|---------------|--------------------|----------------------|
| 1  | <b>Tabela PRICE - Prestações Iguais</b> |                |               |                    |                      |
| 2  | Principal                               | R\$ 600.000,00 |               |                    |                      |
| 3  | Taxa de Juros a.a.                      | 8,00%          |               |                    |                      |
| 4  | nº de prestações                        | 30             |               |                    |                      |
| 5  |   |                |               |                    |                      |
| 6  | <b>nº da prestação</b>                  | <b>Parcela</b> | <b>Juros</b>  | <b>Amortização</b> | <b>Saldo Devedor</b> |
| 7  | 0                                       |                |               |                    | R\$ 600.000,00       |
| 8  | 1                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 48.000,00 | R\$ 5.296,46       | R\$ 594.703,54       |
| 9  | 2                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 47.576,28 | R\$ 5.720,18       | R\$ 588.983,36       |
| 10 | 3                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 47.118,67 | R\$ 6.177,79       | R\$ 582.805,57       |
| 11 | 4                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 46.624,45 | R\$ 6.672,01       | R\$ 576.133,56       |
| 12 | 5                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 46.090,68 | R\$ 7.205,78       | R\$ 568.927,78       |
| 13 | 6                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 45.514,22 | R\$ 7.782,24       | R\$ 561.145,55       |
| 14 | 7                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 44.891,64 | R\$ 8.404,82       | R\$ 552.740,73       |
| 15 | 8                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 44.219,26 | R\$ 9.077,20       | R\$ 543.663,53       |
| 16 | 9                                       | R\$ 53.296,46  | R\$ 43.493,08 | R\$ 9.803,38       | R\$ 533.860,15       |
| 17 | 10                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 42.708,81 | R\$ 10.587,65      | R\$ 523.272,50       |
| 18 | 11                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 41.861,80 | R\$ 11.434,66      | R\$ 511.837,84       |
| 19 | 12                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 40.947,03 | R\$ 12.349,43      | R\$ 499.488,41       |
| 20 | 13                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 39.959,07 | R\$ 13.337,39      | R\$ 486.151,02       |
| 21 | 14                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 38.892,08 | R\$ 14.404,38      | R\$ 471.746,64       |
| 22 | 15                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 37.739,73 | R\$ 15.556,73      | R\$ 456.189,91       |
| 23 | 16                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 36.495,19 | R\$ 16.801,27      | R\$ 439.388,65       |
| 24 | 17                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 35.151,09 | R\$ 18.145,37      | R\$ 421.243,28       |
| 25 | 18                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 33.699,46 | R\$ 19.597,00      | R\$ 401.646,28       |
| 26 | 19                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 32.131,70 | R\$ 21.164,76      | R\$ 380.481,52       |
| 27 | 20                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 30.438,52 | R\$ 22.857,94      | R\$ 357.623,59       |
| 28 | 21                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 28.609,89 | R\$ 24.686,57      | R\$ 332.937,01       |
| 29 | 22                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 26.634,96 | R\$ 26.661,50      | R\$ 306.275,51       |
| 30 | 23                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 24.502,04 | R\$ 28.794,42      | R\$ 277.481,09       |
| 31 | 24                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 22.198,49 | R\$ 31.097,97      | R\$ 246.383,12       |
| 32 | 25                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 19.710,65 | R\$ 33.585,81      | R\$ 212.797,31       |
| 33 | 26                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 17.023,78 | R\$ 36.272,68      | R\$ 176.524,64       |
| 34 | 27                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 14.121,97 | R\$ 39.174,49      | R\$ 137.350,15       |
| 35 | 28                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 10.988,01 | R\$ 42.308,45      | R\$ 95.041,70        |
| 36 | 29                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 7.603,34  | R\$ 45.693,12      | R\$ 49.348,57        |
| 37 | 30                                      | R\$ 53.296,46  | R\$ 3.947,89  | R\$ 49.348,57      | -R\$ 0,00            |

Observe que, no Sistema Francês (Price), as amortizações estão em progressão geométrica de razão  $(1 + i)$ .

## Problemas Propostos – Tabela Price ou Sistema Francês

Problema 2.11.1 – Anúncio publicado em 25/08/2020 pelo aplicativo Google Shopping:



Um smartphone Apple iPhone 11 é adquirido por R\$ 4.500,00 nas seguintes condições: vencimento da primeira parcela em trinta dias e taxa de juros prefixadas de 1% a.m.

Sistema de Amortizações: SAC Período do Financiamento: 12 meses

Construa uma planilha contendo todas as parcelas, juros e amortizações a serem pagas.

Solução. Cálculo do valor da amortização constante:

$$A = \frac{R\$ 4.500}{12}$$

$$A = R\$ 375,00$$

Cálculo dos juros em relação ao saldo devedor:

$$J_1 = 1\% \cdot 4.500$$

$$J_1 = R\$ 45,00$$

Portanto, a primeira parcela será de:

$$P_1 = R\$ 375,00 + R\$ 45,00$$

$$P_1 = R\$ 420,00$$

O novo saldo devedor será igual ao anterior descontado da primeira amortização:

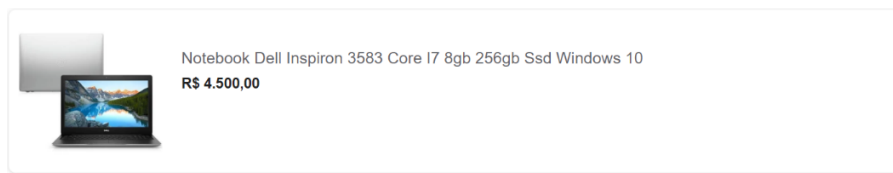
$$SD_1 = R\$ 4.500,00 - R\$ 375,00$$

$$SD_1 = R\$ 4.125,00$$

|    | A                     | B              | C            | D                  | E                    |
|----|-----------------------|----------------|--------------|--------------------|----------------------|
| 1  | <b>Tabela SAC</b>     |                |              |                    |                      |
| 2  | Principal             | R\$ 4.500,00   |              |                    |                      |
| 3  | Taxa de Juros a.m.    | 1%             |              |                    |                      |
| 4  | nº de prestações      | 12             |              |                    |                      |
| 5  |                       |                |              |                    |                      |
| 6  | <b>nº de Parcelas</b> | <b>Parcela</b> | <b>Juros</b> | <b>Amortização</b> | <b>Saldo Devedor</b> |
| 7  | 0                     |                |              |                    | 4.500,00             |
| 8  | 1                     | 420,00         | 45,00        | 375,00             | 4.125,00             |
| 9  | 2                     | 416,25         | 41,25        | 375,00             | 3.750,00             |
| 10 | 3                     | 412,50         | 37,50        | 375,00             | 3.375,00             |
| 11 | 4                     | 408,75         | 33,75        | 375,00             | 3.000,00             |
| 12 | 5                     | 405,00         | 30,00        | 375,00             | 2.625,00             |
| 13 | 6                     | 401,25         | 26,25        | 375,00             | 2.250,00             |
| 14 | 7                     | 397,50         | 22,50        | 375,00             | 1.875,00             |
| 15 | 8                     | 393,75         | 18,75        | 375,00             | 1.500,00             |
| 16 | 9                     | 390,00         | 15,00        | 375,00             | 1.125,00             |
| 17 | 10                    | 386,25         | 11,25        | 375,00             | 750,00               |
| 18 | 11                    | 382,50         | 7,50         | 375,00             | 375,00               |
| 19 | 12                    | 378,75         | 3,75         | 375,00             | 0,00                 |

Resposta: A planilha construída no Excel contém todos os detalhes do financiamento.

Problema 2.11.2 – Anúncio publicado em 25/08/2020 pelo aplicativo Google Shopping:



Um notebook Dell Inspiron Windows 10 é adquirido por R\$ 4.500,00 nas seguintes condições: vencimento da primeira parcela em trinta dias e taxa de juros prefixadas de 1% a.m.

Sistema de Amortizações: Price Período do Financiamento: 12 meses

Construa uma planilha contendo todas as parcelas, juros e amortizações a serem pagas.

Solução. A soma das parcelas “trazidas a valor presente” é igual ao principal da dívida:

$$V = \frac{P}{(1+i)^{12}} + \frac{P}{(1+i)^{11}} + \frac{P}{(1+i)^{10}} + \dots + \frac{P}{(1+i)^3} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)}$$

Trata-se da soma de Progressão Geométrica de razão  $(1+i)$ .

Isolando a parcela do financiamento:

$$P = \frac{V \cdot i \cdot (1+i)^{12}}{(1+i)^{12} - 1}$$

Basta substituir os dois parâmetros restantes: principal ( $V$ ) e taxa de juros ( $i$ ).

$$V = 4.500$$

$$i = 0,01$$

$$P = \frac{4.500 \cdot 0,01 \cdot (1 + 0,01)^{12}}{(1 + 0,01)^{12} - 1}$$

Com o uso de uma calculadora científica, obtemos:

$$P \cong R\$ 399,82$$

|    | A                                       | B              | C            | D                  | E                    |
|----|---|----------------|--------------|--------------------|----------------------|
| 1  | <b>Tabela PRICE - Prestações Iguais</b> |                |              |                    |                      |
| 2  | Principal                               | R\$ 4.500,00   |              |                    |                      |
| 3  | Taxa de Juros a.m.                      | 1,00%          |              |                    |                      |
| 4  | nº de prestações                        | 12             |              |                    |                      |
| 5  |   |                |              |                    |                      |
| 6  | <b>nº da prestação</b>                  | <b>Parcela</b> | <b>Juros</b> | <b>Amortização</b> | <b>Saldo Devedor</b> |
| 7  | 0                                       |                |              |                    | R\$ 4.500,00         |
| 8  | 1                                       | R\$ 399,82     | R\$ 45,00    | R\$ 354,82         | R\$ 4.145,18         |
| 9  | 2                                       | R\$ 399,82     | R\$ 41,45    | R\$ 358,37         | R\$ 3.786,81         |
| 10 | 3                                       | R\$ 399,82     | R\$ 37,87    | R\$ 361,95         | R\$ 3.424,86         |
| 11 | 4                                       | R\$ 399,82     | R\$ 34,25    | R\$ 365,57         | R\$ 3.059,29         |
| 12 | 5                                       | R\$ 399,82     | R\$ 30,59    | R\$ 369,23         | R\$ 2.690,06         |
| 13 | 6                                       | R\$ 399,82     | R\$ 26,90    | R\$ 372,92         | R\$ 2.317,14         |
| 14 | 7                                       | R\$ 399,82     | R\$ 23,17    | R\$ 376,65         | R\$ 1.940,50         |
| 15 | 8                                       | R\$ 399,82     | R\$ 19,40    | R\$ 380,41         | R\$ 1.560,08         |
| 16 | 9                                       | R\$ 399,82     | R\$ 15,60    | R\$ 384,22         | R\$ 1.175,86         |
| 17 | 10                                      | R\$ 399,82     | R\$ 11,76    | R\$ 388,06         | R\$ 787,80           |
| 18 | 11                                      | R\$ 399,82     | R\$ 7,88     | R\$ 391,94         | R\$ 395,86           |
| 19 | 12                                      | R\$ 399,82     | R\$ 3,96     | R\$ 395,86         | R\$ -                |

Resposta: A planilha construída no Excel contém todos os detalhes do financiamento.



Problema 2.11.3 – Anúncio publicado em 25/08/2020 pelo site Mercado Livre:



Um notebook Dell Inspiron, de configurações idênticas daquele visto no problema anterior, pode ser adquirido à vista por R\$ 4.500,00 ou em 12 parcelas mensais de R\$ 427,46. Considerando a Tabela Price, determine a taxa de juros prefixada, ao mês, desse financiamento.

Solução. O problema é equivalente à resolução da seguinte equação:

$$P \cdot [(1 + i)^{12} - 1] = V \cdot i \cdot (1 + i)^{12}$$

$$V = 4.500,00$$

$$P = 427,46$$

Substituindo, temos:

$$427,46 \cdot [(1 + i)^{12} - 1] = 4.500,00 \cdot i \cdot (1 + i)^{12}$$

Como visto, trata-se de uma equação de grau treze!

A única solução positiva pode ser obtida de forma computacional:

$$i \cong 2,07\% \text{ a.m.}$$

Sugestões de software: Geogebra, Wolfram|Alpha, MATLAB, dentre outros.

Outro método é utilizar a tabela construída no problema anterior e aumentar o valor, gradativamente, da célula referente à taxa de juros a.m. até chegar no valor da parcela desejada.

|    | A                                       | B              | C            | D                  | E                    |
|----|---|----------------|--------------|--------------------|----------------------|
| 1  | <b>Tabela PRICE - Prestações Iguais</b> |                |              |                    |                      |
| 2  | Principal                               | R\$ 4.500,00   |              |                    |                      |
| 3  | Taxa de Juros a.m.                      | 2,0744%        |              |                    |                      |
| 4  | nº de prestações                        | 12             |              |                    |                      |
| 5  |   |                |              |                    |                      |
| 6  | <b>nº da prestação</b>                  | <b>Parcela</b> | <b>Juros</b> | <b>Amortização</b> | <b>Saldo Devedor</b> |
| 7  | 0                                       |                |              |                    | R\$ 4.500,00         |
| 8  | 1                                       | R\$ 427,46     | R\$ 93,35    | R\$ 334,12         | R\$ 4.165,88         |
| 9  | 2                                       | R\$ 427,46     | R\$ 86,42    | R\$ 341,05         | R\$ 3.824,84         |
| 10 | 3                                       | R\$ 427,46     | R\$ 79,34    | R\$ 348,12         | R\$ 3.476,71         |
| 11 | 4                                       | R\$ 427,46     | R\$ 72,12    | R\$ 355,34         | R\$ 3.121,37         |
| 12 | 5                                       | R\$ 427,46     | R\$ 64,75    | R\$ 362,72         | R\$ 2.758,65         |
| 13 | 6                                       | R\$ 427,46     | R\$ 57,23    | R\$ 370,24         | R\$ 2.388,41         |
| 14 | 7                                       | R\$ 427,46     | R\$ 49,55    | R\$ 377,92         | R\$ 2.010,49         |
| 15 | 8                                       | R\$ 427,46     | R\$ 41,71    | R\$ 385,76         | R\$ 1.624,74         |
| 16 | 9                                       | R\$ 427,46     | R\$ 33,70    | R\$ 393,76         | R\$ 1.230,97         |
| 17 | 10                                      | R\$ 427,46     | R\$ 25,54    | R\$ 401,93         | R\$ 829,04           |
| 18 | 11                                      | R\$ 427,46     | R\$ 17,20    | R\$ 410,27         | R\$ 418,78           |
| 19 | 12                                      | R\$ 427,46     | R\$ 8,69     | R\$ 418,78         | R\$ -                |

Resposta: A taxa de juros desse financiamento é de aproximadamente 2,07% a.m.

### 3.1 - Meta da Taxa SELIC e a Atuação do Bacen no Controle da Inflação

#### 3.1.1 - Política Monetária

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [8]

Em uma economia saudável, os agentes econômicos (famílias, empresas e governos) atuam em um ambiente de inflação controlada, taxas de câmbio estáveis e confiança no poder de compra da moeda vigente e utilizada nas transações financeiras em todo território nacional.

A política monetária conduzida pelo governo central visa controlar a oferta de moeda em uma economia, com o objetivo justamente de promover a estabilidade dos preços, garantir a confiança na moeda e em alguns casos impulsionar o crescimento da economia como um todo.

No Brasil, a política monetária é conduzida pelo Banco Central do Brasil (Bacen), e mais especificamente pelo Comitê de Política Monetária (Copom), formado pelos membros da Diretoria Colegiada do Bacen (atualmente, oito diretores). Criado em 1996, o Copom tem como objetivos oficiais: "implementar a política monetária, definir a meta da Taxa Selic e seu eventual viés, e analisar o Relatório de Inflação".

O Banco Central do Brasil, assim como outros bancos centrais de outros países, tem à sua disposição algumas ferramentas para atingir os seus objetivos em relação ao estoque de moeda e algumas condições gerais da economia. Essas ferramentas, conhecidas como instrumentos de política monetária, são utilizadas continuamente pelo Banco Central para fazer ajustes nas condições de crédito da economia, ou seja, para buscar "aquecer" ou "desaquecer" a economia conforme a sua leitura da situação econômica e de acordo com os indicadores econômicos que são diariamente monitorados pela equipe técnica da autoridade monetária.

Quais são esses instrumentos de política monetária?

Existem, principalmente, quatro instrumentos utilizados por bancos centrais:

- Taxa de Juros. Talvez o instrumento de política monetária mais eficaz e mais amplamente conhecido pelos participantes do mercado e pelo público em geral seja a determinação da meta da taxa de juros básica da economia. O Copom, em suas reuniões periódicas (a cada seis semanas, aproximadamente) define a meta da Taxa Selic e, desta maneira, influencia as demais taxas de juros observadas na economia: o rendimento dos títulos públicos, a taxa de empréstimos interbancários e as taxas de juros cobradas de empresas e consumidores em geral.

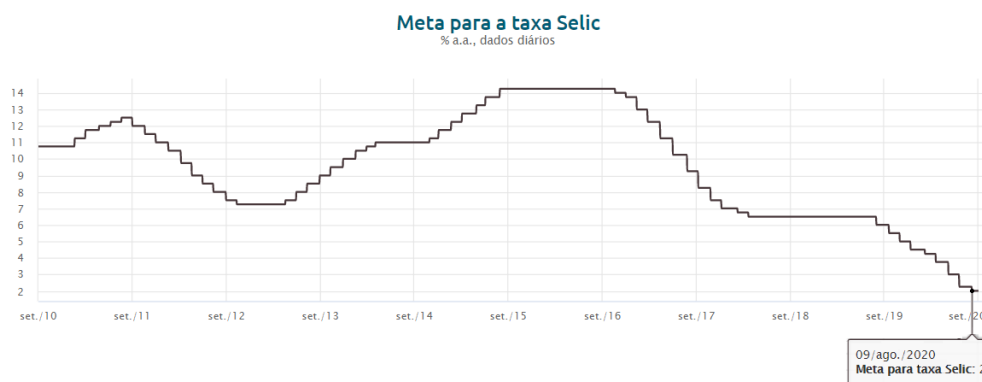


Figura 3.1.1 – Meta para a taxa Selic. <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/metaselic>

Por conta do impacto significativo e imediato na economia, as decisões do Copom são amplamente aguardadas e as atas das reuniões são minuciosamente analisadas pelos participantes do mercado, em busca de indicações sobre os rumos da política monetária no futuro próximo. E que impactos são esses?

Juros mais altos significam crédito mais caro, o que diminui a propensão das empresas e consumidores a tomar empréstimos para investir em bens de consumo ou serviços diversos. Isso faz com que a economia se desaqueça (e talvez esse seja um objetivo do Copom ao aumentar juros, por exemplo, para fazer frente a uma taxa de inflação relativamente alta) e não cresça tanto ou tão rapidamente. Por outro lado, juros mais baixos tornam o crédito mais acessível para empresas e consumidores, o que aquece a economia e permite o crescimento econômico.

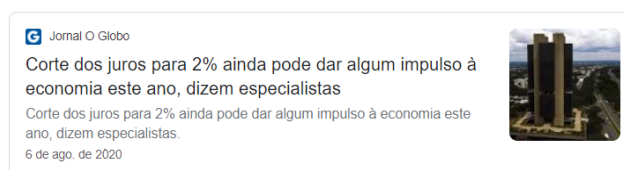


Figura 3.1.2 – No início de agosto de 2020, o Copom decidiu baixar a meta da taxa Selic para 2% a.a.

Alterações na meta da taxa Selic, portanto, afetam diretamente as condições gerais de crédito da nossa economia, além de influenciar sobre as expectativas das empresas e dos consumidores, sobre as decisões de investimento destes e também sobre os preços dos ativos.

- Operações de Mercado Aberto. Quando as condições de crédito oferecidas por bancos comerciais estão restritivas e há a necessidade de se aumentar a oferta de moeda na economia, um banco central pode ir a mercado e adquirir títulos públicos em poder de bancos comerciais, criando assim mais “liquidez”. Os bancos comerciais, por sua vez, utilizam o valor obtido com a venda dos títulos para fazer mais empréstimos ao público.

Por outro lado, se a economia estiver muito aquecida e houver fácil acesso ao crédito, o banco central pode entender que é o momento de “enxugar” a liquidez do mercado, fazendo o movimento contrário: vendendo títulos públicos para os bancos comerciais, que assim se veem com menos recursos disponíveis para realizar empréstimos aos seus clientes.

As operações de compra e venda de títulos públicos junto a bancos comerciais, com a finalidade de aumentar ou reduzir a oferta de moeda e a liquidez da economia, são justamente denominadas operações de mercado aberto. No Brasil, essas operações são executadas pelo Departamento de Operações do Mercado Aberto (DEMAB) do Banco Central, localizado na cidade do Rio de Janeiro.

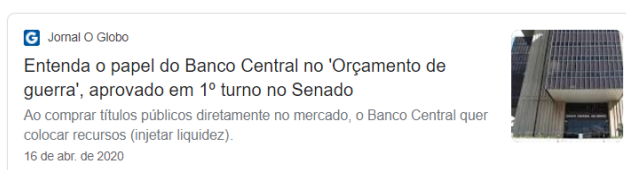


Figura 3.1.3 – Devido à crise causada pela pandemia de coronavírus, o congresso brasileiro aprovou a PEC do Orçamento de Guerra, que autorizou o Bacen a negociar títulos públicos de forma mais ampla do que já fazia antes.

• Depósitos Compulsórios. Por determinação do Banco Central, parte dos depósitos captados dos clientes dos bancos comerciais deve ser mantida em reserva junto ao próprio BC. Tal reserva não fica à disposição dos bancos comerciais para fazer empréstimos a indivíduos ou empresas. Quanto maior o percentual dos depósitos que deverão ser mantidos em reserva, menor a disponibilidade de moeda para que os bancos comerciais emprestem dinheiro. Essa reserva obrigatória, denominada depósito compulsório, é um instrumento de política monetária eficaz à disposição do Banco Central. O aumento ou redução do percentual dos depósitos que deverá ser compulsoriamente mantido junto ao BC afeta de maneira imediata a oferta de moeda na economia.

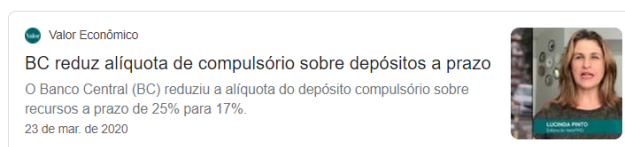


Figura 3.1.4 – Em março de 2020, o Bacen decidiu reduzir a alíquota de compulsório sobre depósitos a prazo.

### Alguns Comentários

Você sabia que depósitos compulsórios funcionam como multiplicadores monetários? Considere o seguinte experimento: o Banco Central da República Progressista Geométrica fixa a alíquota do depósito compulsório sobre recursos a prazo em 20%. Roberto, cidadão desse país e cliente do Banco A, deposita uma nota de cem exponenciais (100 EXP) em sua conta corrente. De acordo com a legislação, o Banco A deve depositar de forma compulsória vinte exponenciais. Logo, oitenta exponenciais estão “livres” para uso do Banco A em suas atividades comerciais. Hélio, cliente do Banco A, toma então esses 80 EXP emprestados e os deposita no Banco B. Legalmente, o Banco B deve depositar de forma compulsória dezesseis exponenciais (16 EXP). Assim, sessenta e quatro exponenciais estão “livres” para uso do Banco B em suas atividades. Juscelino, cliente do Banco B, toma então esses 64 EXP emprestados e os deposita no Banco C. De acordo com a legislação vigente, o Banco C deve depositar de forma compulsória 12,80 EXP. Dessa forma, 51,20 EXP estão “livres” para uso do Banco C em suas operações de empréstimo. Jânio, cliente do Banco C, toma então esses 51,20 EXP emprestados e os deposita no Banco D. De acordo com a legislação vigente, o Banco D deve depositar de forma compulsória 10,24 EXP. Dessa forma, 40,96 EXP estão “livres” para uso do Banco D em suas operações de empréstimo.

E esses ciclos continuam até a exaustão. Observe a tabela a seguir para entender melhor:

Tabela 3.1.1 – Experimento Multiplicador de Base Monetária.

| Banco | Depósito   | Compulsório | Dinheiro “Livre” |
|-------|------------|-------------|------------------|
| A     | 100,00 EXP | 20,00 EXP   | 80,00 EXP        |
| B     | 80,00 EXP  | 16,00 EXP   | 64,00 EXP        |
| C     | 64,00 EXP  | 12,80 EXP   | 51,20 EXP        |
| D     | 51,20 EXP  | 10,24 EXP   | 40,96 EXP        |

Note que, o dinheiro que “realmente existe”, são os 100 EXP inicialmente depositados por Roberto. O capital restante, que circula pelo sistema bancário, foi gerado de forma “livre”.

Para determinar o montante que circula nesse sistema bancário, devido ao depósito inicial de uma nota de 100 EXP, basta calcular a soma infinita da seguinte progressão geométrica:

$$a_0 = 100 \quad (\text{termo inicial})$$

$$q = 0,8 \quad (\text{razão da PG})$$

Equivalente ao cálculo do seguinte limite:

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n [100 \cdot 0,8^i]$$

Que converge para:

$$S_{\infty} = \frac{100,00}{1 - 0,8}$$

$$S_{\infty} = 500,00 \text{ EXP}$$

Acabamos de mostrar que uma alíquota do depósito compulsório sobre recursos a prazo fixada em 20% é capaz de multiplicar em cinco vezes a base monetária de um sistema bancário!

Observe o gráfico e a tabela a seguir e veja outros possíveis fatores multiplicadores monetários:

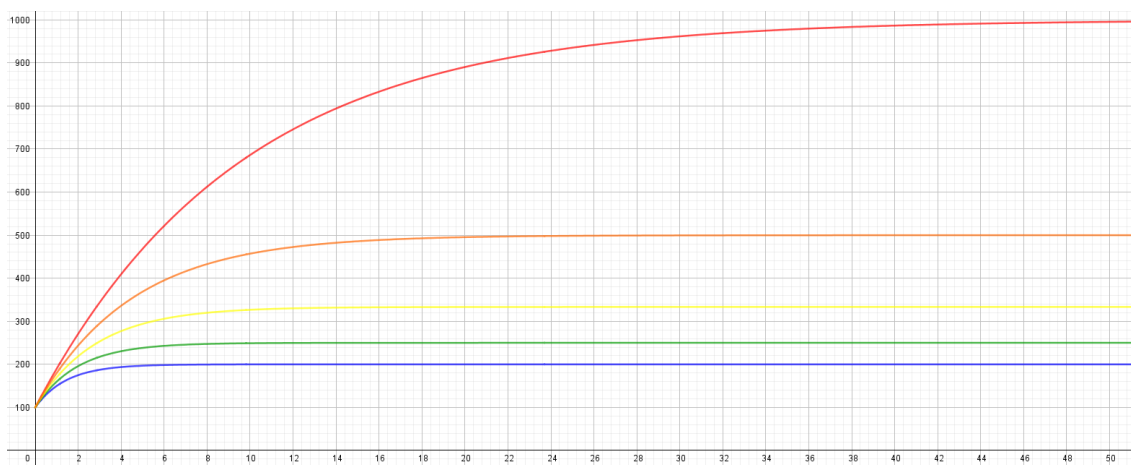


Figura 3.1.5 – A soma da PG converge em aproximadamente cinquenta ciclos de depósito seguido de empréstimo.

Tabela 3.1.2: Alíquota vs Fator Multiplicador Monetário.

| Alíquota | Fator Multiplicador | Cor no Gráfico |
|----------|---------------------|----------------|
| 50%      | 2,0                 | Azul           |
| 40%      | 2,5                 | Verde          |
| 30%      | 3,3                 | Amarelo        |
| 20%      | 5,0                 | Laranja        |
| 10%      | 10,0                | Vermelho       |

• Redesconto. As operações de redesconto são executadas pelo Banco Central e consistem em empréstimos de curtíssimo prazo realizados pelo BC a instituições financeiras que encontrem dificuldades momentâneas de liquidez. Quando uma instituição financeira passa por um problema de liquidez e não consegue obter empréstimos juntos a outras instituições no mercado, o Banco Central pode conceder empréstimo, na qualidade de emprestador de última instância. Tal empréstimo é discricionário, e assim o redesconto é outro instrumento por meio do qual o Banco Central pode regular a oferta de moeda, apesar de não ser tão eficaz quanto as operações de mercado aberto.

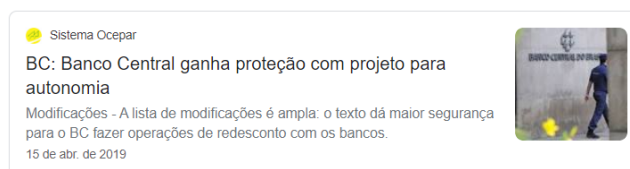


Figura 3.1.6 – Projeto de lei PLP 19/2019, que trata da autonomia do Bacen, está em pauta no Congresso Nacional.

### 3.1.2 - Regime de Metas de Inflação

Outra atividade importante de política monetária desenvolvida por alguns bancos centrais, inclusive o Banco Central do Brasil, é a busca por uma determinada taxa de inflação anual na economia. Essa atividade, também conhecida como regime de metas de inflação, visa manter a estabilidade dos preços na moeda local para assim permitir e promover o crescimento da economia no médio e longo prazo.

No Brasil, a meta de inflação é determinada por meio de resolução do Conselho Monetário Nacional (CMN) e está fixada atualmente em 4,0%, com um limite de um ponto percentual e meio para cima ou para baixo, para o ano de 2020. Para o ano de 2021 a meta está fixada em 3,75%, com tolerância de um ponto percentual e meio para cima ou para baixo. Ou seja, o Banco Central deve atuar para que a taxa de inflação anual fique entre 2,5% e 5,5% em 2020 e entre 2,25% e 5,25% em 2021.

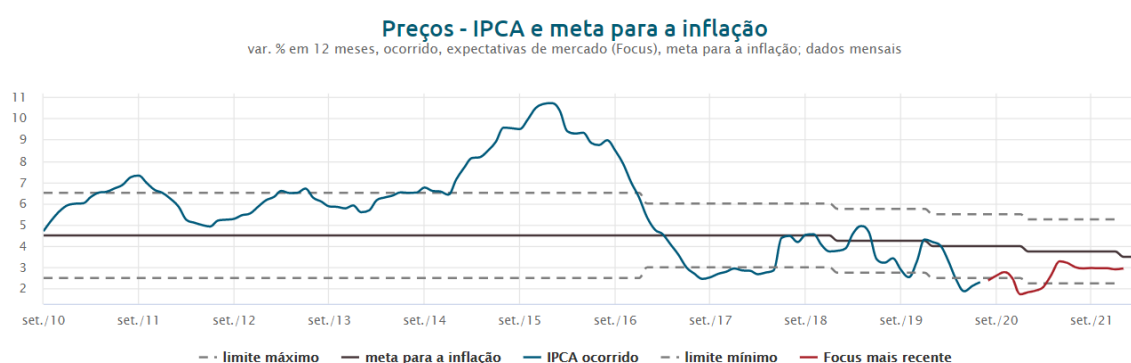


Figura 3.1.7 – IPCA e meta para a inflação. <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/grafico/graficoestatistica/precos>

O Copom, ao aumentar ou reduzir a meta para a Taxa Selic, busca influenciar a atividade econômica (pelo mecanismo de transmissão da política monetária indicado anteriormente) e, dessa forma, atingir a meta de inflação estabelecida pelo CMN.

### 3.2 - Renda Fixa - Títulos Públicos Federais

#### 3.2.1 – Introdução

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [8] e [9]

Para garantir a execução de suas políticas fiscais, o Governo Federal emite títulos por meio do Tesouro Nacional. Em outras palavras, o governo toma dinheiro emprestado para financiar parte dos gastos públicos que não foram cobertos com a arrecadação de impostos.

#### 3.2.2 – Tesouro Direto

O Tesouro Direto é um programa do Tesouro Nacional, desenvolvido em parceria com a B3 (bolsa de valores oficial do Brasil). O principal objetivo deste é promover a venda de títulos públicos aos CPFs (pessoas físicas), de forma 100% online. Lançado em 2002, o programa surgiu com o objetivo de democratizar o acesso aos títulos públicos, permitindo ao pequeno investidor começar a montar seu portfólio de renda fixa com aportes um pouco maiores do que R\$ 30,00.



Figura 3.2.1 – Acesse: <https://www.tesourodireto.com.br>

Veja a seguir alguns exemplos:

- Tesouro Prefixado, antes conhecido como LTN (Letras do Tesouro Nacional).

Os títulos prefixados são aqueles que têm taxa de juros fixa, ou seja, você já a conhece no momento do investimento. É o investimento ideal para quem quer saber exatamente o valor que receberá ao final da aplicação, no vencimento do título.

Exemplos:

| Título                 | Rentabilidade anual | Investimento mínimo | Preço Unitário | Vencimento |
|------------------------|---------------------|---------------------|----------------|------------|
| TESOURO PREFIXADO 2023 | 4,10%               | R\$ 36,44           | R\$ 911,08     | 01/01/2023 |
| TESOURO PREFIXADO 2026 | 6,48%               | R\$ 35,80           | R\$ 716,14     | 01/01/2026 |

Figura 3.2.2 – Alguns títulos públicos prefixados disponíveis ao investidor em 02/09/2020.

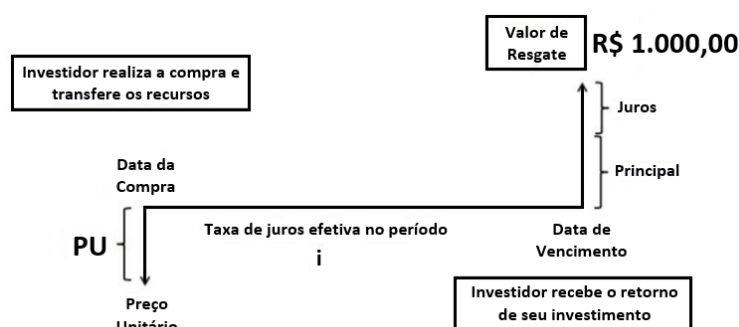
Alguns Comentários:

Considere o título “TESOURO PREFIXADO 2023”. Note que o valor do investimento mínimo (R\$36,44) corresponde exatamente a 4% do Preço Unitário (PU) deste, confira a seguir:

$$4\% \cdot R\$911,08 \cong R\$36,44$$

Ou seja, o investidor pode comprar, no mínimo,  $\frac{4}{100}$  (quatro centésimos) dessa LTN.

Outra curiosidade sobre o “TESOURO PREFIXADO 2023” é que, na data do vencimento, o valor do Preço Unitário (PU) deste título público será de exatamente R\$1.000,00 (mil reais). Observe, a seguir, o diagrama de rentabilidade para o Tesouro Prefixado:



Para o cálculo da rentabilidade do título sempre consideramos o ano com 252 dias úteis. Isso significa que, a partir da taxa anual de rentabilidade (4,10% a.a.) é possível verificar o número de dias úteis até a data do vencimento da respectiva LTN, veja em detalhes o cálculo:

$$1.000 = 911,08 \cdot (1,0410)^{\frac{du}{252}}$$

$$(1,0410)^{\frac{du}{252}} \cong 1,0976$$

$$\frac{du}{252} \cdot \log 1,0410 = \log 1,0976$$

Finalmente:

$$du = 252 \cdot \frac{\log 1,0976}{\log 1,0410}$$

Com auxílio de uma calculadora científica:

$$du \cong 584$$

Portanto, em 02/09/2020, restarão ainda 584 dias úteis para o vencimento dessa LTN.

- Tesouro Selic, antes conhecido como LFT (Letras Financeiras do Tesouro).

Os títulos Tesouro Selic são títulos pós-fixados que possuem rentabilidade atrelada à Taxa Selic. A Taxa Selic é a taxa básica de juros da economia brasileira.

Exemplo:

| Título             | Rentabilidade anual | Investimento mínimo | Preço Unitário | Vencimento |
|--------------------|---------------------|---------------------|----------------|------------|
| TESOURO SELIC 2025 | SELIC + 0,0348%     | R\$ 106,78          | R\$ 10.678,36  | 01/03/2025 |

Figura 3.2.3 – Títulos público Tesouro Selic 2025, disponível ao investidor em 02/09/2020.

Alguns Comentários:

O Tesouro Selic é o mais conservador dos títulos públicos, ideal para quem quer sair da Poupança e começar a investir no Tesouro Direto.



- Tesouro IPCA+, antes conhecido como NTN-B Principal (Notas do Tesouro Nacional).

A rentabilidade desse título é híbrida: parte dela está atrelada à inflação, medida pela variação do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e a outra taxa é prefixada.

Exemplos:

| Título             | Rentabilidade anual | Investimento mínimo | Preço Unitário | Vencimento |
|--------------------|---------------------|---------------------|----------------|------------|
| TESOURO IPCA+ 2026 | IPCA + 2,42%        | R\$ 57,52           | R\$ 2.876,05   | 15/08/2026 |
| TESOURO IPCA+ 2035 | IPCA + 3,70%        | R\$ 38,94           | R\$ 1.947,24   | 15/05/2035 |
| TESOURO IPCA+ 2045 | IPCA + 3,70%        | R\$ 40,66           | R\$ 1.355,41   | 15/05/2045 |

Figura 3.2.4 – Títulos públicos Tesouro IPCA+ disponíveis ao investidor em 02/09/2020.

Meus Comentários:

Considere o título “TESOURO IPCA+ 2026”. Note que o valor do investimento mínimo (R\$57,52) corresponde exatamente a 2% do Preço Unitário (PU) deste, confira a seguir:

$$2\% \cdot R\$2.876,05 \cong R\$57,52$$

O investidor pode comprar, no mínimo,  $\frac{2}{100}$  (dois centésimos) dessa NTN-B Principal.

Outra curiosidade sobre o “TESOURO IPCA+ 2026” é que sua taxa prefixada oscila diariamente, de acordo com as condições fiscais do país e do mercado financeiro internacional. Esse fenômeno faz o preço dos títulos variar muito num curto período de tempo, gerando maior risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando este papel. Podemos dizer que títulos públicos que tem parte prefixada tem grande volatilidade, e com isso oferecem alto risco de mercado. Observe o gráfico a seguir:

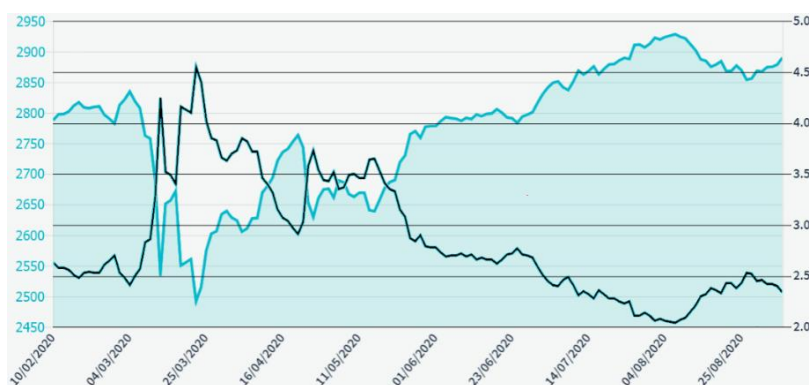


Figura 3.2.5 – Tesouro IPCA+ 2026 – Esquerda: preço do título. Direita: valor, ao ano, da taxa prefixada.

Fonte: <https://www.tesourodireto.com.br/titulos/historico-de-precos-e-taxas.htm>

A relação entre preço unitário e taxa de juros prefixada é inversamente proporcional. Quando a taxa de juros cai, o preço do título sobe. E quando a taxa de juros sobe, o preço cai. Quanto maior for o prazo remanescente até a data do vencimento do título, maior será a volatilidade observada e assim, portanto, maior será o risco de mercado associado ao papel.

### 3.2.3 – Resgate Antes do Vencimento

Se o investidor quiser resgatar sua posição antes do prazo do vencimento, ele pode. Basta vender seus títulos de volta ao governo, que terá um mecanismo de recompra dos papéis. Entretanto, é preciso ter cuidado na hora de resgatar uma LTN ou NTB-Principal. Isso porque, dependendo das condições do mercado, esses títulos podem se desvalorizar e causar prejuízos no momento da venda. O Tesouro Selic é pós-fixado e não sofre grandes oscilações de preço.

### 3.2.4 – Liquidez e Tributação

O Tesouro Direto oferece liquidez diária (D+1). Isso significa que o valor líquido do título vendido entrará na conta corrente do investidor no dia útil seguinte à sua solicitação de resgate.

A tributação sobre os rendimentos dos investimentos em títulos públicos é dada pela tabela regressiva a seguir. Observe que, quanto mais tempo os recursos ficam aplicados, menor será a alíquota de Imposto de Renda paga pelo investidor.

Tabela 3.2.1 - Tributação Regressiva de Imposto de Renda

| Prazo do Investimento | Alíquota de IR |
|-----------------------|----------------|
| Até 180 dias          | 22,5%          |
| 181 até 360 dias      | 20,0%          |
| 361 até 720 dias      | 17,5%          |
| Acima de 720 dias     | 15,0%          |

Isso significa que, se um investidor quiser pagar menos impostos, deverá escolher aqueles títulos com prazo de vencimento mais longos.

### 3.2.5 – Risco de Crédito Soberano

O principal risco para quem investe em renda fixa é a saúde financeira dos emissores de dívida, sejam eles bancos, empresas ou, no caso dos títulos públicos, o próprio Governo Federal. Risco de crédito é a probabilidade de uma dessas instituições (devedoras) decretar falência e, conseqüentemente, não conseguir honrar com a dívida que tem com os investidores (credores).

Dessa forma, é esperado que os investidores se questionem sobre a capacidade de solvência do Estado Brasileiro, e com isso, sobre a segurança de se investir no Tesouro Direto. Em bom português, surgem as seguintes perguntas:

Pode o Governo Federal dar um calote nos investidores do Tesouro Direto?

Existe o risco de um investidor não conseguir resgatar seus títulos públicos?

E a resposta é muito simples: o Tesouro Nacional tem o mais baixo risco de crédito dentre todos os emissores de títulos financeiros do país, trata-se do risco de crédito soberano da nação. Isso porque a Lei de Responsabilidade Fiscal permite o refinanciamento da dívida pública (rolagem) com a emissão de novos títulos para o pagamento daqueles que estão para vencer. Contudo, dependendo das condições fiscais do país no momento dessas novas emissões, os investidores poderiam exigir um prêmio maior caso o risco fiscal do país tenha aumentado em relação aos períodos anteriores. Diante desse cenário negativo, as taxas de juros poderiam aumentar, prejudicando assim aqueles investidores que detêm títulos prefixados, por exemplo.

### 3.3 - Renda Fixa – Emissão Bancária

#### 3.3.1 – Introdução

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [8] e [9]

Emissões bancárias são ativos emitidos por instituições financeiras para captar recursos. Os CDBs, as LCIs e LCAs são alguns exemplos de emissões bancárias. Ao adquirir um desses títulos, você na prática está emprestando dinheiro à um banco em troca de uma remuneração.

O objetivo do banco por trás da captação de cada um dos instrumentos é diferente. Pode ser, por exemplo, para financiamento de uma empresa do setor imobiliário (captar através de LCIs) ou do agronegócio (captar através de LCAs).

#### 3.3.2 – O Certificado de Depósito Interbancário (CDI)

O Certificado de Depósito Interbancário (CDI) é um título de emissão de instituições financeiras utilizado no mercado interbancário. A esse mercado, somente instituições financeiras têm acesso. O CDI é um produto que existe para cobrir deficiências temporárias e pontuais nos caixas dos bancos.

Durante o dia, os bancos tomam dinheiro, via CDB, poupança, conta corrente e captações externas e emprestam esses recursos a terceiros. Ao ser fechado o caixa, podem sobrar ou faltar recursos. Caso haja falta, o banco que tem dinheiro faltando toma emprestado de quem tem sobra, por meio do CDI, que, na maioria das vezes, é negociado por um só dia. Esse mecanismo é rápido, seguro e não está sujeito à interferência do Bacen.

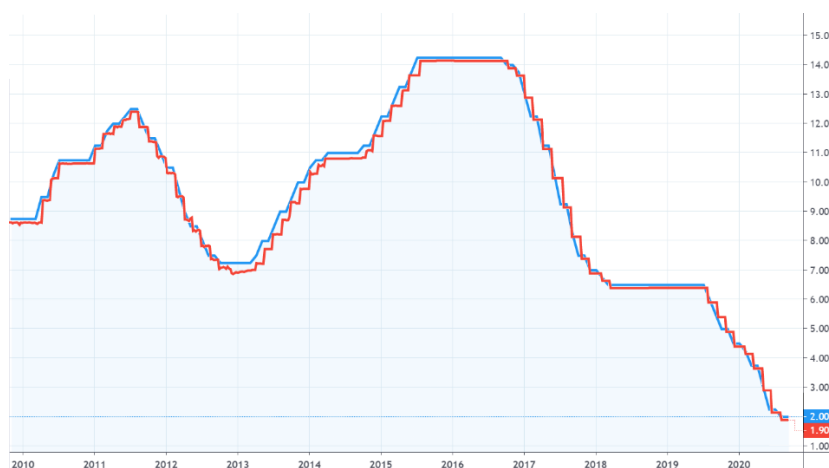


Figura 3.3.1 – Taxa dos Depósitos Interfinanceiros (DI) e meta para taxa Selic. Fonte: <https://br.tradingview.com>

Observe o gráfico anterior, note que a taxa média dos Depósitos Interfinanceiros (DI), em vermelho, costuma ficar um pouco abaixo da taxa Selic, em azul. Isso porque o risco de empréstimos com garantia de recursos dos bancos é muito similar ao de títulos públicos, mas não é exatamente idêntico. No início de setembro de 2020, a taxa de juros DI negociada era de 1,90% a.a. Nessa mesma data, o Copom havia definido como meta para taxa Selic exatos 2% a.a.

### 3.3.3 – O Certificado de Depósito Bancário (CDB)

Certificado de Depósito Bancário (CDB) é um título emitido pelas instituições bancárias. Trata-se de apenas uma, das várias fontes que os bancos se utilizam para financiamento próprio. Isso quer dizer que os recursos captados via CDB ficam disponíveis no caixa do banco, menos o valor do depósito compulsório, para serem emprestados aos seus clientes.

### 3.3.4 – Letras de Crédito Imobiliário (LCI)

A Letra de Crédito Imobiliário (LCI) é um título de crédito de renda fixa que tem como lastro financiamentos imobiliários garantidos por hipoteca ou alienação fiduciária de imóvel. Este ativo é utilizado como instrumento de captação das instituições financeiras sendo estas responsáveis por honrá-los junto aos investidores.

As instituições financeiras possuem carteiras de créditos imobiliários, provenientes, dentre outras fontes, de empréstimos a Pessoas Físicas e Pessoas Jurídicas, que estejam ligadas ao setor imobiliário. A quantidade emitida e o prazo da LCI não podem ultrapassar o tamanho do lastro e o vencimento dos direitos creditórios que estarão vinculados ao respectivo ativo.

### 3.3.5 – Letras de Crédito do Agronegócio (LCA)

A Letra de Crédito do Agronegócio é um título de renda fixa emitido por instituições financeiras públicas e privadas. Seus princípios são muito semelhantes à Letra de Crédito Imobiliário (LCI). A diferença está na destinação dos valores captados. Na LCI, a emissão do papel é usada para financiar as atividades do segmento imobiliário. Já na LCA, o foco são as operações do agronegócio.

O valor captado é destinado principalmente para os empréstimos a produtores rurais que precisam do dinheiro para comprar maquinário e insumos. Assim, ao mesmo tempo em que pode colher bons rendimentos, o investidor ajuda indiretamente a impulsionar um setor vital para o país.

### 3.3.6 – Liquidez e Tributação

Alguns CDBs possuem liquidez diária, e por isso podem ser resgatados em qualquer dia útil, sem prejuízo à rentabilidade. Geralmente esses títulos remuneram de 90% até 100% do CDI. Todos os outros CDBs tem liquidez na data de vencimento, prazo que varia de um até cinco anos. Geralmente esses títulos remuneram de 100% até 160% do CDI, dependendo da solidez e risco de crédito atribuído ao banco emissor. Quanto maior o risco, maior é a rentabilidade oferecida.

Embora menos comuns, existem também os CDBs prefixados e aqueles que são atrelados à inflação (IPCA) mais uma taxa prefixada. A rentabilidade desses papéis costuma ser um pouco maior do que aquela oferecida por títulos públicos com vencimentos semelhantes.

A tributação dos CDBs é dada pela mesma tabela regressiva de IR dos títulos públicos. Emissões bancárias do tipo LCI e LCA são isentas de imposto de renda, isso ocorre porque o governo incentiva os investidores a direcionar seus recursos aos setores imobiliário e do agronegócio, promovendo assim o crescimento econômico do país.

### 3.3.7 – Fundo Garantidor de Créditos - O que é o FGC?

O FGC é uma instituição privada, sem fins lucrativos, cuja missão é proteger investidores do sistema financeiro nacional, prevenindo a ocorrência de uma crise geral do sistema bancário. Em outras palavras, é um mecanismo que garante aos clientes das instituições financeiras a ele associadas a recuperação do patrimônio investido, ou ao menos parte dele, em caso de decretação de regime de intervenção ou liquidação extrajudicial.

E como funciona? O fundo é formado com recursos depositados periodicamente pelas instituições financeiras associadas: Caixa Econômica Federal, bancos múltiplos, bancos comerciais, bancos de investimento, bancos de desenvolvimento, sociedades de crédito, financiamento e investimento, sociedades de crédito imobiliário, companhias hipotecárias e associações de poupança e empréstimo.

Qual é o valor máximo garantido? O valor total coberto pelo FGC é limitado ao teto de R\$ 250 mil por CPF/CNPJ em cada conglomerado financeiro, com um limite de R\$ 1 milhão renovado a cada quatro anos. É importante reforçar que o FGC só protege o investidor de títulos de renda fixa de emissão bancária, tais como os já vistos: CDBs, LCs, LCIs, LCAs, dentre outros.

### 3.3.8 – Estudo de Caso – Dacasa Financeira.

Nos últimos anos, a instituição financeira Dacasa era constantemente presente nas maiores plataformas de distribuição de produtos de renda fixa das corretoras brasileiras. Comumente, seus papéis pagavam taxas de juros bem mais altas do que a média do mercado.

Em meados de 2019, uma letra de câmbio (LC) de dois anos pagava 123% do CDI, uma das maiores taxas observadas nas plataformas de emissão bancária do país naquele momento.

As taxas prometidas eram muito altas por um único motivo: havia uma grande dificuldade de captação, uma vez que os prejuízos no balanço da instituição eram altos e os investidores mais experientes fugiam dos papéis por ela emitidos. Entretanto, pessoas físicas desavisadas ou até mesmo mal assessoradas viam as taxas altíssimas e, sem saber o que estava acontecendo, compraram muitos papéis. Quando todos se deram conta do risco, já era tarde:



Figura 3.3.2 – Em fevereiro de 2020, o Bacen declarou liquidação extrajudicial da Dacasa Financeira.

No caso Dacasa Financeira, os reembolsos garantidos pelo FGC começaram em 40 dias. É muito importante lembrar de que nesse período não houve rendimento dos papéis resgatados. Ou seja, quanto mais o FGC demorar a pagar, menor será o retorno total dos seus investimentos.



Figura 3.3.3 – Em março de 2020, o FGC liberou o pagamento a credores da Dacasa Financeira.

### 3.4 - Renda Fixa – Crédito Privado

#### 3.4.1 – Introdução

Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: [8] e [9]

Nesta seção você vai aprender o que é crédito privado. Trata-se de um mercado que hoje tem um grande potencial de crescimento, impulsionado principalmente pela recente queda das taxas de juros, que gera mais oportunidades para as empresas se capitalizarem dessa forma.

Sem dúvidas, o mercado de dívida privada aqui no Brasil vem se mostrando muito forte. Essa modalidade de crédito é uma forma muito eficiente de captar os recursos que as empresas tanto necessitam para realização de seus projetos de crescimento. Elas buscam, por meio desses instrumentos de renda fixa, uma maneira de se alavancar financeiramente a custos reduzidos.

As debêntures, os CRIs e CRAs são alguns exemplos de crédito privado. Ao adquirir um desses títulos, você está emprestando dinheiro à uma empresa em troca de uma remuneração.

#### 3.4.2 – Debêntures

As debêntures são títulos de dívida de médio e longo prazos (a partir de dois anos) que podem ser emitidos por Sociedades Anônimas, ou seja, empresas privadas. Esse tipo de papel é utilizado pelas companhias emissoras para o financiamento de projetos, aumento de capital ou da capacidade produtiva e também para a reestruturação de dívidas anteriores.

##### Debêntures Comuns vs Debêntures Incentivadas

As debêntures incentivadas são aquelas emitidas por empresas que captam recursos para projetos de infraestrutura, como aeroportos, rodovias e portos. Por isso, o Governo Federal concede esse benefício fiscal, que é repassado aos investidores através da isenção de cobrança de Imposto de Renda (IR) e Imposto sobre Operações Financeiras (IOF). As debêntures comuns, por outro lado, têm cobrança de Imposto de Renda segundo a tabela regressiva dos títulos públicos. Ou seja, quanto maior o período de investimento, menor será a alíquota de tributação.

#### 3.4.3 – Certificados de Recebíveis Imobiliários (CRI)

Os CRIs são títulos de crédito privado que representam a promessa de um pagamento futuro proveniente das atividades comerciais de empresas do ramo imobiliário. Dito de forma mais simples, o investidor que detém um CRI financia construtoras e incorporadoras de imóveis.

#### 3.4.4 – Certificados de Recebíveis do Agronegócio (CRA)

Os Certificados de Recebíveis do Agronegócio são títulos de crédito privado emitidos com o objetivo de financiar o setor agrícola. As emissões de CRAs abrangem financiamentos destinados à produção, comercialização, beneficiamento ou até industrialização de produtos, insumos ou máquinas e equipamentos utilizadas na produção agropecuária. Os CRAs são relativamente recentes, isso porque as primeiras emissões começaram a partir do ano de 2009.

### 3.3.5 – Liquidez e Tributação

Debêntures, CRIs e CRAs tem liquidez apenas na data do vencimento, prazo que varia de dois até quarenta anos, dependendo do ciclo operacional das companhias e concessionárias. Geralmente esses títulos remuneram o investidor através do pagamento de cupons de juros anuais, semestrais e até mesmo mensais. No Brasil, o mercado secundário de crédito privado ainda é muito pequeno, inviabilizando a liquidez na compra e venda da maioria de seus papéis.

Emissões de crédito privado, em sua maioria, são pós-fixadas ou atreladas à inflação (IPCA) mais uma taxa prefixada. A rentabilidade desses papéis costuma ser um pouco maior do que aquela oferecida por títulos públicos e de emissão bancária com vencimentos semelhantes. Isso ocorre porque o risco de crédito associado às empresas é maior do que o risco soberano.

A tributação de Debêntures Comuns é dada pela tabela regressiva de Imposto de Renda. Por lei, as Debêntures Incentivadas, os CRIs e os CRAs são emissões privadas isentas de tributos. Essa desoneração fiscal ocorre porque o governo decide incentivar investimentos nos setores de infraestrutura, imobiliário, agronegócio e assim promover o crescimento econômico do país.

### 3.3.6 – Classificação de Crédito ou “Rating” das Empresas

Nós já sabemos que os títulos do Tesouro Direto são garantidos pelo Governo Federal. E que grande parte das emissões bancárias são cobertas pelo Fundo Garantidor de Crédito. Contudo, títulos privados são garantidos apenas pela saúde financeira das empresas emissoras. Dessa forma, um investidor deve se perguntar: como saber quais são as empresas mais seguras? Ou ainda: como saber quais corporações oferecem menor risco de “calote” ou inadimplência?

Aí entra o importante trabalho realizado pelas agências de classificação de risco, em inglês: “*rating agencies*”. Basicamente, o que elas fazem são auditorias dos balanços financeiros das empresas com a finalidade de avaliar os respectivos riscos de crédito de cada uma delas. Essa “nota de crédito” é chamada de classificação de risco ou, em inglês: “*credit rating note*”.

Existem diversas agências de “*rating*” espalhadas pelo mundo. Porém, três delas se destacam pela maior credibilidade. São elas: a Moody's, S&P (Standard & Poor's) e a Fitch. Estima-se que estas três agências detenham cerca de 95% do mercado global de análise de risco.



Figura 3.4.1 – Moody's, S&P e Fitch: as três principais agências de classificação de risco.

Para atribuir uma nota de risco as agências realizam análises técnicas quantitativas, como análise de balanço, fluxo de caixa e projeções estatísticas, análises de ambiente externo, questões jurídicas e percepções sobre o emissor e seus processos. Quanto melhor é a nota, mais seguro é investir nos papéis oferecidos por aquela empresa. Quanto menor é a nota, maior é o risco de enfrentar problemas para receber seu dinheiro e até há possibilidade extrema de calote.

A tabela a seguir mostra as notas de cada agência dentro de cada tipo de grau.

| Moody's | S&P     | Fitch          |   |
|---------|---------|----------------|---|
| Aaa     | AAA     | AAA            | Prime.  |
| Aa1     | AA+     | AA+            | Grau Elevado.   |
| Aa2     | AA      | AA             |   |
| Aa3     | AA-     | AA-            |   |
| A1      | A+      | A+             | Grau médio elevado.                                       |
| A2      | A       | A              |   |
| A3      | A-      | A-             |   |
| Baa1    | BBB+    | BBB+           | Grau médio baixo.   |
| Baa2    | BBB     | BBB            |   |
| Baa3    | BBB-    | BBB-           |   |
| Ba1     | BB+     | BB+            | Grau de não investimento (especulativo).                  |
| Ba3     | BB      | BB             |   |
| Ba3     | BB-     | BB-            |   |
| B1      | B+      | B+             | Altamente especulativo.                                   |
| B2      | B       | B              |   |
| B3      | B-      | B-             |   |
| Caa1    | CCC+    | CCC            | Risco substancial.  |
| Caa2    | CCC     |                | Extremamente especulativo.                                |
| Caa3    | CCC-    |                | Em moratória, com uma pequena expectativa de recuperação. |
| Ca      | CC<br>C |                |   |
| C       | D       | DDD<br>DD<br>D | Em moratória.   |

Figura 3.4.2 – Escala de “notas de crédito” ou, em inglês: “credit rating notes”.

### Alguns Comentários

Um investidor procura um CRI que o remunere, ao menos, a uma taxa de 120% do CDI. Vamos supor que duas empresas ofereçam o papel e que ambas as rentabilidades sejam iguais. Qual dos CRIs ele deve escolher? Nesse caso a resposta é simples: o investidor deve optar pelo crédito de menor risco de inadimplência. Dessa forma, basta comparar as duas notas de risco.

Agora vamos imaginar que a “Concessionária do Futuro” (CF) ofereça uma debênture incentivada, com vencimento em agosto de 2035, que remunere a uma taxa de IPCA + 4% a.a. Considere ainda que, na mesma plataforma de investimentos, a “Concessionária Sustentável” (CS) oferece o mesmo produto rendendo IPCA + 7% a.a. É óbvio que a empresa CS oferece a melhor rentabilidade, mas antes de tomar a decisão de onde investir, verifica-se que a nota de crédito desta última é pior que a da primeira. Ou seja, para receber uma remuneração maior, o investidor terá que correr um risco de crédito mais alto. Nada mais justo e razoável, concorda?

Empresas com maior nota de crédito, aquelas que apresentam menor risco ao investidor, sempre tentarão oferecer a menor taxa de juros possível até o ponto em que existam investidores interessados. Empresas menores, que oferecem maior risco, serão obrigadas a aumentar a remuneração oferecida para os investidores até o ponto que eles considerem que vale a pena correr o risco para receber taxas de juros maiores. Podemos dizer que corporações mais arriscadas premiam os investidores que aceitam correr riscos maiores através de taxas de juros mais elevadas. Por esse motivo é tão importante entender a lógica das tabelas de “*credit rating notes*” e sempre comparar o coeficiente risco-retorno entre duas opções de investimento.



### 3.5 - Renda Variável – Ações, ETFs e Fundos Imobiliários

#### 3.5.1 – Introdução

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [9]

Ativos de renda variável podem ser entendidos como aqueles que possuem retornos imprevisíveis. Nesta categoria, o investidor pode até estimar ou criar uma expectativa, mas nunca terá 100% de certeza de quanto seu ativo valerá no futuro, principalmente no curto prazo.

Na renda fixa, como nós já bem sabemos, ocorre justamente o oposto, pois os ativos possuem taxa de rentabilidade definida no momento da compra. Desta forma, o investidor consegue calcular exatamente o quanto o seu capital deverá render até a data do vencimento.

Quem compra um título de renda fixa “empresta” dinheiro para alguém (governos, bancos ou empresas) em troca de juros. Já quem decide investir em papéis de renda variável, em alguma medida entra no capital do emissor, direta ou indiretamente. É o que acontece com quem compra uma ação de empresa, por exemplo. A expectativa do investidor é de que a companhia apresente bons resultados e cresça, porque isso vai fazer o valor da ação aumentar.

Títulos de renda variável possuem uma característica intrínseca chamada volatilidade, que é uma medida de dispersão dos preços que uma ação ou índices de mercado sofrem. Quanto mais o preço de uma ação varia num período curto de tempo, maior é o risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando-a. Naturalmente, a volatilidade é uma medida de risco.

Cenários esperados podem não se concretizar, um negócio que hoje é lucrativo e bem visto, pode se tornar pouco apreciado pelo mercado em um curto espaço de tempo. Dessa forma, não é possível saber qual será a visão do mercado em relação a um determinado ativo. Se um investidor quer ter ganhos investindo em ações, é preciso aceitar os riscos de curto prazo.

#### A Parábola das Galés Mercantes – Parte 1 – Formação da Gales Mercantes S.A.

Perto do fim da era do bronze, os egípcios não eram um povo marítimo, e as civilizações grega e hebraica ainda não tinham se desenvolvido até o ponto em que poderiam fazer extensas viagens marítimas. Os fenícios, no entanto, já navegavam pelo Mar Mediterrâneo. Fizeram viagens fora do Estreito de Gibraltar, no Atlântico, e extensas viagens ao longo da costa da África.

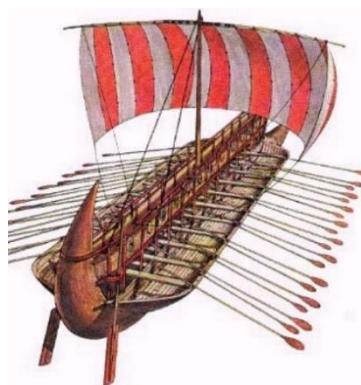


Figura 3.5.1 – Os fenícios realizavam comércio através das galés, veículos marítimos movidos a vela e remos.

Leia a história a seguir:

No auge da civilização fenícia (800 a.C.) o comércio de mercadorias como ouro, prata, marfim, madeira de cedro, produtos agrícolas e tecidos pigmentados rendiam muito ao rei da época. No entanto, sua frota de galés ainda era pequena para a enorme demanda de seu povo. As viagens mercantes levavam vários meses para chegar ao seu destino e depois voltar, fato que causava profundas crises de desabastecimento, como escassez de alimentos e matérias primas.

O monarca fenício necessitava urgentemente de ampliar sua frota de galés mercantes, mas naquele momento ele não dispunha de todos os recursos necessários para tal empreitada. Qual seria então a solução? O aflito rei decidiu pedir um empréstimo ao seu conselho de anciãos, já que se tratava de um grupo de exímios poupadores de ouro, prata e outros metais preciosos.

Ao analisar a proposta do rei soberano, os sábios anciãos ficaram muito preocupados com a ausência de garantias no empréstimo. Isso porque, se as galés construídas naufragassem, o rei perderia toda sua mercadoria e não teria como honrar o empréstimo feito com os anciãos. O líder dos conselheiros anciãos, homem mais sábio dentre eles, teve então uma brilhante ideia: ele propôs fazer uma espécie de sociedade com o rei, em que teriam participação nos lucros das viagens diretamente proporcional à quantia de ouro investida na aquisição das galés mercantes.

O rei ficou surpreso com a ideia, e então pensou muito sobre a proposta do líder ancião. Até que, algum tempo depois, acabou se convencendo de que se tratava de um negócio justo. Afinal, os juros do empréstimo que ele havia oferecido inicialmente ao conselho de anciãos não estavam à altura dos riscos envolvidos na perigosa operação das galés mercantes pelos mares. Resumindo, empréstimos com garantias de terras, joias ou bens em penhor pagam juros baixos. Em contrapartida, credores de empréstimos sem garantias pedem um “prêmio de risco” maior. Por esse motivo, exige-se uma remuneração maior, que se traduz em taxas de juros mais altas.

Uma vez formada a “Galés Mercantes S.A.”, o rei e seus conselheiros estão, literalmente, “dentro do mesmo barco” e arcarão com os prejuízos ou usufruirão dos lucros da operação.

Considere três cenários possíveis:

- A nova frota de galés mercantes cumpre com sucesso seu percurso, em tempo recorde, gerando assim altíssimos lucros aos seus respectivos sócios: o rei e seus conselheiros.
- Durante a volta, algumas galés se chocam e sofrem pequenos riscos em seus cascos. Para não correr o risco de naufragar, parte da carga de grãos teve de ser descartada ao mar. Mesmo sem dar prejuízo, a operação da frota de galés gerou um lucro bem abaixo do esperado.
- Durante a viagem de ida, uma das galés naufragou devido à uma forte tempestade. Muito ganancioso, sem querer decepcionar o rei e seus conselheiros, o capitão da frota ordenou aos marinheiros que sobrecarregassem todas as outras galés a fim de compensar a baixa sofrida. O resultado foi desastroso: pois na volta, muito mais pesadas, todas as galés sofreram grandes riscos em seus cascos ao passar por uma região de mar raso e cheio de pedras. Nenhuma galé conseguiu retornar ao porto de origem, algumas delas naufragaram e as restantes encalharam. Nesse cenário, os sócios sofreram um enorme prejuízo, perdendo todos os recursos investidos.

Uma Curiosidade:

Os estudos etimológicos da palavra “risco” sugerem que ela tenha origem do latim “*resecum*”, traduzindo: “o que corta”, utilizada para descrever situações relacionadas às viagens marinhas, como “perigo oculto no mar”. Exatamente como em nossa parábola, não é mesmo?

### 3.5.2 – O que são Ações?

Ações são títulos de renda variável emitidos pelas chamadas sociedades anônimas (SAs). Cada ação representa a menor fração do capital da empresa emitente. Uma ação está para uma sociedade anônima assim como uma cota está para uma empresa limitada (LTDA). Por exemplo, quando um grupo de empresários monta uma loja em um *shopping center*. Eles, normalmente, estruturam o negócio no formato de empresa dividida em cotas de responsabilidade limitada. Ou seja, cada empresário (sócio) detém um certo percentual, em cotas, do capital social da loja.

Um raciocínio similar se dá com as ações emitidas pelas sociedades anônimas (SAs). Quando um investidor decide comprar ações de uma empresa SA, ele se torna acionista desta, ou seja, passa a ser dono de uma fração da companhia, mesmo que esse pedaço seja pequeno. Note bem que um acionista não é um simples credor da companhia, mas sim um coproprietário, que possui direito à participação nos lucros e deveres legais em relação aos eventuais prejuízos.

Empresas em forma de sociedades anônimas (SAs) podem ter capital fechado ou aberto. Diz-se que uma empresa tem capital aberto quando suas ações são negociadas publicamente, todos os dias úteis, em uma bolsa de valores. Sediada em São Paulo, a B3 (Brasil Bolsa Balcão) é a bolsa de valores oficial do Brasil, sendo a quinta maior bolsa de mercado de capitais do mundo.

Conforme sua estrutura, o mercado acionário pode ser dividido em duas etapas:

- Mercado primário: é o momento em que uma empresa abre (aumenta) seu capital e passa a ser listada na bolsa de valores. Ou ainda quando ocorre uma subscrição, emissão de novas ações negociadas diretamente entre a companhia e os investidores. Os recursos aqui obtidos são destinados para os projetos de investimento da empresa ou para reforçar seu caixa.
- Mercado secundário: quando o detentor de ações de uma empresa deseja se desfazer de sua posição ele busca, no mercado secundário e por intermédio de uma corretora, outro investidor que deseje comprar suas ações. Essa transferência (negociação) de papéis entre investidores se dá no ambiente das bolsas de valores, todos os dias úteis, em horário comercial.

### A Parábola das Galés Mercantes – Parte 2 – Abertura do Capital Social e o Mercado Secundário

A primeira viagem das Galés Mercantes levou, entre a viagem de ida e de volta, aproximadamente doze meses. Os anciãos, sócios do rei, ficaram muito ansiosos nesse período. Após a partida das galés, apareceram novos interessados em participar dos negócios do rei, eram nobres que se encontravam sempre na praça do cais para conversarem sobre política, economia e compartilhar suas expectativas e preocupações com o futuro da civilização fenícia.

Conforme o tempo passava, alguns sócios do rei ficavam cada vez mais preocupados, alguns até desanimados. Outros, afetados por emergências, precisavam dos recursos investidos. Enfim, alguns se arrependeram tanto que queriam desistir, principalmente porque não tinham como reaver suas moedas de prata. Até que um deles fez uma oferta para comprar a participação do outro, negociando um valor justo por essa participação. E assim fecharam um acordo. Ou seja, o que queria entrar no negócio pagou para entrar e o que queria desistir recebeu para sair.

A negociação foi simples, pois cada sócio da Galés Mercantes S.A. portava um papel que lhe dava o direito de participação (ação) na empresa. Dessa forma, era só passar o papel para o que comprou a participação em troca da quantidade de moedas de prata entre eles acordada.

Existem dois tipos de ações em negociação no mercado:

- Ordinárias (ON): que conferem ao acionista o direito de voto em assembleias gerais.

Exemplo: GALE3. Ticker (código) das ações ordinárias de Galés Mercantes S.A.

- Preferenciais (PN): que possuem prioridade na distribuição de dividendos.

Exemplo: GALE4. Ticker (código) das ações preferenciais de Galés Mercantes S.A.

De acordo com a legislação brasileira das sociedades anônimas, uma empresa precisa emitir no mínimo 50% do seu capital social em ações ordinárias. Entretanto, na última década, com o aumento das exigências dos investidores e, voluntariamente, das boas práticas de governança corporativa, muitas corporações optaram por emitir apenas ações ordinárias (ON).

Já sabemos que ações são títulos de propriedade do capital social de uma empresa. Vejamos, a seguir, quais são os direitos e proventos que os portadores de ações possuem:

- Dividendos: quando a empresa gera lucro, parte é distribuída entre seus acionistas na forma de dividendos. O restante é utilizado para reinvestimentos e reforço das reservas (caixa).

A aprovação de distribuição de dividendos e as respectivas datas de pagamento são definidas em assembleias após divulgação dos demonstrativos financeiros trimestrais ou anuais.

- Bonificações na forma de ações: é o resultado do aumento de capital de uma empresa, mediante a incorporação de reservas financeiras ou lucros, ocasionando assim a distribuição gratuita e proporcional à quantidade que cada acionista detém de novas ações a seus acionistas.

Uma empresa pode, também, distribuir bonificações em dinheiro. Isso ocorre, excepcionalmente, quando a empresa concede aos acionistas participação adicional nos lucros.

- Juros sobre capital próprio: esse direito dos acionistas se baseia na reserva de lucros, não diretamente do referido período, mas sim de lucros referentes aos períodos anteriores e que ficaram retidos no caixa da empresa. O pagamento desse provento traz benefícios fiscais para a empresa que o distribui, pois pode ser classificado no balanço como despesa financeira.

- Desdobramento ou “*split*”: ocorre quando uma ação se divide em outras ações. Suponhamos, por exemplo, que o preço de uma ação Galés Mercantes (GALE3) seja de S\$ 30,00. Decide-se então fazer um *split* de um para cinco. Desta forma, a quantidade de ações (GALE3) em circulação é multiplicada por cinco, com novo preço de um quinto do valor original: S\$ 6,00.

Uma observação importante aqui é que o símbolo “S\$” foi utilizado de forma arbitrária como abreviação de “siclos de prata”, suposta unidade monetária padrão dos Fenícios antigos.

- Direitos de subscrição: quando ocorre emissão de novas ações, com a finalidade de aumento de capital, os acionistas da empresa têm preferência na aquisição dos novos papéis. Trata-se de uma forma de garantir a manutenção das proporções nas participações societárias.

No caso de não haver interesse por parte de um acionista em adquirir as novas ações, ele poderá vender a terceiros, em bolsa de valores, este direito oriundo exclusivo da subscrição.

- Grupamento ou “*inplit*”: é exatamente o contrário do que ocorre no *split*. Neste caso, há o agrupamento de uma quantidade de ações para formar uma nova ação, de maior valor. Assim como no *split*, o resultado financeiro de um *inplit* é nulo sobre o capital social da empresa.

### O Preço Justo das Ações

Calcular o preço justo de uma ação é uma tarefa muito subjetiva e às vezes até relativa. No mercado financeiro, existem diversas formas de se fazer esse cálculo. Confira algumas delas:

- Preço de livro: o método de cálculo é estabelecido pelo estatuto social da companhia, conforme os critérios de governança corporativa e das práticas contábeis da própria empresa.
- Valor patrimonial por ação: é simplesmente o valor total do patrimônio líquido da SA, ou seja: ativos subtraídos dos passivos, dividido pelo número de ações que a companhia possui.
- Preço intrínseco: estabelecido com base na análise fundamentalista, que considera, dentre vários itens, a saúde financeira atual da empresa e seu fluxo de caixa futuro descontado.
- Preço de liquidação: calculado em caso de encerramento das atividades da companhia.
- Preço de subscrição: definido quando há subscrições para aumento de capital social.
- Preço de mercado: é o valor pago pela ação por compradores no mercado secundário, que depende de uma série de fatores, dentre eles: a rentabilidade ou lucratividade da empresa, características do setor de atuação, qualidade da administração e fatores macroeconômicos. Além do fluxo de caixa futuro descontado e da oferta e demanda pelo papel nos últimos pregões.

### 3.5.3 – Análise de Ações

Para muitos investidores, a escolha de ações para compra e venda é uma arte. Entretanto, a profissionalização do mercado de ações não dá mais lugar para inexperientes. Trata-se de um mercado altamente qualificado, com profissionais bem preparados para atender às novas demandas. Veja a seguir técnicas como a de análise fundamentalista e a de múltiplos.

#### Análise Fundamentalista

As bases desse tipo de análise são os fundamentos da empresa que se deseja analisar. Em outras palavras, busca-se uma explicação para o preço intrínseco dos papéis recomendados nos fundamentos macroeconômicos e nos demonstrativos financeiros da respectiva companhia.

Uma análise fundamentalista contempla os seguintes itens sobre a empresa:

- Análise do impacto das variáveis macroeconômicas.
- Análise econômico-financeira e competitiva.
- Análise do fluxo de caixa.
- Análise evolutiva e prospectiva.
- Análise da gestão estratégica.
- Determinação do valor da empresa e do preço justo de suas ações.

Todas essas informações disponíveis culminam numa recomendação de comprar, vender ou manter as ações da empresa analisada. Pode-se ler, a seguir, um breve resumo de um relatório de análise fundamentalista da empresa fictícia que nós criamos, a Galés Mercantes S.A.

*Galés Mercantes S.A. (GALE3) – Setor: Logística de Transportes – Preço atual: S\$ 30,00.*

*As condições climáticas do Mar Mediterrâneo serão os principais direcionadores dos resultados da Galés Mercantes em 800 a.C. Neste relatório, realizamos previsões demonstrando que tempestades com ventos fortes e precipitações densas podem ocorrer durante as viagens. Além disso, ondas gigantes podem causar grandes inundações, invadindo dessa forma o cais de comunidades litorâneas parceiras. Nesse cenário bem adverso, ocorreria uma queda de 20,0% no volume total de mercadorias transportadas.*

*Entretanto, no longo prazo, a empresa segue como uma das melhores opções de investimento do setor de logística de transportes de todo o reino. Em nossa avaliação, reforçamos a recomendação de compra com preço justo de 42 siclos de prata. Ou seja, acreditamos em potencial de apreciação de 40%.*

Perceba que a análise fundamentalista está mais preocupada com o futuro da empresa do que com o passado. A decisão do analista de recomendar a compra da Galés Mercantes se baseou em projeções futuras de geração de caixa e na capacidade de reestruturação estratégica da empresa. Um analista que apenas considerasse os gráficos das cotações passadas não teria a oportunidade de vislumbrar a capacidade de recuperação da empresa, o que apenas uma análise criteriosa nos permite enxergar. A análise fundamentalista é muito utilizada atualmente.

#### Análise de Múltiplos

A análise de múltiplos envolve combinar uma série de dados sobre a empresa, de forma a analisar crescimento, margem, rentabilidade e criação de valor, bem como comparar seu desempenho com o restante do mercado. A análise fundamentalista já contempla algumas análises deste tipo. Dado que sua análise se baseia em dados econômico-financeiros da empresa, é comum, no mercado, considerar a análise de múltiplos como parte integrante da análise fundamentalista. Entretanto, os departamentos técnicos de bancos costumam emitir um relatório elaborado em planilha eletrônica, que separam as empresas por segmento econômico e as analisam com relação a diversos itens. Os principais múltiplos que merecem destaque são:

- **Cotação/VPA:** mede a relação entre preço de mercado da ação e seu valor patrimonial.
- **EBITDA:** indica o lucro obtido antes de juros, impostos, depreciação e amortização. Analisa a rentabilidade real do negócio, pois elimina efeitos das decisões contábeis e financeiras.
- **Cotação/Lucro por Ação (P/L):** é o resultado do preço de mercado da ação dividido pelo lucro líquido anual por ação. Esse índice indica o tempo que um investidor terá de esperar para obter retorno do investimento sob a forma de lucros, sem contar a valorização da ação. Por exemplo, se uma ação tem índice P/L igual a 12 significa que o prazo previsto para retorno do investimento é de 12 anos. Entretanto, é importante verificar se a empresa costuma distribuir esse lucro líquido sob a forma de dividendos. Se ela não distribuir, esse índice é apenas teórico.
- **Dividend Yield (DY):** está relacionado com os proventos gerados ao proprietário da ação com o pagamento de dividendos. Calcula-se esse múltiplo por meio da divisão da quantia total paga em dividendos por ação, nos últimos doze meses, pelo preço de mercado da ação. Quanto maior o *dividend yield*, maior será a política de distribuição de lucros de uma empresa. Mas é importante ter cautela, como o DY é o resultado de uma fração (razão), é preciso ter muito cuidado na hora de avaliar esse indicador. Como o preço de mercado da ação está no denominador, o *dividend yield* pode falsamente parecer alto se o preço do papel for muito baixo. O que na realidade pode estar se refletindo em algum tipo de problema estrutural da empresa.

## 3.5.4 – Índices do Mercado Acionário

Os índices do mercado acionário são indicadores que avaliam a performance do mercado durante um determinado período. O principal índice da bolsa de valores brasileira é o Ibovespa. Entretanto, há diversos outros. Cada um deles tem sua metodologia de cálculo e todos são formados por uma carteira teórica de ações, agrupada segundo algum critério específico. Muitos índices têm em sua composição, por exemplo, papéis de um setor econômico específico.

O Índice Bovespa (IBOV) é o mais importante indicador da variação média das cotações das principais ações brasileiras. Além de retratar o desempenho dos papéis mais líquidos e negociados na B3, o Ibovespa também é o índice mais tradicional no mercado de ações do país.

As empresas emissoras das ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa representam um total percentual relevante de todas as empresas com ações negociáveis na B3. Uma ação listada na B3 fará parte do IBOV se atender, cumulativamente, aos seguintes critérios:

- Estar entre os ativos elegíveis que, no período de vigência das três carteiras anteriores, em ordem decrescente de Índice de Negociabilidade (IN), representem em conjunto 85% do somatório total desses indicadores.
- Ter presença, em pregões, de 95% no período de vigência das três carteiras anteriores.
- Deve ter uma participação, em termos de volume financeiro, maior ou igual a 0,1%, no mercado à vista (lote-padrão) também no período de vigência das três carteiras anteriores.
- Não ser classificada “*penny stock*”, ou seja, sua cotação não pode ser inferior a R\$ 1,00.

Para manter sua representatividade ao longo do tempo, a carteira do Ibovespa é reavaliada ao final de cada quadrimestre, utilizando-se os critérios e procedimentos de sua metodologia. Assim, alterações necessárias são realizadas no início de janeiro, maio e setembro.

Conheça a carteira vigente do Ibovespa para o período de setembro até dezembro de 2020:

| Ticker | Ação      | %     | Ticker | Ação         | %    | Ticker | Ação        | %    | Ticker | Ação          | %    | Ticker | Ação      | %    | Ticker | Ação        | %    |       |             |      |
|--------|-----------|-------|--------|--------------|------|--------|-------------|------|--------|---------------|------|--------|-----------|------|--------|-------------|------|-------|-------------|------|
| VALE3  | VALE      | 11,12 | GNDI3  | INTERMEDICA  | 2,11 | LAME4  | LOJAS AME.  | 1,27 | CCRO3  | CCR SA        | 0,79 | BRAP4  | BRADSPAR  | 0,57 | BRML3  | BR MALLS    | 0,43 | CPFE3 | CPFL        | 0,29 |
| ITUB4  | ITAÚ      | 6,41  | RENT3  | LOCALIZA     | 2,01 | GGBR4  | GERDAU      | 1,22 | HAPV3  | HAPVIDA       | 0,79 | EGIE3  | ENGIE     | 0,57 | ELET6  | ELETRORAS   | 0,42 | EMBR3 | EMBRAER     | 0,28 |
| B3SA3  | B3        | 5,22  | SUZB3  | SUZANO       | 1,99 | EQTL3  | EQUATORIAL  | 1,18 | TOTS3  | TOTVS         | 0,73 | ENGI11 | ENERGISA  | 0,56 | CYRE3  | CYRELA      | 0,41 | PRI03 | PETRORIO    | 0,27 |
| PETR4  | PETROBRAS | 5,07  | NTCO3  | G. NATURA    | 1,90 | UGPA3  | ULTRAPAR    | 1,15 | HYPE3  | HYPERA        | 0,71 | COGN3  | COGNA     | 0,54 | GOAU4  | GERDAU M.   | 0,38 | CIEL3 | CIELO       | 0,23 |
| BBDC4  | BRADERSCO | 4,96  | LREN3  | L. RENNER    | 1,73 | BTOW3  | B2W DIGITAL | 1,04 | CSNA3  | SID. NACIONAL | 0,64 | IRBR3  | IRB RE    | 0,51 | TAE11  | TAESA       | 0,34 | EZTC3 | EZTEC       | 0,20 |
| PETR3  | PETROBRAS | 3,92  | JBSS3  | JBS          | 1,70 | VIVT4  | TELEFÔNICA  | 1,03 | SULA11 | SUL AMERICA   | 0,63 | QUAL3  | QUALICORP | 0,50 | MULT3  | MULTIPLAN   | 0,33 | BEEF3 | MINERVA     | 0,16 |
| MGLU3  | M. LUIZA  | 3,68  | VVAR3  | VIAVAREJO    | 1,69 | BPAC11 | BTGP BANCO  | 0,97 | SANB11 | SANTANDER     | 0,63 | CSAN3  | COSAN     | 0,48 | BRKM5  | BRASKEM     | 0,32 | IGTA3 | IGUATEMI    | 0,16 |
| ABEV3  | AMBEV     | 3,32  | RADL3  | RAIADROGASIL | 1,52 | BBSE3  | BB SEG.     | 0,91 | ELET3  | ELETRORAS     | 0,62 | FLRY3  | FLEURY    | 0,47 | MRVE3  | MRV         | 0,31 | GOLL4 | GOL         | 0,15 |
| WEGE3  | WEG       | 2,91  | RAIL3  | RUMO         | 1,36 | KLBN11 | KLABIN      | 0,87 | TIMS3  | TIM           | 0,61 | AZUL4  | AZUL      | 0,46 | MRF3   | MARFRIG     | 0,29 | CVCB3 | CVC BRASIL  | 0,13 |
| ITSA4  | ITAÚSA    | 2,37  | BBDC3  | BRADERSCO    | 1,35 | SBSP3  | SABESP      | 0,86 | PCAR3  | P. ACÚCAR     | 0,60 | YDUQ3  | YDUQS     | 0,46 | ENBR3  | ENERGIAS BR | 0,29 | HGTX3 | CIA HERING  | 0,13 |
| BBAS3  | B. BRASIL | 2,23  | BRDT3  | PETROBRAS BR | 1,31 | BRFS3  | BRF         | 0,80 | CMIG4  | CEMIG         | 0,58 | CRFB3  | CARREFOUR | 0,46 | USIM5  | USIMINAS    | 0,29 | ECOR3 | E. RODOVIAS | 0,11 |

Figura 3.5.2 – As carteiras teóricas de todos os índices da B3 podem ser obtidos em: ([www.b3.com.br](http://www.b3.com.br)).

### 3.5.5 – Características Técnicas do Mercado à Vista da B3

A B3 criou vários segmentos especiais de listagem das companhias, a saber: Bovespa Mais, Bovespa Mais Nível 2, Novo Mercado, Nível 2 e Nível 1. Todos os segmentos prezam por rígidas regras de governança corporativa. Essas regras vão além das obrigações que as companhias têm perante a Lei das Sociedades Anônimas, e têm como objetivo melhorar a avaliação das companhias que decidem aderir, voluntariamente, a um desses níveis de listagem.

Além disso, tais regras atraem os investidores ao lhe assegurarem direitos e garantias, bem como a divulgação de informações mais completas para controladores, gestores e todos os demais atuantes no mercado. Dessa maneira, os riscos são reduzidos para todos os envolvidos.

Código de Negociação: XXXXY

XXXX = 04 letras maiúsculas que representam o nome do emissor.

Y = 01 número que representa o tipo da ação. Adotando 3 para ordinária; 4 para preferencial e 5, 6, 7, 8 para preferenciais classes A, B, C e D, respectivamente.

Cotação Reais por Ação, com 02 casas decimais.

Prazo de liquidação D+2, a partir da data de negociação.

Lote padrão Determinado pelo emissor, sendo geralmente igual a 100.

No mercado fracionário é possível negociar quantidades inferiores ao lote padrão.

#### Vantagens do produto para as Empresas

- Uma empresa de capital aberto tende a ter um diferencial competitivo, tendo em vista a transparência e a confiabilidade necessárias nas suas informações fornecidas ao mercado. Fator este que facilita os negócios dela e atrai o consumidor final, gerando uma maior reputação.
- A abertura de capital pode solucionar diversos problemas jurídicos, como processos sucessórios, heranças e estratégias empresariais. Dessa forma, gera-se mais valor ao negócio.
- As companhias listadas nos segmentos diferenciados da B3 recebem um Selo de Governança Corporativa que é reconhecido internacionalmente, atraindo novos investidores.
- As ações negociadas podem integrar os índices da B3, os quais proporcionam às companhias maior visibilidade e aumento da demanda pelos seus papéis.

#### Vantagens do produto para os Investidores:

- Potencial de boa rentabilidade no longo prazo.
- Recebe dividendos periodicamente.
- Não precisa de muito dinheiro para investir.
- Pode comprar ou vender suas ações no momento em que desejar.



### 3.5.6 – O que são ETFs?

ETF é uma sigla que, na língua inglesa, significa literalmente: *Exchange Traded Funds*. Em tradução livre para o português, ETF significa simplesmente: fundos negociados em bolsa.

Quem decide ser cotista de um ETF consegue acompanhar o desempenho de um índice de referência. No Brasil, o índice mais conhecido é o Ibovespa, formado por uma “carteira teórica” das ações com maior volume de negociação na bolsa brasileira (B3) nos últimos meses.

Um ETF nacional muito conhecido é o BOVA11, que busca refletir a performance, antes das taxas e despesas, do Ibovespa. O fundo, criado em 2008 pela gestora Black Rock Brasil, tem o BNP Paribas como administrador. Compare, a seguir, o desempenho do BOVA11 e Ibovespa:



Figura 3.5.3 – Índice Bovespa, em vermelho, e fundo (ETF) BOVA11, em azul, quase perfeitamente correlacionados.

Assim como as ações, ETFs também são investimentos em renda variável. Dessa forma, não é possível saber antecipadamente quanto um investidor receberá pelas suas cotas quando desejar vendê-las. Tudo dependerá das condições macroeconômicas futuras do mercado local.

Além disso, é importante saber que alguns ETFs possuem ações que pagam dividendos, isto é, ações que distribuem uma parte dos lucros da referida empresa para os acionistas. Normalmente, os dividendos pagos aos ETFs não são repassados diretamente aos seus cotistas. O capital é reinvestido em mais ações, com o objetivo de aumentar o patrimônio total do fundo.

#### Taxa de Administração dos ETFs

É cobrada anualmente e depende da administradora do fundo e do próprio ETF. Normalmente, o valor cobrado varia entre 0,20% a 0,80% do valor total dos aportes investidos. Um fato interessante é que as taxas de administração dos ETFs costumam ser mais baixas comparadas às taxas cobradas pelos Fundos de Investimento em Ações (FIAs). Esse fenômeno ocorre porque ETFs tem gestão passiva, ou seja, simplesmente replicam um índice de referência. A equipe gestora de um FIA cobra taxas maiores, pois eles têm a missão de “bater o mercado” no longo prazo fazendo análise fundamentalista das ações que farão parte da carteira do fundo.

### As Principais Vantagens e Desvantagens dos ETFs

- **Baixo custo:** como o ETF é um fundo composto por vários ativos, um investidor paga menos taxas do que se fosse investir em cada ação que está presente do fundo separadamente.
- **Praticidade:** não é preciso escolher um ativo por vez na montagem de uma carteira. Ao escolher um ETF o investidor compra uma “cesta” de ativos, que replicará o índice escolhido.
- **Diversificação:** é uma excelente opção para diversificar uma carteira de investimentos. Ao comprar cotas de ETFs e adicioná-las a outros ativos dilui-se os riscos como a alta volatilidade.
- **Transparência:** nunca se deve adquirir um fundo sem saber os ativos que o compõem. Um ETF permite que se acompanhe os detalhes do rendimento do índice de mercado escolhido.
- **Tributação:** uma característica muito importante do ETF se diz respeito à tributação. Ao vender um ETF na B3, o investidor deve pagar Imposto de Renda de 15% sobre o lucro obtido.
- **Liquidez:** investir em ETFs no Brasil ainda não é uma prática muito comum. Por isso, uma parte considerável desses fundos apresentam pouco volume de negociações no mercado. Essa falta de liquidez deve ser levada em consideração como uma desvantagem, pois pode trazer dificuldades na hora de um investidor encontrar interessados em comprar ou vender suas cotas.

### Alguns Comentários

Para entender melhor como funcionam os ETFs, considere a seguinte e simples analogia:

O senhor Pedro, dono de uma pizzaria, faz compras todas as manhãs na feira da cidade. Dentre vários insumos, destacam-se as laranjas, já que ele serve várias jarras de suco por noite. Considere que, para garantir todos os pedidos, dez dúzias da fruta são necessárias diariamente.

Dessa forma, o pizzaiolo Pedro tem duas opções de compra, ambas de mesmo preço:

- Escolher a granel, uma a uma, das cento e vinte laranjas que ele precisa levar.
- Comprar um saco fechado, de 20 kg cada, que contém cerca de 134 laranjas.

Neste exemplo, considere que cada laranja tenha massa aproximada de 150 g.

Parece bem razoável que ele deva optar pelo pacote de 20 kg de laranjas. Não é mesmo? Ainda que algumas delas não estejam boas e sejam eventualmente descartadas ou inutilizadas. Afinal, é muito mais prático (e rápido) levar uma única embalagem do que escolher uma a uma.

O mesmo fenômeno ocorre quando um investidor iniciante deseja adquirir suas ações. Ao invés de analisar e escolher uma a uma, investe-se através de ETFs, num índice de referência.



Figura 3.5.4 – Comprar cotas de um ETF (cesta de ações) é tão prático como adquirir um saco de laranjas.

### 3.5.7 – O que são Fundos Imobiliários?

Por várias gerações, investir em imóveis sempre foi uma opção que algumas famílias buscaram com o objetivo de proteger e aumentar seu patrimônio. Porém, o valor integral de um imóvel costuma ser muito alto, o que afasta a maioria das pessoas desse tipo de investimento. Além de tudo, o processo de aquisição é muito demorado e envolve um alto nível de burocracia.

Entretanto, existe uma alternativa ao método tradicional de se investir em imóveis, são os chamados Fundos de Investimentos Imobiliários, também conhecidos pela sigla FIIs, que são “condomínios” (grupos) de pessoas que têm por objetivo comum investir em ativos imobiliários.

Para “inaugurar” um FII, a instituição financeira responsável apresenta um documento ao mercado contendo as políticas de investimentos, as regulamentações e suas diretrizes gerais. Passada a fase inicial, o FII realiza sua oferta primária:

- As cotas do fundo, de número limitado e definitivo, são emitidas e lançadas no mercado pela primeira vez.
- Quem tem interesse, pode comprar a quantidade de cotas desejadas e se juntar aos primeiros cotistas do fundo.
- Com o capital arrecadado, o gestor do fundo começa a adquirir os ativos imobiliários, de acordo com as políticas de investimentos propostas inicialmente.

Após a abertura de capital, o fundo imobiliário passa então a ser identificado por um código (também chamado de *ticker*), e pode finalmente ter suas cotas negociadas diariamente na Bolsa de Valores (B3), da mesma forma que acontece com as ações das empresas listadas.

#### Tipos de Fundos Imobiliários

Existem diversos tipos de fundos imobiliários no mercado, cada um deles com a sua própria estrutura, características particulares, estratégias de atuação e carteira diversificada.

Porém, é possível classificar os FIIS em duas grandes modalidades:

- Fundos de Tijolo

São fundos focados majoritariamente em empreendimentos físicos. A política desses fundos é investir na aquisição, construção ou aluguéis de imóveis comerciais, como: shopping centers, hospitais, faculdades, prédios comerciais, agências bancárias, centros de distribuição, galpões logísticos e armazéns. O objetivo de um fundo de tijolo é encontrar pessoas ou empresas interessadas em utilizar os imóveis adquiridos. Em troca, o fundo recebe uma renda mensal de aluguel para ser distribuída a seus cotistas.

- Fundos de Papel

Um fundo de papel tem como estratégia principal investir em títulos financeiros vinculados ao mercado imobiliário, tais como: LCIs, CRIs e outros títulos de recebíveis imobiliários. Os gestores também podem adquirir cotas de outros fundos imobiliários, dentre outras possibilidades. O lucro do fundo vem dos juros e dividendos pagos por esses títulos, ou pela venda deles. Desta maneira, um fundo de papel possibilita uma boa rentabilidade, mas sem se expor o cotista aos mesmos riscos dos fundos de tijolo.

### A Rentabilidade dos Fundos Imobiliários

FIIs são ativos de renda variável. Logo, ganhos de capital podem ocorrer de duas formas:

- Valorização das Cotas

O preço unitário da cota de um FII pode se valorizar com o tempo, seja pelo aumento do valor patrimonial do fundo ou pela variação natural devido às negociações diárias no mercado secundário. Com isso, aqueles investidores que entraram na oferta primária podem lucrar vendendo suas cotas por um preço superior ao que foi comprado.

- Distribuição dos Lucros do Fundo

Por se tratar de um investimento imobiliário, todo FII tem uma renda mensal, advinda principalmente do aluguel de seus imóveis. Depois de apurado o lucro líquido que o FII teve, os gestores são obrigados a distribuir pelo menos 95% desse rendimento aos seus cotistas, de forma proporcional à quantidade de cotas que cada um deles possui.

### Riscos de investir em FIIs

Como todo investimento, um fundo imobiliário também possui uma série de riscos.

- Risco de Mercado

Por serem negociados em bolsa, os fundos imobiliários estão constantemente sujeitos ao risco de desvalorização do mercado. Fatores como a situação geral da economia, mudanças na demanda por imóveis e variações na taxa básica de juros (Selic) podem derrubar o preço das cotas de um FII e assim prejudicar o investimento realizado.

- Risco de Liquidez

Mesmo com o mercado de FIIs em crescente expansão no país, a quantidade de investidores participantes ainda é muito pequena, afetando assim a liquidez dos ativos. Isso pode tirar a liberdade de quem investe de entrar e sair de um fundo quando quiser. Afinal, ainda é comum encontrar fundos que ficam dias sem negociar uma cota sequer.

- Risco de Vacância

Não é possível garantir que todos os imóveis da carteira do FII serão alugados. Ou seja, caso haja dificuldade para encontrar locatários, a receita com os aluguéis será parcialmente comprometida, afetando diretamente o rendimento pago aos cotistas.

- Risco de Inadimplência

Também existe a possibilidade de o locatário não pagar suas obrigações com o locador, isto é, deixar de pagar o aluguel. Nesse caso, além da receita com os aluguéis diminuir, a inadimplência poderá gerar um custo jurídico extra aos cotistas do fundo.

A possibilidade de acessar os melhores ativos do mercado imobiliário brasileiro, contando com a segurança de gestores profissionais, é um dos grandes atrativos dos Fundos de Investimento Imobiliários. Mas assim como todas as modalidades de investimento, os FIIs também possuem uma série de riscos e particularidades que devem ser previamente analisados.

### 3.6 - Fundos de Investimentos Multimercado e Previdência Privada

#### 3.6.1 - Fundos de Investimentos Multimercados

Fundos de Investimentos Multimercados (FIMs) são a categoria de fundos de investimentos mais procurada pelos investidores iniciantes ou aqueles que não possuem tempo de acompanhar as movimentações dos diversos mercados. Ao invés de fazer a gestão de seus próprios recursos financeiros, quem investe em FIMs delega tal tarefa a gestores profissionais.

Portanto, um Fundo de Investimento Multimercado (FIM) é administrado e gerido por um grupo de especialistas que operam em diferentes modalidades de investimento. A escolha dos ativos e seus respectivos pesos na carteira varia de acordo com o perfil de risco dos cotistas.

#### A Estrutura de um Fundo Multimercado

FIMs possuem quatro entidades, confira as responsabilidades de cada uma delas:

- **Administradora:** é a empresa que cuida dos acontecimentos do cotidiano do fundo. Portanto, é ela quem acompanha o fluxo de caixa do fundo e defende os direitos dos cotistas.
- **Equipe Gestora:** são os responsáveis pelas decisões de compras e vendas dos ativos. Ela decide em quais ações ou títulos deve-se investir. Muitas vezes, há também um comitê gestor que toma essas decisões. Trata-se de um grupo especializado em economia e finanças.
- **Custodiante:** na maioria das vezes, é uma instituição do setor financeiro, contratada para guardar os ativos do fundo. Além de guardá-los em segurança, o custodiante também tem a responsabilidade de confirmar a compra ou venda dos ativos que a equipe gestora escolheu.
- **Distribuidor:** é a entidade que se relaciona com quem investe no fundo. É para ele que você poderá perguntar sobre os próximos passos do fundo, seus rendimentos e outras dúvidas.

#### Estratégias de um Fundo Multimercado

Como FIMs tem mandato para investir em diversos mercados, torna-se fundamental conhecer algumas das abordagens que eles utilizam. Confira, a seguir, as principais delas:

- **Estratégia Macro:** realizam operações em diversas classes de ativos. Investem em renda fixa, renda variável, câmbio, *commodities* e outros ativos. Consideram sempre o cenário macroeconômico global, portanto, suas teses de investimento são de médio a longo prazo.
- **Estratégia Juros e Moedas:** fundos com essa conduta são conhecidos por operar com moedas estrangeiras, como o dólar e o euro. Eles lidam ainda com taxas de juros e índices de preços, como IPCA e taxa Selic. Nesse caso, os gestores não podem aplicar em renda variável.
- **Investimento no Exterior:** envolve todos os fundos que mantêm a maioria de seu patrimônio alocado em ativos no exterior, como estratégias macro de ações e títulos soberanos.
- **Quantitativo:** são fundos cuja estratégia é baseada em algoritmos desenvolvidos pela equipe gestora. Tendem a ser descorrelacionados das demais estratégias dos FIMs disponíveis.

### Riscos de um Fundo Multimercado

Um cotista de FIM precisa ter uma completa noção sobre os riscos envolvidos nessa modalidade e saber como gerenciá-los da melhor forma em sua carteira de investimentos:

- **Risco de Liquidez:** se um investidor opta por fundo com liquidez diária, significa que os recursos financeiros solicitados no momento do resgate estarão disponíveis no mesmo dia útil. Um FIM possui baixa liquidez quando o dinheiro dos cotistas fica "retido" durante um período. Portanto, antes de investir, deve-se ler cuidadosamente o prospecto e o regulamento do fundo.

- **Risco de Mercado:** esse é um dos riscos mais imprevisíveis, porque muda de acordo com inúmeros fatores. Ele está relacionado com as oscilações diárias (volatilidade) do mercado e as variáveis que o influenciam: como a inflação, a taxa de juros e a política monetária do Bacen.

- **Risco de Crédito:** em termos resumidos, trata-se da chance do fundo "quebrar" por má administração dos recursos financeiros por parte dos gestores. Um longo período de baixa performance pode causar uma corrida por resgates, provocando assim a insolvência do fundo.

### Taxas de um Fundo Multimercado

É preciso ter muita atenção aqui. Afinal, se as taxas forem muito altas e o fundo obtiver um desempenho abaixo do esperado, os rendimentos dos cotistas podem ser comprometidos.

- **Taxa de administração:** é cobrada para remunerar as instituições responsáveis pela gestão ativa, distribuição e administração do fundo. Ela incide sobre o valor total investido (capital + rendimentos). Essa taxa é expressa numa porcentagem acordada, ao ano. Porém, ela é cobrada de forma proporcional e incide a cada seis meses ou quando o cliente faz um resgate.

- **Taxa de performance:** é uma particularidade dos FIMs. Não é cobrada sempre, mas apenas quando o rendimento do FIM supera algum índice de referência do mercado financeiro.

- **Taxa de saída:** como sugere o nome, a taxa de saída é cobrada no momento de resgatar suas cotas. Geralmente é cobrada quando existe um prazo pré-estabelecido para o resgate dos recursos financeiros aplicados no fundo. Por exemplo: devido a algum imprevisto, você não pode esperar todo o tempo contratado. Ao solicitar o resgate antecipado, tal taxa será cobrada.

### Tributações (IOF e IR) de um Fundo Multimercado

O Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) incide, na fonte, sobre os rendimentos de resgates realizados num período inferior a trinta dias da data da aplicação. Ou seja, se você solicitou resgate num período inferior a um mês, deverá pagá-lo de acordo com tabela a seguir:

Tabela 3.6.1 - Alíquotas de Imposto sobre Operações Financeiras (IOF).

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
| 96% | 93% | 90% | 86% | 83% | 80% | 76% | 73% | 70% | 66% | 63% | 60% | 56% | 53% | 50% |
| 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  |
| 46% | 43% | 40% | 36% | 33% | 30% | 26% | 23% | 20% | 16% | 13% | 10% | 6%  | 3%  | 0%  |

Resgates no "curtíssimo" prazo consomem praticamente toda a rentabilidade do cotista.

O Imposto de Renda (IR) dos FIMs é cobrado em alíquotas, um percentual que incide sobre os rendimentos obtidos pelo cotista. Isso significa que o investidor não paga o IR sobre o valor total que foi aplicado, mas somente sobre os lucros que obteve a partir do investimento.

Tabela 3.6.2 – Quanto maior o período, menor será a alíquota de IR paga pelo cotista.

| Prazo da Aplicação | Alíquota de IR |
|--------------------|----------------|
| Até 180 dias       | 22,5%          |
| De 181 a 360 dias  | 20%            |
| De 361 a 720 dias  | 17,5%          |
| Acima de 720 dias  | 15%            |

### Alguns Comentários

No Brasil, as equipes gestoras de FIMs geralmente são remuneradas quando a performance do fundo supera o CDI, taxa de juros paga pelos fundos bancários de liquidez diária.

Assim, um investidor que decide aplicar seus recursos financeiros em um FIM espera que a gestão ativa deste lhe entregue um retorno consistente, acima do CDI, no longo prazo. Nada mais justo para ambas as partes, afinal gestores são especialistas em macroeconomia e, naturalmente, suas teses de investimento tendem a “ganhar do mercado” ao longo do tempo.

Observe a figura a seguir, trata-se da performance, nos últimos 24 meses, de três fundos macro do mercado brasileiro. Vamos chamá-los apenas de FIM “verde”, “laranja” e “turquesa”.

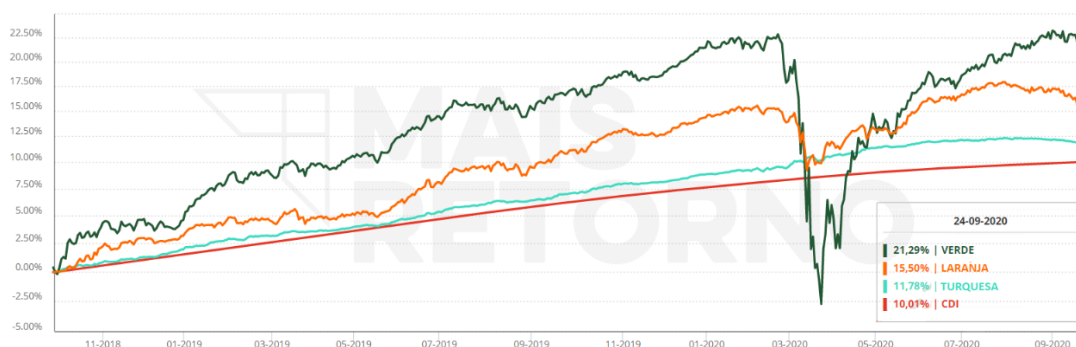


Figura 3.6.1 – Performance de três FIMs (categoria macro) nos últimos 24 meses. Fonte: <https://maisretorno.com>

Apesar dos três serem caracterizados FIMs Macro, cada um possui o seu nível de risco, que está associado à volatilidade (dispersão dos retornos de curto prazo) observados no gráfico. Os gestores do fundo “verde”, que escolheram correr maior risco investindo boa parte do capital em renda variável, esperam também obter um maior retorno (prêmio de risco) no longo prazo.

E foi exatamente o que ocorreu, num intervalo de exatos dois anos, o fundo “verde” obteve rentabilidade líquida de taxas de 21,29%, muito acima do CDI e dos outros dois fundos. Entretanto, em março de 2020, no auge da crise do coronavírus, o fundo “verde” teve uma queda súbita devido ao fechamento das economias e consequente quedas das bolsas mundiais.

Um investidor de perfil “conservador” ou “moderado”, que não suporta ver seu patrimônio diminuir devido às oscilações negativas de curto prazo, não deveria ser cotista do fundo “verde”. Apenas os considerados de perfil “agressivo” devem optar pelo respectivo fundo. Naturalmente, pelo gráfico, conclui-se que o FIM “turquesa” é adequado ao cotista poupador, de perfil “conservador” e o FIM “laranja”, de risco intermediário, àquele de perfil “moderado”.

### 3.6.2 – Planos de Previdência Privada

Os planos de previdência privada são uma espécie de “seguro” para a aposentadoria, complementar ao INSS. Neles, as instituições financeiras atuam na gestão dos recursos aportados pelo cliente (segurado) para que, no futuro, ele obtenha uma renda passiva vitalícia.

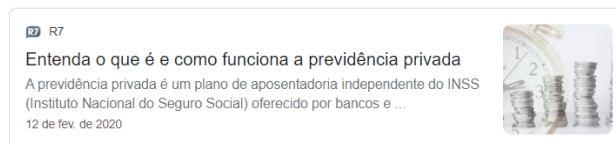


Figura 3.6.2 – Um trabalhador pode completar sua previdência através de um plano privado.

Existem dois tipos de planos de previdência:

- Planos Abertos: são aqueles vendidos pelas instituições financeiras, que podem ser adquiridos por qualquer pessoa. A previdência aberta precisa seguir as regras estabelecidas pela Susep (Superintendência de Seguros Privados), órgão responsável pela fiscalização dos planos.
- Planos Fechados: são também conhecidos, popularmente, como “fundos de pensão”. São criados por empresas, ou outras entidades, exclusivamente para atender seus funcionários. Nessa modalidade de plano de previdência muda também o órgão responsável pela fiscalização, que nesse caso é a chamada Previc (Superintendência Nacional de Previdência Complementar).

#### Tipos de Previdência Privada

Existem dois tipos de planos de previdência privada: o VGBL (Vida Gerador de Benefício Livre) e o PGBL (Plano Gerador de Benefício Livre). Basicamente, o que influencia na escolha de um tipo ou de outro é a maneira como o contratante faz sua declaração de Imposto de Renda.

Um plano PGBL é indicado para quem entrega a declaração do Imposto de Renda no modelo completo, aproveitando benefícios fiscais. Isso porque, quem contrata um PGBL, pode deduzir os aportes realizados no plano de sua renda bruta tributável. O limite é de 12% ao ano. Uma desvantagem do PGBL é que, na hora de realizar um resgate, a alíquota do Imposto de Renda incidirá sobre o valor total (saldo principal das contribuições mais rendimentos obtidos).

Um plano do tipo VGBL não inclui o benefício fiscal proporcionado por um plano PGBL. Desse modo, é indicado preferencialmente para quem faz a declaração de IR no modelo simples.

Para quem faz a declaração no modelo completo, um plano do tipo VGBL só faz sentido caso o investidor queira aplicar mais do que 12% da sua renda no plano de previdência privada. Esse fenômeno só ocorre porque, de acordo com a legislação vigente, contribuições feitas acima desse limite não podem ser mais deduzidas da base de cálculo do Imposto de Renda do cliente.

A vantagem do VGBL é que, no momento do resgate, o Imposto de Renda incide apenas sobre os rendimentos. E não sobre o valor principal das contribuições, como no caso do PGBL.

Até o final desta seção mais detalhes sobre tributação serão apresentados, dentre eles, as alíquotas de Imposto de Renda e as diferenças entre a tabela progressiva e regressiva de IR.



### Modalidades de Fundos de Pensão

Enquanto planos de previdência abertos são classificados em dois tipos: PGBL ou VGBL, os fundos de pensão são agrupados de acordo com as exatas três modalidades descritas a seguir:

- **Benefício Definido (BD):** o valor do benefício complementar que será recebido pelo investidor é estabelecido já no momento da adesão, calculado com base em fórmulas previstas no contrato e regulamento do plano. Por conta disso, para fazer frente ao que foi prometido para o futuro, o valor das contribuições realizadas durante o período de acumulação pode variar.

Novos planos de benefício definido são muito raros atualmente. Dentre suas principais características, destaca-se a responsabilidade coletiva dos participantes. Dito de outra maneira, se o fundo registrar um déficit, por exemplo, todos deverão desembolsar recursos para cobri-lo.

- **Contribuição Definida (CD):** o valor do benefício futuro será definido quando começa a ser pago ao participante, dependendo do saldo acumulado pelo cotista ao longo do tempo. Esse saldo depende das contribuições e também da rentabilidade dos investimentos realizados.

Nos planos de contribuição definida, os aportes mensais são sempre constantes, mas não há uma certeza quanto ao valor do benefício. Por não se comprometer a pagar um valor determinado no futuro, não há o conceito de déficit (nem de superávit) nos planos desse tipo.

- **Contribuição Variável (CV):** mesclam características dos BD e dos CD. Ou seja, podem ter como base as contas individuais (assim como os planos de contribuição definida) e ao mesmo tempo, no usufruto, oferecerem uma renda vitalícia (típica dos planos de benefício definido).

Uma das principais vantagens dos fundos de previdência é exatamente o longo prazo. Em geral, esses investimentos são feitos para resgates em dez, vinte ou até trinta anos à frente. Com isso, a volatilidade momentânea de algumas aplicações pode ser diluída no decorrer de muito tempo.

### Tributação

Em um plano de previdência privada, um investidor sempre pagará Imposto de Renda quando resgatar seus recursos financeiros. O IR incide tanto se ele optar por sacar todo o montante de uma vez, quanto se preferir receber um benefício mensal ao longo dos anos. Existem dois regimes diferentes de tributação e ambos devem ser cuidadosamente analisados, de acordo com as características do cliente, antes de se decidir por um plano de previdência.

- **Tabela Progressiva:** segue as mesmas regras aplicadas ao IR de salários, por exemplo. Há uma lista de alíquotas que aumentam, progressivamente, de acordo com o valor recebido. Assim, se o cotista optar por receber renda mensal do plano de R\$ 2.000, pagará uma alíquota menor do que aquela aplicada caso ele escolha ter uma renda mensal de R\$ 5.000, por exemplo.

As alíquotas variam de 0% (isento de IR) até 27,5% e são definidas com base na renda total do investidor, incluindo, além do benefício do plano de previdência, outras fontes como: aposentadoria do INSS, ganhos de aluguel de imóveis, dentre outras fontes de renda tributáveis.

- **Tabela Regressiva:** tem como objetivo estimular que as contribuições sejam mantidas e resgatadas apenas no longo prazo. Isso ocorre porque a alíquota de Imposto de Renda diminui, regressivamente, na medida que o montante permanece sob custódia do fundo de previdência.

A tabela regressiva pode parecer a melhor opção sempre, já que a alíquota de IR pode chegar a apenas 10%. Mas é necessário fazer uma avaliação criteriosa. Se, por alguma razão, for necessário resgatar o capital muito cedo, o regime progressivo certamente será mais vantajoso.

Outro detalhe é que a definição da alíquota ocorre aporte por aporte. Alguns deles podem ter já dez anos quando o investidor decide resgatar o dinheiro, mas outros talvez sejam mais recentes. É justamente sobre os aportes mais “jovens” que a tributação é mais pesada.

Tabela 3.6.3 - Confira as Alíquotas da Tabela Regressiva de IR.

| Período decorrido do aporte | Alíquota de IR |
|-----------------------------|----------------|
| Até 2 anos                  | 35%            |
| de 2 a 4 anos               | 30%            |
| de 4 a 6 anos               | 25%            |
| de 6 a 8 anos               | 20%            |
| de 8 a 10 anos              | 15%            |
| Mais de 10 anos             | 10%            |

#### Modalidades de Saque e Resgate Antecipado

Existem três maneiras de se receber recursos financeiros de uma previdência privada. Ao contratar um plano, o cliente faz sua primeira escolha, mas tem a possibilidade de alterá-la antes do final do período de acumulação. As três formas são:

- **Recebimento integral:** o investidor escolhe sacar todo o saldo acumulado de uma vez.
- **Recebimento mensal temporário:** o investidor tem a opção de receber uma pensão mensal, de valor pré-definido, por um período de tempo estabelecido no momento do contrato.
- **Recebimento mensal vitalício:** o investidor recebe um valor fixo a partir de uma certa data, que continua sendo pago até a sua morte. Na prática, trata-se de um tipo de seguro social.

Existem alguns aspectos que devem ser considerados e que variam bastante de plano para plano. No caso da renda vitalícia, é preciso verificar qual é o procedimento contratado caso o investidor venha a falecer prematuramente. Também há planos flexíveis, que permitem fazer um resgate maior no início e transformar em renda passiva apenas o saldo que sobrar no fundo.

Outro detalhe: existe a possibilidade de o investidor resgatar seu dinheiro antes do fim do período de contribuição. Porém, a regulação prevê algumas regras e penalidades para isso.

O saque total dos recursos, por exemplo, só pode ser feito depois de cumprido um prazo de carência, que deve ser de no mínimo 60 dias e no máximo dois anos a partir da contratação. Já os saques parciais precisam respeitar um intervalo que pode durar de 60 dias até seis meses.

#### Portabilidade entre Planos de Previdência

Se um investidor estiver insatisfeito com seu plano de previdência, ele pode tomar a decisão de migrar os recursos para outro plano, sem ter de resgatá-los, nem pagar IR e tarifas. A portabilidade entre planos de previdência pode ser interna (planos de uma mesma instituição) ou externa (de uma instituição para outra). Trata-se de uma boa alternativa caso as taxas cobradas por um plano sejam muito altas, causando insatisfação com a rentabilidade do fundo.

### 3.7 - Reservas de Valor – Taxa de Câmbio e Metais Preciosos

#### 3.7.1 - Taxa de Câmbio

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [8]

Uma taxa de câmbio nada mais é do que o preço de uma moeda em relação a outra moeda. Comumente, utiliza-se a nomenclatura ABCXYZ para indicar o par de moedas observado, em que ABC é a moeda de base e XYZ é a moeda de contagem. No Brasil, a taxa de câmbio mais observada é a USDBRL, ou seja, a taxa de câmbio entre o dólar norte-americano e o real brasileiro. Essa taxa indica a quantidade de reais necessária para se comprar um dólar. Assim, por exemplo, se USDBRL = 5,50, isso significa que são necessárias cinco unidades e meia de real (a moeda de contagem) para se obter uma unidade de dólar (a moeda de base).

Em outras palavras, cada dólar vale cinco reais e cinquenta centavos, neste exemplo.

#### Gráfico Forex do USDBRL



Figura 3.7.1 – Gráfico USDBRL de agosto de 2020. Fonte: <https://br.tradingview.com/symbols/USDBRL/>

#### Alguns Comentários

Dentro de um portfólio completo e diversificado de investimentos, é indispensável a presença de moedas estrangeiras fortes, que são aceitas como reserva de valor no mundo todo. Quem se expõe ao dólar norte-americano, por exemplo, utiliza tal estratégia para se proteger de compromissos futuros, tais como: dívidas no cartão de crédito, custos de uma viagem internacional ou ainda há quem faça um “*hedge*” (proteção) contra ativos de alto risco agregado.

Investir em fundos cambiais é uma das formas de se ter exposição à variação do dólar. Nesta modalidade, a rentabilidade da operação é bem próxima à variação da cotação do dólar, já que os ativos na carteira do fundo possuem relação direta com a moeda norte-americana. Como se trata de um fundo, o investidor deve apenas adquirir cotas em sua corretora de valores.

Outra alternativa de compra e venda de dólar são as chamadas casas de câmbio. Entretanto, a existência de um “*spread*” (diferença entre os preços de venda e compra) cobrado das pessoas torna a compra direta de moeda estrangeira uma estratégia muito menos eficiente. Isso porque, a casa que vende o dólar cobra, na venda, um preço maior do que pagou na compra.

### 3.7.2 – Metais Preciosos

Investir em metais preciosos é uma prática muito comum e popular no mundo todo. Ouro e prata, por exemplo, são tidos como ativos que mantêm seu valor em épocas de crise. Basta olhar para a história recente e perceber que, de tempos em tempos, problemas monetários como hiperinflação e desvalorização das moedas fiduciárias sempre ocorrem. Portanto, é fundamental que um investidor saiba como proteger seu patrimônio no longo prazo.

#### Uma Breve Revisão Histórica

Nós já sabemos que o investimento em metais preciosos remonta a milhares de anos. Na prática, o ouro e a prata sempre foram tratados e aceitos como dinheiro propriamente dito. E só recentemente que estes dois foram substituídos por papel e outros metais menos nobres.

As notas de dólar emitidas pelo governo dos Estados Unidos, e mais tarde pelo FED, inicialmente eram legítimos certificados de ouro. Um cidadão norte-americano poderia trocar, num banco qualquer do país, suas cédulas pelo equivalente em metal quando bem entendesse.

Esse sistema durou até 1971, quando o governo americano literalmente fraudou o resto do mundo, emitindo mais moeda do que havia de ouro físico armazenado. Richard Nixon, então presidente dos Estados Unidos, suspendeu unilateralmente a conversibilidade direta do dólar em ouro. A partir daí, todas as moedas emitidas no mundo passaram a não possuir lastro algum.

É até curioso pensarmos que, hoje em dia, as pessoas dão tanto valor a um pedaço de papel colorido com números impressos da mesma forma que davam ao sal na Roma Antiga e às conchas do mar na época indígena norte-americana. Historicamente, moedas correntes sempre foram meios de troca baseados nas crenças, valores e princípios de uma determinada sociedade.

#### Definição de Reserva de Valor

Dinheiro propriamente dito não é apenas um meio de troca, mas uma reserva de valor. Desta forma, não podemos dizer que o real ou dólar possam ser considerados dinheiro de fato, são apenas moedas correntes. Para ser dinheiro é preciso preencher os seguintes pré-requisitos:

- Ser durável.
- Ser divisível.
- Ser conveniente.
- Ser consistente.
- Possuir valor intrínseco.
- Possuir quantidade limitada, em outras palavras, deve ser escasso.
- Deve ter uma longa história de aceitação pela sociedade.

Dadas todas essas condições, atualmente, apenas os metais preciosos (ouro e prata) preenchem todos esses requisitos. Veja a seguir o porquê:

**Durável:** todo o ouro já extraído na história continua existindo até hoje. Ele não sofre oxidação em contato com a água ou ar, portanto não perde suas propriedades com o tempo.

**Divisível:** é possível fundir e dividir uma certa quantidade de ouro em partes menores, de mesmas características. Geralmente constroem-se moedas ou lingotes (barras) de ouro.

**Conveniente:** uma pequena peça de ouro armazena bastante valor. Seu portador pode guardá-la ou carregá-la sem ocupar grandes espaços de um imóvel ou veículo de transporte.

**Consistente:** ouro é mundialmente aceito e reconhecido como reserva de valor, independente do país ou região. Além disso, trata-se de um metal facilmente reconhecível.

**Valor intrínseco:** possui características físico-químicas especiais e únicas que o torna um dos mais nobres metais. É brilhante, denso e não reage com a maioria dos produtos químicos.

**Quantidade limitada:** é um metal muito raro, que não pode (até o momento) ser criado em laboratório. Ou seja, ouro deve necessariamente ser minerado, extraído da natureza.

**História de aceitação:** a descoberta arqueológica mais antiga do uso do ouro como joia data de 4.500 a 4.200 anos antes de Cristo. E pasmem, elas foram encontradas quase intactas.



Figura 3.7.2 – Ouro e prata atuam como reserva de valor há muito tempo.

### Investir em Ouro é uma Proteção Financeira?

Como bem sabemos, a moeda corrente de um país perde seu valor ao longo do tempo, 1 real hoje vale menos que há dez anos. Um pão francês, que custava 10 centavos, hoje sai por 80 centavos. Ele continua sendo feito sob a mesma forma, com uso dos mesmos ingredientes e possui também o mesmo peso. O que ocorreu foi apenas o dinheiro que passou a valer menos.

Já sabemos que esse fenômeno ocorre devido à inflação, que nada mais é do que a impressão contínua de dinheiro pelo Banco Central e consequente aumento da base monetária. Quanto mais moeda disponível em circulação, menos ela valerá. Com isso, há naturalmente um aumento do valor relativo dos preços, inclusive dos metais preciosos. No longo prazo, ouro e prata sempre se valorizarão em relação às moedas correntes, seguindo a tendência de inflação.

Em cenários de maior incerteza e estresse dos mercados globais, metais preciosos exercem ainda um importante papel de proteção do portfólio dos investidores, já que geralmente possuem uma correlação inversa com os preços das ações. Ou seja, quando as ações no mundo todo sofrem uma forte queda, há uma tendência natural de alta valorização do ouro.

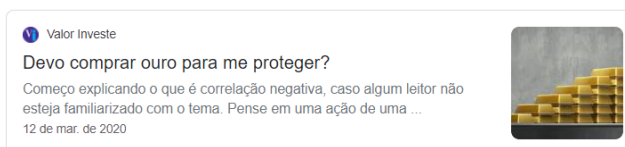


Figura 3.7.3 – A dúvida sobre ter ou não ouro no portfólio é muito comum entre os investidores.

### Como Investir em Ouro?

Existem várias possibilidades, uma delas é adquirir contratos futuros de compra de ouro, papéis negociados diariamente nas bolsas de valores, que permitem ao seu portador retirar fisicamente barras do metal em uma data pré-estabelecida. Cada contrato corresponde a um lote de ouro com grau de pureza de 99,9%. Ou seja, são 999 partes de ouro puro para cada 1.000 partes da barra de metal adquirida.

Também é possível comprar ouro 999 através de serviços oferecidos por algumas empresas especializadas em mineração e refino de metais preciosos. Nesse caso as barras permanecem armazenadas em cofres, o que torna sua liquidez (compra e venda) mais restrita.



Figura 3.7.4 – Pequenas frações do metal tornam a compra de ouro físico muito acessível.

Outra maneira de comprar barras e moedas de ouro e prata seria adquiri-las diretamente das casas da moeda de diversos países que ainda as cunham em diversos tamanhos. As moedas mais populares são a *American Eagle*, cunhada pela *United States Mint* (Casa da Moeda dos EUA) e a *Maple Leaf*, cunhada pela Casa Real da Moeda do Canadá. Veja-as a seguir:



Figura 3.7.5 – *American Eagle* e *Maple Leaf*, uma onça troy equivale a cerca de 31,1 g.

Como essas entidades estão no exterior, geralmente os brasileiros que desejam adquirir tais produtos necessitam viajar pra fora do país, já que compras pelos correios sofrem o risco de extravio e ainda podem ser taxadas na alfândega, o que inviabiliza a compra como investimento.

Por último, algumas corretoras oferecem fundos de ouro, em que os cotistas ficam expostos ao preço do metal devido à negociação de contratos futuros pelos gestores do fundo. A vantagem dessa modalidade é que a tributação é retida na fonte, de acordo com tabela regressiva, fato este que simplifica a declaração de Imposto de Renda dos cotistas contribuintes.

### Alguns Comentários

O hábito de adquirir metais preciosos é muito praticado e difundido no mundo todo, entretanto, no Brasil ainda não é muito divulgado. Talvez por falta de conhecimento, ou mesmo pela ausência de um número significativo de empresas atuando nesse mercado. No momento em que escrevo esta dissertação, estímulos monetários se espalham pelo mundo, e a crise financeira causada pelo coronavírus atinge em cheio nosso país. Investir em ouro e prata é uma maneira de se proteger da desvalorização da moeda corrente, causada pela inflação monetária. Tais ativos devem atuar como forma de diversificação dentro de um portfólio de investimentos.

### 3.8 – Tecnologia *Blockchain*, o Bitcoin e as Criptomoedas

#### 3.8.1 – Introdução

Esta seção foi elaborada a partir da seguinte referência bibliográfica: [10]

A recente invenção da tecnologia *blockchain*, e com ela a possibilidade de se utilizar criptomoedas, é algo tão inovador e revolucionário que pode ser comparado ao surgimento da escrita. Sabe-se que os sumérios começaram a escrever para contar o dinheiro, e como vemos até os dias de hoje, a escrita é usada para muitos outros fins além das anotações matemáticas.

De maneira muito simplificada, a tecnologia *blockchain* é uma espécie de banco de dados em que as negociações de criptomoedas ficam gravadas. Todavia, essa tecnologia não se resume somente à compra e venda de criptomoedas, possuindo muitas outras aplicações.

#### 3.8.2 – A Origem do Bitcoin

O Bitcoin é uma moeda digital peer-to-peer (par a par), de código aberto, que não depende de uma autoridade central. Dentre muitas características, o que faz o Bitcoin ser único é o fato dele ser o primeiro sistema de pagamentos global totalmente descentralizado.

Antes da invenção do Bitcoin, em 2008, pelo programador não identificado e conhecido apenas pelo pseudônimo de Satoshi Nakamoto, as transações financeiras online sempre requereram um terceiro intermediário de confiança.

Por exemplo, se Maria quisesse enviar 100 reais ao João por meio da internet, ela teria que depender de serviços de terceiros como as empresas PayPal e Mastercard, por exemplo. Intermediários como o PayPal mantêm um registro dos saldos em conta dos clientes. Quando Maria envia 100 reais ao João, o PayPal debita a quantia de sua conta, creditando-a na de João.

Sem tais intermediários, uma quantia de dinheiro digital poderia ser gasta duas vezes. Imagine que não haja intermediários com registros históricos, e que o dinheiro digital seja simplesmente um arquivo de computador, da mesma forma que documentos digitais os são. Maria poderia enviar 100 reais ao João simplesmente anexando um arquivo em uma mensagem. E como bem sabemos, enviar um arquivo como anexo não o remove do computador de origem. Maria teria a cópia do arquivo após tê-lo enviado anexado. Dessa forma, ela poderia facilmente enviar os mesmos 100 reais ao Marcos. Em ciência da computação, isso é conhecido como o problema do “gasto duplo”, e, até o advento do Bitcoin, essa questão só poderia ser solucionada por meio de um terceiro ente de confiança que empregasse um registro histórico de transações.

A invenção do Bitcoin é revolucionária porque, pela primeira vez, o problema do gasto duplo em transações financeiras pode ser resolvido sem a necessidade de um terceiro agente. Todas as transações financeiras que ocorrem na rede peer-to-peer do Bitcoin são registradas e disponíveis a todos os usuários do sistema em uma espécie de livro-razão público e distribuído chamado de *blockchain*, do inglês: corrente de blocos, ou simplesmente um registro público de transações, que nada mais é do que um grande banco de dados público, contendo o histórico de todas as transações nele realizadas. Novas transações financeiras são verificadas contra o *blockchain* de modo a assegurar que os mesmos bitcoins não tenham sido previamente gastos, eliminando assim o problema do gasto duplo.

A rede global peer-to-peer, composta de milhares de usuários, torna-se o próprio intermediário; Maria e João podem transacionar sem o PayPal. É importante notar que as transações na rede Bitcoin NÃO são denominadas em dólares, euros ou reais, como são no PayPal ou Mastercard. Em vez disso, são denominadas em bitcoins.

Isso torna o sistema Bitcoin não apenas uma rede de pagamentos descentralizada, mas também uma moeda virtual, cujo valor não deriva do ouro ou de qualquer outro metal precioso, nem de algum decreto governamental, mas do valor e confiança que as pessoas lhe atribuem.

### 3.8.2 – Sobre a Funcionamento do Bitcoin

As transações são verificadas, e o gasto duplo é prevenido, por meio de um uso inteligente da criptografia de chave pública. Tal mecanismo exige que a cada usuário sejam atribuídas duas “chaves”, uma privada, que é mantida em segredo, como uma senha, e outra pública, que pode ser compartilhada com todos.

Quando a Maria decide transferir bitcoins ao João, ela cria uma mensagem, chamada de “transação”, que contém a chave pública do João, assinando com sua chave privada. Olhando a chave pública da Maria, qualquer um pode verificar que a transação foi de fato assinada com sua chave privada, sendo uma troca autêntica, e que João é o novo proprietário dos fundos.

A transação financeira, uma transferência de propriedade das bitcoins, é registrada, carimbada com data e hora e exposta em um “bloco” do blockchain (o grande banco de dados, ou livro-razão da rede Bitcoin). A criptografia de chave pública garante que todos os computadores na rede tenham um registro constantemente atualizado e verificado de todas as transações dentro da rede Bitcoin, o que impede o gasto duplo e qualquer tipo de fraude.

Mas o que significa dizermos que “a rede” verifica as transações e as reconcilia com o registro público? E como exatamente são criados e introduzidos novos bitcoins na oferta monetária? Como vimos, porque o Bitcoin é uma rede peer-to-peer, não há uma autoridade central encarregada nem de criar unidades monetárias nem de verificar as transações.

Essa rede depende dos usuários que proveem a força computacional para realizar os registros e as reconciliações das transações. Esses usuários são chamados de “mineradores”, porque são recompensados pelo seu trabalho com bitcoins recém-criados. Bitcoins são criados, ou “minerados”, à medida que milhares de computadores dispersos resolvem problemas matemáticos complexos que verificam as transações no blockchain.

A real mineração de bitcoins é puramente um processo matemático. Uma analogia útil é a procura por números primos: costumava ser relativamente fácil achar os menores deles (Eratóstenes, na Grécia Antiga, produziu o primeiro algoritmo para encontrá-los). Mas à medida que mais e mais números primos eram encontrados, ficava cada vez mais difícil de encontrar os próximos, cada vez maiores. Hoje em dia, pesquisadores usam supercomputadores avançados de alto desempenho para encontrá-los, e suas façanhas são observadas pela comunidade matemática (por exemplo, a Universidade do Tennessee mantém uma lista dos 5.000 maiores).

No caso do Bitcoin, a busca não é por números primos, mas por encontrar a sequência de dados (chamada de “bloco”) que produz certo padrão quando o algoritmo “hash” do Bitcoin é aplicado aos dados. Quando uma combinação ocorre, o minerador obtém um prêmio em bitcoins. O tamanho do prêmio é reduzido ao passo que mais bitcoins são minerados.



A dificuldade da busca também aumenta, fazendo com que seja computacionalmente mais difícil encontrar uma combinação. Esses dois efeitos combinados acabam por reduzir ao longo do tempo a taxa com que bitcoins são produzidos, imitando a taxa de produção de uma commodity como o ouro. Em um momento futuro, novos bitcoins não serão mais produzidos, e o único incentivo aos mineradores serão as taxas de serviços pela verificação de transações.

O protocolo, portanto, foi projetado de tal forma que cada minerador contribui com a força de processamento de seu computador visando à sustentação da infraestrutura necessária para manter e autenticar a rede da moeda digital. Mineradores são premiados com bitcoins recém-criados por contribuir com força de processamento para manter a rede e por verificar as transações no *blockchain*. E à medida que mais capacidade computacional é dedicada à mineração, o protocolo incrementa a dificuldade do problema matemático, assegurando que bitcoins sejam sempre minerados a uma taxa previsível e limitada. Esse processo de mineração de bitcoins não continuará indefinidamente.

O Bitcoin foi projetado de modo a reproduzir a extração de ouro ou outro metal precioso da Terra, somente um número limitado e previamente conhecido de bitcoins poderá ser minerado. A quantidade arbitrária escolhida como limite foi de 21 milhões de bitcoins. Estima-se que os mineradores colherão o último “satoshi”, ou 0,00000001 de uma bitcoin, no ano de 2140. Se a potência de mineração total escalar a um nível bastante elevado, a dificuldade de minerar bitcoins aumentará tanto que encontrar o último “satoshi” será uma empreitada digital consideravelmente desafiadora.

### 3.8.1 - Outras Criptomoedas

Atualmente existem milhares de criptomoedas disponíveis e negociadas na internet. Entretanto, a maioria delas (especialmente as menores) provavelmente acabarão sem valor. Novas criptomoedas são criadas a todo momento, portanto trata-se de um mercado em expansão, que apesar de ter mais de dez anos de idade, ainda é considerado muito recente. Vários bilionários pelo mundo acreditam que a tecnologia *blockchain* será a nova grande revolução tecnológica que viveremos.

O Bitcoin é a principal criptomoeda do mercado, responsável por quase 60% da capitalização total de mercado. As 20 maiores criptomoedas alternativas (altcoins) juntas, representam cerca de 35% da capitalização. O restante (aproximadamente 5980 criptomoedas) somadas são responsáveis por cerca de 5% da capitalização total.

#### Principais criptomoedas

|   | Nome            | Código | Preço (USD) | Capitalização |
|---|-----------------|--------|-------------|---------------|
|  | <b>Bitcoin</b>  | BTC    | 10.728,0    | \$198,68B     |
|  | <b>Ethereum</b> | ETH    | 359,91      | \$40,56B      |
|  | <b>Tether</b>   | USDT   | 1,0010      | \$14,92B      |
|  | <b>Ripple</b>   | XRP    | 0,23865     | \$10,77B      |

Figura 3.8.1 – O Bitcoin é atualmente a maior rede blockchain por capitalização de mercado.

O Bitcoin, ou qualquer uma dessas criptomoedas, ainda são considerados ativos muito especulativos. Isso porque os preços variam muito, tornando-os bem arriscados no curto prazo.

### 3.8.1 – Outras Aplicações da Tecnologia Blockchain

A tecnologia *blockchain* sempre esteve diretamente ligada ao Bitcoin e às criptomoedas. Mas apesar desse forte vínculo existente, não significa que tudo vá continuar assim para sempre.

Muitos especialistas acreditam que essa tecnologia pode ser a peça-chave para uma nova forma de armazenar e acessar informações. Quando pensamos em uma nova proposta de compartilhamento e validação de informações, as possibilidades podem ser inúmeras. A visão é que a criação de redes de informação descentralizadas pode transformar por completo a forma com que os negócios serão feitos daqui para frente.

Se hoje consideramos a internet como a forma mais eficiente de compartilhar informação com pessoas do mundo todo, em questão de segundos, a *blockchain* pode oferecer uma nova proposta. No sistema financeiro, por exemplo, já estamos vendo a *blockchain* mudando o panorama das transações de moeda. A expectativa é que essa tecnologia ajude os programadores a simplificar os sistemas operacionais, possibilitando o desenvolvimento de um ambiente mais leve, seguro e livre de fraudes.

Nós não necessariamente precisamos nos ater às transações que envolvem dinheiro e ativos financeiros. Acredita-se ser possível utilizar essa nova tecnologia para arquivar e compartilhar outras coisas, como música, arte, votos e diversos documentos, por exemplo.

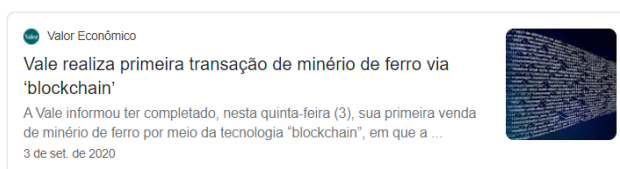


Figura 3.8.2 – Em setembro de 2020, a mineradora Vale realizou sua primeira transação via *blockchain*.

Além da praticidade e da segurança, a tecnologia *blockchain* oferece outra vantagem: dispensar intermediários.

Num futuro próximo, há chances de podermos compartilhar dados ou fazer compras diretamente de pessoas do mundo todo, sem ter que pagar tarifas para empresas, lojas ou bancos. Com isso, abre-se um leque de possibilidades em que a *blockchain* pode ser usada.

Por exemplo:

- Créditos de carbono.
- Prontuários médicos.
- Históricos escolares.
- Diplomas.
- Documentos de identificação, como passaporte.
- Registros de automóveis.
- Registros de imóveis.

Os entusiastas acreditam que utilizando essa tecnologia será possível catalogar, rastrear, certificar e autenticar informações e objetos de valor de uma forma totalmente nova.

### 3.9 - Pagamentos Instantâneos e o PIX do Banco Central

#### 3.9.1 – Pagamentos Instantâneos

Pagamentos instantâneos são as transferências monetárias eletrônicas na qual a transmissão da ordem de pagamento e a disponibilidade de fundos para o usuário recebedor ocorre em tempo real e cujo serviço está disponível durante 24 horas por dia, sete dias por semana e em todos os dias no ano. As transferências ocorrem diretamente da conta do usuário pagador para a conta do usuário recebedor, sem a necessidade de intermediários, o que propicia custos de transação menores.

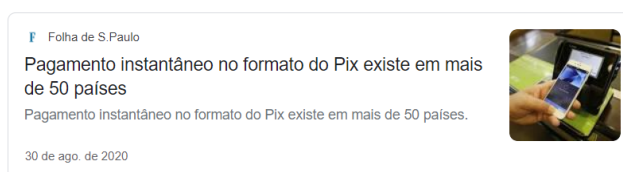


Figura 3.9.1 – Cerca de 50 países têm ou planejam ter meios de pagamento instantâneo.

#### Alguns Comentários

Computadores conectados à internet estão presentes em nossas vidas desde os últimos anos do século XX. O mundo pode então se comunicar de forma rápida e razoavelmente segura. No início do século XXI, os primeiros protótipos de *smartphones* foram revelados ao mercado. Esses aparelhos são a evolução dos telefones comuns e trazem tecnologias que vão muito além de fazer ligações e enviar mensagens de texto. O sistema operacional de um *smartphone* disponibiliza aplicativos avançados de jogos em alta definição, além de músicas, filmes e livros. Eles também possuem integração com as redes sociais, tais como Facebook, Twitter e Instagram. Atualmente, mais de cinco bilhões de pessoas já possuem o seu próprio smartphone.

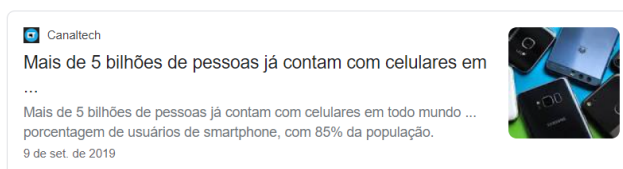


Figura 3.9.2 – Cerca de 85% da população mundial já possui o seu próprio smartphone.

Dentre esses aplicativos, existem aqueles que permitem ao usuário acesso e gerenciamento de contas bancárias, plataformas de investimentos e pagamentos eletrônicos. Além de todos esses recursos, existe ainda a possibilidade de “parear” dois ou mais aplicativos com a finalidade de efetuar pagamentos instantâneos, tais como: compras no varejo on-line, em supermercados, de ingressos de cinema e até pagar o motorista de aplicativo que o transportou.

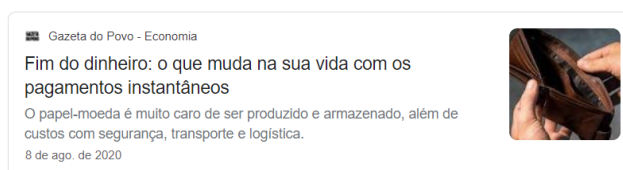


Figura 3.9.3 – Pagamentos instantâneos substituem o uso do dinheiro físico.

### 3.9.2 – PIX do Banco Central

No Brasil, o pagamento instantâneo oficial se chama Pix, marca única, criada pelo Banco Central, lançada em coletiva à imprensa em fevereiro de 2020.



Figura 3.9.4 – Logomarca do Pix, do Bacen.

O Pix está disponível para a população brasileira desde novembro de 2020. Além de aumentar a velocidade em que pagamentos ou transferências são feitos e recebidos, tem o potencial de alavancar a competitividade e a eficiência do mercado: baixar o custo, aumentar a segurança e aprimorar a experiência dos clientes, além de promover a inclusão financeira e preencher uma série de lacunas existentes na cesta de instrumentos de pagamentos disponíveis atualmente à população.

Em linha com a revolução tecnológica em curso, o Pix possibilita a inovação e o surgimento de novos modelos de negócio e a redução do custo social relacionada ao uso de instrumentos monetários baseados em papel. Os pagamentos instantâneos estão sendo desenhados com diversos objetivos, dentre eles o de aprimorar a experiência de pagamento dos usuários, tanto pagadores quanto recebedores.

Do ponto de vista dos usuários pagadores, o objetivo é construir soluções que permitam que a realização de um pagamento instantâneo seja tão fácil, simples, intuitivo e rápido quanto realizar um pagamento com dinheiro em espécie. Para tanto, os pagadores poderão iniciar pagamentos por pelo menos três formas diferentes:

- Por meio da utilização de chaves ou apelidos para a identificação da conta transacional, como o número do telefone celular, o CPF, o CNPJ ou um endereço de e-mail;
- Por meio de QR Code.



Figura 3.9.5 – O smartphone lê o QR Code e o pagamento é processado de forma instantânea.

- Por meio de tecnologias que permitam a troca de informações por aproximação.



Figura 3.9.6 – Transporte poderá ser pago apenas aproximando um smartphone ao terminal.

A utilização de chaves ou apelidos facilitará o processo de iniciação do pagamento comparativamente ao modelo existente hoje para a TED e para o DOC, em que é necessária a inserção de diversos dados do usuário receptor, como o CPF ou o CNPJ, a identificação da instituição na qual o receptor possui uma conta, o número da agência, o tipo da conta e o número da conta.

Alternativamente, o pagamento poderá ser iniciado a partir da leitura de um QR Code apresentado pelo usuário receptor. O padrão de QR Code será estabelecido com o objetivo de permitir que sua leitura seja realizada a partir de qualquer tipo de smartphone, inclusive os mais simples. No futuro, os pagamentos também poderão ser iniciados a partir da leitura, pelo usuário receptor, de QR Code gerado pelo próprio usuário pagador.

Do ponto de vista dos usuários receptores, espera-se que a diminuição do número de intermediários na cadeia de pagamentos leve a um custo de aceitação menor do que os demais meios eletrônicos. Além do menor custo, a disponibilização imediata dos recursos otimizará a gestão do fluxo de caixa dos usuários receptores, o que tenderá a reduzir sua necessidade de crédito. Outro benefício será a facilidade de automatização e de conciliação dos pagamentos. As informações agregadas, que cursarão junto com a ordem de pagamento, permitirão o desenvolvimento de soluções tecnológicas que integrem os sistemas dos usuários receptores, notadamente empresas, automatizando, facilitando e dando mais agilidade aos processos.

### Alguns Comentários

A economia brasileira possui características muito incomuns. Isso porque, dentre a população economicamente ativa, existem muitas pessoas que são pequenos empreendedores. Essas pessoas atuam no mercado informal como comerciantes ou profissionais liberais em geral. Muitas delas sequer possuem conta bancária, o que as tornam praticamente “invisíveis” aos olhos do Governo Federal e suas autarquias. Dessa forma, qualquer tipo de política de assistência social direcionada a esses trabalhadores se torna de difícil implementação e controle.

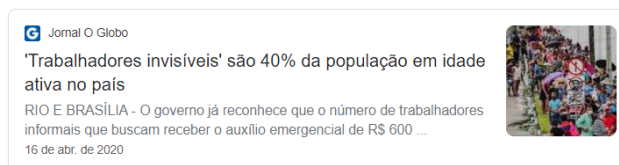


Figura 3.9.7 – Em abril de 2020, descobriu-se que 40% da população ativa do país atuava no mercado informal.

No entanto, sabe-se que pipoqueiros, costureiras, manicures, dentre várias outras ocupações informais, possuem quase todos um aparelho smartphone. Com a introdução do Pix, em novembro de 2020, esses profissionais tem maior facilidade em pagar seus fornecedores e também em receber de seus clientes. O uso do dinheiro físico se tornará dispensável, tornando assim mais práticas, baratas e seguras as transações financeiras. Será o fim da impossibilidade de devolver troco exato, do recebimento de notas falsas e do medo de portar grandes quantias.

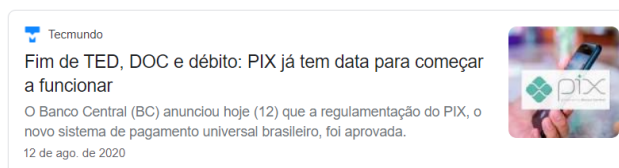


Figura 3.9.8 – O Pix substituirá serviços bancários como TED, DOC e a modalidade débito.

#### 4 – Considerações Finais

Como visto no início desta dissertação, a versão mais recente da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) explicita a obrigatoriedade da introdução de elementos de Matemática Financeira no Ensino Médio. Entretanto, como professor da rede pública, sei o quanto é difícil desenvolver e aprofundar tais habilidades com os estudantes no curto período regular de aulas. E foi justamente para resolver essa questão que o Governo do Estado de São Paulo lançou o programa Inova Educação: com oferecimento de disciplinas eletivas, de duração semestral e conectadas diretamente ao projeto de vida escolhido por cada aluno da rede estadual de ensino.

Alunos do Ensino Médio são adolescentes que possuem de 16 até 18 anos de idade, alguns deles inclusive participam de programas como o Aprendiz Legal, que recruta jovens para a preparação e inserção no mundo do trabalho. Outros ainda atuam como Micro Empreendedor Individual (MEI), exercendo pequenas atividades comerciais ou prestação de serviços diversos. Ou seja, é exatamente neste contexto que surge a necessidade de saber lidar com os recursos financeiros. É nessa importante fase da vida que os jovens passam a receber seus primeiros fluxos de caixa (salários). Portanto eles precisam saber tomar decisões importantes, tais como:

- Quanto reservar para emergências a fim de cobrir despesas financeiras inesperadas?
- Que parte da renda será destinada para investimentos previdenciários de longo prazo?
- Do que sobrou dessa renda, qual será o critério adotado para os gastos pessoais? (alimentação, moradia, saúde, educação, vestuário, higiene pessoal, transporte, viagens e lazer)
- Será preciso tomar crédito para investir em projetos? Qual seria melhor alternativa?

Veja o quão complexas e desafiadoras são cada uma destas decisões que os jovens têm de tomar pela primeira vez em suas vidas. Ainda mais em tempos difíceis como o atual momento em que vivemos: um país que atravessa um período de pandemia e grave recessão econômica. Neste contexto, destaca-se a importância de introduzir e trabalhar as chamadas competências socioemocionais. Dentre todas elas, destacam-se: a empatia, responsabilidade, autoestima, criatividade, comunicação, autonomia, felicidade, paciência, sociabilidade, ética e organização.

Segundo dados de junho de 2020, a Confederação Nacional do Comércio de Bens Serviços e Turismo (CNC) afirma que uma em cada quatro famílias brasileiras está inadimplente, ou seja, com dívidas ou contas em atraso. Este dado alarmante só corrobora com a ideia de que conhecimentos sobre orçamento e educação financeira são indispensáveis aos nossos cidadãos. É muito triste saber que milhões de famílias de classe média pagam, muitas vezes sem o devido consentimento, altas taxas de juros como aquelas praticadas pelos cartões de crédito, cheques especiais e outras modalidades de crédito pessoal que podem chegar até absurdos 300% ao ano. Nessas condições, é impossível que um indivíduo atinja uma vida financeira estável e próspera.

Espera-se que a presente dissertação, cujo produto final é um plano de eletiva que aborda Matemática Financeira no Ensino Médio sirva, em primeiro lugar, de motivação inicial para diversas práticas escolares dos alunos da rede pública de ensino do Estado de São Paulo. Em especial àqueles que demonstram interesse e aptidão pela área de finanças e contabilidade, por exemplo. Por último, mas não menos importante, as atividades aqui propostas configuram subsídio pedagógico para os educadores que lecionarão Matemática Financeira, seja por meio do Ensino Médio Regular ou componentes curriculares no âmbito do Programa Inova Educação.

## Referências

- [1] VENDITE, L. L. Matemática Financeira e a Utilização de Planilhas Eletrônicas. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2017. v. 1.
- [2] CARVALHO, P. C. P; MORGADO, A. C. Matemática Discreta. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).
- [3] Ministério da Educação. Governo Federal do Brasil. BNCC (Base Nacional Comum Curricular). 2017
- [4] Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Currículo Paulista. 2019
- [5] LIMA, E. L. ; CARVALHO P. C. P; WAGNER E; MORGADO A. C. A Matemática do Ensino Médio 3. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. v.2.
- [6] GONÇALVES, C. B. Casa da Moeda do Brasil, 290 anos de história, 1694/1984. Rio de Janeiro: Editora Imprinta. 1984
- [7] PITON-GONÇALVES, J. A História da Matemática Comercial e Financeira. 2. Ed. 2005
- [8] ANBIMA, Fundamentos de Economia e Finanças, Educação Continuada, 01/03/2017.
- [9] ANBIMA, O Mercado Financeiro de A à Z, Educação Continuada, 01/03/2017.
- [10] ULRICH, F. L. Bitcoin a Moeda na Era Digital 1. ed. Editora Instituto Ludwig Von Mises Brasil, 2017.