UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ELIAS JORGE BECHARA SOARES JUNIOR

ENSAIOS DE BERNOULLI E A GENÉTICA: uma sequência didática propositiva para o ensino de Matemática

CASTANHAL – PA
2021

ELIAS JORGE BECHARA SOARES JUNIOR

ENSAIOS DE BERNOULLI E A GENÉTICA: uma sequência didática propositiva para o ensino de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Roberta Modesto Braga.

CASTANHAL – PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S676e Soares, Elias.
ENSAIOS DE BERNOULLI E A GENÉTICA: uma sequência didática propositiva para o ensino de Matemática /Elias Soares. — 2021.
77 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Roberta Braga
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021.

1. Probabilidade de Jacob Bernoulli em Genética. I. Título.

CDD 519.2

ELIAS JORGE BECHARA SOARES JUNIOR

ENSAIOS DE BERNOULLI E A GENÉTICA: uma sequência didática propositiva para o ensino de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Roberta Modesto Braga.

Data de avaliação: 26/03/2021

____

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga - Orientadora
Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal

____

Profa. Dra. Kátia Liége Nunes Gonçalves – Examinadora Externa
Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal

____

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida – Examinador Interno
Universidade Federa do Pará – Campus Castanhal

____

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva – Examinador Interno
Universidade Federa do Pará – Campus Castanhal

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Elias Jorge Bechara Soares (*in memorian*) e minha mãezinha, guerreira incansável, Oscarina Castelo Branco, que mesmo com todas as dificuldades nunca deixaram de me incentivar nos estudos, apoiar, proteger, aconselhar, educar e me amar.

A minha amada esposa, Giselle Bechara Soares, por sempre acreditar em mim durante toda minha trajetória, mesmo nos momentos mais difíceis, por ser meu guia, por cuidar de mim, por ser o meu amor a 21 anos e com a certeza absoluta de que muitos anos juntos ainda teremos, até o fim dos nossos dias.

Ao meu filho Gabriel Bechara, minha fonte de inspiração, o maior presente dado por Deus.

Ao meu irmão, amigo e parceiro, Osvaldo Augusto Castelo Branco Soares, que sempre está ao meu lado torcendo pelo meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

Meu eterno agradecimento à Deus, por ter me dado forças nos momentos mais difíceis, momentos esses onde várias vezes pensei em desistir pelas dificuldades, por abdicar de um conforto financeiro para dedicar a este mestrado, mas através das minhas orações e perseverança não deixou que eu fraquejasse.

Agradeço a todos os professores do Profmat Castanhal por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

A minha orientadora profª Dra. Roberta Modesto Braga, organizada, inteligentíssima, paciente comigo e que foi sem dúvida de suma importância para todo o desenvolvimento e conclusão deste trabalho com maestria.

Aos professores Arthur Almeida, Valdelírio Silva e professora Kátia Liége pela oportunidade e contribuições para este trabalho.

Ao meu amigo matemático, de conhecimento extraordinário, que me fez gostar e aprender de maneira aprofundada os processos de contagem e a probabilidade, Doutorando Marcos Oliveira de Oliveira (Murakami) que desde quando o conheci em 2010, sempre me incentivou a crescer, sem medir esforço algum, com muita humildade, pelo simples fato de ajudar ao próximo.

Aos meus amigos professores de Biologia em geral que contribuíram para esse trabalho em especial aos professores Elton Costa e Henac Almeida da Conceição, professores renomados, de grande experiência e respeito, de grande conhecimento no que fazem e que com paciência, me acompanharam no desenvolvimento deste trabalho.

Não poderia faltar de forma alguma, a quem me despertou o interesse pela Genética, com muita paciência em conversar comigo, sem esperar nada em troca, com muito conhecimento e simplicidade, ao renomado professor Me. Paulo Orlando Jorge Melém, meu profundo agradecimento.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer”.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo discutir uma relação entre a probabilidade e os modelos de genética mostrando a aplicabilidade em sala de aula via proposição de uma sequência didática. Metodologicamente foi realizado a aplicação de questionário com a utilização da ferramenta Google Forms, ferramenta que tem sido de grande uso na prática acadêmica, pela sua praticidade no processo de coleta de informações possibilitando o envio do questionário, seja através de e-mail ou link, e com praticidade para as respostas. Esta pesquisa discute ainda sobre determinadas formas que o professor de matemática pode conduzir os questionamentos em uma sala de aula, aguçando e despertando o interesse do aluno para outras formas de entender a probabilidade, utilizando-se de uma parte da biologia como meio. Traz também à luz das normas de educação brasileira, sobretudo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em quais os aspectos que ela se apoia. Como resultados, busca mostrar a partir do questionário com professores atuantes em sala de aula, que a produção de um conhecimento a partir de proposituras de problemas pode incentivar a descoberta e instigar a busca pelo conhecimento. Para concluir, é possível acreditar que esta interação interdisciplinar tem a força de incentivar uma aproximação entre áreas do conhecimento às vezes tão distantes na visão do estudante.

Palavras – chave: Probabilidade; Genética; Biologia; Matemática; Interdisciplinar.

ABSTRACT

This work aims to search for a relationship between the probability and the genetic models showing the applicability in the classroom, of a didactic sequence and the several advantages of logical mathematical methods, for better precision and understanding of students on issues involving genetics. Methodologically, the instrument used was performed using the Google Forms tool, a tool that has been of great use in academic practice, due to its practicality in the process of collecting information, it allows the sending of the questionnaire, either by email or link, and with practicality. For the answers. This research also comments on certain ways that the mathematics teacher can conduct the questions in a classroom, sharpening and arousing the student's interest in other ways of understanding the probability, using a part of biology as a means. It also brings in the light of the Brazilian education norms, above all the National Common Curricular Base (BNCC) and on which aspects it is based. As a result, it seeks to show, through interviews with teachers working in the classroom, that the production of knowledge based on problem propositions can encourage discovery and instigate the search for knowledge. To conclude, it is possible to believe that this interdisciplinary interaction has the strength to encourage an approximation between areas of knowledge that are sometimes so distant in the student's view.

Keywords: Probability; Genetics; Biology, Mathematics, Interdisciplinary.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Devido às dúvidas e dificuldades encontradas por estudantes de Ensino Médio na preparação para os processos seletivos de acesso nas mais diversas Universidades brasileiras, no qual a Genética é recorrente não só na área de conhecimento da natureza, em ciências biológicas, como também na Matemática, exige que o candidato adquira o conhecimento da aplicação das probabilidades de se calcular previamente as chances de ocorrência, onde este deverá trabalhar os cálculos probabilísticos junto às suas teorias em conformidade com a genética.

Se as múltiplas adversidades do mundo são muito complexas para serem analisada apenas pelo senso comum, por outro lado essas mesmas adversidades também não podem ser analisadas a partir dos saberes de um único campo científico. O desenvolvimento do conhecimento científico da Biologia, são inter-relacionados com a Matemática. Esta, em consequência desse fato, assume a qualidade de instrumento organizador de dados e expressão dos resultados das pesquisas dessa Ciência.

Porém, o envolvimento da Matemática com outros conteúdos conceituais não resultou na aproximação do seu ensino ao dos conteúdos de diferentes campos e nem fez com que o conhecimento matemático se aproximasse das outras Ciências no panorama escolar. A aprendizagem de um conhecimento fragmentado não é suficiente para que o estudante entenda relações intra e inter científicas.

A realidade das Ciências e do mundo diante do aprendiz é complexa. Todo aprendiz necessita de diferentes instrumentos para interpretar essas realidades. Em relação à complexidade do conhecimento, Giardinetto (1999) afirma que

> com a decorrência da evolução do conhecimento científico, tecnológico e a complexificação do conhecimento científico, tecnológico e filosófico e a complexificação cada vez maior da sociedade, a escola surge como um elemento fundamental para a necessária formação do indivíduo enquanto cidadão participante de um determinado contexto social, pois é através dela que esse indivíduo tem a possibilidade de se apropriar de um conhecimento que não lhe é possível apropriar ao plano de vida cotidiana.(p.08)

Porém, os conteúdos conceituais provenientes de diferentes campos de estudos utilizados na formulação de programas escolares continuam sendo abordados como desconexos entre eles.

Atualmente no Brasil, a escola é a instituição encarregada de promover o contato com “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”, termos contemporâneos, usados nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs de maneira organizada, assim como possibilitar que os estudantes elaborarem conhecimento de forma sistemática.

Porém, ainda persiste a fragmentação do conhecimento tanto no que se refere à Educação, quanto nos campos científicos. Ainda que Biologia e a Matemática situem-se em diferentes campos de estudo separados pela evolução do conhecimento científico, elas guardam entre si possibilidades de ações articuladoras dos seus saberes, como no caso da aplicação da Estatística e da Probabilidade em trabalhos de Genética, que constituem apenas dois exemplos desse fato. (LOPES, 1999)

Contribuir de forma indireta com estudantes, o público-alvo, que estão se preparando para ingressar em universidades através de processos de seleção, intervindo de maneira propositiva e diretamente a professores de Biologia e/ou Matemática, para que estes repassarem a seus alunos, propondo uma sequência didática e as diversas vantagens de métodos lógicos matemáticos para interpretação e precisão no entendimento das soluções dessas questões de genética.

Ao trabalhar com o ensino das probabilidades no Ensino Médio com frequência, me senti motivado a escrever sobre o método de Jacob Bernoulli não só pela exigência de mostrar na sequência de ensino exigida pela BNCC como também baseado nas diversas experiências que tive em escolas que trabalho, onde inúmeras vezes fui abordado por estudantes e professores para esclarecer sobre a Matemática na genética. Certa vez até, me foi solicitado junto a um professor de Biologia, para que nós efetuássemos uma conferência on-line a cinco unidades de uma mesma instituição de ensino privado, para dúvidas e esclarecimentos sobre a Matemática na genética.

Essa pesquisa é justificada através do estudo do método de Jacob Bernoulli, matemático do século XVII, correspondente a uma sequência de ensaios experimentais, de tentativas independentes, nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não dependa de ensaios anteriores ou posteriores no qual se obtém apenas dois resultados que Bernoulli chamou de sucessos e fracassos.

Tal contexto me intrigou e me motivou a reunir dados/informações com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: Como articular conteúdos de Matemática e Biologia usando sequência didática para compreensão de conceitos de probabilidade a partir do Ensaios de Bernoulli aplicada à Genética? Dessa questão objetivamos discutir uma relação entre a probabilidade e os modelos de genética mostrando a aplicabilidade em sala de aula via proposição de uma sequência didática. E para tanto organizamos esse texto por capítulos.

O primeiro capítulo trata de uma abordagem histórica das probabilidades, com foco na constituição dos conceitos. O segundo capítulos discute Biologia e Genética sob o ponto de vista das orientações dos documentos oficiais, bem como sobre o diálogo entre Matemática e Genética. O terceiro capítulo trata do reconhecimento do cenário Matemática e Biologia, trazendo os aspectos metodológicos da pesquisa e o resultado da pesquisa realizada com professores de Biologia. O quarto capítulo apresenta os ensaios de Jacques Bernoulli, a Genética e uma Sequência Didática, seguido das considerações do trabalho em questão.

1. ABORDAGEM HISTÓRICA DAS PROBABILIDADES

A ideia de discutir probabilidade surgiu através de questionamentos de jogadores que queriam vencer os jogos de dados ou de cartas. A palavra probabilidade é derivada do Latim probare que significa provar, testar.

Em diversas civilizações, as crenças, a sorte e os astros estavam encarregados de responder questões que, até certo ponto pareciam ser regidas puramente pelo acaso, não exatamente, pois se o estudo das teorias das probabilidades houvesse sido descoberto e empregados, muitos desses problemas poderiam ter sido resolvidos.

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Segundo Silveira (2001), na antiguidade era comum atribuir aos Deuses a resolução de qualquer evento, era considerado normal pensar que os acontecimentos dependiam do sobrenatural. Não se discutia aleatoriedade, não se atribuía ao acaso qualquer ocorrência.

> A humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não casuais (KENDALL, apud, CASSIANO e ALVES, 2012).

Marco Túlio Cícero, estadista, orador e filósofo romano, 106 a.C. a 43 a.C., citado por Leonard Mlodinow (2011), contestava a cultura dos gregos antigos que valorizavam apenas o estudo da geometria.

> Entre os gregos, o geômetra ocupava o lugar mais honrado; dessa forma, nada progrediu de maneira tão brilhante entre eles quanto a Matemática. Porém, nós estabelecemos como o limite dessa arte sua utilidade na contagem (CÍCERO, Apud, MLODINOW, 2011, p.46).

De acordo com Mlodinow, Cícero usou o termo probabilis, que originou o termo empregado atualmente e talvez tenha sido o maior defensor da probabilidade na antiguidade. Ele afirmou que a probabilidade é o próprio guia da vida. "Cícero acreditava que um acontecimento poderia ser antecipado e previsto mesmo que sua ocorrência dependesse do mero acaso" (MLODINOW, 2011, p.46.).

Ishihara e Pessoa (2010) afirmam que Tartaglia (1499-1557) e Cardano (1501-1576) analisaram problemas propostos a partir dos jogos, mas tanto os matemáticos quanto os jogadores da época deixaram as discussões de lado, pois consideravam que só poderiam aplicar o estudo das probabilidades em casos restritos e também pela dificuldade de entendimento da Matemática envolvida. Essa afirmação pode ser confirmada, uma vez que, mesmo alguns séculos antes de Cristo, os matemáticos da época já manifestavam sobre a dificuldade de aceitação da probabilidade.

Tartaglia, um autodidata que veio a se tornar um professor estimado dedicou algumas páginas de seu livro General Trattato para discutir problemas matemáticos. Gerolamo Cardano, médico dos nobres da corte e professor de medicina na Universidade de Pavia, publicou 131 livros sobre Filosofia, Medicina, Matemática e Ciências. Cardano escreveu "Liber de Ludo Aleae", que significa "Livros sobre jogos de azar" que foi o primeiro na história a tratar da teoria da aleatoriedade.

> Antes de morrer, Cardano queimou 170 manuscritos não publicados. As pessoas que vasculharam suas posses encontraram 111 textos sobreviventes. Um deles, escrito décadas antes e aparentemente revisado muitas vezes, era um tratado em 32 capítulos curtos. Intitulado O livro dos jogos de azar (MLODINOW, 2011, p.46).

Segundo Ishihara e Pessoa (2010), a probabilidade como é estudada nos dias atuais foi desenvolvida por três franceses: De Méré (1607-1684), Pascal (1623- 1662) e Fermat (1601-1665).

Por volta de 1654, Chevalier de Méré, matemático amador e viciado em jogos de azar, propôs a Pascal a seguinte questão: "Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas, o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?" (MÉRÉ, Apud, BOYER, 1974, p.265).

Pascal era físico, matemático, filósofo e teólogo. Com o Traité du Triangle Arithmétique de 1654, "Tratado do triângulo aritmético", mais conhecido como triângulo de Pascal, instituiu com Pierre de Fermat, as bases da teoria das probabilidades e da análise combinatória, que o holandês Huygens desenvolveria posteriormente.

Carl Boyer, fala sobre o problema proposto por Chavalier de Méré: "Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades, as ideias de Cardano de um século antes tendo sido esquecidas." (BOYER, 1974, p.265.) Fermat, foi um matemático e cientista francês que gostava de trocar e resolver desafios. "Ainda que não fosse um profissional ou especialista, Pierre de Fermat é geralmente considerado o maior matemático amador de todos os tempos" (MLODINOW, 2011, p.92).

Pascal e Fermat não costumavam escrever seus resultados mas, em 1657, Huygens, incentivado pelos matemáticos franceses, publicou um pequeno folheto "*De Ratiociniis Liber de Ludo Aleae*" (sobre o raciocínio em jogos de dados) que é considerado o primeiro livro sobre cálculo das probabilidades e sobre a introdução do conceito de esperança matemática. Ao mesmo tempo, Pascal já relacionava o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético.

Segundo Boyer (1974), o triângulo já existia há mais de 600 anos, mas Pascal descobriu novas propriedades. "Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade" (PASCAL, apud, IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN e ALMEIDA, 2010, p.285). Uma das propriedades descobertas para exemplificar:

> Em todo triângulo aritmético, se duas células são contíguas na mesma base, a superior está para a inferior assim como o número de células desde a superior até o topo da base está para o número de células da inferior, até o ponto mais baixo inclusive (PASCAL, apud, BOYER, 1974, p.265).

Para provar essa propriedade, Pascal, em 1654, desenvolve uma explicação sobre o método de indução matemática que se tornou mais importante que a propriedade demonstrada.

O pequeno folheto de Huygens foi reproduzido em 1713 como a primeira das quatro partes de um tratado clássico "Ars Conjectandi" (Arte de conjecturar), escrito por Jacques Bernoulli. "Esse é o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois o Liber de Ludo Aleae, de Huygens, fora apenas uma breve introdução" (BOYER, 1974, p.308).

Segundo Boyer (1974), problemas que exemplificam a teoria das probabilidades aparecem na terceira e na quarta parte de Ars Conjectandi, também na quarta parte aparece a Lei dos Grandes Números que hoje leva o nome do autor. E, devido ao conselho de Leibniz, Jacques Bernoulli se dedicou ao aperfeiçoamento da teoria das probabilidades. A sua obra Ars Conjectandi apresenta o primeiro teorema limite da teoria das probabilidades e é rigorosamente provado. Leibniz (1646-1716), filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão, não deixou de se ocupar das probabilidades. Publicou duas obras, uma sobre a arte combinatória e outra sobre as aplicações do cálculo das probabilidades às questões financeiras.

A teoria das probabilidades teve vários admiradores e o francês Abraham De Moivre (1667-1754) foi um deles. Publicou, em 1711, Philosophical Transactions, que tratava das leis do acaso e, em 1718, Doctrine of Chances, considerado uma ampliação do anterior. No segundo livro citado, De Moivre refere à obra sobre probabilidades de Jacques, Jean e Nicolaus Bernoulli. As várias edições de seus livros apresentam mais de cinquenta problemas sobre probabilidades. Em 1730, aparecem algumas de suas descobertas no campo das probabilidades no livro Miscellanea Analytica, que trata de questões importantes para a probabilidade e para o lado analítico da trigonometria.

Euler (1707-1783), matemático e físico suíço, e d'Alembert (1717-1783), filósofo, matemático e físico francês, escreveram sobre problemas de expectativa de vida, valor de uma anuidade, loterias, entre outros. Em 1751, cálculos de Euler são publicados em Memórias da Academia de Berlim. Em 1765, na mesma revista, publicou o seguinte problema: "Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso. Então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é:

$$\frac{2.3}{n.(n-1)}$$

A probabilidade que dois números consecutivos (mas não três) sejam tirados é:

$$\frac{2.3.(n-3)}{n.(n-1)}$$

E a probabilidade que não sejam tirados números consecutivos é:

$$\frac{(n-3).(n-4)}{n.(n-1)}$$

(BOYER, 1974, p.334).

Euler contribuiu com algumas notações, entre elas escreveu que achava útil representar a expressão

$$\frac{p.(p-1)\,.\ \cdots\ .\ (p-q+1)}{1.2.\ \cdots}$$

[p/q]

Equivalente a notação que usamos hoje por:

$$\binom{p}{q}$$

(EULER, apud, BOYER, 1974, p.334).

D'Alembert aparece na história como um opositor às ideias geralmente aceitas da teoria das probabilidades. Publicou um artigo em 1754 na Encyclopédie, "Croix ou Pile", sugere que a probabilidade de lançar cara em dois lances de uma moeda deveria ser 2/3 e não 3/4 como é usualmente aceito, pois o jogo termina se cara aparece no primeiro lance.

Segundo Boyer (1974), d'Alembert considerava os princípios básicos das probabilidades pouco firmes, e que quando possível as probabilidades deveriam ser determinadas experimentalmente.

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794), marquês de Condorcet, foi um filósofo, enciclopedista e matemático francês era também amigo de d'Alembert. Condorcet publicou livros sobre probabilidade e, segundo Boyer (1974) é lembrado matematicamente como um pioneiro em matemática social, especialmente pela aplicação de probabilidades e estatística a problemas sociais.

Laplace (1749-1827), matemático, astrônomo e físico francês, tem grande importância na história da teoria das probabilidades. Escreveu vários artigos sobre o assunto e o clássico Théorie Analytique des Probabilités de 1812. Em 1814 publicou uma introdução à probabilidade com uma linguagem mais simples, *Essai Philosophique des Probabilités.*

"No fundo a teoria das probabilidades é apenas um senso comum expresso em números" (LAPLACE, apud, BOYER, 1974, p.361) Assim como Laplace, Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), matemático, físico e filósofo francês escreveu sobre probabilidades e, em alguns aspectos consideravam seus escritos como uma continuação das obras de Laplace e de outros matemáticos.

Poincaré foi intitulado, segundo Boyer, como professor do cálculo de probabilidades. A Matemática sofreu grandes mudanças após a Segunda Guerra e um dos ramos mais influenciados foi a teoria das probabilidades. Félix Édouard Justin Émile Borel (1871- 1956), um matemático e político francês, foi um dos pioneiros da teoria da medida e suas aplicações à teoria das probabilidades. Borel publicou, em 1909, Éléments de La Théorie des Probabilités. "O primeiro ano do novo século foi auspicioso para as probabilidades[...]" (BOYER, 1974, p.454).

> As probabilidades e a estatística no século vinte estão intimamente ligados não só com a matemática pura como uma característica notavelmente diferente de nosso tempo - uma dependência crescente com relação aos grandes computadores (BOYER, 1974, p.457).

A ideia de acaso, segundo alguns estudiosos, existia antes mesmo do nascimento de Cristo. Na filosofia grega, Aristóteles (384 - 322 a.c.) já falava na sorte, boa ou má, como consequência de uma escolha racional num processo de curso aleatório (ROTUNNO, 2007).

Antes dos estudos de Cardano, há registros de estudos à teoria da aleatoriedade na publicação do poema *De Vetula*, escrito por um erudito eclesiástico francês, Richard de Fournival, em 1250 (COUTINHO, 2007).

De acordo com Marcos Noé, no site do Brasil Escola, o passo decisivo para fundamentação teórica da inferência estatística, associa-se ao desenvolvimento do cálculo das probabilidades. A origem deste costuma atribuir-se a questões postas a Blaise Pascal (1623 – 1662) pelo célebre cavaleiro Chevalier Méré (1607-1684), para alguns autores um jogador inveterado, para outros um filósofo e homem de letras. Parece, no entanto, mais verosímil aceitar que as questões postas por Méré eram de natureza teórica e não fruto da prática de jogos de azar. Parece, também, aceitável que não foram essas questões que deram origem ao cálculo das probabilidades.

Do que não resta dúvida é de que a correspondência trocada entre Pascal e Fermat - em que ambos chegam a uma solução correta do célebre problema da divisão das apostas, porém de maneiras diferentes – representou um significativo passo em frente no domínio das probabilidades. Fermat aperfeiçoou a regra geral de Cardano, baseando o cálculo de probabilidades no cálculo combinatório e Pascal ligou o estudo das probabilidades ao triângulo aritmético, que hoje é conhecido como o triangulo de Pascal. O triangulo aritmético já existia há mais de 600 anos, mas recebeu esse nome porque Pascal descobriu novas propriedades para ele (BOYER, 1996; LIGHTNER, 1991 apud SILVA & COUTINHO, 2005).

Fermat e Pascal foram os primeiros matemáticos a resolver problemas não numéricos de probabilidade, porém nenhum dos dois chegou a desenvolver teoremas sobre o assunto. Somente em 1713, surgiram os primeiros teoremas sobre probabilidade, com a publicação póstuma do livro *Ars Conjectandi*, de Jakob Bernuolli (SILVA; COUTINHO, 2005).

Para Augusto Gadelha (DME/IM/UFRJ), a primeira publicação em teoria de probabilidade foi em um pequeno livro intitulado de *Ratiociniis in Ludo Aleae*, escrito em 1655 por Christiaan Huygens (1629 - 1695), mas conhecido pelas suas importantes contribuições à Astronomia, à ótica e à teoria ondulatória da luz.

De acordo com Howard Eves (2004), as ideias pioneiras de Fermat, Pascal e Huygens em teoria das probabilidades foram trabalhadas consideravelmente no século XVIII e os progressos nesse novo campo se sucederam muito rápido. A *Ars Conjectandi* de Jakob Bernuolli foi seguida de importantes contribuições à teoria das probabilidades

Vale ressaltar ainda que há autores que sustentam que o cálculo das probabilidades teve a sua origem na Itália com Luca Paccioli (1445 – 1514), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Tartaglia (1499 – 1557) e que outros como Galileo (1564 – 1642), *Blaise Pascal* (1623 – 1662)*, Pierre de Fermat* (1601 – 1655)*, Jacob Bernoulli* (1654 – 1705)*, Pierre Simon Laplace* (1749 – 1827)*, Carl Friedrich Gauss* (1777 – 1855), *Lenis Poisson* (1781 – 1840) também tiveram suas contribuições. A primeira definição formal de probabilidade, como o quociente do número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis”, apareceu pela primeira vez de forma clara na obra Liber de Ludo Aleae de Girolamo Cardano.

Segundo Viali (2008, p.143), “a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o ‘acaso’ representa um papel preponderante”. Naquela época a decisão de qualquer evento estava relacionada aos deuses, há algo sobrenatural ou obra da divindade, ou seja, não existiam nenhum espaço para a abordagem que atribuísse ao acaso esses eventos. Devido a esse fator a abordagem matemática da Probabilidade, no que se refere ao acaso, azar ou risco, iniciou há mais ou menos 500 anos.

Porém, muitos séculos atrás a Probabilidade já era utilizada, mas não eram matematicamente estudadas, os indícios de seu surgimento são referentes a avaliação de chances de ganhar em jogos de azar e da necessidade de efetuar quantificações sobre os riscos dos seguros, relacionados a perda de cargas dos navios há cerca de cinco mil anos atrás. Somente entre os séculos XV e XVI é que os estudos foram efetivados.

Devido à perda de cargas dos navios, por naufrágios ou roubo, os seguros surgiram. De acordo com Viali (2008) a prática de seguros teria iniciado pelos mesopotâmios e fenícios, estendendo essa prática aos gregos e romanos, e, mais tarde, ao mundo moderno pelos comerciantes marítimos italianos. Não se sabe como era o método de trabalho dos segurados, porém acredita-se que a partir de estimativas baseadas na Probabilidade de acidentes ou roubos eram estipulados taxas e prêmios correspondentes. Após a idade média, devido ao crescimento dos centros urbanos e ao crescimento de seguros marítimos, surgem os primeiros estudos sobre seguros, mesmo que ainda fossem utilizadas técnicas empíricas para isso.

Esses estudos foram iniciados em 1570 por Girolamo Cardamo (1501-1576) na tentativa de analisar seguros de vida, porém não obteve sucesso nem repercussão. Mais tarde, em 1693, quem apresentou cálculos a respeito de prêmios de seguros em relação a expectativa de vida e da probabilidade de sobreviver foi Edmund Halley (1656- 1742), e, em 1730, Daniel Bernoulli (1700-1782) obteve um avanço no estudo de Probabilidade.

Conforme menciona Viali (2008) foi Daniel Bernoulli que fez mais progressos na área calculando a mortalidade por varíola em pessoas de uma determinada idade. Com relação aos jogos, Viali (2008) destaca que pode ter iniciado com o Tali que significa jogo do osso, praticado com astrágalos, semelhante a um tetraedro e formado por um osso de animal, porém as quatro faces não eram idênticas e não possuíam a mesma Probabilidade de ganho. Além disso, as apostas de jogo estavam relacionadas com o futuro, com disputas e em divisão de heranças. O frei Luca Pacioli (1445-1517), criou o problema dos pontos em 1556, sobre como fazer a divisão dos pontos de uma aposta, porém só foi desenvolvido corretamente mais tarde por Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Foi Girolamo Cardano (1501- 1576) que publicou em seu livro chamado Liber de Ludo Aleae, o problema dos pontos, que foi a primeira obra conhecida sobre jogos de azar.

Viali (2008) destaca que este último livro “[...] foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis” (p.146), embora isso tenha acontecido com casos concretos de jogos de azar.

Galileo Galilei (1564-1642) também é um dos pioneiros a analisar matematicamente os jogos de dados, criando um manual ‘Considerações sobre o Jogo de Dados’. Blaise Pascal (1623-1662) trocou correspondências com Pierre de Fermat (1601-1665) sobre o jogo de dados e o problema dos pontos. Juntos decifraram o problema e analisaram várias outras situações de jogos de azar, de Cardano e Pacioli, contribuindo para o avanço no estudo das Probabilidade e para criação de mais uma disciplina matemática. Coutinho (2007) faz uma ressalva importante sobre as trocas de correspondências entre Pascal e Fermat

> observamos aqui os primeiros indícios de uma dualidade da noção de probabilidade, dualidade essa que é devida ao conflito entre a apreensão perceptiva das chances de realização de um evento (grau de credibilidade) e a relação entre resultados favoráveis e possíveis (p.60).

Ainda segundo Coutinho (2007, p. 60), Christiaan Huygens (1629-1695) interessaram-se pelas trocas de cartas entre Fermat e Pascal e contribuiu para “a formalização da noção de direito de esperar, expressa também sob o nome de valor da chance.”. Huygens em 1657 escreveu o livro ‘Liber de Ludo Aleae’ (O raciocínio nos jogos de azar). Porém a definição clássica de probabilidade surgiu por Jacob Bernoulli (1654-1705), autor da obra ‘Ars Conjectandi’ (Arte de Conjecturar) em 1713, no qual já abordou de maneira bem detalhada permutações e combinações, resolvendo problemas que tinham sido propostos por Huygens.

A definição clássica de probabilidade, apresentada por Bernoulli no século XVII foi consolidada em livros e artigos por Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) um século depois, onde afirma que “A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis” (Coutinho 2007, p. 61).

> “Até Laplace a probabilidade estava essencialmente voltada ao cálculo em jogos de azar. Laplace ampliou o campo de aplicações da teoria para outras áreas, como a teoria dos erros, a matemática atuarial e a mecânica estatística” (VIALI, 2008, p.151)

Viali (2008) ressalta que após as contribuições de Laplace e os consideráveis avanços no estudo da Probabilidade outros matemáticos também se destacaram: Johann Friedrich Gauss (1777- 1855), Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), Siméon Denis Poisson (1781-1840), Henri Léon Lebesgue (1875-1941), Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783), dentre outros. Leonard Euler (1707-1783) e Jean-Baptiste D’Alembert (1717-1783) tiveram contribuições importantes nos estudos de Probabilidade em outras áreas tais como Economia, Ciências sociais e loterias. Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), Jules Henri Poincaré (1854-1912) e John Von Neumann (1903-1957) além de estarem ligados ao estudo de Probabilidade, tem estudos sobre a teoria dos jogos.

1.2 O MARQUÊS DE LAPLACE

Segundo texto publicado por Hygino H. Domingues (1993) no livro Fundamentos da Matemática Elementar Vol 5, Pierre-Simon, Marquês de

Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 de março de 1749 — Paris, 5 de março de 1827), nasceu em uma família de humildes camponeses da Normandia, na França. Laplace era dotado de uma brilhante inteligência que lhe propiciou o rompimento, desde cedo e a passos largos, com os vínculos de sua origem. Assim é que aos 16 anos de idade já estava na Universidades de Caen, onde deveria cursar Teologia, mas logo se inclinou para a matemática, sua verdadeira vocação.

Matemático, astrônomo e físico francês, Laplace organizou a Astronomia Matemática, resumindo e ampliando o trabalho de seus predecessores nos cinco volumes do seu *Traité de Mécanique Céleste* (1799 – 1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física. Foi eleito membro da Royal Society em 1789. Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática — campo em cuja formação teve um papel principal. O operador diferencial de Laplace, do qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome. Se tornou conde do Império em 1806 e foi nomeado marquês em 1817, depois da restauração dos Bourbon no período da história francesa após a queda de Napoleão em 1814 até a Revolução de Julho de 1830.

Como astrônomo, a teoria das probabilidades não era um fim para Laplace, mas apenas um meio. Mesmo assim, ajudou também a criar a probabilidade de um evento, como definição de uma função de conjunto, assim utilizou um espaço amostral Ω finito, não vazio, representando o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e A o subconjunto chamado evento, e supondo que cada subconjunto elementar de Ω é igualmente provável. Então, para qualquer $A \subset \Omega$, definiu a probabilidade de A como

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número n de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número n de casos possíveis } \Omega} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(\Omega)}$$

As consequências imediatas desta definição são dadas abaixo pelas seguintes propriedades:

I. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

II. $P(\Omega) = 1$;

III. $P(\phi) = 0$ (porque $n(\phi) = 0$);

IV. Seja B um outro subconjunto de Ω, temos que se $A \cap B = \phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1.3 JACQUES BERNOULLI

Jacques Bernoulli, ou Jacob, ou Jakob, ou Jacob I Bernoulli (Basileia, 27 de dezembro de 1654 — Basileia, 16 de agosto de 1705), foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Isaac Newton (1643 – 1727) e Gottfried Wilhelm *Leibniz* (1646 – 1716), aplicando-o a novos problemas e em 1687, Jacques assumiu a cadeira de matemática na Universidade de Basel.

Leibniz, como pensador eclético que era, não deixou de se ocupar das probabilidades. Publicou, com efeito, duas obras, uma sobre a " arte combinatória" e outra sobre as aplicações do cálculo das probabilidades às questões financeiras. Foi ainda devido ao conselho de Leibniz que Jacques Bernoulli se dedicou ao aperfeiçoamento da teoria das probabilidades. Pode dizer-se que foi devido às contribuições de Bernoulli que o cálculo das probabilidades adquiriu o estatuto de ciência. São fundamentais para o desenvolvimento do cálculo das probabilidades as contribuições dos astrónomos, Marquês de Laplace (1749 – 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e Adolphe Jacques Quételet (1796 – 1874).

Publicou a primeira integração de uma equação diferencial; deu solução ao problema dos isoperímetros, que abriu caminho ao cálculo das variações de Leonhard Paul *Euler* (1707 – 1783) e Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) e estendeu suas principais aplicações ao cálculo das probabilidades. É considerado o pai do cálculo exponencial. Foi professor de matemática em Basileia, tendo sido importantíssima sua contribuição à geometria analítica, à teoria das probabilidades e ao cálculo de variações.

A obra do matemático Jacob Bernoulli *Ars Conjectandi*, lançada em 1713, oito anos após sua morte, por seu sobrinho Niklaus Bernoulli, foi um marco na história das probabilidades, segundo o professor Bernardo Nunes Borges de Lima, do Departamento de Matemática do ICex. Foi nela, por exemplo, que Bernoulli descreveu a Lei dos Grandes Números (LGN), ou Teorema Dourado. De acordo com a LGN, a média aritmética dos resultados da realização da mesma experiência repetidas vezes tende a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas se sucederem.

1.4 MÉTODOS DE CONTAGEM

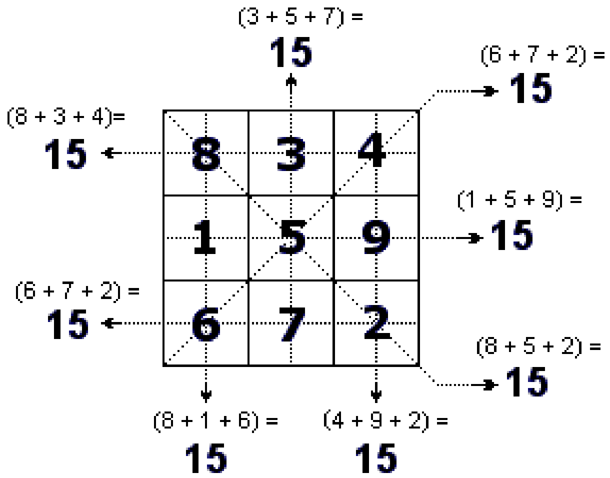
É difícil saber ao certo qual foi o primeiro problema que levou ao surgimento da Análise Combinatória. De acordo com Morgado et al. (2006), o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados ao tema.

A combinatória é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de elementos que satisfazem critérios específicos determinados e se preocupa, em particular, com a "contagem" de elementos nessas coleções (combinatória enumerativa), com decidir se certo objeto "ótimo" existe (combinatória extremal) e com estruturas "algébricas" que esses objetos possam ter (combinatória algébrica).

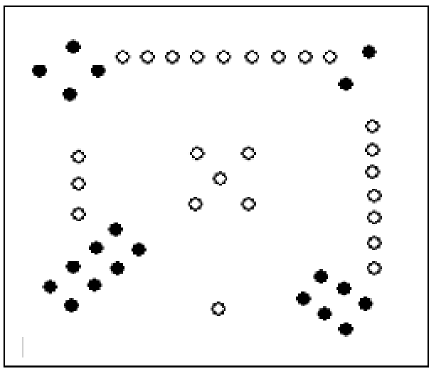
> Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”. (VAZQUEZ, 2011)

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du Triangle Arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna Sciendi Sive Combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Segundo Heinrich Wieleitner (1932), historiador matemático alemão, o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1, 2, 3 ... n^2 em um quadrado n x n de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:



O primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu, que segundo Needham (1959) data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (BERGE, 1971):



$$= \quad \begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. Este quadrado causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu.

Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

Durante muito tempo a Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório, um conjunto de métodos de contagem, foi considerado completamente desligado do cálculo aritmético, segundo Rey Pastor (1939) “o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas”.

O assunto ganhou notoriedade após a publicação de *Análise Combinatória* por Percy Alexander MacMahon em 1915. Um dos destacados combinatorialistas foi Gian-Carlo Rota, que ajudou a formalizar o assunto a partir da década de 1960. E, o engenhoso Paul Erdős trabalhou principalmente em problemas extremais. O estudo de como contar os objetos é algumas vezes considerado separadamente como um campo da enumeração.

1.4.1 Permutação Simples

Um desses métodos de contagem chamado permutação, define-se como casos isolados dos Arranjos Simples. Estes são agrupamentos ordenados de um conjunto A de elementos, de modo que os grupos possuem um número menor ou igual de elementos do que o conjunto A.

Arranjos simples desses elementos do conjunto A agrupados n a n são chamados de **permutações simples** de A. Desse modo, para que seja uma permutação, é preciso que o número de ordem *p* seja igual ao número *n* de elementos de A. Assim temos, por definição

i) $\mathrm{P_n} = \mathrm{A_{n,n}}$

ii) $\mathrm{A_{n,p}} = \dfrac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}$

Sabendo que, por definição n = p, obtemos,

$$\mathrm{P_n} = \mathrm{A_{n,n}} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n}-\mathrm{n})!} = \frac{\mathrm{n!}}{0!} = \frac{\mathrm{n!}}{1} \quad \therefore \quad \mathrm{P_n} = \mathrm{n!}$$

1.4.2 Permutação com Repetição

Ainda com a ideia de permutação, do item anterior (1.3.1), porém específico para permutações com elementos repetidos, devemos entender que, dado um conjunto qualquer, se ele pode apresentar elementos repetidos, então as **permutações** dos elementos neste conjunto devem considerar a repetição desses elementos, pois, a ordem em que eles aparecem não importa, diferentemente da ordem dos outros elementos do conjunto.

Tendo como definição de permutações de n elementos, com $r_1, r_2, r_3, \ldots$ repetições, são grupamentos ordenados de n elementos, em que o número de permutações destes n elementos com, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ repetições é dado por:

$$P_n^{r_1,\, r_2,\, r_3, \ldots} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \ldots}$$

1.4.3 Número Binomial ou Combinação Simples

Segundo Howard Eves, em seu livro Introdução a História da Matemática (ano 2004) na cidade de Samarcanda, o astrônomo Jamshid Al-Kashi (falecido c.1436) teve papel importante na história das frações decimais e foi o primeiro autor árabe que conhecemos a lidar com o *Teorema Binomial* em sua forma de “triângulo de Pascal” ou “Triângulo aritmético”.

> De acordo com Howard Eves, Pascal não foi o primeiro a mostrar o triângulo aritmético – vários séculos antes esse arranjo numérico foi antecipado por escritores chineses[1]. Como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas propriedades do triângulo, este tornou-se conhecido como triângulo de Pascal (p.260).

O *Traité du Triangle Arithmétique* de Blaise Pascal (1623 – 1662) foi escrito em 1653 mas só foi publicado em 1665. Ele construía seu “triângulo aritmético” conforme

[1] Devemos a Yang Hui (com livros datados de 1261 e 1275) a mais antiga apresentação preservada do chamado Triângulo aritmético de Pascal. Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data.

a figura 1. Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha pertencente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Assim, como exemplo na quarta linha,

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1$$

Figura 1

Obtendo-se um triângulo de qualquer ordem, desenhando-se uma diagonal como mostra a figura. Esses números são chamados números binomiais e como exemplo, os números ao longo da sexta diagonal, a saber, 1, 5, 10, 10, 5, 1, são coeficientes sucessivos da expansão de $(a + b)^5$. Blase Pascal também o usava, particularmente em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de n objetos tomados p de cada vez, o que ele afirma ser

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

onde n! é a notação[2] para o produto

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(3)(2)(1).$$

[2] O símbolo n!, chamado *fatorial de n*, foi introduzido em 1808 por Christian Kramp (1760 – 1820) de Strasburgo, que o escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com um símbolo previamente usado. Por conveniência define-se 0! = 1.

Qualquer número binomial do “triangulo de pascal” ou combinação, pode ser representado como: dados “n” e “p” naturais, com $n \geq p$, chama-se coeficiente binomial n sobre p e se indica $\binom{n}{p}$ ou combinação de n elementos agrupados p a p, o número natural definido pela expressão:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Por analogia como nas frações, no coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ o número n é chamado de numerador e o número p é chamado de denominador do coeficiente binomial.

2. O ENSINO DE GENÉTICA NA BIOLOGIA E A MATEMÁTICA

No ensino de Biologia, existem muitas vezes conflitos entre os conceitos biológicos, e as explicações construídas pelo senso comum sobre os fenômenos biológicos.

Na teoria de Vergnaud (2012) o professor é um mediador que deve proporcionar situações para o aluno que contribua no desenvolvimento do repertório das representações dos aprendizes, para que um campo conceitual seja gradativamente aprendido pelo estudante através da elaboração de esquemas mentais em ordem crescente de complexidade.

As situações comentadas por Vergnaud (2012), são fundamentais para os processos ensino-aprendizagem, pois são elas que vão dar sentido aos conceitos, pois quanto maior o número de situações que o professor proporcionar ao estudante mais significativo torna-se determinado conceito. O conceito de esquema e domínio gradual de um campo conceitual remete a teoria de Vergnaud a Piaget e Vygotsky. Para Vygotsky (1994), o desenvolvimento intelectual resulta da relação com o mundo, que se compõe do processo de interações que fornece condições para a atividade do pensamento. Dentre essas interações que ocorrem no espaço escolar, as mais favoráveis para as aprendizagens significativas são as interações.

O domínio de um campo conceitual está relacionado com o amadurecimento de funções mentais, ou seja, à zona proximal de desenvolvimento (ZDP). O conceito de esquema referenciado na teoria de Vergnaud (2012) é originário dos estudos de Piaget. Um exemplo para a aplicação da teoria de Vergnaud na pesquisa no ensino de Biologia relaciona-se com o campo conceitual da genética. O ensino da genética necessita que o estudante tenha formalizado uma rede de conceitos que envolvem a biologia molecular, a bioquímica, cálculos elementares de probabilidade, e uma série de exceções relacionadas à produção e aplicabilidade do conhecimento biológico.

Os enunciados dos problemas de genética são construídos de maneira que o estudante tenha formalizado esses conceitos ou pelo menos parte deles, mas muitas vezes na resolução de um problema de genética falta para o estudante alguns desses conceitos o que pode tornar insolúvel determinado problema ou levar a uma resolução mecânica por aproximação. A resolução mecânica de um problema de genética pode obstruir a aplicabilidade do conhecimento no contexto cotidiano e torna-se obstáculo a uma significativa aprendizagem para o estudante. A contextualização através de situações defendida por Vergnaud (2012), ajuda na construção significativa dos conceitos o que possibilita a sua aplicabilidade.

O ensino de genética segundo a revisão de literatura de Leite (2004) desenvolve-se a partir de uma postura fragmentada, a-histórica e linear, na apresentação dos conceitos aos estudantes, que apesar de demonstrarem interesse por temas ligados à genética humana apresentam pouca compreensão sobre os mesmos. A falta de compreensão dos conteúdos atribui-se, na tese de doutorado de Leite (2004) à centralização do uso do livro didático. A análise de livros feita pela autora constata a existência de problemas como: ênfase em termos, conceitos e definições, fragmentação de conteúdos e pouca referência à história do desenvolvimento do conhecimento científico.

A análise de exercícios de Genética feita por Ayuso et al. (1996) revela que os livros didáticos trazem problemas com resoluções únicas, referem-se a exemplos de seres vivos desconhecidos pelos estudantes, com características difíceis de serem imaginadas, o que possivelmente desestimularia a aprendizagem. As pesquisas sobre o ensino de genética realizada, nas décadas de 80 e 90, citadas por Leite (2004) envolveram principalmente investigações sobre concepções alternativas e resolução de problemas, sendo mais recentes as voltadas para a aprendizagem significativa.

As dificuldades dos estudantes com a linguagem da genética são, em particular, recorrentemente referidas e atribuídas ao fato de ser a genética uma área caracterizada por um complexo vocabulário, o que provoca dificuldades de compreensão em diferenciar os conceitos envolvidos, como é o caso dos associados a termos como alelo, gene ou homólogo. As próprias expressões matemáticas usadas neste contexto são, muitas vezes, alvo de contradições pelos estudantes, até por que os símbolos respectivos nem sempre são usados consistentemente por professores e autores de livros didáticos (CID. M.; NETO, A., 2005). Quanto às atividades de resolução dos problemas de Genética referida na revisão de literatura de Bugallo (1995) apesar dos estudantes resolverem os problemas com êxito, não são capazes de desenvolver a relação do algoritmo de resolução com o contexto genético.

A abordagem referenciada por Leite (2004) para o ensino de Genética leva-nos a refletir sobre a importância de uma educação problematizadora, ao desenvolvimento do pensamento crítico sobre os avanços da ciência e da tecnologia, pois rompe com a vinculação tecnocrática e ufanista empregada na divulgação do desenvolvimento científico nos livros didáticos e pela mídia.

Para os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (BRASIL 1999) não é mais possível ensinar Biologia numa perspectiva acumulativa, a-histórica e dissociável da tecnologia como está presente em alguns livros didáticos. É preciso segundo este documento que o aprendiz compreenda de forma crítica o avanço da ciência e esteja capacitado a participar como agente da história. Assim, trabalhar o conteúdo matemático aplicado em outros contextos é importante para a aprendizagem do aluno. Podemos notar que a matemática se relaciona com vários outros campos científicos, como a biologia e a tecnologia. Bem como a matemática, a biologia e a tecnologia são importantes para o ensino médio, corpo científico e toda sociedade

Há grande destaque em Brasil (1999) para o ensino dos avanços da genética, referindo-se que o aprendizado tem que abordar temas como: a descrição do material genético em sua estrutura e composição, a explicação do processo da síntese proteica, a relação entre o conjunto proteico e a estrutura de dupla hélice. Segundo Brasil (1999) não é possível tratar, no Ensino Médio, de todo o conhecimento biológico ou de todo o conhecimento tecnológico a ele associado.

O importante é tratar esses conhecimentos de forma contextualizada, revelando como e por que foram produzidos em que época apresentam. Para esta proposta de ensino é necessário atualização constante do professor sobre a evolução da Biologia, do pensamento científico, estratégias, teorias de aprendizagem e material didático adequado. A análise dos conteúdos da Biologia moderna e a Genética, nos livros didáticos de Biologia feita por Xavier et al. (2006 p.287) referem que os livros didáticos precisam de reformulação, atualização, ampliação de conteúdo, lançamento de textos mais contextualizados, reestruturação de capítulos promovendo novas formas de inserir os temas modernos.

Deseja-se que os temas da nova Biologia possam ser inseridos e abordados de forma adequada para o entendimento dos conceitos e suas aplicações. A ampliação de temas importantes, como células tronco, Projeto Genoma, paternidade por DNA, entre outros, será necessário. É notável observar que, em se tratando de DNA, hoje as novas tecnologias já traçam definitivamente novas relações na Biologia. Podendo perceber que o estudo evolutivo se faz com presença de marcadores de DNA, novos saberes surgem e conceitos são reformulados.

Os mais importantes estudos biológicos nos quais a matemática está presente, no contexto da hereditariedade, corresponde à mitose, à meiose e às próprias leis da herança. Segundo Amabis e Martho (2004) a mitose foi publicada em 1873 por Friedrich Anton Schneider (1831 a 1890); a meiose proposta em 1885 pelo alemão August Friedrich Leopold Weismann (1834 a 1914); e as leis básicas da genética foram proposta por Gregor Johann Mendel (1822 a 1884). “Devido aos seus notáveis conhecimentos de matemática, [...] Mendel pôde chegar a conclusões que, ainda hoje, quase um século e meio depois, continuam sendo a base fundamental da genética moderna” (SOARES, 1999 p. 328).

Desse modo entendemos que ao ensino da Matemática deve valorizar a construção conceitual da área que correlaciona elementos, no caso da Biologia, com a própria Matemática, ou seja, e desse ponto específico com a Biologia compreender articulações com as diferentes áreas do conhecimento.

2.1 O QUE OS DOCUMENTOS ORIENTAM PARA O ENSINO

As sequências didáticas, segundo Carvalho (2013), dizem respeito a um conjunto de aulas sobre um determinado assunto escolar, em que cada atividade é cuidadosamente planejada de forma a fazer com que o estudante mobilize seus conhecimentos prévios para se chegar a uma alfabetização cientifica.

Similarmente, Zabala (1998) as definem como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores quanto pelos estudantes. De acordo com o autor, essas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula estão diretamente relacionadas com as concepções de ensino dos professores, o que faz com que cada um preze por objetivos educacionais diferentes, e que leva à constituição de sequências didáticas com fases bem distintas.

As Orientações Curriculares para o Ensino de Ciências (BRASIL, 2007), no entanto, explicitam alguns momentos comuns que as sequências didáticas como um todo podem ter: a sensibilização (momento de levantamento inicial de conhecimentos sobre o assunto a ser trabalhado); problematização (questões que são colocadas de forma contextualizada com o objetivo de mobilizar os alunos para o assunto a ser trabalhado); organização do conhecimento e desenvolvimento (desenvolvimento das atividades por meio de diferentes estratégias); síntese e finalização (fechamento das atividades trabalhadas até o momento). Essas categorias não são estáticas, e devem ser modificadas pelo professor conforme as necessidades educacionais dos alunos.

Motokane et al. (2013), por outro lado, colocam de forma mais detalhada as principais características das sequências didáticas segundo seus pontos de vista e vivências: participação ativa dos alunos, não sendo eles restritos simplesmente ao papel de ouvinte; atividades com duração programada para uma única aula; clareza dos conteúdos a serem trabalhados; produção de material escrito pelos alunos; utilização de materiais de apoio de diferentes tipos; professor como mediador dos conhecimentos e produções dos alunos e situação problematizadora como ponto de partida para a sequência.

Já Zabala (1998) acredita que as sequências didáticas, segundo um referencial construtivista, devem possuir atividades que levem em consideração o conhecimento prévio dos alunos; que tenham conteúdos significativos para eles; que estejam adequadas ao nível de desenvolvimento dos estudantes; que provoquem um conflito cognitivo entre o que o aluno já sabe e o que o professor espera que ele aprenda; que sejam motivadoras em relação à aprendizagem e que contribuam para a autonomia do estudante, tudo isso mediado pela figura do professor. Além disso, ele também diz que o tempo das sequências é variável de acordo com sua complexidade. Mais ainda, o autor acrescenta que as atividades de uma sequência didática devem propiciar a aprendizagem não apenas de conteúdos conceituais, mas também procedimentais e atitudinais.

O modelo educacional vigente considera os conteúdos conceituais como os mais importantes a serem trabalhados em sala de aula, e de modo geral, são aqueles contidos dentro de cada disciplina. Os conteúdos procedimentais são o “saber fazer”, e dizem respeito às capacidades que o aluno desenvolve com o auxílio do professor. São basicamente divididos em técnicas e destrezas e estratégias de aprendizagem e raciocínio. Já os conteúdos atitudinais abrangem o estabelecimento e interiorização de regras e padrões de condutas e podem ser subdivididos em três níveis: as atitudes propriamente ditas; as normas e os valores. (POZO; CRESPO, 2009)

Ainda dentro da organização dos conteúdos, Zabala (1998) diz que eles podem ser classificados em interdisciplinares, que remete à organização tradicional dentro das diferentes áreas; interdisciplinaridade, que pressupõe interação entre duas ou mais disciplinas e a transdisciplinaridade, quando há uma integração total entre elas. Dependendo do tema e da forma como ele será trabalhado, as sequências didáticas permitem um grau maior ou menor de integração entre diferentes áreas do conhecimento. As tarefas de casa também são essenciais, não apenas em sequências didáticas, mas no processo de ensino e aprendizagem no geral, pois indicam ao professor as dificuldades dos alunos e geram subsídios para melhorar sua prática.

Segundo Libâneo (2013), no entanto, as organizações de conteúdo devem ser devidamente planejadas, e não é coerente pedir aquilo que ainda não foi ensinado, e são uma possibilidade de interação entre escola e pais dos alunos. Sobre este último tópico, em particular, André (1991) coloca que deve haver uma inter-relação entre escola-alunos-familiares, visando um melhor e mais qualificado ambiente de ensino, além de ser necessária uma boa infraestrutura no colégio e disponibilidade de materiais; professores devem ser competentes e devem respeitar os alunos e suas diferenças sociais e de aprendizado e é preciso que haja organizações e políticas pedagógicas que orientem o ensino, para que todas as atividades propostas e desenvolvidas na escola, incluindo aquelas das sequências didáticas, sejam bem recebidas e possam ser plenamente desenvolvidas.

A avaliação é outro momento muito importante das sequências didáticas, mas não deve vir apenas na forma de uma prova ao final das atividades; deve ser processual e feita ao longo das aulas, para garantir que o desenvolvimento dos alunos quanto aos conteúdos trabalhados seja satisfatório (ZABALA, 1998). Em geral, observa-se que a avaliação é tida como medição dos conhecimentos, e cujo foco é o produto final da aprendizagem, e não o processo que o aluno passou até chegar àquilo (BRASIL, 2007). Essa concepção faz com que haja uma valorização excessiva pelas notas ao invés de pela aprendizagem e o erro torna-se sinônimo de fracasso (BRASIL, 2007; JORDÃO, 2013).

Assim, e levando-se em consideração a problemática apresentada envolvendo o ensino de matemática utilizando para isso o contexto da genética é dever do professor buscar diferentes metodologias e estratégias didáticas para minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos, e também para trabalhar os conteúdos da área de forma integrada e menos simplista, garantindo a aprendizagem. Apesar de todas as diferenças entre a Biologia e a Matemática, essas duas Ciências podem atuar conjuntamente quando são encontrados meios de aproximação. A multidisciplinaridade da Matemática, a articulação com as demais disciplinas não visa expandir apenas as suas possibilidades educacionais, mas esta pode, ao mesmo tempo, ser elemento de ampliação do alcance dos outros saberes envolvidos de forma significativa para a alfabetização científica dos estudantes (GOLDBACH, 2009; SILVEIRA; AMABIS, 2003).

2.2 O DIÁLOGO NECESSÁRIO ENTRE MATEMÁTICA E BIOLOGIA

Neste tópico iremos abordar a interação dos conhecimentos matemáticos e biológicos como ferramenta essencial para o aprendizado da herança biológica no ensino médio. Ressaltamos que “a interação é condição de efetivação da interdisciplinaridade, já que a mesma pressupõe uma integração de conhecimentos visando novos questionamentos, novas buscas, enfim, a transformação da própria realidade” (FAZENDA, 2011, p.12). Os mais importantes estudos biológicos nos quais a Matemática está presente, no contexto da hereditariedade, corresponde à mitose, à meiose e às próprias leis da herança.

Segundo Amabis e Martho (2004) a mitose foi publicada em 1873 por Friedrich Anton Schneider (1831 a 1890); a meiose proposta em 1885 pelo alemão August Friedrich Leopold Weismann (1834 a 1914); e as leis básicas da genética foram proposta por Gregor Johann Mendel (1822 a 1884).

Nesta pesquisa há algumas das aplicações da Matemática na Biologia, pois são muitos os exemplos da aplicação da Matemática na Biologia em suas mais diversas áreas: A Saúde, Ecologia, Fisiologia, Bioquímica, Genética, Morfologia entre tantas.

A Matemática não se resume a interpretação de dados em um plano cartesiano em gráficos em função do tempo, pois em Biologia, por exemplo, as áreas relacionadas à biotecnologia, chega muitas vezes a ser mais relacionadas à Matemática do que Biologia.

A utilização de modelos matemáticos no estudo de problemas biológicos, bem como métodos matemáticos inspirados em processos biológicos, combina os usos simultâneos das ciências biológicas e da matemática, resolvendo tanto questões básicas de ciências biológicas como emergindo novas áreas de pesquisa em Matemática.

A Biologia com a Matemática surge como uma relevante metodologia, porém sabemos que não é preciso nenhum conhecimento matemático ou até mesmo biológico para admirar qualquer elemento da natureza, mas para conhecê-la cientificamente, sim, a Biologia sempre foi considerada uma porta de saída para aqueles que, gostavam de Ciência e pensavam que tinham dificuldades em Ciências Exatas. Porém, cada vez mais os métodos matemáticos vêm sendo utilizados para resolver problemas biológicos, tornando atualmente a Biologia cada vez mais teórica e matematizada.

Ao longo da história dessas duas áreas de conhecimentos, novos conceitos e questões foram surgindo graças a problemas biológicos que precisavam de conceitos matemáticos, e aplicações de conteúdos de Matemática em Biologia. Podemos citar Kimura, que em 1760 desenvolveu a equação de difusão para a frequência de cada gene, Erdõs e e Rényi em 1960 criando funções para calcular o limiar de grafos aleatórios, Euler criou em 1760 um modelo para estrutura etária de populações estáveis.

Vendo como vários matemáticos criaram conceitos e ferramentas importantes para o desenvolvimento da Biologia nota-se a importância de se fazer a integração dessas duas disciplinas desde o ensino básico para que além de saber onde usar os conceitos matemáticos em ciências biológicas os alunos saibam o porquê e tenham conhecimento crítico das aplicações Matemáticas.

Um dos grandes desafios para muitos professores é fazer uma ponte entre as disciplinas, principalmente para aqueles que não tiveram em sua formação disciplinas capazes de suprir essas necessidades e por isso não se sentem com liberdade de utilizar esse tipo de metodologia. No ensino médio, os estudantes se deparam com questões de Biologia que precisam fazer cálculos de percentagem, probabilidade e etc., mas nem sabem ao certo como fazerem porque o professor de Matemática certamente não os explicou as aplicações do assunto em outras áreas e o de Biologia também não está muito preparado para ensinar as relações da Matemática com a Biologia (HAZZAN, 1993).

Esta integração de disciplinas é fundamental para o desenvolvimento cognitivo dos discentes, fazer relação com outras ciências e com o cotidiano chama a atenção deles, traz interesse e, com o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) como principal porta de entrada para o ensino superior, torna-os mais aptos a passar num vestibular.

A Genética é um campo de estudos que possibilita a elaboração de atividades interdisciplinares entre Biologia e Matemática no Ensino Médio. Uma primeira aproximação dá-se nos estudos de Análise Combinatória e cálculos de probabilidades em Genética. Soares (1999) afirma que a Genética é um campo de estudos baseado na ampla utilização da Matemática. Na elaboração dos processos de resolução dos problemas de Genética são aplicados métodos de cálculos, tais como proporção, porcentagem e estatística. O autor ainda sugere utilizar preferencialmente a porcentagem para apresentação dos resultados ao invés de frações ordinárias, pois os percentuais indicam com mais facilidade quantos resultados seriam obtidos em cada 100 ocorrências de um determinado fenômeno.

Tanto por parte de autores de livros para o Ensino Médio de Matemática como no caso da Biologia, não existe preocupação com a articulação de saberes. Autores desta última disciplina têm por hábito iniciar o capítulo de probabilidades em Genética com a apresentação de exercícios que reproduzem os mesmos exemplos dos jogos de azar que já foram ou serão apresentados pelos professores de Matemática.

A maior incidência de exemplos introdutórios do cálculo de probabilidades recai sobre os jogos de dados e cartas, motivo histórico inicial do desenvolvimento da teoria das probabilidades. Outro problema ocorre na escolha de determinados contextos para explicar e/ou aplicar propriedades matemáticas. O produto de probabilidades pode ser aplicado quando o cálculo se refere à probabilidade de dois eventos independentes. Dois eventos são independentes se a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro.

3. RECONHECIMENTO DO CENÁRIO MATEMÁTICA E BIOLOGIA

A pesquisa em questão pode ser considerada quanti-qualitativa, de natureza básica e descritiva. Quanto aos procedimentos trata-se de uma pesquisa bibliográfica e de campo. Numa sequência de exploração da temática, seguida de pesquisa de campo que objetivou realizar uma consulta a professores da área de Biologia para diagnóstico e articulação para propor uma sequência didática, que por ora não pode ser implementada, mas sugere exploração interdisciplinar de ambas as áreas de ensino.

3.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa teve duas fases: a primeira referente a pesquisa de campo com os professores de Biologia com o objetivo de perceber o que pensam sobre as relações Matemática com a Biologia, bem como em minimizar contradições com relação aos conceitos sobre genética. A segunda fase é referente à construção da sequência didática de Matemática que levou em consideração resultados da primeira fase e experiência deste autor com esse contexto evidenciado.

Na primeira fase foi utilizado da ferramenta Google Forms Online no link criado https://forms.gle/Cb6QiSJY7NfZTbRP9, foi elaborado um questionário (Apêndice A) com doze perguntas sobre a ligação direta em como a matemática interfere no ensino de genética, referente as suas experiências ao lecionar a estudantes de ensino médio, com o objetivo de permitir e inferir, a análise e a interpretação, sob a ótica matemática, de dados de fenômenos biológicos, ou seja, a matematização de eventos e/ou a criação de modelos matemáticos relativos a objetos de estudo no campo da biologia.

Dentre as perguntas, dez objetivas e duas discursivas, obtidas em um período de 13 dias, do dia 15 ao dia 27 de maio de 2020. Participaram dessa fase, 31 professores de Biologia que trabalham no Ensino Médio e/ou Ensino Superior e residem nos estados do Pará, Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais, Brasília e Santa Catarina.

As respostas aos questionários foram organizadas descritivamente utilizando gráfico de setores e analisadas considerando a frequência das respostas dos professores no sentido de permitir um aprofundamento razoável, tanto no que refere aos conteúdos de Matemática e de Biologia trabalhados no decorrer da dinâmica pedagógica em foco, quanto no que diz respeito às interações geradas entre ambas as disciplinas, pontuando-se positivamente em termos de interdisciplinaridade.

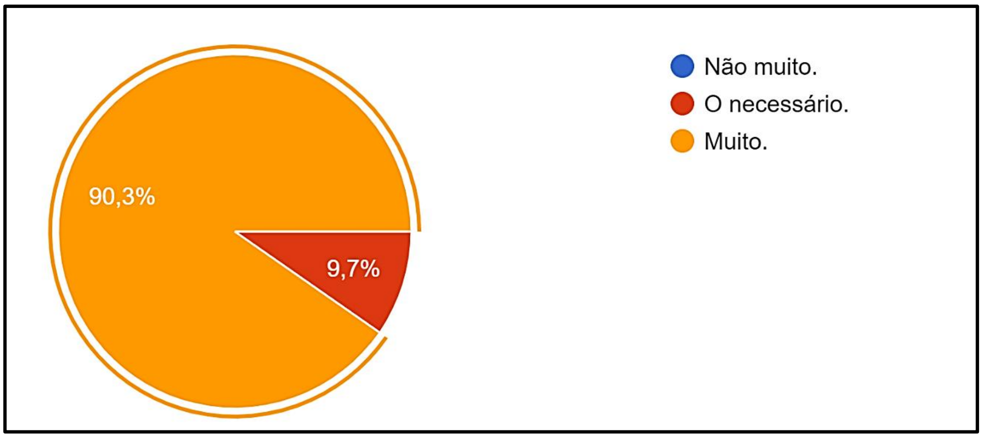
A segunda fase constitui a produção da sequência didática baseada nas discussões anteriores, no contexto interdisciplinar Matemática e Biologia e nas respostas discutidas na primeira fase.

3.2 O QUE DIZEM OS PROFESSORES DE BIOLOGIA

O conjunto de perguntas e respostas contidas no questionário (Apêndice A) aplicados aos professores de Biologia, estão ligadas diretamente em como a matemática interfere no ensino de genética, referente as suas experiências ao lecionar a estudantes de ensino médio que estavam/estão se preparando para ingressar no ensino superior a partir de processos seletivos.

Ao serem questionados sobre se gostam de Genética, a frequência das respostas dos professores de Biologia está representada no gráfico 1.

Gráfico 1: Frequência das respostas dos professores que gostam de Genética.



Fonte: Pesquisa de campo, 2020.

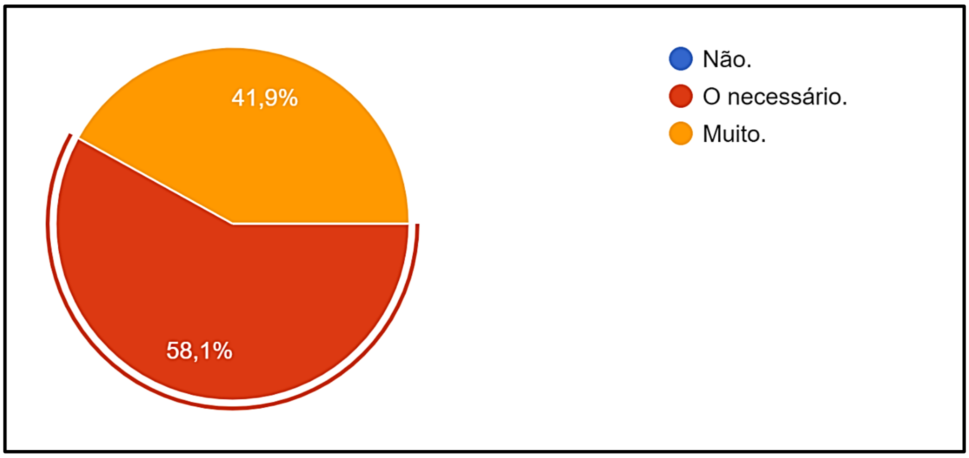
Nesse questionamento percebemos que a grande maioria respondeu gostar da Genética (90,3%), ou seja, que pode estar relacionado ao valor do aprendizado de

Genética, principalmente para entender um pouco mais sobre eles mesmos e também para a vida. Nesse caso, atribuem a importância desse aprendizado para um futuro próximo, para aprimorar o seu profissional e posição na sociedade.

Os professores consideram que aprender Genética é importante porque capacita os alunos a interagirem na sociedade e a compreender, principalmente, a relação do DNA com o fenótipo, a transmissão das características hereditárias e o surgimento de síndromes e da variabilidade.

Ao serem questionados se gostam de matemática, a frequência das respostas dos professores de Biologia estão representadas no gráfico 2.

Gráfico 2: Frequência das respostas dos professores sobre gostar de Matemática.

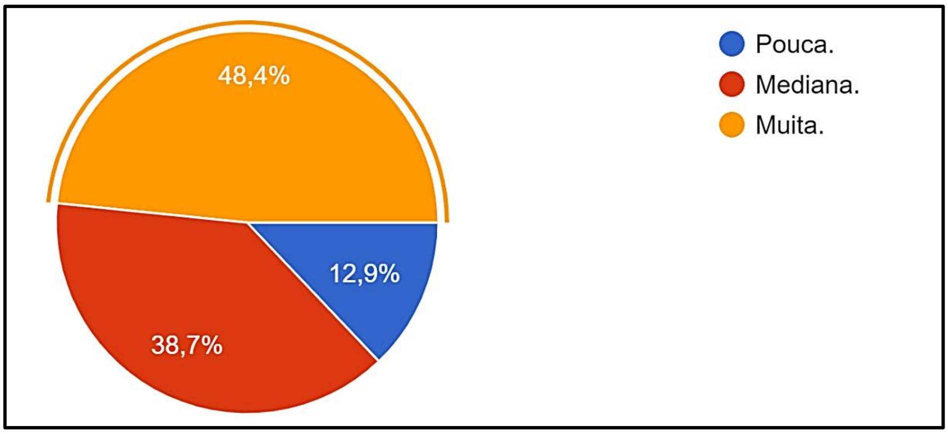


Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

Quando indagados sobre o gosto pela disciplina de Matemática, nota-se uma diferença nos resultados obtidos, sendo uma referente ao gostar somente porque é necessário, e outra referente ao gostar muito. As respostas "gostar somente o necessário" e "gostar muito", sugerem os professores que utilizavam na sua prática pedagógica métodos tradicionalistas, que não fizeram entender sobre a importância da matemática para o ensino da Genética relacioando essas ciências.

Questionamento sobre a incidência de Genética nos processos seletivos de ingressos nas universidades, de acordo com o gráfico 03.

Gráfico 3: Incidência da Genética em provas para o ingresso nas Universidades

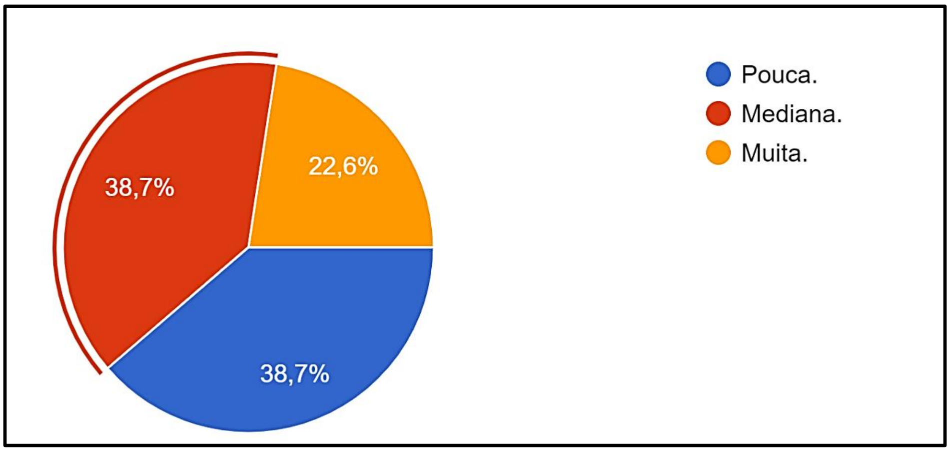


Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

É notável a relevância dos temas da genética e evolução no contexto social, pois de acordo com o gráfico 3, o total percentual naquilo que se refere a incidência de genética nos processos seletivos de forma “mediana” ou “muita” é de 87,1% (48,4% + 38,7%), desse modo a sua influência nos processos seletivos, devido à grande incidência, é percebida pelos participantes, bem como o crescente interesse da mídia, levando as pessoas a buscarem conhecer sobre seus avanços; seja para se posicionarem diante dos mesmos ou para não ficarem sem entender questões sobre temas, como por exemplo, transgênicos, projeto genoma, clonagem de mamíferos, células-tronco e testes de paternidade.

O gráfico 04, retrata sobre a incidência de questões de Genética com a Probabilidade nos processos seletivos de ingressos nas universidades.

Gráfico 4: Incidência da Genética com Probabilidade



Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

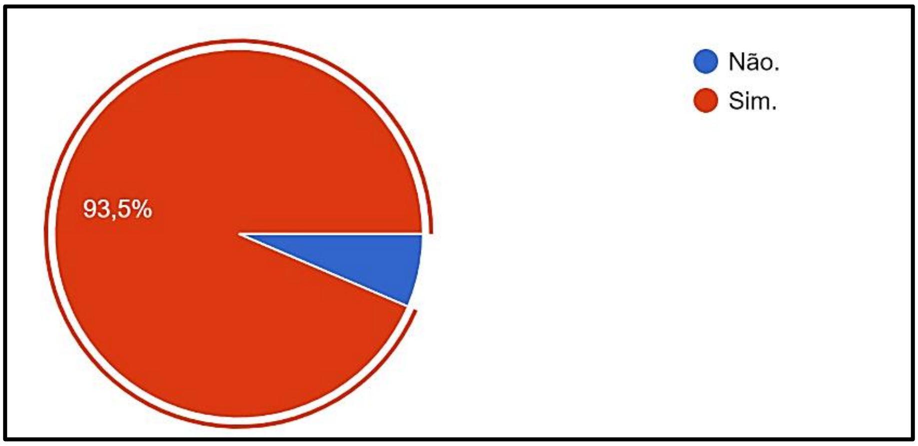
Analisando o percentual de cada uma das respostas dadas pelos professores no gráfico 4, chegamos à conclusão de que se faz necessário o ensino interdisciplinar entre as ciências Biológicas e Matemática, no que se refere a Genética junto a Probabilidade.

Para aprender e ensinar genética é exigido do estudante e do professor que possuam ampla capacidade de compreender conceitos e conhecimento de cálculos de probabilidade, além de relacionar diferentes temas de biologia, saber interpretar, retirar os dados de um problema, entre outros.

Assim, Moreira & Silva (2001) afirmam que compreender genética implica em possuir um bom conhecimento prévio de divisão celular, noções de probabilidade e relacionar de forma adequada estes conhecimentos ao que vai sendo apresentado.

O gráfico 05, apresenta se os professores abordam com os alunos o conceito matemático de ordenação das mais variadas possibilidades, como por exemplo, em que se pode calcular as possibilidades prévias do sexo no nascimento de crianças, na característica genética de um experimento ordenado, etc.?

Gráfico 5: Abordagem Matemática



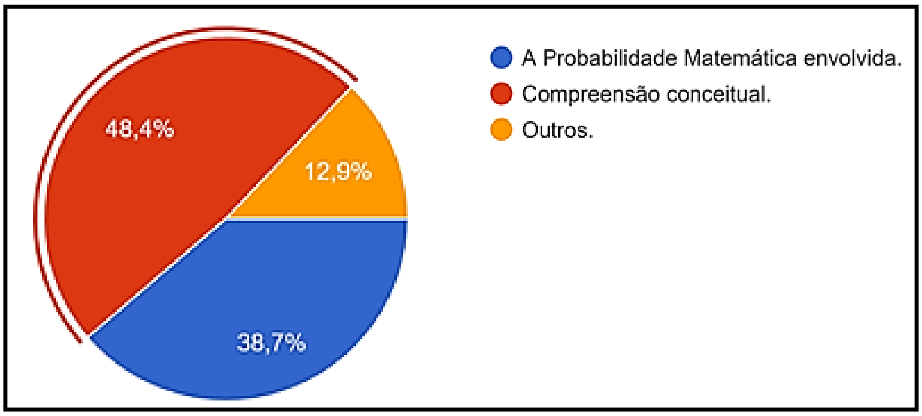
Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

É importante essa organização metodológica sobre o conceito matemático, como um desafio do ensino da Biologia, visto que, trata-se de uma metodologia pela qual o estudante tem possibilidade de aplicar conhecimentos matemáticos adquiridos em novas situações, de modo a resolver a questão proposta.

A Resolução de uma questão sobre Genética permeia entre dois aspectos, um mais tecnicista, sistemático e dedutivo com outro que se caracteriza como sendo indutivo e experimental, porém neste contexto, a Matemática ultrapassa as possibilidades, pois permite criar novas estratégias para solucionar diversas situações - problemas.

No gráfico 06, foi perguntado se eles encontram dificuldades em falar sobre cálculos matemáticos no conceito de ordenação na genética e qual seria essa dificuldade.

Gráfico 6: Dificuldades em falar sobre cálculos matemáticos



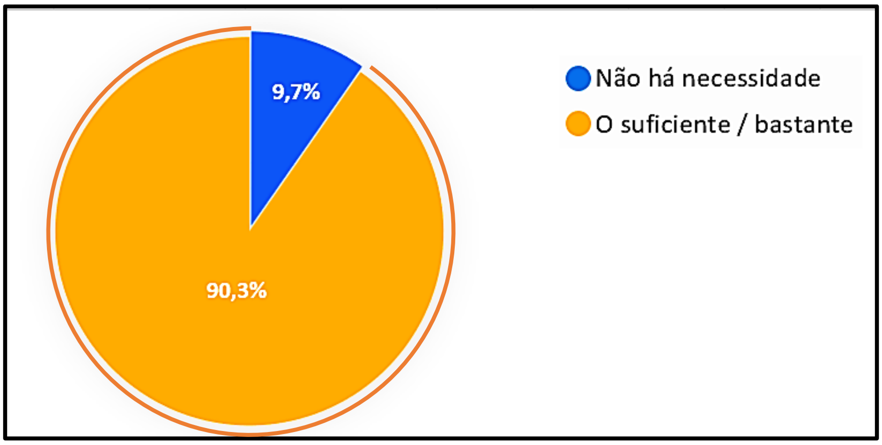
Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

Percebemos que dificuldades com a compreensão conceitual dos professores sobre entender genética, está relacionada com o não entender o embasamento matemático. As aulas desta disciplina devem ser ministradas para a prática e envolver a interdisciplinaridade, pois, sem atividades desse tipo, os jovens não terão domínio de outras linguagens. Para ensinar, é necessário que haja o conhecimento da disciplina, do conteúdo e da didática. A didática é fundamental no aprendizado da Biologia e também da Matemática, pois ela é uma ferramenta pela qual o processo de ensino e aprendizagem acontece, levando os alunos a perceberem suas necessidades e a criarem seus próprios mecanismos. Aprender não é mais um processo que ocorre somente no âmbito escolar, mas também nas práticas sociais, através da interdisciplinaridade.

Dentre outras dificuldades expostas pelos professores questionados, podemos destacar algumas que reforçam dificuldades com o envolvimento da relação conceitual entre Matemática com Biologia. A saber: a) Conceitual, tem aluno que não reconhece as operações básicas, b) O entendimento do aluno, c) Aplicação da probabilidade em alguns casos especiais, d) Aprofundar acerca do triângulo de Pascal, e) Não apresento tal dificuldade, f) Baixo conhecimento matemático dos alunos, g) Dificuldade de relacionar a matemática com a biologia.

O gráfico 07 mostra se o professor descreve ao seu aluno que há um processo de contagem da matemática chamado Análise Combinatória que possui em um de seus temas a Permutação Simples e com Repetição, que trata em determinar o número de possibilidades na troca da ordem de um determinado experimento ou de uma característica genética?

Gráfico 7: Repasse sobre Processo de contagem da Matemática



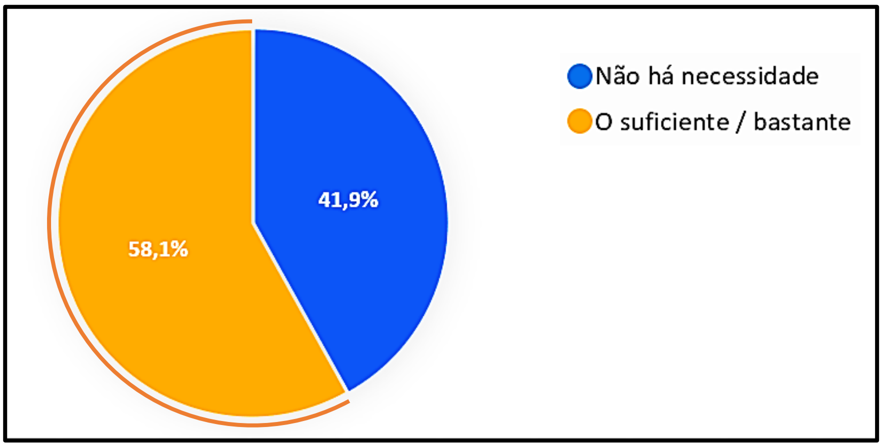
Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

Percebemos que a maioria dos professores pesquisados utilizam a matemática de forma suficiente, ou seja, aquilo que julgam o necessário para o aprendizado do estudante, no entanto este trabalho mostra a importância de se entender os processos de contagem, que se tenha uma visão enumerada dos experimentos, onde também a falta conceitual da matemática no ensino da genética, ocasiona a dificuldade de alguns estudantes acerca do entendimento de conteúdos da genética, quando entretecidos direta ou indiretamente em questões matemáticas.

O estudo da Matemática favorece a aquisição de habilidades que permitem ao educando pesquisar estratégias para solucionar situações-problema envolvendo outras áreas, neste caso, a Biologia – Genética, contribuindo também para a formação cultural e para o desenvolvimento do raciocínio.

O gráfico 08, é resultado das respostas dos professores quando questionados se abordam na Genética com probabilidade o Triângulo de Pascal.

Gráfico 8: Probabilidade e o Triângulo de Pascal



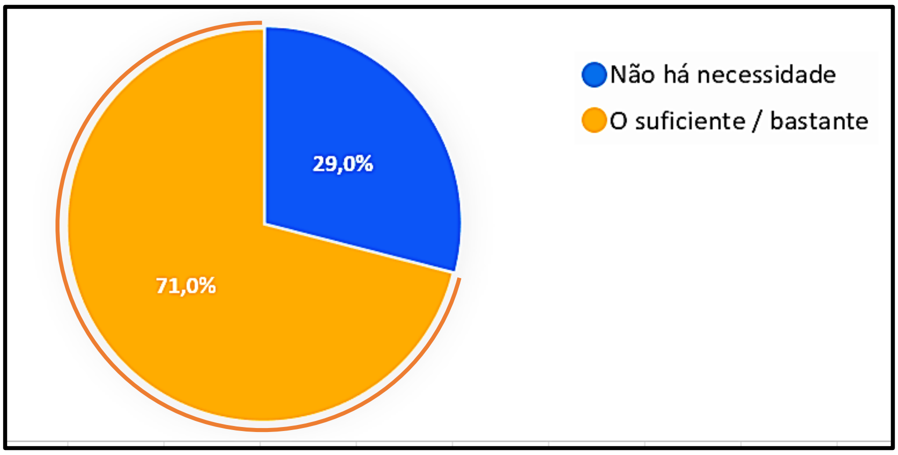
Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

De acordo com as respostas acima, percebemos a importância de as disciplinas possuírem autonomia, conhecer profundamente tanto os temas e métodos de cada área quanto as possibilidades de ações que visem a aprendizagem. Aprender temas de uma disciplina é tão necessário quanto saber ligá-los aos de outros campos, aumentando a rede em que eles são inseridos e, dessa forma, essas relações para expandir saberes que alcancem outras disciplinas e integrem as relações entre saberes “separados”. Entretanto, esse enredamento não pode servir de pretexto para destruir a identidade de cada disciplina e empobrecer objetivos didáticos.

Cada disciplina tem atuação restrita e delimitada na sua ação, o que dificulta as articulações com as demais. Essa restrição de articulações, já é em si um motivo para respeitar domínios de saberes, sistematizações específicas, metodologias próprias, instrumentos de análise, aplicações práticas e contingências históricas do desenvolvimento de cada disciplina. Apesar de todas as diferenças entre a Biologia e a Matemática, essas duas Ciências podem atuar conjuntamente quando são encontrados meios de aproximação. O caso da Genética é apenas um exemplo de utilização dos elementos de Análise Combinatória, Teorema de Pascal, Probabilidades e Estatística em uma aproximação que pode se dar sem perda de identidades.

De acordo com o gráfico 09, foi questionado se ele como professor descreve ao seu aluno que há um processo de contagem da matemática chamado Análise Combinatória que possui em um de seus temas a Combinação e que está relacionada diretamente a um número binomial do Triângulo de Pascal.

Gráfico 9: Análise combinatória

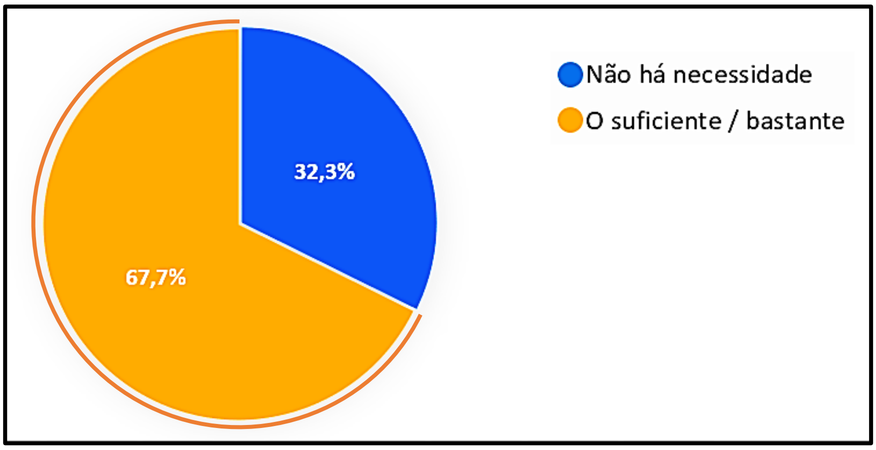


Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

Os termos do Triângulo de Pascal são Combinações Simples, estudadas em Análise Combinatória, e que poderia como sugestão, ser mostrado aos estudantes a relação da Análise Combinatória com número binomial do Triângulo de Pascal, justamente pelas diversas propriedades nele existentes. No entanto, de acordo com o gráfico, a maioria dos entrevistados apresentam o suficiente/bastante como base para o aprendizado destes estudantes. Assim, de modo geral, o suficiente/bastante talvez esteja relacionado a resolução direta de uma questão ou outra que envolve esse conceito.

O gráfico 10, representa as respostas dos professores no ensino da genética, comentar o assunto chamado Distribuição Binomial em sala de aula.

Gráfico 10: Distribuição Binomial



Fonte: Pesquisa de Campo, 2020.

Do gráfico 10, observamos que a Distribuição Binomial, não é repassada aos alunos, como deveria, para o entendimento da probabilidade. A distribuição binomial da probabilidade é aplicada aos casos em que uma experiência é repetida diversas vezes e sob as mesmas condições, sempre na busca de um mesmo evento, que por sua vez possui sempre a mesma probabilidade de ocorrer. No caso de cálculos que envolvem a distribuição binomial de probabilidades, P(A) representa a probabilidade do evento procurado e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ representa a probabilidade do evento complementar à ocorrência do evento A.

Dentre as perguntas, foi indagado aos professores sobre as dificuldades encontradas no entendimento de seus alunos no ensino da Genética com probabilidade. Destaca-se algumas respostas com maior relevância:

> a) Há muitos alunos com dificuldade na matemática e, por isso, se afastam de alguns conceitos da genética, especialmente aqueles que têm cálculos.
> b) Muitos não conseguem aliar a teoria com as possíveis aplicações, ou seja, não conseguem materializar os elementos matemáticos envolvidos.
> c) Alunos sem base matemática para entender a aplicação da mesma na biologia, gerando assim dificuldades para o professor de biologia, que por sua vez não tem todas as habilidades técnicas de um licenciado em matemática.
> d) Muitos alunos têm dificuldades em compreender se o problema de genética envolve o princípio de escolha de um resultado em eventos exclusivos (regra do ou), e eventos simultâneos (regra do e).
> e) Além da interpretação dos problemas há também a restrição aos conceitos de probabilidade da matemática, tornando assim as aulas de genéticas, que envolvem probabilidades, mais difíceis de compreender, logo seria de suma importância e interessante a relação multidisciplinar com professor de matemática.

Ensinar e aprender Genética são desafios para alunos e professores, pois envolve uma rede de conceitos que o estudante precisa consolidar para construir significativamente seus conhecimentos. Esta dificuldade foi o tema da questão 11. Os professores pesquisados apontaram que aprender e ensinar Genética se torna difícil porque os alunos não conseguem interpretar dados, realizar cálculos básicos de probabilidade, abstrair imagens, além do excesso de conceitos a serem aprendidos. Outros estudos também apontam estas como as principais dificuldades enfrentadas para o ensino e aprendizagem da Genética.

O que se pode deduzir dessas falas é que o conteúdo de genética só é lembrado pelos estudantes como algo difícil, provavelmente porque não conseguiram compreender o conteúdo mediante a falta de base matemática e/ou relações que ajudem na compreensão da genética, muito menos associá-lo a situações do seu próprio cotidiano o que poderia dar ao assunto maior importância e significado.

4 OS ENSAIOS DE JACQUES BERNOULLI, A GENÉTICA E UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência didática pode ser definida por um conjunto de procedimentos e atividades articuladas que são planejadas com a intuito de atingir determinado objetivo didático. É elaborada em torno de um gênero textual (oral ou escrito) ou de um conteúdo específico, podendo envolver diferentes componentes curriculares, como a interação entre Matemática e a Biologia.

Zabala (1998) destaca a sequência didática como uma das ferramentas de intervenção na prática escolar, que tem como objetivo melhorar a atuação em sala de aula, quer dizer, promover o aprendizado combinando os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais ao entender a formação integral do estudante.

Para iniciar a sequência didática, é necessário que os estudantes saibam operar com agrupamentos de Análise Combinatória, noções de Probabilidades e Genética, conteúdos trabalhados antes do estudo sobre as aplicações Matemáticas dos Ensaios de Bernoulli a Biologia. Para a sequência didática, sugerimos inicialmente o uso de uma abordagem histórica para entendimento dos conceitos envolvidos, como forma de "apresentar os conhecimentos científicos como construções socialmente produzidas, com seus impasses e contradições, influenciando e sendo influenciada por condições políticas, econômicas, tecnológicas, ambientais e sociais de cada local, época e cultura". (BRASIL, 2018 ,550).

Além disso, a abordagem de conceitos a nível de Educação Básica deve estar relacionada "com as argumentações em torno da matemática para a educação básica, como o "desenvolvimento de habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução e problemas" (BRASIL, 2018, 529). Conforme os PCN's, espera-se que o estudante supere a leitura de informações e raciocine mais criticamente sobre seu significado.

Como etapa nessa sequência didática, nas seções 4.1 e 4.2 adiante, há uma consistência em definir os conceitos de Genética, Distribuição Binomial e a Distribuição de Jacques Bernoulli, respectivamente, para que o objetivo a ser alcançado seja, o professor trabalhar posteriormente com o estudante a interação e a aplicações entre estes assuntos aqui abordados.

4.1 DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE GENÉTICA

A genética é um ramo da biologia definida por alguns autores como o estudo da hereditariedade. Outros argumentam, no entanto, que a hereditariedade é um fenômeno que vem sendo estudado desde muito antes de o termo “genética” ser cunhado. Assim, defendem que a genética é, pura e simplesmente, o estudo dos genes (GRIFFITHS et al., 1996).

A partir daí, surgem questionamentos a respeito de o que são os genes. Com maior unanimidade entre os pesquisadores, gene pode ser definido como um segmento de uma longa molécula de DNA. Essa molécula encontra-se presente em quase todas as células de quase todos os organismos, e é a unidade fundamental da informação genética e, por consequência, da hereditariedade (GRIFFITHS et al., 1996).

O conceito de gene, entretanto, só foi consolidado com a redescoberta dos trabalhos do monge austríaco Gregor Mendel, em 1900. Não pode ser ignorado o fato, porém, de que desde a antiguidade, postulados e experimentos relacionados à área já eram feitos, como os de Aristóteles, em 340 a.C., ou os cruzamentos entre plantas realizados por Kölreuter no século XVIII que evidenciavam a transmissão de características de uma geração para a outra (PIERCE, 2004).

Com os avanços tecnológicos ao longo dos anos e o contínuo interesse pela informação genética, em 1953, James Watson e Francis Crick propuseram, após analisarem os trabalhos, principalmente, de Rosalind Franklin, Linus Pauling e Erwin Chargaff, um modelo para a estrutura do DNA que é aceito ainda na atualidade, a dupla-hélice. Como consequência, as pesquisas na área se tornaram mais frequentes, e vêm trazendo novas informações sobre esta molécula (PIERCE, 2004).

Um exemplo disso foi o desenvolvimento de técnicas que permitem identificar cada pessoa pelo seu DNA, após se ter conhecimento de regiões consideradas polimórficas nesta molécula: apesar de todos os seres humanos compartilharem boa parte do seu genoma, alguns segmentos dele apresentam sequências repetitivas de nucleotídeos, cuja quantidade de repetições é altamente variável entre os indivíduos. Assim, quando mais de um loci é analisado em laboratório, a probabilidade de diferentes pessoas, que não sejam gêmeos univitelinos, terem correspondência entre eles é ínfima (JORDE et al., 2000; CAMPOS et al., 2010).

Tendo em mente este conceito, com os procedimentos corretos, é possível formar um perfil de DNA de interesse forense, que é muito utilizado para identificação de suspeitos em crimes, mas também em testes de paternidade, com vítimas de acidentes, entre outros (JORDE et al., 2000).

Para tanto, as regiões repetitivas mais comumente analisadas são as chamadas STRs (Short Tandem Repeats, em inglês), também conhecidas como microssatélites. Essas regiões, tidas como marcadores genéticos, encontram-se em áreas não codificantes do genoma, quer seja entre os genes, quer seja nos íntrons, dentro dos genes (CAMPOS et al., 2010; MARANO et al., 2010).

Dessa forma, esses marcadores genéticos representam uma das muitas possibilidades práticas de utilização dos conhecimentos gerados por meio dos estudos envolvendo o DNA, a molécula fundamental à vida.

4.2 DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E DO MÉTODO DE BERNOULLI

Teoricamente, a distribuição binomial é a distribuição de probabilidade e estatística discreta do número de sucessos decorrentes de uma determinada sequência de tentativas, que seguem às seguintes características: Espaço amostral finito; Apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) para cada tentativa; Todos os elementos (eventos) devem possuir possibilidades iguais de ocorrência; Eventos devem ser independentes um dos outros.

A probabilidade de ter k sucessos em um evento que segue a distribuição binomial, é calculada através da equação (1):

$$P(x = k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k} \tag{1}$$

Onde a probabilidade de sucesso é dado por ‘p’, e a do fracasso é dado por ‘q’, satisfazendo a relação q = 1 – p. ‘x’ é o número de sucessos numa amostra, ‘n’ corresponde ao número total de ensaios.

Vale lembrar que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$ é a combinação de n valores tomados de k a k. A distribuição binomial é uma ferramenta estatística muito empregada dentro da metodologia, porém.

A *Distribuição Binomial de Bernoulli*, também representada por *Ensaios de Bernoulli* ou *Teorema Binomial* é um método correspondente a uma sequência de ensaios experimentais de tentativas independentes, nos quais a probabilidade **P** de um resultado em cada ensaio não dependa de ensaios anteriores ou posteriores e que esteja limitado a apenas dois resultados chamados de sucessos e fracassos.

A Distribuição Binomial de Bernoulli, consiste em k sendo o correspondente ao número de sucessos em n ensaios independentes, com a mesma probabilidade p de sucessos em cada ensaio e 1 – p a probabilidade de fracassos.

Na *Distribuição Binomial de Jacob Bernoulli*, podemos deduzi-la trabalhando com a seguinte pergunta: Qual a probabilidade de obtermos k sucessos nesses n ensaios?

A probabilidade de nesses n ensaios obtermos k sucessos e, em consequência, n – k fracassos em uma ordem determinada, por exemplo, os sucessos nos k primeiros ensaios e o fracasso nos demais:

$$\underbrace{S.S.S.\cdots.S}_{\mathbf{k}\text{ vezes}}.\underbrace{F.F.F.\cdots.F}_{\mathbf{n-k}\text{ vezes}}$$

$$\underbrace{p.p.p.\cdots.p}_{\mathbf{k}\text{ fatores}}.\underbrace{(1-p).(1-p).(1-p).\cdots.(1-p)}_{\mathbf{n-k}\text{ fatores}}$$

$$p^k.(1-p)^{n-k},$$

pois os ensaios são independentes.

Observe que trocando a ordem de S e F a probabilidade seria a mesma. A probabilidade de obtermos k sucessos e n – k fracassos em qualquer ordem é $p^k.(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordem possível que é determinado por $\binom{n}{k}$ daí, acabamos de provar por dedução o Teorema Binomial

$$\mathbf{P} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{p}^{\mathbf{k}}(\mathbf{1}-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

A seguir serão apresentados cinco exemplos, em uma sequência didática, de modo que a Distribuição Binomial de Bernoulli, como conceito matemático, seja mostrada de forma aplicada e variada com entendimento gradual no que se refere ao aprendizado do estudante. Nessa sequência de exemplos, haverá uma narrativa prévia antes de cada um deles, com a intenção de que o professor compreenda cada processo sequencial e repasse aos estudantes de uma forma lógica didática.

Agora, no exemplo 01, o estudante deverá ser orientado de como pode ser feita a abordagem de Bernoulli nos itens do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem, porém começando também a perceber que independentemente das competências e habilidades exigidas pelas instituições na qual ele se submeterá a um processo seletivo, a abordagem dos experimentos sucessivos é tratada de formas semelhantes.

Exemplo 01

(Enem) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%.

Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0{,}2\%)^4$.
b) $4 \times (0{,}2\%)^2$.
c) $6 \times (0{,}2\%)^2 \times (99{,}8\%)^2$.
d) $4 \times (0{,}2\%)$.
e) $6 \times (0{,}2\%) \times (99{,}8\%)$.

Solução:

Se o cliente comprará 4 aparelhos, sendo exatamente dois aparelhos defeituosos (D), então dois não apresentarão defeitos (N). Se a probabilidade de um modelo apresentar defeito é de 0,2%, a probabilidade de não apresentar será de 100% – 0,2% = 99,8%. Os quatro aparelhos podem ser comprados de várias formas, sendo DDNN, DNDN e NDND algumas delas. Para calcular o total de maneiras que eles podem ser comprados, calcula-se o número de combinações de 4 com 2 defeituosas (D) e mais duas repetições não defeituosas (N), temos:

$$\mathrm{P} = \mathrm{C}_{4,2} \times (0{,}2\%)^2 \times (99{,}8\%)^2$$

$$P = \frac{4!}{2!.2!} \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$$
$$P = 6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$$

No exemplo 02, temos uma linguagem clara do que são sucessos e fracassos no conceito de Bernoulli, juntamente com o fato de que a ordem dos elementos não está definida, trazendo assim a necessidade da permuta, de combinar os elementos envolvidos para o cálculo das possibilidades de posicionamentos.

Exemplo 02

Um levantamento da Associação Americana de Investidores Pessoa Física concluiu que 20% dos seus membros tinham comprado ações diretamente através de uma oferta pública inicial (AAII jornal, julho de 1994).

Em uma amostra de 10 membros destes associados, verifique qual a probabilidade de que exatamente três membros tenha comprado tais ações.

Solução:

De acordo com o enunciado da questão apresentada, a probabilidade de se obter sucesso em comprar ações, diretamente através de uma oferta pública inicial, é de 20% = 0,20 e partido dessa premissa, a probabilidade de fracasso 80% = 0,80.

Sabendo que o total da amostra é de 10 membros e desses, exatamente 3 terem tido sucesso em comprar as ações, logo aplicando os ensaios de Bernoulli, teremos

$$P = \binom{10}{3} \times (0,20)^3 \times (0,80)^{10-3}$$
$$P = \frac{10!}{3!.(10-3)!} \times (0,20)^3 \times (0,80)^{10-3}$$
$$P \simeq 0,2013$$

O exemplo 03, trata de uma linguagem diferente, porém ainda com as mesmas condições lógicas do exemplo 2, e que de fato a ordem dos elementos que representam os sucessos e fracassos, também precisão ser permutadas.

Exemplo 03

(BecharaMath) Acredita-se que 20% dos moradores, nas proximidades de uma indústria siderúrgica, tenham apresentado alergias aos poluentes lançados ao ar.

Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule a probabilidade aproximada de que 3 destes moradores, escolhidos ao acaso dentre 5 selecionados, tenham alergia.

a) 3%
b) 4%
c) 5%
d) 6%
e) 7%

Solução:

Na questão apresentada, 20% dos moradores possuem alergia aos poluentes lançados ao ar e o sucesso determinado por Bernoulli apresenta-se como possuir alergia a poluentes de acordo com a exigência da questão, ou seja, não é o leitor que deve julgar o que é sucesso ou fracasso em um determinado evento, pois para Bernoulli, sucesso é o objetivo a ser atingido nos sucessivos ensaios, logo como o percentual de sucesso é de 20% = 0,20, então o de fracasso deverá ser de 80% = 0,80, complementando então os 100% do experimento. Assim, fazendo o uso da fórmula, obtém-se

$$P = \binom{5}{3} \times (0{,}2)^3 \times (0{,}8)^2$$

$$P = C_{5,3} \times (0{,}2)^3 \times (0{,}8)^2$$

$$P = \frac{5!}{3!\,.2!} \times 0{,}008 \times 0{,}64$$

$$P = 10 \times 0{,}008 \times 0{,}64$$

$$P \simeq 0{,}05 \text{ ou } 5\%$$

No exemplo 04, deve-se novamente esclarecer ao estudante que sempre há uma sequência de experimentos, pois se faz necessário para o uso do método de Bernoulli, contudo há uma ordem já pré-determinada, fazendo com que não haja o cálculo das combinações por causa do exato posicionamento dos sucessos e fracassos desse ensaio, atingindo assim um dos objetivos no ensino e no uso do método, naquilo que se refere a ordem da probabilidade de acontecimentos.

Exemplo 04

(BecharaMath) Suponha que cada uma das chamadas, a um serviço de cancelamento de assinaturas de TV a cabo, tenha uma probabilidade 0,3 de não se obter um sinal de linha ocupada (ter sucesso) e que todas as chamadas sejam independentes.

Qual é a probabilidade mais próxima, de que a primeira conexão seja feita apenas na quarta chamada?

a) 10%
b) 11%
c) 12%
d) 13%
e) 14%

Solução:

Nesse 4º exemplo há uma particular peculiaridade, uma diferença importantíssima para os 3 exemplos apresentados anteriormente. Trata-se da ordem imposta na pergunta, quando determina que *a primeira conexão seja feita apenas na quarta chamada*, isso configura um posicionamento, fazendo com que não se utilize o número binomial apresentado na fórmula de Bernoulli, pois não haverá combinações nas conexões em função das chamadas. Sendo 0,3 a probabilidade de ter sucesso somente na quarta chamada e 0,7 de ter fracasso nas três primeiras chamadas e observando o detalhe da ordem evidenciada, a forma de resolver apresenta-se da seguinte maneira:

$$\mathrm{P} = (0{,}3)^1 \times (0{,}7)^3$$
$$\mathrm{P} = 0{,}3 \times 0{,}343$$
$$\mathrm{P} = 0{,}1029 \simeq 10\%$$

No próximo exemplo, o 05, com mais um item do Exame Nacional de Ensino Médio – Enem, haverá um teste de sucessivos experimentos, onde as únicas respostas possíveis que poderiam ser dadas são verdadeiro ou falso (sucessos ou fracassos) e que já é sabido a probabilidade prévia antes de qualquer uma das respostas que serão fornecidas, baseado em experimentos sucessivos anteriores, de forma que a explicação dessa ordem dos elementos é baseada no exato percentual já determinado.

Exemplo 05

(Enem 2014) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048.
b) 0,08192.
c) 0,24000.
d) 0,40960.
e) 0,49152.

Solução:

Para as 4 primeiras perguntas, deve haver 3 respostas certas e uma só errada, pois a segunda resposta errada será exatamente na quinta pergunta, como exigido no experimento da questão, assim a distribuição de Bernoulli se dá apenas nas 4 primeiras perguntas, logo

$$\mathrm{P} = \binom{4}{1} \times (0{,}20)^1 \times (0{,}80)^{4-1}$$

$$\mathrm{P} = \frac{4!}{1!\,.3!} \times (0{,}20)^1 \times (0{,}80)^3$$

$$\mathrm{P} \simeq 0{,}4096$$

Como P = 0,4096 corresponde as quatro primeiras perguntas, temos ainda que multiplicar pela probabilidade da quinta pergunta que é de 0,20, assim

$$P_{(\text{ FINAL })} = P \times P_{(\text{ 5ª pergunta })}$$

$$P_{(\text{ FINAL })} = 0{,}4096 \times 0{,}2$$

$$P_{(\text{ FINAL })} = 0{,}08192$$

Agora vamos as orientações matemáticas específicas ao professor de Biologia que no uso do método dos Ensaios de Bernoulli, possa traçar estratégias de como os estudantes na qual ele orienta, poderiam ter entendimento desses ensaios sucessivos em experimentos.

4.2.1 Os ensaios de Bernoulli junto ao professor

Ao professor de Biologia ou Matemática, sugere-se que o mesmo faça uso da sequência apresentada neste trabalho, que é direcionada para compreensão da prática pedagógica, visando contribuir para que o estudante supere os obstáculos epistemológicos e didáticos que ocorrem na abordagem dos conceitos matemáticos que envolvem a temática Genética em sala de aula.

Uma outra sugestão, é que o professor observe com muita atenção como é utilizado a distribuição de Bernoulli em alguns casos, principalmente no que se refere a ordem dos resultados de cada sequência dos ensaios.

Na fórmula de Bernoulli $P = \binom{n}{k} . p^k . (1-p)^{n-k}$, o número binomial $\binom{n}{k}$ = $C_{n,k}$ só irá ser utilizado caso não haja ordem nos resultados desses experimentos sucessivos, pois se houver ordem, os cálculos se restringirão a apenas $P = p^k . (1-p)^{n-k}$, como no “Exemplo 4” da Seção 4.2, Definição do Conceito de Distribuição Binomial e do Método de Bernoulli, onde dizia “que a primeira conexão seja feita apenas na quarta chamada”.

Como nessa subseção há um compartilhamento apresentado da matemática com o professor de Biologia, a seguir também serão mostrados alguns problemas de aplicação dos ensaios de Bernoulli em probabilidade aplicada na genética.

No exemplo 06, é abordado o Teorema Binomial de forma matemática, resolvido de duas maneiras diferentes, a primeira de forma construtivista pois o número de possibilidades é consideravelmente acessível, porém se fosse um número de possibilidades considerado exaustiva, concluiria melhor na segunda maneira abordada, onde é usado o Ensaio de Bernoulli, no entanto sem o envolvimento com a Biologia, para que o professor compreenda a partir dessa premissa, o uso em genética.

Exemplo 06

(BecharaMath) Em uma atividade com seus alunos do ensino médio, o profº Bechara Junior utiliza do seguinte experimento: Lança-se uma moeda, não viciada, ao acaso por três vezes e observam-se os resultados obtidos na face da moeda voltada para cima.

Qual a probabilidade de, nos resultados obtidos,

a) aparecer duas caras e uma coroa nas faces da moeda?
b) aparecer somente nos dois primeiros resultados a face cara?

Solução:

No exemplo acima, de forma introdutória, onde é utilizado uma moeda, cujo número de resultados obtidos em um experimento é o mesmo número de possíveis resultados em nascimento de crianças no que se refere ao sexo delas, tornando assim uma melhor compreensão dos fatos.

1ª maneira

Pois bem, observe que na alternativa ‘**a)**’ o experimento consiste em obter duas caras e uma coroa, porém não se determinou uma ordem na sequência de resultados nos três lançamentos.

Vamos utilizar Ca para identificar os resultados para cara e Co para coroa, obtendo assim oito possibilidades de resultados no total (tabela 1), porém duas caras e uma coroa somente em três desses resultados (tabela 2).

Tabela 1

Ca – Ca – Ca	Ca – Co – Co
Ca – Ca – Co	Co – Ca – Co
Ca – Co – Ca	Co – Co – Ca
Co – Ca – Ca	Co – Co – Co

Tabela 2

Ca – Ca – Co
Ca – Co – Ca
Co – Ca – Ca

Assim, as chances probabilísticas são de três chances em oito.

2ª maneira

Utilizando do método de Bernoulli em que $P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, e que em uma moeda não viciada só podemos obter cara ou coroa, nos resultados de seus lançamentos, ou seja, 50% de chance para cada face da moeda, obtemos

$$P = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1$$

$$P = \frac{3!}{2!\,.1!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$P = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{3}{8}$$

Como são somente três lançamentos, é fácil escrever rapidamente todos os possíveis resultados em um papel ou até com o termo 2^n, onde o 2 representa as chances cara ou coroa e n o número de lançamento, perfazendo assim $2^3 = 8$ possibilidades, porém se fossem 10 lançamentos? Seria $2^{10} = 1024$ possibilidades, já inviável escrever, e ainda mais, se não fossem somente cara ou coroa? É importante que o estudante observe que o método de Bernoulli facilita os cálculos para qualquer número de ensaios.

Deveremos também, incluir o conceito de permutação para o melhor entendimento destes estudantes, no que se refere a ordem dos resultados e comparando com o conceito de combinação simples. Assim, obter duas caras e uma coroa nas faces da moeda em três lançamentos, em qualquer ordem, dá a entender ao estudante que já teve acesso e entendimento dos conceitos de permutação, de que o mesmo possa fazer da seguinte maneira:

$$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\,.1!} = C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$$

Com isso, saberá exatamente quando incluir ou não o número binomial na fórmula de Bernoulli, ou seja, quando houver ou não a necessidade de permutar os possíveis resultados de um experimento aleatório sucessivo.

Para a alternativa '**b)**', onde determina que o experimento, em lançar três vezes uma moeda, consiste em obter somente nos dois primeiros resultados a face cara e que por analogia, no terceiro lançamento a face coroa, onde claramente determina-se uma ordem, portanto não podendo haver permutação dos resultados, logo não incluir o número binomial na fórmula de Bernoulli, fazendo da seguinte maneira:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1$$

$$P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{8}$$

Os sucessos e fracassos de um experimento sucessivo, defendidos por Bernoulli, devem ser diferenciados após a leitura das questões, observando o que o autor determina como objetivo a ser alcançado, como no exemplo 07, onde sucesso é encontrar defeitos, mesmo sabendo que sucesso também poderia ser, não encontrar esses defeitos em uma linha de produção de peças, assim se faz necessário a abordagem ao estudante no que tange a diferenciação entre aquilo que são considerados como sucessos e fracassos.

Exemplo 07

(BecharaMath) Uma empresa que produz acessórios para uso em equinos, precisa fazer a inspeção de qualidade nas ferraduras produzidos antes da venda. Cinco dessas ferraduras são escolhidas ao acaso da produção de certa máquina, que apresenta 5% de ferraduras defeituosas.

Qual a probabilidade de que exatamente duas dessas ferraduras sejam defeituosas?

Solução:

Segundo o problema proposto, em uma amostra de cinco ferraduras escolhidas ao acaso, 5% = 0,05 delas representa o sucesso em encontrar as defeituosas, com isso, por analogia 95% = 0,95 seria o fracasso em encontrar as defeituosas daí, como dessa amostra somente duas devem ser defeituosas, então a probabilidade é dada por

$$P = \binom{5}{2} \times (0{,}05)^2 \times (0{,}95)^{5-2}$$

$$P = \frac{5!}{2!\,.3!} \times (0{,}05)^2 \times (0{,}95)^3$$

$$P \simeq 0{,}0214$$

As seguir, durante toda a subseção 4.2.2, será aplicada de forma gradual, a lógica dos conceitos da Distribuição Binomial de Bernoulli à Genética em diversos exemplos junto a respetivos comentários individuais, pois cada um dos casos apresentados possui especificidades, fazendo assim com que o professor repasse aos estudantes de forma gradual e diversificada.

4.2.2 Aplicando os ensaios de Bernoulli à genética

O ensino baseado em conteúdo que envolvem fenômenos aleatórios, por meio de experimentos, observações, fatos, coletas e análise de dados de modo interdisciplinar, pode possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do seu senso crítico, utilizando de diversas ferramentas apresentas pela aproximação dos conceitos Matemáticos a Biologia.

Como citado no livro Contexto e Aplicações, Volume 2 por DANTE (2013):

> A Genética é, talvez, o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios, e um bom exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes.

Nesta subseção serão apresentados problemas escolhidos a partir das discussões desse texto e que evidenciam a interdisciplinaridade entre os ensaios de Bernoulli em probabilidade aplicada na genética, onde a linguagem estabelecida é mais biológica que matemática, no entanto vale ressaltar para o estudante que os conceitos puramente matemáticos vistos anteriormente neste trabalho, sejam os mesmos apesar das linguagens específicas de cada uma das ciências

Exemplo 08

(UFL – Ferreira, D.F.) Considere nascimentos de n = 4 filhotes de coelhos de uma determinada raça. Nesta raça há um distúrbio genético e a probabilidade de nascer fêmea é $5/_8$. Sendo X a ocorrência de fêmeas e utilizando a distribuição binomial obter a distribuição de probabilidade de X, ou seja, os valores e as probabilidades associadas aos respectivos valores x.

Solução:

Neste caso assumimos que X, definida como o número de fêmeas, possui distribuição binomial com parâmetros n = 4 e $\mathrm{p} = 5/_8$. A probabilidade de sucesso não é $1/_2$, de acordo com as leis de Mendel, pois há um distúrbio genético na raça. Usualmente usamos a seguinte notação para dizer a mesma coisa que acabamos de explicar:

X ~ Binomial (n = 4; $p = {}^{5}/_{8}$).

Para obtermos a distribuição de probabilidade de X, podemos utilizar o modelo binomial dado por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$, para x = 0, 1, ..., 4.

Assim, para a probabilidade P(X = 0) temos,

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{5}{8}\right)^0 \times \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!.(4-0)!} \times 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^4$$

$$P(X = 0) = 1 \times 1 \times 0{,}0198$$

$$P(X = 0) \simeq 0{,}0198$$

Para a probabilidade P(X = 1) temos,

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{5}{8}\right)^1 \times \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!.(4-1)!} \times \left(\frac{5}{8}\right)^1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$$

$$P(X = 1) \simeq 0{,}1318$$

Para a probabilidade P(X = 2) temos,

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!.(4-2)!} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$P(X = 2) \simeq 0{,}3295$$

Logo, para finalizarmos, partindo dessas premissas, temos que para P(X = 3) $\simeq$ 0,3662 e para P(X = 4) $\simeq$ 0,1526

A questão do Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, a seguir foi colocada ao candidato dentro dos itens correspondentes a área de conhecimento de

Matemática, assim observa-se novamente a necessidade da interação Matemática e Biologia.

Exemplo 09

(Enem 2009) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, que exatamente 2 filhos sejam homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens.

Após os cálculos, o casal conclui que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é:

a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

Solução:

A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é $1/2$ e de uma criança do sexo feminino também é $1/2$, perfazendo assim 100% do experimento. Como o casal pretende ter 3 filhos, com exatos dois do sexo masculino, temos como uma das configurações HHM, porém em qualquer ordem logo, o modelo binomial fica da seguinte forma

$$\mathrm{P} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\mathrm{P} = \frac{3!}{2!\,.1!} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P} = 3 \times \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa ‘e)’, pois como a probabilidade foi de 37,5%, inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico.

Exemplo 10

(Acafe 2018) Um casal que pretende ter 5 filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada de seus futuros filhos. Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é

a) exatamente 17%.
b) maior que 15%.
c) menor que 14%.
d) exatamente 18%.
e) maior que 18%.

Solução:

Pelo Teorema Binomial, sucesso nesse experimento é possuir a característica genética de $^1/_3$ de 100% das chances, com isso $^2/_3$ seria fracasso. Como este casal quer determinar a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica genética, segue que a probabilidade é dada por

$$\mathrm{P} = \mathrm{C}_{5,3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\mathrm{P} = 10 \times \frac{1}{27} \times \frac{4}{27}$$

$$\mathrm{P} = 10 \times \frac{4}{243} \times 100\%$$

$$\mathrm{P} \simeq 16{,}46\%$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa ‘b)’, pois é maior que 15% e diferente de 17% e de 18%.

Exemplo 10

Na população do Brasil, 85% têm Rh+. Três pessoas são amostradas ao acaso dessa população. Construa a distribuição binomial e faça um gráfico.

Solução:

n é o número de pessoas: n = 3

X é o número de pessoas com Rh+ na amostra p é a probabilidade de Rh+: p = 0,85

q é a probabilidade de Rh-: q = 1 – p = 0,15

Cálculos intermediários para obter a distribuição binomial

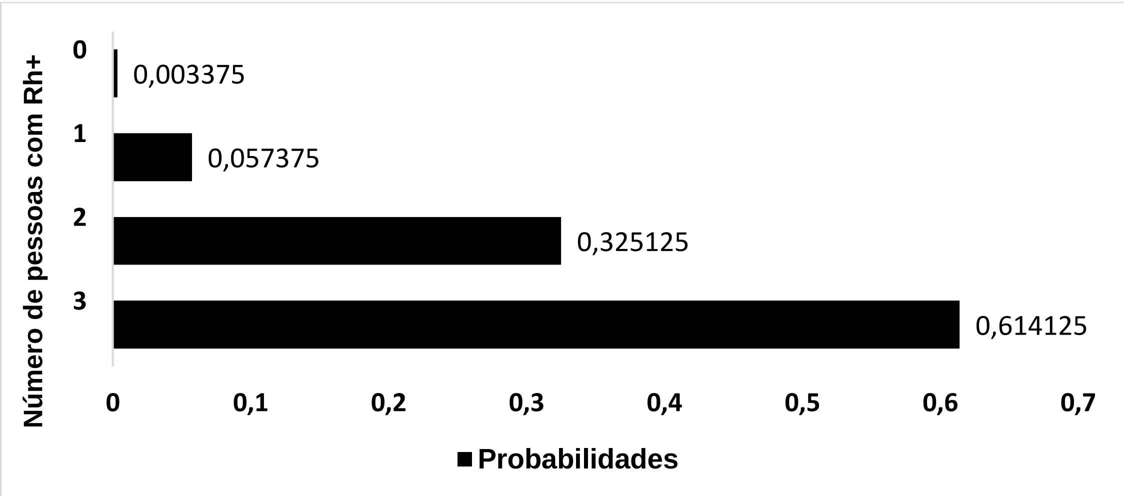
Eventos	X	Cálculos	Probabilidade
Rh+, Rh+, Rh+	3	0,85 x 0,85 x 0,85	0,614125
Rh+, Rh+, Rh-	2	0,85 x 0,85 x 0,15	0,108375
Rh+, Rh-, Rh+	2	0,85 x 0,15 x 0,85	0,108375
Rh-, Rh+, Rh+	2	0,15 x 0,85 x 0,85	0,108375
Rh+, Rh-, Rh-	1	0,85 x 0,15 x 0,15	0,019125
Rh-, Rh+, Rh-	1	0,15 x 0,85 x 0,15	0,019125
Rh-, Rh-, Rh+	1	0,15 x 0,15 x 0,85	0,019125
Rh-, Rh-, Rh-	0	0,15 x 0,15 x 0,15	0,003375

Para construir a tabela de distribuição binomial, some probabilidades de eventos que levam ao mesmo valor de X. A distribuição é dada na tabela a seguir.

Distribuição de probabilidades do número de pessoas com Rh+, numa amostra de três pessoas.

Valores de X	Probabilidade
3	0,614125
2	0,325125
1	0,057375
0	0,003375

Distribuição de probabilidades do número pessoas com Rh+, em três pessoas.



Exemplo 11

(BecharaMath) Alguns estudos determinam que a probabilidade de um menino nascer com daltonismo é de 7%. Qual é a probabilidade de serem daltônicos todos os quatro meninos que se apresentaram, em determinado dia, para um exame oftalmológico?

Solução:

No problema, p = 0,07. Então q = 1 – 0,07 = 0,93. O número de meninos é n = 4. Para obter a probabilidade de x assumir valor 4, aplica-se a fórmula de Bernoulli

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \times (0{,}07)^4 \times (0{,}93)^{4-4}$$

$$P(X = 4) = \frac{4!}{4!.(4-4)!} \times 0{,}00002401 \times 1$$

$$P(X = 4) = 1 \times 0{,}00002401 \times 1$$

$$P(X = 4) = 0{,}00002401 \text{ ou } 0{,}0024\%$$

Exemplo 12

O resultado do cruzamento de ervilhas amarelas homozigotas (AA) com ervilhas verdes homozigotas (aa) são ervilhas amarelas heterozigotas (Aa). Se estas ervilhas forem cruzadas entre si, ocorrem ervilhas amarelas e verdes na proporção de 3 para 1. Portanto, a probabilidade de, num cruzamento desse tipo, ocorrer ervilha amarela é p = $3/4$ e a probabilidade de ocorrer ervilha verde é q = $1/4$. Logo, o número de ervilhas amarelas em um conjunto de n ervilhas é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p = $3/4$. Foram pegas, ao acaso, 4 ervilhas resultantes do cruzamento de ervilhas amarelas heterozigotas.

Qual é a probabilidade de 2 dessas 4 ervilhas serem de cor amarela?

Solução:

A probabilidade de duas das quatro ervilhas serem amarelas, sabendo que 2 representa o número de sucesso para se obter essas ervilhas, em uma probabilidade de 75% = $3/4$ e ervilhas verdes, o fracasso de 25% = $1/4$, assim o procedimento é dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!.(4-2)!} \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{16}$$

$$P(X = 2) = 6 \times 0{,}03516$$

$$P(X = 2) \simeq 0{,}2109 \text{ ou } 21{,}09\%$$

Exemplo 13

(BecharaMath) A probabilidade de um casal heterozigoto para o gene da fenilcetonúria ter um filho afetado é $1/_4$. Se o casal tiver três filhos, qual é a probabilidade de ter um filho com a doença?

Solução:

No cruzamento apresentado a seguir

Aa × Aa

AA Aa Aa aa

se um casal heterozigoto, tiver três filhos, sendo um deles afetado com o gene da fenilcetonúria (homozigoto recessivo) no caso aa, a probabilidade desse evento acontecer é de $1/_4$ ou 25% e aplicando a distribuição binomial de Bernoulli

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-1}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(X = 1) = \frac{3!}{1!.(3-1)!} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{16}$$

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{16}$$

$$P(X = 1) = \frac{27}{64} \text{ ou } 42{,}19\%$$

Exemplo 14

Suponha que, em uma população parental de moscas das frutas, a frequência de alelos para o fracasso (F) de um inseticida usado no combate de moscas seja $1/2$ e a frequência de alelos para sucesso (S) seja $1/2$.

- Frequência de alelos para fracasso (F) = $1/2$.
- Frequência de alelos para sucesso (S) = $1/2$.

A frequência de gametas F e S na população é a mesma, ou seja:

- Frequência de gametas para fracasso (F) = $1/2$.
- Frequência de gametas para sucesso (S) = $1/2$.

No caso de organismos diploides, os gametas distribuem-se de acordo com uma distribuição binomial, uma vez que são possíveis apenas dois resultados em cada tentativa, ou seja, ou S ou F.

Vamos supor que apenas três zigotos sobreviveram quando o inseticida foi aplicado.

a) Qual é a probabilidade de que os três sejam homozigotos FF?
b) Qual é a probabilidade de que cada um dos três zigotos tenha genótipos diferentes, em outras palavras, qual é a probabilidade de obter FF, FS, SS?

Solução:

a) n = 2N gametas na amostra = 6
   x = número de gametas F na amostra = 6

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-6}$$

$$P(X = 6) = \frac{6!}{6!.(6-6)!} \times \frac{1}{64} \times 1$$

$$P(X = 6) = \frac{1}{64} \text{ ou } 1{,}56\%$$

b) Esta seria a probabilidade de que três gametas tenham o alelo F e três tenham o alelo S. Então:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3}$$

$$P(X = 3) = \frac{6!}{3!.(6-3)!} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$$

$$P(X = 3) = 20 \times \frac{1}{64}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{16} \text{ ou } 31{,}25\%$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ainda que a Biologia e a Matemática estejam em diferentes campos de estudo, elas guardam entre si possibilidades de ações articuladoras dos seus saberes, como no caso da aplicação da probabilidade em trabalhos de genética. O objetivo deste trabalho foi mostrar a aplicabilidade em sala de aula, de uma sequência didática e as diversas vantagens de métodos lógicos matemáticos, para o entendimento dos estudantes sobre questões que envolvam genética.

A probabilidade, como ferramenta de integração das diversas formas de tratamento do assunto de genética e suas conexões no campo da biologia. Com a demonstração dos teoremas de análise combinatória e as expressões voltadas para o cálculo de probabilidade é possível trazer valiosas discussões para a sala de aula no ensino médio.

Com a atuação dos professores nas salas de ensino é possível perceber o valor de trabalhar estes assuntos de forma conjunta, fazendo com que estudantes que não tinham o entendimento ou que o possuíam apenas de maneira isolada em cada área, possam perceber que uma disciplina pode ajudar a outra, por meio do diálogo entre áreas do conhecimento.

O entendimento de análise combinatória e probabilidade são fundamentais para os alunos devido à sua larga utilização na Estatística, nos processos de contagem e de suas formas de avaliar a chances de determinados experimentos ou na ocorrência de determinados fenômenos. Assim, estes assuntos atuam como um instrumento de percepção da realidade na qual lidamos no dia a dia.

O professor de Biologia ensina aos discentes os conteúdos de Matemática que outrora são abordados nas questões de genética, contudo, muita das vezes este docente não está familiarizado com tais conhecimentos matemáticos e consequentemente, a dificuldade em ensiná-los, assim como em contrapartida o professor de Matemática ao fazer uso de aplicações em Genética, também encontra dificuldades com esses conceitos. Tais conflitos, nos motivou a propor essa sequência didática que leva em consideração a construção lógico matemática para o entendimento da Genética, deve haver a consistência dos conceitos de Genética, Distribuição Binomial e de Jacques Bernoulli e a partir de apontamentos de professores, em relação as dificuldades apresentadas por estudantes.

Essa sequência didática, pode ser capaz de promover articulação entre Matemática e Biologia de modo que procedimentos e técnicas que se adéquem ao estudo das teorias da probabilidade para compreensão do contexto de Genética e permitir posteriormente uma interação do estudante com aplicações que envolvam esse contexto.

Com isso, a concomitância da discussão destas duas áreas do conhecimento torna-se fundamental para sua efetivação, assim isso posto podemos minimizar dificuldades dos estudantes com relação a interpretação de problemas que envolvam o tópico Genética por meio de uma abordagem interdisciplinar.

Por tudo exposto, esperamos que a pesquisa contribua para uma compreensão dos assuntos aqui abordados tanto em probabilidade como também na genética, para que professores possam olhar oportunidades que outras disciplinas nos trazem, compartilhando dessa proposta e implementando-a na sala de aula de educação básica e também em cursos preparatórios para acesso a processos seletivos em Universidades.

Reconhecemos esse texto como um produto educacional que deve contemplar a realidade escolar, a metodologia utilizada, a disponibilidade dessas discussões para outros professores de Matemática, inclusive professores de Biologia como forma de promover reflexão e avaliação dos resultados.

REFERÊNCIAS

AMABIS, J. M.; MARTHO, G. R. **Biologia**: volume 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

ANDRÉ, M. E. D. A. Questões do cotidiano na escola de 1° grau. In: ANDRÉ, M. E. D. A. **Série ideias.** São Paulo: FDE, 1991.

AYUSO, M. et al. Stimulation of barley growth and nutrient absorption by humic substances originating from various organic materials. **Bioresource Technology**, v. 57, n. 3, p. 251-257, 1996.

BERGE, Claude. Principles of combinatorics. **New York**, p. 176, 1971.

BOYER, C. B. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

CAMPOS, C. K. P.; SIQUEIRA, M. N.; BORGES, J. P.; RODRIGUES, L. A.; OLIVEIRA, J. S.; ROSA, M. A.; NEVES, A. F. Exames de paternidade pelo DNA: uma metodologia para ensino da genética molecular. **Genética na Escola**, v. 5, n. 2, p. 7-13, 2010.

CARVALHO, S. P. **A área e o perímetro de um círculo.** 2013.

CASSIANO, Cláudio Roberto de Paula; ALVES, Osvando dos Santos. Probabilidade e Estatística: Funcionalidade Cotidiana, 2012. Disponível em: http://www.webartigos.com/_resources/files/_modules/article/article_100984_20121204234048f78f.pdf. Acesso em: 10 nov.2020.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber:** elementos para uma teoria. Tradução de Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

CID, M. & NETO, A. J. Dificuldades de aprendizagem e conhecimento pedagógico do conteúdo: o caso da genética. **Enseñanza de las Ciencias**, n. Extra, p. 1-5, 2005.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revemat, Florianópolis**, SC, v.2, n.1, p.50-67, 2007.

DANTE, LUIZ ROBERTO **Matemática**: **Contexto** & **Aplicações** / Luiz Roberto Dante. – **2ª**. ed. – São Paulo: Ática, 2013.

DOMINGUES, H. “Cardano: o intelectual jogador”. In: HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Editora Atual, 1993.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. Matemática escolar e matemática da vida cotidiana. Autores Associados, 1999.

GOLDBACH, C. **Encyclopædia Britannica** Online. 2009. Consultado em 20 de setembro de 2020.

GRAHAM, R. L.; GROETSCHEL, M.; LOVÁSZ, L. (eds.). **Handbook of Combinatorics**, Volumes 1 and 2. MIT Press, 1996.

GRIFFITHS, R.; TIWARI, B. AVIAN, C. H. D. Genes and their use in methods for sex identification in birds. International patent publication no. WO9639505. **Isis Innovation,** Oxford. 1996.

GUIZELINI, A. **Um estudo sobre a relação com o saber e o gostar de Matemática, Química e Biologia.** 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

HAZZAN, S. Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 5 - Combinatória e Probabilidade. 6ª Edição. São Paulo: Atual, 1993.

HOWARD, E. **Introdução à História da Matemática**. Campinas SP, Editora da Unicamp 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: Ciência e Aplicações, 2010.

ISHIHARA, Cristiane Akemi; PESSOA, Neide Antônia. Matemática, 2010.

JORDE, L. B.; CAREY, J. C.; BAMSHAD, M. J.; WHITE, R. L. Variação genética: origem e detecção. In: JORDE, L. B.; CAREY, J. C.; BAMSHAD, M. J.; WHITE, R. L. **Genética Médica**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2000.

JORDÃO, R. S. Diários de estudo como meios para a avaliação no ensino superior. **Olh@res**, Guarulhos, v. 1, n. 2, p. 129-154, 2013. Disponível em: <http://www.olhares.unifesp.br/index.php/olhares/article/view/38>.

LEITE, R. C. M. **A produção coletiva do conhecimento científico: um exemplo no ensino de genética**. 2004. 211 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LOPES, S. G. B. C. **Bio** – Vol 3, 4ª Edição 1999, São Paulo, Editora Saraiva.

MLODINOW, Leonard. **O Andar do Bêbado**, 2011.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática.** Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

MOREIRA, M. C. A.; SILVA, E. P. Concepções prévias: uma revisão de alguns resultados sobre genética e evolução. **Evento Regional de Ensino de Biologia. Niterói**, 2001

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARAVALHO, P. C. P.; FERNADEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. SBM, Rio de Janeiro, 2015.

MOTOKANE, M.; STOQUI, M. V.; TRIVELATO, S. L. Características de sequências didáticas promotoras da alfabetização científica no ensino de biologia. IX Congresso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciências. Girona, p. 2421, 2013.

OLIVEIRA, M. O. **Análise Combinatória ou Adivinhatória:** Eis a Questão + Probabilidade. 2ª Edição. Belém PA - GTR 2010.

PASTOR, J. R. **Elementos de Análisis Algebraico.** 5ed. Madrid: Talleres Lusy, 1939.

PIERCE, B. A. **Genética**: um enfoque conceitual. Guanabara Koogan, 2004.

POZO, J. I.; CRESPO, M. A. G. **A aprendizagem e o ensino de ciências:** do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009**.**

ROTUNNO, S. A. M. **Estatística e Probabilidade: Um Estudo sobre a inserção desses conteúdos no Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado. Curitiba: UFPR, 2007.

SÃO PAULO. **Orientações curriculares e proposições de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental**: ciclo II. 2007.

SILVEIRA, E. Reflexões Ontológicas Em Educação Matemática: Heidegger e a Perspectiva Da Educação Matemática Crítica. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 7, n. 2, 2001.

SILVEIRA, R. V. M.; AMABIS, J. M. ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 4., 2003, Bauru. **Como os estudantes do ensino médio relacionam os conceitos de localização e organização do material genético?** Bauru: **anais**, ABRAPEC, 2003.

SILVA, C. B. & COUTINHO, C. Q. S. O nascimento da Estatística e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade. **Revista Integração.** v. ano XI, n. 41, p. 191-196, 2005.

SILVA JUNIOR, C. **Biologia** 3. 10ª Edição. São Paulo, Editora Saraiva. 2013.

SILVA, M. N. P. "**História da Probabilidade**". Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia-probabilidade.htm. Acesso em 28 de dezembro de 2019.

SILVA, L. P. M. **"O que é permutação?";** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-permutacao.htm. Acesso em 28 de dezembro de 2019.

SILVA, Cláudia Borim e COUTINHO, Cleida de Queiroz e Silva. O nascimento da Estatística e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade. *Revista Integração*. v. ano XI, n. 41, p. 191-196, 2005.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké, Campinas**, v. 7, n. 12, p. 95-117, 1999.

STANLEY, R. P. **Enumerative Combinatorics,** Vol. 1 and 2. Cambridge University Press, 1997 and 1999.

VAZQUEZ, C. M. R. O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista. Tese (Mestrado em ciências exatas) - Ufscar, 2011.

VIALI, L. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, p. 143-153, 2008.

WIELEITNER, H. **História da Matemática**. Barcelona: Labor, 1932,

XAVIER, M. C. F.; FREIRE, A. S.; MORAES, M. O. A nova (moderna) biologia e a genética nos livros didáticos de biologia no ensino médio. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 12, n. 3, p. 275-289, 2006.

ZABALA, A. A Prática Educativa. Como ensinar. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO APLICADO À PROFESSORES DE BIOLOGIA

Desde já, de coração, lhe sou muito grato por ajudar em meu trabalho.

Professor(a), me chamo Elias Bechara Jr., mestrando do Programa de Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT.

Estou desenvolvendo uma pesquisa intitulada " ENSAIOS DE BERNOULLI E A GENÉTICA: uma sequência didática propositiva para o ensino de Matemática ".

Os Ensaios de Jacob Bernoulli, também representada por *Distribuição Binomial de Bernoulli* ou *Teorema Binomial*, consiste em **P** sendo a probabilidade de um determinado evento em que **k** sendo o correspondente ao número de sucessos em **n** ensaios independentes, com a mesma probabilidade **p** de sucessos em cada ensaio e **1 – p** a probabilidade de fracassos, onde este é determinado por

$$\mathbf{P} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} . \mathbf{p}^{\mathbf{k}} . (\mathbf{1} - \mathbf{p})^{\mathbf{n}-\mathbf{k}}$$

O conjunto de perguntas contidas neste questionário, ligadas diretamente em como a Matemática interfere no ensino de Genética, referem-se às suas experiências ao lecionar para alunos de ensino médio que estavam/estão se preparando para ingressar no ensino superior a partir de processos seletivos.

1. Você gosta de Genética?

( ) Não muito.

( ) O necessário.

( ) Muito.

2. Você gosta de Matemática?

( ) Não.

( ) O necessário.

( ) Muito.

3. Sobre a incidência de questões sobre Genética nos processos seletivos de ingressos nas universidades.

( ) Pouca.

( ) Mediana.

( ) Muita.

4. Sobre a incidência de questões de Genética com a Probabilidade nos processos seletivos de ingressos nas universidades.

( ) Pouca.

( ) Mediana.

( ) Muita.

5. Você aborda com seus alunos o conceito matemático de ordenação das mais variadas possibilidades, como por exemplo, onde se pode calcular as possibilidades prévias do sexo no nascimento de crianças, na característica genética de um experimento ordenado, etc.?

( ) Não.

( ) Sim.

6. Se você encontra dificuldades em falar sobre cálculos matemáticos no conceito de ordenação na genética, qual seria essa dificuldade?

( ) Compreensão conceitual.

( ) A Probabilidade Matemática.

( ) Outros. ...

Ainda referente a questão anterior, caso você tenha respondido OUTROS, quais seriam as principais dificuldade?

____

____

7. Você descreve ao seu aluno que há um processo de contagem da matemática chamado Análise Combinatória que possui em um de seus temas a Permutação Simples e com Repetição que trata em determinar o número de possibilidades na troca da ordem de um experimento, ou de uma característica genética?

( ) Não há necessidade.

( ) O suficiente / bastante.

8. Antes ou durante o ensino de Genética com Probabilidade, você aborda sobre o Triângulo de Pascal?

( ) Não há necessidade.

( ) O suficiente / bastante.

9. Você descreve ao seu aluno que há um processo de contagem da matemática chamado Análise Combinatória que possui em um de seus temas a Combinação e que está relacionada diretamente a um número binomial do Triângulo de Pascal?

( ) Não há necessidade.

( ) O suficiente / bastante.

10. No que diz respeito a genética, você comenta o assunto chamado Distribuição Binomial?

( ) Não há necessidade.

( ) O suficiente / bastante.

11. Devido a matemática, se achar necessário, relate se há dificuldades encontradas no entendimento de seus alunos no ensino da Genética com Probabilidade.

____

____