



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA – PROFMAT**



JADSON CARVALHO DE OLIVEIRA JUNIOR

**UMA CONTRIBUIÇÃO NA INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE OS
NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES EM CIRCUITOS DE
CORRENTE ALTERNADA NO NÍVEL DO ENSINO MÉDIO**

MACAPÁ/AP
2022

JADSON CARVALHO DE OLIVEIRA JUNIOR

**UMA CONTRIBUIÇÃO NA INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE OS
NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES EM CIRCUITOS DE
CORRENTE ALTERNADA NO NÍVEL DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ/AP
2022

O48 Oliveira Júnior, Jadson Carvalho de.

Uma contribuição na interdisciplinaridade entre os números complexos e aplicações em circuitos de corrente alternada no nível do ensino médio / Jadson Carvalho de Oliveira Junior. - 2022.

1 recurso eletrônico. 62 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática, Macapá, 2022.

Orientador: José Walter Cárdenas Sotil.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Matemática. 2. Números Complexos. 3. Corrente Alternada. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD 23. ed. – 510

OLIVEIRA JÚNIOR, Jadson Carvalho de. **Uma contribuição na interdisciplinaridade entre os números complexos e aplicações em circuitos de corrente alternada no nível do ensino médio.** Orientador: José Walter Cárdenas Sotil. 2022. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática. Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Jadson Carvalho de Oliveira Junior intitulada: “*Uma contribuição na interdisciplinaridade entre os Números Complexos e Aplicações em Circuitos de Corrente Alternada no nível de Ensino Médio*”, após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 03 de Novembro de 2022.

Documento assinado digitalmente
 JOSE WALTER CARDENAS SOTIL
Data: 07/11/2022 00:31:20-0300
Verifique em <https://verificador.itl.br>

Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)



Dr. Marleson Rôndiner dos Santos Ferreira

Avaliador Externo (IFAP)



Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco
Avaliador interno (PROFMAT-UNIFAP)



Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte
Avaliador interno (PROFMAT-UNIFAP)

MACAPÁ/AP

2022

AGRADECIMENTOS

A Deus pelas providências e bênçãos ao longo da vida.

A todos os professores que tive na pós-graduação, pela contribuição nas disciplinas que possibilitaram minha aprovação no Exame Nacional de Qualificação (ENQ).

A todos colegas da turma 2019 do PROFMAT, pela troca de ideias nas centenas de problemas resolvidos ao longo do curso.

Aos meus amigos próximos da UEAP, pelo incentivo em finalizar essa pós-graduação.

A todos os meus chefes imediatos pela paciência e compreensão.

“É melhor conseguir sabedoria do que ouro; é melhor ter conhecimento do que prata.” (Provérbios 16:16)

RESUMO

Esta pesquisa é de cunho bibliográfico, trata sobre números complexos e tem como objetivo elaborar questões desse assunto contextualizadas com a análise de corrente alternada, tendo como foco a relação entre as grandezas tensão, corrente e impedância. Para isso, será feita uma breve revisão sobre números complexos contendo suas propriedades e demonstrações, bem como um resumo histórico sobre sua origem e contribuições de alguns dos principais autores. Além disso, também será necessária uma revisão sobre corrente alternada, com a definição das principais grandezas trabalhadas e esclarecimentos sobre a notação utilizada para representação e principais operações dos números complexos desse campo de estudos. Desse modo, com base nas revisões apresentadas, serão expostas as questões elaboradas bem como sua solução. Portanto, esses exercícios interdisciplinares poderão ser utilizados em aulas sobre números complexos para alunos de ensino médio, uma vez que o texto referente às questões fornece todas as instruções sobre como resolver exercícios elementares propostos.

Palavras-Chave: Números Complexos, exercícios interdisciplinares, tensão, impedância, Corrente Alternada.

ABSTRACT

This research is of a bibliographic nature, it deals with complex numbers and aims to elaborate questions on this subject contextualized with the analysis of alternating current, focusing on the voltage, current and impedance ratios. For this, a brief review will be made about complex numbers containing its properties and demonstrations, as well as a summary of its origin and contributions from some of the main authors. In addition, a review topic on alternating current will also be done, with the definition of the main quantities used in this paper and clarifications on the notation used to represent and main operations of complex numbers in this field of study. Thus, based on the revisions presented, the questions elaborated as well as their solution will be exposed. Therefore, these interdisciplinary exercises can be used in classes on complex numbers for high school students, since the text related to the questions provides all the instructions on how to solve proposed elementary exercises.

Keywords: Complex Numbers, Interdisciplinary Exercises, Voltage, Impedance, Alternating current.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 01: Plano de Argand-Gauss | 22 |
| Figura 02: Módulo (Z) e argumento (θ) de um número complexo..... | 22 |
| Figura 03: Interpretação Geométrica das raízes quartas de $Z = -8 + i8\sqrt{3}$ | 30 |
| Figura 04: Interpretação Geométrica de um número complexo..... | 31 |
| Figura 05: Plano de Argand-Gauss..... | 32 |
| Figura 06: Tensão senoidal em função do argumento ωt | 35 |
| Figura 07: Tensão senoidal em função do tempo | 35 |
| Figura 08: Duas senoides defasadas entre si | 36 |
| Figura 09: Análise gráfica para seno e cosseno | 37 |
| Figura 10: Análise gráfica para seno e cosseno | 37 |
| Figura 11: Interpretação geométrica utilizada para a transformação trigonométrica da equação (11) em (14)..... | 38 |
| Figura 12: Representação de $Ve^{j\omega t}$ rotacionando no sentido anti-horário | 42 |
| Figura 13: Representação de $Ve^{j\omega t}$ projetado no eixo real, em função do tempo | 42 |
| Figura 14: Diagrama fasorial de $V = V_m \angle \varphi$ e $I = I_m \angle -\theta$ | 43 |
| Figura 15: Relações tensão-corrente para um resistor no domínio do tempo e da frequência, respectivamente. | 45 |
| Figura 16: Diagrama fasorial para um resistor | 45 |
| Figura 17: Relações tensão-corrente para um indutor no domínio do tempo e da frequência, respectivamente..... | 46 |
| Figura 18: Diagrama fasorial para um indutor, onde a tensão está adiantada em relação a corrente por 90 graus..... | 46 |
| Figura 19: Relações tensão corrente no domínio do tempo e da frequência, respectivamente. | 47 |
| Figura 20: Diagrama fasorial para um capacitor de capacitância C | 47 |
| Figura 21: Análise dos valores de frequência angular para um indutor | 49 |
| Figura 22: Análise dos valores de frequência angular para um capacitor. | 49 |
| Figura 23: Impedâncias associadas em série | 52 |
| Figura 24: Duas impedâncias associadas em série | 53 |
| Figura 25: Impedâncias associadas em paralelo | 53 |
| Figura 26: Duas impedâncias associadas em paralelo..... | 54 |
| Figura 27: Circuito para o exemplo 3.3 | 54 |
| Figura 28: Circuito referente à questão 01. | 57 |
| Figura 29: Circuito referente à questão 02 | 58 |
| Figura 30: Circuito referente à questão 03. | 59 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 2 | CONCEITOS BÁSICOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS | 15 |
| 2.1 | OPERAÇÕES E PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS | 15 |
| 2.2 | PROPRIEDADES DA ADIÇÃO | 17 |
| 2.3 | PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO | 18 |
| 2.4 | PROPRIEDADES DO CONJUGADO | 20 |
| 2.5 | REPRESENTAÇÃO GRÁFICA | 21 |
| 2.6 | FORMA TRIGONOMÉTRICA | 24 |
| 2.7 | POTENCIAÇÃO: MÓDULO E ARGUMENTO DO PRODUTO | 24 |
| 2.8 | PRIMEIRA FÓRMULA DE MOIVRE | 26 |
| 2.9 | RADICIAÇÃO | 27 |
| 2.10 | SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE | 27 |
| 2.11 | BREVE HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS | 30 |
| 3 | SENOIDES E FASORES | 34 |
| 3.1 | SENOIDES | 34 |
| 3.2 | FASORES | 39 |
| 3.3 | RELAÇÕES FASORIAIS PARA ELEMENTOS DE CIRCUITOS | 44 |
| 3.4 | IMPEDÂNCIA E ADMITÂNCIA | 48 |
| 3.5 | LEIS DE KIRCHHOFF PARA O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA | 50 |
| 3.6 | ASSOCIAÇÕES ENTRE IMPEDÂNCIAS | 51 |
| 4 | PROBLEMAS APLICADOS A CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA | 56 |
| | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 60 |
| | REFERÊNCIAS | 61 |

1 INTRODUÇÃO

“O que é um número complexo? O adjetivo é infeliz, herdado de épocas nas quais a abstração envolvida na compreensão desses números era considerada elevada.” (SOARES, 2016, p1). No tempo presente, sabe-se que os conceitos do corpo dos números reais e o corpo dos números complexos possuem necessidades de abstração similar. (SOARES, 2016).

Nesse sentido, a temática em questão ainda não foi abordada por meio de questões no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Entretanto, algumas competências e habilidades exigidas pela prova são objetos pertencentes ao campo dos números complexos, dentre elas é possível citar a competência 5 na qual consiste em modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas juntamente com todas as suas habilidades correlatas. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2009). Nessa perspectiva, o objetivo nesta pesquisa é elaborar itens contextualizados referentes ao conteúdo dos números complexos para servir como material paradidático.

As situações-problema selecionadas, serão referentes a área de análise de circuitos de corrente alternada, onde algumas relações já conhecidas na disciplina de física do ensino médio serão alteradas como, por exemplo, a equação:

$$U = Ri \quad (1)$$

Será substituída por:

$$U = Zi \quad (2)$$

Onde, U é a tensão, R é a resistência elétrica, i é a corrente e Z a impedância.

Nesse sentido, as grandezas analisadas em (1) que eram resolvidas apenas no corpo dos números reais serão representadas por números complexos, conforme (2) (SANTOS, 2022).

Este trabalho se encontra estruturado em cinco capítulos, o primeiro refere-se a introdução desta dissertação, o segundo aborda a “Conceitos básicos dos números complexos”, o terceiro capítulo desenvolve os “Conceitos de Fasores e Versores”, já o quarto capítulo aborda a interdisciplinaridade por meio de “Problemas aplicados a Circuitos de Corrente Alternada”, e o último são as considerações finais.

2 CONCEITOS BÁSICOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Existem equações algébricas que não possuem soluções dentro do corpo dos números reais, como na equação $x^2+16=0$, a qual tem raízes $x=\pm\sqrt{-16}$ as quais não são números reais.

Entretanto, considerando a existência do número $\sqrt{-1}$, representado pelo símbolo i e definido por unidade imaginária, haveria a possibilidade para um conjunto solução para a equação $x^2 + 16 = 0$, pois $x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16} \sqrt{-1} = \pm 4i$.

Os números $4i$ e $-4i$ são ditos Números Imaginários, em contraste ao conjunto dos reais. Usando-se o conjunto dos números reais com os imaginários é formado o Conjuntos dos Números Complexos.

Baseado em Oliveira 2022, um número complexo pode ser representado por sua forma algébrica:

$$z = a + bi \quad (3)$$

Onde, a é a parte real representada por $\text{Re}(z)$, b é a parte imaginária representada por $\text{Im}(z)$ e i é a unidade imaginária.

Exemplo 2.1

- a) Se $z = 2 + 4i$, então $\text{Re}(z)=2$ e $\text{Im}(z) = 4$
- b) Se $z = -1 + 3i$, então $\text{Re}(z) = -1$ e $\text{Im}(z) = 3$
- c) Se $z = 5 - 2i$, então $\text{Re}(z) = 5$ e $\text{Im}(z) = -2$

Cabe destacar que caso a seja nulo e b diferente de zero, o número será dito imaginário puro, enquanto se b for nulo o número será real.

2.1 OPERAÇÕES E PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As operações e propriedades precisam estar bem definidas no corpo dos números complexos, conforme acontece em todos os demais conjuntos numéricos. Desse modo, todas as definições bem como suas necessárias demonstrações e exemplos estão subsidiadas em lezzi, 2013.

a) **Igualdade:** Dois números complexos quaisquer são ditos iguais quando as partes real e imaginária são respectivamente iguais.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

b) **Nulidade:** Um número complexo é nulo caso tanto a parte real quanto a imaginária assumirem valores iguais a zero.

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b = 0.$$

c) **Adição:** Para esta operação, somam-se as partes reais e imaginárias entre si.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i:$$

$$\text{Por exemplo, } (2 + 3i) + (4 + i) = (2 + 4) + (3 + 1)i = 6 + 4i.$$

d) **Subtração:** Para esta operação, subtraem-se as partes reais e imaginárias entre si.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(4 + 2i) - (3 + 6i) = (4 - 3) + (2 - 6)i = 1 - 4i.$$

e) **Multiplicação:** Deve-se utilizar a definição da unidade imaginária $i^2 = -1$ e a propriedade distributiva. Generalizando, temos:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Por exemplo,

$$(2 + 3i) \cdot (4 + i) = 8 + 2i + 12i + 3i^2 = 8 + 14i + 3 \cdot (-1) = 5 + 14i.$$

f) **Complexo conjugado:** O conjugado de um número complexo Z qualquer, representado por \bar{Z} , é obtido pela inversão do sinal da parte imaginária de Z :

$$Z = a + bi \rightarrow \bar{Z} = a - bi.$$

Nesse sentido, é válido enfatizar que ao multiplicar um número complexo pelo seu conjugado, o resultado sempre será um número real não negativo e cujo resultado é igual a soma dos quadrados dos seus coeficientes, conforme pode ser demonstrado a seguir:

$$Z \cdot \bar{Z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

g) **Divisão:** Efetuar essa operação entre dois números complexos é igual a converter o complexo do denominador (considerado não nulo) em um número real. Para isso, basta multiplicá-lo pelo seu conjugado e para manter o valor original deve-se multiplicar o numerador pelo mesmo valor. Sendo assim, temos:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2}i$$

Por exemplo,

$$\frac{3 + 4i}{1 + i} = \frac{(3 + 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{(3 + 4) + (4 - 3)i}{1 + 1} = \frac{7}{2} + \frac{i}{2}$$

h) **Potências de i:** Considere $i^0 = 1$, $i^1 = i$ e, por definição, $i^2 = -1$. Desse modo, é possível calcular as potências a seguir:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

Portanto, há um padrão de valores repetidos da seguinte forma: 1, i, -1, -i., os quais são os restos da divisão por 4.

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Exemplo 2.2:

Calcular i^{243}

Solução:

Como $243 = 60 \times 4 + 3$, então $i^{243} = i^3 = -1$.

2.2 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

a) Propriedade Associativa: $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$.

Demonstração:

Considerando $Z_1 = a + bi$, $Z_2 = c + di$, e $Z_3 = e + fi$, temos:

$$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = [(a + c) + i(b + d)] + e + fi = (a + c + e) + i(b + d + f)$$

Rearranjando os termos da equação acima, temos:

$$\begin{aligned} (a + c + e) + i(b + d + f) &= a + (c + e) + bi + i(d + f) = \\ &= (a + bi) + ((c + e) + i(d + f)) = Z_1 + (Z_2 + Z_3) \end{aligned}$$

b) Propriedade Comutativa: $(Z_1 + Z_2) = (Z_2 + Z_1)$.

Demonstração:

Considerando $Z_1 = a + bi$, $Z_2 = c + di$, resulta

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2) &= (a + c) + i(b + d) = (c + a) + i(d + b) = \\ &= c + di + a + bi = Z_2 + Z_1. \end{aligned}$$

c) Elemento Neutro: Existe um elemento, denotado por elemento neutro 0, que somado a um número complexo qualquer Z resulta nele próprio. $Z + 0 = Z$

Demonstração: Considerando $Z = a + bi$; $0 = x + yi$, temos

$$(a + bi) + (x + yi) = a + bi$$

$$(a + x) + (b + y)i = a + bi$$

$$a + x = a \Rightarrow x = 0.$$

$$b + y = b \Rightarrow y = 0.$$

Logo, foi provado que o zero é o elemento neutro para adição.

d) Elemento simétrico: Dado um número complexo Z, existe um número complexo denotado por simétrico ou inverso aditivo -Z, tal que $Z + (-Z) = 0$.

Demonstração:

Se $Z = a + bi$ e $-Z = c + di$, temos,

$$a + c + (b + d)i = 0 + 0i$$

Igualando-se as partes real e imaginária a zero, concluímos que:

$$a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$b + d = 0 \Rightarrow d = -b$$

$$\text{logo, } -Z = -a - bi.$$

2.3 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

a) Associativa: $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$.

Demonstração:

Considerando

$$Z_1 = a + bi, \quad Z_2 = c + di \quad e \quad Z_3 = e + fi$$

Temos que:

$$\begin{aligned} (Z_1 Z_2) Z_3 &= [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) = [(ac - bd) + (ad + bc)i] \cdot (e + fi) = \\ &= e(ac - bd) - (ad + bc)f + i[(ac - bd)f + (ad + bc)e] = \\ &= ace - bde - adf - bcf + i[acf - bdf + ade + bce] = \\ &= a(ce - df) - b(de + cf) + i[a(cf + de) + b(ce - df)] = \\ &= (a + bi)[(ce - df) + i(cf + de)] = Z_1 \cdot (Z_2 Z_3). \end{aligned}$$

b) Comutativa: $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc) = \\ &= (ca - db) + i(da + cb) = Z_2 Z_1. \end{aligned}$$

c) Elemento Neutro: $Z \cdot 1 = Z$.

Demonstração:

$$Z \cdot 1 = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Igualando a parte real de $Z \cdot 1$ a a e a parte imaginária a b , temos o seguinte sistema:

$$ax - by = a \quad (4)$$

$$bx - by = b$$

Subtraindo as duas equações:

$$(a - b)x = (a - b) \therefore x = 1$$

Substituindo x por 1 na equação (4):

$$a - by = a \therefore y = 0.$$

Logo, o valor 1 é dito elemento neutro para a multiplicação, onde multiplicado por qualquer complexo z resulta no próprio z .

d) Elemento inverso $Z_1 Z_2 = 1$.

Demonstração:

Considerando

$$Z_1 = a + bi \text{ e } Z_2 = c + di.$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Igualando a parte real do produto a 1 e a imaginária a 0, temos o seguinte sistema de equações:

$$ac - bd = 1$$

$$bc + ad = 0$$

Resolvendo o sistema acima, é possível descobrir os valores das constantes c e d, onde:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Portanto, existe um número complexo Z_2 denominado inverso ou inverso multiplicativo de Z_1 , na qual multiplicado por Z_1 dá como resultado 1.

e) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3.$$

Demonstração:

Considerando

$$Z_1 = a + bi, \quad Z_2 = c + di \text{ e } Z_3 = e + fi$$

$$Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (a + bi)[(c + e) + i(d + f)]$$

$$ac + ae - bd - bf + i[ad + af + bc + be]$$

$$ac - bd + ae - bf + i[(ad + bc) + (af + be)]$$

$$(ac - bd) + i(ad + bc) + (ae - bf) + i(af + be)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3.$$

2.4 PROPRIEDADES DO CONJUGADO

a) Soma de um complexo e seu conjugado.

$$Z + \bar{Z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$$

Demonstração:

$$Z = a + bi$$

$$Z + \bar{Z} = a + bi + a - bi = 2a = 2 \text{Re}(z).$$

Sendo assim, ao somar um número complexo ao seu conjugado, o resultado obtido será o dobro da parte real.

b) Diferença entre um complexo e seu conjugado.

$$Z - \bar{Z} = 2.\text{Im}(z)i$$

Demonstração:

$$Z = a + bi$$

$$\bar{Z} = a - bi$$

$$Z - \bar{Z} = a + bi - a + bi = 2bi.$$

Porém, $b = \text{Im}(z)$. Logo:

$$Z - \bar{Z} = 2.\text{Im}(z)i.$$

c) Igualdade entre um complexo e seu conjugado.

$$Z = \bar{Z} \leftrightarrow Z \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$a + bi = a - bi \therefore b = 0 \therefore Z \in \mathbb{R}$$

d) Conjugado da soma.

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

Demonstração:

$$Z_1 = a + bi$$

$$Z_2 = c + di$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = a + c - (b + d)i = a - bi + c - di = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

e) Conjugado do produto.

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$$

Demonstração:

$$Z_1 = a + bi$$

$$Z_2 = c + di$$

Multiplicando os números complexos, temos:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Conjugando-se o produto entre os números complexos, o resultado fica da seguinte forma:

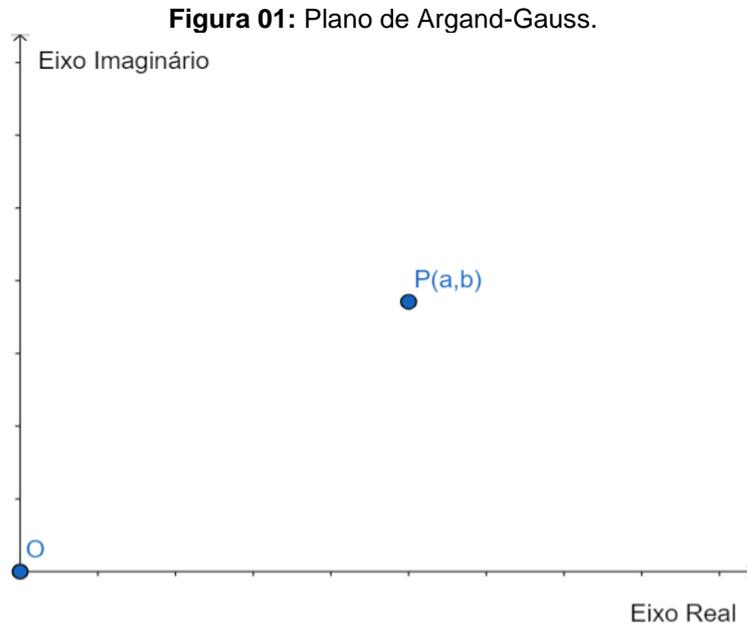
$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = (ac - adi) + (-cbi + bdi^2) = a(c - di) - bi(c - di)$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (a - bi)(c - di) = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$$

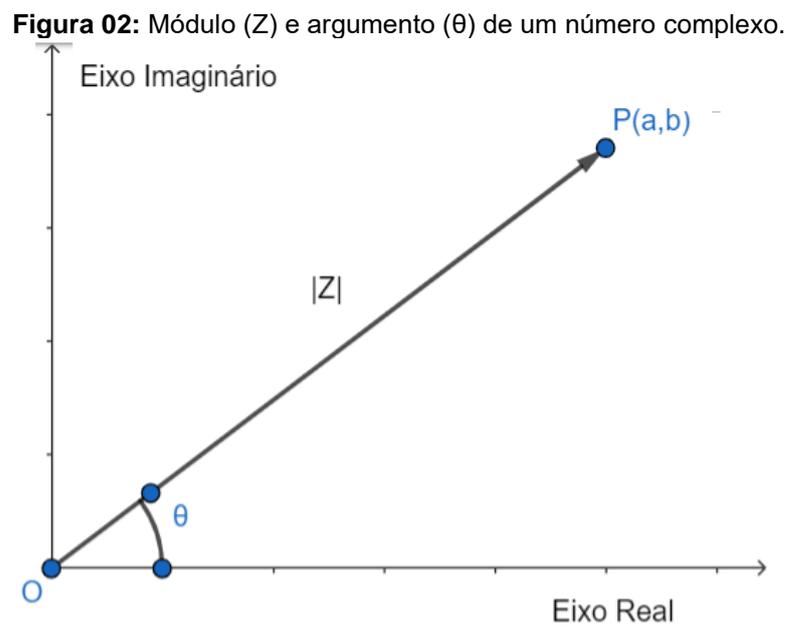
2.5 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Qualquer número $Z = a+bi$ pode ser associado a um ponto $P(a,b)$ pertencente ao plano de Argand-Gauss. Esse ponto é definido como afixo ou imagem do número complexo Z , conforme pode ser visualizado na figura abaixo:



Fonte: Autoria própria

Após representar um número complexo graficamente, pode-se determinar duas medidas com base no afixo de um número complexo, sendo estes: Seu módulo e seu argumento nos quais podem ser visualizados na figura 02.



Fonte: Autoria própria.

Assim, considerando $Z = a + bi$, o módulo de um número complexo Z , podendo ser representado por $|Z|$, definido como a distância do afixo até a origem e calculado como a diagonal de um retângulo, conforme visto na equação a seguir:

$$|Z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Além disso, o módulo de um número complexo obedece às seguintes propriedades:

a) O produto entre um número complexo e seu conjugado é igual ao quadrado de seu módulo $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$.

Demonstração:

$$Z = a + bi \text{ e } \bar{Z} = a - bi$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi + b^2 = a^2 + b^2$$

Analisando o lado direito da propriedade a, temos:

$$|Z|^2 = a^2 + b^2$$

Como os dois lados da equação possuem o mesmo resultado, a propriedade **a** é válida

b) O módulo de um número complexo Z qualquer é igual ao módulo de seu conjugado \bar{Z} $|Z| = |\bar{Z}|$.

Demonstração:

Considerando, $Z = a + bi$ e $\bar{Z} = a - bi$.

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } |\bar{Z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

É possível perceber que os dois lados da equação satisfazem a igualdade.

c) O módulo do produto entre dois números complexos Z_1 e Z_2 é igual ao produto entre os módulos $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$.

Demonstração:

Sendo Z_1 e Z_2 números complexos arbitrários e partindo da propriedade $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$, temos que:

$$|Z_1 \cdot Z_2|^2 = Z_1 \cdot \overline{Z_1} \cdot Z_2 \cdot \overline{Z_2} = |Z_1|^2 |Z_2|^2$$

$$|Z_1 \cdot Z_2| = \sqrt{|Z_1|^2 |Z_2|^2} = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

Quanto ao argumento do número complexo Z no qual pode ser representado por $\arg(Z)$ ou θ , este é um ângulo, medido trigonometricamente, que o segmento de reta do módulo do número complexo forma com o eixo real medido a partir do sentido anti-horário. Sendo assim, com base na figura 4 temos que:

$$\sin \theta = \frac{b}{|Z|} \text{ e } \cos \theta = \frac{a}{|Z|}$$

2.6 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Seja um número complexo $Z = a + bi$ cujas medidas do módulo e argumento valem $|Z|$ e θ , respectivamente. Temos que:

$$b = |Z| \sin \theta \text{ e } a = |Z| \cos \theta.$$

Desse modo, Z fica no seguinte formato:

$$Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5).$$

A equação (5) é definida como forma polar ou trigonométrica de um número complexo Z .

Exemplo 2.3:

a) $Z = \sqrt{3} + i \leftrightarrow |Z| = 2 \text{ e } \theta = \frac{\pi}{6} \therefore Z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$

b) $Z = -2i \leftrightarrow |Z| = 2 \text{ e } \theta = \frac{3\pi}{2} \therefore Z = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}).$

c) $Z = -5 \leftrightarrow |Z| = 5 \text{ e } \theta = \pi \therefore Z = 5(\cos \pi + i \sin \pi).$

Nos próximos tópicos, será notável que o uso da forma polar é mais prática para as operações de potenciação e radiciação em \mathbb{C} . Além disso, o termo $(\cos \theta + i \sin \theta)$ pode ser substituído por $\text{cis } \theta$. Sendo assim, a forma trigonométrica pode ser reescrita como $Z = |Z| \text{ cis } \theta$.

2.7 POTENCIAÇÃO: MÓDULO E ARGUMENTO DO PRODUTO

$$|Z| = |Z_1| \cdot |Z_2| \text{ e } \theta = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Partindo dos seguintes números complexos:

$$Z_1 = |Z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$Z_2 = |Z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Calculando o módulo e o argumento do produto, sabemos que:

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = |Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Dessa forma, substituindo Z_1 e Z_2 por sua forma trigonométrica, obtemos

$$Z = Z_1 Z_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = |Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$Z = Z_1 Z_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)]$$

$$|Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Portanto, O módulo do produto de dois números complexos é equivalente ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento vale à soma dos argumentos dos fatores.

Exemplo 2.4:

Dados os números complexos $Z_1 = 4 \cdot (\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6})$ e $Z_2 = 6 \cdot (\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6})$.

Determine $Z_1 \cdot Z_2$:

$$Z_1 Z_2 = 4 \cdot 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 24 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

Cabe destacar que o procedimento apresentado para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica pode ser estendido para o produto entre mais de dois fatores, bastando apenas aplicar a propriedade associativa da multiplicação, conforme o processo abaixo:

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot \dots \cdot Z_n = |Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Sendo assim:

$$|Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |Z_1| |Z_2| |Z_3| \dots |Z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n))$$

Portanto:

$$|Z| = |Z_1| |Z_2| |Z_3| \dots |Z_n| \quad \text{e} \quad \theta = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) + 2k\pi \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

2.8 PRIMEIRA FÓRMULA DE MOIVRE

A forma algébrica torna simples as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, apesar disso não é algo trivial quando aplicada ao cálculo de potências. Prova disso é que caso seja preciso calcular $(a + bi)^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, seria necessário aplicar a fórmula do Binômio de Newton na qual seria um procedimento relativamente trabalhoso. Nesse sentido, para simplificar a operação em questão utiliza-se a primeira fórmula de Moivre, onde dado um número complexo Z quaisquer $Z = |Z|.(\cos \theta + i \sin \theta)$, não nulo, e o número inteiro n , temos:

$$Z^n = |Z|^n.(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Demonstração:

Constará de duas partes, sendo que no primeiro passo será aplicado o princípio da indução finita no qual possibilitará provar que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim:

$$\text{Caso } n = 0, \text{ então } \begin{cases} Z^0 = 1 \\ |Z|^0.(\cos 0 + i \sin 0) \end{cases}$$

Admitindo-se a validade da fórmula para $n=k-1$; teremos que:

$$Z^{k-1} = |Z|^{k-1}.(\cos (k-1)\theta + i \sin (k-1)\theta)$$

E provaremos a validade para $n=k$:

$$\begin{aligned} Z^k &= Z^{k-1}.Z = |Z|^{k-1}.(\cos(k-1)\theta + i \sin(k-1)\theta).|Z|.(\cos \theta + i \sin \theta) \\ Z^k &= |Z|^k.(\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

Agora no segundo passo, a propriedade será estendida para inteiros negativos, onde:

Se $n < 0$; conseqüentemente $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$, portanto a m é aplicada a fórmula:

$$Z^k = Z^{-m} = |Z|^{-m}.(\cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta)).$$

A praticidade da primeira fórmula de Moivre será apresentada no exemplo à seguir:

Exemplo 2.5:

Calcule $(-\sqrt{3} - i)^{20}$:

Primeiramente, deve-se encontrar o módulo e o argumento de $-\sqrt{3} - i$, sendo assim:

$$|Z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

Desse modo:

$$Z = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

Aplicando-se a primeira fórmula de Moivre, Z fica da seguinte forma:

$$Z^{20} = 2^{20} \cdot \left(\cos \frac{140\pi}{6} + i \sin \frac{140\pi}{6} \right) = 2^{20} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$Z^{20} = 2^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} (-1 - i\sqrt{3}).$$

2.9 RADICIAÇÃO

Dado um número complexo Z, chama-se raiz enésima de Z e representada por $\sqrt[n]{Z}$, a um número complexo Z_1 de forma que $Z_1^n = Z$. Desse modo, por exemplo, temos:

1 é um valor de $\sqrt[3]{1}$, pois $1^3 = 1$.

$-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ é um valor de $\sqrt[3]{1}$, pois $\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$.

$-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ é um valor de $\sqrt[3]{1}$, pois $\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$.

Com o exemplo acima, surgem alguns questionamentos como: quantas são as raízes enésimas de Z e como determina-las? A resposta para a pergunta será dada no próximo tópico.

2.10 SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE

Dado um número complexo $Z = |Z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ e um número natural $n (n \geq 2)$, então existem n raízes enésimas de Z que são da forma:

$$Z_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

Onde, $\sqrt[n]{|Z|} \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Deve-se determinar todos os complexos Z_k que satisfaçam a seguinte condição $\sqrt[n]{Z} = Z_k$. Considerando $Z_k = r \cdot (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ cujas incógnitas são r e ω será aplicada a definição:

$$\sqrt[n]{Z} = Z_k \Leftrightarrow Z_k^n = Z$$

Sendo assim:

$$r^n \cdot (\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega) = |Z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Logo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$r^n = |Z| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|Z|} \quad (r \in \mathbb{R}_+)$$

$$\begin{cases} \cos n\omega = \cos \theta \\ \operatorname{sen} n\omega = \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow n\omega = \theta + 2k\pi \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Admitindo-se $0 \leq \theta < 2\pi$, deve-se obter os valores de k de forma que ω fique situado entre 0 e 2π . Assim, ao testar os valores de k temos que:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 &\Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \\ k = n - 1 &\Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + (n - 1) \cdot \frac{2\pi}{n} \\ k = n &\Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi \end{aligned}$$

Os n valores obtidos para ω são todos distintos, pois estão localizados no intervalo $[0, 2\pi[$; logo, originam n soluções diferentes para Z_k . Outrossim, é possível perceber que ω é congruente tanto para $k = 0$ quanto para $k = n$ e, por esse motivo, o valor de ω quando $k = n$ torna-se dispensável. O mesmo fato citado anteriormente também acontece para $k = \dots, n - 3, n - 2, n - 1, n + 1, n + 2, n + 3, \dots$. Portanto, para obtermos os diferentes valores de Z_k basta fazer, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Logo, com base na demonstração da segunda fórmula de De Moivre é possível concluir que todo número complexo Z diferente de zero possui n raízes enésimas distintas que possuem mesmo módulo $\sqrt[n]{|Z|}$ e argumentos principais formando uma progressão aritmética cujo primeiro termo vale $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$. Tal processo será aplicado no exemplo a seguir:

Exemplo 2.6: Calcule as raízes quartas de $-8 + i8\sqrt{3}$:

Considerando $Z = -8 + i8\sqrt{3}$, então $|Z| = 16$ e $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Ao utilizar a segunda fórmula de De Moivre, temos que:

$$Z_k = \sqrt[4]{16} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) \right] =$$

$$Z_k = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2 \text{ e } 3.$$

Neste momento, serão obtidas as raízes quartas para cada valor de k , onde teremos:

$$k = 0 \Rightarrow Z_0 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = \sqrt{3} + i$$

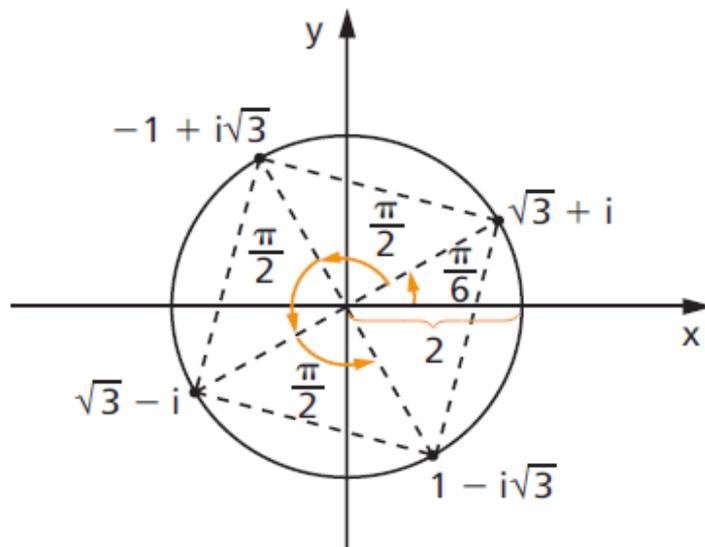
$$k = 1 \Rightarrow Z_1 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow Z_2 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right] = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 3 \Rightarrow Z_3 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right] = 1 - i\sqrt{3}$$

Como interpretação geométrica para o exemplo anterior, os afixos das 4 raízes enésimas de Z são pontos da mesma circunferência centrada na origem do plano de Argand-Gauss e cujo raio vale $\sqrt[4]{16} = 2$. Além disso, os afixos em questão são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro $(0,0)$ e raio 2 representado pela figura 3 à seguir:

Figura 03: Interpretação Geométrica das raízes quartas de $Z = -8 + i8\sqrt{3}$.



Fonte: lezzi (2013, p.43)

2.11 BREVE HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Deve-se deixar claro com base em Silveira (2001) de que a ideia de a origem dos números complexos terem sido inventados para a resolução de equações do segundo grau é absurda e historicamente incorreta. Nessa linha de raciocínio, acredita-se que Girolamo Cardano (1501-1576) ao tentar resolver a equação cúbica $x^3 = 4 + 15x$, no qual tinha conhecimento de que uma das raízes era $x = 4$, acabou obtendo a seguinte solução na qual em notação moderna lida como:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (6)$$

Todavia, ao encontrar o termo $\sqrt{-121}$ Cardano não soube como converter a expressão acima em $x = 4$. Para resolver esse problema, foram necessários mais de 25 anos de esforços para que o bolonhês Rafael Bombelli (1526-1572) tivesse a ideia de operar com números no formato $a + b\sqrt{-1}$ utilizando as mesmas regras que são usadas para os números reais e aplicando a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Sendo assim, a solução da equação (6) ficou:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

Onde obteve $a = 2$, $b = 1$ e, conseqüentemente, $x = 4$

Além disso, de acordo com Kilhian (2022) Bombelli contribuiu ainda mais para a área de estudos. Em sua obra de 1572 intitulada *Álgebra*, consta uma teoria sobre números complexos minimamente estruturada, incluindo notação própria. O número $2i$, por exemplo, era simbolizado da seguinte maneira:

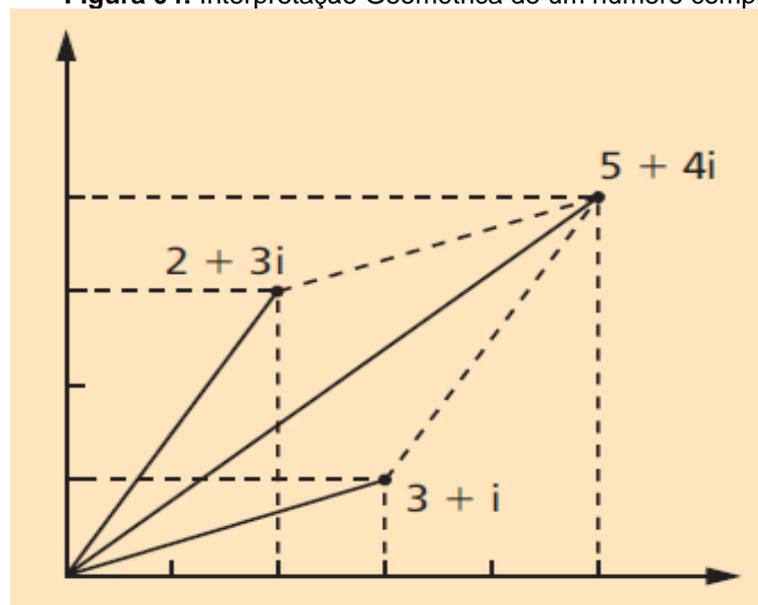
$$R[0 \text{ m.}4]$$

Onde R significa raiz e m menos, assim é possível afirmar que:

$$R[0 \text{ m.}4] = \sqrt{0 - 4}$$

Já no início do século XIX, Caspar Wessel (1745–1818), Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Jean-Robert Argand (1768–1822) descobriram de forma independente que os números complexos possuem representação geométrica, conforme pode ser visto na figura 4.

Figura 04: Interpretação Geométrica de um número complexo.

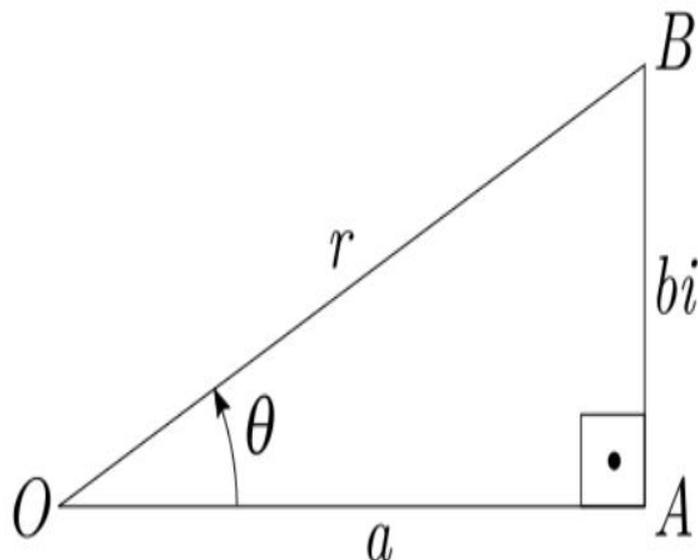


Fonte: lezzi (2013, p.51).

Entretanto, haviam divergências da representação geométrica, pois Wessel e Argand usavam vetores ou segmentos de reta orientados enquanto Gauss visualizava

isso por meio de um plano. Todavia, ambos concluíram sobre a possível utilização dos números complexos em operações algébricas entre si. Dessa forma, o conjunto numérico em questão está constituído na álgebra dos vetores de um plano. Atualmente, o plano cartesiano utilizado para representar os números complexos é denominado plano de Argand-Gauss, sendo o primeiro o maior contribuinte para o assunto. Sendo assim, o plano em questão pode ser visto na figura 05, onde Argand aplicando a ideia de rotação, considerou o número complexo $a+bi$ como uma soma vetorial de a e bi resultando no segmento OB ou na já vista forma trigonométrica $Z = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Figura 05: Plano de Argand-Gauss



Fonte: Kilhian 2022

Apesar disso, ainda não havia sido entendido sobre a soma $a+bi$, dados que a e bi são de origens diferentes e tal dúvida foi elucidada por William Rowan Hamilton (1805-1865) em um artigo apresentado à Academia Irlandesa em 1833, onde introduziu a álgebra formal dos números complexos nos quais eram concebidos como pares ordenados (a,b) de números reais nos quais eram operados conforme as seguintes leis:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Nesse sentido, sendo $(a,0)$ é um número real a e considerando $(-1,0) = -1$ e $i = (0,-1)$, pode-se inferir que:

$$i^2 = (0,-1) \cdot (0,-1)$$

$$i^2 = (-1,0)$$

$$i^2 = -1$$

Logo, foi possível conseguir uma explicação para o símbolo $i = \sqrt{-1}$ e cabe destacar que embasado em Silveira (2001) esse processo histórico resultou, no século XIX, em aplicações na Mecânica dos Fluidos, Eletricidade e outros fenômenos em meios contínuos. Sendo muitas dessas aplicações utilizadas até os dias atuais.

3 SENOIDES E FASORES

Ao longo dessa pesquisa, a análise de circuitos será feita considerando-se uma fonte de tensão ou corrente na qual varia com o passar do tempo, mais especificamente assumindo um comportamento senoidal. Uma corrente desse tipo é também denominada como corrente alternada (CA) e inverte-se em períodos regulares assumindo valores positivos e negativos.

De acordo com Alexander e Sadiku (2003), há uma série de fatores para se utilizar senoides, dentre eles cabe destacar que há relativa facilidade em gerar e transmitir um sinal senoidal devido ser a forma de tensão gerada e fornecida a todas as instalações elétricas ao redor do mundo, além de ser a maneira mais utilizada de tratamento de sinais na área de energia elétrica e comunicação. Outrossim, uma senoide pode ser relativamente fácil para passar pelo processo de modelagem matemática, tendo em vista que ao derivar ou integrar uma senoide obtém-se outra senoide.

Portanto, o capítulo introduzirá conceitos básicos de senoides e fasores. Após isso, serão definidas como as relações entre fasores aparecem em circuitos elétricos e para finalizar serão descritas as grandezas impedância e admitância e as formas nas quais são possíveis suas associações. Além disso, todas as análises e definições foram subsidiadas em Alexander e Sadiku (2003) e Svoboda (2008).

3.1 SENOIDES

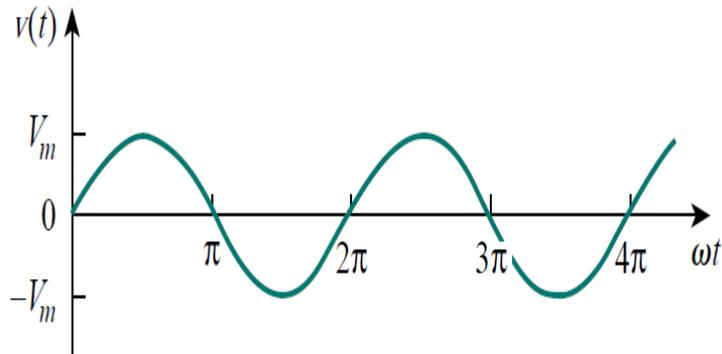
Partindo de uma tensão senoidal mostrada na equação abaixo:

$$v(t) = V_m \cdot \text{sen } \omega t$$

Onde, V_m é a amplitude da senoide, ω é a frequência angular medida em radianos/segundo e o termo ωt é o argumento da função. Os gráficos da tensão senoidal podem ser visualizados nas figuras 06 e 07, sendo que na primeira $v(t)$ está em função de seu argumento e na segunda em função do tempo. Nessa linha de raciocínio, pode-se inferir que a senoide é repetida em intervalos de T segundos e pode ser definido como período da tensão. Com isso, a partir dos gráficos das figuras 06 e 07, pode-se observar a seguinte relação na equação abaixo:

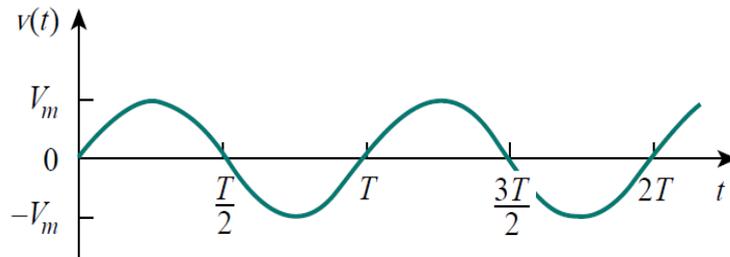
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7)$$

Figura 06: Tensão senoidal em função do argumento ωt .



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.323)

Figura 07: Tensão senoidal em função do tempo.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.323)

Ademais, para provar que $v(t)$ é cíclica a cada T segundos basta substituir t por $T + t$ na equação (7). Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned} v(t+T) &= V_m \cdot \text{sen } \omega(t+T) = V_m \cdot \text{sen } \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + 2\pi) = V_m \cdot \text{sen } \omega t \\ &= V_m \cdot \text{sen } \omega t = v(t) \end{aligned}$$

Logo:

$$v(t+T) = v(t) \quad (8)$$

Portanto, ao analisar a equação (8) a tensão v possui o mesmo valor nos instantes $t + T$ e t e, por esse motivo, $v(t)$ é dita uma função periódica, pois satisfaz a condição $f(t) = f(t + nT)$ para quaisquer t e para todo inteiro n . Além disso, outra grandeza a ser definida é o inverso do período na qual é o número de ciclos por segundo denominado frequência da f senoide conforme apresentado na equação (9):

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

Partindo-se das equações (7) e (9) é possível perceber que:

$$\omega = 2\pi f \quad (10)$$

Onde ω e f são medidos em radianos por segundo (rad/s) e Hertz (Hz), respectivamente.

Nesse momento, será utilizada a expressão abaixo na qual é mais abrangente para uma senoide:

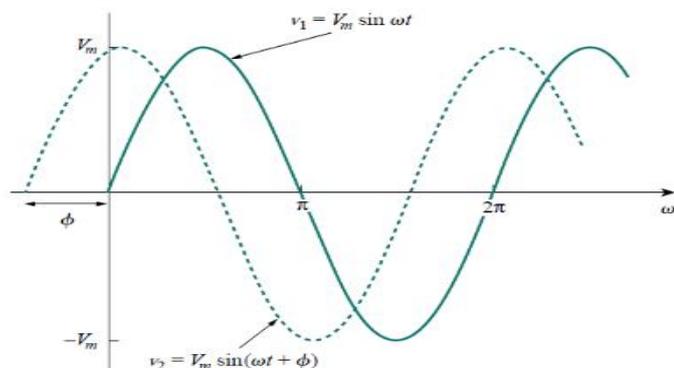
$$v(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Em que o termo $\omega t + \varphi$ é o argumento e φ é definido como fase. Ambos podem ser medidos em radianos ou graus. De posse dessas informações, serão analisadas duas senoides a seguir:

$$v_1(t) = V_m \cdot \text{sen} \omega t \quad \text{e} \quad v_2(t) = V_m \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Sendo assim, com base na figura 08 é possível visualizar que $v_2(t)$ acontece antes de $v_1(t)$ e, por esse motivo, diz-se que $v_2(t)$ está avançada em relação a $v_1(t)$ em φ . Alternativamente, também pode-se afirmar que $v_1(t)$ está atrasada em comparação a $v_2(t)$ numa medida φ . Além disso, se $\varphi \neq 0$ $v_1(t)$ e $v_2(t)$ estão defasados e caso contrário $v_1(t)$ e $v_2(t)$ estão em fase e atingem seus valores de máximo e mínimo instantaneamente. Tendo em vista essas considerações, pode-se comparar $v_1(t)$ e $v_2(t)$ devido estarem na mesma frequência e não ser necessário que os sinais em questão possuam a mesma amplitude.

Figura 08: Duas senoides defasadas entre si



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.324)

Entretanto, a representação da senoide pode aparecer em formato de seno ou cosseno. Nesse viés, ao haver necessidade de fazer a comparação entre duas

senoides, sugere-se que os dois sinais estejam em seno ou cosseno e com amplitudes positivas. Para executar essa sugestão, basta utilizar as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A \pm B) &= \operatorname{sen}A \cdot \operatorname{cos}B \pm \operatorname{sen}B \cdot \operatorname{cos}A \\ \operatorname{cos}(A \pm B) &= \operatorname{cos}A \cdot \operatorname{cos}B \mp \operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B\end{aligned}$$

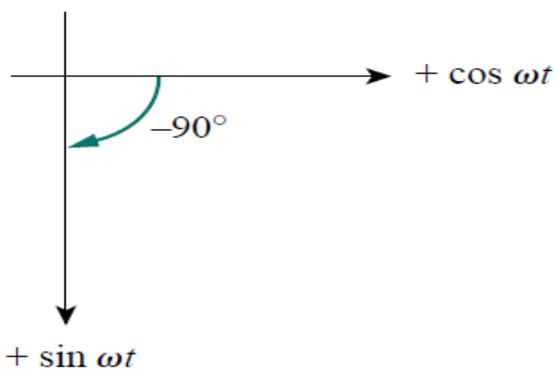
Com base nas identidades acima, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\omega t \pm 180^\circ) &= -\operatorname{sen}(\omega t) \\ \operatorname{cos}(\omega t \pm 180^\circ) &= -\operatorname{cos}(\omega t) \\ \operatorname{sen}(\omega t \pm 90^\circ) &= \pm \operatorname{cos}(\omega t) \\ \operatorname{cos}(\omega t \pm 90^\circ) &= \mp \operatorname{sen}(\omega t)\end{aligned}$$

Portanto, de posse dessas relações é possível converter um sinal em forma de seno para um em forma de cosseno e vice-versa. Como alternativa, ao invés de usar as identidades trigonométricas, pode-se utilizar um método gráfico para relacionar ou comparar senoides que pode ser visto na figura 09, onde o eixo horizontal mostra a intensidade do cosseno enquanto o vertical indica a do seno.

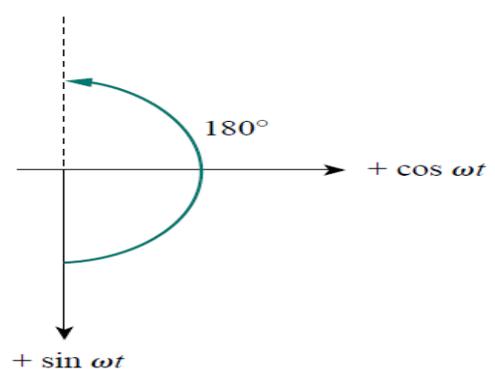
Além disso, os ângulos são medidos de forma positiva a partir do sentido anti-horário em relação ao eixo horizontal, conforme ocorre no sistema de coordenadas polares. De posse dessas informações, basta subtrair 90° de $\operatorname{cos}(\omega t)$ na figura 09 para convertê-lo em $\operatorname{sen}(\omega t)$. Analogamente, na figura 10, ao somar 180° ao argumento de $\operatorname{sen}(\omega t)$ o resultado será $-\operatorname{sen}(\omega t)$ ou $\operatorname{sen}(\omega t + 180^\circ)$.

Figura 09: Análise gráfica para seno e cosseno



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.324)

Figura 10: Análise gráfica para seno e cosseno



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.324)

Exemplo 3.1: Uma tensão é dada por $v(t) = 6 \cdot \operatorname{cos}(4t + 30^\circ)$. Calcule

- O período de oscilação.
- A relação entre a tensão e uma corrente $i(t) = 6 \cdot \operatorname{cos}(4t - 70^\circ)$.

Solução:

(a) Combinando-se as equações (9) e (10), temos que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4}$$

(b) Analisando-se as fases de $v(t)$ e $i(t)$, percebe-se que $v(t)$ está adiantado em relação a $i(t)$ por uma diferença de $30 - (-70) = 100^\circ$.

Outro artifício matemático recorrente em análise de circuitos de corrente alternada é a conversão de $V(t) = C \cdot \cos(\omega t - \theta)$ em $V(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ e vice-versa. Para demonstrar esse processo, considere um sinal na forma:

$$V(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad (11)$$

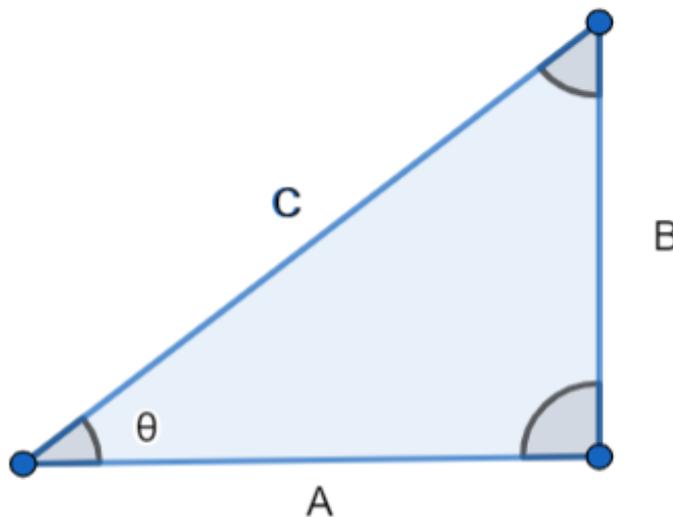
Multiplicando e dividindo-se o segundo membro a equação (11) por $\sqrt{A^2 + B^2}$, temos que:

$$V(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A \cdot \cos(\omega t)}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B \cdot \sin(\omega t)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \quad (12)$$

Considerando a interpretação geométrica da figura 11, é possível conseguir as seguintes relações trigonométricas caso $A > 0$:

$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{B}{A} \quad (13)$$

Figura 11: Interpretação geométrica utilizada para a transformação trigonométrica da equação (11) em (14).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, substituindo-se as relações trigonométricas (13) em (12), o resultado fica:

$$V(t) = C(\cos\theta\cos(\omega t) + \sin\theta\sin(\omega t)) = C \cos(\omega t - \theta) \quad (14)$$

Onde, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Exemplo 3.2: Uma corrente é dada por $i(t) = -5 \cdot \cos(5t) + 12 \cdot \sin(5t)$ A. Expresse a corrente na forma da equação (14).

Solução:

Sabe-se que $A = -5$ e $B = 12$. Portanto:

$$C = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ e } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{12}{-5}\right) = 112,6^\circ$$

Dessa forma, utilizando-se a equação 14 e fazendo-se as devidas substituições, $i(t)$ fica:

$$i(t) = 13 \cdot \cos(5t - 112,6^\circ)$$

3.2 FASORES

Uma ferramenta prática para a análise dos circuitos lineares alimentados por fontes senoidais são os fasores, sendo estes números complexos que representam a amplitude e fase de uma senoide. As bases da solução de circuitos CA utilizando esse método foram propostas por Charles Steinmetz (1865-1923) no final do século XIX. Entretanto, antes de se definirem os fasores com maior riqueza de detalhes e sua consequente aplicação em circuitos, será exposto a seguir um resumo sobre números complexos com as devidas alterações nas notações que serão utilizadas, onde suas principais formas de representação são apresentadas no quadro 1.

Quadro 1 – Representações de um número complexo.

| | |
|-------------------|----------------------------|
| Forma retangular | $Z = x + jy$ |
| Forma polar | $Z = r \angle \varphi$ |
| Forma exponencial | $Z = r \cdot e^{j\varphi}$ |

Fonte: Adaptado de Alexander e Sadiku (2003)

Sendo j a representação da unidade imaginária, x e y as partes real e imaginária, respectivamente de Z . Além disso, os valores da forma retangular são relacionados com r e φ conforme equação (15).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (15)$$

Em compensação, x e y podem ser dados por:

$$x = r \cos \varphi \text{ e } y = r \sin \varphi$$

Desse modo, Z pode ser escrito das seguintes formas:

$$Z = x + jy = r \angle \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Logo, as operações de soma e subtração entre números complexos são feitas com maior praticidade usando a forma retangular, enquanto a multiplicação e a divisão podem ser efetuadas com maior rapidez na forma polar. Com isso, serão revisadas as operações vistas no capítulo 2, todavia em notação diferente da apresentada anteriormente.

Adição:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Subtração:

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Multiplicação:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Divisão:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Inverso:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$$

Raiz quadrada:

$$\sqrt{Z} = \sqrt{r} \angle \frac{\varphi}{2}$$

Complexo conjugado:

$$Z^* = x - jy = r \angle -\varphi = r \cdot e^{-j\varphi}$$

A representação fasorial é baseada na identidade de Euler. Normalmente, pode-se demonstrar que $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ como as partes real e imaginária de $e^{j\varphi}$; assim é possível escrever:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \operatorname{Re}(e^{j\varphi}) \quad (16)$$

$$\sin \varphi = \operatorname{Im}(e^{j\varphi}) \quad (17)$$

Onde Re e Im são as partes real e imaginária de e. Com isso, dada uma senoide $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$, aplica-se a equação 16 para que $v(t)$ fique da seguinte forma:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(V_m e^{j(\omega t + \varphi)}) \quad (18)$$

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}) \quad (19)$$

$$v(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t}) \quad (20)$$

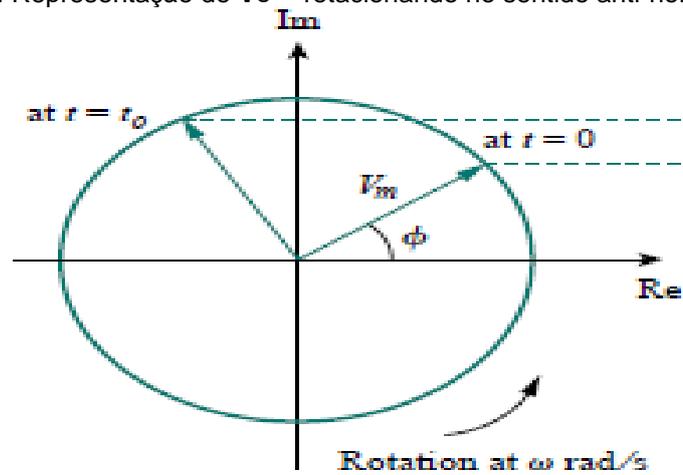
Em que:

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi} = V_m \angle \varphi \quad (21)$$

Logo, \mathbf{V} é definida como a representação fasorial de uma senoide $v(t)$, de acordo com o mencionado anteriormente. Assim, pode-se compreender que um fasor é um equivalente matemático de uma senoide, porém com a dependência em função do tempo removida. Cabe destacar que um fasor pode ser descrito tanto utilizando-se a equação (16) quanto a (17), porém o a literatura aplica com mais frequência a equação (16).

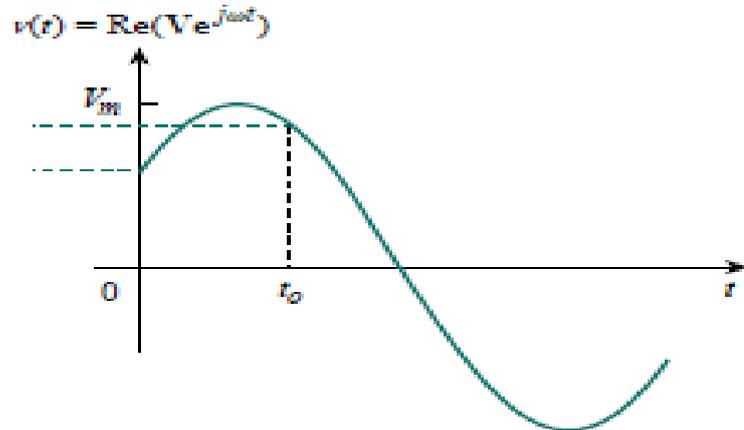
Já as equações (20) e (21) podem ser analisadas graficamente no plano complexo. Conforme o tempo passa, a função $\mathbf{V} e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ descreve uma circunferência cujo raio mede V_m a uma velocidade angular ω no sentido anti-horário na qual pode ser vista na figura 12. Outrossim, $v(t)$ é a projeção de $\mathbf{V} e^{j\omega t}$ no eixo real (figura 13) e o valor da função em questão para $t = 0$ equivale ao valor de \mathbf{V} referente a senoide $v(t)$ e esta pode ser lembrada como um fasor rotacional. Logo, quando uma senoide estiver representada na forma de um fasor, o fator $e^{j\omega t}$ estará implícito. Desse modo, ao estar utilizando fasores, deve-se ter ciência à respeito do valor de ω , pois caso isso não ocorra é possível incorrerem em erros.

Figura 12: Representação de $\mathbf{V}e^{j\omega t}$ rotacionando no sentido anti-horário.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.329)

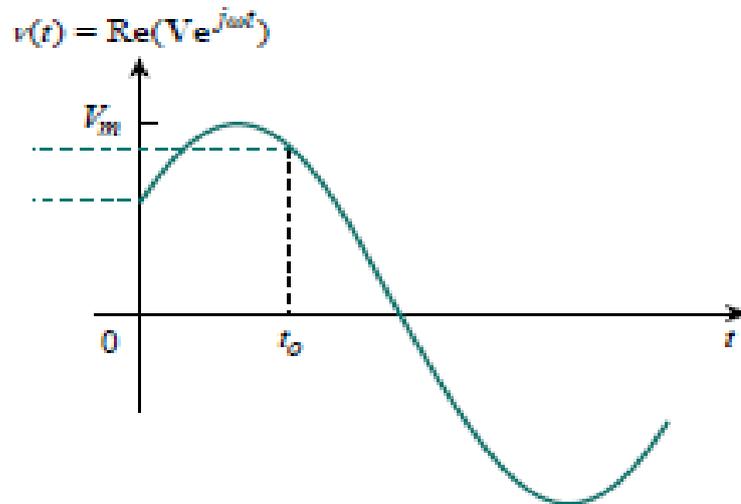
Figura 13: Representação de $\mathbf{V}e^{j\omega t}$ projetado no eixo real, em função do tempo.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003, p.329)

Ainda sobre a equação (20), é possível perceber que para se obter uma senoide referente a um fasor \mathbf{V} , este deve ser multiplicado pelo fator temporal $e^{j\omega t}$ antes que a parte real seja retirada. Como a grandeza \mathbf{V} possui amplitude e fase, ela se comporta como um vetor, sendo representada em negrito ou itálico. Para exemplificar, os fasores $\mathbf{V} = V_m \angle \phi$ e $\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$ estão representados graficamente na figura 14 em um formato definido como diagrama fasorial.

Figura 14: Diagrama fasorial de $\mathbf{V} = V_m \angle \varphi$ e $\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.329)

As equações de (18) até (20) mostram que, para executar o processo para obter um fasor referente a uma senoide, primeiro deve-se representar a segunda em formato de cosseno, de modo a ser escrita a parte real de um número complexo. Após isso, deve ser removido o fator temporal $e^{j\omega t}$ e o que sobra é o fasor correspondente a senoide e, em consequência disso, há a conversão da senoide no domínio do tempo para o fasorial. Assim, dada uma senoide $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ é possível obter um fasor correspondente $\mathbf{V} = V_m \angle \varphi$. Além disso, é importante ressaltar que a habilidade de representar uma informação em domínios distintos é fundamental no ramo da engenharia.

Quanto a diferenciação de $v(t)$, obtemos:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega V_m \text{sen}(\omega t + \varphi) = \omega V_m \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ)$$

$$\frac{dv}{dt} = \text{Re}(\omega V_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} e^{j90^\circ}) = \text{Re}(j\omega \mathbf{V} e^{j\omega t}) \quad (22)$$

Assim, a equação (22) mostra que a derivada de $v(t)$ é a transformada para o domínio fasorial multiplicado pelo termo $j\omega$. Além disso, a integral de $v(t)$ é convertida para o domínio da frequência como $\frac{\mathbf{V}}{j\omega}$ e esses processos são necessários para determinar soluções em regime permanente onde o conhecimento das condições iniciais das variáveis envolvidas é dispensável.

Ainda nesse contexto, cabe enfatizar algumas diferenças entre os termos $v(t)$ e \mathbf{V} , sendo que o primeiro é uma representação instantânea, depende do tempo e é sempre real enquanto o segundo é a representação no domínio da frequência, independe do tempo e é complexo. Por fim, é importante destacar que a análise fasorial só pode ser utilizada quando ω é constante, somente sendo aplicada na manipulação de dois ou mais sinais de mesma frequência.

3.3 RELAÇÕES FASORIAIS PARA ELEMENTOS DE CIRCUITOS

Nesse tópico será apresentada a forma de como os elementos passivos como resistores (R), indutores (L) e capacitores (C) são relacionados na forma fasorial. Para isso, basta converter a relação tensão-corrente, de cada elemento, do domínio do tempo para o da frequência. Assim, primeiramente será analisado o resistor R cuja corrente que flui através dele vale $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, assim a tensão pode ser obtida pela lei de Ohm, onde:

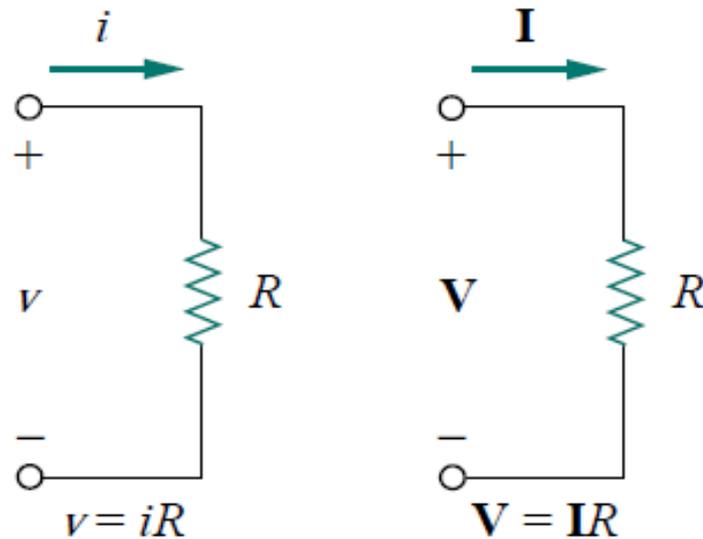
$$v = R I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

A forma fasorial desta tensão é:

$$\mathbf{V} = R I_m \angle \varphi = R \mathbf{I} \quad (23)$$

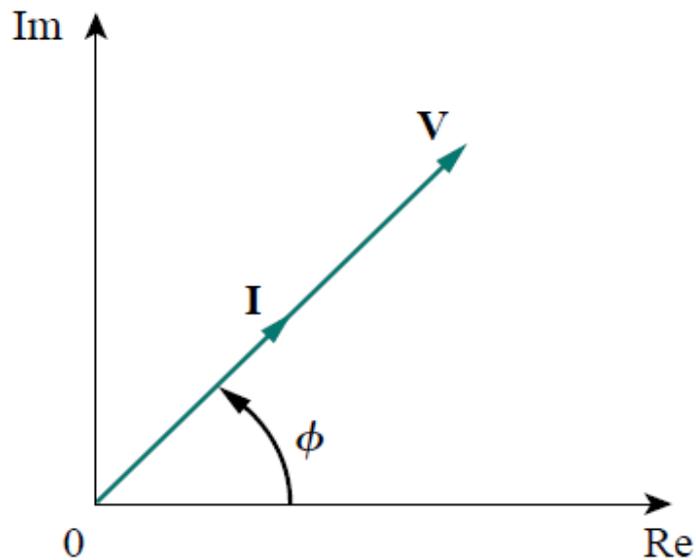
Portanto, a relação tensão-corrente para o resistor em forma fasorial permanece igual a lei de Ohm, conforme pode ser visto na figura 15. Além disso, de acordo com a equação (23) tensão e corrente estão em fase o que pode ser visualizado no diagrama da figura 16.

Figura 15: Relações tensão-corrente para um resistor no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.334)

Figura 16: Diagrama fasorial para um resistor.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.334)

Para um indutor L , ao considerar a corrente que flui por ele como $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. Sua tensão será:

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi + 90) \quad (24)$$

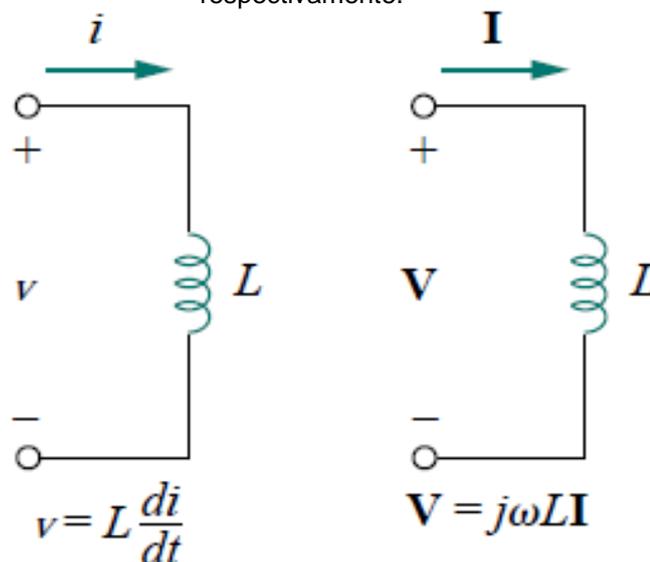
Transformando-se (24) para fasor, temos:

$$\mathbf{V} = \omega L I_m e^{j(\varphi+90)} = \omega L I_m e^{j\varphi} e^{j90} = \omega L I_m \angle \varphi e^{j90}$$

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \quad (25)$$

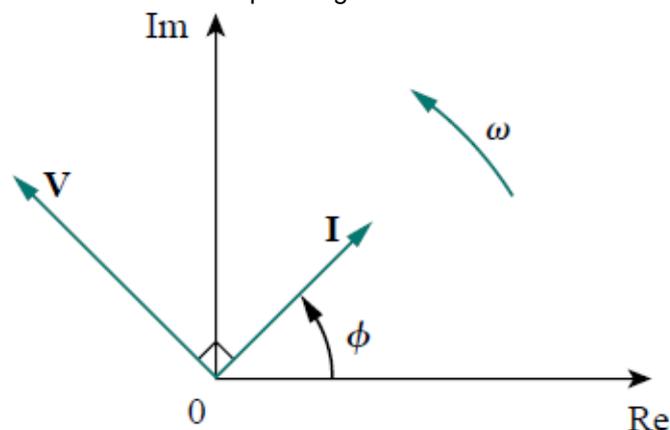
Assim, a tensão em um indutor em corrente alternada possui amplitude $\omega L I_m$ e com fase $\phi + 90$, ou seja, 90° adiantada em relação a corrente. Além disso, as relações tensão-corrente e diagrama fasorial para um indutor L estão representados nas figuras 17 e 18, respectivamente.

Figura 17: Relações tensão-corrente para um indutor no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.334)

Figura 18: Diagrama fasorial para um indutor, onde a tensão está adiantada em relação a corrente por 90 graus.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.335)

Quanto ao último elemento passivo a ser analisado, considere que a tensão aplicada nele vale $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, assim a corrente fluindo num capacitor de capacitância C vale:

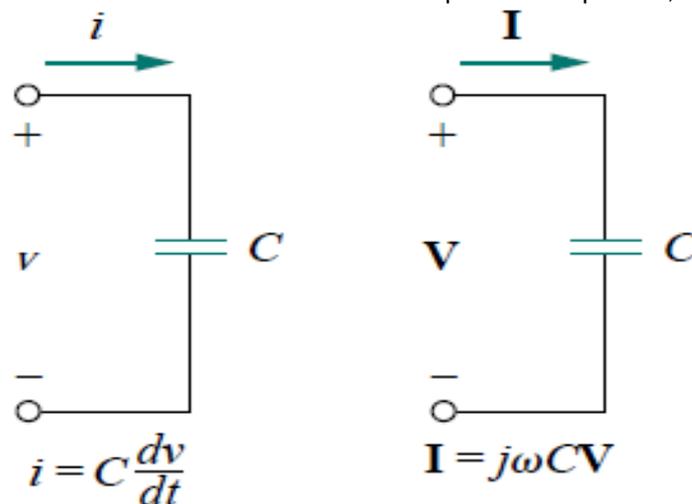
$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

Executando os mesmos procedimentos feitos no indutor, obteremos:

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad (26)$$

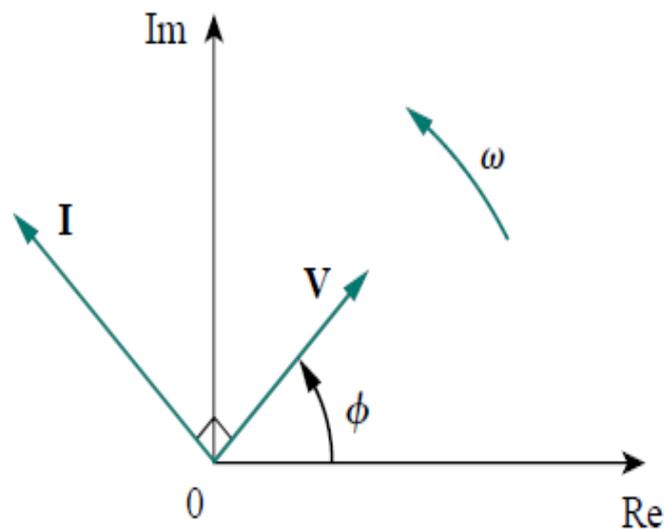
A equação (26) apresenta os fasores corrente e tensão defasados em 90° , em outras palavras, \mathbf{I} está adiantada 90° em relação a \mathbf{V} , as figuras 19 e 20 mostram as relações tensão-corrente para um capacitor nos domínios do tempo e frequência e o diagrama fasorial, respectivamente.

Figura 19: Relações tensão corrente no domínio do tempo e da frequência, respectivamente.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.335)

Figura 20: Diagrama fasorial para um capacitor de capacitância C.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.335)

A tabela 1 traz um resumo sobre todos elementos de circuito nos domínios do tempo e frequência trabalhados nesse tópico.

Tabela 1 – Representações de um número complexo.

| ELEMENTO | DOMÍNIO DO TEMPO | DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA |
|----------|-----------------------------|---------------------------|
| R | $V = Ri$ | $V = RI$ |
| L | $v = L \frac{di}{dt}$ | $V = j\omega LI$ |
| C | $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ | $V = \frac{I}{j\omega C}$ |

Fonte: Adaptada de Alexander e Sadiku (2003)

3.4 IMPEDÂNCIA E ADMITÂNCIA

As relações tensão-corrente para os três elementos passivos representados na tabela 2 do tópico anterior podem ser escritas novamente em função da razão entre tensão e corrente fasorial e de posse dessa informação obtém-se a lei de Ohm na forma fasorial para qualquer tipo de elemento, conforme pode ser visto na equação (27), onde **Z** representa a impedância, medida em Ω .

Além disso, a grandeza recém-definida mostra a oposição ao fluxo de corrente senoidal. Entretanto, apesar da impedância ser a razão entre dois fasores, ela não é um, pois esta não é uma grandeza senoidal variante.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (27)$$

A tabela 2, mostra um resumo das impedâncias e admitância (inverso da impedância medida em Siemens). Na tabela em questão, pode-se perceber que $Z_L = j\omega L$ e $Z_C = \frac{j}{\omega C}$. Assim, será feita a análise para os casos extremos de frequência angular.

Quando $\omega = 0$ (em fontes de corrente contínua) $Z_L = 0$ e $Z_C = \infty$, ratificando que em CC um indutor funciona como um curto-circuito e um capacitor como um circuito aberto. Já em altas frequências ($\omega = \infty$) $Z_L = \infty$ e $Z_C = 0$, mostrando que, nesse caso,

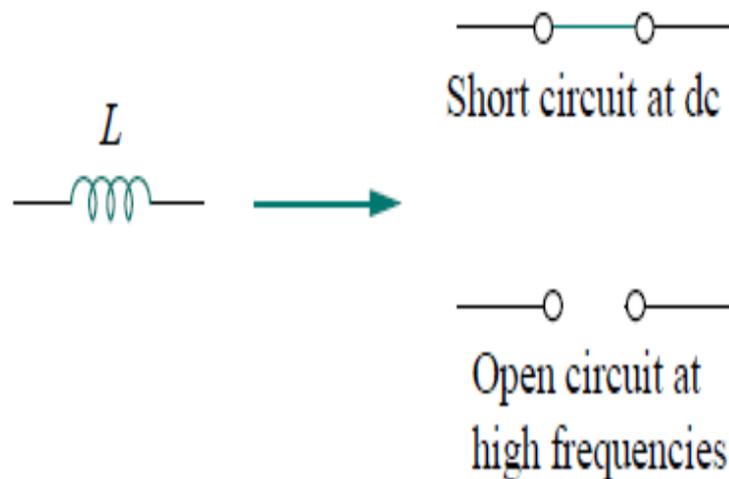
um indutor comporta-se como circuito aberto e um capacitor como curto-circuito. As figuras 21 e 22 ilustram as análises citadas anteriormente.

Tabela 2 – Representações de um número complexo.

| Elemento | Impedância | Admitância |
|----------|---------------------------|---------------------------|
| R | $Z = R$ | $Y = \frac{1}{R}$ |
| L | $Z = j\omega L$ | $Y = \frac{1}{j\omega L}$ |
| C | $Z = \frac{1}{j\omega C}$ | $Y = j\omega C$ |

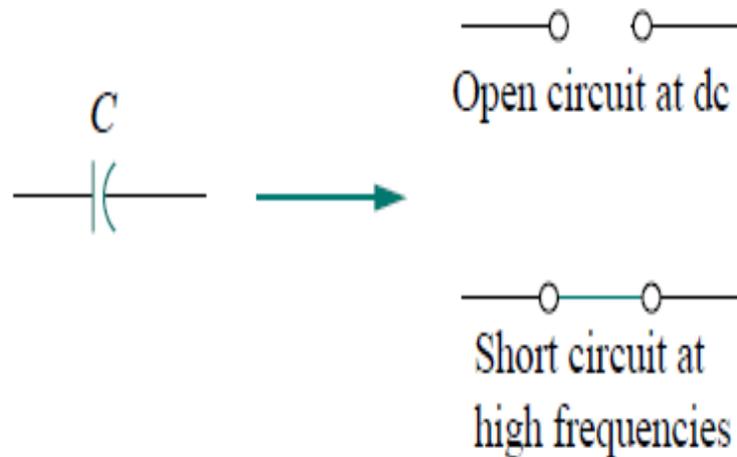
Fonte: Adaptada de Alexander e Sadiku (2003)

Figura 21: Análise dos valores de frequência angular para um indutor.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.336)

Figura 22: Análise dos valores de frequência angular para um capacitor.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.336)

A impedância, sendo uma grandeza complexa, pode ser apresentada em formato retangular conforme a equação (28):

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (28)$$

Onde a parte real de (28) é a resistência e a imaginária é a reatância. Nesse contexto, X pode assumir valores positivos ou negativos. Quando X é positivo, a impedância é dita indutiva, caso X seja negativo, a impedância será capacitiva. Vale ressaltar que impedância, resistência e reatância são todas medidas em Ω . Além disso, a grandeza \mathbf{Z} em forma polar é vista na equação (29).

$$\mathbf{Z} = |Z| \angle \varphi \quad (29)$$

Logo, ao comparar as equações (28) e (29), é possível tirar as seguintes conclusões:

$$\mathbf{Z} = |Z| \angle \varphi = R + jX$$

Onde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

$$R = |Z| \cos \varphi$$

$$X = |Z| \sin \varphi$$

Além disso, em algumas situações pode ser mais conveniente utilizar a grandeza inversa da impedância definida como admitância \mathbf{Y} e medida em Siemens, conforme pode ser visto na equação (30):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{V} \quad (30)$$

3.5 LEIS DE KIRCHHOFF PARA O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A execução da análise de circuitos no domínio da frequência frequentemente necessita do uso das leis de Kirchhoff para a tensão e corrente. Nessa perspectiva, para a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), considerando v_1, v_2, \dots, v_n as tensões em uma malha fechada, temos:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 \quad (31)$$

Em regime permanente senoidal, as tensões podem ser representadas em formato de cosseno. Assim, a equação 31 fica da seguinte maneira:

$$v_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + v_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots + v_n \cos(\omega t + \varphi_n) = 0$$

Modificando-se a representação trigonométrica para a exponencial, temos que:

$$\operatorname{Re}(V_1 e^{j\omega t} e^{j\varphi_1}) + \operatorname{Re}(V_2 e^{j\omega t} e^{j\varphi_2}) + \dots + \operatorname{Re}(V_n e^{j\omega t} e^{j\varphi_n}) = 0$$

Se $\mathbf{V}_k = V_k e^{j\varphi_k}$ e $e^{j\omega t} \neq 0$,

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n = \mathbf{0}$$

Demonstrando que a lei de Kirchhoff também pode ser utilizada no domínio fasorial. Além disso, analogamente a LKT é possível demonstrar a validade da Lei das correntes de Kirchhoff para os fasores, ou seja, se i_1, i_2, \dots, i_n forem as correntes saindo ou entrando em uma região fechada num circuito em um instante t arbitrário, então:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$$

Caso $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ sejam as formas fasoriais das senoides i_1, i_2, \dots, i_n , teremos que:

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_n = \mathbf{0}$$

Na qual é a lei de Kirchhoff para as correntes (LKC) no domínio da frequência e uma vez demonstradas a validade da LKT e LKC para esse domínio será possível

determinar facilmente a combinação de impedâncias que será tratada detalhadamente no próximo tópico.

3.6 ASSOCIAÇÕES ENTRE IMPEDÂNCIAS

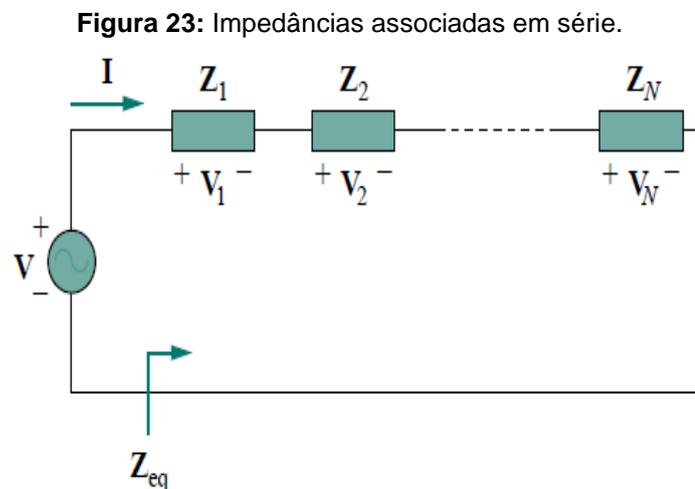
Partindo-se de N impedâncias associadas em série, mostrado na figura 23, é possível verificar uma mesma corrente I percorrendo as impedâncias. Assim, aplicando-se LKT teremos:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = I.(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$$

Dessa forma, a impedância equivalente Z_{eq} para os terminais de entrada do circuito vale:

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Provando-se que a impedância equivalente de N elementos conectados em série é a soma de cada uma das impedâncias individuais, análogo a associação em série entre resistores.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.339)

Nessa perspectiva, considerando-se o caso específico de duas impedâncias associadas em série (figura 24), a corrente através das impedâncias fica:

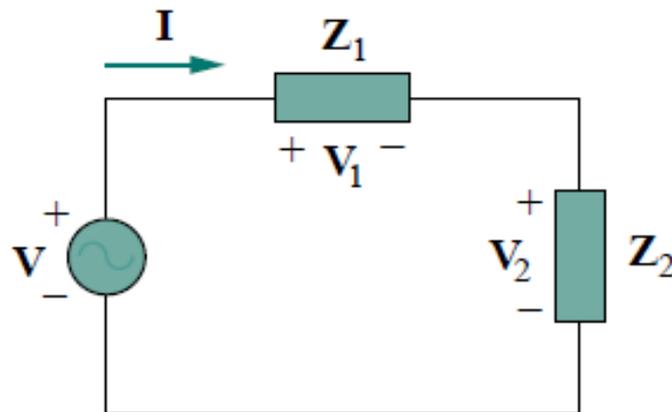
$$I = \frac{V}{Z_1 + Z_2}$$

Entretanto, $V_1 = Z_1 \cdot I$ e $V_2 = Z_2 \cdot I$, assim:

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V \quad (32)$$

$$V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V \quad (33)$$

Figura 24: Duas impedâncias associadas em série.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.339)

Portanto, as equações 32 e 33 são as relações de divisão de tensão. Analogamente, é possível calcular a impedância ou admitância equivalente para o caso de N elementos conectados em paralelo (figura 25) e cada impedância possui a mesma tensão. Dessa forma, aplicando-se a Lei de Kirchhoff das Correntes ao nó superior, temos:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N} \right)$$

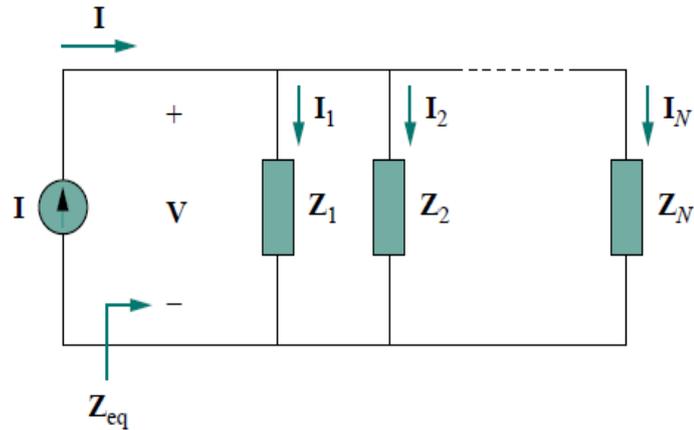
E a impedância e admitância equivalentes ficam:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

E assim:

Figura 25: Impedâncias associadas em paralelo



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.339)

De outra forma, para o caso de duas impedâncias associadas em paralelo (figura 26), é possível generalizar o valor da impedância equivalente para:

$$Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Outrossim, como:

$$V = I Z_{eq} = I_1 \cdot Z_1 = I_2 \cdot Z_2$$

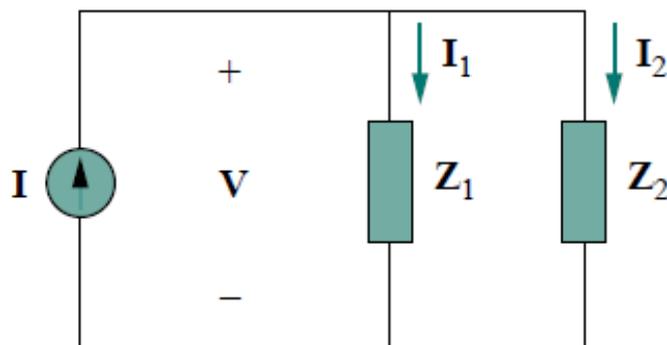
As correntes nas impedâncias valem:

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I$$

$$I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I$$

Dessa forma, obteve-se a divisão de corrente:

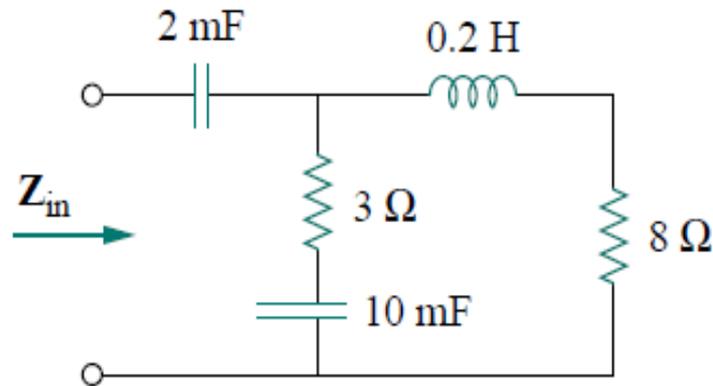
Figura 26: Duas impedâncias associadas em paralelo.



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.340)

Exemplo 3.3: Calcule a impedância de entrada do circuito da figura 27, considerando que o circuito está operando em $\omega = 50\text{rad/s}$.

Figura 27: Circuito para o exemplo 3.3



Fonte: Alexander e Sadiku (2003,p.341)

Solução:

Considerando:

Z_1 = Impedância do capacitor de 2mF

Z_2 = Impedância do resistor de 3 Ω em série com o capacitor de 10mF

Z_3 = Impedância do indutor de 0,2H em série com o resistor de 8 Ω

Assim,

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -j10\Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = (3 - j2)\Omega$$

$$Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \cdot 0,2 = (8 + j10)\Omega$$

A resistência de entrada vale:

$$Z_{\text{ent}} = Z_1 + Z_2 \parallel Z_3$$

$$Z_{\text{ent}} = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{11 + j8}$$

$$Z_{\text{ent}} = -j10 + 3,22 - j1,07\Omega$$

Portanto,

$$Z_{\text{ent}} = 3,22 - j11,07\Omega$$

4 PROBLEMAS APLICADOS A CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

As questões elaboradas necessitaram de uma breve contextualização para que o educando consiga solucionar os problemas e se familiarizar com as diferentes notações utilizadas para as grandezas. Nessa perspectiva, os exercícios serão apresentados bem como sua solução.

Leia o texto e responda às questões 4.1, 4.2 e 4.3.

Fasor: É um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senóide. Os fasores se constituem de uma maneira simples para analisar circuitos de corrente alternada. A noção de resolução de circuitos CA usando fasores foi introduzida inicialmente pelo matemático e engenheiro eletricitista austro-alemão Charles Proteus Steinmetz (1865-1923) em 1893. Antes de definirmos completamente os fasores e aplicá-los à análise de circuitos, precisamos estar completamente familiarizados com números complexos. Um número complexo Z pode ser escrito nas formas retangular, polar e trigonométrica como:

$$Z = x + jy = r \angle \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Onde j é a unidade imaginária; x é a parte real de z ; y é a parte imaginária de z . r é a magnitude e φ é a fase de Z . Caso julgue necessário, considere as seguintes operações entre dois números complexos quaisquer Z_1 e Z_2 :

Adição:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Subtração:

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Multiplicação:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Divisão:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Já as relações tensão-corrente para os resistores, capacitores e indutores em regime de corrente alternada, são respectivamente:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

Essas equações podem ser escritas em termos da razão entre a tensão e corrente em forma de fasor, como indicado a seguir:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L$$

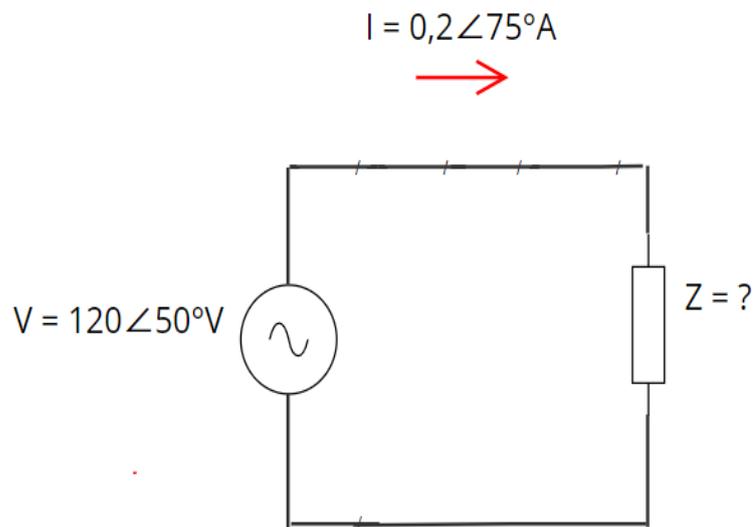
Dessas três expressões, obtemos a lei de Ohm na forma fasorial para qualquer tipo de elemento:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

Onde Z é um valor dependente da frequência conhecido como impedância medido em Ohms. Ademais, Z é a razão entre a tensão fasorial V e corrente fasorial I , medida em Ohms(Ω). Essa grandeza, representa a oposição que um circuito oferece ao fluxo de corrente senoidal.

4.1. Observe o circuito da figura a seguir.

Figura 28: Circuito referente à questão 01.



Fonte: Autoria própria.

Sabendo que o circuito na figura acima possui fonte de tensão de $V = 120 \angle 50^\circ \text{V}$ e é percorrido por uma corrente de $I = 0,2 \angle 75^\circ \text{A}$. O valor da impedância Z , é:

- (a) $600 \angle -25^\circ \Omega$
- (b) $240 \angle 25^\circ \Omega$
- (c) $240 \angle -25^\circ \Omega$
- (d) $600 \angle 25^\circ \Omega$
- (e) $600 \angle 125^\circ \Omega$

Solução:

Para resolver esta questão, basta dividir o valor de V por I , portanto:

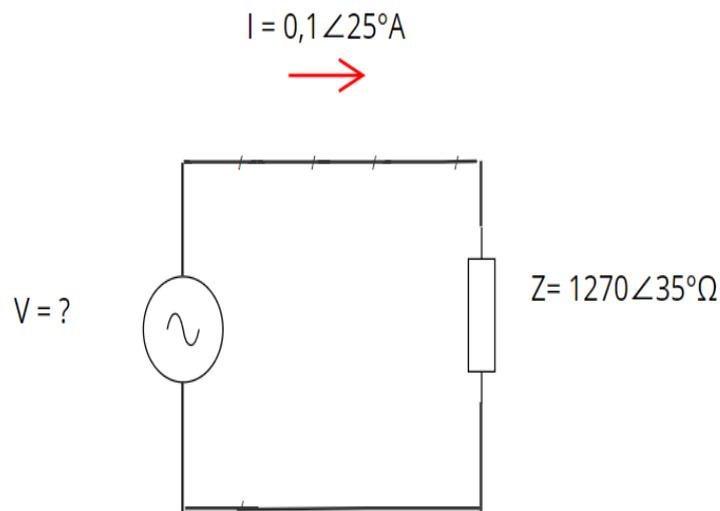
$$Z = \frac{V}{I} = \frac{120 \angle 50^\circ}{0,2 \angle 75^\circ} = 600 \angle (50^\circ - 75^\circ)$$

$$Z = 600 \angle (-25^\circ) \Omega$$

Assim, a resposta correta é a letra A.

4.2. O circuito da figura abaixo possui uma impedância $Z = 1270 \angle 35^\circ \Omega$.

Figura 29: Circuito referente à questão 02.



Fonte: Autoria própria.

Se a corrente que atravessa o circuito é $I = 0,1 \angle 25^\circ$ A, o fasor V , vale:

- (a) $127 \angle 10^\circ$ V
- (b) $12700 \angle 10^\circ$ V
- (c) $12700 \angle 60^\circ$ V
- (d) $127 \angle 60^\circ$ V
- (e) $127 \angle 55^\circ$ V

Solução:

Nesse item, será necessário multiplicar o fasor I pelo Z , consultando a lei de Ohm na qual foi fornecido no texto.

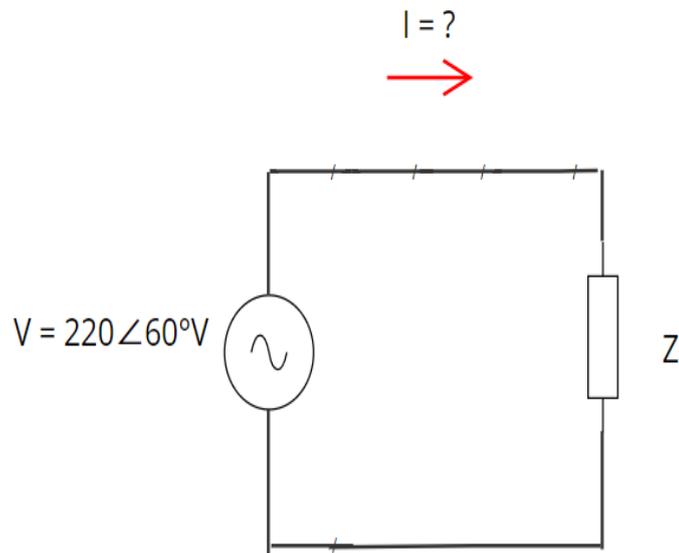
$$V = Z \cdot I = 1270 \angle 35^\circ \cdot 0,1 \angle 25^\circ = 127 \angle (35^\circ + 25^\circ) = 127 \angle 60^\circ \text{ V}$$

Assim, a resposta correta é a letra D.

4.3. Observe o contexto a seguir:

O circuito da figura 30 é alimentado por uma tensão alternada $V=220\angle 60^\circ\text{V}$ e possui uma impedância $Z= \left(\frac{11\sqrt{3}}{2} + j\frac{11}{2}\right)\Omega$. De posse desses valores, marque a opção que apresenta o valor correto para corrente I que flui no circuito.

Figura 30: Circuito referente à questão 03.



Fonte: Autoria própria.

- (a) $I = 20\angle 30^\circ\text{A}$
- (b) $I = 20\angle 60^\circ\text{A}$
- (c) $I = 20\angle 90^\circ\text{A}$
- (d) $I = 0,05\angle 30^\circ\text{A}$
- (e) $I = 0,05\angle 60^\circ\text{A}$

Solução:

Deve-se converter a impedância Z para a forma fasorial, dessa forma:

$$Z = \frac{11\sqrt{3}}{2} + j\frac{11}{2}$$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = 11 \Omega$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$$

$$Z = 11\angle 30^\circ \Omega$$

Em seguida, a corrente I será obtida dividindo-se o fasor V pelo Z .

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220 \angle 60^\circ}{11 \angle 30^\circ} = 20 \angle (60^\circ - 30^\circ) = 20 \angle 30^\circ \text{ A}$$

Assim, a resposta correta é a letra A.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, foi feita uma breve revisão sobre números complexos com as respectivas demonstrações das principais propriedades operatórias, não deixando de fornecer exemplos referentes ao cálculo envolvendo o conjunto numérico em questão nas suas formas trigonométrica e algébrica, bem como uma sucinta abordagem sobre o histórico dos estudos dessa área com a respectiva contribuição de cada autor.

Após isso, este trabalho tratou sobre corrente alternada ou senoidal, enfatizando sua importância, pois é uma das formas de onda mais geradas no mundo tanto na área das comunicações e demais instalações elétricas. Nessa perspectiva, as principais grandezas elétricas envolvidas na elaboração dos itens contextualizados foram definidas bem como os principais elementos passivos presentes em um circuito elétrico, sendo estes: o resistor, indutor e capacitor. De posse disso, foi definida a impedância, onde esta é representada por um número complexo onde sua parte real representa a resistência enquanto a imaginária mostra a indutância ou capacitância.

Ademais, devido a corrente alternada ser modelada por meio das funções seno e cosseno, a manipulação algébrica torna-se trivial de modo que um educando do ensino básico de posse de uma breve contextualização fornecendo instruções sobre toda a notação matemática utilizada e com conhecimento prévio de números complexos seja capaz de resolver questões básicas envolvendo os conteúdos abordados nessa pesquisa.

Quanto aos três itens elaborados pelo autor, o conhecimento prévio cobrado na primeira questão era sobre divisão entre números complexos enquanto que na segunda era necessário efetuar a operação inversa. Já na última questão, além de precisar dividir números complexos era preciso fazer uma mudança da notação algébrica para a fasorial na qual é totalmente explicada no texto suporte para os itens.

Logo, constata-se que o objetivo dessa pesquisa foi atingido e com base nesse trabalho espera-se que sejam feitas elaborações de outros itens referentes a interdisciplinaridade de números complexos em outras áreas do conhecimento, uma vez que o conteúdo em questão não é aplicado somente em corrente alternada, mas também na parte de fluidos e outros fenômenos de meios contínuos.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. Porto Alegre: Bookman, 5. ed., 2003.

DORF, Richard C; SVOBODA, A.S. James. **Introdução aos Circuitos Elétricos**. Rio de Janeiro: LTC, 8ª Edição, 2012.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar** Volume 6, Complexos, Polinômios, Equações. São Paulo: Editora Atual, 8ª Ed, 2013

KILHIAN, Kleber. **Os números complexos de Cardano a Hamilton**. O Baricentro da Mente, 2022. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2022/01/os-numeros-complexos-de-cardano-a-hamilton.html>>. Acesso em 03 de Mai. De 2022.

Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília, Distrito Federal, 2009a.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Números complexos**. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/numeros-complexos.htm> . Acesso em 01 de Mai. de 2022.

SANTOS, Valdex. **Números Complexos na Engenharia Elétrica**. Disponível em: <<https://waldexifba.wordpress.com/eventos-2/aplicacoes-dos-numeros-complexos-a-engenharia-eletrica>> Acesso em 20 de abril de 2022.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Propriedades do conjugado e do módulo de números complexos**. Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/propriedades-conjugado-modulo-numeros-complexos.htm> . Acesso em: 02 de Mai. de 2022.

SILVEIRA, J.F. Porto. **Os números complexos foram inventados para resolvermos as equações do segundo grau?** Matemática UFRGS, 2001 . Disponível em: < <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/compla.html> >. Acesso em: 03 de Mai. de 2022.

SOARES, Marcio G. **Cálculo em uma variável complexa** / Marcio Gomes Soares. 5ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.