Universidade Federal do Acre
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

LUAN FELIPE MOMO

NÚMEROS COMPLEXOS APLICADOS NA RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS BÁSICOS DE CORRENTE ALTERNADA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO E CURSOS TÉCNICOS.

RIO BRANCO

2023

NÚMEROS COMPLEXOS APLICADOS NA RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS BÁSICOS DE CORRENTE ALTERNADA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO E CURSOS TÉCNICOS.

Discente: Luan Felipe Momo

Orientador: Prof. Dr. Sergio Brazil Junior

Coorientador: Prof. Dr. Josean da Silva Alves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

RIO BRANCO

2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

M733n Momo, Luan Felipe, 1993 -

Números complexos aplicados na resolução de circuitos elétricos básicos de corrente alternada: uma proposta de sequência didática para o ensino médio e cursos técnicos / Luan Felipe Momo; orientador: Dr. Sergio Brazil Junior e coorientador: Josean da Silva. – 2022.

101 f.:il; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT),
Rio Branco, 2022.
Inclui referências bibliográficas.

1. Números complexos. 2. Circuitos elétricos. 3. Sequência didática. I. Brazil Junior, Sergio (orientador). II. Silva, Josean da. III. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecário: Uéliton Nascimento Torres CRB-11º/1074.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
FOLHA DE APROVAÇÃO

Números complexos aplicados na resolução de circuitos elétricos básicos de corrente alternada: uma proposta de sequência didática para o ensino médio e cursos técnicos

Autor (a): Luan Felipe Momo

Orientador (a): Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PPGPROFMAT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:

Prof. Dr. Isaac Dayan Bastos da Silva
Membro Interno – UFAC

Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
Orientador e Presidente da Banca UFAC

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Membro Externo - UFMT

Documento assinado eletronicamente por **CARLOS RODRIGUES DA SILVA**, **Usuário Externo**, em 16/02/2023, às 12:05, conforme horário de Rio Branco, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Sergio Brazil Junior**, **Professor do Magisterio Superior**, em 16/02/2023, às 14:06, conforme horário de Rio Branco, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Isaac Dayan Bastos da Silva**, **Professor do Magisterio Superior**, em 17/02/2023, às 07:28, conforme horário de Rio Branco, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link Verificar Autenticidade informando o código verificador **0800194** e o código CRC **7AC7239E**.

Rio Branco, 16 de fevereiro de 2023.

Rio Branco, Acre
Fevereiro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao dom da vida concedido pelo Grande Arquiteto do Universo.

Segundamente, a minha mãe, Elisangela Momo, pelo dom da criação, da educação, da paciência, do amor e da capacidade de ser mãe e pai ao mesmo tempo em minha vida.

Ao meu grande amigo e chefe de trabalho, o Professor Mustafa Sahid. Suas contribuições para esta dissertação foram importantes. Aproveito, também, para lhe agradecer por todo seu apoio ao meu progresso profissional.

Ao meu orientador, o Professor Sérgio Brazil, pela dedicação ao trabalho de me orientar. Além disso, desde o tempo de graduação, o seu ato de ensinar é uma referência para o meu trabalho enquanto docente.

A todos os professores que de alguma forma fizeram parte da minha vida na educação.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho versa sobre a importância do estudo dos números complexos no ensino médio, apontando, na introdução, um questionamento acerca da sua retirada do plano curricular da rede pública do estado do Acre; e também apontando algumas consequências desta perda para os alunos que visam cursos superiores como as engenharias, licenciaturas em matemática, física, química. Como forma de chamar atenção para a importância dos números complexos, e para suas aplicações, discorre-se sobre a utilização desse tema para o estudo dos circuitos elétricos excitados por fontes de tensão variáveis no tempo (corrente alternada), propondo-se por meio de uma sequência didática esta aplicação aos alunos do ensino médio. A leitura deste trabalho é destinada ao público em geral, especialmente aos professores de matemática que desejam trabalhar números complexos no ensino médio com aplicações.

Palavras-chave: Números complexos, Circuitos elétricos, Sequência didática.

ABSTRACT

This work deals with the importance of the study of complex numbers in high school, pointing out, in the introduction, a question about its removal from the curricular plan of the public network in the state of Acre; and also pointing out some consequences of this loss for students who aim higher courses in the area of exact sciences. As a way of drawing attention to the transversality of complex numbers, the importance of complex numbers for the study of electrical circuits excited by time-varying voltage sources (alternating current) is discussed, proposing through a didactic sequence this application to high school students and technical courses in the areas involved. The reading of this work is intended for the general public, especially for math teachers who want to work with complex numbers in high school with applications.

Keywords: Complex numbers, Electric circuits, Didactic sequence.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem sido observado que, do currículo de matemática do ensino médio da rede pública do Estado do Acre, alguns conteúdos foram retirados. Por exemplo: estudo das cônicas, números complexos, binômio de Newton, paridade de funções, funções compostas, estudo aprofundado de polinômios e etc. Enquanto educadores matemáticos que entendem a importância do estudo da matemática básica de forma completa, devemos questionar: por quais critérios, de fato, abandonou-se todos esses temas? Claro que temos pistas e possíveis explicações para esta pergunta. Intuitivamente, todo professor de matemática da educação básica já percebeu que o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) vem induzindo a reorganização dos conteúdos a serem preconizados na escola. Assim, aqueles temas deixados de lado pelo exame, com o tempo, foram caindo em desuso e praticamente não sendo mais vistos no ensino médio. Com os conteúdos de matemática que foram anteriormente citados, ocorreu esse processo. Desta forma, quais as possíveis consequências disso?

Sabemos que o Enem, no seio de sua proposta, tem como objetivo o estímulo ao raciocínio, a interpretação de texto, além da contextualização e a transversalidade. Diante dessa perspectiva, no contexto da matemática, certos conteúdos foram privilegiados por supostamente serem "mais facilmente" aplicados à realidade do dia a dia. Como exemplo, os assuntos de proporcionalidade e matemática financeira, presentes em todas as provas do Enem já realizadas até agora. Contudo, qual o critério usado para classificar um objeto de conhecimento mais contextualizado e transversal do que outro?

Respondendo ao questionamento feito ao fim do primeiro parágrafo, vamos na seguinte direção: a parte da matemática que foi e vem sendo removida do currículo do ensino médio é importante para qual público? Com base na minha experiência de já ter cursado dois cursos superiores na área de exatas (Engenharia Elétrica e Licenciatura Matemática), respondo de forma segura: o grupo de alunos mais afetados são aqueles que irão optar por cursos de exatas. O ciclo básico das engenharias, por exemplo, exige do aluno um conhecimento em matemática básica não suprido somente pelos temas abordados no Enem.

Todavia, a ideia aqui não é afirmar que a prova de matemática do Enem trata de temas inúteis, mas sim salientar suas deficiências para aqueles que adentrarão no universo das exatas para suas metas profissionais. O que tem ocorrido, é a inserção de estudante com lacunas de aprendizagem nos cursos de exatas, o que acarreta dificuldades para o entendimento de disciplinas como cálculo, álgebra e estatística. Existe uma tentativa de revisão da matemática básica no ensino superior, mas por questões de carga horária do ciclo próprio da faculdade, tais revisões são dadas de modo muito superficial e com pouco aproveitamento, não resolvendo de maneira eficiente o problema em questão. Portanto, os índices de reprovações nesses cursos - que já são naturalmente elevados - ficam ainda maiores devido a perda do estudo de uma matemática mais abrangente no ensino médio. Assim, para os alunos que decidem por cursos como direito, medicina ou demais áreas das humanas, a matemática vista em torno do Enem se torna suficiente. Aos pretensos dos cursos de exatas, insuficiente.

Neste trabalho, escolhemos um conteúdo de matemática, ao meu ver, que foi vítima dessas remoções equivocadas, o tema Números Complexos. Desse modo, numa primeira abordagem, parece-nos abstrato e sem nenhuma aplicação possível. Contudo, em uma das vastas obras de matemática para o ensino médio, do autor Luiz Roberto Dante, há uma abordagem interessante: uma aplicação aritmética dos complexos na resolução de circuitos com corrente alternada. Mesmo sendo visto de maneira superficial, o aluno observa que tal conteúdo conversa com outra disciplina; ou seja, é observada uma interdisciplinaridade possível para um assunto que foi historicamente tratado dentro dos limites do algebrismo matemático. Ao mesmo tempo, decidimos ainda fazer todo um capítulo dedicado a aplicação dos números complexos no contexto da eletrodinâmica, a fim de evidenciar uma das várias possibilidades de aplicações de tal tema, e de certa forma, demostrar que a sua "morte súbita" como objeto de estudo no ensino médio é um equívoco. Apesar do autor Luiz Roberto Dante se preocupar em mostrar uma aplicação real para os complexos, observamos que a maioria dos livros didáticos que abordava o conjunto dos números complexos não se preocupava em evidenciar qualquer utilidade prática do conteúdo, despertando assim nos alunos, e até mesmo em professores da educação básica, um sentimento de inutilidade de estudar os números imaginários. Inclusive, já presenciei relatos de professores de matemática que atuam no ensino médio há mais tempo que afirmam que só ministravam aulas de números complexos aos seus alunos porque era um conteúdo cobrado pelos vestibulares próprios das universidades. Elon Lages, famoso matemático brasileiro, dizia que o livro didático de matemática, ofertado para a educação básica, deve abordar os temas sempre contemplando o tripé: conceituação, manipulação e aplicação. No caso dos números complexos, como vimos, constatamos que a parte da aplicação era deixada de lado. Atualmente, os complexos não estão presentes sequer na matriz de referência do ENEM, sendo também visto como um conteúdo flexível. Conforme evidencia o trecho a seguir.

Apesar das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) reconhecerem que tradicionalmente os números complexos compõem o currículo da Matemática, não consideram este tema indispensável, podendo "ser tratado na parte flexível do currículo das escolas", pois "isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área" (BRASIL, 2007, p.122). Contudo, o domínio básico do conjunto dos números complexos é fundamental, principalmente aos alunos que ingressarão nas engenharias elétrica e eletrônica.

De acordo com Júnior (2016), a experiência docente do pesquisador revela que, em geral, grande parcela dos alunos ingressantes no curso de Engenharia Elétrica não tem familiaridade com o objeto matemático Número Complexo. Para esses alunos, número complexo se trata de um assunto da Matemática do qual eles não tem clareza e não conseguem dar um significado físico em relação à disciplina Circuitos Elétricos, considerando que o objeto número complexo é largamente utilizado teoricamente e como ferramenta para a resolução de problemas.

Na cidade de Curitiba, em julho de 2013, ocorreu o XI encontro Nacional de Educação Matemática. Um dos temas apresentados pelo Mestre Rafael Vassalo Neto, se trata da defasagem de conteúdos matemáticos. Na sua pesquisa, o professor questiona a falta de interligação entre a trigonometria, geometria, álgebra e números complexos. Além disso, defende a presença dos números complexos no ensino médio, pois o tema possui aplicações em várias áreas, sendo elas a física, astronomia, ciências da computação, no estudo da cartografia e etc. E ainda segundo o autor, para que haja sucesso desse conteúdo no ensino médio, novas metodologias devem ser adotadas, adequando-se às novas realidades e desafios da educação.

Em relação à estrutura do trabalho, no primeiro capítulo será dado o enfoque teórico básico de números complexos, sendo a referência bibliográfica utilizada para elaboração, a coleção de Fundamentos de Matemática Elementar, de Gelson Iezzi. O capítulo seguinte, será composto pela Obra de Fundamentos de Circuitos Elétricos (SADIKU), uma revisão básica sobre eletrodinâmica a fim de, ainda neste capítulo, apresentar a aplicação que nos interessa como proposta de interdisciplinaridade. Além disso, será apresentada uma proposta de roteiro para uma sequência didática que aborda números complexos visto com a aplicação sugerida neste trabalho. Nos anexos, consta uma sequência didática construída nessa direção; nos anexos, também, colocamos relatos de alguns professores da Universidade Federal do Acre que responderam aos seguintes questionamentos elaborados pelo autor deste trabalho:

- Qual a sua opinião sobre a retirada do tema Números Complexos do currículo do ensino médio?
- Com relação às disciplinas que você ministra, que exigem conhecimentos prévios sobre números complexos, como vem sendo o desempenho dos alunos nos últimos anos?

Os professores envolvidos no questionário ministram aulas nos cursos de licenciatura em física e bacharelado em Engenharia elétrica.

CAPÍTULO 1

1.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Quando, ainda no ensino básico, aprendemos a resolver equações do segundo grau, nossos professores nos instruem a parar com a resolução após encontrarmos um discriminante negativo. Erroneamente, alguns professores dizem “não há solução para esta equação”, enquanto o mais adequado seria “não há solução real para esta equação”. Pois bem, historicamente, equações polinomiais que aparentemente não possuem solução em $\mathbb{R}$ chamaram atenção de diversas matemáticas e em épocas distintas. Segundo o que se tem registrado, a primeira vez que se leu ou ouviu falar sobre um número complexo encontra-se na obra Stereometria*,* do grego Herão de Alexandria (c.100 a.C.). Ao se determinar a altura de um tronco de pirâmide quadrangular em que o lado da base maior mede 28, o da menor 4 e a aresta lateral 15, o mesmo chegou corretamente ao resultado $\sqrt{81-144}$, o que mostrava que num contexto prático, o problema em questão era impossível; porém, maliciosamente ou não, Herão (ou algum subordinado do mesmo) continuou as contas, considerando de forma bizarra que $\sqrt{81-144} = \sqrt{63}$.

Cerca de 200 anos depois, o grego Diofanto de Alexandria incluiu na sua Arithmetica – uma obra de 13 livros – a seguinte pergunta: achar os lados de um triângulo retângulo de área medindo 7 e perímetro 12. No contexto da época, Diofanto chamou os catetos de $1/x$ e $14x$ (note que quando se calcula a área com essas medidas, obtemos de fato o valor 7). Após alguns cálculos, ele chegou na seguinte equação $172x = 336x^2 + 24$, e concluiu que o problema em questão não tinha solução porque o que chamamos hoje de discriminante nesse caso não era positivo. Séculos mais tardes, o matemático Hindu, Mahvira, generalizou o que Diofanto havia concluído em sua resolução, dizendo: “Tal como na natureza das coisas, uma quantidade negativa não é um quadrado e, portanto, não tem raiz quadrada”. Ainda iria demorar bastante tempo para que essa concepção mudasse.

Ao contrário do que se imagina, os números complexos não entraram na matemática através do estudo das equações polinomiais do segundo grau, mas sim das cúbicas. Quando os estudos pelas soluções de uma equação cúbica ganharam bastante força. No século XVI, novamente surgiram questões envolvendo raízes quadradas de números negativos, e já não dava mais para se evitar esse tema dizendo apenas que não existia ou atribuindo tal fato a algo “sobrenatural”. Cardano (1501-1576), foi o primeiro matemático a operar com números complexos. Diante da seguinte questão: dividir o número 10 em duas partes de modo que o produto destas resulte em 40, Cardano chamou essas partes de x e $10 - x$, além de impor a seguinte equação: $x^2 - 10x + 40 = 0$. Resolvendo-a, ele obteve as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, e afirmou: “pondo de lado as torturas mentais envolvidas, multiplique $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$ e o resultado será 40”. Meio envergonhado por aceitar a solução feita, e por não ter como interpretá-la, disse que a aritmética é tão sútil quanto inútil.

Como já mencionamos anteriormente, os números complexos penetraram na matemática por meio da busca de soluções de equação polinomiais do terceiro grau, por volta do século XVI com Jerônimo Cardano. Na obra “Ars Magna”, em 1545, Cardano propôs um método para a solução das equações cúbicas na forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$. Ele mostrou que sempre era possível reduzir essa equação ao formato $y^3 + My + N = 0$ (I), aonde o valor de M é dado por $M = \left(\frac{b^3}{3} + c\right)$ e $N = \frac{2b^3}{27} - \frac{2b^2}{3} - \frac{cb}{2} + d$. Depois, Cardano prova que uma solução para (I) é:

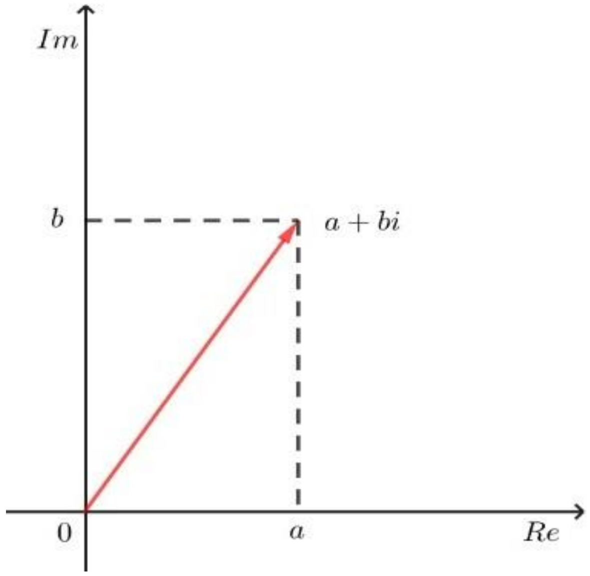
$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Na solução da equação cúbica $x^3 = 15x + 4$, e usando a fórmula de Cardano para solução de equações cúbicas, obtemos o número:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ou seja, de alguma maneira, esse número aparentemente bem estranho dá 4. Como provar isto? O autor dessa façanha foi o Bolonhês Rafael Bombelli (c.1530-1579). Entretanto, Rafael teve de recorrer às raízes de números negativos. Sua ideia basicamente era supor parcelas conjugadas de números complexos, que na terminologia atual seria considerar $a + bi$ e $a - bi$. Após alguns cálculos, obteve $a = 2 \, e \, b = 1$. Assim, valerá que $(2 + i) + (2 - i) = 4$, conforme esperado.

Figura 1: Representação de um número complexo no plano.



Fonte: O autor.

1.2 NÚMEROS COMPLEXOS

Definição 1: sejam a e b reais. Definimos o número complexo z quando escrito na forma $z = a + bi$, em que i é a chamada unidade imaginária. Por definição, diremos que $i^2 = -1$ ou, equivalentemente, $i = \sqrt{-1}$.

O primeiro impacto dessa definição é o fato de estarmos definindo a raiz quadrada do número real negativo -1. Além disso, pode-se estender o cálculo para raiz quadrada de qualquer outro número real negativo. Por exemplo, como poderíamos obter, nos complexos, a raiz quadrada de – 25? Para tanto, vamos usar a propriedade $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$, válida em IR quando a e b são não negativos. Mesmo ainda não estando formalizada nenhuma álgebra com os números complexos, façamos:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{-1} = 5i$$

Curiosamente, ainda que estejamos na informalidade, fazendo $(5i)^2 = 5^2 . i^2 = 25.(-1) = -25$. Ou seja, a definição dada nos parece fazer bastante sentido para construirmos uma estrutura que comporte o cálculo de raízes de índices pares de números reais negativos.

1.2.1. Operações com pares ordenados

Vamos tomar todos os pares ordenados (x, y) do $\mathbb{R}^2$. São válidas as seguintes propriedades:

I) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \; e \; b = d$.

II) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

III) Multiplicação: $(a, b) \,.\, (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Sabemos que $\mathbb{R}^2$ é o resultado do produto cartesiano $\mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$. O plano cartesiano x por y que conhecemos usualmente nada mais é do que a representação geométrica desse produto cartesiano. O eixo x pode ser visto como a reta real, de modo que todo número real a pode ser identificado pelo par ordenado $(a, 0)$. Tomemos agora o par ordenado $(0,1)$. Usando III, façamos a seguinte conta:

$$(0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0).$$

Notemos que o quadrado do par ordenado (0,1) é igual ao número real -1. Assim sendo, naturalmente, vamos definir a unidade imaginária vista anteriormente como o par ordenado $(0,1)$, ou seja, $i = (0,1)$.

1.2.2 Uma nova definição para número complexo

Definição 2: Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por $\mathbb{C}$, a reunião de todos pares ordenados de números reais. Ou seja, dado, $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$, com x e y reais, o número **z** pode ser escrito como $z = (x, y)$. Além disto, valerá a igualdade $i^2 = -1$. Em notação matemática:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x \text{ e } y \text{ reais}$$

Assim sendo, todo número complexo escrito na forma $x + iy$ é dito na forma algébrica. O número x é dito parte real, enquanto y é dito parte imaginária. Em notação:

$$x = Re(z) \text{ e } y = Im\,(z)$$

Por exemplo, ao tomarmos o número complexo $z = 1 - i$, temos que $1 = Re\,(z)$ e $-1 = Im\,(z)$. Quando $x = 0$, diremos que se trata de um número imaginário puro; e quando $y = 0$, diremos que o complexo em questão é um número real. Como consequência, fica claro que o conjunto dos números reais é uma parte do conjunto dos números complexos, isto é, $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$. Ou ainda, todo número real é complexo.

Quando uma operação definida em um conjunto é definida, isto é, o resultado dessa operação ainda é elemento do conjunto, dizemos que a mesma é fechada. Por exemplo, o conjunto dos números naturais se fecha à adição e à multiplicação, porém quando se define a operação de subtração dentro dos naturais, tal operação não fica fechada. O mesmo acontece com o conjunto dos inteiros em relação a operação de divisão, sendo necessário a criação do conjunto dos números racionais, que fica definido a partir da razão entre dois inteiros. Do curso de análise, é sabido que os números reais é um corpo ordenado completo, e dentro do seu contexto, podemos executar todas as operações básicas, além de ser possível trabalhar com desigualdades (já que é ordenado). A motivação básica para o desenvolvimento dos números complexos se dá pelo fato de, em $\mathbb{R}$, não ser possível o cálculo de raízes reais de números negativos (com índice par).

1.2.3 Igualdade entre números complexos

Definição 3: Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ complexos. Diremos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Esse fato decorre naturalmente por conta da condição de dois pares ordenados serem iguais.

Sejam z e w números complexos tais que $z = (x^3 - 8) + y^2 i$ e $w = 4i$. Determine os valores reais de x e y de modo que valha $z = w$**.**

Resolução: Note, em respeito à definição de igualdade, que $Re(z) = x^3 - 8 = 0$ e $Im(z) = y^2 = 4$.

Assim, vale o sistema $\begin{cases} x^3 - 8 = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ => $x = 2$ e $y = \pm 2$.

1.2.4 Números complexos: estrutura de corpo

Dado um conjunto K não vazio, e nele definido duas operações binárias, chamadas de adição (+) e multiplicação (.); diremos que a estrutura (k,+,.) é um corpo se estas operações, em K, forem bem definidas (fechadas) e apresentarem as propriedades de comutatividade, associatividade, elemento neutro, elemento inverso, e a distributividade da multiplicação em relação à adição. A fim de que possamos trabalhar com resolução de equações, e diversos cálculos dentro dos números complexos, vamos demonstrar que $\mathbb{C}$ é um corpo de acordo com as definições dadas para adição e multiplicação com complexos. Para tanto, provemos que a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$ gozarão das seguintes propriedades: comutatividade, associatividade, existência do elemento neutro e existência do simétrico aditivo/multiplicativo e distributividade da multiplicação em relação à adição. Partiremos do fato de que a adição e a multiplicação que foram definidas estão na verdade bem definidas em $\mathbb{C}$, ou seja, a soma e o produto de números complexos são complexos (fechamento em relação a essas operações).

Como os componentes algébricos de um número complexo são números reais, usaremos a estrutura do corpo dos reais para provarmos o que se deseja.

Sejam $\mathrm{z}_1 = a + bi,\ \mathrm{z}_2 = c + di$ e $\mathrm{z}_3 = f + gi$ complexos, com $a, b, c, d, f\ e\ g$ reais.

Observação: Usaremos as definições de adição e multiplicação com pares ordenados para provar que $\mathbb{C}$, munido dessas duas operações, é um corpo. Uma vez que estamos trabalhando com números complexos na forma de par ordenado, observe, o caso da adição, que dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, a soma $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i$.

A1. Comutatividade da adição*:*

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = z_2 + z_1.$$

A2. Associatividade aditiva*:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + c) + (b + d)i] + f + gi = (a + c + f) + (b + d + g)i$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = a + bi + [(c + f) + (d + g)]i = (a + c + f) + (b + d + g)i$$

Portanto, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

A3. Elemento neutro aditivo*:*

Desejamos a existência de certo número complexo z_0 tal que para todo complexo $z = x + iy$, valha que $z + \mathrm{z}_0 = \mathrm{z}$. Assumindo a adição que definimos em $\mathbb{C}$, bem como a de igualdade, e escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$, temos;

$$z_1 + z_0 = (a + x_0) + (b + y_0)i = a + bi$$

Tal igualdade nos levará ao sistema $\begin{cases} a + x_0 = a \\ b + y_0 = b \end{cases}$

Na resolução desse sistema, estamos trabalhando com números reais, e facilmente obtemos que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

Portanto, o elemento neutro da adição nos complexos é o número real 0, ou ainda, $0 + 0i$.

A4. Existência do simétrico aditivo*:*

Na parte anterior, provamos que existe um número complexo (que é único, inclusive) tal que ele se comporta como neutro da adição. Agora queremos determinar se dado qualquer número complexo z, existe um número complexo w tal que $z + w = 0$. De fato, existe!

Pondo $w = x + iy$, e tomando o nosso z_1, temos:

$$z_1 + w = (a + bi) + (x + iy) = 0 + 0i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

Assim sendo, o simétrico de $z_1 = a + bi$ é o complexo $-a - bi$. Vamos defini-lo como $-z_1$.

M1. Comutatividade da multiplicação*:*

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

$$z_2 z_1 = (c, d)(a, b) = (ca - db, cb + ad) = (ac - bd, ad + bc) = z_1 z_2.$$

Portanto, a multiplicação definida em $\mathbb{C}$ é comutativa.

M2. Associatividade da multiplicação*:*

$$(z_1 . z_2)\, z_3 = (ac - bd, ad + bc)(f, g) = (acf - bdf - adg - bcg, acg - bdg + adf + bcf).$$

$$z_1(z_2z_3) = (a,b)(cf - dg, df + cg)$$
$$= (acf - adg - bdf - bcg, adf + acg + bcf - bdg).$$

Não levando em consideração a ordem dos fatores, uma vez que a adição e a multiplicação nos reais são comutativas, vemos que a condição da associatividade do produto é satisfeita em $\mathbb{C}$.

$$(z_{1.}z_2\,)\,z_3 = \ z_1(z_2z_3)$$

M3. Existência do neutro multiplicativo:

Seja $\mathrm{B} = x + iy,\ \text{com}\ x\ \text{e}\ y\ \text{reais},$ um complexo fixo tal que para todo z em $\mathbb{C}$ valha que $\mathrm{zB} = \mathrm{z}$. Usando as definições de multiplicação e igualdade, temos:

$$z_1\,B = (a,b)(x,y) = (ax - by, ay + bx) = (a,b)$$

Assim, chegamos no sistema $\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$. Por meio de uma simples inspeção, podemos constatar que a solução com $x = 1$ e $y = 0$ satisfaz o referido problema. Tomando pelo menos um dos valores (a, ou b) distintos de 0, o sistema é possível e determinado. Portanto, para todo complexo z não nulo, somente o número complexo $z = 1 + 0i$ possui a propriedade de ser o neutro multiplicativo nesse conjunto.

M4. Existência do simétrico multiplicativo (recíproco*):*

Feito o exercício de descobrir um elemento neutro para a multiplicação, vamos agora investigar se para todo $z \neq 0$, existe um z^{-1} tal que aconteça a seguinte igualdade $\mathrm{zz}^{-1} = 1$. Isto é, assim como ocorre em $\mathbb{R}$, estamos investigando a existência de inversos multiplicativos para os complexos. Então vamos lá!

Seja $\mathrm{z}^{-1} = x + iy$, com x e y reais, tal que $\mathrm{xy} \neq 0$. Como o produto entre dois números reais é nulo se pelo menos um dos fatores é nulo, a condição $\mathrm{xy} \neq 0$ nos garante que x e y não assumem o valor 0 simultaneamente. Impomos que $(a,b)(x,y) = (1{,}0)$. Assim, vamos ter;

$$(ax - by, ay + bx) = (1{,}0)$$

O que nos permite chegar no seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a e a segunda por b, vamos ter o sistema equivalente:

$$\begin{cases} a^2x - bay = a \\ b^2x + bay = 0 \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos $(a^2 + b^2)x = a$. Como foi garantido que a e b não se anulam ao mesmo tempo, é claro que $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 \neq 0$. Portanto, vale que $x = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$.

Tomando o **x** encontrado na segunda equação do sistema original, vemos que $y = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$.

Assim sendo dado qualquer número complexo $z = a + ib$, não nulo, seu inverso multiplicativo é o número $\mathrm{z}^{-1} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2} + \frac{-\mathrm{ib}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$. Observe aqui que o sistema que se propomos a resolver possui solução única, isto é, possível e determinado. No nosso contexto, isso significa que para cada complexo $\mathrm{z} \neq 0$, o recíproco z^{-1} é único. O mesmo fato ocorre para o oposto aditivo.

M5. Distributividade da multiplicação em relação à adição*:*

Provemos que $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Colocando o lado esquerdo dessa igualdade na forma de par ordenado, ficaremos com*:*

$$(a, b)(c + f, d + g) = (ac + af - bd - bg, ad + ag + bc + bf)$$

Agora vamos pôr o lado direito da igualdade inicial na forma de par ordenado, ficando com*:*

$$(ac - bd, ad + bc) + (af - bg, ag + bf)$$

$$= (ac - bd + af - bg, ad + bc + ag + bf).$$

Logo, a igualdade é cumprida e vale a distributividade em questão à esquerda.

Obs.: Se fizéssemos $(z_2 + z_3)z_1$, podemos operar da seguinte maneira: como já sabemos da comutatividade da multiplicação, podemos afirmar que $(z_2 + z_3)z_1 = z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 = z_2z_1 + z_3z_1$.

Assim, conseguimos mostrar que o conjunto dos números complexos é um corpo. Como o reais é subconjunto de $\mathbb{C}$, temos que $\mathbb{R}$ é subcorpo dos complexos, ou que IR está imerso no corpo dos complexos. Ficando demonstrado que $\mathbb{C}$ é um corpo, agora podemos, por exemplo, resolver equações com incógnitas em $\mathbb{C}$**.** De posse de tudo que foi demonstrado até aqui, podemos definir duas novas operações com os complexos, a partir da comprovação das existências dos simétricos multiplicativo e aditivo.

A primeira, a própria subtração, observando que dado z complexo, seu inverso aditivo é o número – z, que nada mais é o complexo tal que $Re(-z) = -Re(z)$ e $Im(-z) = -Im(z)$. É claro que a subtração é, assim como em IR, uma operação "fictícia", pois trata-se de uma adição entre a primeira parcela e o oposto aditivo da segunda parcela. Assim, considerando $z \ e \, w$ complexos, vamos ter que:

$$z - w = z + (-w)$$

A segunda que vamos trabalhar é a divisão, definida a partir do recíproco de um complexo. Dados $z \ e \ w$ complexos, vamos definir que:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

Observe que a divisão é na verdade uma multiplicação entre z e o inverso multiplicativo de w. Para que isto faça sentido, devemos tomar $w \neq 0$. A fim de aplicarmos o que foi visto, e também de usar as definições de subtração e divisão, vamos resolver os seguintes exercícios, em que teremos de fazer uso do fato de $\mathbb{C}$ ser um corpo.

Exercício 1*:* Determine z complexo tal que seja satisfeita: $2z + i = 3 - i + z$.

$$2z + i + (-z) + (-i) = 3 - i + z + (-z) + (-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2z - z + (i - i) = 3 - i - i + z + (-z)$$

$$\Leftrightarrow \quad z + 0 = 3 - 2i + 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 3 - 2i$$

Exercício 2: Mostre que, sendo $a \neq 0$ e b complexos, a equação $az + b = 0$ possui solução única em $\mathbb{C}$.

De fato, dado b complexo, existe único $-\mathrm{b}$ complexo tal que $\mathrm{b} + (-\mathrm{b}) = 0$. Assim, vale que:

$$az + b + (-b) = 0 + (-b)$$

$$\Leftrightarrow \ az + 0 = -b$$

$$\Leftrightarrow \ az = -b$$

$$\Leftrightarrow \ z = -ba^{-1}$$

Para garantirmos a unicidade dessa solução, considere que exista um z\` tal que $az\grave{} + b = 0$. Fazendo as mesmas operações, temos que $z\grave{} = -ba^{-1}$. Como a^{-1} é único, segue que $-ba^{-1}$ é solução única para a equação $az + b = 0$.

Dados dois números complexos, digamos z_1 e z_2, o produto deles será nulo se, e somente se, pelo menos um deles for nulo. Vamos demonstrar esse fato supondo, sem perca de generalidade, que $\mathrm{z}_1 \neq 0$. Daí, vale que z_1 possui inverso multiplicativo. Supondo então que $\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 = 0$, temos que:

$$z_1{}^{-1}.(z_1z_2) = z_1{}^{-1}.0$$

$$\Rightarrow \quad (z_1{}^{-1}.z_1)z_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1.z_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_2 = 0.$$

Ou seja, ao supormos que um deles não é nulo, o outro, por consequência será nulo. Assim, temos que o conjunto dos números complexos é um domínio de integridade.

Exercício 3: Determine z complexo tal que $\mathrm{z}^2 = -1$.

Tomamos $z = x + iy$, com x e y reais, temos que:

$$(x,y)(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (-1,0)$$

Dessa igualdade, montemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Note que $x = 0$ ou $\mathrm{y} = 0$. É fácil ver que x e y não podem ao mesmo tempo ser nulos porque $\mathrm{z} = 0$ não satisfaz a equação proposta. Se $\mathrm{y} = 0$, a primeira equação fica reduzida a x^2 = -1, o que é absurdo pois x é real. Assim, vamos assumir que $x = 0$.

Daí: $\mathrm{y}^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{y} = \pm 1$. Concluímos que os pares ordenados (0,1) e (0,-1) são soluções da equação $\mathrm{z}^2 = -1$. Ou seja, i e $-i$ são raízes quadradas de -1 e valem as seguintes, e importantes, igualdades:

$$i^2 = -1 \text{ e } (-i)^2 = -1$$

Observação: já podemos encarar a multiplicação entre números complexos de forma mais algébrica, sem precisar apelar para o uso de pares ordenados. Como $\mathbb{C}$ é corpo, e dados os complexos $a + bi$ e $c + di$, façamos:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

De modo geral, dado c real tal que $c < 0$, c admitirá duas raízes quadradas complexas, a saber: $i\sqrt{|c|}$ e $-i\sqrt{|c|}$. Assim, por exemplo, $\sqrt{-16} = 4i$ ou $\sqrt{-16} = -4i$. O mesmo resultado pode ser facilmente generalizado para raízes de índices pares de números reais negativos.

Exercício 4: Vamos resolver a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, sendo o conjunto universo da solução $U = \mathbb{C}$.

Procedamos da mesma maneira que um aluno do ensino básico faria, ou seja, determinar o discriminante $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = (-2)^2 - 4.1.5 = -16$. Como estamos no conjunto $\mathbb{C}$ e somos capazes de determinar raízes de índice par de números reais negativos, procedamos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2.1} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Assim, o conjunto solução **S** dessa equação é S = $\{1 - 2i, 1 + 2i\}$.

Observe que uma equação polinomial de grau 2 que em $\mathbb{R}$ não tinha raiz, nos complexos possui exatamente duas raízes. Esse fato é uma exemplificação do Teorema Fundamental da Álgebra, que aqui vamos enunciar sem demonstrá-lo.

Teorema Fundamental da Álgebra: Toda equação polinomial de grau $\mathrm{n} \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa, e, no máximo, n raízes complexas.

A fim de constatar esse valioso teorema para polinômios acima do grau 2, notemos que a equação $z^4 = 16$ possui raízes reais 2 e -2, mas os complexos puros 2i e -2i satisfazem-na. Portanto, uma equação polinomial de quarto grau com 4 raízes complexas.

1.3POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{C}$

Definição 4*:* Seja z um número complexo, e n natural tal que $n \geq 1$, valerá a recorrência a seguir*:*

$$\begin{cases} z^1 = z \\ z^n = z.z^{n-1} \end{cases}$$

De acordo com essa definição, decorre naturalmente que $z^2 = z.z$, $z^3 = z.z.z$ e assim por diante. Note que estamos trabalhando com a mesma definição vista quando se define de forma rigorosa a potência com base real e expoente natural. Assim, decorre para os complexos que também valerão as propriedades inerentes a potenciação vista no contexto real. Em especial, dado z complexo e m,n naturais, é válido que:

P_1: $z^m.z^n = z^{m+n}$

P_2: $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$, $z \neq 0$

P_3: $(z^n)^m = z^{nm}$

P_4: $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, $z \neq 0$

P_5 : $z^0 = 1$, $z \neq 0$

É particularmente interessante trabalharmos com as potências naturais da unidade imaginária. Usando as propriedades apresentadas, vamos calcular as 6 primeiras potências naturais para a base $\boldsymbol{i}$ e observar um padrão:

- $i^0 = 1$;
- $i^1 = i$;
- $i^2 = -1$;
- $i^3 = (-1).i = -i$;
- $i^4 = (-i).i = 1$;
- $i^5 = 1 .i = i$.

Caso darmos continuidade a esse processo, veremos que as potências da unidade imaginária vão se repetindo a cada 4 números naturais, por exemplo, para os expoentes da sequência (0,4,8,12, 16...,4k,...), temos que $i^{4k} = 1$, com **k** natural. Generalizando, com **k** natural qualquer, temos que:

- $i^{4k} = 1$;
- $i^{1+4k} = i$;

- $i^{2+4k} = -1$;
- $i^{3+4k} = -i$.

Assim sendo, se desejarmos calcular uma potência de $\boldsymbol{i}$ com um expoente **n** natural qualquer, façamos a divisão euclidiana de n por 4, e, a partir do resto da divisão, com auxílio dos resultados da figura 1, determinamos. Observe.

Exercício 5: Calcule i^{503}.

Resolução: Como 500 é múltiplo de 4, é fácil ver que na divisão Euclidiana o resto de 503:4 é 3. Assim, $i^{503} = i^3 = (-i)$.

Exercício 6: Calcule i^{-1001}.

Resolução: Usando a propriedade $\mathrm{z}^{-\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{z}^{\mathrm{n}}}$, temos que $\mathrm{i}^{-1001} = \frac{1}{\mathrm{i}^{1001}} = \frac{1}{\mathrm{i}}$

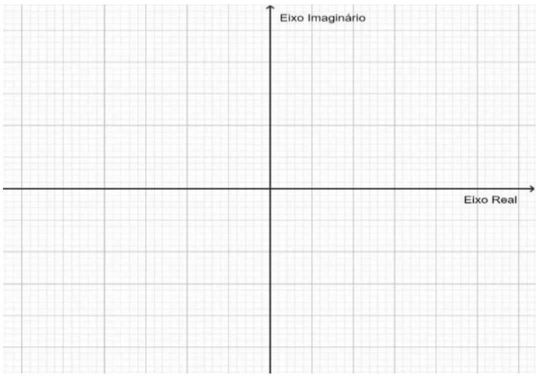
Usando o fato de que o inverso de $z = a + bi$ é $\mathrm{z}^{-1} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2} + \frac{-\mathrm{ib}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$, vamos ter que:

$\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{0}{0^2+1^2} + \frac{-\mathrm{i}}{0^2+1^2} = -\mathrm{i}$.

1.4. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Já foi bastante salientado que os complexos podem ser definidos a partir da imposição de ser um conjunto formado pelos pares ordenados de números reais, nos quais a primeira coordenada corresponde à parte real, e a segunda, à parte imaginária. A representação geométrica dos números complexos é feita no plano complexo, denominado de plano de Argand-Gauss, similar ao plano cartesiano que estamos habituados. No caso da representação complexa, o eixo **y** é substituído pelo eixo imaginário, e o eixo **x**, pelo eixo real.

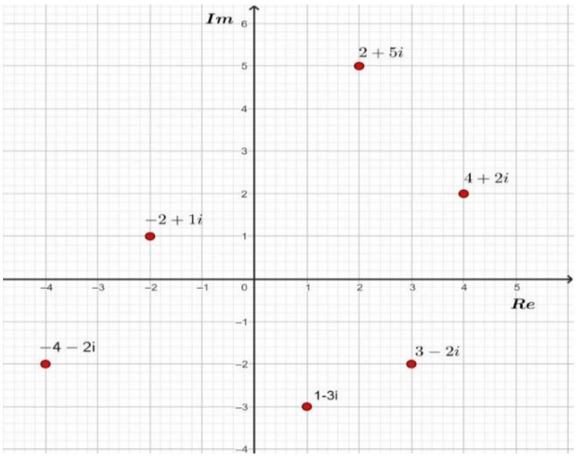
Figura 2: Plano complexo



Fonte: O autor.

Assim, há uma relação biunívoca entre o conjunto dos números complexos e os pontos do plano complexo. Ou seja, cada ponto do plano complexo corresponde a único número complexo e cada número complexo é representado por um único ponto. A localização de qualquer complexo nesse plano é feita de maneira análoga como procedemos no habitual plano cartesiano **x** por **y**. Por exemplo, o número $z = 3 + 4i$ corresponde ao par (3,4), que é o ponto de intersecção das retas $x = 3$ e $y = 4$.

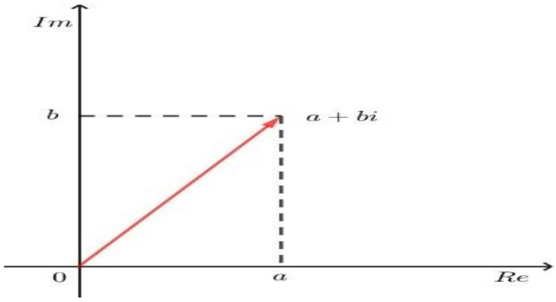
Figura 3: Representação dos afixos de alguns números complexos no plano complexo.



Fonte: O autor.

Definição 5: Seja P = (a, b) o ponto do plano complexo correspondente ao complexo $z = a + bi$. Sendo **O** a origem do plano $\mathbb{C}$, definiremos o vetor **OP**, formado pelo segmento orientado de O para P.

Figura 4: Representação no plano complexo.



Fonte: O autor.

1.4.1. Módulo e conjugado de número complexo

Vendo agora a representação dos números complexos em um contexto vetorial, alguns novos conceitos podem ser inseridos, bem como a própria interpretação geométrica vetorial da soma de dois números complexos como a soma vetorial desses elementos. O primeiro conceito é o de módulo de número complexo, que geometricamente falando, nada mais é do que o comprimento do vetor **OP.** Observe na figura anterior que o triângulo de vértices **O, P** e **Q** = (a,0) formam um triângulo retângulo com ângulo reto em Q. Aplicando Pitágoras nesse triângulo, temos que:

$$(\mathrm{OP})^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 => \mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

Uma notação alternativa para módulo de número complexo é usar a mesma que usamos para módulo nos reais; assim, $|\mathrm{z}| = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$.

Definição 6: Sendo $z = x + iy$, definimos o conjugado de z como o complexo $\bar{z} = x - iy$. Ou seja, troca-se apenas o sinal do número real que representa a parte imaginária de z.

A seguir, temos algumas consequências importantes em relação as definições de módulo e conjugado. Vejamos.

1) $\mathrm{z}\bar{\mathrm{z}} = |\mathrm{z}|^2$

Demonstração: pondo $z = x + iy$, temos que $\bar{z} = x - iy$. Assim, temos que:

$$(x - iy)(x + iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

2) $\frac{\mathrm{z}+\bar{\mathrm{z}}}{2} = \mathrm{Re(z)}$

Demonstração: sendo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$, temos que $z + \bar{z} = 2x$. Logo, $x = \mathrm{Re(z)} = \frac{\mathrm{z}+\bar{\mathrm{z}}}{2}$.

3) $\frac{\mathrm{z}-\bar{\mathrm{z}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im(z)}$

Demonstração: sendo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$, $\mathrm{z} - \bar{\mathrm{z}} = 2\mathrm{iy}$. Logo, vamos ter que $\mathrm{Im(z)} = \mathrm{y} = \frac{\mathrm{z}-\bar{\mathrm{z}}}{2\mathrm{i}}$.

4) Sendo z e w complexos, $\overline{\mathrm{z}+\mathrm{w}} = \bar{\mathrm{z}} + \bar{\mathrm{w}}$

Demonstração: pondo $z = x + iy$ e $w = m + in$, com x, y, m, n números reais.

$$(z + w) = (x + m) + i(y + n)$$

Assim, $\overline{z + w} = (x + m) - i(y + n) = (x - iy) + (m - in) = \bar{z} + \bar{w}$.

5) Sendo z e w complexos, $\overline{\mathrm{zw}} = \bar{\mathrm{z}} \,.\, \bar{\mathrm{w}}$

Demonstração: pondo z e w nas formas anteriores, temos que:

$$zw = (xm - yn) + i(xn + ym)$$

Assim, $\overline{zw} = (xm - yn) - i(xn + ym) = (xm - yn) + i(-xn - ym)$

$$\bar{\mathrm{z}}.\bar{\mathrm{w}} = (x - iy)(m - in) = xm - inx - iym - yn$$

$$= (xm - yn) + i(-nx - ym)$$

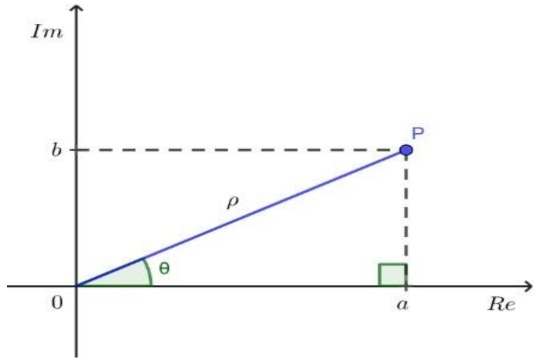
Portanto, vale a igualdade apresentada.

1.4.2. Argumento de número complexo

Vamos retornar à representação geométrica de um número complexo no plano. Na figura seguinte, temos a representação generalizada de um complexo $a + bi$, em que o símbolo ρ denota o tamanho do segmento OP, isto é, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. Há também um novo elemento presente nessa representação, que é o ângulo $\boldsymbol{\theta}$, medido no sentido anti-horário e formado pelas semirretas AO $(A = (a, 0)$ e OP. O ângulo $\boldsymbol{\theta}$ é chamado de argumento principal do número z, ou argumento de z, e seu valor varia no intervalo $[0,2\pi[$ ($\boldsymbol{\theta}$ dado em radianos).

Uma razoável dificuldade encontrada pelos alunos de um curso de números complexos é determinar o argumento quando $\boldsymbol{z}$ tem seu afixo (seu ponto no plano) nos 2º, 3º e 4º quadrantes do plano complexo. Objetivando facilitar essa tarefa, apresentaremos a expressão do argumento de um número complexo de acordo com o quadrante em que seu afixo se encontra.

Figura 5: Representações do argumento e do módulo de um complexo.



Fonte: O autor.

De acordo com a imagem acima, e assumindo que **P** é ponto do primeiro quadrante do plano complexo, e, ainda, usando conhecimentos básicos de trigonometria no triângulo retângulo, temos que:

$$tag\ \theta = \frac{b}{a}$$

Observação: Tag refere-se à função tangente.

Como **P** é ponto do primeiro quadrante, temos que a e b são números positivos. Lembrando que a função $f:]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = tag(x)$ é inversível, temos que o ângulo em questão é dado por:

$$\theta = arc\ tag\ \frac{b}{a}$$

Assim sendo, quando formos trabalhar com um número complexo com partes reais e imaginárias positivas, o seu argumento é dado pelo arco tangente da razão entre as partes imaginária e real. É válido ser convencionado que o argumento de $z = a$, onde a ∈ $\mathbb{R}$ e $a > 0$, será 0 (radiano).

Durante meus anos de aluno da Engenharia Elétrica, visualizei muitos alunos com dificuldades no cálculo do argumento de número complexo. Na disciplina de Variáveis Complexas, essas dificuldades ficavam ainda mais expostas. Diante dessa problemática, desenvolvi, com auxílio do grande conhecimento da pessoa do Professor Aroldo Cardoso (UFAC) as seguintes técnicas do cálculo de argumento de um complexo de acordo com seu quadrante.

No caso em que um número complexo $z = a + bi$ é tal que $a < 0$ e $b > 0$, seu afixo localiza-se no segundo quadrante e o seu argumento principal θ será dado pela expressão:

$$\theta = \pi - arc\ tag\ \frac{b}{|a|}$$

No caso em que o complexo $z = a + bi$ apresentar $a < 0$ e $b < 0$, seu argumento θ será dado por:

$$\theta = \pi + arc\ tag\ \left|\frac{b}{a}\right|$$

E por fim, se o complexo $z = a + bi$ é tal que $a > 0$ e $b < 0$, seu argumento θ principal é dado por:

$$\theta = 2\pi - arc\ tag\ \frac{|b|}{a}$$

Quando z for real negativo, seu argumento principal será π. E se $z = bi$, o argumento será $\frac{\pi}{2}$ caso $b > 0$; e $\frac{3\pi}{2}$ caso $b < 0$.

1.5 FORMA POLAR OU TRIGONOMÉTRICA

Usando as funções trigonométricas no triângulo retângulo OPA, temos:

$$\begin{cases} sen\ \theta = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{b}{\rho} \\ \cos\theta = \dfrac{OA}{OP} = \dfrac{a}{\rho} \end{cases}$$

Ou seja, temos que $b = \rho\ sen\ \theta$ e $a = \rho\cos\theta$. Portanto, podemos representar o número complexo $z = a + bi$ em função de ρ e θ:

$$z = \rho\ cos\ \theta + i\ .\ \rho\ sen\ \theta = \rho\ (\cos\theta + isen\ \theta)$$

Diante disso, qualquer número complexo pode ser escrito em função do seu módulo e do seu argumento.

Observação: Convencionaremos aqui que o número complexo $z = 0$ não possui argumento.

Mais adiante, veremos que a escrita complexa na forma polar é bastante útil para a realização de diversas operações, como potenciação, radiciação, exponenciação em $\mathbb{C}$.

Exercício 7*:* Escrever na forma polar os seguintes números complexos, e em seguida calcular, na forma polar, $\mathrm{z.w.}$ Donde $\mathrm{z} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ e w = $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Resolução: $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ *e* $|w| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

$\theta_z = arc\ tag\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\ e\ \theta_w = arc\ tag\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

Portanto, z e w na forma polar ficam inscritos:

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.sen\ \frac{\pi}{3}\right)$ e $w = 2\,.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right)$

Para a segunda parte do exercício, vamos desenvolver algebricamente o produto zw.

$$zw = (1 + i\sqrt{3}\ )(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3}\ + i + 3i - \sqrt{3} = 4i.$$

Pondo zw na forma polar, temos:

$$zw = 4.\left(cos\frac{\pi}{2} + i\ sen\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Observe a solução da segunda parte do exercício, que o módulo de zw é dado pelo produto dos módulos de z e w. Além disso, o argumento de zw é a soma dos argumentos de z e w $\left(\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$. Este resultado será generalizado.

1.5.1 Multiplicação e divisão na forma polar

Sejam z e w complexos, escritos nas suas respectivas formas polares:

i) $z = \rho_1\,(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$.

ii) $w = \rho_2(cos\,\theta_2 + i\ sen\ \theta_2)$.

Vamos agora executar o produto zw.

$$zw = \rho_1\rho_2\ (cos\,\theta_1 + isen\theta_1).(\ cos\,\theta_2 + isen\ \theta_2)$$

$$zw = \rho_1\rho_2[cos\theta_1.\cos\theta_2\ - sen\ \theta_{1\,.}\ sen\ \theta_2\ \ + i\ (\cos\theta_1\ sen\ \theta_2 + sen\ \theta_{1\,.}\cos\theta_2)]$$

Da trigonometria, sabemos que:

$sen\ (\theta_1 +\ \theta_2) = sen\ \theta_1\cos\theta_2\ + \cos\theta_1\ sen\ \theta_{2.}$.

$\cos\ (\theta_1\ +\ \theta_2) = \cos\theta_1\ \cos\theta_2\ - sen\ \theta_1.\ sen\ \theta_2$.

Assim, podemos reescrever o produto zw como segue abaixo. Note que o módulo de zw na forma polar é o produto dos módulos de z e w. Além disto, o argumento de zw é a soma dos argumentos de z e w.

$$\Rightarrow\ zw = \rho_1\rho_2\ [\cos\ (\ \theta_1 +\ \theta_2) + i\ .sen\ (\theta_1 +\ \theta_2)]$$

O resultado acima pode ser generalizado para o produto de mais de dois complexos. Assim, sendo $z_{1,}z_{2,}\,z_3, \dots, z_n$ números complexos, sendo ρ_i, e θ_i, respectivamente, o módulo e o argumento de z_i, em que i ∈ $\{1,2, \dots, n\}$, vale que:

$z_1\,.z_2\,.z_3\dots z_n = \rho_1\rho_2\rho_3\ \dots\ \rho_n\,[\cos\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3\ \dots + \theta_n) + i\ sen\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \dots + \theta_n)]$ (I)

Demonstração: Façamos indução sobre n. Para $n = 2$, já demonstramos a validade do que queremos mostrar. Suponha um n natural tal que $\mathrm{n} \geq 2$ tal que (I) seja satisfeita. Provemos a validade dessa fórmula para o produto de $n + 1$ complexos.

$$z_1 . z_2 . z_3 \ldots z_n . z_{n+1=} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_n [cos\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) + i\ sen\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n)] . \rho_{n+1} . (\cos \theta_{n+1} + i\ sen\ \theta_{n+1})$$

Para facilitar nossa escrita, vamos tomar a soma $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n = \mathrm{A}$. Assim:

$$\prod_{i=1}^{n+1} z_i = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_n \rho_{n+1} [\cos A . \cos \theta_{n+1} - sen\ A . sen\ \theta_{n+1} + i(\cos A . sen \theta_{n+1} + Sen\ A . \cos \theta_{n+1})$$

Assim, concluímos que:

$$\prod_{i=1}^{n+1} z_i = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_n \rho_{n+1} . [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n + \theta_{n+1}) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n + \theta_{n+1})]$$

Portanto, fica provado o que se afirma em (I).

Particularmente, se colocarmos z^n na forma polar, sendo ρ e θ, respectivamente, o módulo e o argumento de **z,** valerá que:

$$z^n = \rho^n . [\cos(n\theta) + i\ sen(n\theta)] \text{ (II)}$$

A igualdade em (II) também é conhecida como a primeira fórmula de Moivre, e a partir de agora será uma ferramenta poderosa para auxiliar na potenciação de base complexa e expoente inteiro. A fim de explorarmos um pouco esse resultado, vamos resolver os dois seguintes exercícios.

Exercício 8: Determine o valor da potência $(1 + \mathrm{i})^{100}$.

Resolução: Com toda certeza, usar a definição de potenciação seria impraticável na resolução deste exercício. Contudo, fazendo-se uso da forma polar e da primeira Fórmula de Moivre, nossa tarefa ficará bem mais simples. Vejamos.

O primeiro passo é por $1 + \mathrm{i}$ na sua forma polar. Calculando seu módulo e argumento, encontramos, respectivamente, e $\frac{\pi}{4}$. Portanto, temos:

$$(1 + i) = \sqrt{2} . \left(cos \frac{\pi}{4} + i\ sen \frac{\pi}{4} \right)$$

Agora usemos a fórmula de Moivre. Obtendo:

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}\left(cos\,\frac{100\pi}{4} + i\,sen\,\frac{100\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \quad (1+i)^{100} = 2^{50}(cos\,25\pi + i\,sen\,25\pi)$$
$$\Rightarrow \quad (1+i)^{100} = -\,2^{50}$$

É interessante ser observado que mesmo a base da potência sendo um número complexo não real, o resultado pode alcançar um número real.

Com isso, a princípio, a fórmula de Moivre vale para todo n natural. Contudo, na verdade, ela acaba funcionando para todo número inteiro. Para provarmos esse fato, é importante lembrar da propriedade $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, $z \neq 0$. Assim, tomando n natural, ficamos com, usando o resultado em (II):

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n \,.\, [cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)]}$$

O conjugado da parte $\cos(n\theta) + isen(n\theta)$ é $\cos(n\theta) - isen(n\theta)$, e como já vimos, valerá que o produto desses dois números complexos é dado pelo quadrado do módulo de qualquer um deles. Assim:

$$[Cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)].\quad [cos(n\theta) - i\,sen(n\theta)] = cos^2(n\theta) + sen^2(\,n\theta)$$

Da trigonometria, sabemos que a soma dos quadrados do cosseno e do seno de um mesmo arco resulta em 1. Portanto, multiplicando tanto o numerador quanto o denominador de z^{-n} por $[cos(n\theta) - i\,sen(n\theta)]$, obtemos:

$$z^{-n} = \rho^{-n}\,.\,[cos(n\theta) - i\,sen(n\theta)].$$

Parece-nos que o resultado em (II) não foi respeitado. Mas, para provarmos o contrário, lembremos do importante conceito de paridade de funções. Uma função se diz par quando para todo **x** do seu domínio é válido que $f(-x) = f(x)$; e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$. A funções seno e cosseno são, respectivamente, ímpar e par. Portanto, temos que:

$$cos(-n\theta) = cos(n\theta) \;\; e\; sen\,(-n\theta) = -sen\,(n\theta)$$

Logo,

$$z^{-n} = \rho^{-n}\,.\,[cos(-n\theta) + i\,sen(-n\theta)]$$

O que nos garante a validade de (II) para todo número inteiro.

1.5.2. Divisão com números complexos na forma polar

Sejam z e w complexos, sendo dados nas suas respectivas fórmulas polares.

$z = \rho_1 (\cos\theta_1 + isen\theta_1)$.

$W = \rho_2(cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$.

Considerando w $\neq 0$, a divisão z/w é dada pelo produto de z pelo inverso de w.

Assim, $w^{-1} = \rho_2{}^{-1}[cos\ (-\theta_2) + i\,sen\,(-\theta_2)]$.

Portanto, a divisão z/w é transformada no produto zw^{-1}.

Logo, zw^{-1} tem módulo dado por $\rho_1\rho_2{}^{-1}$ e seu argumento é dado por $\theta_1 + (-\theta_2)$ ou simplesmente $\theta_1 - \theta_2$. Assim, quando dividimos dois números complexos, a fórmula polar do resultado tem módulo dado pelo quociente entre os módulos do dividendo e divisor, e, nessa mesma ordem, o argumento é dado pela diferença dos argumentos.

1.5.3. 2º fórmula de Moivre

Agora que a potenciação em $\mathbb{C}$ está bem compreendida, vamos nos fazer a seguinte indagação: dado z complexo e n natural maior ou igual a 2. Será que existe um número complexo w tal que $w^n = z$? Para respondermos isso, tomemos z e w com suas respetivas formas polares.

- $z = \rho_1 (\cos\theta_1 + isen\theta_1)$.
- $w = \rho_2(cos\,\theta_2 + sen\,\theta_2)$

Usando a primeira Fórmula de Moivre, temos:

$$w^n = (\rho_2)^n[cos(n\theta_2) + i\,sen\,(n\theta_2)]$$

Portanto, vale a seguinte igualdade:

$$(\rho_2)^n[cos(n\theta_2) + i\,sen\,(n\theta_2)] = \rho_1\,(cos\,\theta_1 + isen\theta_1)$$

Usando a definição de igualdade entre números complexos, chegaremos no seguinte sistema:

$$\begin{cases} (\rho_2)^n.\ cos\,(n\theta_2) = \rho_1\,.\,cos\,\theta_1 \\ (\rho_2)^n.sen\,(n\theta_2) = \rho_1\ .\,sen\,\theta_1 \end{cases}$$

Desse sistema, concluímos que: $(\rho_2)^n = \rho_1$ e $n\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi,\ k\epsilon Z$

Como ρ_2 e ρ_1 são números reais não negativos, concluímos que o módulo da raiz enésima de z é dado por $\rho_2 = \sqrt[n]{\rho_1} = \sqrt[n]{|z|}$. O argumento raiz enésima de z é dado então por $\theta_2 = \frac{\theta_1+2k\pi}{n}$. Por fim, escrevemos a segunda fórmula de Moivre, que nos diz:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\theta_1+2k\pi}{n}\right) + i\,sen\,\left(\frac{\theta_1+2k\pi}{n}\right)\right).$$

Observe que o argumento dessa raiz é dado pelo arco cuja expressão é da forma $\left(\frac{\theta_1+2k\pi}{n}\right) = \frac{\theta_1}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, uma equação polinomial com coeficientes complexos de grau n possui no máximo n raízes complexas. Dado um β complexo, e $n \geq 2$ natural, a raiz enésima de β é o complexo z tal que $z^n = \beta$. Essa mesma igualdade pode ser reescrita como (equivalente):

$$z^n - \beta = 0 \text{ (A)}$$

Observe que a equação em (A) é polinomial de grau n. Portanto, de acordo com TFA, o cálculo da raiz enésima de um complexo qualquer nos leva ao número finito de soluções. Na verdade, como mostraremos a seguir, a equação em (A) terá exatamente n raízes complexas distintas, quando $\beta \neq 0$.

Demonstração: como foi visto anteriormente, o argumento da raiz enésima de um dado número complexo é $\frac{\theta+2k\pi}{n}$, em que θ é o seu argumento principal. Para ser melhor visualizado, vamos reescrever esse ângulo como sendo $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Quando k varia nos naturais de 0 a $n - 1$, a soma $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ nos leva a n arcos distintos, e consequentemente, a n raízes complexas distintas para esse complexo não nulo. Dado k natural tal que $k \geq n$, podemos escrever o número k como $k = n + p,$ com $p \geq 0$. Assim:

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2(n+p)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2p\pi}{n} + 2\pi$$

Quando executamos a divisão Euclidiana de p por n, p pode ser escrito da seguinte forma: $p = mn + r$, sendo $m \in Z\ e\ r\ \epsilon\ \{0,1,2, \dots, n-1\}$. Logo:

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2p\pi}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n} + \frac{2(mn+r)\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2m\pi + \frac{2r\pi}{n} = \boldsymbol{\frac{\theta}{n} + \frac{2r\pi}{n}}$$

Como **r** é um dos números naturais compreendidos de 0 a n -1, temos que a raiz complexa para $k \geq n$ é igual a uma das raízes já encontrada.

Geometricamente, a representação no plano complexo das **n** raízes de um número complexo não nulo determinam um polígono regular, em que os vértices serão tais raízes. Observe o seguinte exemplo: determinar todas as raízes cúbicas de -1. Fazendo $\beta = -1,$ temos que $|\beta| = 1$, e o seu argumento θ vale π. Portanto:

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\ sen\ \left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right).$$

Para k = 0, temos:

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=> \qquad z_0 = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para k = 1, temos:

$$z_1 = \cos(\pi) + isen(\pi) = -1.$$

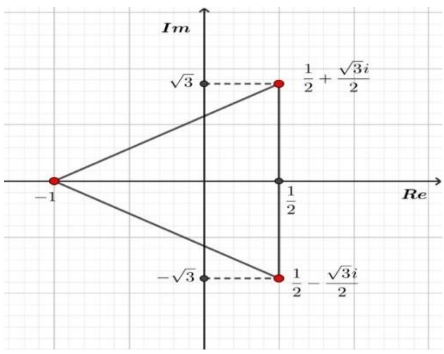
Para k = 2, temos:

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i.sen\ \left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=> z_2 = \frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Representando no plano complexo as três raízes encontradas, obtemos a seguinte representação.

Figura 6: Representação das 3 raízes complexas de -1.



Fonte: O autor.

Observação: Quando calculamos a raiz enésima de um número complexo, obtemos n respostas (com exceção do número complexo nulo).

Assim, quando estamos dentro do universo dos números complexos, a raiz quadrada de 25, por exemplo, admite duas respostas: 5 e -5. Já quando trabalhamos dentro do universo dos reais, a maioria dos livros define que a raiz quadrada de um número real não negativo é real não negativa, o que delimita a unicidade da raiz quadrada nesse contexto (na verdade, isso se generaliza para raízes de índice par).

1.6 FORMA EXPONENCIAL

Até aqui, foi visto basicamente duas formas de representação de números complexos, a algébrica e a polar. Uma outra forma, bastante utilizada nos cursos superiores, como nas engenharias, é a representação dos complexos na forma exponencial. Isso significa que dado um $z \in \mathbb{C}$, é possível obtê-lo em termos de uma potência cuja base é a constante de Euler, que é um número irracional anotado pelo símbolo $\boldsymbol{e}$.

Dado θ um número real, vamos assumir, sem demonstração, a seguinte identidade:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ sen\ \theta.$$

A demonstração formal dessa identidade exige conhecimentos mais avançados de matemática que fogem do propósito deste trabalho, voltado para uma aplicação em nível médio de estudo. Contudo, dado z complexo não nulo, a ele atribuímos duas características: argumento e módulo. Sendo r>0 o módulo de z, e θ seu argumento, temos que z na sua forma polar é escrito como:

$$z = r[\cos\theta + i\ sen\ \theta]$$

Logo, ainda podemos escrever:

$$z = re^{i\theta}.$$

Ou seja, temos a representação na forma exponencial de um número complexo não nulo.

Desse modo, o leitor mais atento pode observar que a escrita na forma exponencial facilita ainda mais o manuseio aritmético com números complexos, além de ser mais rápido o processo de multiplicar, dividir, calcular potências e raízes envolvendo números complexos.

Exemplo: Determine na forma exponencial, o número z = $1 - i\sqrt{3}$.

Resolução: Temos que $r = 2$ e $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Portanto:

$$z = 2e^{\frac{i5\pi}{3}}.$$

CAPÍTULO 2.

Neste capítulo, faremos um básico estudo com o intuito de propor uma aplicação de números complexos em circuitos elétricos. Considerando que os alunos do ensino médio geralmente estudam tal conteúdo de física no 2º ou 3º anos, e se limitam somente ao estudo de circuitos de corrente contínua, isto é, com medida sempre constante no decorrer do tempo. Dispondo-se de conhecimento básico do que são os complexos, e das suas operações, é possível, mesmo parecendo um ato de ousadia, ampliar o tema de Circuitos elétricos, e propondo a determinação da corrente elétrica nos casos em que a fonte de tensão é variável no decorrer do tempo. Além da transversalidade proposta, isto é, da "conversa" feita entre a matemática e a física, o aluno deve lidar com circuitos elétricos cujo funcionamento se assemelha mais à realidade, dado que a energia elétrica chega em nossas casas na forma alternada.

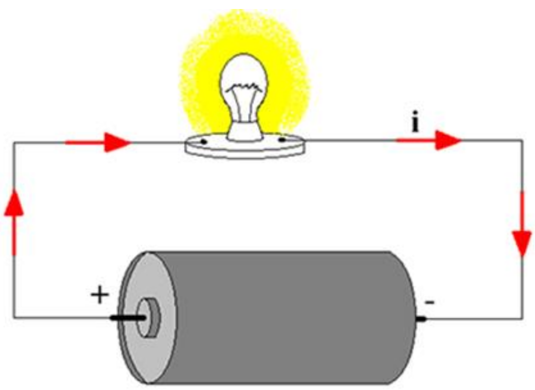
Visando uma aplicação básica, apresentaremos alguns resultados sem suas demonstrações, uma vez que a fundamentação dos mesmos exige conhecimento de matemática em nível superior. Ao leitor mais crítico, tais fundamentações podem ser encontradas na referência bibliográfica usada para este capítulo: Fundamentos de Circuitos Elétricos, 5º edição, dos autores Charles k. Alexander e Matthew N. O. Sadiku.

Esperamos que o leitor já tenha algum conhecimento sobre funções trigonométricas, como seno e cosseno, e conhecimentos básicos que envolvam eletrostática, ondulatória, unidades de medida.

2.1 CIRCUITOS ELÉTRICOS

A grosso modo, um circuito elétrico é uma interconexão de elementos, cuja finalidade básica é a realização de algum trabalho. Esses elementos podem ser geradores, resistores, capacitores, diodos, transistores e outros. O funcionamento dos aparelhos em nossas casas só é possível por conta da conexão feita entre os circuitos elétricos projetados, alimentados pela energia elétrica vinda das diversas fontes geradoras. Abaixo, temos a representação mais elementar possível de um circuito elétrico, contendo uma fonte de tensão, que pode ser uma bateria ou mesmo uma pilha, os condutores e uma lâmpada.

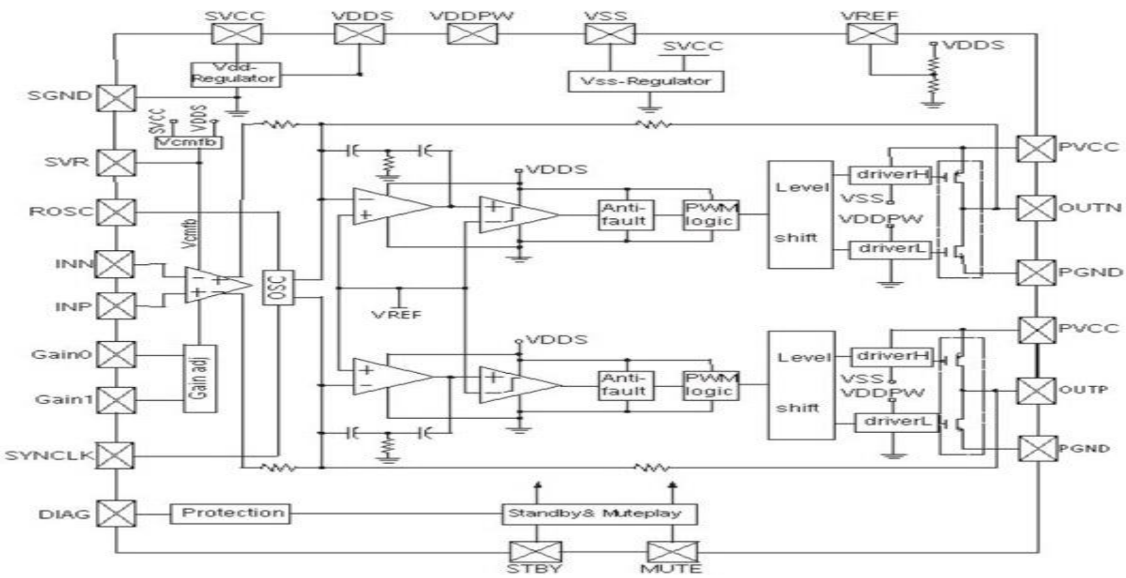
Figura 7: Circuito elétrico básico.



Fonte: https://www.preparaenem.com/fisic 1

No circuito elementar da figura 7, o símbolo **i** denota a corrente elétrica. Mas o que precisamente seria a corrente elétrica? Segundo Sadiku, a corrente elétrica é o fluxo de carga por unidade de tempo, medido em ampères (A). Essas cargas nada mais são do que elétrons livres, que a partir da força eletromotriz, são impelidos a se movimentarem entre os terminais da bateria, por meio de um material condutor, que pode ser um fio de cobre, por exemplo. Na verdade, o modelo visto de circuito é extremamente simples, sendo que na prática, em nossas casas ou mesmo dentro dos aparelhos eletrônicos, a eletricidade é bem mais complexa. Observe a Figura 8 a seguir, que nos exibe um circuito integrado, gravado em uma lâmina de silício.

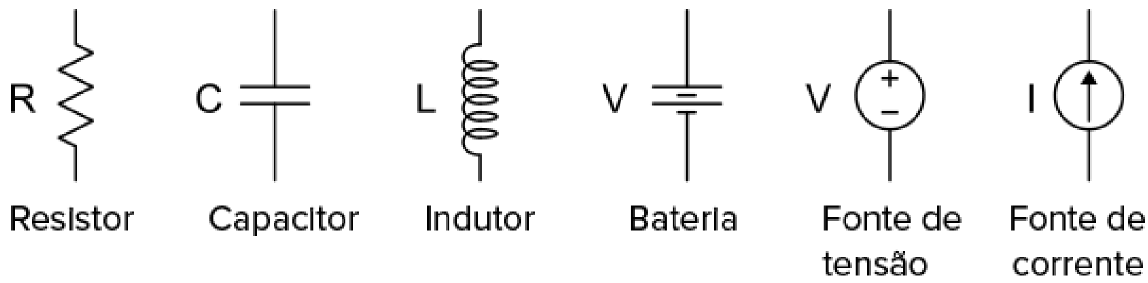
Figura 8: Circuito elétrico contido dentro de uma lâmina de silício.



Fonte: https://blogmasterwalkershop.com. 1

É possível observar que o estudo do circuito apresentado na figura anterior exige técnicas bem sofisticadas, e o uso indispensável de simulações, computadores e softwares específicos. Em nosso nível de estudo, a proposição será limitada a conhecer os seguintes elementos do circuito: fontes de tensão, resistores, capacitores e indutores. É interessante ressaltar que todo circuito real pode ser representado no papel, e cada elemento tem sua simbologia própria. Na Figura 9, apresentamos a simbologia dos elementos elétricos que serão vistos em nosso trabalho.

Figura 9: Elementos elétricos e seus símbolos.

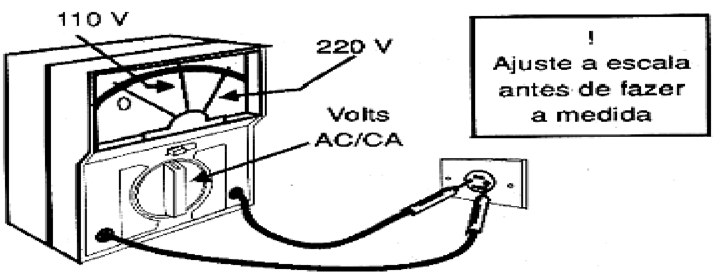


Fonte: https://pt.khanacademy.org/scienc 1

2.2 FONTE DE TENSÃO

Fonte de tensão, ou simplesmente tensão, ainda também chamada de diferença de potencial, é a energia necessária para a execução do deslocamento de uma carga elétrica entre dois pontos de um circuito elétrico. Denominando esses pontos de (a) e (b), podemos anotar que a diferença de potencial entre esses pontos é $V_{ab} = V_b - V_a$. O instrumento usado para medir a diferença de potencial entre dois elementos de um circuito chama-se voltímetro. A Figura 10 nos apresenta um exemplo desse aparelho sendo usado para calcular a tensão entre os terminais de uma tomada.

Figura 10: Aferição da tensão nos terminais de uma tomada.



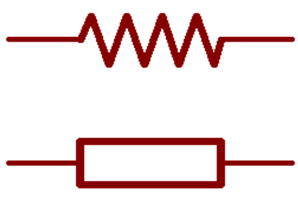
Fonte: https://www.newtoncbraga.com.br/i 1

A unidade de medida adotada para tensão, de acordo com o Sistema Internacional de Medidas, é volts, anotado pela letra **V**. Assim, é comum que alguns aparelhos, por exemplo, funcionem sob uma tensão de 127 V, e dizemos “127 volts”.

2.3 RESISTOR OU RESISTÊNCIA

Certos materiais possuem a capacidade de resistir mais intensamente ao fluxo ordenado de elétrons livres (a corrente elétrica). O nome dado à essa propriedade é resistência elétrica*, e* simbolicamente representada pela letra R. Logicamente, os condutores usados em um circuito buscam “permitir” mais facilmente o fluxo da corrente elétrica, por isso são usados materiais com baixa resistência elétrica. Assim, define-se concomitante uma propriedade inversa da resistência, a chamada condutividade elétrica, que resumidamente nos diz o quão “facilitador” é para um elemento a passagem de corrente. Por curiosidade, o melhor condutor de eletricidade conhecido é o ouro; porém, usa-se o cobre, que também é considerado um bom condutor e apresenta menos custos e riscos de furto. A unidade de medida usada para a resistência elétrica é o Ohm, e seu símbolo no SI é a letra grega ômega (Ω). O elemento oferece então resistência ao fluxo da corrente, e nesse processo, transforma energia elétrica em térmica; o chamado efeito Joule. Um exemplo desse fenômeno é o aquecimento das lâmpadas incandescentes após um certo período ligadas, ou mesmo o funcionamento do chuveiro elétrico.

Figura 11: Simbologia do resistor.



Fonte:https://embarcados.com.br/lei-de-ohm/

2.4 CORRENTE ELÉTRICA

Apesar de já termos a definição de corrente, vamos aprofundar o tema com o intuito de justificar sua unidade de medida, bem como sua determinação a partir de uma carga conhecida. Considere um condutor F, e uma dada seção transversal A de F. Supomos que por F exista uma corrente elétrica contínua, isto é, com intensidade invariável no tempo. O valor da intensidade da corrente elétrica é precisamente a quantidade de elétrons que passam por A, numa dada unidade de tempo. A quantidade de carga é medida em coulombs, e identificada pelo símbolo **C** (não confunda com número complexo). Cada coulomb carrega uma quantidade enorme de elétrons, por isso, ao invés de trabalharmos com números em notação decimal, 1 C é uma carga elétrica associada a somatória de cargas de aproximadamente $6{,}25\,.\,10^{18}$ elétrons (ou de prótons). O módulo da quantidade de carga de cada elétron é aproximadamente $1{,}6\,.\,10^{-19}$ C. Portanto, se em um tempo Δt, por uma seção transversal de um fio, passa uma quantidade Q de carga elétrica (medida em C), e supondo que a corrente é contínua, sua intensidade será calculada por:

$$I = \frac{Q}{\Delta t}.$$

Como a unidade de medida da carga é **C** (Coulomb) e da variação do tempo, no SI, segundos (s), temos que a unidade adotada para a corrente é coulomb por segundo, ou C/s. Justamente por ser um fluxo de partículas, faz todo sentido sua medição ser realizada por unidade de tempo. A esse “quociente” de medidas dar-se o nome de Ampére (A). A figura seguinte, em tom bem humorado, explica como é a relação entre tais elementos. A tensão “empurra” os elétrons pelo condutor, enquanto a resistência tenta dificultar essa passagem.

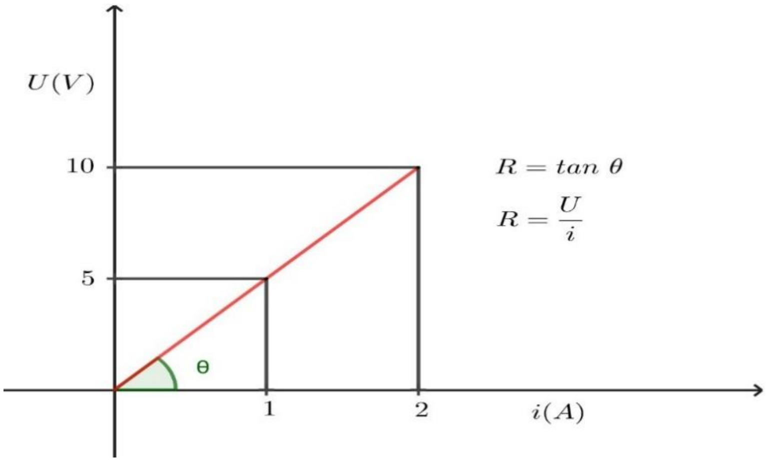
Figura 12: Relação entre os principais elementos elétricos visto até aqui.

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/p 1

2.5 1º LEI DE OHM

Na física ensinada durante o ensino médio, é muito comum ser apresentada grandezas que se relacionam entre si de forma diretamente proporcional. Esses modelos são bem interessantes, apesar de muitas vezes só serem possíveis em idealizações ou em experimentos laboratoriais. No caso das grandezas elétricas, resumidamente falando, em um dado resistor ôhmico (cuja valor da resistência é constante), a diferença de potencial entre seus terminais é diretamente proporcional a corrente elétrica que circula entre eles. Assim, dado o seguinte experimento, sendo um resistor de resistência constante $\boldsymbol{R}$ para uma corrente de 1 A circulando por ele, a queda de tensão entre seus terminais vale 5 V. Caso dobrarmos o valor dessa corrente, a queda de tensão também dobrará, passando a ser 10 V. Os experimentos então mostraram que essa proporcionalidade direta era verificada, e, mais do que isso, a constante de proporcionalidade é justamente o valor da resistência **R**. Portanto, $R = \frac{V}{I}$, é a conhecida primeira lei de Ohm. Na figura seguinte, exibimos como deveria ser o comportamento gráfico tensão x corrente para o experimento anteriormente descrito.

Figura 13: Comportamento da tensão em relação à corrente elétrica em um resistor ohmico.



Fonte: O autor.

2.6 CAPACITORES

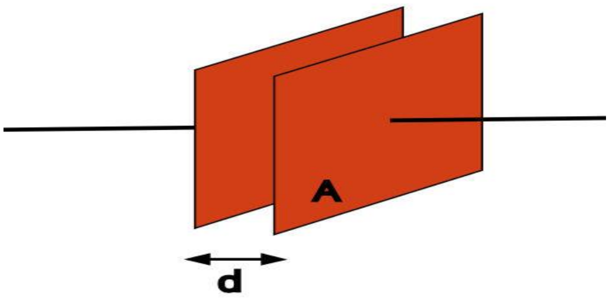
Sendo um dos componentes mais importantes presente em um circuito elétrico, o capacitor tem a função de armazenar energia em seu campo elétrico. Os capacitores são usados em diversos equipamentos eletrônicos, de comunicações, computadores, sistemas de potência, dentre outros. Na figura 14, temos a representação da construção de um capacitor (modelo comum), que é formado por duas placas condutoras separadas por um material isolante.

As tais placas podem ser construídas por folhas de alumínio, e o material isolante pode ser ar, cerâmica, papel e etc. Na figura 15, temos uma fonte de tensão **v** conectada entre as placas, depositando em uma das placas uma carga + Q e na outra - Q. Com isso, a quantidade de carga **Q** armazenada pelo capacitor será dada pela fórmula:

$$Q = \boldsymbol{C}.v$$

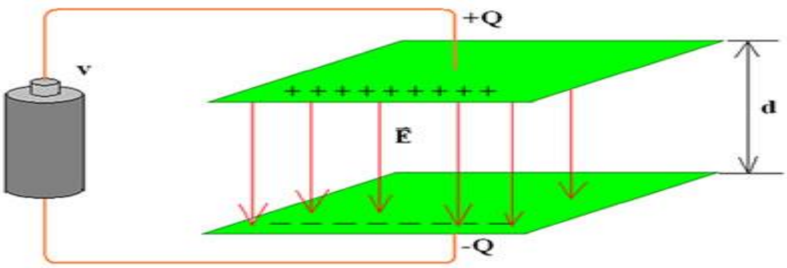
O termo **C** representará a capacitância, que é uma constante associada ao modelo de capacitor. Sua unidade de medida é Farad (F), em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867).

Figura 14: Representação de um capacitor.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o 1

Figura 15: Placas de um capacitor ligadas a uma pilha.



Fonte: https://www.preparaenem.com/fisic 2

É importante ressaltar que mesmo a capacitância sendo a razão entre a carga e a tensão, ela não depende dessas grandezas. Um capacitor de placas paralelas tem sua capacitância dada por:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}.$$

Na fórmula apresentada para a capacitância, ϵ representa a permissividade do material isolante entre as placas; A é a área de cada uma das placas e d a distância entre elas. Note que quanto maior é a área das placas, maior será a capacitância (mantendo-se d constante). Caso a área das placas se mantenha constante, quanto maior for a distância entre as placas, menor será a capacitância do capacitor. Nas imagens a seguir, temos algumas imagens reais de capacitores.

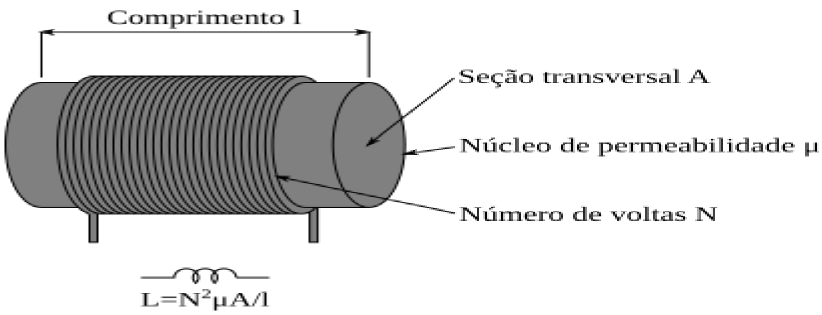
Figura 16: Modelos físicos de capacitores.

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o 2

2.7 INDUTORES

O indutor é um elemento elétrico também projetado para o armazenamento de energia, só que ao contrário do capacitor, essa armazenagem ocorre em seu campo magnético, enquanto no capacitor ocorre no seu campo elétrico. As aplicações para os indutores são vastas, desde aplicações em equipamentos eletrônicos de pequeno porte a sistemas de potência e geração de energia. A figura 17 nos exibe a forma típica de um indutor e seus principais elementos.

Figura 17: Esquema de um indutor.



Fonte: https://professoreletrico.com/cur 1

Segundo Sadiku (pag. 199), a indutância é a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança de fluxo de corrente através dele, medido em Henrys (H). Com isso, a indutância de cada indutor depende de suas dimensões físicas e da sua construção. Para um indutor como o da figura acima, sua indutância L é dada por:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}.$$

Sendo assim, N representa o número de espiras, l representa o comprimento, A é a área da seção transversal, e $\boldsymbol{\mu}$ é a permeabilidade do núcleo. Como a teoria sobre indutores está ligada com o eletromagnetismo, não vamos aprofundar mais do que isso em relação a esse elemento, pois suas fundamentações físicas e matemáticas são oriundas de estudos mais avançados. Na figura 19, visualizamos alguns modelos físicos de indutores.

Figura 18: Indutores, modelos físicos.

Fonte: https://www.google.com/url?sa=i&u 1

2.8 SENOIDES E FASORES

Como já salientado na introdução deste capítulo, o estudo dos circuitos elétricos no ensino médio fica limitado a uma análise em regime contínuo, isto é, aqueles excitados por fontes de tensão constante, não variando no tempo. O propósito então é fazer o aluno conhecer, mesmo que de forma bem simplificada, circuitos que são aplicados por fontes variáveis no tempo; como justamente é na realidade no tocante à distribuição da energia elétrica. O intuito então é introduzir a ideia de corrente alternada. Assim, falar de corrente alternada e não citar os seus principais criadores é uma verdadeira injustiça. Façamos isto.

2.8.1 Nikola Teslas e a batalha das correntes

Nikola Teslas viveu entre os anos de 1856 e 1943. Ele foi um dos principais idealizadores da transmissão de energia elétrica por meio da chamada corrente alternada, juntamente com George Westinghouse (1846-1914). Sem nenhuma dúvida, essa forma de transmissão tornou-se hegemônica e atualmente sua utilização é considerada mais rápida e eficiente. Contudo, ao final do século XIX, havia uma grande dúvida no ar: Qual seria a melhor forma de transmissão? A CC (corrente contínua) ou CA (corrente alternada)? Essa pergunta gerava discussões calorosas entre os defensores de cada lado. Do lado da CC, tínhamos a liderança de Thomas Edison, que como sabemos, era e ainda é bastante respeitado no meio científico por conta das suas invenções. Do lado da CA, o já citado Tesla. A verdade é que a transmissão de energia por CC, a longas distâncias, mostrava-se ineficiente e mais cara; enquanto a transmissão por longas distâncias mostrava-se mais eficiente do ponto de vista econômico. Sendo assim, os sistemas CA acabaram vencendo tal batalha.

2.9 SENOIDES

Definição 7: Senoide é um sinal que possui a forma gráfica da função seno ou cosseno.

A corrente alternada também é conhecida como corrente senoidal. O termo alternado é usado porque o sinal dessa corrente inverte-se de forma periódica, ora sendo positivo, ora sendo negativo. Assim sendo, quando uma fonte de tensão é variável no tempo, e a essa tensão é dada, em relação ao tempo, por uma função seno ou cosseno, dizemos que há uma alimentação senoidal, ou excitação variável no tempo. Em outras palavras, temos um circuito CA. A seguir daremos um tratamento mais formal para a lei de formação dessas funções senoidais.

Definição 8: Seja **v** uma função real que associa um t real não negativo ao número real $\boldsymbol{v(t)}$. A lei de formação dessa função será,

$$v(t) = V_m \, sen \, \omega t$$

Onde:

- $V_m = amplitude \ da \ senoide$
- $\omega = frequência \ angular \ em \ radianos/s$
- $\omega t = argumento \ da \ senoide$

Nos dois gráficos seguintes, elaborados pelo autor no Geogebra, temos que o da figura 19 exibe $\boldsymbol{v(t)}$ em função do argumento da senoide; enquanto o da figura 20 nos mostra $\boldsymbol{v(t)}$ em função do tempo **t**.

Figura 19: v(t) em termos de ωt.

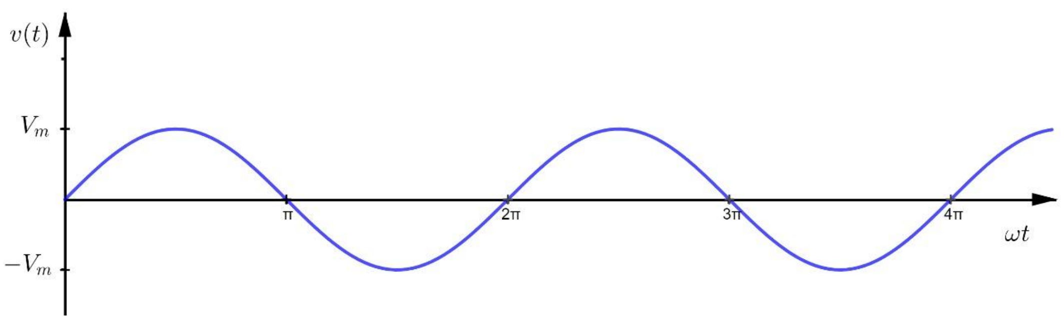
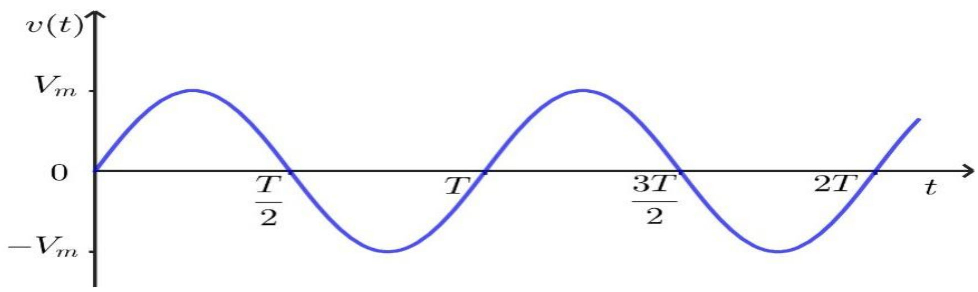


Figura 20: v(t) em termos do tempo.



Observe em ambos os gráficos, que a senoide tem um comportamento repetitivo, isto é, seu gráfico tem um aspecto periódico. No gráfico da figura 20 fica evidente que a cada T segundos, o gráfico inicia um mesmo ciclo. Dizemos então que o período desta função é T**.** Analisando os dois gráficos simultaneamente, vamos ter que $\omega T = 2\pi$**,** ou ainda, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **(*).**

Notemos que para todo t real, vale que:

$$v(t+T) = V_m sen\, \omega(t+T) = V_m sen\, \omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = V_m\, sen\,(\omega t + 2\pi)$$
$$= V_m sen\,(\omega t)$$

Justificando dessa forma o fato de $v(t)$ se repetir a cada T segundos.

Dos conceitos de ondulatória, temos os mais importantes, a saber: Frequência e período. Quando um determinado fenômeno é executado periodicamente, por exemplo, o movimento de pêndulo, o tempo gasto para ser completado um ciclo é chamado de período. O inverso multiplicativo desse número é chamado de frequência, e ele nos diz o número de ciclos realizado por unidade de tempo. Um exemplo bem interessante é a frequência da energia elétrica; no Brasil, essa frequência é de 60 hertz (Hz), isto é, por segundo são executados 60 ciclos. O mais incrível é que isso significa que uma lâmpada (incandescente) ligada pisca 60 vezes por segundo, mas obviamente nossa visão não é capaz de captar tal fato. Sendo f a frequência, e T o período, essas grandezas, matematicamente, se relacionam da seguinte forma:

$$(**) \quad f = \frac{1}{T},$$

Sendo que a unidade medida para a frequência, no SI, é $\mathbf{s^{-1}}$ (inverso do segundo). Contudo, essa unidade foi batizada por Hertz (Hz). Substituindo (*) em (**), temos que:

$$\omega = 2\pi f$$

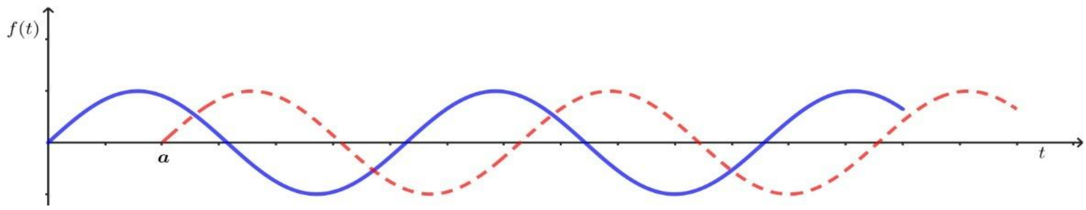
2.9.1 Fase e argumento

Antes de propriamente falarmos de fase e argumento, vamos comentar um pouco sobre funções deslocadas no seu domínio; em nosso caso, deslocada no tempo. Seja f uma função definida, assim será por conta dos nossos propósitos, em todo $t \geq 0$. Assim a imagem de f é o número real $f(t)$. Seja $a > 0$ um número real. Definimos a função real g: $[a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que a imagem de g é o número real dado por $g(t) = f(t-a)$. A representação gráfica da função g é obtido fazendo-se uma translação do gráfico da f ao longo do eixo t. Assim sendo, g e f possuem o mesmo aspecto gráfico. Contudo, o gráfico de f

tem seu ponto inicial em $t = 0$, enquanto g, em $t = a$. Como o gráfico da função g "começa" em um t a frente de $t = 0$, dizemos que g está atrasada em relação a f ou que f é adiantada em relação a g. Esse linguajar é muito útil no contexto da engenharia elétrica, por exemplo, pois lá, tais funções na verdade são vistas como ondas ou sinais e são acionadas em um determinado instante. Se um mesmo sinal foi acionado posteriormente, é dito que o segundo está atrasado em relação ao primeiro ou que o primeiro sinal é o mais adiantado. É válido ser dito que f e g terão a mesma imagem.

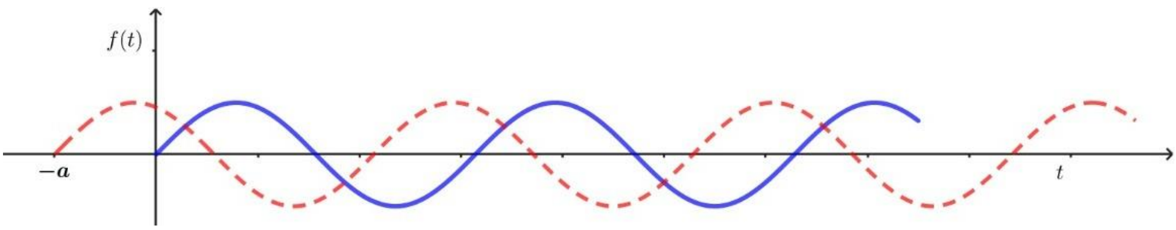
Pode ocorrer também do segundo sinal ser adiantado em relação ao primeiro. Nesse caso, no contexto das funções f e g apresentadas anteriormente, a imagem de g seria $g(t) = f(t + a)$. Neste caso, lembrando que o número a é positivo, o sinal de g iniciaria em $x = -a$. Logo, o sinal de g seria considerado adiantado em relação ao de f ou que f está atrasado em relação a g. Observe a figura 21, que exibe o primeiro caso em que f (em azul) é adiantada em relação a g (linha tracejada). A figura 23 exibe o caso em que g é adiantada em relação a f.

Figura 21: Deslocamento no tempo



Fonte: O autor.

Figura 22: Deslocamento no tempo.



Fonte: O autor.

O propósito do trabalho, no tocante às funções, é trabalhar com as trigonométricas básicas (seno e cosseno). Até aqui, é possível que para se trabalhar aplicações de eletrodinâmica no estudo dos números complexos, é necessário que o educando tenha um domínio razoável dessas funções. Caso ele já tenha, por exemplo, visto movimento harmônico simples, fica bem mais aceitável esse estudo feito com ondas senoidais e cossenoidais. Considereremos agora, o caso genérico para uma senóide,

$$v(t) = V_m sen\,(\omega t + \emptyset)$$

Onde temos que: V_m é amplitude da tensão, ω é a frequência angular, dada em rad/s, e $\emptyset$ será a fase, dada em radianos; o termo $(\omega t + \emptyset)$ é chamado de argumento da senoide.

Observação: é muito comum nos livros de engenharia, a fase ser apresentada em graus; isso porque o manuseio com ângulos medidos assim é mais natural para a nossa mente. Contudo, sendo rigoroso do ponto de vista matemático, essa notação é errada, afinal como ω é dado radianos/s, o argumento ωt, teríamos que a soma $\omega t + \emptyset$ seria de um ângulo em radianos com outro em graus. Isso não faz o menor sentido! Contudo, nas aplicações com fasores, fica mais fácil trabalhar com a fase dada em graus. Por isso adotaremos, mesmo sabendo do equívoco que é, colocar dentro do argumento o valor de ω em radianos e $\emptyset$ em graus. Caso se queira calcular v em algum instante $t,$ aí é necessário converter a fase para radianos.

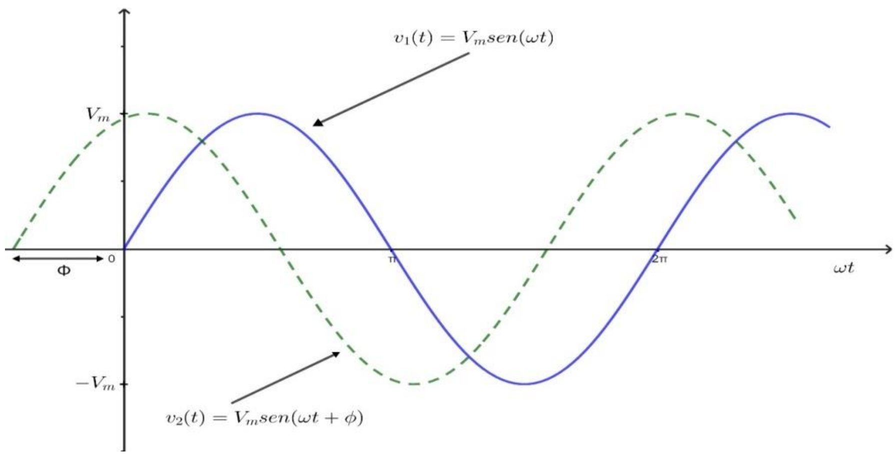
Na figura 23, temos o gráfico das senoides v_1 e v_2, ambas representando tensões em relação a ωt . Sendo que

$$v_1 = V_m\, sen\, \omega t \quad \text{e} \quad v_2 = V_m sen\,(\omega t + \emptyset)$$

Observe nas equações de v_1 e v_2, que ambas possuem os mesmos parâmetros: amplitude de tensão, frequência angular e fase. Assim, os gráficos dessas duas funções serão idênticos, só que v_2 estará adiantado em relação a v_1.

Observe que ambos os casos, a imagem dessas funções é o intervalo real dado por $[-V_m,\ V_m]$.

Figura 23: Duas senoides com fases distintas.



Fonte: O autor.

Apesar do nome senoide nos fazer lembrar imediatamente de seno, uma senoide pode ser expressa por seno ou cosseno. Caso seja necessário passar uma senoide na forma de seno para cosseno, ou vice versa, é importante (e suficiente) conhecer a seguinte identidade trigonométrica, válida para todo arco **x** (em radianos ou graus). Como vamos manusear mais a fase em graus, apresentemos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{sen\,A = cos\,(90° - A)} \text{ ou } \boldsymbol{Cos\,A = sen\,(90° - A)}$$

Exemplo: Considere a seguinte senoide:

$$v(t) = 52\,cos\,(122t + 49°)$$

Determinar: amplitude, frequência angular, período e a fase.

Resolução: Nesse caso, temos uma senoide dada em termos de cosseno. O encontro dos parâmetros solicitados é feito comparando-a com a equação dada para v_2. Logo,

$V_m = 52\,V$, $\omega = 122\,rad/s$, $\emptyset = 49°$.

Por fim, o período é dado pelo quociente $\frac{2\pi}{122} = \frac{\pi}{66}\ s$.

2.10 FASORES

Definição 9: Fasor é um número complexo que representa a amplitude e a fase da senoide (Sadiku, pag 335).

Os fasores são ferramentas elaboradas pelos engenheiros que visam de maneira simplificada analisar circuitos lineares excitados por fontes senoidais. Caso fôssemos fazer esse trabalho por meio dos parâmetros em torno do tempo, a tarefa seria impossível. Essa brilhante ideia do uso de fasores para o estudo desse tipo de circuitos foi proposto inicialmente por Charles Steinmetz em 1893.

No capítulo 1 foi apresentado uma fundamentação teórica básica sobre números complexos, a fim de que neste momento o leitor esteja familiarizado com o tema atual. Os engenheiros, ao usarem os números complexos em suas obras, a fim de não confundirem a unidade imaginária $\boldsymbol{i}$ com o **i** de corrente elétrica, decidiram manipular os complexos trocando o $\boldsymbol{i}$ por $\boldsymbol{j}$. Assim, no mundo dos engenheiros eletricistas e eletrônicos, todo número complexo possui a forma retangular dada por $a + bj$, em que $j^2 = -1$. Assim, tudo que foi visto lá continua válido, só que agora nossa unidade imaginária será **j**.

A representação por fasor se baseia na seguinte identidade, conhecida como identidade de Euler – forma exponencial. Dado o arco ∅, vale que

$$\boldsymbol{e^{\pm j\emptyset} = \cos\emptyset \pm j\, sen\, \emptyset}$$

assim, fica evidente que $\cos\emptyset$ é a parte real de $\boldsymbol{e^{\pm j\emptyset}}$ e $sen\,\emptyset$, a parte imaginária de $\boldsymbol{e^{\pm j\emptyset}}$**.** Tomemos a senoide $v(t) = V_m \cos(\omega t + \emptyset)$, constatamos então que:

$$v(t) = Re(V_m e^{j(\omega t+\emptyset)})$$

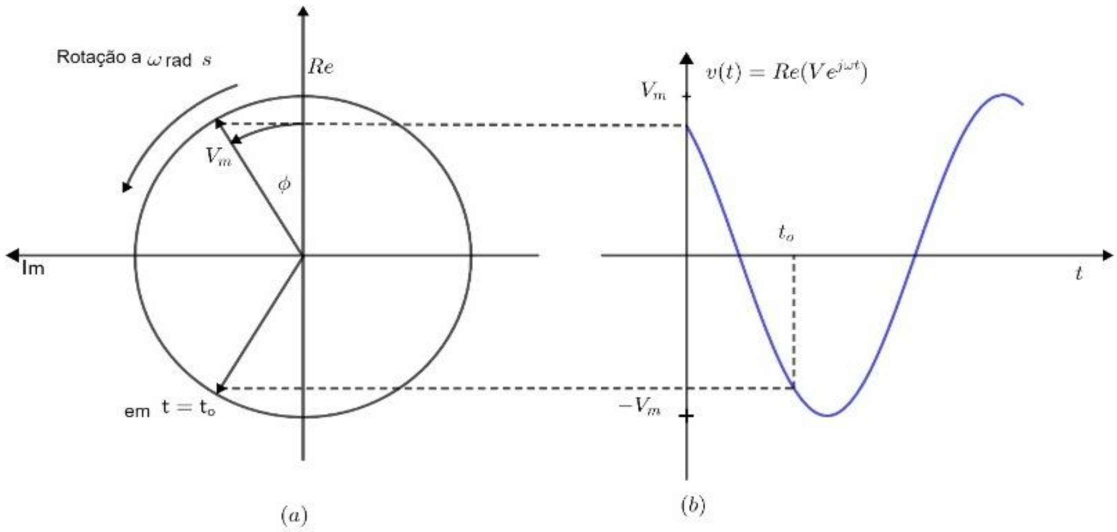
escrevendo $e^{j(\omega t+\emptyset)} = e^{j\omega t}.e^{j\emptyset}$, vamos reescrever v(t) da seguinte forma:

$$v(t) = Re(V_m.e^{j\emptyset}.e^{j\omega t})$$

tomaremos **V** = $V_m.e^{j\emptyset}$.

Assim, **V** será a representação fasorial da senoide em termos da amplitude e da fase. Sendo mais claro, o fasor é a representação na forma complexa da amplitude e da fase. A mesma demonstração poderia ter sido feita a partir da parte imaginária, contudo iremos convencionar **v(t)** sendo a parte real do número complexo dado por $V_m e^{j(\omega t+\emptyset)}$. Na figura 24 (a) temos a representação de **V** = $V_m.e^{j\emptyset}$ fasorial girando no sentido anti-horário; na figura 24 (b), a representação gráfica da sua projeção no eixo real, já em termos do tempo.

Figura 24: Representação gráfica do fasor.



Fonte: O autor.

A notação usada neste trabalho para representar a forma fasorial da tensão, também será válida para a representação fasorial da corrente; no caso da tensão:

$$\boldsymbol{V_m} \angle \emptyset$$

Com isso, o valor à esquerda do sinal $\angle$ é a amplitude e a direita, a fase. Essa forma de representação nada mais é do que a forma polar, sendo que V_m é o módulo e $\emptyset$ o argumento. Quando vamos trabalhar no domínio fasorial, na verdade passamos a fonte de tensão para o chamado domínio da frequência, mesmo a frequência angular não sendo explicitada na forma fasorial adotada, ela é de suma importância, pois as impedâncias do capacitor, e indutor, por exemplo, dependerão do seu valor. Para que isso seja possível, ω se mantém constante durante todo o processo de análise do circuito. Até aqui, vimos que para analisar um circuito CA, mudamos o domínio do tempo para a frequência (fasorial). Essa passagem se dá numa relação de ida e volta bem definida; ou seja, encontrado, por exemplo, o valor da corrente na forma fasorial, podemos determinar a função da corrente em relação ao tempo.

Resumidamente, o que é feito para se obter o fasor correspondente a uma senoide é:

- Expressar a senoide na forma de cosseno, com isso ela se torna parte real de um número complexo;

- Eliminar o fator e^{jwt}, justamente o fator associado ao tempo;
- O que resta é o fasor associado a senoide.

Observação: A análise via fasores só é possível quando a frequência é constante.

Sintetizando nossas ideias:

$$\boldsymbol{v(t) = V_m \cos(\omega t} + \emptyset) \quad <=> \quad \boldsymbol{V = V_m} \angle \emptyset$$

2.11 RELAÇÕES ENTRE FASORES PARA ELEMENTOS DE CIRCUITOS

Trabalharemos com circuitos de corrente alternada contendo os elementos: resistor, capacitor e indutor. Para que esses elementos possam ser levados em conta nas análises por via fasorial, é preciso transformar a relação tensão-corrente do domínio do tempo para o domínio da frequência. Neste trabalho, vamos apresentar os valores de tais elementos no domínio da frequência sem demonstrações, pois as mesmas envolvem o uso de artifícios que fogem dos nossos propósitos.

2.12 IMPEDÂNCIA

Definição 10: A impedância **Z** de um circuito é a razão entre tensão fasorial **V** e corrente fasorial **I**. Em outras palavras, a impedância representa, assim como o resistor no circuito CC, uma oposição ao fluxo de corrente; mas no caso do circuito CA, a impedância se apõe à corrente senoidal. Sua unidade de medida é ohms (Ω). A grosso modo, nossa análise aqui fica análoga ao que estudamos para circuitos elétricos com fonte CC e um resistor. A fonte produz uma corrente que por ele circula: No caso do circuito CA, essa seria a corrente fasorial. O equivalente das impedâncias será equivalente ao resistor equivalente, que também é visto no ensino médio no estudo dos circuitos elétricos.

- A impedância de um resistor com resistência R é **R**;
- A impedância de um capacitor com capacitância C é $\boldsymbol{\frac{1}{j\omega C}}$;
- A impedância de um indutor de indutância L é $\boldsymbol{j\omega L}$.

Por convenção, vamos chamar, respectivamente, **R**, **C** e **L**, as impedâncias do resistor, do capacitor e do indutor, dadas em Ω.

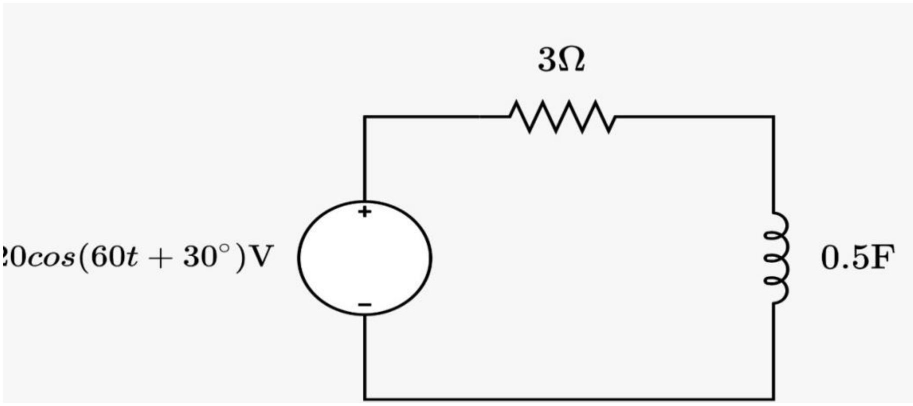
2.13 APLICAÇÕES

Um leitor com boa bagagem no tocante aos conhecimentos de engenharia elétrica sabe que o que foi visto aqui quanto a construção do fasorial e das impedâncias é bem simplificado, sendo omitido alguns detalhes que para os engenheiros são importantes. Nas aplicações seguintes, contudo, tudo que vimos aqui é o suficiente para a resolução do que será pedido. O foco maior é mostrar como os números complexos são úteis a outros ramos do conhecimento. Um ponto importante que deve ser destacado nessas aplicações é que a primeira Lei de Ohm, assunto também já tratado nesse trabalho, é válida para circuitos CA, no caso, sendo **Z** impedância, **V** a tensão fasorial e **I** a corrente fasorial, vale:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}$$

1° exemplo: Determinar a corrente elétrica que circula pelo circuito da figura 25. Obter essa corrente tanto na forma fasorial como no domínio do tempo.

Figura 25: Circuito elétrico RL.



Fonte: O autor.

Resolução: é importante que o aluno disponha de uma calculadora científica ou da calculadora científica do seu celular. Isso porque os cálculos podem ficar longos e complicados. Contudo, é importante que seja feito o manuseio dessas contas à mão até um ponto possível.

No circuito elétrico da figura 25, a excitação da fonte de tensão se dá por uma senoide. Os engenheiros eletricistas chamam o circuito em questão de RL, pois é formado por um resistor e por um indutor. Assim sendo, vamos passar cada um desses elementos para o domínio da frequência. Do circuito, temos que a frequência angular é $60\ rad/s$, e a fase, 30°.

Fonte de tensão: ($\mathbf{20}\ \angle\mathbf{30°}$) V.

Resistor: $3\ \Omega$.

Indutor: $(j.60.0{,}5) = 30j\ \Omega$.

De acordo com o esquema desse circuito, as impedâncias estão em série. Quando isso acontece, todos eles ficam submetidos à mesma corrente elétrica. A impedância equivalente entre o resistor e o indutor é dado pelas somas individuais de cada impedância. Seja **Z** impedância equivalente. Temos:

$$\boldsymbol{Z} = (3 + 30\mathrm{J})\Omega$$

Aplicando agora a primeira Lei de Ohm, vamos ter que a corrente fasorial **I** que circula pelo circuito é dada por:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{20\angle30°}}{\mathbf{3 + 30}\boldsymbol{J}}$$

Nesse ponto é interessante observarmos que temos a divisão de dois números complexos, sendo que o numerador está na forma polar e o denominador, na forma retangular. Assim sem solicitar o uso da calculadora, calculemos **Z** na forma polar. Assim, calcula-se o módulo e o argumento de **Z** como se segue

$$|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{3^2 + 30^2} = \sqrt{9 + 900} = \sqrt{909}$$

argumento de **Z:** veja que tanto a parte real como a imaginária de **Z** são positivas, portanto, o argumento θ de **Z** é: $\theta = arc\ tag\ \frac{30}{3} = arc\ tag\ 10$. Portanto:

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\mathbf{909}}\ \angle\boldsymbol{\theta}$$

em que θ é dado em graus. Assim:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{20\angle30°}}{\sqrt{\mathbf{909}}\ \angle\boldsymbol{\theta}}$$

Agora é hora de usar a divisão complexa na forma polar. Como visto no capítulo 1, o resultado dessa divisão tem como módulo a divisão dos módulos e o argumento, a diferença entre os argumentos do numerador e do denominador. Assim,

$$|\mathbf{I}| = \frac{20}{\sqrt{909}}\ A$$

agora far-se-á o uso da calculadora, obtendo valor aproximado para $|\mathbf{I}|$ = 0,66 A.

O argumento de **I** é β tal que $\beta = 30° - \theta$. Com a calculadora, achemos o valor aproximado, em graus, para $\theta = 84{,}3°$. Logo, $\beta = 30° - 84{,}3° = -54{,}3°$.

É interessante, mas não obrigatório, deixar esse ângulo entre 0 e 360°. Para tanto, basta somarmos com 360°, assim o argumento da nossa corrente fasorial fica sendo igual a 305,7°. Finalmente, a corrente na forma fasorial é:

$$\mathbf{I = 0,66 \angle 305,7° \ A}$$

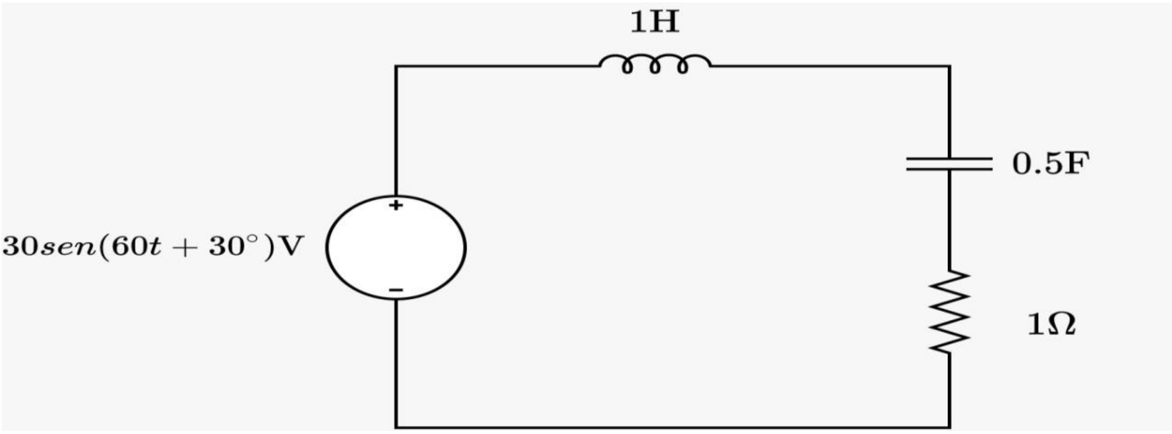
No domínio do tempo, chamemos essa corrente de $i(t)$. Como a tensão foi tratada em termos de cosseno, a forma senoidal (no tempo) da corrente será dada também como uma senoide em forma de cosseno. Portanto:

$$i(t) = \ 0{,}66 \cos\ (60t + 305{,}7°) \text{ A}$$

observe que v(t) e i(t) possuem a mesma frequência angular.

2° exemplo: No circuito RCL da figura 26, determine a corrente que circula por ele.

Figura 26: Circuito elétrico RLC.



Fonte: O autor.

Resolução: Note que o circuito apresenta uma fonte de tensão dada por uma senoide em termos do seno. Como foi convencionado neste trabalho que v(t) é a parte real de um número complexo, façamos a transformação desse seno para cosseno. Façamos:

$$sen\ (60t + 30°) = \cos(90° - 60t - 30°) = \cos(-60t + 60°)$$

como o cosseno é uma função par, temos que:

$$\cos(-60t + 60°) = \cos(60t - 60°) = \cos(60t + 300°)$$

assim, $v(t) = 30 \cos\ (\ 60t + 300°)\ V$.

Passando agora os elementos do circuito para o domínio da frequência:

Fonte de tensão: **V** = $30 \angle 300°\ \ V$.

Capacitor: **C** = $\frac{1}{J.60.0,5} = \frac{1}{30J} = \frac{-J}{30}$ Ω.

Resistor: **R** = 1 Ω.

Indutor: **L** = $j.60.1 = 60j$ Ω.

O próximo passo é determinar a impedância equivalente desse circuito. Como estão em série (circulados pela mesma corrente), temos que:

$$\mathbf{Z} = 1 + 60J - \frac{j}{30} = 1 + \frac{1799j}{30}\ \Omega.$$

Neste caso, os números que envolvem **Z** ficaram complicados para o manuseio sem calculadora. Nesse caso, o uso da calculadora científica é indispensável, pois economiza tempo e conta. Usando aproximações, temos que:

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1799}{30}\right)^2} = 59{,}97 \text{ e } \theta = arc\ tag\ \frac{1799}{30} = 89{,}04°$$

em que θ é o argumento de **Z.** Assim sendo, temos que a corrente fasorial é:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\mathbf{30\angle 300°}}{\mathbf{59{,}97\angle 89{,}04°}} = \mathbf{0{,}5\ \angle 210{,}96°}\ \mathbf{A}$$

No tempo, a resposta seria:

$$i(t) = 0{,}5\cos(60t + 210{,}96°)\ A$$

3° exemplo: Uma fonte de tensão, de valor eficaz 220∠0°, é representada, no domínio do tempo, por uma cossenoide com frequência angular de 60 rotações por segundo. Essa fonte alimenta uma carga de impedância $\boldsymbol{Z} = 10 + 10j$ Ω. Assim, é necessário calcular a corrente, tanto fasorial quanto no tempo, fornecida pela fonte.

Resolução: Nesse caso, já é dada a impedância equivalente. Para calcularmos a corrente fasorial, temos então que dividir a tensão fasorial pela impedância.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{220\angle 0°}}{\mathbf{10 + 10}\boldsymbol{J}}$$

O argumento de **Z** é $|\mathbf{Z}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$. Já o argumento de **Z** é dado pelo arco tangente de 1, que vale, em graus, 45°. Logo, a divisão, na forma polar, fica:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{220\angle 0°}}{\mathbf{10\sqrt{2}\angle 45°}} = \mathbf{11\sqrt{2}\angle - 45°}\ \boldsymbol{A}$$

A corrente **I** também pode ser representada na forma algébrica de número complexo, para isso basta escrever:

$$\mathbf{I} = \mathbf{11}\sqrt{\mathbf{2}}\,[\,\boldsymbol{cos}(-\mathbf{45}°) + \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{sen}(-\mathbf{45}°)] = (\mathbf{11} - \mathbf{11}\boldsymbol{j})\boldsymbol{A}$$

Usando o arco de 315° como equivalente para – 45°, vamos escrever a corrente no domínio do tempo como:

$$i(t) = 11\sqrt{2}\cos(60t + 315°)A$$

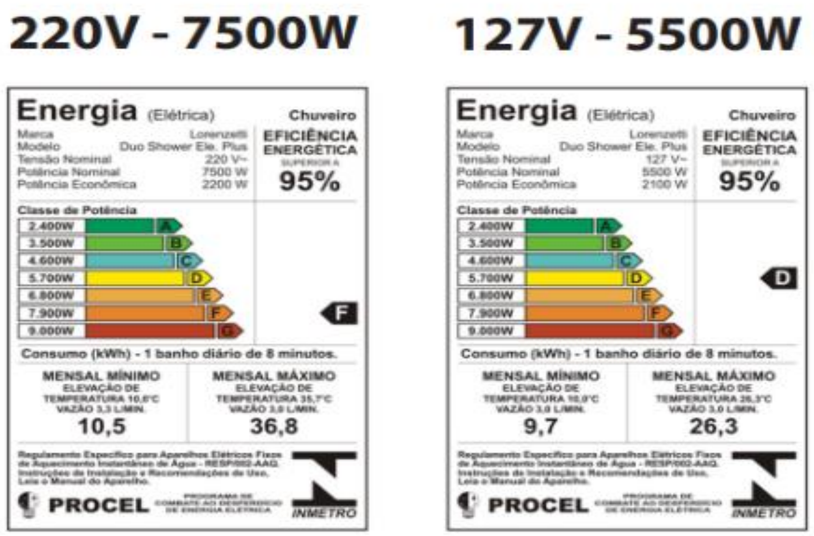
2.13.1 Potência

Quanto aos conceitos de eletricidade vistos até aqui, focamos basicamente na tensão e na corrente elétrica. Contudo, somente elas não são suficientes para o conhecimento básico de um circuito elétrico. No contexto prático, é necessário saber quanto de potência um elemento elétrico é capaz de absorver ou liberar.

A definição de potência diz que se trata de uma medida que exibe a quantidade de energia liberada por unidade de tempo para um determinado dispositivo. Da física, a unidade de medida, no SI, para energia é o joule (J). Assim, a unidade para a potência é J/s, já que o segundo é a unidade consagrada para o tempo. Comumente, o J/s é equivalente a Watts (W). O Quilowatt indica a quantidade de potência multiplicado por 1000.

A conta de energia elétrica que chega em nossas casas é calculada a partir da potência elétrica dos aparelhos. As concessionárias de eletricidade geralmente trabalham com KWh. O kWh é definido como o consumo de energia durante uma hora, de um aparelho cuja potência vale 1000 W. Por exemplo, um chuveiro elétrico de potência 5500 W (posição inverno) que é usado diariamente por uma hora, apresenta seu consumo de energia elétrica em um mês (30 dias), que seria dado por 5,5 kwh. 30 = 165 kwh. Em seguida, a concessionária de energia multiplica esse consumo por uma tarifa cobrada em cima de cada Kwh.

Figura 27: Informações sobre dois tipos de chuveiro elétrico.



Fonte: https://www.buscape.com.br/tv/con 1

A potência elétrica é calculada em função da corrente e da tensão. O seu valor numérico é dado pelos produtos dos valores numéricos da tensão e da corrente. Assim, sendo p a potência, v tensão e i a corrente elétrica, temos:

$$p = vi$$

Alguns livros didáticos também chamam a potência pela letra U, sendo possível encontrar essa mesma fórmula na forma $p = Ui$. O valor da potência pode ser positivo ou negativo. Se a potência elétrica de um elemento é positiva, indica que ele está consumindo energia ou que a ele está sendo fornecido energia; caso seja negativa, indica que o mesmo está liberando energia, fornecendo energia para o circuito.

A potência instantânea (em Watts) é a potência dada em qualquer instante. Essa definição faz bastante sentido com o propósito de trabalhar com fontes e correntes senoidais, pois as mesmas variam no tempo, apresentando valores diferentes em instantes diferentes. O leitor atento deve se questionar sobre o fato de chamarmos o indutor, o capacitor e o resistor de elementos elétricos passivos. Esse termo indica que tais elementos não são capazes de fornecer energia para o circuito. Ou seja, eles somente consomem energia, gastam ou mesmo armazenam (como no caso do indutor e do capacitor). A potência instantânea de um elemento passivo em um circuito CA (como os vistos anteriormente), será dada por:

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Em que $v(t)$ seja a potência instantânea (tempo t), e $i(t)$ a corrente no instante t, assumindo que $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_1)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_2)$, fazendo o produto dessas duas senoides e usando a identidade trigonométrica dada por

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

vamos chegar na seguinte expressão:

$$p(t) = 0{,}5V_m I_m \cos(\theta_1 - \theta_2) + 0{,}5V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_1 + \theta_2).$$

Observe que a potência instantânea é formada por duas partes, uma constante e a outra que depende do tempo. A segunda parte é formada por uma senoide que possui frequência angular dada pelo dobro da frequência angular da tensão (e da corrente).

A potência média **P**, também medida em watts, é a média da potência instantânea ao longo de um certo intervalo de tempo. Seu valor é dado por:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt,$$

Em **T** é o período de $v(t)$.

Ao ser resolvida essa integral (não é o objetivo aqui), vamos concluir que a potência média é:

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

Justamente a parte constante que foi encontrada quando abrimos o produto $v(t)i(t)$. Agora, o objetivo será relacionar os fasores com a potência média encontrada. Lembremos que **V** e **I** são as formas fasoriais, respectivamente, para tensão e corrente. Para facilitar o trabalho, escreveremos as formulares polares tradicionais para **V** e **I**:

V = $V_m(\cos\ \theta_1 + j\ sen\ \theta_1)$ e $\mathbf{I} = I_m(\cos\ \theta_2 + j\ sen\ \theta_2)$

Como o conjugado $\bar{\mathbf{I}}$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathrm{I}_m(\cos\theta_2 - j\ sen\ \theta_2)$$

Fazendo-se uso do fato da função seno ser ímpar, e da função cosseno ser par, podemos reescrever $\bar{\mathbf{I}}$ da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathrm{I}_m\ [\cos(-\theta_2) + j\ sen\ (-\theta_2)]$$

Portanto fica fácil verificar que $\theta_1 - \theta_2$ é o argumento do produto $\mathbf{V}\bar{\mathbf{I}}$**.**

Finalmente, podemos concluir que:

$$P = \frac{1}{2} Re(\mathbf{V}\bar{\boldsymbol{I}})$$

Lembremos do capítulo 1, que no produto de complexos na forma polar, o módulo do resultado é o produto entre os módulos dos fatores. Assim, façamos alguns exemplos para entendermos melhor. No circuito, vamos determinar a potência média fornecida pela fonte e a potência média absorvida pelo resistor de 3 Ω.

Resolvendo: A potência média liberada pela fonte será:

$$P = 0{,}5.20.0{,}66\cos(30° - 305{,}7°) = 0{,}65\ W.$$

Já para se determinar a potência consumida pelo resistor, vamos determinar a queda de tensão nele, usando a 1° Lei de Ohm. Considerando que o resistor está em série com os demais elementos do circuito, todos eles são circulados pela mesma corrente, assim a corrente fasorial no resistor é **I.** Logo, a tensão fasorial $\mathbf{V}_r$ do resistor é:

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{I}\mathrm{R} = 1{,}98\ \angle 305{,}7°\ \mathrm{V}$$

Logo, a potência média absorvido pelo resistor é:

$$P = 0{,}5.1{,}98.0{,}66.\cos(0°) = 0{,}65\ w.$$

Perceba que a potência média absorvida pelo resistor é a mesma da fornecida pela fonte de tensão. Isso quer dizer que o indutor não absorve potência. O mesmo fato vale para o capacitor. Isso vale porque a diferença entre a fase da queda de tensão sobre um capacitor (ou um indutor) e a fase da corrente é $\pm 90°$, sendo o cosseno desses dois arcos nulo. Observe, ainda com relação ao circuito da figura 26:

Queda tensão no indutor: $\boldsymbol{V}_L = \boldsymbol{I}(30\mathrm{J})$. Fazendo uso da multiplicação com complexos, o módulo de $\boldsymbol{V_L}$ é 0,66. 30 = 19,8 e o argumento de $\boldsymbol{V}_L$ é $305{,}7° + 90° = 395{,}7°$. Dái, sua potência média é:

$$P = 0{,}5\ .\ 0{,}66.1{,}98.\cos\ (395{,}7° - 305{,}7°) = 0{,}65.\ 0 = 0\ \mathrm{W}.$$

É fácil ver que como a impedância do indutor é um complexo na forma aj, com a real, positivo e seu argumento 90°, a fase da queda de tensão sobre ele é a soma da fase da corrente fasorial com 90°. Com isso, na diferença calculada na fórmula de potência média dessa soma, é descontada a fase da corrente, restando sempre 90°. A mesma ideia será válida para o capacitor, mas nesse caso, na diferença em questão, aparecerá o cálculo do cosseno de 270° (equivalente a – 90°), o que também resulta em 0.

CAPÍTULO 3

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A educação ao longo dos anos passou por diversas mudanças. Com isso, a forma de ensinar de um professor também sofre variações no decorrer do tempo; assim, a cada novo ciclo, faz-se necessário o uso de metodologias diferenciadas e que estão de acordo com as exigências pedagógicas de ensino vigentes.

Durante muito tempo, o chamado “ensino tradicional” vigorou no cenário escolar, que tinha como características: processo de ensino aprendizagem centrado no professor, salas de aula pouco movimentadas, memorização, aulas puramente expositivas, dentre outras. No atual cenário educacional, é inquestionável a necessidade crescente do uso de recursos tecnológicos no ato de ensinar; o aluno cada vez mais é bombardeado com informações através das redes sociais. Tais conhecimentos chegam de forma fácil, no clicar de dedos, e rapidamente dão espaço para outra fonte de informação.

Assim sendo, aulas expositivas, com pouca interação entre aluno e professor, sem nenhum recurso tecnológico utilizado, parecem não fazer mais sentido ou não surtir mais efeitos na qualidade efetiva de aprendizagem. Mesmo diante de aulas expositivas tidas como “excepcionais”, percebe-se, ainda, o desinteresse quase geral dos alunos. Diante dessa perspectiva, o planejamento de aula deve ser diferenciado, por meio de uma metodologia cativante, que insira o educando no protagonismo do ato pela busca do saber.

Portanto, deve-se evitar que um mesmo conteúdo seja sempre ensinado de uma única forma, engessado numa só linha de ensinar. É nesse momento que devemos buscar compreender o papel de uma sequência didática.

A sequência didática é um instrumento de planejamento no qual se organiza de forma metodologicamente sequencial a execução das atividades propostas, visando a aprendizagem. Sendo assim, a sequência apresentará essas atividades “amarradas” ao propósito docente, que deve ter como prioridade, sempre, o aprendizado dos alunos. Seu significado pode ser um valioso recurso pedagógico para compreensão de um gênero.

Segundo Schenuwly e Dolz (2004, p.97), “uma sequência didática tem, precisamente, a finalidade de ajudar o aluno adominar melhor um gênero de texto, permitindo-lhe escrever ou falar de uma maneira mais adequada numa dada situação de comunicação".

Em nosso trabalho, vamos propor um roteiro para uma sequência didática que tratará do tema de números complexos e ao final, uma aplicação em cima da eletricidade, conforme visto nessa obra. Na sequência apresentada nos anexos buscamos focar na objetividade, por isso omitimos algumas passagens em relação a fundamentação teórica dos complexos. Contudo, ressalta-se que sugerimos o uso de jogos e do Geogebra, a fim de tornar o estudo mais atraente e visando o melhor desempenho dos alunos, além de permitir que eles possam interagir durante quase todo o tempo com o seu próprio processo de ensino aprendizagem. A sequência didática em questão é proposta, sendo uma referência para professores que desejarem trabalhar números complexos na escola, nos cursos técnicos, ou até mesmo em algum tipo de ensino particular. É importante que a ideia da aplicação em circuitos elétricas seja feita mediante o auxílio do professor de física mais próximo, pois o mesmo pode embasar com mais detalhes toda a teoria por trás dos circuitos elétricos, e mais ainda, promover atividades, caso seja possível, em laboratório. Além disso, essa mesma sequência pode, por exemplo, ser executada por meio de um projeto envolvendo a comunidade escolar, e se possível, a participação de um engenheiro eletricista, ou mesmo um professor de engenharia elétrica, que palestre sobre a importância dos números complexos no mundo da eletricidade. A seguir, esboçamos um roteiro para elaboração de uma sequência didática, ou mesmo um projeto, visando o propósito deste trabalho. Estimamos uma carga horária, para esta SD, em torno de 8 a 10 horas.

3.1.1 Roteiro

- **1° Momento**: Problematização; esta pode ser feita por meio da solicitação da resolução de uma equação do segundo grau com discrimiante negativo.
- **2° Momento**: Abordagem histórica sobre o aparecimento dos números complexos na matemática e a apresentação da definição de números complexos.

- **3° momento**: Apresentação das operações básicas com números complexos, e definição de módulo, conjugado. Além disso, uma conexão desses temas com representação e interpretação geométrica.
- **4° momento**: Forma polar; tratando especialmente do produto e da divisão de números complexos nas formas polares e 1° e 2° fórmulas de Moivre.
- **5° momento**: Apresentação da aplicação dos números complexos na resolução de circuitos elétricos.

Seria bastante proveitoso se pudéssemos ter aplicado essa sequência na prática durante a construção desta dissertação. Contudo, durante o tempo de escrita desta, que foi em torno de dois meses, a rede pública do estado do Acre estava em fase final do ano letivo. Entendemos que seria bastante complicado entrar em alguma escola de ensino médio com essa proposta, pois como docentes sabemos da aflição e da correria de um final de ano letivo. Em seguida, os alunos entraram de férias. Mas entendemos que uma pesquisa não termina em um único trabalho, nem tão pouco no seu primeiro trabalho. Pretendemos, em um momento oportuno, levar esse projeto para ser executado de fato, e partir dos resultados, elaborar um artigo apontando nossa experiência; e com isso, buscar chamar atenção de professores e alunos da necessidade de um maior protagonismo aos números complexos na educação básica. E mais que isso, fomentar a construção de mais trabalhos nessa direção, visando juntos a construção de uma matemática básica mais sólida aos nossos educandos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nesse trabalho, o leitor pode tomar conhecimento da importância que os números complexos têm para a eletricidade; e com isso, para engenheiros eletricistas e eletrônicos. É válido ressaltar que focamos na aplicação dos complexos em apenas uma área, sendo que eles também estão presentes em várias outras da engenharia e física. Assim, fica evidente como o tema é importante para os alunos das faculdades associadas a essas áreas e como os mesmos ficam prejudicados por irem para a universidade sem o mínimo de embasamento de conteúdos básicos.

Com isso, o trabalho buscou evidenciar que temas deixados de lado pelo Enem também fazem parte da vida dos estudantes. E essa reflexão não se limita aos números complexos, pois outros conteúdos também estão desaparecendo do currículo do ensino médio e provocando lacunas de aprendizagem que interferem na vida acadêmica.

Uma proposta, no contexto do Estado do Acre, para reverter essa situação é a promoção mais frequente do diálogo entre a Secretaria de Educação e a Universidade Federal do Acre. Cada qual apresentando suas ideias e propostas na tentativa de retomar conteúdos que sejam julgados mais importantes para certas formações profissionais. Seria um processo em que a universidade conheceria mais de perto os dilemas da educação estadual e ao mesmo tempo, a educação estadual teria mais cuidado ao lidar com a retirada de certas habilidades.

Uma outra proposta deveria ser a promoção de escutas em que tanto professores universitários quanto da educação básica e também alunos, poderiam por suas críticas em relação tanto às escolhas dos conteúdos vistos na educação básica quanto à maneira como a Universidade vem formando novos professores.

Sabemos que vivemos em uma época informatizada, diferenciada dos tempos passados; assim, atualmente, trabalhar com trigonometria, números complexos, cônicas e funções exigem metodologias diferentes de outras épocas, com o uso cada vez mais frequente das tecnologias virtuais e digitais. Isso demanda dos professores uma preparação além dos conhecimentos prévios de sua área, pois não basta apenas retomar esses conteúdos e ensiná-los na forma tradicional.

É preciso inovar, mostrando suas aplicações e se possível, por meio dessas ferramentas digitais. O Geogebra é um exemplo de um desses recursos. Não faz mais sentido trabalhar, por exemplo, números complexos sem nenhuma aplicação e sem nenhum auxílio tecnológico, pois caso isso aconteça, o condenamos novamente a ser deixado de lado nas próximas atualizações curriculares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, C. **Fundamentals of Electric Circuits** – 5th ed., Connect Learn Succeed, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência ENEM – Matemática.** Brasília (DF), 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília (DF), 2007.

CAMPOS, R. B. L. **Análise técnica da matriz de referência do ENEM e dos itens de matemática das edições de 2012 a 2014.** Dissertação de mestrado, Universidade Rural de Pernambuco, 2015.

CHAGAS, J. S. B. **A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática.** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO ACRE. **Currículo de referência único do Acre. Educação de excelência para todos**, Rio Branco, 2019.

GUSSOW, M. **Eletricidade básica.** 2 ed., Porto Alegre, Bookman, 2009.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Atual editora, 2006.

JUNIOR, R. C. A. **Números Complexos e Circuitos Elétricos: uma análise de livros didáticos apoiada na Teoria dos Registros das Representações Semióticas.** Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Curitiba, 2016.

LIMA, I. R. L. **Números complexos e equações algébricas.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará, f. 56, 2022.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do paraná.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2017.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números Racionais, Reais e Complexos.** Porto Alegre, Editora UFRGS, 2011.

SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Os gêneros escolares – das práticas de linguagem aos objetos de ensino.** In: SCHNEUWLY, Bernard.;

DOLZ, Joaquim. e colaboradores. Gêneros orais e escritos na escola. [Tradução e organização: Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro]. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2004.

ANEXOS

SECRETARIA DE ESTADO DE
EDUCAÇÃO, CULTURA E ESPORTES
DIRETORIA DE ENSINO – DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ESCOLA ESTADUAL: ______________________________			
PROFESSOR(A):	COMPONENTE CURRICULAR: Matemática	SÉRIE:	TURMAS:
COORDENADOR(A):	CARGA HORÁRIA PREVISTA: 8 a 9 h	PERÍODO DE EXECUÇÃO: De ___/___/2022 a __/___/2022.	

DELIMITAÇÃO TEMÁTICA
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA [X]
HABILIDADE:
OBJETOS DE CONHECIMENTO
Números Complexos

SITUAÇÕES DE APRENDIZAGENS

1º MOMENTO:	

Propor aos alunos a resolução da equação polinomial de 2° grau:
$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 5 = 0}$$

Ao professor: Neste momento, é oportuno uma verificação para saber se todos os alunos envolvidos na aula dominam a resolução de equações polinomiais de segundo grau. Após os alunos concluírem que o discriminante calculado foi -4, possivelmente eles irão parar a resolução, argumentando que não há raízes. É importante, neste momento, o professor argumentar que não há raízes reais, pois haverá um conjunto ainda desconhecido por eles que irá comportar soluções para esta equação. É oportuno também, a realização de uma rápida revisão das propriedades que envolvem radiciação, salientando que nos reais só é possível a extração de raízes de índice par quando o radicando for não negativo.

2° MOMENTO:

2° Momento: Aos alunos, será solicitado que escrevam as raízes da equação dada na problematização em termos de uma suposta raiz quadrada de -4. Observe:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Em seguida, o professor deverá sugerir, mesmo que a princípio soe como algo absurdo, que os alunos escrevam $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\,.\sqrt{4} = 2\sqrt{-1}$. Assim, o valor de **x** fica dado por:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Assim, a conclusão, a princípio, é que as duas raízes dessa equação são $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$. É necessário deixar claro que esses dois resultados encontrados não têm sentido em IR, pois, nesse conjunto, não se calcula raízes quadradas de negativos. Estrategicamente, o professor, solicitará que os alunos tomem, por exemplo, $x = 2 + \sqrt{-1}$ e peça sua verificação na equação.

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^2 - 4\left(2 + \sqrt{-1}\,\right) + 5$$

$= 4 + 4\sqrt{-1} + \left(\sqrt{-1}\right)^2 - 8 - 4\sqrt{-1} + 5$

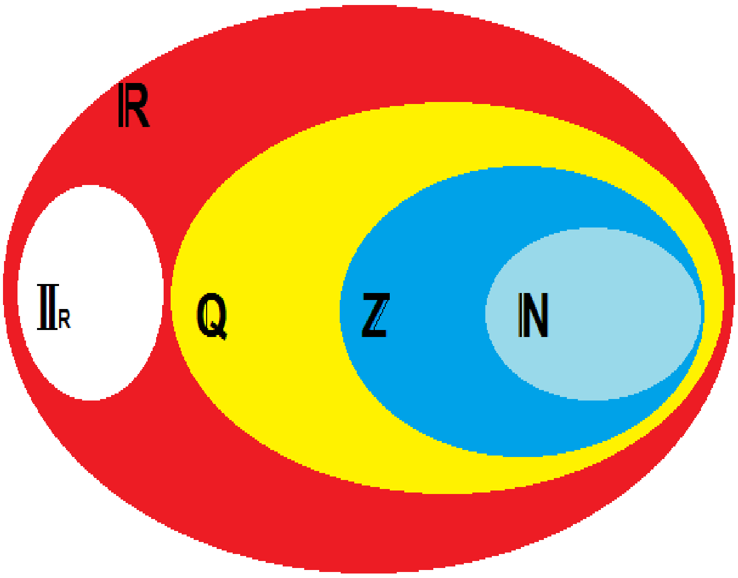
$= 4 + \cancel{4\sqrt{-1}} - 1 - 8 - \cancel{4\sqrt{-1}} + 5$

$= 4 - 1 - 8 + 5 = 0.$

Fica então esperado que o aluno, fazendo uso das propriedades nos reais, conclua que de fato “a raiz” encontrada verifica a equação; assim, o professor pode levantar o seguinte questionamento: Faz sentido definir um conjunto numérico.

É oportuno, passar um exercício semelhante a este, só que com uma outra equação. Para já acostumar o aluno com a notação da unidade imaginária, solicite que eles usem $i = \sqrt{-1}$.

Antes da introdução da definição de número complexo, é necessário ficar claro que um novo conjunto numérico surge para suprir o que um outro conjunto já usado não pode responder. Por exemplo, os inteiros surgem para o fechamento da subtração, o que não ocorria em **N**; os racionais surgiram para fechar a divisão entre dois inteiros. Na rede pública do estado do Acre, o conhecimento dos números reais é feito na nona série do ensino fundamental. Inclusive, fica como sugestão, a apresentação do diagrama que evidencia as inclusões de N até IR.



Fonte: https://deverdecasa-web.blogspot.

Questionamento aos alunos: Qual operação não pode ser feita em IR?

Após o momento de fala dos alunos, o professor deve usar o próprio exemplo da equação quadrática apresentada na problematização, salientando que como o discriminante é negativo, a tendência é que eles (os alunos) parassem aí a resolução. Isso ocorre porque nos reais é impossível a extração de raízes de índice par de números reais negativos, pois uma potenciação com expoente natural par resulta sempre em um número real positivo. Nesse momento, o professor deverá, então, evocar a existência de um conjunto numérico “acima” dos números reais que supra essa deficiência, definindo o que vem a ser um número complexo.

Definição: Um número é dito complexo quando escrito na forma $a + bi$, em que a, b são reais e i é a chamada unidade imaginária, com a seguinte propriedade: $i^2 = -1$. O número real será chamado de parte real e o número real b, de parte imaginária. O símbolo desse conjunto será C. Mas por enquanto, o professor deixa "de lado" essa definição para primeiro trabalhar o contexto histórico dos números complexos. Em seguida apresentar os complexos como par ordenado de números reais e depois voltar para essa definição, consolidando seu entendimento.

Leitura: Dependendo do tempo, a critério do professor, o seguinte texto pode ser uma leitura compartilhada entre os alunos ou mesmo deixada como lição de casa. Ele trata sobre a história dos números complexos, embasando o estudo de alguns matemáticos sobre equações polinomiais de terceiro e quarto grau.

O texto abaixo está disponível em *https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos:*

O conceito de número complexo se desenvolveu gradativamente, como ocorreu com os demais tipos de números. Algumas equações do grau 2, como $x^2 + 1 = 0$ não haviam solução até o século XVI, pois para os matemáticos da época a raiz negativa não existia. Porém, não foi este o motivo pelo qual os números complexos surgiram. Ao passar dos anos, alguns matemáticos viram o mesmo problema para equações do 3º, onde se percebeu que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação.

Curiosidade: Os números complexos surgiram na época do Renascimento, onde a Europa se recuperava da peste negra e tinha uma forte influência do Humanismo. A matemática grega não era compreendida, pois poucos sabiam ler grego e era um assunto complexo. Assim, os europeus acabaram seguindo para outros ramos e continuaram a difundir a Matemática.

Para resolver este problema, alguns matemáticos europeus, principalmente italianos, desenvolveram pesquisas e houveram algumas disputas. Antes das lutas, os números complexos começaram a ser desenvolvidos por Scipione dal Ferro. Ferro desenvolveu uma teria para a solução das equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou não publicando sua teoria.

Porque os matemáticos não divulgavam suas teorias? Nesta época os matemáticos tinham costume de desafiar outros matemáticos para se mostrarem mais inteligentes. Outra hipótese seria o medo de outro matemático encontrar algum erro na fórmula e assim surgir alguns problemas sobre a notoriedade de algumas teorias. Antonio Maria Fior conheceu a teoria de Ferro e ampliou para as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Fior acabou desafiando o jovem Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia a resolver 30 equações de grau 3. Para a surpresa de Fior, Tartaglia conseguiu resolver os problemas. Com muita dedicação e esforço, Tartaglia procurou um método para a resolução destas equações e acabou encontrando. Por este motivo, ele acabou vencendo todas as disputas com Fior.

Neste momento, chega aos ouvidos de Girolamo Cardano que Tartaglia sabia resolver tal tipo de equação. Cardano implorou a “fórmula” para resolver estas equações e Tartaglia recusou, acabando sendo acusado de mesquinho e egoísta.

Com a insistência de Cardano e jurando que não divulgaria o resultado, Tartaglia revelou a solução. Porém, Cardano não cumpriu com sua palavra, e em 1545 fez a publicação no livro *Ars Magna* com o seguinte problema:

“Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40”, e o resolve através dos radicais de maneira similar as equações de 2º grau. Ele somente fez uma menção de Tartaglia na sua obra e até hoje a fórmula é conhecida como “Fórmula de Cardano”. Esta descoberta foi tão inusitada que ficou conhecida como o início da matemática moderna.

Após esta “luta” surge um problema inquietante que Cardano trouxe na época como números “sofisticados”, ou seja, as raízes quadradas de números negativos. Cardano concluiu que estas raízes seriam um número “tão sutil quando inútil”. Ao passar dos anos seria provado que estes números não eram inúteis como Cardano achava (BOYER, 1996, p. 197). Mas, como resolver o problema dos números “sofisticados”? O que fazer com estes números? Fica evidente que os números reais não eram suficientes para resolver este tipo de equação. Assim, seguiram a mesma ideia que os pitagóricos seguiram quando descobriram o número raiz quadrada de 2. Neste momento da história, se introduz a ideia de aceitar o imaginário e não somente o real.

Rafael Bombelli surge para trabalhar com este problema e mostrar que ao conhecer uma raiz de uma equação cúbica, é possível encontrar outras duas. Por exemplo, se $x = 4$. Sabemos que a soma das outras duas raízes deve ser 4, logo a parte real da equação é 2. Bombelli teve a ideia de somar um número imaginário a esta parte real e na outra raiz somar o inverso relativo à adição deste número imaginário. Mais tarde, essa teoria vai ficar conhecida como raiz conjugada.

René Descartes escreveu no seu livro *Géométrie* a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”. Com esta citação ficou definido que o número raiz quadrada de -1 seria chamado de número imaginário e que poderia ser manipulado de acordo com as regras da álgebra (GARBI, 1997, p. 75).

Abraham de Moivre foi um grande matemático e ficou conhecido pela fórmula de Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria. O Teorema de Moivre é $(\cos\theta + isen\,\theta)^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta)$. Provavelmente Moivre descobriu esta relação em 1707. Assim, tudo na matemática possui uma simbologia, seja o sinal de divisão, seja uma integral, então como ficariam definidos estes números imaginários? Foi Leonhard Euler, sim este mesmo que tem o número **e** em sua memória. Além disto, Euler criou vários símbolos, com isso, à raiz quadrada de -1 seria simbolizada por *i*, em 1777. Segundo Euler, os números complexos também podem possuir uma parte real. Logo, o número complexo é do tipo: $z = a + ib,$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, mas esta ideia só foi aceita quando Gauss a introduziu. Euler ainda mostrou que os números complexos são um corpo fechado, pois aplicando qualquer operação transcendente resultará num número complexo.

Em 1797, Caspar Wessel trabalhou geometricamente os números complexos, fazendo uma correspondência objetiva entre estes e os pontos do plano, mas somente foi publicado em 1806, por Jean Argand. Hoje, Argand recebe o mérito por esta representação. Em 1798 o matemático Carl Friedrich Gauss demonstrou em sua tese de doutorado que toda equação algébrica de grau n (n > 0) e coeficientes complexos, tem pelo menos uma raiz complexa. Esse é o chamado Teorema Fundamental da Álgebra. Tal teorema resolveu a questão das soluções de equações algébricas.

Em 1831, Gauss retomou a ideia Argand e pensou nos números $a + b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano, tendo assim (a, b). Deu-se também uma interpretação geométrica para a adição e multiplicação dos símbolos. Esta representação geométrica “fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido de que cada ponto no plano corresponde a um número complexo e vice versa” (BOYER, 1996, p. 350). E para finalizar, em 1832, Gauss introduz a expressão número complexo.

Após a leitura: Com vistas à intepretação de texto, contemplando alguns descritores da língua portuguesa, o professor pode elaborar algumas perguntas à luz do que foi tratado no texto. Contudo, é muito importante que o docente explique o texto, o contexto histórico dos números, e fazendo os devidos reconhecimentos aos matemáticos envolvidos em suas construções. Esse trabalho é de suma importância, pois a abordagem histórica de um tema na matemática corrobora para o aluno entender o porquê de ter sido construído tal assunto, qual a sua necessidade, importância e contribuições para o desenvolvimento da humanidade e da ciência.

3º MOMENTO:

Para uma efetiva construção do conjunto dos números complexos, vamos defini-lo a partir da noção de par ordenado. O professor, visando neste momento, sondar os conhecimentos passado dos seus alunos, pode solicitar que os mesmos digam o que entendem por par ordenado; fazendo as devidas correções em caso de respostas equivocadas.

Definição: o par ordenado (a, b) representará o número complexo z = a + bi (chamada de forma algébrica) definido no segundo momento. Como estamos introduzindo um novo conjunto, deve-se definir uma adição e uma multiplicação. A fim de não adentrar nas formalidades do estudo de corpos, como vimos no capítulo 1 do trabalho, apresentaremos a adição e multiplicação com números complexos na forma de par ordenado – ao mesmo tempo na forma a + bi – e depois assumiremos o fato de todas as propriedades nas quais estamos habituados em IR também valerão em C. Essas duas operações serão fechadas em C.

- Adição: sejam a, b, c e d números reais e os complexos (a, b) e (c, d) nas formas de pares ordenados. A soma desses dois números será dada por $(a + c, b + d)$.
- Multiplicação: tomando os dois complexos da definição de adição, vamos definir o produto $(a, b)\ (c, d)\ =\ (ac - bd, ad\ +\ bc)$.

Na prática o professor não precisa manusear os complexos na forma de par ordenado. Porque valerá que a soma de dois complexos é um complexo cuja parte real é a soma das partes reais, e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias. E no produto, o visto com par ordenado é equivalente ao produto (a+bi)(c+di). Contudo, é preciso deixar claro que essas consequências são verdadeiras, uma vez que os complexos comportam a mesma estrutura algébrica que os reais no tocante a essas operações: associatividade, comutatividade, elemento neutro, simétricos e distributividade. Assim, também, se definem subtração e divisão nos complexos, usando seus respectivos simétricos. É de suma importância evidenciar aos alunos que quando b = 0, o número complexo fica sendo somente o próprio a, isto é, real. Isso implica que todo número real é complexo, pois dado um c real, ele pode ser escrito como c + 0i, logo também é complexo.

Portanto, **Todo número real é complexo.**

Exemplos:

- $(2+3i) + (-4+10i) = (2-4) + (3+10)i = -2 + 13i.$
- $i + 2i = (0+i) + (0+2i) = (0+0) + i(1+2) = 3i.$
- $(1-2i)(3+4i) = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i$
- $(2+5i) - (7-2i) = 2 + 5i - 7 + 2i = -5 + 7i.$

Jogo matemático: Visando um momento lúdico para familiarizar os alunos com números complexos, apresentaremos o jogo de memória para somar complexos. Esse jogo é embasado em um trabalho encontrado na internet, no site https://lema.ufsc.br/tag/jogo-da-memoria/, toda sua descrição pode ser encontrada nesse site. Descrevendo o jogo:

- **Características:**

O jogo da memória de somar números complexos pode ser confeccionado através de papel cartão juntamente com o papel Paraná. O tamanho das peças deve ser parecido com um jogo de memória tradicional.

Possui, portanto, como objetivo fundamental avaliar a compressão dos alunos em relação às operações entre números complexos. No jogo atual, a ênfase será feita através da adição e subtração de números complexos. Além disso, após finalizar a dinâmica, pode-se introduzir a multiplicação de números complexos.

Instruções de utilização

Assim como no jogo tradicional, as fichas serão distribuídas sobre uma superfície (mesa) e cada equipe escolherá duas peças por vez, tendo como objetivo encontrar os pares, caso encontre um par a equipe terá direito a mais uma jogada. O que diferencia essa atividade do jogo da memória tradicional é o fato de os alunos terem que encontrar as fichas referentes a uma conta e seu resultado. Por exemplo:

$(3 + 7i) + (5 - 2i)$ $\qquad$ $8 + 5i$

Vence a equipe que tiver a maior quantidade de pares

Dicas de utilização

- O tempo de jogo pode variar de acordo com a quantidade de pessoas selecionadas entre o conjunto de pessoas que irão realizar o mesmo trabalho.
- Pode ser jogado a partir de duas pessoas e no máximo dez.

Habilidades matemáticas

- Cálculos mentais;
- Operações aritméticas de números complexos;
- Realizar operações através de símbolos diferentes dos números reais, dando uma ênfase na assimilação do sentido matemático.

- **Análise crítica do jogo**

Como já dito, o jogo da memória traz benefícios para o aprendizado, mas deve ter um grande cuidado para não confundir duas coisas: Aprendizado e Memorização. “Memorizar”, segundo o antropólogo e psicólogo Gilberto Gnoato, “a palavra decorar implica na repetição mecânica de uma palavra ou ação” e aprender é muito mais do que processos repetitivos, é analisar quais foram os resultados da aprendizagem, as condições que influenciaram nisso e o próprio processo do mesmo. Portanto, é de extrema importância que o professor que mediará este jogo em sala avalie os alunos focando no conhecimento e dúvidas do mesmo em relação à aprendizagem e não totalmente na memorização implícita que está no jogo.

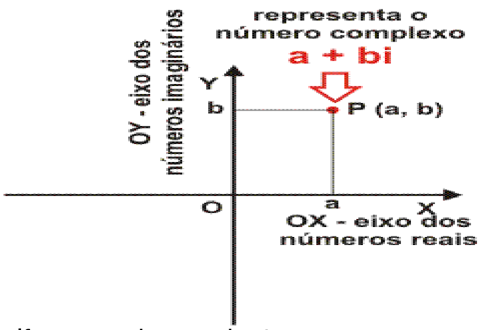
Resenha: Gabriel Henrique Parisoto, estudante de matemática da UFSC Blumenau.

Professor, é necessário que os alunos pratiquem bastante as quatro operações com números complexos. A adição e a multiplicação já saíram pela própria definição, como já mencionado anteriormente vão nascer do fato dos complexos serem um corpo, na estrutura definida. Mais ainda, de ser uma extensão dos reais, de modo que as propriedades válidas em IR são, mesmo que de forma intuitiva, levadas para C. Assim, a subtração entre dois complexos z e w deve ser vista como $z - w = z + (-w)$, em que – w é o oposto aditivo de z e sua forma retangular dada pelo produto de w por (-1). A divisão de complexos não deve ser neste momento ainda trabalhada porque necessita da definição de conjugado.

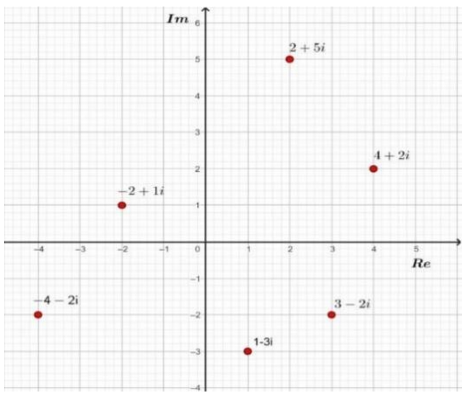
Definição de módulo e conjugado:

Com auxílio do geogebra, o professor se aproveitará da definição de complexos como pares ordenados de números reais, e transpor essa ideia para a representação geométrica de C. É bastante oportuno que o professor defina o eixo y como eixo imaginário, e o eixo x como eixo real e explicar aos alunos que apesar de parecer ser “a mesma coisa”, o plano complexo não é exatamente o IR², e que o termo correto é plano complexo. De toda forma, por conta de IR² e C serem isomorfos, todos os resultados feitos em C podem ser vistos a partir do que se conhece do plano xy na qual já estão habituados.

Assim, cada número complexo possui um ponto que o representa no plano complexo e essa correspondência é biunívoca, isto é, cada complexo possui um único ponto no plano C que o representa e cada ponto representa um único número complexo. Na representação em questão, dado o número complexo z = x+iy, o par ordenado que o representa, denominador de ponto P, e chamado de afixo de z, é o par (a, b).



Fonte: https://www.alfaconnection.pro.br 1

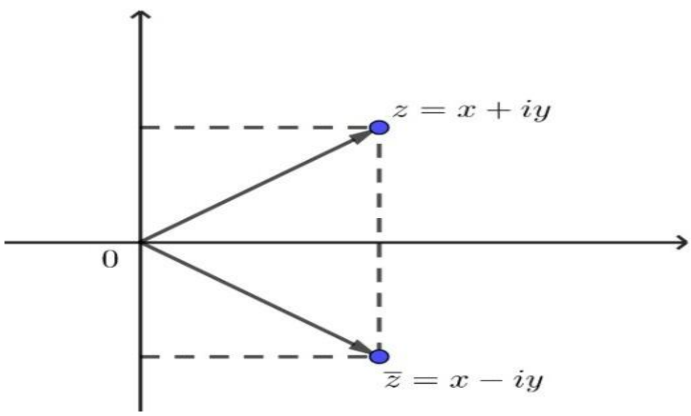


Fonte: O autor.

Nesse momento, o professor pode escolher um complexo no primeiro quadrante (de preferência), e explicar geometricamente o conceito de módulo. Cria um segmento orientado partindo da origem e com a outra extremidade no ponto P = (a, b). Solicite aos alunos o cálculo do tamanho desse segmento, por meio do teorema de Pitágoras. Eles devem chegar na solução $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Repita esse exercício para pelo menos um complexo em cada quadrante a fim dos alunos verificarem que a fórmula encontrada vale para todo complexo. Depois, definir módulo em cima dessa interpretação geométrica. Dado um z complexo com $z = a + bi$, defini-se o módulo de z, simbolicamente como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Agora, podemos levantar o seguinte questionamento aos alunos: O módulo de um complexo distinto de 0 é sempre positivo? Ou negativo?

Definição de conjugado: seja $z = x + iy$ complexo, o conjugado de z, simbolicamente dado por $\bar{z}$ é o complexo $z = x - iy$. Com o auxílio do Geogebra, representar os complexos $z = 3 + 4i$ e $w = 3 - 4i$. Note que w é conjugado de z.



Fonte: O autor.

Em seguida, o professor pode elaborar a seguinte atividade aos alunos: Construa z e $\bar{z}$ no plano complexo e responda qual a relação geométrica guardada entre z e $\bar{z}$.

Professor, as respostas dos alunos devem ser registradas e cada uma lida cuidadosamente. É bem possível que poucos respondam acertadamente, mas cada resposta deverá ser valorizada, pois com elas será possível ser diagnosticado o que ele domina e o que não domina em relação aos conceitos geométricos. No caso dessa pergunta, a resposta mais adequada será o fato de que os pontos que representam z e o seu conjugado são simétricos em relação ao eixo real. Ou seja, há uma relação de simetria.

De posse do conceito de conjugado, é possível agora trabalhar com a divisão de complexos na forma algébrica. Veja o seguinte exemplo.

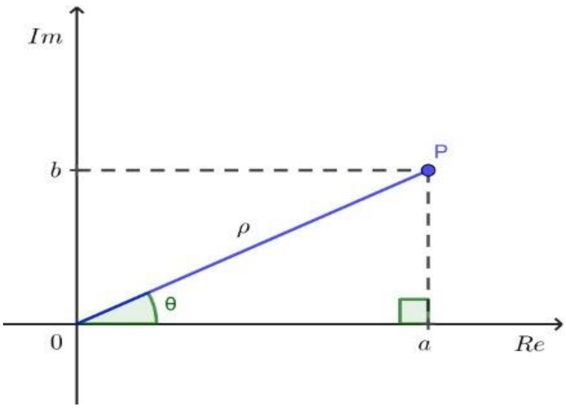
$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+6i-8}{9+12i-12i+16} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1}{5} + \frac{2i}{5}$$

Ou seja, multiplica-se tanto o numerador quanto o denominador pelo conjugado do denominador. Após alguns exercícios, peça aos alunos que concluam a seguinte identidade:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

4º MOMENTO:	

O principal objetivo dessa sequência é promover a aplicação dos complexos com a eletricidade envolvida na corrente alternada. Por isso, é de suma importância que o aluno consolide o aprendizado básico das operações que envolvem números complexos. Na parte que adentra a relação dos complexos com trigonometria, é fundamental que o estudante entenda a passagem da forma algébrica para a polar, e vice-versa. O uso do Geogebra se mantém igualmente valioso aqui, uma vez que o uso do círculo trigonométrico se fará necessário. Novamente, voltamos para a representação de um complexo pelo seu afixo P no plano. Definindo agora um novo parâmetro: o ângulo θ entre o segmento orientado, no sentido anti-horário, entre a semirreta positiva do eixo real e o segmento orientado OP. Conforme esquema abaixo.



Fonte: O autor.

Tomando o triângulo OPA, onde O é a origem do plano, P o afixo de Z, e A o afixo do número real a, peça aos alunos que definam que tipo de triângulo é o OPA em relação a classificação por ângulos. Após a resposta correta, indague-os

qual lado representa a hipotenusa e os lados dos catetos. Após isso, peça para que reflitam sobre como poderíamos calcular as medidas dos lados AO e AP.

Dessa discussão deve resultar que o segmento OA é o módulo da parte real, e o segmento AP é o módulo da parte imaginária, e que: OA = $|z|\cos\theta$ e AP = $|z|\ sen\ \theta$. Assim, um número z pode ser escrito na forma:

$$z = |z|(\cos\theta + i\ sen\ \theta).$$

Em que o ângulo θ, podendo ser dado em radianos ou graus, será batizado de argumento do número complexo z, variando no intervalo $[0, 2\pi[$; nesse caso, foi definido em radianos. A grande utilidade dos números complexos na forma polar é o cálculo do produto e da divisão serem mais simples, além do que a potenciação acaba também ficando bem simples.

Após o aluno conhecer a forma polar de número complexo, recomenda-se algum tipo de jogo matemático que explore o cálculo de ângulos para o argumento complexo. Ou então, usar a sugestão vista nessa dissertação, que mostra uma forma de calcular o argumento de um número complexo de acordo com o quadrante do seu afixo.

O próximo passo é, usando as identidades trigonométricas, provar o produto e a multiplicação com complexos. No caso do produto, o resultado na forma polar fica dado pelo produto dos módulos dos fatores o argumento pela soma dos argumentos dos fatores. Já em relação a divisão entre dois complexos na forma polar (o denominador não sendo nulo), o módulo fica dado pela divisão dos módulos dos dividendos e do divisor, e o argumento, pela diferença dos argumentos desses elementos. Por fim, solicite aos alunos refletirem como seria z^n na forma polar.

5º MOMENTO:	

Aplicação dos complexos na eletricidade

No planejamento para essa aplicação, é necessário um alinhamento do professor de matemática com o de física para saber o grau de envolvimento que os alunos já tem com circuitos elétricos. Caso eles não tenham visto, é possível fazer essa aplicação, bastando o professor de matemática definir alguns conceitos mínimos que envolvem essa teoria, podendo, inclusive, fazer o uso do nosso trabalho. Caso os alunos já tenham estudado circuitos elétricos, o uso dessa aplicação fica mais fácil de ser executado. Tanto em nosso trabalho quanto nesta sequência, fica proposto o estudo com circuitos elétricos de apenas uma malha, ou seja, uma fonte de tensão em série com um resistor, ou capacitor ou resistor. Circuitos maiores, com mais malhas, começam a exigir cálculos mais longos e mais teoria de física, e ao nosso ver, já seria um assunto complementar. O foco crucial aqui, é promover a aprendizagem do aluno na certeza de que os números complexos tem várias aplicabilidades e que na eletricidade é apenas uma delas.

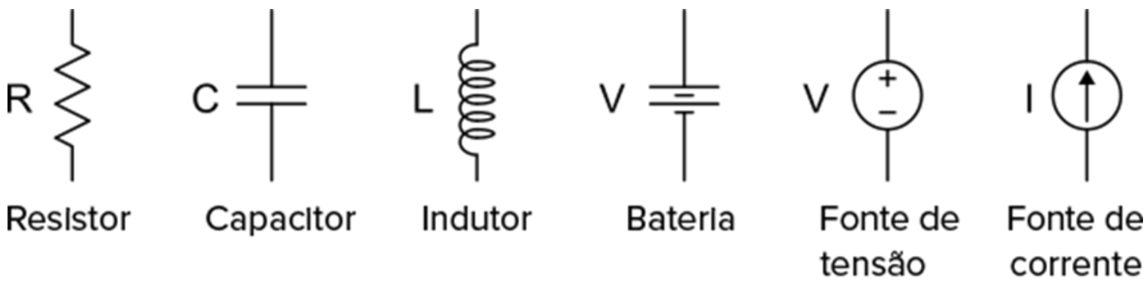
Visando o enriquecimento da aula, o professor pode trazer outras aplicações, em outras áreas. Para introduzir a aplicação, fica sugerida a leitura do seguinte texto sobre números complexos na engenharia elétrica, elabora pelo próprio autor desta sequência.

Leitura

Os engenheiros eletricistas usam os números complexos quase que o tempo todo. Isso porque, na eletricidade, a representação de sinais alternados por meio de números complexos torna a análise do circuito muito mais simples. Antes de entender como se dá essa aplicação, é importante que você entenda que basicamente existem duas formas de transmissão de energia elétrica, a saber: por corrente contínua e por corrente alternada. No início em que ambas as formas ainda estavam em fase de estudo, a forma alternada ganhou destaque por ser mais eficiente na transmissão a longas distâncias, e até hoje a preferência se mantem. Assim, energia elétrica que “caminha” por aquelas lindas torres de transmissão que visualizamos quando viajamos por nossas estradas, viaja de maneira senoidal, ou seja, alternada. Caso você já tenha estudado trigonometria, deve saber que as funções “seno” e “cosseno” são periódicas, com seus períodos se repetindo em ciclos; e que também ora suas imagens são positivas e ora suas imagens são negativas.

No estudo da corrente alternada, fontes de tensão que variam no tempo apresentam o seu comportamento modelado por funções trigonométricas desse tipo; o chamado “sinal de onda”. E não pense que os engenheiros escolhem essas funções simplesmente porque elas têm um comportamento alternado! Na matemática mais avançada, derivar e integral funções trigonométricas (como as mencionadas) geram também funções periódicas e isso facilita muito o trabalho deles.

Na prática, no exemplo que vamos dar, exibiremos um circuito elétrico simples, mas que se encontra excitado por uma fonte de tensão que varia no tempo, portanto seu valor depende do instante t considerado. Os engenheiros definem o conceito de Impedância, que a grosso modo, tem a mesma função da resistência: se opor ao fluxo de corrente elétrica. Mas no caso da impedância, a oposição ocorre em relação a corrente alternada. Cada um dos elementos, resistor, capacitor e indutor, cujos símbolos elétricos são mostrados na imagem a seguir, possui sua impedância dada, respectivamente, em termos da resistência, capacitância e indutância. Ressaltamos que a unidade de medida do capacitor é F (Faraday), do indutor é H (Henry) e do resistor, ohms (Ω). Esses valores se transformam em números complexos, só que a unidade imaginária não é mais i, pois pode-se haver confusão com o i da corrente elétrica. Assim, os engenheiros definem o número complexo foi feito, só que no lugar do i, ponham a letra j. Portanto, no universo da elétrica, um número complexo é escrito na forma a + bj.



Quando a fonte de tensão é senoidal, ela é escrita na forma $V_m \backslash \emptyset$, que representa um número complexo de módulo V_m e argumento θ (aqui dado em graus). A função que geralmente traduz a tensão em função do tempo tem a seguinte "cara" v(t) = $V_m \cos(\omega t + \emptyset)$, em que V_m representa a amplitude da fonte de tensão, ω é a chamada frequência angular e $\emptyset$ a fase. A fase pode ser entendida como uma "perturbação", provocando o deslocamento inicial de uma onda "puramente" senoidal. Quando se escreve essa função como $V_m \angle \emptyset$, diz-se que a tensão foi passada para a forma da frequência ou fasorial. Assim, cada outro elemento elétrico do circuito deve ter seu domínio passado para o fasorial. Sendo um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um indutor de indutância L, submetidos a um circuito onde a frequência angular da fonte é ω, na forma de impedância (Ω). Veja:

- Do resistor: **R** (não muda);
- do capacitor: $\frac{-j}{\omega C}$ Ω;
- do indutor: $j\omega L$.

Exemplo:

Um circuito elétrico com fonte CA dada por $v(t) = 120\cos(60t + 30°)$ V encontra em série com um resistor de 2 Ω e um indutor de 1 H. Determine a corrente que circula por esse circuito.

Resolução: A forma de fasor da tensão é **U** = $120\angle 30°$, do resistor é 2Ω e do indutor, $60j$ Ω. Como o resistor e o indutor estão em série, a impedância equivalente entre eles é $\boldsymbol{Z} =$ 2+60j. A corrente fica dada na seguinte forma (em fasor):

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\mathbf{120\ \angle 30°}}{\mathbf{2+60}\boldsymbol{j}}.$$

Tomando 2 + 60j, vamos determinar seu módulo: $\sqrt{2^2 + 60^2} = \sqrt{3604}$.

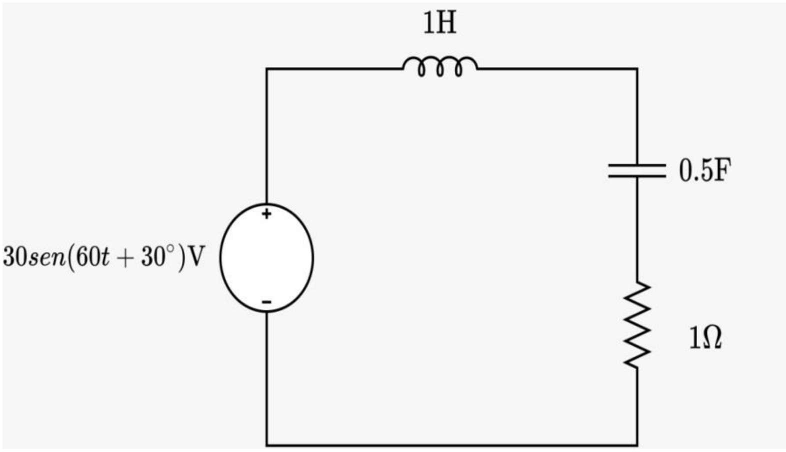
Tomando $\theta = arc\ tag\ \frac{60}{2} = \theta°$. Note que θ está no primeiro quadrante.

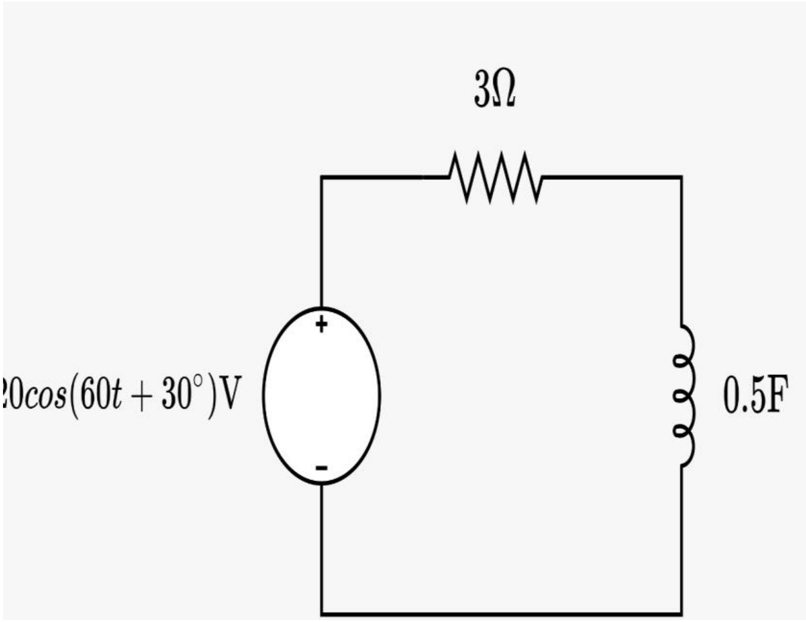
Temos que o módulo de **I** é $\frac{120}{\sqrt{3604}} = 2$ A e o seu argumento dado por 30° - $\theta°$. Com o uso de uma calculadora científica, temos que $\theta = 88{,}09°$. Logo, o argumento de **I** é - 58,09° ou 301,91°. Portanto, I na forma fasorial fica escrita como $\mathbf{I} = \mathbf{2\angle 301,91°}$ **A.** Em termos do tempo, teríamos que a corrente vale:

$$i(t) = 2\cos(60t + 301{,}91°).$$

Pós-leitura: Após a leitura, o professor deve solicitar aos alunos que falem ou escrevam sobre o que entenderam do texto. Em seguida mais exercícios devem ser resolvidos nessa direção, com fornecimento das impedâncias e solicitando o cálculo da corrente.

Exercícios: Determine a corrente elétrica que circula por cada um dos circuitos a seguir.





Sugestão de atividade: com auxílio do professor de física, promover atividades no laboratório da escola, com uso de aparelhos com multímetro, amperímetro, voltímetro, osciloscópio, dentre outros. Visando, principalmente, a aplicação dos números complexos no estudo da eletricidade.

INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO	RECURSOS
	• Listar os materiais diversos e espaços educativos utilizados na proposta da SD. • Geogebra • Calculadora científica • Alguns equipamentos elétricos.

DEVOLUTIVA DA COORDENAÇÃO PEDAGÓGICA	
______________________________ Assinatura do(a) Coordenador(a)	______________________________ Assinatura do(a) Professor(a)

Rio Branco – AC, ____ de __________ de 2022.

ANEXO 2: FORMULÁRIOS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGPROFMAT/UFAC)

Números Complexos

1) Caro professor(a), qual a sua opinião sobre a retirada do tema Números Complexos do currículo do Ensino Médio? *

A questão se resume; no que a retirada de qualquer assunto de matemática do ensino médio prejudica a formação do aluno que pretende ir para a universidade , principalmente para área de exatas.

Evidentemente que , no geral, quem faz as mudanças na estrutura curricular não tem uma compreensão das finalidades do domínio de certos conteúdos, muito embora se diga que se consultam especialistas. No caso específico a pergunta é: Para que servem os números complexos?

Como, geralmente, não se tem uma devida entendimento sobre o tema busca-se a minimização do conhecimento sem se preocupar com os prejuízos causados na formação do aluno naquele estágio do formação.

A continuar tal perspectiva poderemos estar , num futuro próximo, substituindo o conhecimento acadêmico por maquinas, as quais tem o seu valor como coadjuvante , porém nunca de substituir a capacidade humana.

Com estas breves considerações sou contra a retirada de qualquer assunto de matemática da estrutura curricular do ensino médio.

2) Com relação às disciplinas que você ministra que exigem conhecimentos prévios sobre números complexos, como vem sendo o desempenho dos alunos nos últimos anos? *

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Se faz necessário fazer uma abordagem preliminar sobre números complexos, que nem sempre cumpre o seu papel no entendimento desse assunto, para poder abordar os conteúdos a serem

Nome *

Aroldo Cardoso Campos

E-mail *

aroldo.campos@gmail.com

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGPROFMAT/UFAC)

Números Complexos

1) Caro professor(a), qual a sua opinião sobre a retirada do tema Números Complexos do currículo do Ensino Médio? *

A retirada configura retrocesso educacional na área de matemática. Uma breve introdução ao domínio dos números complexos, apresentando seu formato, representação gráfica e principais operações énecessário a qualquer aluno do ensino médio.

2) Com relação às disciplinas que você ministra que exigem conhecimentos prévios sobre números complexos, como vem sendo o desempenho dos alunos nos últimos anos? *

Devido aos fatos de lecionar disciplinas posicionadas ao final do curso de Bacharelado em Engenharia e do extenso uso de no álgebra com números complexos durante as disciplinas anteriores, no momentodo meu contato com os alunos, estes já sanaram as dificuldades em relação ao manuseio de números complexos, obtendo deste modo bons resultados nas minhas disciplinas.

Nome *

José Humberto Araújo Monteiro

E-mail *

humberto.monteiro@ufac.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGPROFMAT/UFAC)

Números Complexos

1) Caro professor(a), qual a sua opinião sobre a retirada do tema Números Complexos do currículo do Ensino Médio? *

Ao longo dos anos temos vivenciado um empobrecimento muito grande do currículo de Matemáticacom a retirada ou a minoração do aprofundamento de vários conteúdos. O estudo dos números complexos, sem dúvida, é uma delas. Vários são os fenômenos aos quais eles estão relacionados

O surgimento, a evolução e a compreensão das propriedades dos elementos dos conjuntos numéricos, ao longo da história da Humanidade, ocorre em função da necessidade de execução de algumas operações com os elementos dos conjuntos e vários são os fenômenos relacionados ao estudo do números complexos; a saber o estudo do fluxo dos fluidos nas análises aerodinâmicas, sua aplicação no estudo circuitos elétricos de corrente alternada ou ainda no estudo das propriedades energéticas dos átomos e das moléculas, além de sua aplicação na resolução de polinômios e equações algébricas.Assim, sua retirada do currículo do Ensino Médio, deixa uma grande lacuna na preparação dos estudantes que, em algum momento de suas formações acadêmicas, venham a necessitar destes conhecimentos.

2) Com relação às disciplinas que você ministra que exigem conhecimentos prévios sobre números complexos, como vem sendo o desempenho dos alunos nos últimos anos? *

O desempenho é sofrível, tendo em vista a necessidade do conhecimento específico sobre o comportamento, as propriedades e as operações relacionadas ao conjunto dos números complexos. Desse modo, ao fazer tal apresentação, o conteúdo posterior que deveria ser ministrado, fica comprometido em função do tempo empregado no resgate dos conhecimentos prévios que não foram

ministrados no momento oportuno.

Nome *

Mario Luiz de Oliveira

E-mail *

mario.oliveira@ufac.br