



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADOPROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT**

ADRIANA SALETE GALUPO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMOS

**CHAPECO
2021**

ADRIANA SALETE GALUPO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

**CHAPECÓ
2021**

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, km 02
CEP: 89801-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Galupo, Adriana Salete

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO / Adriana Salete Galupo. -- 2021.

101 f.

Orientador: DOUTOR Pedro Augusto Pereira Borges

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2021.

1. LOGARITMO. 2. CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS. 3. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 4. OBSTÁCULOS À APRENDIZAGEM. I. Borges, Pedro Augusto Pereira, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



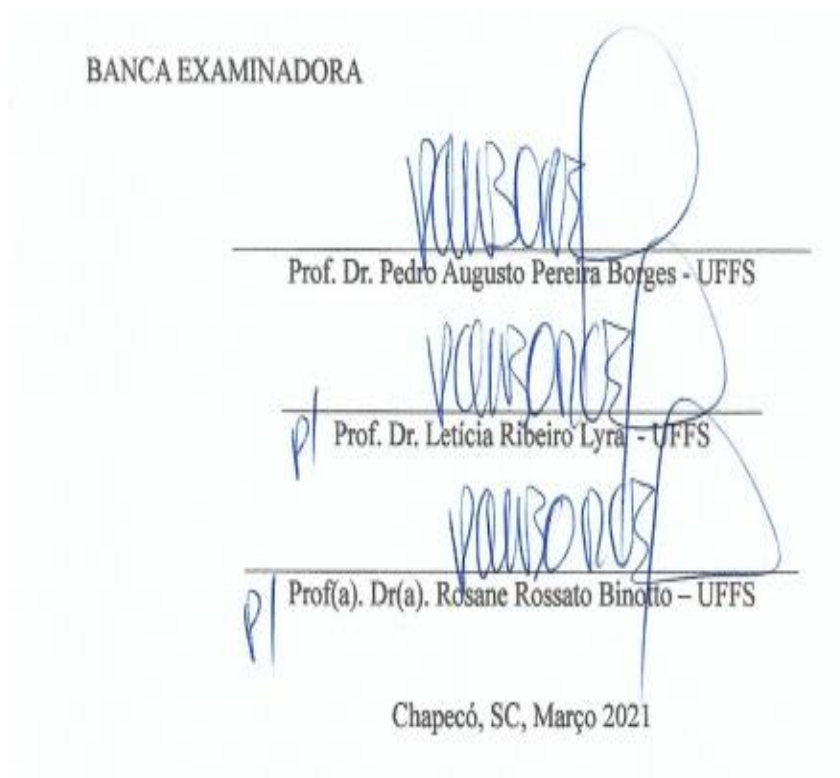
ADRIANA SALETE GALUPO

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges

Aprovado em: 23/02/2021



Dedico à memória de minha amada mãe, Nilve Galupo, minha grande incentivadora, por contemplar-me com seu amor incondicional, uma lembrança serena que sempre estará aqui no meu coração. Também dedico ao meu pai, Ângelo José Galupo, que não mediu esforços para lutar por minha educação.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus que iluminou o meu caminho em toda essa trajetória.

Ao Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, pela sua grande contribuição como orientador, pelas sugestões e pleno apoio como também pela paciência em todo o processo.

Aos amigos da turma do mestrado PROFMAT 2018, que me incentivaram nessa jornada, pela união que sempre tivemos e a fraternidade que construímos.

Aos professores que fizeram parte do projeto PROFMAT-UFFS pela dedicação, apoio e contribuições durante a realização das disciplinas e no exame de qualificação.

Aos alunos que participaram na aplicação do conteúdo deste trabalho.

E, finalmente, agradeço aos demais parentes, amigos e colegas de trabalho que me ajudaram direta ou indiretamente para a concretização deste sonho.

Os logaritmos foram criados como instrumentos para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados. Posteriormente verificou-se que a importância dos logaritmos na Matemática e nas Ciências em geral era bem maior do que se pensava. Com efeito, diversos fatos matemáticos, bem como vários fenômenos naturais e até mesmo sociais, podem ser expressos quantitativamente por meio dos logaritmos.

RESUMO

Os logaritmos ocupam lugar de destaque na história da matemática como algoritmo de cálculo e como função. Atualmente, são aplicados em diferentes áreas da ciência, por isso, têm importância fundamental na formação dos estudantes. Ensinar logaritmos, no entanto, tem sido um grande desafio, devido às dificuldades de aprendizagem. A implementação de atividades de ensino mecânicas, sem explorar o raciocínio dos estudantes, prioriza apenas a resolução de equações com uma quantidade excessiva de manipulações, em detrimento da conceituação, como também de aplicações. Nesse sentido, o problema dessa pesquisa é investigar como os alunos elaboram os significados do conceito e das propriedades de logaritmo e quais são os obstáculos de aprendizagem presentes nesse processo. Uma sequência de atividades foi elaborada e aplicada no modo on-line em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio. O conteúdo das manifestações escritas, na forma de arquivos digitais e as orais registradas em diário de bordo, foram analisados qualitativamente, mediante um quadro de categorias elaborado com base na Teoria da Aprendizagem Significativa e na Teoria dos Obstáculos à Aprendizagem de David Ausubel e Jean-Pierre Astolfi, respectivamente. Foram identificados obstáculos psicológicos, tais como problemas de atenção, percepção, concentração e epistemológicos, associados à compreensão do significado de subsunçores necessários ao conceito de logaritmo, tais como potenciação, álgebra do ensino fundamental, equações, função exponencial e a consequente dificuldade na interpretação de enunciados. A superação desses obstáculos ocorreu com a mediação da professora, em ações de reflexão sobre os registros escritos e falados, recuperando os significados através de organizadores prévios e com isso, qualificando os subsunçores, os quais viabilizaram a construção do conceito e das propriedades dos logaritmos.

Palavras-chave: Construção de conceitos. Logaritmo. Aprendizagem significativa. Obstáculos de aprendizagem.

ABSTRACT

Logarithms occupy a prominent place in the history of mathematics as a calculation algorithm and as a function, they are currently applied in different areas of science. Therefore, they are of fundamental importance in the training of students. Teaching logarithms, however, has been a great challenge, due to learning difficulties. The implementation of mechanical teaching activities, without exploring the students' reasoning, prioritize only solving equations with an excessive amount of manipulations, to the detriment of conceptualization, as well as applications. In this sense, the problem of this research was to investigate how students elaborate the meanings of the concept and properties of logarithm and what are the learning obstacles present in this process. A sequence of activities was developed and applied in online mode in a class of the first year of high school. The content of the written manifestations, in the form of digital files and the oral ones recorded in the logbook, were analyzed qualitatively, through a category chart elaborated based on the Theory of Meaningful Learning and the Theory of Obstacles to Learning by David Ausubel and Jean- Pierre Astolfi, respectively. Psychological obstacles were identified, such as problems of attention, perception, concentration and epistemological problems, associated with the understanding of the meaning of subunits necessary to the concept of logarithm, such as potentiation, elementary school algebra, equations, exponential function and the consequent difficulty in interpreting stated. The overcoming of these obstacles occurred with the mediation of the teacher, in actions of reflection on the written and spoken records, recovering the meanings through previous organizers and with that, qualifying the subunits, which, enabled the construction of the concept and the properties of the logarithms.

Keywords: Concept construction. Logarithm. Meaningful learning. Learning obstacles.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Logaritmos de base 2.....	22
Tabela 2. Tábua de logaritmos decimais.....	25

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Folha de rosto da edição de 1619 do Mirifici logarithmorum canonicis descriptio de Napier, que também contém o seu Constructio.....	24
Figura 2- Régua de cálculo.....	26
Figura 3- Aprendizagem mecânica x aprendizagem significativa.....	31
Figura 4- Tratamento do obstáculo de aprendizagem.....	45
Figura 5 – Resposta da questão: O que você acha de fazer contas com os seguintes números sem calculadora? $3276858 \times 1022487 =$ $6553645678 \div 128 =$	56
Figura 6 – Segunda atividade: completar a tabela com potências de 2.....	57
Figura 7 – Atividade 3: Operações de multiplicação e divisão com a tabela.....	59
Figura 8- Atividade 4: Resolução dos produtos utilizando o algoritmo proposto.....	60
Figura 9- Construção de um método para realizar divisões sem calculadora. (Atividade 5)....	61
Figura 10- Respostas sobre o método para realizar divisões sem calculadora. (Atividade 5)...	62
Figura 11- Representação na forma de potência. (Atividade 1).....	63
Figura 12- Definição de logaritmo. (Atividade 2).....	64
Figura 13-Prática da primeira definição de logaritmo. (Atividades 3 e 4).....	64
Figura 14-Discussão sobre as exceções dos valores da base da definição de logaritmo. (Atividade 4).....	65
Figura 15- Atividade 5: exemplos em que não é possível efetuar a logaritmização.....	66
Figura 16- Escrever os logaritmos usando a definição. (Atividade 6).....	67
Figura 17- Cálculo de logaritmos usando a definição e indução de propriedades.....	68
Figura 18- Respostas do cálculo dos logaritmos usando a definição.....	70
Figura 19- Sistematização das propriedades logarítmicas. (Atividade 7).....	71
Figura 20- Resolução das atividades sobre propriedades operatórias dos logaritmos. (Atividade 1).....	72
Figura 21- Propriedades dos logaritmos. (Atividade 3).....	73
Figura 22- Resolução das atividades 2 e 3.....	74
Figura 23- Resolução da atividade 1.....	75
Figura 24- Resolução das atividades de aplicação dos logaritmos. (Atividade 2).....	76
Figura 25- Pesquisa de uma aluna sobre aplicação dos logaritmos. (Atividade 2).....	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Esquema sobre o princípio da assimilação segundo Ausubel.....	32
Quadro 2. Categorias de análise.....	54

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
1.1 OBJETIVOS E PROBLEMA DE PESQUISA.....	11
1.1.1 Objetivo geral.....	12
1.1.2 Objetivos específicos.....	13
1.1.3 Problema da pesquisa.....	13
1.2 JUSTIFICATIVA.....	13
1.3 A COMPOSIÇÃO DO TRABALHO.....	14
2. A PESQUISA SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS.....	16
3. A CONSTRUÇÃO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS.....	21
3.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO LOGARITMO.....	21
3.2 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL.....	29
3.3 OBSTÁCULOS À APRENDIZAGEM POR ASTOLFI.....	40
4. METODOLOGIA DA PESQUISA.....	47
4.1 REFERÊNCIAS DA PESQUISA E COLETA DE DADOS.....	47
4.2 O CONTEXTO E OS PARTICIPANTES	49
4.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES.....	50
4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS	51
5. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DE ENSINO E ANÁLISE DOS DADOS.....	56
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	79
REFERÊNCIAS.....	83
APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	89
APÊNDICE B- ATIVIDADES- MOMENTO 1.....	91
APÊNDICE C- ATIVIDADES- MOMENTO 2.....	93
APÊNDICE D- ATIVIDADES- MOMENTO 3.....	97
APÊNDICE E – ATIVIDADES- MOMENTO 4.....	99

1. INTRODUÇÃO

Os logaritmos têm importância fundamental no desenvolvimento dos estudos de matemática e várias aplicações em áreas como biologia, física, química, engenharia e outras. Particularmente, fazem parte da composição de conceitos tais como: problemas relacionados à meia-vida, matemática financeira, escala do PIB (utilizada na composição do IDH), escala Richter (terremotos), escala de magnitude estelar para a luminosidade de estrelas e medição de níveis sonoros.

Poucas vezes na história da ciência uma nova ideia foi recebida com tanto entusiasmo e aceitação como a dos logaritmos. Sua criação se deu pela necessidade de simplificar operações aritméticas. Revelou-se uma poderosa ferramenta, facilitando o trabalho daqueles que dependiam de cálculos longos e trabalhosos, contribuindo de maneira decisiva para o desenvolvimento de muitas áreas como a astronomia, a navegação e a engenharia. Hoje, porém com a tecnologia das calculadoras e computadores, os logaritmos perderam esta utilidade de facilitador nas operações aritméticas.

Embora o ensino de logaritmo como instrumento de cálculo não seja mais utilizado na escola, a função logarítmica e a função exponencial permanecerão sempre como uma parte importante do ensino da Matemática, pois as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza e da análise (EVES, 2008, p. 347). Muitos fenômenos que conhecemos hoje podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo logaritmo, tais como: o decaimento radioativo, escalas de mensuração de um terremoto, o resfriamento de um corpo, o cálculo de aplicações financeiras, do PH de certas substâncias, entre outras, que evidenciam a grande importância desse tema para a compreensão do mundo em que vivemos.

Porém, ensinar esse assunto mostra-se um grande desafio, pois se encontra diversos problemas no seu ensino e na aprendizagem. Dentre eles, destaca-se a abordagem mecânica sem explorar o raciocínio dos alunos, priorizando apenas a resolução de equações com uma quantidade excessiva de manipulações, em detrimento da conceituação, como também aplicações limitadas ou fora do contexto real.

Assim, coloca-se como uma hipótese plausível, dar sentido aos conceitos relacionados aos logaritmos, através de propostas de ensino que possam promover uma aprendizagem significativa, fazendo com que o aluno seja protagonista da sua aquisição de conhecimento sendo capaz de compreender os conceitos, propriedades e suas aplicações. Dessa forma,

valoriza-se o pensamento construtivo, em lugar de conceitos prontos e simples aplicações de fórmulas.

A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel contribui nesse sentido de duas maneiras: primeira, porque concebe a aprendizagem tendo como cenário o ambiente escolar, com suas limitações e objetivos bem conhecidos; e segunda, porque ao entender a aprendizagem como conexões entre conceitos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo (subsunçores) e novos, abrem possibilidades de estratégias de ensino que valorizem a significação conceitual.

O conceito de logaritmo, por sua vez, requer uma série de outros conceitos (conjuntos numéricos, potência, base, expoente, progressões aritméticas e geométricas) e sua definição emprega símbolos e conexões matemáticas não elementares, o que, de certa forma, explica o recurso do ensino por memorização de algoritmos, desprovido de significados. A busca desses na história da matemática pode ser uma alternativa para dar sentido lógico a cada termo e processo no estudo dos logaritmos.

Admitida a complexidade do conceito, é esperado que ocorram dificuldades de aprendizagem, o que é amplamente conhecido na prática escolar e na literatura sobre o tema. Entender o que são obstáculos e como podem ser superados é fundamental para planejar o ensino. Nesse sentido, a didática de Jean-Pierre Astolfi constituiu uma base deste trabalho.

1.1 OBJETIVOS E PROBLEMA DE PESQUISA

Os objetivos e o problema reúnem as intencionalidades de contribuição do trabalho para o aperfeiçoamento do ensino de logaritmo praticado nas escolas, assim como para o acervo da pesquisa do tema na comunidade de Educação Matemática.

1.1.1 Objetivo geral

A presente investigação se organiza a partir do objetivo geral de analisar o processo de construção do conceito de logaritmo e suas propriedades, tendo em vista o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, buscando desenvolver abordagens de forma que se alcance uma aprendizagem significativa.

1.1.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral, propõem-se como objetivos específicos:

- Verificar os fundamentos teóricos da construção e aprendizagem de conceitos nas concepções da aprendizagem significativa de Ausubel e dos obstáculos de aprendizagem de Astolfi.
- Examinar o desenvolvimento histórico do conceito de logaritmos, visando a utilização de questões e motivações da sua criação na proposta de atividades de ensino.
- Propor uma sequência de atividades com investigações de problemas e procedimentos que levem os alunos à construção do conceito e com isso a aprendizagem de logaritmo.
- Aplicar a sequência de atividades com o propósito de auxiliar os estudantes a: compreender o conceito de logaritmo de um número e calcular alguns logaritmos; verificar as condições de existência e suas propriedades; consolidar o tema logaritmo através de situações-problema e resolvê-las fazendo uso da nova ferramenta.
- Analisar os resultados da aplicação das atividades utilizando: as estratégias pedagógicas na teoria de Ausubel (diferenciação progressiva, reconciliação integradora, organização sequencial e consolidação); bem como as três etapas de Astolfi do processo didático (identificação, fissuração e superação).

1.1.3 Problema da pesquisa

Diante do exposto, em relação à necessidade de se refletir sobre a elaboração conceitual dos logaritmos, nesta dissertação, tem-se o seguinte problema de pesquisa: Como os estudantes elaboram os significados do conceito e das propriedades de logaritmo e quais são os obstáculos de aprendizagem presentes nesse processo?

1.2 JUSTIFICATIVA

Existem deficiências na formação do conceito de logaritmo e, conseqüentemente na aprendizagem desse assunto. Diversas pesquisas e trabalhos subsidiam tal afirmação como em Ramos (2015), Silva (2016), Vidigal (2014), Wendland (2019), entre outros. Nem sempre a

proposta de ensino empregada alcança os estudantes da maneira esperada, de forma que obtenham apreensão do conteúdo. Muitas vezes, o primeiro contato com os logaritmos se dá por meio de uma aula expositiva seguida de exercícios copiados do quadro ou do livro didático. Dessa forma, é importante apresentar esse assunto ao aluno num contexto que proporcione um real sentido ao que se está sendo estudado.

Com isso, pesquisas como as de Ferreira e Bisognin (2007), Silva (2016), Lima (2008), Queiroz (2013), Quintas (2013), sobre o ensino de logaritmos que se diferenciam do método tradicional, apresentam resultados expressivos e mostram uma melhora no processo de ensino e aprendizagem. Sob essa perspectiva se faz necessário repensar a abordagem desse conteúdo, de modo que, a compreensão do conceito em si seja favorecida e a utilidade de suas aplicações seja evidenciada.

Além das dificuldades dos estudantes e dos problemas no ensino causados pelas metodologias adotadas, outro fator determinante na escolha do tema de pesquisa foi a importância dos logaritmos para o processo de formação do estudante. Segundo as investigações de Rossi (2010) e Vidigal (2014), os logaritmos são um grande elo da matemática com diversas disciplinas que para alguns estudantes podem parecer desconexas da matemática.

Diante destas inquietações verifica-se que a prática pedagógica no que diz respeito ao ensino de logaritmos pode ser repensada. Restringir-se a técnicas de memorização, com a aplicação de diversos exercícios propostos em grande parte nos livros didáticos, faz com que os estudantes apresentem deficiências na construção dos conceitos e na aquisição dos conteúdos matemáticos.

1.3. A COMPOSIÇÃO DO TRABALHO

O texto deste trabalho está organizado em seis capítulos. No capítulo 2 há uma revisão de literatura sobre o ensino de logaritmos. Realizaram-se estudos, com foco nos trabalhos que possuem semelhanças com o tema proposto, com a intenção de contribuir para a reflexão sobre o processo de elaboração de conceitos matemáticos relacionados a logaritmo. Apresentam-se, assim, artigos e dissertações com suas possíveis contribuições para esta investigação.

O capítulo 3 refere-se ao embasamento teórico do conceito de logaritmo e das concepções de ensino e aprendizagem adotadas na pesquisa. Um breve histórico dos

logaritmos é apresentado nomeando seus principais precursores, a ideia fundamental dos logaritmos, a importância da descoberta como uma ferramenta facilitadora de cálculos exaustivos, e a sua aplicabilidade nos dias atuais. No mesmo capítulo são apresentadas as concepções de David Paul Ausubel sobre aprendizagem significativa. Argumenta-se sobre a importância da formação de conceitos e suas relações com ensino e aprendizagem. Por fim, é abordado o tema obstáculos de aprendizagem segundo o pesquisador francês Jean-Pierre Astolfi. Este sugere que os obstáculos servem como ponto de apoio das situações didáticas e sua transposição tem o sentido de superá-los.

No capítulo 4 é traçada a construção metodológica da pesquisa, que se desenvolveu como um estudo qualitativo. A metodologia de pesquisa é constituída de quatro seções: a primeira traz as referências da pesquisa e coleta de dados, a segunda o contexto e os participantes, a terceira descrição das atividades e a última os procedimentos de análise de dados.

O resultado da investigação e a análise das informações produzidas fazem parte do capítulo 5.

Por fim, no capítulo 6 são destacadas as conclusões deste estudo levando em consideração os objetivos, a análise e a discussão dos resultados.

2. A PESQUISA SOBRE O ENSINO DE LOGARITMOS

O tema logaritmo tem sido pesquisado sob diferentes perspectivas tais como: propostas de ensino com a criação e desenvolvimento de atividades; abordagem em livros didáticos; situações de aprendizagem nas quais os conceitos foram elaborados pelos estudantes com a construção de materiais e investigações que privilegiaram a história da matemática.

Com relação às propostas e sobre a abordagem nos livros didáticos destacam-se os trabalhos de Lima (2008), Queiroz (2013), Rossi (2010), Quintas (2013). O artigo de Lima (2008) apresentou alguns itens que foram parte de sua dissertação de mestrado. O tema funções logarítmicas foi desenvolvido por três professores e suas respectivas turmas de alunos com o acompanhamento e observação do pesquisador, e teve como objetivo analisar quais os aspectos didáticos considerados pelo professor ao abordar o tema logaritmo, como poderiam ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem que explorassem contextos do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática, e que contemplassem uma trajetória construtivista visando um melhor caminho para a aprendizagem.

A pesquisa de Queiroz (2013) apresentou um recorte sobre como o tópico de logaritmos está inserido em alguns livros didáticos. A análise foi realizada a partir da reflexão sobre a resolução de problemas com eixo articulador do ensino da matemática. Esse estudo teve o propósito de revelar qual a abordagem está sendo dada ao ensino médio e, se está em consonância com os atuais paradigmas do ensino de matemática. O pesquisador mostrou que, nos exemplares indicados, os autores apresentavam problemas na abordagem do conteúdo, com uma apresentação formalista clássica. As atuais propostas para este ensino propõem abordagens contextualizadas, fundamentadas na resolução de problemas, como um meio de superar os métodos tradicionais que focam exercícios repetitivos e sem significados. A abordagem dos logaritmos fundamentada nessas propostas ainda não se concretizou nos exemplares pesquisados. Tal fato, pode se constituir num obstáculo à aprendizagem de uma ciência que tem a resolução de problemas como o elemento responsável pelo desenvolvimento de suas ideias.

Na dissertação de Rossi (2010) a finalidade foi descrever o trabalho realizado na elaboração de material didático que tornasse o ensino de logaritmos mais significativo para os estudantes do Ensino Médio. Para isso foi desenvolvida uma sequência didática com o

objetivo de facilitar a construção do conceito de logaritmo e de função logarítmica, incluindo formas de representação, estudos de propriedades e aplicações a fenômenos abordados por outras ciências. Para organizar essa pesquisa foram utilizados os princípios da Engenharia Didática, mais especificamente na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau. Para este, as situações didáticas devem produzir modificações no comportamento dos estudantes pela aquisição dos conhecimentos e de uma aprendizagem significativa através do meio que deve ser criado e organizado pelo professor. A sequência foi aplicada para 42 estudantes de duas turmas de primeira série do Ensino Médio, em uma escola da cidade de Araraquara, SP. A autora considera que os objetivos foram alcançados, pois as atividades foram desenvolvidas com sucesso e a análise a posteriori mostrou que a sequência aplicada contribuiu para o aprendizado dos estudantes.

O trabalho de Quintas (2013) apresentou a descrição de uma atividade experimental com a finalidade de levar o estudante a vivenciar a prática de cientistas em laboratório simulando o fenômeno da avalanche com materiais de fácil acesso. Buscou no conceito de logaritmo uma ferramenta para ajustar a formalização do modelo matemático que descreve o evento, aliada a estruturação da unidade curricular de ensino com base na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. A pesquisa foi realizada numa escola pública do Estado do Amapá com o objetivo de tornar mais eficaz o ensino da função logarítmica. A prática propôs modelar matematicamente avalanches provocadas por materiais simples, como milho de pipoca e feijão em um recipiente qualquer, aplicando logaritmo aos dados coletados para analisar a função que modela o fenômeno e até fazer algumas previsões. Consistiu em um experimento potencialmente interessante para os estudantes, pois possibilitou aos mesmos encontrarem uma situação natural onde o logaritmo tem utilidade, além do fato de que as avalanches provocaram sentimentos de fascínio e medo devido sua relação com verdadeiras tragédias, como os desmoronamentos de morros e encostas que são presenciados com tanta frequência no Brasil nos períodos de chuva intensa. A atividade provocou nos estudantes a motivação pelo estudo do conteúdo e serviu de objeto representacional da aprendizagem significativa.

A seguir, são caracterizadas as pesquisas que trataram do conceito de logaritmo ou da construção desse conceito utilizando história da matemática, com ênfase nas investigações de Ferreira e Bisognin (2007), Silva (2016), Martins, Pereira e Fonseca (2016), Cergoli (2017), Wendland (2019), Vidigal (2014).

O trabalho de Ferreira e Bisognin (2007) descreveu os resultados de uma pesquisa que teve como propósito verificar a eficácia da utilização de uma sequência didática, para o estudo

de logaritmos, partindo de problemas relacionados com o cotidiano dos estudantes e com o propósito de auxiliá-los a construir seus próprios conhecimentos. Utilizou-se a teoria das situações didáticas de Brousseau. Essa teoria preocupa-se com o ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático. Nessa pesquisa, priorizaram-se as investigações que visavam à análise dos processos de aprendizagem do conceito de logaritmo. Dessa forma, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito, foram propostas alternativas para minimizar tais dificuldades, e desenvolvida uma sequência didática sobre este conteúdo, aplicando-a em sala de aula.

A pesquisa de Silva (2016) propôs investigar as produções conceituais dos alunos em um ambiente investigativo. Para o desenvolvimento do cenário de investigação a autora se apoiou no Experimento de Design. A partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, buscou construir o entendimento do que são os logaritmos e também analisar de que forma seu ensino é abordado em dissertações, livros de formação de professores e livros didáticos. Nas obras analisadas os conceitos foram abordados de forma linear e estanque. Nesse sentido, se deu o trinômio: definição, exemplo e exercício. Isto é, os exercícios propostos ao final da apresentação da definição e de alguns exemplos, numa prática cuja resposta é única para a qual o aluno precisa percorrer um caminho já conhecido, o da repetição. Assim, a pesquisadora buscou elaborar um conjunto de tarefas para a introdução do conceito de logaritmos como operações entre expoentes que estimulasse os alunos a empreender e a escrever sua busca por regularidades, em uma perspectiva investigativa, regularidades estas que formaram os fundamentos do objeto matemático em foco e a partir da vivência deste conjunto catalogaram a produção de significados destes sujeitos.

O artigo de Martins, Pereira e Fonseca (2016) apresentou o ensino de logaritmo por meio da construção da Régua de Cálculo, instrumento utilizado no século XVII e fundamental para a redução de cálculos astronômicos e matemáticos extensos. O estudo foi direcionado para a formação inicial e continuada de professores de Matemática, por meio de cursos de extensão universitária. Segundo os autores a Régua de Cálculo como um elemento mediador tanto no ensino, como na aprendizagem da Matemática para alunos do Ensino Médio, possibilita a aplicação de conteúdos matemáticos que envolvem logaritmo. É composta por diversas escalas logarítmicas, utilizadas para efetuar multiplicações, divisões, potenciações e radiciações. Elas são construídas aplicando os Logaritmos para dividir de forma proporcional uma determinada medida, de modo que permita à aplicação das propriedades e dessa forma a realização das operações desejadas. Do ponto de vista desses futuros professores, a ideia da

inserção desse recurso em sala, é algo motivador para o aluno, pois envolve o uso de material concreto. Na medida em que o professor desenvolve a construção física, a construção matemática e a aplicação proporcionam a inclusão de diversos conceitos matemáticos que podem ser facilmente inseridos em sala. Poucas foram as desvantagens citadas pelos alunos do curso. Dentre elas, eles relataram a imprecisão da confecção da escala na régua, isto é, pode ocasionar erros de marcação e o tamanho das régua.

O trabalho de Cergoli (2017) apresentou duas propostas de sequências didáticas para o ensino de logaritmo. Uma delas foi destinada ao aperfeiçoamento de professores de Matemática e a outra, para estudantes do Ensino Médio. Estas foram desenvolvidas com base em pesquisas realizadas sobre o processo de investigação matemática por João Pedro da Ponte. O qual mostra que no processo investigativo o aluno é colocado diante de alguns desafios, sendo provocado a reconhecer padrões, transitar entre diferentes formas de representação de modo a ter um aprendizado sólido e eficaz. Tais investigações são coordenadas e supervisionadas pelo professor, cujo papel é fundamental no processo de construção do conhecimento. As atividades para os professores foram aplicadas no Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, USP Já para os alunos foram aplicadas em uma escola da rede estadual situada no município de São Paulo, SP. As propostas didáticas tiveram como ponto de partida o resgate das ideias originais da criação do conceito de logaritmo por meio da observação das propriedades comuns a várias tabelas, cada uma contendo uma progressão geométrica ao lado de uma progressão aritmética. Tais propriedades caracterizam o que virá a ser definido como logaritmo. A introdução ao conceito de logaritmo que diferente da usual, que se baseia na solução de uma equação exponencial, fez com que os participantes se propusessem a ensinar e aprender o assunto de forma diferenciada, privilegiando a investigação matemática.

A pesquisa de Wendland (2019) buscou incentivar a utilização da História da Matemática como uma ferramenta para os processos de ensino e aprendizagem de logaritmo. Com esse objetivo construiu-se um livro que contemplasse essa abordagem diferenciada. Foram realizadas análises em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Santa Catarina, livros didáticos, nos quais verificou-se a (in)existência da apresentação da relação do tema logaritmo com a História da Matemática, e em avaliações, como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares da região de Joinville, SC. Após explorar o assunto logaritmo, foi elaborado um embasamento teórico sobre História da Matemática e realizada pesquisas sobre materiais paradidáticos,

particularmente os de Matemática. Por fim, foi desenvolvido um livro paradidático, que introduz o tema logaritmo utilizando tópicos de História da Matemática, demonstrações e propostas de exercícios.

A dissertação de Vidigal (2014) propôs analisar a utilização de uma sequência de atividades que incentivasse a investigação matemática e contribuísse para a ressignificação do conceito de logaritmo bem como para a compreensão de algumas aplicações por parte dos estudantes. O autor apontou que muitas das dificuldades apresentadas nesse conteúdo estão relacionadas a não aquisição de habilidades prévias como, por exemplo: dificuldades com potenciações; a dificuldade e/ou defasagem no estudo da função exponencial, dúvidas referentes ao conceito de operações inversas e defasagem de conteúdos da álgebra do Ensino Fundamental. Dessa forma, a pesquisa realizada teve a intenção de contribuir para a aprendizagem de logaritmo, tendo como foco a resolução de problemas com o apoio das ideias do matemático George Polya. A estratégia de trabalho em dupla, baseada na proposta de investigação matemática de Ponte, mostrou-se um facilitador de aprendizagem, permitindo ao aluno que ao revisar um conteúdo já estudado, obtivesse uma melhor compreensão do mesmo. Neste trabalho, foram analisadas as produções de doze duplas de alunos da disciplina de Cálculo I de diversos cursos de engenharia de uma instituição de ensino superior de Belo Horizonte, MG. O produto final é um caderno com uma sequência de seis atividades que visa proporcionar ao aluno a reconstrução do conceito de logaritmo de forma interdisciplinar, com foco nas principais propriedades dos logaritmos a serem utilizadas no decorrer de um curso de engenharia, bem como na utilização da calculadora para o cálculo de logaritmos.

Após a leitura e reflexão de todos os trabalhos citados neste capítulo, percebe-se que as pesquisas sobre o ensino de conteúdos matemáticos que se diferenciaram do método tradicional, apresentaram resultados expressivos e demonstraram uma melhora no desenvolvimento do ensino e aprendizagem.

Diversos estudos discutiram os processos de ensino, no entanto poucos trataram da construção de conceitos. Diante disso, busca-se neste trabalho analisar a construção do conceito de logaritmo, empregando as teorias da aprendizagem significativa de Ausubel e dos obstáculos de aprendizagem por Astolfi. Compreende-se que a presente pesquisa pode ser instrumento de apoio para os métodos de ensino no sentido de promover a otimização do aprendizado do estudante.

3. A CONSTRUÇÃO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos contemplados no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente é realizado um breve histórico sobre logaritmo. Em seguida, são apresentadas as concepções de David Paul Ausubel sobre aprendizagem significativa, uma caracterização sobre a construção de conceitos. Por fim, é abordado o tema obstáculos de aprendizagem segundo o pesquisador francês Jean-Pierre Astolfi.

3.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO LOGARITMO

O estudo histórico da criação de um conceito é importante, pois proporciona uma visão das dificuldades encontradas na época para sua construção. Com o estudo dos problemas vividos pelos matemáticos do passado, tem-se a possibilidade de obter algumas explicações a respeito das dificuldades dos alunos nos tempos atuais.

A criação dos logaritmos foi considerada um dos maiores inventos da Matemática, devido a sua importância na simplificação dos cálculos.

Muitos dos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. (EVES, 2011, p.341)

A palavra *Logarithmos* tem origem grega, *Lógos* (razão) e *Arithmós* (número). O conceito de logaritmo foi apresentado, pelo matemático escocês John Napier (1550-1617), em princípios do século XVII. O símbolo “log” é atribuído ao astrônomo Johannes Kepler (1571 – 1630). A ideia essencial de logaritmo, no entanto, é anterior a essa época.

De acordo com Boyer (1974, p.228) Napier trabalhou durante 20 anos na invenção dos logaritmos antes de publicar seus resultados. Ele pensava em sequência de potências onde as diferenças dos índices correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências como as que foram publicadas no trabalho de Stifel, cinquenta anos antes, e nas obras de Arquimedes.

Nos estudos dos números racionais, Stifel enuncia que para o produto de quaisquer dois termos da progressão geométrica $1, q, q^2, \dots$ o resultado será o mesmo que a soma dos expoentes correspondentes. Assim, tem-se a propriedade $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$. Analogamente, ao dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair os expoentes correspondentes. ... Dessa forma, Stifel verificou que cada termo da progressão é uma potência de razão comum q e que os expoentes formam uma progressão aritmética. Portanto, relacionou progressões geométricas e aritméticas, prenunciando a invenção dos logaritmos. (Wendland, 2019, p. 22)

Os estudos de Napier tinham o propósito de transformar operações complicadas em operações simples, que facilitassem os cálculos imensos, que eram feitos para construir as tábuas trigonométricas para a navegação e astronomia. “Sua concepção de *Logarithmos* era baseada em uma comparação entre dois pontos em movimento, um dos quais gera uma progressão aritmética e o outro, uma geométrica.” (OLIVEIRA, 2005, p. 31)

O objetivo era escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (posteriormente chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Além disso, elevar um número a enésima potência seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, ou seja, multiplicá-lo por n e, encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas, ou seja, a divisão por n . Assim as multiplicações ficariam reduzidas às somas; as divisões às subtrações; as potências às multiplicações e as raízes às divisões, facilitando muito as computações numéricas. (Ramos, 2015, p.18)

Segundo Sampaio (2010, p.01) o que Napier chamava de tábua de logaritmos era uma tabela de duas linhas, colocando em correspondência os termos de uma progressão geométrica com os de uma progressão aritmética. Na tabela a seguir, é exposto um exemplo simples de uma tábua de logaritmos.

Tabela 1. Logaritmos de base

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Fonte: SAMPAIO, 2010, p.01

Para multiplicar, por exemplo, 256 por 64, deve-se procurar na tabela 1 o expoente de 256 que é 8 e o expoente de 64 que é 6. Somando-se os expoentes: $8 + 6 = 14$ e localiza-se o expoente 14 na tabela 1 que corresponde a 16384. Logo $256 \cdot 64 = 16384$. Analogamente, subtraem-se os expoentes para resolver a divisão de 256 por 64. Encontra-se $8 - 6 = 2$ e na

tabela, o expoente 2 é 4, assim, $256 \div 64 = 4$. Para calcular potências, por exemplo, 4^5 como $4 = 2^2$, multiplica-se os expoentes 2 e 5, obtendo-se $4^5 = 2^{10}$ que com o auxílio da tabela tem-se 1024.

Essa proposta sobre a comparação entre duas progressões se caracteriza na gênese conceitual dos logaritmos, pois foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII. Inicialmente essa ideia é um dos meios mais adequados para entender o conceito de logaritmo e suas condições de existência. (Soares, 2011, p. 73)

Porém, esse método só teria utilidade prática se pudesse ser usado também com frações. E isso pode ser feito de duas maneiras: usando expoentes fracionários ou escolhendo como base um número suficientemente pequeno, de modo que suas potências cresçam bem lentamente. Como naquela época os expoentes fracionários não eram inteiramente conhecidos, Napier ficou anos decidindo que número utilizar para criar sua tabela (Ramos, 2015, p.19)

Pensando também na necessidade dos astrônomos, que manipulavam com frequência valores de senos e cossenos, que variam entre 0 e 1, ele propôs um número bem próximo de 1 para servir de base da potência nessa tabela, a saber $1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$. Napier usou ainda a multiplicação por 10^7 em cada potência para evitar decimais, escrevendo então: $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ onde L é o logaritmo do número N. Observe que Napier não desenvolveu o conceito de base de um sistema de logaritmos. Ele apenas fixa uma base com a qual trabalhar. (LOURENÇO, 2013, p.15).

Segundo Eves (2011, p.345) em 1614 Napier publicou sua abordagem sobre logaritmo num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). “Tendo completado sua tarefa monumental, restava a Napier batizar sua criação. A princípio ele chamou o expoente de cada potência de “número artificial”, mas depois se decidiu pelo termo logaritmo, a palavra significando “número proporcional”. (MAOR, 2006, p.22).

O trabalho de Napier teve sucesso imediato e amplo. No ano seguinte à sua publicação, Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, foi ao encontro de Napier para dar reconhecimento ao inventor dos logaritmos.

Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10

fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal. (EVES, 2011, p.345).

Napier morreu em 1617, por isso coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns em que publicou trabalhos calculando os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, com catorze casas decimais. A obra *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), Figura 1, foi publicada postumamente por Robert, filho de Napier, em 1619.

Figura 1. Folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, que também contém o seu *Constructio*.



Raramente, na história da ciência, uma nova idéia foi recebida de modo mais entusiástico. O reconhecimento universal caiu sobre seu inventor e a invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda a Europa e até mesmo da distante China. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos foi o astrônomo Johannes Kepler, que os utilizou com grande sucesso em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias. (MAOR, 2006, p.25)

De acordo com Boyer (1974, p. 230), após a publicação de seu livro *Arithmética Logarithmica*, o trabalho de Briggs podia ser realizado exatamente como hoje, pois nas suas tabelas, todas as leis usuais dos logaritmos se aplicavam. Nessa mesma obra, aparecem as palavras “característica” e “mantissa”, necessárias para o uso das tábuas (tabelas) de logaritmos. “Briggs introduziu a palavra mantissa, que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente “adição” ou “contrapeso” e que, no século XVIII, passou a significar “apêndice”. O termo característica também foi sugerido por Briggs. (EVES, 2011, p. 346).

Tabela 2. Tábua de logaritmos decimais

Tábua de Logaritmos Decimais (Mantissas)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898

Fonte: CENTRO CIENTÍFICO CONHECER. Disponível em:

<<http://www.conhecer.org.br/download/MATEMAT/MATEMATICA%202.pdf>>. Acesso em 09 de janeiro de 2020

Para consultar uma tabela de logaritmos decimais, devem ser conhecidos os conceitos de característica e mantissa. As primeiras tábuas de logaritmos costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; só no século XVIII começou a prática de só se imprimir a mantissa, Tabela 2. (EVES, 2011, p. 346).

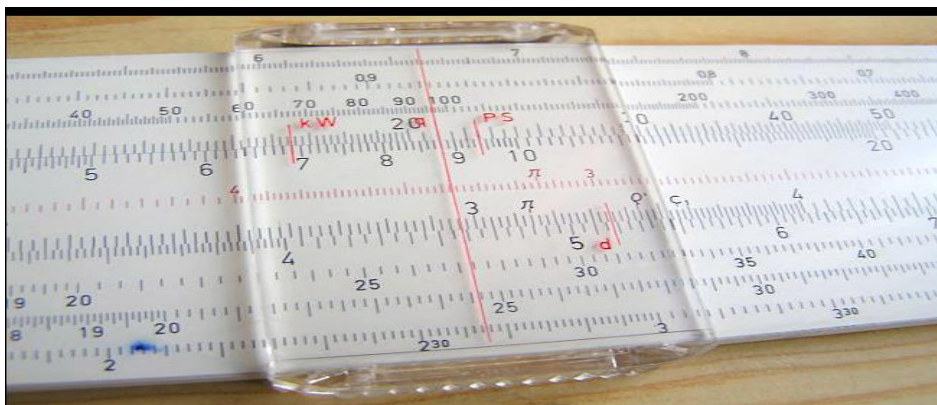
Quando um número não for potência de 10 (assim seu logaritmo seria a própria potência), seu logaritmo será composto por uma parte inteira e uma parte decimal. A parte decimal é denominada Mantissa e a Característica é dada pelo inteiro determinado pelo número de algarismos da parte inteira do número dado, diminuído de 1 unidade, assim, o logaritmo é composto por Característica + Mantissa.

Por exemplo, do $\log 27 = 1,43136$, como 27 possui dois algarismos, podemos dizer que sua Característica é o número $2 - 1 = 1$ e a Mantissa é 43136. (PINTO, 2016, p.20)

As tabelas de logaritmos foram utilizadas até o século XIX, quando começaram a surgir as primeiras calculadoras científicas, que calculavam logaritmos em um tempo consideravelmente menor (Pinto, 2016, p. 23) .

De acordo com Maor (2006, p.29), logo que a comunidade científica adotou os logaritmos, alguns inovadores perceberam que um engenho mecânico poderia ser construído para fazer os cálculos com eles. A ideia era usar uma régua, na qual os números poderiam ser colocados em espaços proporcionais aos seus logaritmos, Figura 2.

Figura 2- Régua de cálculo



Fonte: EVOLUÇÃO DOS COMPUTADORES.

Disponível em: <<https://evolcedup.weebly.com/reacutegua-de-calculo.html>>.

Acesso em: 14 de janeiro de 2020

A régua de cálculo é um instrumento que se baseia na sobreposição de escalas logarítmicas. Os cálculos são realizados através de régua logarítmica que desliza umas sobre as outras, e os valores mostrados em suas escalas são relacionados através da ligação por um cursor dotado de linhas estrategicamente dispostas, que têm a função de correlacionar às diversas escalas da régua de cálculo.

A régua de cálculo, em suas muitas variedades, foi a companheira fiel de todos os cientistas e engenheiros durante os 350 anos que se seguiram, sendo dada de presente pelos pais a seus filhos e filhas, quando se graduavam no ginásio. Então, no início da década de 1970 apareceram no mercado as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e no espaço de dez anos a régua de cálculo tornou-se obsoleta. (Em 1980, uma das principais indústrias de instrumentos científicos dos Estados Unidos, Keuffel & Esser, deixou de fabricar suas réguas de cálculo, pelas quais era famosa desde 1891) Quanto às tabelas de logaritmos, elas se saíram um pouco melhor: ainda podemos encontrá-las no final dos livros de álgebra, silenciosa lembrança de uma ferramenta que sobreviveu à sua utilidade. Mas não vai demorar muito tempo antes que também sejam uma coisa do passado. (MAOR, 2006, p.31)

A definição de logaritmo que prevalece até os dias atuais foi apresentada por Leonhard Euler (1707 - 1783), com o cálculo de logaritmos em qualquer base. “Foi Euler quem nos deu a definição moderna de logaritmo: se $y = b^x$, onde b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = \log_b y$ (leia-se como “logaritmo de y na base b)”. (MAOR, 2006, p.229)

Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada, sendo o maior responsável pela linguagem e notação que usamos hoje. Foi o primeiro a tratar os logaritmos como expoentes, apresentou a ideia correta sobre logaritmo de números negativos e empregou a letra e como base do sistema de logaritmos naturais (Boyer, 1974, p.326)

Os trabalhos que Euler escreveu sobre os logaritmos, contendo importantíssimas inovações na forma de tratá-los, foram escritos, ao que tudo indica e pelo menos parcialmente, sob a influência da discussão do assunto que teve por correspondência com Bernoulli entre 1727 e 1729 e da leitura das cartas trocadas por Leibniz e Bernoulli, que foram publicadas em 1745. No célebre *Introductio in analysin infinitorum*, seu primeiro tratado de análise, escrito entre 1743 e 1744 e publicado em 1748, os logaritmos foram pela primeira vez apresentados sistematicamente como exponenciais, de uma forma muito semelhante àquela que é adotada atualmente. (CARVALHO, 2015, p. 42).

Foram transcorridos cerca de 140 anos, desde a sua invenção, para que os logaritmos fossem definidos em termos algébricos na forma de expoentes. O avanço da álgebra, o desenvolvimento da simbologia matemática do século XVII e do cálculo infinitesimal proposto por Newton foram decisivos para que Euler caracterizasse o logaritmo em termos algébricos. (Soares, 2011, p. 72).

Segundo Maor (2006, p. 229) o problema de encontrar a área sob a hipérbole $y = 1/x$ foi um dos principais problemas matemáticos do século XVII. A descoberta de

que esta área envolve logaritmos mudou o foco do papel original dos logaritmos, como uma ferramenta de cálculo, para as propriedades da função logarítmica.

A ligação entre logaritmos e equação ou função exponencial exigiu, no plano histórico, muito tempo e esforço para ser estabelecida. No início do séc. XVIII, o conceito de função estava apenas no início de seu processo de desenvolvimento. Somente após se perceber que os logaritmos, além de instrumento facilitador de cálculos aritméticos, podiam expressar analiticamente e quantitativamente fenômenos naturais envolvendo a variação de duas grandezas interdependentes, é que essa noção começou a ser vista como uma equação, como uma função e como uma expressão analítica. (OLIVEIRA, 2005, p.45)

No século XIX, os logaritmos começam a ser representados como função. Essa proposta começa a aparecer em livros didáticos de matemática, seguindo como referência os trabalhos de Napier e de outros autores. Senso assim, essa nova concepção preponderou para um novo direcionamento de logaritmo, figurando sob a forma de representação simbólica e formal. (Soares, 2011, p.44)

A concepção aritmética dos logaritmos é definida da análise comparativa entre duas progressões. Inicialmente essa idéia é um dos meios mais adequados para se entender o conceito de logaritmos e suas devidas condições de existência porque foi o primeiro recurso utilizado pelos estudiosos do século XVII para definir os logaritmos. A concepção algébrico-funcional dos logaritmos é abordada através da ideia de potência e do estudo de funções exponenciais. Essa concepção é apresentada nos livros didáticos do século XX. Esse recurso foi devido ao surgimento da álgebra e de algumas reformas na educação. Tal concepção explora os logaritmos em termos de duas variáveis (incógnitas) sendo ainda definidas em termos exponenciais e representadas graficamente pelo estudo de função que recebe o nome de função logarítmica. (SOARES, 2011, p. 73)

Os logaritmos contribuíram de maneira decisiva para o desenvolvimento da ciência, e hoje, depois de mais de quatro séculos de sua invenção, ainda continuam necessários. Atualmente sua importância se dá sobre certas propriedades da função logarítmica com aplicações nas mais variadas áreas.

Contudo, se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a função logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. Ela aparece em uma variedade de aplicações que abrangem a química, biologia, psicologia, arte e música. (MAOR, 2006, p. 31).

3.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Nesta seção são apresentados os elementos fundamentais da teoria de aprendizagem de David Ausubel e suas implicações para o ensino e a aprendizagem em sala de aula e, mais especificamente, para o ensino de matemática.

3.2.1 A Aprendizagem Significativa

A teoria da aprendizagem significativa foi formulada inicialmente pelo psicólogo cognitivista David Paul Ausubel¹, que pesquisou os processos de aprendizagem. Ao longo dos anos, essa teoria foi, progressivamente, sendo enriquecida com formulações do próprio Ausubel, de Novak² e outros colaboradores.

O que o aluno já sabe, o conhecimento prévio (conceitos, proposições, princípios, fatos, idéias, imagens, símbolos), é fundamental para a teoria da aprendizagem significativa, uma vez que se constitui como determinante do processo de aprendizagem, pois é significativo por definição, base para a transformação dos significados lógicos dos materiais de aprendizagem, potencialmente significativos, em significados psicológicos (AUSUBEL, NOVAK, HANESIAN, 1980; AUSUBEL, 2003, folha de rosto).

O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre idéias “logicamente” (culturalmente) significativas, idéias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos (AUSUBEL, 2003, folha de rosto)

1 David Ausubel (1918 - 2008) nasceu nos Estados Unidos, na cidade de Nova York. Estudou nas Universidades de Pensylvania e Middlesex, graduando-se em Psicologia e Medicina. Seu doutorado foi em Psicologia do Desenvolvimento na Universidade de Columbia, onde depois foi professor durante muitos anos. Nos últimos anos de vida dedicou-se a escrever uma nova versão de sua obra básica Psicologia da Educação: uma visão cognitiva.

2 Joseph Donald Novak, Norte-americano nascido em 1930, com formação inicial em Biologia, fez seu doutorado em resolução de problemas nesta área. Na busca de um referencial teórico para fundamentar suas pesquisas chegou à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e logo passou a ser um grande divulgador desta teoria, inclusive dando-lhe uma visão humanista. É considerado o criador da técnica dos mapas conceituais e hoje dedica-se a ela.

Para Ausubel (2003) existem dois tipos de aprendizagem: a aprendizagem por memorização e a aprendizagem significativa. Sendo que há uma superioridade da aprendizagem e da retenção significativas em relação às correspondentes por memorização.

Obviamente, a aprendizagem mecânica não se processa em um "vácuo cognitivo", pois algum tipo de associação pode existir, porém, não no sentido de interação como na aprendizagem significativa. Além disso, embora a aprendizagem significativa deva ser preferida à mecânica por facilitar a aquisição de significados, a retenção e a transferência de aprendizagem, pode ocorrer que em certas situações a aprendizagem mecânica seja desejável ou necessária: por exemplo, em uma fase inicial da aquisição de um novo corpo de conhecimento. Na verdade, Ausubel não estabelece a distinção entre aprendizagem significativa e mecânica como sendo uma dicotomia, e sim como um continuum. Por exemplo, a simples memorização de fórmulas situar-se-ia em um dos extremos desse continuum (o da aprendizagem mecânica), enquanto que a aprendizagem de relações entre conceitos poderia estar no outro extremo (o da aprendizagem significativa). (MOREIRA, 2016, p. 9).

Aprendizagem mecânica é compreendida como aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação a conceitos fundamentais existentes na estrutura cognitiva. Desse modo “qualquer estratégia que implicar “copiar, memorizar e reproduzir” estimulará a aprendizagem mecânica” (MOREIRA, 2010, p. 23).

No estudo dos conteúdos de matemática, por exemplo, quando o aluno decora fórmulas ou reproduz exercícios isso pode ser entendido como aprendizagem por memorização, os assuntos são armazenados de forma aleatória sem relação com aspectos cognitivos ou conhecimentos anteriores.

Ausubel se baseia na premissa de que existe uma estrutura na qual a organização de informações se processa: a estrutura cognitiva.

Para Ausubel, aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva. Como outros teóricos do cognitivismo, ele se baseia na premissa de que existe uma estrutura na qual a organização e a integração se processam. É o complexo organizado resultante dos processos cognitivos, ou seja, dos processos mediante os quais se adquire e utiliza o conhecimento. (MOREIRA; MANSINI, 1982, p. 04).

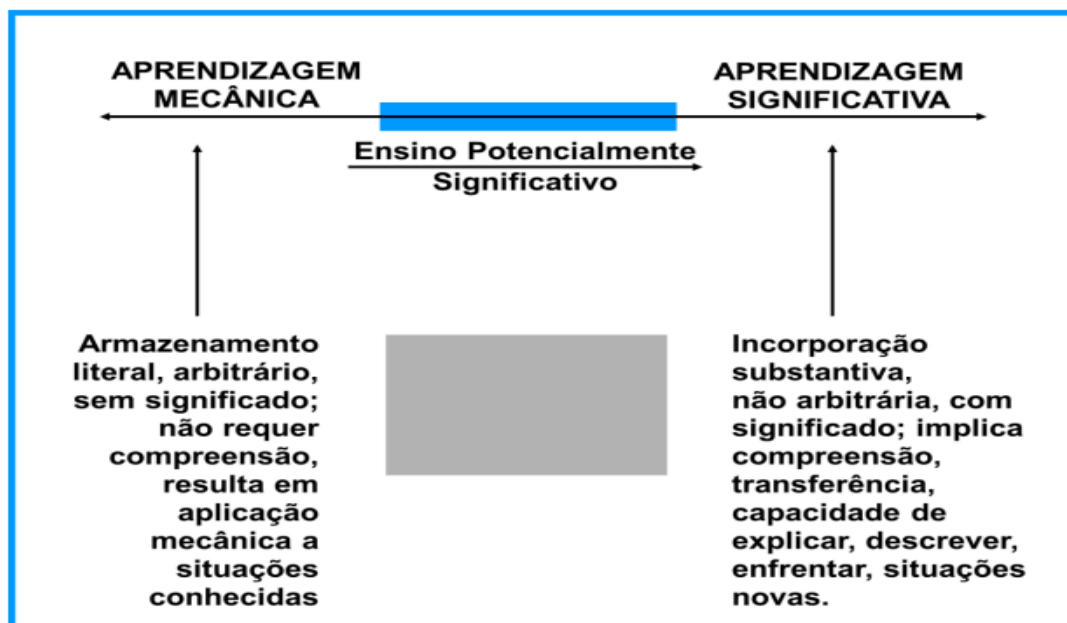
Moreira e Mansini (1982, p. 03) explicam que Ausubel tem preocupação com o processo de compreensão, armazenamento, transformação e uso da informação envolvida na cognição e com isso busca identificar padrões estruturados. Fato que explica a sua teoria tratar da aprendizagem como um processo de armazenamento de informação, condensação em classes mais genéricas, que são incorporadas a uma estrutura cerebral de tal modo que possa voltar a ser utilizada no futuro. “Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas

na medida em que conceitos relevantes e inclusos adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para novas ideias e conceitos”. (MOREIRA; MANSINI, 1982, p. 04).

Dessa forma, a aprendizagem se torna mais significativa à medida que os novos conhecimentos são relacionados às estruturas cognitivas do estudante e adquirem significado para ele, a partir da relação com seu conhecimento prévio.

A essência do processo de aprendizagem significativa, tal como já se verificou, consiste no facto de que novas ideias expressas de forma simbólica (a tarefa de aprendizagem) se relacionam àquilo que o aprendiz já sabe (a estrutura cognitiva deste numa determinada área de matérias), de forma não arbitrária e não literal, e que o produto desta interacção activa e integradora é o surgimento de um novo significado, que reflecte a natureza substantiva e denotativa deste produto interactivo. Ou seja, o material de instrução relaciona-se quer a algum aspecto ou conteúdo existente especificamente relevante da estrutura cognitiva do aprendiz, i.e., a uma imagem, um símbolo já significativo, um conceito ou uma proposição, quer a algumas ideias anteriores, de carácter menos específico, mas geralmente relevantes, existentes na estrutura de conhecimentos do mesmo. (AUSUBEL, 2003, p. 72).

Figura 3 - Aprendizagem mecânica x aprendizagem significativa.



Fonte: Moreira, 2012, p.4

Assim, a base da aprendizagem significativa está, portanto, no relacionamento não-arbitrário e não-literal (substantivo) de ideias. Não-arbitrariedade quer dizer que, o

relacionamento não é com qualquer aspecto da estrutura cognitiva, mas sim com conhecimentos especificamente relevantes, subsunçores. O conhecimento prévio serve para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos quando estes “se ancoram” em conhecimentos especificamente relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva. Substantividade significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é a substância do novo conhecimento, das novas ideias, não as palavras precisas usadas para expressá-las. (Moreira 2011)

Para Moreira (2016, p. 17) o princípio da assimilação, utilizando as ideias de Ausubel pode ser representado esquematicamente, conforme ilustra o Quadro 1.

Quadro1. Esquema sobre o princípio da assimilação segundo Ausubel

Nova informação potencialmente significativa → a	Relacionada e assimilada por →	Conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva → A	Produto interacional A'a'
--	--------------------------------	---	-------------------------------------

Fonte: Moreira, 2016, p.17

Ou seja, a assimilação é o processo que ocorre quando uma idéia, conceito ou proposição **a**, potencialmente significativo, é assimilado sob uma idéia, conceito ou proposição, i.e., um subsunçor, **A**, já estabelecido na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo. Tal como sugerido no esquema, não só a nova informação **a**, mas também o conceito subsunçor **A**, com o qual ela se relaciona e interage, são modificados pela interação. Ambos produtos dessa interação, **a'** e **A'**, permanecem relacionados como coparticipantes de uma nova unidade ou complexo ideacional **A'a'**. Portanto, o verdadeiro produto do processo interacional que caracteriza a aprendizagem significativa não é apenas o novo significado de **a'**, mas inclui também a modificação da idéia-âncora, sendo, conseqüentemente, o significado composto de **A'a'**. (MOREIRA, 2016, p. 18).

Por exemplo, ao se trabalhar o conceito de logaritmo, este só terá sentido, à medida que for relacionado com alguma ideia relevante, que esteja clara e organizada na estrutura cognitiva do estudante. Caso contrário, a princípio, será armazenado de forma mecânica. Os conhecimentos anteriores sobre potências e função exponencial, entre outros, facilitarão a construção do conceito de logaritmos, uma vez que podem funcionar como ancoradouros para o novo conceito. A partir das “ideias âncoras” é que o conceito passará a ter significado para o estudante.

O processo de ancoragem das novas informações no indivíduo resulta em crescimento e modificação dos conhecimentos já adquiridos anteriormente. Significa que os subsunçores existentes na estrutura cognitiva do aprendiz podem ser bastante abrangentes e desenvolvidos, ou limitados e pouco diferenciados, variando de

acordo com a frequência e intensidade com que ocorre a aprendizagem significativa, em conjunção com um dado campo de subsunçores. Os novos conceitos aprendidos de maneira significativa provocam uma mudança de crescimento e elaboração dos conceitos subsunçores iniciais, sendo estes reestruturados, de modo que o aprendiz possa reutilizá-los como subsunçores em outras situações, destacando-se outras mais complexas. Isso pressupõe que nessa interação entre os “novos conhecimentos” e os “subsunçores” ocorre uma influência que modifica o conteúdo atributivo de ambos os lados. (SOUZA; SILVANO; LIMA, 2018, p. 29).

Segundo a teoria de Ausubel, na aprendizagem significativa há três vantagens essenciais em relação à aprendizagem por memorização. Em primeiro lugar, o conhecimento que se adquire de maneira significativa é retido e lembrado por mais tempo. Em segundo, aumenta a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, mesmo se a informação original for esquecida. E, em terceiro, uma vez esquecida, facilita a aprendizagem seguinte – a “reaprendizagem”.

Quando não usamos um conhecimento por muito tempo, se a aprendizagem foi significativa temos a sensação (boa, tranquilizante) de que, se necessário, podemos reaprender esse conhecimento sem grandes dificuldades, em um tempo relativamente curto. Se a aprendizagem foi mecânica a sensação (ruim, de perda de tempo no passado) é a de que esse conhecimento nunca foi aprendido, e não tem sentido falar em reaprendizagem. No início, a vantagem da aprendizagem significativa sobre a mecânica é a compreensão, o significado, a capacidade de transferência a situações novas (na aprendizagem mecânica o sujeito é capaz de lidar apenas com situações conhecidas, rotineiras). Mais tarde, a vantagem está na maior retenção e na possibilidade de reaprendizagem (que praticamente não existe quando a aprendizagem é mecânica) em muito menos tempo do que a aprendizagem original. (MOREIRA, 2010, p.17).

3.2.2 A Construção de Conceitos

Um dos desafios encontrados na aquisição de vários conteúdos matemáticos é a construção e apropriação dos conceitos. Isso fica evidente pelas dificuldades apresentadas no estudo dos logaritmos.

Os conceitos matemáticos estabelecidos tendem a ser apresentados para os alunos em sua forma final e acabada, fato que não contribui para que eles construam seus conhecimentos. De acordo com Silva (2004, p. 03) a exclusão dos processos de construção dos conceitos matemáticos acaba provocando prejuízos com relação ao seu aprendizado. Existe diferença entre compreender uma técnica operatória e compreender um conceito matemático. Um estudante pode executar, por exemplo, todas as técnicas operatórias dos logaritmos sem, contudo, ter noções claras do que vem a ser um logaritmo. Em outras palavras, este pode, muito bem, pressupor que entendeu o conteúdo matemático quando, na

realidade, tal fato não aconteceu. Da mesma forma, é muito fácil um professor conjecturar que seu aluno compreendeu perfeitamente bem determinado assunto quando, na verdade, isso não se deu. De modo geral, os estudantes aprendem facilmente a dar respostas padrão às perguntas padrão e, assim, muitos professores acabam tendo a falsa noção de que eles aprenderam o conceito. É importante, portanto, que os conteúdos sejam construídos a fim de que não sejam apenas ferramentas de uso mecânico em resolução de exercícios e provas.

Mas, afinal, o que é construir um conceito?

Busca-se responder essa pergunta em conformidade com a concepção de Ausubel, que mostra a importância da formação de conceitos e suas relações com ensino e aprendizagem.

Aprendizagem significativa é o principal conceito da teoria de Ausubel, consiste no processo por meio do qual novas informações adquirem significado através da interação com aspectos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva (subsunçores). “Aprender um novo conceito depende de propriedades existentes na estrutura cognitiva, do nível de desenvolvimento do aprendiz, de sua habilidade intelectual, bem como da natureza do conceito em si e do modo como é apresentado.” (MOREIRA; MANSINI, 1982, p. 31).

Ausubel (2003, p. 92) descreve duas formas para a aquisição de conceitos que são a formação de conceitos, que ocorre geralmente em crianças com idade na fase pré-escolar, e assimilação de conceitos, predominantemente em crianças e adolescentes na idade escolar, e em adultos. O processo de assimilação de conceitos se dá quando os aprendizes entram em contato com os atributos essenciais de novos conceitos e relacionam estes atributos a informações relevantes estabelecidas em sua estrutura cognitiva.

A teoria da assimilação é a ideia de que novos significados são adquiridos pela interação do novo conhecimento com os conceitos e proposições aprendidos anteriormente. Esse processo de interação resulta numa modificação tanto no significado da nova informação quanto do significado do conceito ou proposição ao qual está relacionada. Dessa forma cria-se um novo produto interacional com novo significado. (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980 p. 106)

De acordo com Moreira (2011, p. 40) para facilitar a aprendizagem significativa é preciso considerar o conteúdo e a estrutura cognitiva³. É preciso fazer uma análise do

³ O conceito de estrutura cognitiva é central para a teoria de Piaget. Estruturas cognitivas são padrões de ação física e mental subjacentes a atos específicos de inteligência e correspondem a estágios do desenvolvimento infantil. Existem quatro estruturas cognitivas primárias - estágios de desenvolvimento - de acordo com Piaget: sensorial-motor, pré-operações, operações concretas e operações formais. No estágio sensorial-motor (0-2 anos), a inteligência assume a forma de ações motoras. A inteligência no período pré-operação (3-7 anos) é de natureza intuitiva. A estrutura cognitiva durante o estágio de operações concretas (8-11 anos) é lógica, mas depende de referências concretas. No estágio final de operações formais (12-15 anos), pensar envolve abstrações. Embora os estágios de desenvolvimento cognitivo identificados por Piaget estejam associados a faixas de idade, eles variam

conteúdo para identificar conceitos e procedimentos básicos que são essenciais para não sobrecarregar o estudante de informações desnecessárias e, buscar a melhor maneira de relacionar os aspectos mais importantes da matéria de ensino.

Em resumo, é indispensável uma análise prévia daquilo que se vai ensinar. Nem tudo que está nos programas e nos livros e outros materiais educativos do currículo é importante. Além disso, a ordem em que os principais conceitos e ideias da matéria de ensino aparecem nos materiais educativos e nos programas muitas vezes não é a mais adequada para facilitar a interação com o conhecimento prévio do aluno. A análise crítica da matéria de ensino deve ser feita pensando no aprendiz. De nada adianta o conteúdo ter boa organização lógica, cronológica ou epistemológica, e não ser psicologicamente aprendível. (MOREIRA, 2011, p. 40).

3.2.3 Princípios Organizacionais e Programáticos

A aprendizagem significativa, segundo Moreira (2011) está alicerçada em quatro processos de programação de conteúdos: diferenciação progressiva, reconciliação integrativa, organização sequencial e consolidação.

A diferenciação progressiva é a modificação de um subsunçor pelo processo de interação e ancoragem, quando um novo conceito ou proposição é aprendido. Os conceitos e proposições mais gerais devem ser introduzidos e apresentados no início da situação didática ou instrução do conceito e no seu desenvolvimento progressivo ser tratadas e diferenciadas as suas especificidades. A reconciliação integrativa ocorre quando novas informações são adquiridas e ideias são estabelecidas na estrutura cognitiva, no desenvolvimento de novas aprendizagens, que podem se integrar e reorganizar, produzindo novos significados. A relação entre as ideias deve ocorrer durante o processo de ensino para que sejam apontados aspectos comuns e diferenças relevantes para a construção do novo conhecimento. (LIMA, 2014, p. 31).

A *diferenciação progressiva* aponta que conceitos e proposições mais abrangentes do conteúdo devem ser apresentados no início e, progressivamente, diferenciados, ao longo do processo, em forma de detalhes e particularidades. Do ponto de vista cognitivo, é o que ocorre

para cada indivíduo. As estruturas cognitivas mudam através dos processos de adaptação: assimilação e acomodação. A assimilação envolve a interpretação de eventos em termos de estruturas cognitivas existentes, enquanto que a acomodação se refere à mudança da estrutura cognitiva para compreender o meio. O desenvolvimento cognitivo consiste de um esforço constante para se adaptar ao meio em termos de assimilação e acomodação.

Fonte: Introdução a Ciência Cognitiva. Disponível em: http://www.nce.ufrj.br/ginape/publicacoes/trabalhos/t_2002/t_2002_renato_aposo_e_francine_vaz/psicologia.htm. Acesso em 15 de maio de 2020.

com determinado subsunçor à medida que serve de ancoradouro para novos conhecimentos. (Moreira, 2011, p. 32)

Quando se programa a matéria de acordo com o princípio de diferenciação progressiva, apresentam-se, em primeiro lugar, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina e, depois, estas são progressivamente diferenciadas em termos de pormenor e de especificidade. Esta ordem de apresentação corresponde, presumivelmente, à sequência natural de aquisição de consciência cognitiva e de sofisticação, quando os seres humanos estão expostos, de forma espontânea, quer a uma área de conhecimentos completamente desconhecida, quer a um ramo desconhecido de um conjunto de conhecimentos familiar. Também corresponde à forma postulada, através da qual se representam, organizam e armazenam estes conhecimentos nas estruturas cognitivas humanas. Por outras palavras, elaboram-se aqui dois pressupostos: (1) é menos difícil para os seres humanos apreenderem os aspectos diferenciados de um todo, anteriormente apreendido e mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir das partes diferenciadas anteriormente aprendidas; e (2) a organização que o indivíduo faz do conteúdo de uma determinada disciplina no próprio intelecto consiste numa estrutura hierárquica, onde as ideias mais inclusivas ocupam uma posição no vértice da estrutura e subsumem, progressivamente, as proposições, conceitos e dados factuais menos inclusivos e mais diferenciados. (AUSUBEL, 2003, p. 166).

A reconciliação integrativa é um princípio programático do conteúdo segundo o qual se deve explorar relações entre conceitos e proposições e apontar similaridades e diferenças importantes, reconciliando discrepâncias reais ou aparentes. Em termos cognitivos, no curso de novas aprendizagens, conhecimentos já estabelecidos na estrutura cognitiva podem ser reconhecidos como relacionados, reorganizarem-se e adquirir novos significados. (Moreira, 2011, p. 32).

Deste modo, se um organizador conseguir, em primeiro lugar, delinear de forma clara, precisa e explícita as principais semelhanças e diferenças entre os novos conceitos e princípios subordinados ou correlativos a ser apreendidos, por um lado, e ideias semelhantes estabelecidas na estrutura cognitiva, por outro, parece razoável fazer-se dois postulados: (1) uma capacidade de discriminação melhorada das novas ideias ancoradas iria permitir ao aprendiz apreender, mais tarde, as ideias e informações mais pormenorizadas da própria passagem de aprendizagem, com menos ambiguidades, significados competidores e ideias erradas sugeridas pelas ideias semelhantes estabelecidas na estrutura cognitiva do que seria possível de outra forma. (2) À medida que estes novos significados mais claros e discerníveis, menos confusos e altamente diferenciados interagem com os respectivos subsunçores (i.e., com significados análogos, estabelecidos e mais subordinantes ou combinatórios, durante o intervalo de retenção), também retêm a própria identidade durante mais tempo. (AUSUBEL, 2003, p. 170).

Dessa forma, o conteúdo deve ser programado de forma que as ideias mais gerais e inclusivas do assunto sejam apresentadas antes e progressivamente diferenciadas, com a introdução de detalhes específicos. A programação do material a ser usado deve ser feita para

explorar relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças significativas além de reconciliar inconsistências reais ou aparentes.

A *organização sequencial*, consiste em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo, de maneira tão coerente quanto possível (observados os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa) com as relações de dependência existentes na matéria de ensino.

O *princípio da consolidação* é aquele segundo o qual fixando-se no domínio do que está sendo estudado, antes que novos conteúdos sejam introduzidos, assegura-se contínua prontidão na matéria de ensino e alta probabilidade de êxito na aprendizagem. O fato de Ausubel chamar atenção para a consolidação é coerente com sua premissa básica de que o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. (MOREIRA, 2011, p. 32).

Ao insistir-se na consolidação ou no domínio de aulas em curso, antes de se introduzir novo material de aprendizagem, assegura-se uma prontidão contínua de matérias e um êxito na aprendizagem sequencialmente organizada. Este tipo de aprendizagem pressupõe, como é óbvio, que os passos precedentes sejam sempre claros, estáveis e bem organizados. Caso não o sejam, compromete-se a aprendizagem de todos os passos subsequentes. Assim, nunca se deve introduzir novo material na sequência até se dominarem bem todos os passos anteriores. Este princípio também se aplica aos tipos de aprendizagem intratrefas, nos quais cada tarefa componente (bem como conjuntos integrais de matérias) tem tendência a ser composta por conteúdo e a manifestar uma organização interna própria. A consolidação, como é óbvio, alcança-se através da confirmação, correção e clarificação, no decurso do retorno (feedback), e através da prática diferencial e da revisão, no decurso da exposição repetida, com retorno, ao material de aprendizagem. (AUSUBEL, 2003, p. 170).

A consolidação relaciona-se com a existência de subsunçores.

A consolidação tem a ver com o domínio de conhecimentos prévios antes da introdução de novos conhecimentos. É uma consequência imediata da teoria: se o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aquisição significativa de novos conhecimentos, nada mais natural que insistir no domínio do conhecimento prévio antes de apresentar novos conhecimentos. (MOREIRA, 2010, p. 21).

A aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas com os quais o estudante tem alguma familiaridade. Portanto, quando estudantes são defrontados com uma nova situação, eles usam o conhecimento desenvolvido através de experiência em situações anteriores (conhecimento prévio), e tentam adaptá-lo a esta nova situação.

Ao fornecer situações que contenham conceitos prévios, significativos para os alunos, o professor estará “recriando” esta memória, já adquirida. E através desta evocação de conhecimentos armazenados na memória, será possível, através de situações que também evidenciem os novos conhecimentos (além dos prévios), relacionar a estrutura cognitiva prévia com a estrutura conceitual nova, originando um novo conhecimento (uma ressignificação dos conhecimentos de ensino). (TAUCEDA; DEL PINO, 2014, p. 265).

Os conhecimentos prévios são importantes na configuração do processo ensino e aprendizagem, pois atuam como “molas propulsoras para os planejamentos sistemáticos da ação pedagógica docente, tendo em vista aquisição de conhecimentos futuros ou construção de novos conceitos e conhecimentos”. (UJIE et al., 2017, p. 61).

3.2.4 Condições para a Ocorrência da Aprendizagem Significativa

Há duas condições essenciais para que ocorra a aprendizagem significativa: o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo; e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender. (Moreira, 2010, p. 8).

A primeira condição implica 1) que o material de aprendizagem (livros, aulas, aplicativos, ...) tenha significado lógico (isto é, seja relacionável de maneira não-arbitrária e não-literal a uma estrutura cognitiva apropriada e relevante) e 2) que o aprendiz tenha em sua estrutura cognitiva idéias-âncora relevantes com as quais esse material possa ser relacionado. Quer dizer, o material deve ser relacionável à estrutura cognitiva e o aprendiz deve ter o conhecimento prévio necessário para fazer esse relacionamento de forma não-arbitrária e não literal. (MOREIRA, 2010, p. 8).

De acordo com Moreira (2010, p. 8), a segunda condição, não está associada com motivação ou interesse por determinado tema. Mas, implica na relação dos novos conhecimentos à estrutura cognitiva, atribuindo novos significados, ancorando-os a seus conhecimentos prévios. Por alguma razão o sujeito que aprende deve se predispor a relacionar os novos conhecimentos a sua estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e dando significados a esses conhecimentos. “A segunda condição é talvez mais difícil de ser satisfeita do que a primeira: o aprendiz deve querer relacionar os novos conhecimentos, de forma não-arbitrária e não-literal, a seus conhecimentos prévios. É isso que significa predisposição para aprender.” (MOREIRA, 2010, p. 8).

Quando há a ausência de subsunçores, Ausubel (2003) propõe o uso de organizadores prévios, estes se constituem em um material introdutório que serve para dar suporte à

ancoragem, ampliando as ideias relevantes na estrutura cognitiva. A principal função desses organizadores é preencher o espaço entre o que o aluno já sabe e o que ele precisa saber.

De fato, organizadores prévios são propostos como um recurso instrucional potencialmente facilitador da aprendizagem significativa à medida que serviriam como “pontes cognitivas” entre novos conhecimentos e aqueles já presentes na estrutura cognitiva do sujeito cognoscente. São entendidos como materiais introdutórios apresentados anteriormente ao material de aprendizagem em si. Trata-se de uma espécie de “ancoradouros” provisórios para a nova aprendizagem, capazes de conduzir ao desenvolvimento de ideias, conceitos e proposições, apropriados e relevantes, isto é, os subsunçores, que conduzirão, por sua vez, à aprendizagem subsequente. (CAMPO, 2017, p. 27).

Em resumo, a concepção da aprendizagem significativa estabelece o conhecimento prévio como um elemento essencial nos processos de ensino e aprendizagem. “Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator singular que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isso e ensine-o de acordo” (AUSUBEL, NOVAK, HANESIAN, 1980, p. 137).

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, por conceber a aprendizagem escolar como uma ação planejada e intencional, tem se mostrado adequada para a elaboração de estratégias de ensino escolar e por isso, foi adotada neste trabalho como base para planejar atividades de ensino de logaritmo e interpretar as manifestações dos alunos durante a aplicação dessas.

Mas nem sempre o conhecimento prévio é facilitador da aprendizagem, há casos em que pode ser bloqueador.

Por conseguinte, parece aparente que não só a presença de ideias ancoradas claras, estáveis, discrimináveis e relevantes na estrutura cognitiva é o principal factor de facilitação da aprendizagem significativa, como também a ausência de tais ideias constitui a principal influência limitadora ou negativa sobre a nova aprendizagem significativa. Um destes factores limitadores é a existência de ideias preconcebidas erradas, mas tenazes. Contudo e infelizmente, tem-se feito muito pouca investigação sobre este problema crucial, apesar do facto de que a não aprendizagem de ideias preconcebidas, em alguns casos de aprendizagem e retenção significativas, pode muito bem provar ser o único e mais determinante e manipulável factor na aquisição e retenção de conhecimentos. (AUSUBEL, 2003, p. 155).

Dessa forma, dizer que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa de novos conhecimentos não significa dizer que é sempre uma variável facilitadora. Normalmente sim, mas pode, em alguns casos, ser bloqueadora. (Moreira, 2010, p. 7).

3.3 OBSTÁCULOS À APRENDIZAGEM POR ASTOLFI

O conceito de obstáculos, que se caracteriza como as resistências à apropriação de conhecimentos, foi estudado pelo pesquisador francês Jean-Pierre Astolfi⁴, o qual nos mostra quais são as condições didáticas necessárias para superar obstáculos reais vividos pelos alunos. A noção de obstáculo considera que o aluno chega à escola com ideias mais ou menos estruturadas e ocorre uma adaptação dessas concepções às situações, resistindo a uma transformação intelectual. (Astolfi 1993, p. 298).

“O obstáculo não deve ser tratado como algo negativo, mas como um alerta de que, naquele momento, o aluno precisa transpor e reformular algo que já viu no passado para compreender o novo conteúdo.” (KIKUCHI, 2012, p. 107). Para Astolfi, essa transposição está associada ao aprender:

Aprender não é apenas aumentar o "estoque" de conhecimento, é também - e talvez principalmente - transformar os modos de conceber o mundo. Sabemos bem, que nossos momentos de descobrimento são muitas vezes aqueles que nos permitem ver as coisas de outra maneira, sem ter que saber "mais". (ASTOLFI, 1997, p. 65).

Um obstáculo não é vencido facilmente, pois não se encontra isolado, mas pertence a uma rede de diferentes obstáculos que se reforçam mutuamente. (Astolfi 1993, p. 298).

Para Astolfi (1994, p. 211) é importante compreender os obstáculos enfrentados pelos estudantes, para, então, definir os objetivos a serem trabalhados no contexto escolar, ou seja, é importante traçar um diagnóstico dos obstáculos possíveis de serem encontrados e, a partir disso, estabelecer estratégias adequadas para superá-los.

Assim, os obstáculos se tornam o ponto de apoio das situações didáticas e sua transposição tem o sentido superá-los. Isso dá aos obstáculos um status positivo. Nessa perspectiva, há que se considerar que:

A transposição de um obstáculo supõe também uma apreciação da amplitude do “salto conceitual” exigido pelo trabalho ou dever: nem fácil demais (não haveria

4 Jean-Pierre Astolfi (1943-2009). foi professor e pesquisador em ciências da educação. Ocupou lugar de destaque na comunidade de pesquisa em didática das ciências e desenvolveu estratégias didáticas para enfrentar obstáculos de aprendizagem.

obstáculo), nem difícil demais (os alunos não poderiam transpô-lo). O desafio intelectual desestabilizante deve poder se apoiar sobre competências ou capacidades já adquiridas. Nessa avaliação do possível, retoma-se as observações de Vigotski no que diz respeito à zona de desenvolvimento proximal (ou zona proximal): o trabalho didático consiste em ultrapassar, sem forçar em excesso, a maturação das estruturas cognitivas dos alunos (ASTOLFI, 1997, p. 128).

Durante o processo de aprendizagem os alunos têm a possibilidade de modificar suas concepções, que pode significar uma substituição destas, mas sem desconsiderá-las completamente, a fim de um saber científico elaborado. Todavia, também é certo, que as concepções, muitas vezes, podem se transformar em obstáculos à aprendizagem, ou seja, compreende-se que as concepções espontâneas dos alunos podem influenciar no saber novo a ser adquirido, culminando à aprendizagem, ou sendo um entrave, quando se tornam obstáculos. (Prudêncio, 2017, p. 56).

Segundo Astolfi (1993, p. 291) a construção de conceitos só é possível através de um processo lento e incerto de atravessar obstáculos que são as resistências para o aprendizado de algum conceito.

De acordo com Perrenoud (2000, p.31), uma situação-problema obriga a transpor um obstáculo. Astolfi propõe que se considere o obstáculo como uma ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de pensamento do aprendiz.

Deparar-se com o obstáculo é, em um primeiro momento, enfrentar o vazio, a ausência de qualquer solução, até mesmo de qualquer pista ou método, sendo levado à impressão de que jamais se conseguirá alcançar soluções. Se ocorre a devolução do problema, ou seja, se os alunos apropriam-se dele, sua mente põe-se em movimento, constrói hipóteses, procede a explorações, propõe tentativas “para ver”. Em um trabalho coletivo, inicia-se a discussão, o choque das representações obriga cada um a precisar seu pensamento e a levar em conta o dos outros. (PERRENOUD, 2000, p. 31).

Um obstáculo não é transposto facilmente. Tem relação direta com as representações ou concepções prévias dos alunos. Está ligado a resistências muito fortes que estão inseridas em um sistema de pensamento, de uma construção minimamente coerente e explicativa. “Não se deve certamente subestimar o obstáculo caso se queira poder superá-lo, mas deve-se pensar de uma maneira que torne possível sua ultrapassagem.” (ASTOLFI; DEVELAY, 1990, p. 65).

De acordo com Astolfi (1994) as etapas dos obstáculos enfrentados pelos alunos são as seguintes:

1. o obstáculo - que resiste ao aprendizado;
2. o conceito pretendido – que é o contraponto lógico;

3. o que o obstáculo impede de compreender – que impede a compreensão conceitual;
4. a rede de ideias associadas – que explica sobre a dificuldade que o aluno tem em abandonar o senso comum;
5. a ideia já construída sobre determinado conteúdo e as condições de possibilidades – criar possibilidades, fazer com que o aluno se envolva em novos contextos, para que esse obstáculo seja superado.

Situações envolvendo obstáculos na construção do conceito de logaritmo sugerem dar sentido e significado e ajudar o estudante a se apropriar desse conteúdo.

A construção do conceito de logaritmos envolve várias relações como a bagagem que o aluno traz de conhecimentos, a abordagem e a interação com o objeto de estudo e a transposição para a aquisição de novos conhecimentos.

No processo de ensino-aprendizagem a aquisição de novos saberes ocorre de maneira gradativa, por meio de tentativas, erros e acertos. Ao deparar-se com situações perturbadoras aos poucos o sujeito assimila as informações, analisa e busca alternativas para sua superação, reorganizando ou criando esquemas em relação ao objeto e o que antes representava um obstáculo, torna-se uma importante oportunidade de progressão. (Burlamaqui, Aguiar, Batista, 2019, p. 3).

O erro é uma ferramenta para ensinar porque ele está no coração (e aí se volta a Bachelard) do processo de transformação intelectual, da renúncia custosa e difícil – causa, às vezes, até de ansiedade para alguns alunos porque é necessário abandonar o que já se sabe (explicações simples nas quais se acreditava e que funcionavam bem). E é necessário substituí-las por explicações muito mais complicadas que não se compreende facilmente. Então, não é nada, nada simples! E o erro tende a persistir, a retornar. Como professor, deveríamos ter paixão pelos erros dos alunos. E mesmo, de vez em quando, provocar os erros (alguns fizeram isto em pesquisas de didática das Ciências). E com armadilhas que induzem ao erro! Que fazem os alunos cair no erro, se ousar dizer! E que fazem os alunos reagir como cientistas do passado que cometeram erros. Os alunos poderão dizer: “Então, este erro, não é uma besteira minha! É um erro do qual se tem traços na história da Ciência.” (ASTOLFI, 2011, p. 181).

Um obstáculo pode identificar-se através de erros constantes. Segundo os modelos construtivistas de aprendizagem, o erro adquire o status de indicador de tarefas intelectuais que os alunos estão resolvendo e os obstáculos o que seus pensamentos enfrentam na hora de resolvê-los. (Astolfi, 2004, p.10).

Astolfi (1998, p. 13) descreve seis características principais dos obstáculos:

- *sua positividade*: obstáculo não é ignorância nem bloqueio psicológico, mas implica uma "saturação" do conhecimento anterior, erroneamente mobilizado pela mente;
- *sua instalação*: o obstáculo é uma instalação que é dada pela mente para que mantenha o raciocínio simplesmente, "imerso" em conforto intelectual;
- *sua interioridade*: o obstáculo está no próprio pensamento, em palavras, na experiência cotidiana, no inconsciente;
- *sua ambiguidade*: toda representação é ao mesmo tempo uma ferramenta necessária e uma fonte potencial de erro. Obstáculos são pensamentos usados para resolver um tipo de problema para os quais não são adequados. O que constitui um obstáculo é o uso ilegítimo, fora de seus limites de validade, de um certo sistema cognitivo, que de outra forma também tem suas virtudes;
- *seu polimorfismo*: caráter do obstáculo que leva a múltiplas dimensões, pois não se limita ao campo racional, mas muitas vezes estende ramificações para os planos afetivo, emocional, fantasmagórico, místico.
- *sua recursão*: o obstáculo se apresenta como o passado da razão. Por isso, então é difícil acreditar que foi possível ficar por tanto tempo prisioneiro de uma ideia que agora parece tão óbvia.

“Não se deve certamente subestimar o obstáculo caso se queira poder superá-lo, mas deve-se pensar de uma maneira que torne possível sua ultrapassagem.” (ASTOLFI; DEVELAY, 1990, p. 65).

Dessa forma, é necessário estar ciente desses obstáculos, trabalhar pelo confronto dos mesmos, dispor de novos modelos acessíveis à mente, etc. Tudo isso implica a elaboração de fases contrastadas no ensino científico, obedecendo a vários pontos a serem direcionados. (Astolfi 1994)

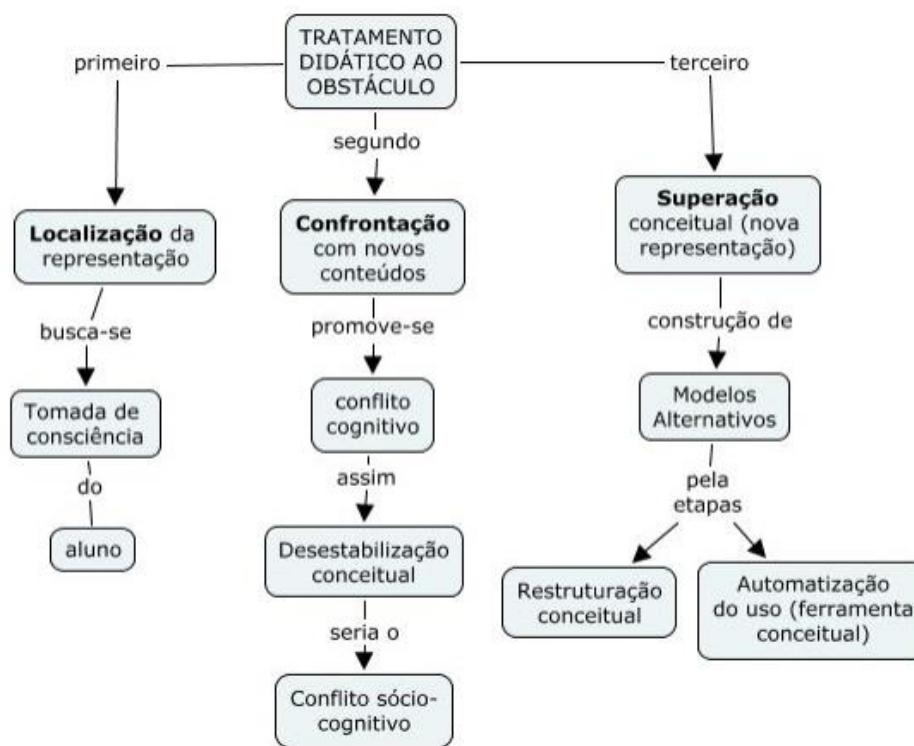
Para que os obstáculos sejam vencidos visando a construção dos conhecimentos, Astolfi (1993, p. 300) propõe três etapas de superação de um obstáculo, conforme Figura 4:

- **Detecção**: localização e identificação dos impedimentos que se opõe ao avanço do conhecimento. Corresponde ao que poderíamos chamar de *tomada de consciência* onde se tornam explícitas as concepções alternativas dos alunos. De acordo com Prudêncio (2017), a maioria das representações dos alunos permanece implícita. Para tanto, desenvolve-se atividades a fim de que eles expressem tais representações, tendo como objetivo à tomada de

consciência de seu sistema de funcionamento intelectual. “A localização é indispensável para se trabalhar didaticamente o obstáculo. Deste modo, para auxiliá-los na identificação do obstáculo, é necessária a tomada de decisão no próprio modo de funcionamento intelectual dos alunos.” (PRUDÊNCIO, 2017, p. 73).

- **Fissuração:** depois da detecção ocorre a fase seguinte (não necessariamente consecutiva) a desestabilização conceitual que são as situações de conflito de ideias. É o momento dos conflitos sociocognitivos. Supõe um *primeiro salto conceitual*, resultante da desestabilização de concepções anteriores. A segunda etapa é a confrontação entre os saberes científicos e os saberes oriundos das relações pessoais dos alunos. “A fissuração do obstáculo é fomentada quando há insatisfação do estudante para com suas representações, o que será promovido assim que os distintos pontos de vista ou a diferença dos enfoques dos estudantes sejam trabalhados.” (FARIAS, SIMÕES, TRINDADE, 2013, p. 125).
- **Superação:** construção de novas ferramentas conceituais. Representa o fim do processo em que se necessita de novo modelo explicativo-alternativo. Ocorre o abandono das primeiras concepções, quando o aluno consegue elaborar uma alternativa conceitual e aplicá-la em novo e diferente contexto. É a fase de construção de novas ideias, onde acontece um novo modelo de conceito para esclarecer a fissuração. “Portanto, após a desestabilização ou conflito inicial sofrido, o indivíduo se depara com um novo modelo representativo, permitindo resolver o problema que estava em aberto e aplicar esse modelo a novas situações, superando o obstáculo.” (FARIAS, SIMÕES, TRINDADE, 2013, p. 126) “A transposição de um obstáculo supõe também uma apreciação da amplitude do “salto conceitual” exigido pelo trabalho ou dever: nem fácil demais (não haveria obstáculo), nem difícil demais (os alunos não poderiam transpô-lo).” (ASTOLFI et al., 1997, p. 128). Nesta fase o novo modelo representativo, de alternativa conceitual passa a ser instrumento para resolver situações diversas, é o que Astolfi denomina automatização. Aqui o estudante já incorporou o novo modelo de representação e passa a utilizá-lo de maneira automática. (Cezare, 2016, p. 74).

Figura 4- Tratamento do obstáculo de aprendizagem



Fonte: **Imagem WQ 6.2a:** Tratamento do Obstáculo de Aprendizagem (ASTOLFI, 1998). Disponível em:

<https://sites.google.com/site/ensinodebiologiaufam/wq-06-transposicao-didatica/wq-6-3-fonte-depesquisa?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1>

Acesso em: 19 de abril de 2020.

Para que os estudantes alcancem a construção dos conceitos científicos, o intuito do objetivo didático é contemplar processos de ensino visando à superação dos obstáculos de aprendizagem. (Prudêncio, 2017, p. 75). “O aluno deve construir primeiramente novas ferramentas conceituais, para depois tratar de fazê-las funcionar em novos contextos”. (ASTOLFI, 1993, p. 302). Com isso, pretende-se que os alunos, a partir de um novo saber, sejam capazes de compreender e explicar cientificamente uma determinada situação.

Dessa forma, ressalta-se a importância da função dos professores no sentido de problematizar corretamente as situações, para, assim, promover os conflitos cognitivos entre os estudantes. O objetivo é desestabilizar as concepções anteriores para promover uma nova elaboração conceitual. O foco é aproximar as concepções vivenciadas pelos estudantes do

saber científico, para, a partir disso, haver a construção do conhecimento. (Prudêncio, 2017, p. 75).

De acordo com Farias, Simões, Trindade (2013, p. 127) o professor que pretende trabalhar em torno da superação de obstáculos de aprendizagem deve ter em mente que:

- as atividades necessitam de mais tempo de discussão, possibilitando assim a problematização, a desestabilização de representações, os conflitos sociocognitivos e a construção de novos modelos explicativos;

- a identificação de obstáculos epistemológicos por parte dos estudantes pode ser potencializada com o uso de diversas atividades, como a análise de textos e problematizações sobre o tema a ser trabalhado;

- o novo modelo explicativo deve ser utilizado para sanar as dúvidas e solucionar os problemas que tenham surgido e ficado em aberto durante as discussões nas aulas.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo define-se o tipo de investigação desenvolvida, a coleta de dados, a seleção da amostra, o quadro de categorias e os procedimentos de análise.

4.1 REFERÊNCIAS DA PESQUISA E COLETA DE DADOS

De acordo com a natureza dos dados, o problema da pesquisa e a metodologia de análise, essa pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa.

Garnica (2019) define pesquisa qualitativa como aquela que reconhece:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2019, p. 96).

Como o objeto de estudo desta dissertação é natural do contexto escolar, envolvendo múltiplas variáveis, considera-se adequado o emprego de métodos qualitativos.

Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais, e conversas, e de complexo tratamento estatístico. (...) Ainda que os indivíduos que fazem investigação qualitativa possam vir a selecionar questões específicas à medida que recolhem os dados, a abordagem à investigação não é feita com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. (...) Recolhem normalmente os dados em função de um contato aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

O método qualitativo engloba “um modo de proceder que permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente; mais do que isso e principalmente, de trabalhar concebendo-o como já sendo sempre junto ao mundo.” (BICUDO, 2012, p. 17).

Segundo Bogdan e Biklen (1994, pp. 47-51) a pesquisa qualitativa possui algumas características, que são descritas a seguir, juntamente com propriedades pretendidas na presente pesquisa:

- “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p.47). Esta pesquisa foi realizada no ambiente escolar, com a pesquisadora utilizando-se de vários instrumentos de coleta de dados (registros escritos, falas, expressões, atitudes, comportamentos, através de observações de caráter subjetivo).
- “A investigação qualitativa é descritiva” (p.48). Nos dados apresentados há a descrição de procedimentos e raciocínios que indiquem elementos da apropriação de conceitos matemáticos.
- “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p.49). Buscou-se entender como se deram os processos, ou seja, como o conceito de logaritmos foi construído pelos alunos.
- “Investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. O processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas no início ou no topo e vão se tornando mais fechadas e específicas no extremo. O investigador qualitativo planeia utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação” (p.50). Os dados que foram levantados não tiveram o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente. A partir das observações os dados foram analisados, e foi construído assim o entendimento sobre o objeto de estudo.
- “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (p.51). Ao investigar como os alunos constroem o conceito de logaritmos buscou-se perceber suas experiências e compreensões durante o processo.

Os dados foram coletados na resolução das atividades, através dos encontros virtuais, e registrados em um diário de bordo que, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 119) é um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante um trabalho de campo. “É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos”. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 120).

Os diários, portanto, podem conter uma dupla perspectiva: uma descritiva e outra interpretativa. A perspectiva descritiva atém-se à descrição de tarefas e atividades, de eventos, de diálogos, de gestos e atitudes, de procedimentos didáticos, do ambiente e da dinâmica da prática, do próprio comportamento do observador etc. A perspectiva interpretativa, por sua vez, tenta olhar para a escola e a sala de aula como espaços socioculturais produzidos por seres humanos concretos, isto é, por sujeitos que participa da trama social com seus sentimentos, ideias, sonhos, decepções, intuições, experiências, reflexões e relações inter-pessoais. Para que o diário não seja meramente técnico ou muito genérico e superficial, recomenda-se que busque contemplar de forma equilibrada essas duas perspectivas. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 119).

Seguindo esses pressupostos, no diário de bordo, foram registrados todos os acontecimentos pertinentes aos resultados da pesquisa, realizados pelos alunos durante o trabalho. E, também, as reflexões diárias da pesquisadora: observações, erros, dificuldades, incertezas, acertos, sucessos e reações dos participantes.

Considerando o objetivo do estudo, as representações escritas dos processos de raciocínio se tornaram primordiais para a análise. Deste modo, paralelamente à observação direta, mesmo no ambiente virtual, foi feita a recolha documental das produções dos alunos. Para a realização dessa forma de investigação, foi fundamental que as propostas para o desenvolvimento da pesquisa fossem expostas a todos os envolvidos. Uma comunicação escrita foi encaminhada aos pais e responsáveis, com o objetivo de apresentar um enfoque geral das atividades desenvolvidas através de procedimentos metodológicos estudados/aplicados, juntamente com um Termo de Assentimento Livre e Esclarecido, elaborado de acordo com as orientações do Comitê de Ética em Pesquisa, (Apêndice A).

4.2 O CONTEXTO E OS PARTICIPANTES

A instituição escolhida para a realização da pesquisa foi Escola de Educação Básica Professora Geni Comel, localizada na cidade de Chapecó, SC. A proposta pedagógica da escola é “[...] orientada pela Proposta Curricular de Santa Catarina, na concepção sócio interacionista, na perspectiva histórico-cultural, considerando os diferentes sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem, embasados em conceitos de cidadania, autonomia e democracia [...]”. (EEB PROF GENI COMEL, 2020, p. 08).

Devido à pandemia do novo coronavírus, Covid-19, que assolou o mundo no ano de 2020, o Estado de Santa Catarina suspendeu as aulas presenciais na rede estadual de ensino, a

partir do dia 19/03/2020. A Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina (SED) estabeleceu o sistema de trabalho para que professores e alunos da rede estadual de ensino pudessem realizar atividades não presenciais durante a suspensão das aulas nas escolas para prevenir o contágio pelo novo coronavírus. As ações coordenadas trouxeram uma plataforma com diferentes canais de comunicação, ferramentas pedagógicas e procedimentos para alcançar, com a maior abrangência possível, os alunos de escolas estaduais.

Essa sistematização se deu de acordo com a resolução CEE 009-2020, do Conselho Estadual de Educação, que dispõe sobre o regime especial de atividades escolares não presenciais no Sistema Estadual de Educação de Santa Catarina, para o cumprimento do calendário letivo do ano de 2020.

Diante desse contexto houve grande preocupação com relação à aplicação das atividades. Como as aulas presenciais foram suspensas foi necessário adaptá-las às particularidades do momento.

Dessa forma, o desenvolvimento da presente pesquisa se deu através de plataformas digitais. Os sujeitos constituíram-se de um grupo de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, cujo interesse em participar se deu devido a um convite realizado pela pesquisadora. Em decorrência, sobretudo, do ensino remoto por conta da Covid-19, nem todos os convidados tinham condições objetivas para participar, assim, a investigação contou com a colaboração de sete alunas. As mesmas foram orientadas que fossem até a escola para retirar as atividades do momento 1 e o termo de assentimento livre e esclarecido.

Na semana de 17 a 21 de agosto as estudantes retiraram o material impresso na escola onde ocorreu o esclarecimento de como se daria a investigação. O primeiro encontro no modo remoto foi marcado para a data de 24 de agosto do corrente ano, às 14 horas.

A aplicação da pesquisa ocorreu através de cinco encontros virtuais, com duração de trinta minutos cada. A comunicação foi estabelecida através de um aplicativo via celular. As atividades escritas foram enviadas e coletadas por meio digital.

4.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades foram elaboradas de modo a oportunizar a ocorrência das estratégias pedagógicas de Ausubel durante a execução: diferenciação progressiva, reconciliação integradora, organização sequencial e consolidação, no processo de construção do conceito de

logaritmo e com o enfrentamento dos obstáculos de aprendizagem. A formulação das mesmas teve como base os trabalhos produzidos por Rossi (2010) e pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2018).

- Momento 1- Operando com números grandes sem calculadora (Apêndice B)

Nesse momento se inicia o estudo do conceito de logaritmo através de sua origem histórica. São apresentadas algumas relações para se reduzir a operação de multiplicação à soma e da divisão à subtração. Se busca iniciar a construção do conceito em etapas sem citar o termo logaritmo, mostrando a estratégia de simplificar cálculos com recursos de uma época em que não havia calculadora.

- Momento 2 - O que é logaritmo? (Apêndice C)

Essa atividade inicia com uma tabela a ser preenchida pelos estudantes a fim de obter a relação entre potências e logaritmos, sua representação simbólica, até construir a definição, discutir a existência do logaritmo para base 1 e estudar algumas propriedades.

- Momento 3 – Propriedades importantes (Apêndice D)

Nesta aula são construídas as propriedades operatórias dos logaritmos. Os estudantes são convidados a investigar o resultado de alguns exemplos cuja resolução requer o uso das propriedades operatórias. A proposta é que façam essa atividade em duplas para poderem discutir os resultados e formular suas próprias conjecturas.

- Momento 4 – Para que servem os logaritmos? (Apêndice E)

As atividades desta aula têm como objetivo aplicar a definição de logaritmo de diferentes formas, para resolver alguns tipos de problemas. Neste encontro, os estudantes têm contato com situações que envolvem os logaritmos, como por exemplo, na modelagem de fenômenos que ocorrem na natureza. Para finalizar é solicitado um relatório de pesquisa abordando tópicos referentes à aplicação dos logaritmos.

4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS

Levando em conta os objetivos e os procedimentos metodológicos de coleta de dados, a Análise de Conteúdo será utilizada para a interpretação das manifestações dos alunos. Nessa

metodologia, na perspectiva de Bardin (2011, p. 95), devem ser percorridas três fases: pré-análise, exploração do material, tratamento dos resultados.

- Pré-análise: “É a fase da organização propriamente dita. Tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais de maneira a conduzir um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise.” (BARDIN 2011, p. 95). É por meio dela que o pesquisador organiza o material que será analisado por meio de etapas: a) leitura flutuante, que é o estabelecimento de contato com os documentos da coleta de dados, momento em que se começa a conhecer as fontes a serem analisadas; b) escolha dos documentos, que consiste na demarcação do que será analisado; c) formulação das hipóteses e dos objetivos; d) elaboração de indicadores: a fim de interpretar o material coletado.
- Exploração do material: é o momento em que os dados brutos são transformados de forma organizada e agregados em unidades, aos quais permitem uma descrição das características pertinentes do conteúdo. Ocorre a transformação dos dados em elementos que buscam responder à questão da pesquisa, é o momento da descrição analítica. A codificação, a classificação e a categorização são elementos necessários nessa fase.
- Tratamento dos resultados – a inferência e a interpretação. Os resultados obtidos são aqui trabalhados, para se tornarem válidos e significativos. É necessário retornar ao referencial teórico, procurando embasar as análises dando sentido à interpretação.

A respeito da exploração do material o pesquisador deve definir categorias, pois a categorização permite reunir maior número de informações à custa de uma esquematização e assim correlacionar classes de acontecimentos para ordená-los. (Bardin 2011, p. 118).

Dessa forma, como o objetivo das atividades aplicadas é a construção do conceito de logaritmos através da aprendizagem significativa e da superação dos obstáculos, definem-se as categorias de análise em dois grupos relacionados entre si: aprendizagem significativa e obstáculos da aprendizagem.

1. As estratégias pedagógicas na teoria de Ausubel: Diferenciação Progressiva, Reconciliação Integradora, Organização Sequencial e Consolidação

- A diferenciação progressiva consiste na apresentação de ideias ou conceitos mais gerais e inclusivos desde o início do processo de ensino e na progressiva

diferenciação dos detalhes e especificidades deste, por meio de exemplos, situações e exercícios.

- A reconciliação integradora ou integrativa consiste em explorar as “[...] relações entre conceitos e proposições, chamar a atenção para diferenças e semelhanças e reconciliar inconsistências reais e aparentes.” (MOREIRA, 2000, p. 4).
- A organização sequencial “[...] consiste em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo, de maneira tão coerente quando possível (observados os princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa) com as relações de dependência naturalmente existentes entre eles na matéria de ensino.” (MOREIRA, 2000, p. 4).
- A consolidação significa insistir no domínio do que foi progressivamente estudado antes da introdução de novos conhecimentos, respeitando a “premissa de que o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem subsequente.” (MOREIRA, 2000, p. 5).

2. As três etapas do processo didático, segundo Astolfi: Identificação, Fissuração e Superação.

- Identificação: esta etapa, tendo em vista a seguinte, tem como meta a identificação de diversas representações e maneiras de pensar no grupo;
- Fissuração: em que ocorre a desestabilização das representações e explicações dos estudantes devido ao estabelecimento de um conflito;
- Superação: após a desestabilização ou conflito inicial sofrido, o indivíduo se depara com um novo modelo representativo, permitindo resolver o problema que estava em aberto e aplicar esse modelo a novas situações, superando o obstáculo.

Com o propósito de relacionar a aprendizagem significativa com a teoria dos obstáculos à aprendizagem de Astolfi, pode-se interpretar como um tipo de obstáculos, a ausência de conceitos subsunçores adequados ou necessários para novas aprendizagens na estrutura cognitiva do estudante, ou particularmente, os conhecimentos prévios necessários para servir de conexão na aquisição do conceito de logaritmo.

Desse modo, elaborou-se o Quadro 2 (com base no trabalho de Farias (2013), e nas ideias dos obstáculos e da aprendizagem significativa) com as categorias de análise das manifestações dos alunos.

Quadro 2. Categorias de análise

Etapas do tratamento dos obstáculos	Obstáculos e aprendizagem
Identificação do obstáculo	<p>Obstáculos Epistemológicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Linguagem (vocabulário, significado das palavras e símbolos, representação simbólica). b) Subsunoçores (ausência, insuficiência). c) Conflito entre conceitos existentes e os novos. d) Conexão lógica (operações lógicas pouco desenvolvidas para apoderar-se do conceito). <p>Obstáculos Psicológicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Percepção: (dificuldade de perceber/visualizar/constatar fatos, dados e relações). b) Atenção, dispersão ou ansiedade. c) Problemas de concentração. d) Interesse pessoal (gosto, recusa, considera-se incapaz, auto-estima). <p>Obstáculos Culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Importância do tema. b) Incentivo dos grupos de convivência: família, escola e sociedade.
Fissuração do obstáculo	<p>Apoios ao enfrentamento dos obstáculos:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Iniciativa pessoal, colegas, professor, turma, família ou outros. b) Fonte: livros, sites, vídeos, ... c) Investigação: <ul style="list-style-type: none"> - observação de dados e fatos, - testes particulares, - relacionamento com situações conhecidas; - deduções;

	<p>- outras.</p> <p>Tipos de aprendizagens:</p> <p>a) Diferenciação Progressiva: relacionamento do conceito geral com os particulares.</p> <p>b) Reconciliação Integradora:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Debate sobre conceitos conflitantes. - Negação de hipótese ou opiniões. - Tentativas de melhoria nas representações simbólicas. - Tentativa de síntese de novos conceitos. - Convergência de opiniões.
Superação	<p>Organização Sequencial e Consolidação</p> <p>a) Expressão do novo conceito em linguagem natural falada ou escrita.</p> <p>b) Expressão do novo conceito em linguagem matemática.</p> <p>c) Aplicação do conceito em diferentes situações.</p>

Fonte: Elaborado pela autora

5. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DE ENSINO E ANÁLISE DOS DADOS

Nessa seção são apresentados alguns fragmentos dos registros produzidos pelas alunas, a descrição e análise da aplicação das atividades, dos obstáculos, das respectivas ações de superação e da relação dessas com as formas de aprendizagens dos conceitos envolvidos no estudo dos logaritmos, com base no Quadro de Categorias (Quadro 2).

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO MOMENTO 1

Os registros de cada momento pedagógico foram descritos agrupando os tipos de manifestações e analisados de acordo com as categorias, de modo a identificar os obstáculos e as tentativas de superação. Assim, não é objetivo deste trabalho analisar as construções individuais, mas sim as manifestações de modo geral.

No Momento 1 foi aplicada a folha de atividades “Operando com números grandes sem calculadora”,(APÊNDICE B). As estudantes foram orientadas a fazer uma leitura reflexiva das atividades com bastante calma e atenção, sem se preocupar com os possíveis erros e acertos. Cada estudante recebeu uma cópia da atividade, resolveu as questões e devolveu-a com as respostas na semana seguinte. Após as aulas remotas, as dúvidas surgidas durante a resolução das atividades, foram discutidas através de explicações e interações individuais da professora com cada aluna através de atendimento on-line.

As respostas da primeira questão são semelhantes e evidenciam que as alunas não gostam de operar números grandes, pois consideram as contas complicadas, extensas, demoradas e que com a calculadora é mais fácil e prático, conforme se observa nas respostas da Figura 5.

Figura 5 – Resposta da questão: O que você acha de fazer contas com os seguintes números sem calculadora? $3276858 \times 1022487 =$ $6553645678 \div 128 =$

Eu sinceramente prefiro usar calculadora para números grandes, além de ser mais fácil é mais prático

Eu não gosto muito, muitos números complicados e eu me atrapalho, prefiro usar calculadora

Acho complicado e demorado

Eu, particularmente não gosto dessas contas, pois são extensas e fica mais complicado de resolver.

Fonte: Dados da pesquisa

Classifica-se, nesse caso um obstáculo psicológico (OP1), associado ao (des)gosto e às dificuldades inerentes à execução dos algoritmos da multiplicação e extenso tempo de concentração. Provavelmente as alunas saibam executar as operações, mas simplesmente não gostam de fazê-lo manualmente, porque com a calculadora é mais fácil e prático, o que não constitui um obstáculo epistemológico. Assim, não é objetivo da professora e nem da pesquisa, superar o obstáculo (OP1), desenvolvendo o gosto pela execução de algoritmos enfadonhos, mas sim, mostrar uma outra forma de operar, que desperte, no mínimo, uma admiração pelo conhecimento.

Na atividade 2 foi utilizada uma tabela que tem por base a relação existente entre progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). As alunas não tiveram dificuldades em completar a tabela, visto que não fizeram perguntas e conseguiram resolvê-la de forma correta e satisfatória. Perceberam que bastava multiplicar por dois os números da primeira linha, e que a segunda linha, era composta pela sequência dos números naturais. O reconhecimento dessa propriedade da relação entre as progressões não apresentou obstáculos.

Figura 6 – Segunda atividade: completar a tabela com potências de 2

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
					524288	1048576	2097152												
					19	20	21												

... sequência.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
					524288	1048576	2097152												
					19	20	21												

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		

Fonte: Dados da pesquisa

A atividade 3 apresenta um algoritmo para calcular um produto. Todas as alunas seguiram as instruções propostas na atividade, conseguiram resolver as multiplicações, não encontraram dificuldades, pois entenderam que bastava substituir os valores na tabela e efetuar as somas para encontrar o resultado correto.

Depois de dominar as multiplicações com a tabela, as alunas tentaram fazer a última questão da atividade 3. Somente duas alunas responderam que é possível fazer de uma divisão, uma subtração, como pode-se observar nas respostas da Figura 7. Assim, identificou-se um obstáculo epistemológico (OE1): saber que multiplicação e divisão são operações inversas, assim como a adição e subtração e perceber a aplicação desses subsunçores na atividade, cujo tema será retomado na atividade 5.

Cada conhecimento é suscetível de ser um impedimento à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento. (TRINDADE, 1996, pp.3-4). Nesse caso, o conhecimento novo é a propriedade das sequências de PA e PG ensinadas de modo instrutivo, sem justificativa, mas que induz à propriedade, cuja sistematização

(expressão em linguagem natural, por enquanto) vai gerar a definição do logaritmo. A fissuração e a superação aconteceram através das discussões realizadas entre as alunas, na resolução da atividade 5, descritas mais adiante.

Figura 7 – Atividade 3: Operações de multiplicação e divisão com a tabela..

Sim, dá pra fazer.

Sim, pode ser utilizado para outras multiplicações.

Sim.

Confere, dá pra fazer com outros números.

Sim, tem como fazer com múltiplos de 1 e 3.

Sim, podemos fazer de uma multiplicação uma soma, uma divisão para uma subtração, não.

Confere, dá pra utilizar com outros números

Sim, tem como fazer com múltiplos de 1 e 3

Multiplicação e soma dá pra fazer, divisão e subtração não tem como fazer.

Fonte: Dados da pesquisa

Nas atividades 3 e 4 deu-se a fissuração e superação do obstáculo (OP1) uma vez que as alunas perceberam a coerência lógica do algoritmo e que não se trata de uma atividade enfadonha. A fissuração do obstáculo é fomentada quando há insatisfação do estudante para com suas representações, o que será promovido assim que os distintos pontos de vista ou a diferença dos enfoques dos estudantes sejam trabalhados pelo grupo, servindo como motivadores do progresso intelectual (WESTPHAL; PINHEIRO, 2005). A fissuração não necessariamente ocorrerá imediatamente depois da identificação, esse é um processo que demanda tempo, troca de experiências entre os sujeitos em etapas subsequentes do aprendizado, como foi observado nesse obstáculo e em Astolfi e Peterfalve (1997).

Figura 8- Atividade 4: Resolução dos produtos utilizando o algoritmo proposto.

a) $16384 \times 16 = 262.144$ b) $1024 \times 128 = 131.072$
 $\begin{array}{r} 14 \\ 4 \\ 16 \end{array} + \begin{array}{r} 4 \\ 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ 7 \\ 13 \end{array} + \begin{array}{r} 7 \\ 7 \end{array}$
c) $65536 \times 32 = 2097.152$ d) $8192 \times 128 = 1.048.576$
 $\begin{array}{r} 16 \\ 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ 7 \end{array}$

4-a) 16384×16 b) 1024×128
 $\begin{array}{r} 14 \\ + 4 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ + 7 \\ \hline 17 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 262144 \end{array}$ $\begin{array}{r} 131072 \end{array}$

c) 65536×32 d) 8192×128
 $\begin{array}{r} 16 \\ + 5 \\ \hline 21 \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ + 7 \\ \hline 20 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 2097152 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1048576 \end{array}$

a) $16384 \times 16 = 14+4^{18} = 262.144$ b) $1024 \times 128 = 10+7^{17} = 131.072$
c) $65536 \times 32 = 16+5^{21} = 2097.152$ d) $8192 \times 128 = 13+7^{20} = 1.048.576$

As resoluções mostradas na Figura 8 indicam a compreensão e aplicação correta do algoritmo, o qual não chegou a se constituir como obstáculo. Observa-se que a aprendizagem está associada à compreensão, ou seja, depende da atribuição de significado para as operações (aprendizagem significativa). As alunas relacionaram alguns conceitos existentes na sua estrutura cognitiva (números, adição, multiplicação) com um algoritmo novo (a ideia de adicionar as potências e obter o produto das potências) e verificaram que dá certo.

Na atividade 5, a maioria das estudantes não conseguiu elaborar um método para realizar as divisões com base no modelo das multiplicações, como mostram os registros da Figura 9 e a identificação na atividade 3 como (OE1).

Figura 9- Construção de um método para realizar divisões sem calculadora (Atividade 5).

Não consegui pensar em nada.

Não consegui pensar em nenhum método para realizar as divisões

Fonte: Dados da pesquisa

As estudantes que resolveram a atividade (portanto, não foi um obstáculo para elas), observaram que para realizar a divisão é necessário encontrar o dividendo e o divisor na primeira linha da tabela e em seguida localizar os números correspondentes na segunda linha, provavelmente por analogia com a multiplicação. Ou seja, o subsunção nesse caso é o algoritmo da multiplicação, o qual induziu o conhecimento novo, o algoritmo da divisão. A significação, nesse caso, é a associação com o algoritmo já dominado e a investigação através de testes particulares deu crédito à hipótese do algoritmo funcionar para a divisão. A analogia entre os processos de multiplicação e divisão e o sucesso dos testes, permitiram a generalização da propriedade, a qual foi integrada aos conhecimentos anteriores. Os procedimentos dessas alunas foram indutivos, do particular para o geral, próprio do que Ausubel chama de reconciliação integradora, desenvolvido de forma investigativa, motivado pela atividade proposta.

Ao serem informadas que duas colegas conseguiram encontrar uma forma de realizar os cálculos ocorreu uma divergência de opiniões. “As discussões matemáticas contribuem fortemente para a aprendizagem dos alunos, na medida em que colocam em jogo um conjunto de interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos.” (MARTINHO, 2014, p. 65). Para as estudantes que não resolveram a atividade 5, se estabeleceu o obstáculo epistemológico referido acima como (OE1), cuja superação não ocorreu de forma investigativa, mas através da explicação instrucional das colegas.

Figura10- Respostas sobre o método para realizar divisões sem calculadora (Atividade 5)

A ideia é a mesma que a de vezes com o
tabuleiro no final em vez de somar subtrai

porque construir um método, ao invés de multiplicar e somar,
dividir e subtrair.

Fonte: Dados da pesquisa

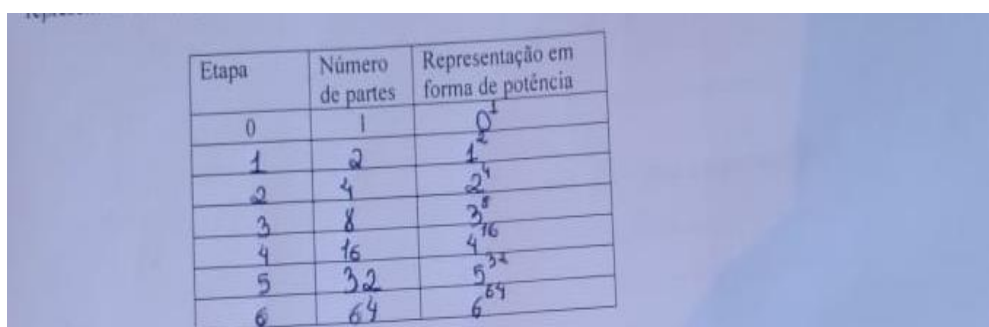
Dessa forma, conseguiram perceber na prática que é muito mais simples resolver uma soma ou subtração do que realizar produtos e divisões (principalmente envolvendo números muito grandes).

5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO MOMENTO 2

A previsão era de que todas conseguissem realizar essa atividade em uma aula, porém foi necessário estender esse prazo, pois concluiu-se que esse momento foi elaborado com muitos elementos. Outro fator observado e que gerou preocupação da pesquisadora foi a pouca participação e nenhum questionamento das alunas, durante as aulas on-line. Diante disso, decidiu-se por desenvolver os tópicos em duas aulas.

Somente uma aluna não conseguiu responder corretamente a atividade 1 (OP2), como mostra a Figura 11. Com o intuito de provocar um conflito sociocognitivo e fissurar esse obstáculo foi realizado um diálogo através de um aplicativo de celular, em que a pesquisadora pediu que a aluna resolvesse as potências que representou no quadro. Desse modo a aluna percebeu que não havia completado a tabela com a representação adequada. Constatou-se assim que a mesma não apresentava dificuldades com a resolução das potências (ausência de obstáculo epistemológico), mas que encontrou problemas na interpretação, resolvendo de forma mecânica, sem pensar no que estava fazendo.

Figura 11- Representação na forma de potência. (Atividade 1)



Etapa	Número de partes	Representação em forma de potência
0	1	0^1
1	2	1^2
2	4	2^4
3	8	3^8
4	16	4^{16}
5	32	5^{32}
6	64	6^{64}

Fonte: Dados da pesquisa

Identificou-se como um obstáculo psicológico, pois se manifestou equívocos de percepção e atenção na resolução da questão. A fissuração se deu por iniciativa da pesquisadora, ao provocar um conflito de informações, quando solicitou a resolução das potências apresentadas. A superação ocorreu através do conhecimento prévio, como a aluna compreendia potências, conseguiu encontrar as respostas e perceber que a forma que havia representado não estava correta.

A maioria das alunas respondeu de forma correta as atividades: 2, 3, 4 e 5.

Na atividade 2 as respostas foram semelhantes, conforme a figura 12. As estudantes compreenderam as elucidações da atividade anterior e escreveram a primeira definição de logaritmo, ainda em linguagem natural escrita e sem as restrições dos valores da base. Não foram constatados obstáculos de aprendizagem, provavelmente porque as atividades anteriores forneceram os significados de todos os subsunçores (base, expoente, potência e o próprio nome de logaritmo). Na linguagem de Ausubel, foi desenvolvida uma aprendizagem significativa com atividades orientadas pela professora, fornecendo os conceitos e algoritmos

necessários para a significação do conceito mais abrangente (o logaritmo) com predominância de reconciliação integradora (síntese de novos conceitos).

Figura 12- Definição de logaritmo. (Atividade 2)

Exponente a que se deve elevar um número
tomado como base para se obter outros números.

Fonte: Dados da pesquisa

Nas atividades 3 e 4 foram propostos exercícios de escrita e cálculo de logaritmos para a adaptação com o novo conceito. As respostas apresentadas foram satisfatórias, de acordo com a Figura 13, sem a identificação de obstáculos de aprendizagem. Essas atividades desenvolvem a fluência da linguagem matemática, com o uso do vocabulário recém aprendido e sua representação simbólica em exercícios. É tanto uma ação de associação dos significados às suas formas de representação simbólica, fluência com a linguagem e aplicação dos conceitos aprendidos.

Figura 13-Prática da primeira definição de logaritmo. (Atividades 3 e 4)

a) O logaritmo de 8 na base 2 é 3
 b) O logaritmo de 9 na base 3 é 2

a) $4^{\boxed{4}} = 256 \leftrightarrow \log_4 256 = \boxed{4}$ b) $\log_7 49 = \boxed{2} \leftrightarrow 7^{\boxed{2}} = 49$

c) $\log_5 125 = \boxed{3}$ d) $\log_3 81 = \boxed{4}$ e) $\log_{10} 10000 = \boxed{4}$

Fonte: Dados da pesquisa

Nas atividades 4 e 5, foram realizadas algumas perguntas a respeito da viabilidade do cálculo de logaritmos com base 1, base zero e base negativa, com o objetivo de tornar a

definição mais precisa (Reconciliação integradora, debate, melhoria nas representações e significados mais precisos). Somente uma aluna não respondeu corretamente quando a base é zero (Figura 14). Ao ser questionada individualmente sobre potências de base zero, constatou-se que a mesma não tinha dificuldades (obstáculo psicológico (OP3)), mas que foi falta de atenção, não constituindo um obstáculo epistemológico de aprendizagem. A fissuração e superação foram encaminhadas com a ação da pesquisadora, solicitando que a aluna refletisse sobre o que ela havia escrito.

Figura 14-Discussão sobre as exceções dos valores da base da definição de logaritmo. (Atividade 4)

> E se a base for 1?
 $32 = 1^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base 1 é? Qual a sua conclusão?
Não existe

> E se a base for 0?
 $32 = 0^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base 0 é? Qual a sua conclusão?
Sim pois vai dar 32

> E se a base for um número negativo?
 $32 = -2^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base -2 é? Qual a sua conclusão?
Se a base é negativa nenhum valor se encaixa

Não, for sempre fazer 1×1 , não importa quantas vezes será 1.

Não dá, porque daria 0.

Daria 5, com o sinal de sinal fica negativo.

Em nenhum é possível chegar a um resultado correto

A partir das considerações nas atividades 4 e 5 (Figuras 14 e 15), foi possível escrever definições de logaritmo mais elaboradas do que aquelas da Atividade 2 da Figura 12, inclusive com as restrições necessárias.

Figura 15- Atividade 5: exemplos em que não é possível efetuar a logaritmização.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \log_1 16 = \square \leftrightarrow 1 = 16 \quad \text{b) } \log_1 25 = \square \leftrightarrow 1 = 25 \quad \text{c) } \log_0 16 = \square \leftrightarrow 0 = 16 \quad \text{d) } \\ \log_0 25 = \square \leftrightarrow 0 = 25 \quad \text{e) } \log_{-3} 27 = \square \leftrightarrow -3 = 27 \quad \text{f) } \log_{-2} 8 = \square \leftrightarrow -2 = 8 \end{array}$$

A partir da observação desses casos, nos quais não é possível efetuar a logaritmização, será elaborada junto com os alunos a definição dos logaritmos:

Em nenhum é possível chegar a um resultado correto

Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim, para representar um logaritmo recorreu-se à forma matemática utilizando símbolos. A pesquisadora, através de aula on-line expositiva, fazendo associação ao que foi estudado anteriormente, apresentou a definição formal de logaritmo explorando as condições de existência, conforme a descrição a seguir.

Linguagem natural:

logaritmo de x na base b é y , pois b na y é x .

Linguagem simbólica matemática:

$\log_b x = y$, pois $b^y = x$, com x e b positivos e b diferente de 1.

A escrita das definições foi uma ação pedagógica de síntese do que foi aprendido sobre logaritmo. O uso de linguagens diferentes é uma tentativa aperfeiçoar a representação do conceito para tornar seu uso mais prático. Não há uma aprendizagem conceitual nova nessa ação, mas uma sofisticação da representação simbólica. A intenção, do ponto de vista da formação matemática, é a substituição da linguagem natural pela simbólica, a médio prazo.

Para que as alunas se acostumassem com a notação e ao mesmo tempo percebessem algumas propriedades dos logaritmos, nas atividades 6 e 7 (Figuras 16 e 17), foi proposto que usassem a definição para calcular alguns logaritmos.

Figura 16- Escrever os logaritmos usando a definição. (Atividade 6)

a) $\log_2 16 =$	Logaritmo de 16 na base 2 é <u>4</u>
b) $\log_4 16 =$	Logaritmo de 16 na base 4 é <u>2</u>
c) $\log_9 81 =$	Logaritmo de 81 na base 9 é 2
d) $\log_6 216 =$	Logaritmo de 216 na base 6 é 3

Fonte: Dados da pesquisa

Percebeu-se que todas resolveram essas atividades usando o conceito de base e não conseguiram usar a definição formal, indicando novo obstáculo epistemológico de linguagem (OE2), provavelmente devido à representação simbólica dessa definição. Mesmo que todos os elementos da definição fossem conhecidos (ausência de subsunçores associados a conceitos), a representação ficou tão complexa, que ao invés de tornar a aplicação mais fluída, provocou sua refutação. Além disso, deixaram em branco grande parte da Atividade 7 (Figura 17), identificado como um obstáculo epistemológico (OE3): ausência de subsunçores. Constatou-se que parte da dificuldade apresentada na atividade 7 decorre da defasagem no conceito de potenciação e de pouca habilidade algébrica no trato das equações exponenciais. Algumas estudantes não sabiam como representar um número na forma de potência com expoente zero, ou com expoente negativo.

Assim, foi necessário fazer mais uma aula e entrar em contato com as estudantes para identificar quais foram as dificuldades encontradas.

Figura 17- Cálculo de logaritmos usando a definição e indução de propriedades. (Atividade 7)

7- Calcule os logaritmos abaixo usando a definição:

a) $\log_3 3 = 1$ b) $\log_7 7 = 1$ c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} = 1$

Nos itens a, b e c você percebeu alguma particularidade. Qual?

O resultado será em todos os itens 1.

d) $\log_5 1 = 0$ e) $\log_7 1 = 0$ f) $\log_{\frac{1}{6}} 1 = 0$

O que você observou nos logaritmos dos itens d, e, f? Justifique

O resultado será igual também, porém 0.

g) $\log_5 5^2 =$ h) $\log_7 7^3 =$ i) $\log_{10} 10^5 =$ Você encontrou
alguma regularidade logaritmos dos itens g, h, i? Justifique

j) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$ k) $\log_5 \frac{1}{5} =$ l) $\log_7 \frac{1}{7} =$ Há alguma
regularidade nos itens j, k, l? Justifique

m) $2^{\log_2 16} =$ n) $3^{\log_3 27} =$ o) $7^{\log_7 49} =$
O que você observou nos itens m, n, o?

7- Calcule os logaritmos abaixo usando a definição:

a) $\log_3 3 = 1$ b) $\log_7 7 = 1$ c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} = 1$

Nos itens a, b e c você percebeu alguma particularidade. Qual?

Todos tem o mesmo resultado

d) $\log_5 1 = 1$ e) $\log_7 1 = 1$ f) $\log_{\frac{1}{6}} 1 = 1$

O que você observou nos logaritmos dos itens d, e, f? Justifique

Observei que todos dão um pois um multiplicado por ele mesmo independente da quantidade de vezes sempre vai dar um

g) $\log_5 5^2 =$ h) $\log_7 7^3 =$ i) $\log_{10} 10^5 =$ Você encontrou alguma regularidade logaritmos dos itens g, h, i? Justifique

j) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$ k) $\log_5 \frac{1}{5} =$ l) $\log_7 \frac{1}{7} =$ Há alguma regularidade nos itens j, k, l? Justifique

m) $2^{\log_2 16} =$ n) $3^{\log_3 27} =$ o) $7^{\log_7 49} =$
O que você observou nos itens m, n, o?

Fonte: Dados da pesquisa

Devido à pandemia e às aulas on-line ocorreu um atraso no desenvolvimento dos conteúdos de modo que o tema função exponencial não havia sido trabalhado. Assim, foi observado que esse obstáculo estava relacionado aos conhecimentos prévios em matemática.

Na insuficiência de conhecimentos prévios, Ausubel *et al* (1980, p. 144) propõem o recurso didático dos Organizadores Prévios, uma estratégia elaborada pelo educador onde o conteúdo é apresentado de forma a, deliberadamente manipular a sua estrutura cognitiva. Destina-se a facilitar a aprendizagem significativa, servindo de ligação entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber para que possa aprender o novo material de maneira significativa. É uma espécie de ponte cognitiva. (Moreira e Masini, 1982, p. 103) “A principal

função do organizador está em preencher o hiato entre aquilo que o aprendiz já conhece e o que precisa conhecer antes de poder aprender significativamente a tarefa com que se defronta”. (AUSUBEL *et al*, 1980, p. 144).

Considerando a importância de que o sujeito esteja com os subsunçores correspondentes ativos de modo que esteja disposto a incorporar o novo conhecimento, foi necessário fazer uma revisão de potenciação e resolver como exemplos algumas equações exponenciais simples.

Dessa forma, a fissuração se deu através de uma aula expositiva, na qual a professora recapitulou definições e propriedades importantes das potências e apresentou a resolução de equações exponenciais.

Em seguida, encaminhou-se a proposta de alguns exercícios, em que as alunas conseguiram responder, manipulando a definição do logaritmo (Figura 18).

Figura 18- Respostas do cálculo dos logaritmos usando a definição

The image shows four handwritten solutions for logarithmic equations:

- a) $\log_3 27 = x$**
 $27 = 3^x$
 $3^3 = 3^x$
 $x = 3$
- b) $\log_3 \frac{1}{81} = x$**
 $\frac{1}{81} = 3^x$
 $3^{-4} = 3^x$
 $x = -4$
- c) $\log_5 625 = x$**
 $625 = 5^x$
 $5^4 = 5^x$
 $x = 4$
- d) $\log_7 49 = x$**
 $49 = 7^x$
 $7^2 = 7^x$
 $x = 2$
 $7 \log_7 49 = 7^2 = 49$

Fonte: Dados da pesquisa

Assim ocorreu a superação do obstáculo, e, para finalizar foi feita uma sistematização de cada propriedade, Figura 19. As alunas responderam de forma correta e não apresentaram dificuldades, pois como reforçado anteriormente, estavam com as definições de potência e equações exponenciais bem fixadas.

Figura 19- Sistematização das propriedades logarítmicas. (Atividade 7)

No final do momento 2 será feita uma sistematização de cada propriedade:

- Quando a base do logaritmo é igual do logaritmando, o resultado é sempre 1.
 $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$
- Quando o logaritmando é um, o logaritmo é sempre 0.
 $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$
- Quando no logaritmando há uma potência cuja base é igual à base do logaritmo, o resultado do logaritmo é o exponente desta potência.
 $\log_a a^m = m$, pois $\log_a a^m = p \Leftrightarrow a^p = a^m$ portanto $p = m$
- Quando a base do logaritmo e o logaritmando forem números inversos o logaritmo será sempre -1.
 $\log_a \frac{1}{a} = -1$, pois $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- Quando o logaritmo for expoente de uma potência e a base desse logaritmo for igual a base dessa potência, o resultado será sempre o exponente.
 $a^{\log_a b} = b$, pois $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Fonte: Dados da pesquisa

5.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO MOMENTO 3

O objetivo deste encontro foi desenvolver e aplicar as propriedades dos logaritmos. Não houve grandes dificuldades para resolver os exercícios, visto que as técnicas de cálculo e os procedimentos envolvidos já tinham sido trabalhados anteriormente.

Todas as alunas conseguiram responder a atividade 1, as conclusões e comparações obtidas foram satisfatórias, Figura 20. Utilizando a tabela do momento 1 fizeram as relações corretamente e deduziram as propriedades que transformam o logaritmo do produto em soma de logaritmos, o quociente em subtração, o logaritmo de uma potência e mudança de base.

Figura 20- Resolução das atividades sobre propriedades operatórias dos logaritmos.
(Atividade 1)

a) Calcule $\log_2 128 \times 256 = \log_2 32768 = 15$

b) Calcule $\log_2 128 + \log_2 256 = 7 + 8 = 15$

c) O que você pode concluir a respeito dos itens a e b? Justifique

Os dois tem o mesmo resultado mesmo um sendo multiplicação e o outro soma

d) Calcule $\log_2 512 \div 8 = \log_2 64 = 6$

e) Calcule $\log_2 512 - \log_2 8 = 9 - 3 = 6$

f) O que você pode concluir a respeito dos itens d ,e? Justifique

Os resultados são os mesmos

g) Calcule $\log_2 2^5 = \log_2 32 = 5$

h) Calcule $5 \times \log_2 2 = 5 \times 1 = 5$

i) O que você pode concluir a respeito dos itens h e i? Justifique

Igual aos outros acima independente da conta o resultado é o mesmo

j) Calcule $\log_4 16 = x$ $16 = 4^x$
 $4^2 = 4^x = x = 2$

k) Calcule $\log_2 16$ e $\log_2 4$, divida os dois resultados

l) O que você pode concluir a respeito dos itens j e k? Justifique

Todos tem o mesmo resultado

$$\begin{array}{r} 16 \mid 4 \\ 4 \mid 4 \\ 1 \mid 4^2 \\ \hline \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

As propriedades foram elaboradas nas atividades 2 e 3 explicitando que para as propriedades dos logaritmos serem válidas é necessário que todos tenham a mesma base. As soluções apresentadas nas atividades, Figura 21, consideradas mais complexas, mostram amadurecimento das alunas, ou seja, o crescimento na aprendizagem.

Figura 21- Propriedades dos logaritmos. (Atividade 3)

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_c (a \cdot b) &= \log_c a + \log_c b \\ \text{b) } \log_3 (9 \cdot 27) &= \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5 \\ \text{a) } \log_c \left(\frac{A}{B}\right) &= \log_c A - \log_c B \\ \text{b) } \log_3 \left(\frac{27}{9}\right) &= \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1 \\ \text{a) } \log_a B^c &= c \cdot \log_a B \\ \text{b) } \log_3 9^5 &= 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10 \end{aligned}$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_a B &= \frac{\log_c A}{\log_c B}, a \neq 1 \text{ e } c \neq 1 \\ \text{b) } \log_3 5 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ propriedade: } \log_a (b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c \\ 2^{\text{a}} \text{ propriedade: } \log_a b/c &= \log_a b - \log_a c \\ 3^{\text{a}} \text{ propriedade: } \log_a b^c &= c \cdot \log_a b \\ 4^{\text{a}} \text{ propriedade: } \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (a, c } \neq 1) \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria conseguiu escrever os exemplos e suas resoluções. Somente duas alunas não conseguiram resolver a atividade 3, uma não conseguiu registrar em linguagem matemática e a outra deixou em branco, Figura 22.

Verificou-se que a primeira apresentou obstáculo psicológico (OP4), com problemas de atenção e percepção. A fissuração aconteceu através da desestabilização das representações levantadas. Houve alguns questionamentos e instruções da pesquisadora, sobre a transformação de linguagem numérica para algébrica através de atendimento individual, constatou-se que a aluna não havia interpretado corretamente. Pediu-se que a aluna fizesse mais algumas questões sobre o assunto não encontrando dificuldades na resolução. Dessa forma a superação foi alcançada.

A segunda estudante apresentou dificuldades na parte algébrica (OE4). Considerou-se um obstáculo epistemológico, com problemas de linguagem na representação simbólica e deficiência de conhecimentos prévios. Portanto, foi necessário trabalhar de forma individual com essa aluna.

Levando em consideração as lacunas nesse t3pico, a pesquisadora procurou auxiliar na compreens3o da simbologia envolvida. Assim, realizou-se um encontro online com a estudante com a exposi3o de exemplos simples para ilustrar as explica33es. A fissura3o e supera3o foram alcan3adas atrav3s da resolu3o de alguns exerc3cios propostos, bem como a intera3o e a troca de ideias, em que a aluna conseguiu escrever cada uma das propriedades em linguagem matem3tica.

Figura 22- Resolu3o das atividades 2 e 3

a) $\log_7 (3 \cdot 5) = \log_7 3 + \log_7 5$
 b) $\log_4 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 7$

Exemplos:

a) $\log_7 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_7 2 - \log_7 3$
 b) $\log_2 \left(\frac{9}{8}\right) = \log_2 9 - \log_2 8$

a) $\log_7 8^3 = 3 \cdot \log_7 8$
 b) $\log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 2$

Exemplos:

a) $\log_2 7 = \frac{\log_5 7}{\log_5 2}$
 b) $\log_4 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4}$

1ª propriedade: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
 2ª propriedade: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 3ª propriedade: $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
 4ª propriedade: $\log_a a = \log_a b^{\frac{1}{b}} = \log_a b$

3-
 1-
 2- $\log_c \left(\frac{2}{b}\right) = \log_c 2 - \log_c b$
 3-
 4-

Fonte: Dados da pesquisa

Com as tarefas realizadas as alunas conseguiram se familiarizar com os logaritmos, porém, algumas vezes, tiveram dificuldades de generalizar ao formular as respostas. Essas atividades, dentre diversas outras possibilidades, foram elaboradas, pois a resolução foi realizada de forma experimental. Além dos resultados que foram induzidos pelas perguntas feitas, as conclusões retiradas foram as condições de existência, as propriedades operatórias e a linguagem matemática exigida no assunto.

5.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO MOMENTO 4

Trabalhando com a gênese histórica dos logaritmos explorou-se que eles foram criados quando não existiam calculadoras e que surgiram justamente para facilitar a operação com números de grandes. Mas hoje com os computadores e calculadoras existentes, qual a utilidade dos logaritmos? O objetivo desse momento foi mostrar algumas aplicações dos logaritmos na matemática e em outras áreas do conhecimento.

Desta maneira, neste encontro, as alunas tiveram o primeiro contato com situações do cotidiano que envolve logaritmos. Nesta atividade há um exemplo onde foi apresentado um método que relaciona a altura de uma árvore em função do tempo. Com isso, é dado um modelo matemático que serviu de base para a resolução das perguntas.

Todas as alunas responderam corretamente as questões. No item (a) da Atividade 1 foi perguntado qual é a altura da árvore no momento que ela foi plantada. Para isso, as estudantes tiveram em mente que no momento do plantio não se passou nenhum ano, portanto, t deveria ser zero. Segue o modelo de resolução na Figura 23. No item b, foi questionado qual a altura da árvore após 26 anos. Para a solução do problema, as alunas substituíram o t por 26 e resolveram a atividade corretamente.

Figura 23- Resolução da atividade 1.

- a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura? *Sua altura é de 1,5 m.*
- b) Transcorrido 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores? *Sua altura será de 4,5 m.*

1-a) $t = 0$

$$h = 1,5 + \log_3 (0+1)$$

$$h = 1,5 + \log_3 1 \rightarrow \log_3 1 = x$$

$$h = 1,5 + 0 = 1,5$$

$$1 = 3^x$$

$$3^0 = 3^x$$

$$x = 0$$

b) $t = 26$

$$h = 1,5 + \log_3 (t+1)$$

$$h = 1,5 + \log_3 (26+1)$$

$$h = 1,5 + \log_3 27$$

$$h = 1,5 + 3$$

$$h = 4,5$$

27		3
9		3
3		3
1		3 ³

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, encerrou-se a investigação, onde o objetivo principal foi a apresentação por parte das estudantes de novas aplicações dos logaritmos. Sugeriu-se que as mesmas apresentassem de forma escrita, através de pesquisa, fenômenos que abordassem o tema.

Duas estudantes não elaboraram o trabalho, três pesquisaram na internet e duas elaboraram questões semelhantes à atividade 1.

Figura 24- Resolução das atividades de aplicação dos logaritmos. (Atividade 2)

a) $t = 0$

$$h = 1,2 + \log_2 (t+1)$$

$$h = 1,2 + \log_2 (0+1)$$

$$h = 1,2 + \log_2 1 \rightarrow \log_2 1 = x$$

$$h = 1,2 + 0 = 1,2$$

$$1 = 2^x$$

$$2^0 = 2^x$$

Sua altura é 1,2 m.

$$x = 0$$

b) $t = 31$

$$h = 1,2 + \log_2 (t+1)$$

$$h = 1,2 + \log_2 (31+1)$$

$$h = 1,2 + \log_2 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$$

$$32 = 2^5$$

$$h = 1,2 + 5$$

$$h = 6,2 \text{ m}$$

32		2
16		2
8		2
4		2
2		2
1		2 ⁵

a altura será de 6,2 m

Fonte: Dados da pesquisa

As investigações pela internet trouxeram fenômenos relacionados ao crescimento populacional, substância radioativa e matemática financeira.

Figura 25- Pesquisa de uma aluna sobre aplicação dos logaritmos. (Atividade 2)

Exemplo de problema: Na geografia

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população dessa cidade dobrará, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População de ano-base = P_0

População após um ano = $P_0 \cdot (1,03) = P_1$

População após dois anos = $P_0 \cdot (1,03)^2 = P_2$

População após x anos = $P_0 \cdot (1,03)^x = P_x$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$$P_x = 2 \cdot P_0$$

$$P_0 \cdot (1,03)^x = 2 \cdot P_0$$

$$1,03^x = 2$$

Aplicando logaritmo

$$\log 1,03^x = \log 2$$

$$x \cdot \log 1,03 = \log 2$$

$$x \cdot 0,0128 = 0,3010$$

$$x = 0,3010 / 0,0128$$

$$x = 23,5$$

A população dobrará em aproximadamente

23,5 anos.

tilibra

Fonte: Dados da pesquisa

As aplicações, em geral, são oportunidades de reconhecer os conceitos aprendidos em situações novas. Se o aluno faz esse reconhecimento, usa os conceitos aprendidos para resolver novos problemas, isso significa que houve aprendizado. No registro apresentado na Figura 24 é utilizada a definição de logaritmo e a noção de função. Na Figura 25, além desses, é resolvida uma equação com logaritmo. Isso mostra o domínio da linguagem matemática, das habilidades algébricas e o nível de entendimento dos significados dos termos usados nas aplicações.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações retomam-se aspectos relevantes refletindo sobre questões metodológicas e circunstanciais da pesquisa, os obstáculos à aprendizagem e o processo de elaboração conceitual dos logaritmos:

1. Sobre as questões metodológicas e circunstanciais:

As aulas remotas durante essa investigação se constituíram um desafio. Durante a pandemia houve a necessidade de pensar a escola retirando a sala de aula, o ambiente que sempre foi o lugar de estabelecer os vínculos principais de mediações de conhecimento. Diferente do convívio em sala de aula, no formato presencial, se deu a alteração das atividades escolares e dos modelos e estratégias adotadas para a prática docente, e a relação dos estudantes com a escola. Desse modo, foi imprescindível se adaptar à nova realidade. Devido à insuficiente participação oral das alunas, a cada encontro de estudos, tornou-se fundamental que a pesquisadora estivesse atenta às produções matemáticas de cada participante para realizar as intervenções, problematizações e provocações necessárias.

A sala de aula é lugar de descobertas, conflitos de ideias, pensar cientificamente, erros e acertos, novas tentativas, retificações e experimentação, juntos professor e alunos constroem conhecimentos, reorganizam esquemas e superam obstáculos, considerando que a aprendizagem ocorre diariamente, desde as pequenas observações às grandes reformulações, cada novo conhecimento permite uma aproximação maior com o objeto. (Burlamaqui, 2019)

A adoção do ensino remoto trouxe algumas limitações nos procedimentos de coleta e análise de dados. Evidenciaram-se as relações entre emoções e interações na mediação pedagógica, tais como: as dificuldades com o registro dos diálogos e comunicações entre alunas, entre a pesquisadora e alunas, muitos detalhes das falas diretas (expressões faciais, perguntas não feitas porque a exposição era remota) podem não ter sido apontados.

Dessa forma destacou-se a importância dos registros escritos e a complementação com a comunicação por aplicativos, por mensagens e por redes sociais para se expressar e partilhar questionamentos e informações. Esses elementos conduziram a situações particularmente relevantes para a investigação, a apontadores para momentos das aulas onde se evidenciaram processos de raciocínio, a ideias para as observações seguintes e a análise dos dados observados.

2. Sobre os obstáculos à aprendizagem e a construção do conceito de logaritmo

As atividades de ensino foram criadas com o intuito de desenvolver significados aos conceitos matemáticos, no sentido ausubeliano de conexão com conceitos já dominados pelas alunas. A estratégia de situar o problema do cálculo com números grandes na história associa a dificuldade vivenciada dos estudantes com estas operações a um problema antigo da ciência, hoje resolvido com calculadoras e computadores. A proposição de análise de fatos matemáticos, tais como a comparação das progressões na forma de réguas e a observação de resultados de casos particulares, levou à investigação de propriedades, não necessariamente como um ensino *por descoberta*, mas um ensino de *indução de descobertas*, adequada aos limites de tempo e espaço escolares e que viabilizou as etapas de observação, reconhecimento de regularidades, formulação e verificação de hipóteses e generalização, características das metodologias ativas de construção do conhecimento.

Alguns obstáculos psicológicos e epistemológicos foram encontrados, durante a investigação, na apropriação do conceito de logaritmos. Os principais obstáculos psicológicos foram: problemas de atenção, percepção e concentração, cuja fissuração foi implementada através da interação da professora com as alunas, onde ocorreu a desestabilização das representações levantadas. Na medida em que as estudantes analisavam seus registros e constatavam os equívocos efetuou-se à superação desses obstáculos.

Os principais obstáculos epistemológicos foram: a dificuldade com potenciações, a dificuldade e/ou defasagem no estudo da função exponencial, defasagem de conteúdos da álgebra do ensino fundamental, problemas na interpretação dos enunciados. A fissuração e superação foram alcançadas realizando atendimento individual e/ou em grupo com as estudantes, através de encontros online, com a exposição de exemplos das propriedades das potências, de equações exponenciais e linguagem algébrica para ilustrar as explicações, resolução de alguns exercícios propostos, bem como a interação e a troca de ideias.

As limitações algébricas e aritméticas foram facilmente compreendidas por esta pesquisadora, que verificou ser fruto de uma defasagem na aprendizagem de conceitos básicos, como, por exemplo, em relação à operação de potenciação e suas propriedades. A pouca habilidade no trato das equações exponenciais justificou-se devido ao atraso no desenvolvimento dos conteúdos, em decorrência da pandemia, de modo que o tema função exponencial não havia sido trabalhada.

Pode-se afirmar que o conhecimento prévio, tomado como ponto de partida para composição de um diagnóstico da realidade, foi uma variável importante na configuração do processo ensino e aprendizagem. Os dados analisados permitiram concluir que a compreensão dos conceitos envolvidos no conceito geral de potenciação assumiu um papel central na elaboração de significados do conceito e das propriedades dos logaritmos. Esses conhecimentos, quando presentes na estrutura cognitiva das estudantes, serviram de aportes para as novas aquisições, reforçando a tese dos subsunçores de Ausubel.

Na ausência de subsunçores, Ausubel (1980, p. 144) propõe o uso de organizadores prévios que sirvam de ancoradouro para o novo conhecimento e levem ao desenvolvimento de conceitos que facilitem a aprendizagem subsequente. Com essa premissa a professora, pautada no processo de construção do conteúdo matemático, procurou fazer uso desses organizadores prévios.

De acordo com Moran (2013, p. 151), a mediação pedagógica é “a atitude, o comportamento do professor que se coloca como um facilitador, um incentivador ou um motivador da aprendizagem, que se apresenta com a disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e a sua aprendizagem [...]”

Aprender está ligado mais diretamente a um sujeito (que é o aprendiz) que, por suas ações, envolvendo ele próprio, os outros colegas e o professor, busca e adquire informações, dá significado ao conhecimento, produz reflexões e conhecimentos próprios, pesquisa, dialoga, debate, desenvolve competências pessoais e profissionais, atitudes éticas, políticas, muda comportamentos, transfere aprendizagens, integra conceitos teóricos com realidades práticas [...], resolve problemas. (MORAN, 2013, p.142).

O professor utilizando os princípios e pressupostos da Aprendizagem Significativa como referencial teórico e prático para subsidiar sua prática docente, permite desenvolver uma mediação pedagógica dos conteúdos disciplinares de forma mais eficiente. Diante disso, o trabalho pedagógico, na perspectiva ausubeliana, a interação entre professor, aprendiz e os conteúdos a serem trabalhados e aprendidos são relevantes para consolidação da aprendizagem de forma construtiva. (Souza, 2018, p.35)

Como ocorreu a construção do conceito de logaritmo?

Esta construção ocorreu, pela elaboração, passo a passo, dos significados de cada conceito⁵ envolvido no conceito-objetivo de logaritmo, através:

a) da motivação de problemas a investigar, seja o problema geral das dificuldades de operação com números grandes ou de cada exercício proposto;

b) do material de ensino: atividades ordenadas sequencialmente com objetivos definidos em torno da significação dos elementos do conceito geral;

c) da interação entre os sujeitos: mesmo com as dificuldades de comunicação no modo remoto, a troca de informações entre colegas e a ação da professora auxiliando a superação de obstáculos foi decisiva;

d) de processos de diferenciação progressiva (quando os algoritmos eram fornecidos, nas sínteses do conceito de logaritmo e das propriedades) e de reconciliação integradora (método indutivo de reconhecimento de fatos e elaboração de sínteses).

A pesquisa mostrou que um material didático com situações que promovam a significação dos conceitos, em um ambiente social que permita a troca de experiências, são elementos decisivos para a aprendizagem, nas condições escolares.

A abordagem do presente trabalho levou em conta as manifestações gerais da turma. Trabalhos futuros podem conduzir investigações considerando a evolução de cada estudante separadamente, mesmo considerando as interações sociais de sala de aula, da construção do conceito e das propriedades do logaritmo.

⁵ Progressão Aritmética e Geométrica (sequência numérica, termos, razão, termo geral); Relação entre a PA e PG (propriedade); Potência (base, expoente, potência); Definição e propriedades do logaritmo.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL David P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Tradução: Lígia Teopisto. Lisboa: Platano, 2003.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. (1980). **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. **A Didática das Ciências**. Tradução: Magda S. S. Fonseca. Campinas, SP: Papyrus, 1990.

ASTOLFI Jean-Pierre; PETERFALVI Brigitte. Obstacles et construction de situations didactiques en sciences expérimentales. *Aster*, Paris n ° 16, p. 104-141, 1993.

_____. Strategies de travail des obstacles dispositifs et ressorts. *Aster, Paris*, n ° 25, p. 193-216, 1997.

ASTOLFI, Jean Pierre. Los obstáculos para el aprendizaje de conceptos en ciencias: la forma de franquearlos didácticamente. In. PALACIOS, C., ANSOLEAGA, D. & AJOS, A (Org). **Diez años de investigación innovación enseñanza de las ciencias**. Madrid, CIDE. 1993. p.289- 306.

ASTOLFI, Jean Pierre. **Jean Pierre Astolfi**: depoimento. Entrevistadora: Bernadette Feury. Tradução do texto: Adriana Mohr com a colaboração de Fernando Dias de Ávila Pires Rev. Ensaio Belo Horizonte. v.13 n.02 p.173-186. mai-ago 2011.

_____. **El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos**. Enseñanza de las Ciencias. v.12, n. 2, p. 206-216, 1994.

_____. El tratamiento didáctico de los obstáculos epistemológicos. **Revista educación y pedagogía**. vol. XI n. 25.1998.

_____. **El “error”, un medio para enseñar**. Díada/sep biblioteca para la actualización del magisterio. México, 2004, p. 7 -25.

ASTOLFI, Jean-Pierre et al. **Mots-clés de la didactique des sciences: repères, définitions, bibliographies**. Bruxelles: De Boeck & Larcier, 1997.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de L. de A. Rego e A. Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2011.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa**. R. B. E. C. T., vol 5, número 2, mai-ago.2012.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo, Blucher, 1974.

BURLAMAQUI, Ana Kerolaine Pinho; AGUIAR José Vicente de Souza; BATISTA Leandro Nogueira. O “erro” na aprendizagem: um indicador de obstáculo na cognição. VI Congresso Nacional de Educação, 2019.

CAMPOS, Bruno de Oliveira. **Utilização de simulações computacionais no ensino de física, na área da termologia**. 84 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física). Universidade Federal de Alfenas. Alfenas, 2017.

CARVALHO, Carlos Ronaldo Cardoso de. **O uso de logaritmos no campo dos números complexos**. 2015, 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). Instituto Federal do Amazonas. Manaus, 2015.

CEDRAN, Débora Piai Cedran; KIOURANIS Neide Maria Michellan. Teoria dos Campos Conceituais: visitando seus principais fundamentos e perspectivas para o ensino de ciências. **ACTIO: docência em ciências**, Curitiba, v. 4, n. 1, p. 63-86, jan./abr. 2019.

CERGOLI, Daniel. **Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula**. 2017. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2017.

CEZARE, Paola Sussai Luz. **Obstáculos epistemológicos e pedagógicos em relação à adaptação biológica: conceitos e propostas pedagógicas**. 86 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2016.

ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA PROFESSORA GENI COMEL. **Projeto político pedagógico 2020**. Chapecó, 2020.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011. Tradução: Hygino H. Domingues.

FARIAS, Tiago; SIMÕES, Bruno dos Santos; TRINDADE, Elizabeth Cristine Adam. **Tentativa de Superar Obstáculos de Aprendizagem**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.6, n.3, p.121-150, novembro 2013 ISSN 1982-5153

FERREIRA, Ronize Lampert; BISOGNIM, Eleni. **O estudo de logaritmo por meio de uma sequência de ensino: a engenharia didática como apoio metodológico**. Experiências em Ensino de Ciências, v.2, p. 64-78, 2007.

FERRO, Maria da Glória Duarte; PAIXÃO, Maria do Socorro Santos Leal. **Psicologia da aprendizagem: Fundamentos teórico-metodológicos dos processos de construção do conhecimento**. Teresina: Edufpi, 2017.

FIorentini, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3ª Ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **História Oral e Educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

KIKUCHI, Luzia Maya. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a teoria dos campos conceituais**. 136 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

LIMA, Patrick Oliveira de. **Trajatória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas**. Disponível em http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/86-1-A-gt11_lima_ta.pdf. Acesso em janeiro de 2020.

LIMA, Rafael Pontes. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II**. 2014. 240f. Universidade Federal do Pará. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica. Macapá, 2014.

LOURENÇO, Emanuel Gomes. **O GeoGebra como ferramenta de ensino de logaritmo**. 2013, 58 f. Dissertação - Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Mossoró, 2013.

MAOR, Eli. e : **A História de um número**. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro, Record, 2006.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014). **Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Braga: APM., pp. 65–78.

MARTINS, Eugenio Brito; PEREIRA, Ana Carolina Costa; FONSECA Paulo Henrique. **Redescobrimo o conceito de logaritmo por meio da construção da régua de cálculo linear**. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, v. 6, n. 3, p. 47 – 65, Setembro, 2016 ISBN: 2236-2150.

MORAN, José M.; MASETTO, Marcos T.Masetto; BEHRENS, Marilda A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: São Paulo: Papirus, 2013. 21ª ed. Rev. Atual.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências – V7(1)**, pp. 7-29, 2002.

MOREIRA, Marco Antônio. Aprendizagem significativa crítica. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 3., 2000, Porto Alegre. **Anais**. Porto Alegre, set. 2000.p. 33-45.

_____ **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente**. In: Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review – V1(3), 2011. p. 25-46.

_____ **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília, Ed. UNB, 2006.

_____ **O que é afinal aprendizagem significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 2010. Em (<http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>) acesso em maio de 2019.

_____ **Aprendizagem significativa, campos conceituais e pedagogia da autonomia: implicações para o ensino.** Versão artigo de conferências Plenárias na XVII Reunión de Enseñanza de la Física, Córdoba, Argentina, setembro de 2011 e no EDUCON, Aracajú, Sergipe, Brasil, setembro de 2015. Publicado em espanhol no periódico Aprendizagem Significativa em Revista, 2(1): 44-65, 2012.

_____ **Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências: Aprendizagem Significativa.** Porto Alegre, UFRGS, 2016. Em <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios6.pdf> acesso em agosto de 2019.

_____ **Aprendizagem significativa, campos conceituais e pedagogia da autonomia: implicações para o ensino.** Versão artigo de conferências Plenárias na XVII Reunión de Enseñanza de la Física, Córdoba, Argentina, setembro de 2011 e no EDUCON, Aracajú, Sergipe, Brasil, setembro de 2015. Publicado em espanhol no periódico Aprendizagem Significativa em Revista, 2(1): 44-65, 2012.

MOREIRA, M. A.; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1982.

NETO, José Roque Damasco; COAN, Lisani Geni Wachholz. **Fundamentos da didática das ciências e da matemática.** 2. ed. Florianópolis : Publicações do IF-SC, 2012.

OLIVEIRA, Andréia Julio de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica.** 2005, 123 f. Dissertação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte (Centro de Ciências Exatas e da Terra). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Natal, 2005.

PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar.** Tradução: Patrícia Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PINTO, Michael de Lima Balzana de Melo. O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar. 2016, 100 F.. Dissertação- Universidade Federal do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2016.

PRUDÊNCIO, Márcia Elida Domingos. **Contribuições para a superação dos obstáculos epistemológicos e didáticos presentes no ensino aprendizagem da cinemática no ensino médio.** 2017, 249 f. Dissertação – Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.

QUEIROZ, José Carlos S. **Os logaritmos nos livros didáticos de matemática: análise da abordagem na perspectiva da educação matemática.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, 2013 ISSN 2178-034X Página 14.

QUINTAS, Marília Chaves. **Aprendizagem significativa de logaritmo: um relato de experiência.** 2013, 43 f. Dissertação- Universidade Federal do Amapá. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Macapá, 2013.

RAMOS, Simone Sotozono Alonso. **Logaritmos: uma abordagem didática.** 2015, 110 f. Dissertação - Universidade Federal do Paraná. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2015.

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. **Logaritmo no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática.** 2010, 219 f. Dissertação- Universidade Federal de São Carlos. Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências Exatas, São Carlos, 2010.

SAMPAIO, João Carlos. **John Napier, Henry Briggs e a invenção dos Logaritmos.** Departamento de Matemática - Ufscar, 2010. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>>. Acesso em: dezembro 2019.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Sequência didática: função exponencial e logarítmica.** 2018.

SILVA, Daniela Mendes Vieira da Silva. **Logaritmo: o que dizem alunos do Ensino Médio sobre este conceito.** Encontro Brasileiro de estudantes de pós-graduação em Educação Matemática. Curitiba, 2016

SILVA, Vera Lúcia Rodrigues da. **A Contextualização e a Valorização da Matemática: Representações Sociais de Alunos do Ensino Médio.** Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica GT 3 – Educação Matemática no Ensino Médio. 2004.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões para sala de aula.** 2011, 141 f. Dissertação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências Naturais.

SOARES, Luís Havelange. **Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica.** 2009, 141 f. Dissertação - Universidade Federal da Paraíba. Programa de Pós- Graduação- Mestrado em Educação.

SOUSSAN, Georges. **Como ensinar as ciências experimentais?** Didática e Formação. UNESCO 2003 – Escritório da UNESCO no Brasil. BRASÍLIA 2003.

SOUZA, Cleângela Oliveira; SILVANO Antônio Marcos da Costa; LIMA Ivoneide Pinheiro de LIMA. Teoria da aprendizagem significativa na prática docente. **Revista ESPACIOS.** ISSN 0798 1015 Vol. 39 (Nº 23), 2018, p. 27-37.

TAUCEDA Karen Cavalcanti; DEL PINO, José Cláudio Del Pino. Processos cognitivos e epistemologias da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, do ensino narrativo e do aprender a aprender. **Ciências & Cognição.** 2014; Vol. 19(2) 256-266.

TRINDADE, José Análio de Oliveira. **Obstáculos Epistemológicos à aprendizagem do conceito de função**. Anais do II Seminário de Pesquisa em Educação – Região Sul. UFSC. 1999.

UJIE, Nájela Tavares et al . Os Conhecimentos Prévios de Matemática de Estudantes do Ensino Fundamental: O Que é Matemática? De Onde Ela Veio? Como Seria um Mundo sem Matemática? **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 10, n.1, p. 57-73, maio 2017.

WENDLAND, Caroline Vanessa. **Logaritmos e história da matemática: elaboração de um material paradidático**. 2019, 153 f. Dissertação- Universidade do Estado de Santa Catarina .Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

WESTPHAL, Murilo; PINHEIRO, Thais Cristine. **O objetivo obstáculo segundo Astolfi: uma análise da formação prática do professor de ciências**. Disponível em <http://www.cienciamao.usp.br/dados/snef/oobjetivoobstaculosegund.trabalho.pdf>. Acesso em 30 de agosto de 2019.

VIDIGAL, Carlos Eduardo Ladeira. **(Re)significando o conceito de logaritmo**. 2014. 133 f. Dissertação Pontifícia- Universidade Católica de Minas Gerais PUC-MINAS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2014.

APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)**Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFFS**

Prezado participante,

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa **A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO**, desenvolvida pelo Profe. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges, docente do Curso de Matemática – Licenciatura, da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Campus de Chapecó, e por sua orientanda do PROFMAT, Adriana Salet Galupo cujo objetivo é investigar como os alunos constroem o conceito de logaritmos. Essa pesquisa se justifica, pois examinar como é construído o conceito de logaritmos pode nos auxiliar a fazer com que o aluno entenda, atribua sentido e significado a esse conceito, proporcionando uma melhor compreensão, superando a memorização e conseqüentemente alguns problemas de aprendizagem.

O convite a sua participação se deve ao fato de você estar cursando a 1ª Série do Ensino Médio e estudará aquele conceito na disciplina de Matemática, no segundo semestre de 2020. É importante a sua participação na pesquisa, pois as atividades a serem desenvolvidas por você poderão contribuir para o aprendizado com significado dos conteúdos matemáticos envolvidos. As atividades da pesquisa serão desenvolvidas no horário de aula, aplicadas pela professora Adriana, sendo que estão previstos cinco encontros, de 45 minutos, para as mesmas. As atividades compreendem em realizar atividades individuais e em pequenos grupos, na forma de questões e responder perguntas de matemática.

A coleta de dados dar-se-á por meio de observação, registrada em diário de bordo, fotos, bem como análise dos materiais escritos pelos alunos, além da resolução de exercícios. A fim de não expor a identidade de cada aluno, iremos propor que cada um escolha um pseudônimo para si. Sua participação não é obrigatória e você tem plena autonomia para decidir se quer ou não participar, bem como desistir da colaboração neste estudo no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação e sem nenhuma forma de penalização. Como a pesquisa ocorrerá no horário da aula, caso opte por não participar da pesquisa, você desenvolverá a mesma atividade inerente ao conteúdo que está sendo estudado e terá todo o apoio da professora Adriana, porém sua participação não será registrada ou considerada na pesquisa. Não será atribuído(a) nenhum(a) peso(nota) às atividades desenvolvidas na pesquisa e deste modo as mesmas não influenciarão na nota da disciplina de Matemática. Você não será penalizado de nenhuma maneira caso decida não consentir sua participação, ou desista da mesma. Você não receberá remuneração e nenhum tipo de recompensa nesta pesquisa, sendo sua participação voluntária. Serão garantidas a confidencialidade e a privacidade das informações por você prestadas. Qualquer dado que possa identificá-lo será omitido na divulgação dos resultados da pesquisa e o material armazenado em local seguro, no ambiente de trabalho, na UFFS, pelo pesquisador responsável pela pesquisa e caso necessite, será descartado após 5 anos, de acordo com a legislação vigente à época. A qualquer momento, durante a pesquisa, ou posteriormente, você poderá solicitar dos pesquisadores informações sobre sua participação e/ou sobre a pesquisa, o que poderá ser feito através dos meios de contato explicitados neste Termo. Sua privacidade será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de alguma forma, lhe identificar, será mantido em sigilo pelo pesquisador. O benefício direto relacionado

com a sua colaboração nesta pesquisa é a contribuição para a aprendizagem de logaritmo. Os riscos aos participantes são de dois tipos: 1) Identificação da autoria nas respostas das atividades, e 2) constrangimento no acompanhamento das atividades a serem realizados pelos alunos. Para minimizar o risco de identificação, todo material escrito pelos estudantes será identificado com código/participante, evitando a identificação pessoal. O acompanhamento da evolução da aprendizagem será feito com base neste código. Os questionários e o material do registro da solução dos exercícios por parte dos estudantes, bem como as anotações a serem realizadas pela Profa. Adriana que aplicará e acompanhará a pesquisa serão mantidos sob a guarda do pesquisador em local conforme já descrito. Nenhuma identificação pessoal, tal como nome, turma ou curso será utilizada. Nos relatórios e artigos publicados, a referência aos dados, será feita apenas como "participantes", sem qualquer menção aos códigos/participantes ou outra forma de identificação específica. Com relação aos riscos de constrangimento, a aprendizagem será acompanhada com registros escrito e diálogo sobre os procedimentos do aluno, sem qualquer objetivo de avaliação ou punição. Os riscos de constrangimento na pesquisa são menores do que os da relação professor-aluno. Pretende-se com a investigação, verificar as variações do nível de compreensão do aluno sobre o conhecimento trabalhado. Questionamentos sobre procedimentos utilizados pelo aluno, farão com que este reflita sobre suas práticas. Diante de qualquer situação de constrangimento, o pesquisador compromete-se em interromper a atividade. Os resultados obtidos na pesquisa serão divulgados para a turma e a escola, via relatório impresso, assim que a análise dos dados for concluída, a defesa de sua dissertação for realizada e aprovada. Caso concorde em participar, uma via deste termo ficará em seu poder e a outra será entregue ao pesquisador. Não receberá cópia deste termo, mas apenas uma via. Desde já agradecemos sua participação!

Chapecó, ____ de _____ de 2020

PEDRO AUGUSTO PEREIRA BORGES⁶

Pesquisador Responsável

Contato profissional com o(a) pesquisador(a) responsável:

Tel: (49 – 99169 6314) ou (49 – 2049 6576)

e-mail: pedro.borges@uffs.edu.br

Declaro que entendi os objetivos e condições de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

Nome completo do (a) participante: _____

Nome completo do (a) responsável pelo participante: _____

Assinatura do responsável pelo participante: _____

⁶Endereço para correspondência:

Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS - Rodovia SC 484 Km 02, Bloco dos Professores, sala 307, Fronteira Sul, CEP 89815-899 Chapecó - Santa Catarina – Brasil.

APÊNDICE B – ATIVIDADES - MOMENTO 1

Momento 1- Fazendo contas com números grandes sem calculadora

1- O que você acha de fazer contas com os seguintes números sem calculadora?

$$32768 \times 1024 =$$

$$65536 \div 128 =$$

Veja o que nos diz um importante matemático numa época em que não existiam calculadoras:

“Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo de números muito grandes... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades.” (JOHN NAPIER, 1550-1617).

2- Complete a tabela encontrando os números da seqüência:

1	2	4	8	16			128			1024		4096	8192	16384	32768	65536
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

3-Vamos utilizar a tabela acima para encontrar alguns resultados.

Para calcular 1024×16 . Olhamos cada um desses valores na primeira linha e seu correspondente na segunda linha, que são 10 e 4.

Com os números encontrados na segunda linha fazemos a adição $10 + 4 = 14$ e vemos que o correspondente do número 14 na primeira linha é 16384. Assim:

$$1024 \times 16 = 16384$$

- Confere? Será que esse método pode ser utilizado para outras multiplicações envolvendo os números dessa tabela ou foi apenas coincidência?
- E com uma tabela com múltiplos de 1, ou múltiplos de 3?
- Podemos fazer de uma multiplicação uma soma? E de uma divisão uma subtração?

4- Faça as operações abaixo usando o método acima e depois confira os resultados com uma calculadora:

a) $16384 \times 16 =$

b) $1024 \times 128 =$

c) $65536 \times 32 =$

d) $8192 \times 28 =$

5- Com base no modelo utilizado para as multiplicações, construa um método para realizar as divisões sem usar calculadora.

a) $16384 \div 16 =$

c) $1024 \div 128 =$

b) $65536 \div 32 =$

d) $8192 \div 128 =$

A partir das atividades do momento 1 serão sistematizados os resultados que os alunos devem chegar através das discussões feitas, devidamente induzidas pelo professor:

- Sair com o conceito de **base** (A base da tabela) e de **expoente**.
- Nomear com os alunos: b é a base da tabela; na 2ª linha estão os expoentes x_i da base; na 1ª linha estão os números n , tal que $n_i = b^{x_i}$. Essa representação simbólica (ou outra) é importante para convergir para a definição do log.
- Pedir para os alunos escreverem os passos das multiplicações e divisões de forma natural e simbólica:

- **Natural:** Para multiplicar dois números da 1ª linha, somam-se os números correspondentes a esses, da 2ª linha. Localiza-se o resultado R dessa soma na 2ª linha. O número correspondente a R na 1ª linha é o resultado da multiplicação.

Esse roteiro pode ser desenhado na tabela.

- **Simbólico:**

Passo 1: Sejam n_a e n_b dois números da 1ª linha.

Passo 2: Sejam x_a e x_b os expoentes correspondentes de n_a e n_b na 2ª linha.

Passo 3: Seja $R = x_a + x_b$.

Passo 4: Localiza-se R na 1ª linha: $b^{x_a+x_b}$

Passo 5: $n_a \cdot n_b = b^{x_a+x_b}$

APÊNDICE C – ATIVIDADES- MOMENTO 2

Momento 2- O que é logaritmo?

Nesta atividade, você vai decidir o que escrever na tabela.

Material: uma folha de ofício e uma tesoura para cada grupo de 4 alunos.

Procedimentos:

1- Recorte a folha de papel ao meio. Em seguida, cada uma de suas partes deve ser novamente cortada ao meio e assim sucessivamente, até não ser mais possível realizar esse processo. A cada etapa, anote o número de partes e represente na forma potência.

Etapa	Número de partes	Representação em forma de potência
0	1	

Matemáticos e astrônomos, no final do século XVI, perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números seus cálculos seriam simplificados, e para isso criaram tabelas como as que você acabou de preencher, aos quais chamaram de tábuas de **logaritmos**.

Na tabela o valor que representa a etapa chama-se **logaritmo** do **número** de partes x .

Ex:

- o logaritmo de 32 na base 2 é **5** pois $2^5 = 32$. Ou $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$
- o logaritmo de 128 na base 2 é **7** pois $2^7 = 128$. Ou $\log_2 128 = 7$, pois $2^7 = 128$

2- A partir dos exemplos acima tente definir o que é logaritmo.

(Espera-se que os alunos ao associarem os exemplos com a tabela da atividade 1 digam que o logaritmo é o expoente de uma potência.)

3- Complete:

- a) O logaritmo de 8 na base 2 é _____
- b) O logaritmo de 9 na base 3 é _____

Observe que:

- $64 = 2^6$ então posso dizer que o logaritmo de 64 na base 2 é 6

- $64 = 4^3$ então posso dizer que o logaritmo de 64 na base 4 é 3
- $64 = 8^2$ então posso dizer que o logaritmo de 64 na base 8 é 2

4- Preencha o quadrado com o número correto, de acordo com a definição de logaritmo:

a) $4^{\square} = 256 \leftrightarrow \log_4 256 = \square$ b) $\log_7 49 = \square \leftrightarrow 7^{\square} = 49$

c) $\log_5 125 = \square$ d) $\log_3 81 = \square$ e) $\log_{10} 10000 = \square$

- E se a base for 1?

$32 = 1^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base 1 é ? Qual a sua conclusão?

- E se a base for 0?

$32 = 0^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base 0 é ? Qual a sua conclusão?

- E se a base for um número negativo?

$32 = -2^?$ Então posso dizer que o logaritmo de 32 na base -2 é ? Qual a sua conclusão?

5- Calcule:

a) $\log_1 16 = \square \leftrightarrow 1^{\square} = 16$ b) $\log_1 25 = \square \leftrightarrow 1^{\square} = 25$ c) $\log_0 16 = \square \leftrightarrow 0^{\square} = 16$

d) $\log_0 25 = \square \leftrightarrow 0^{\square} = 25$ e) $\log_{-3} 27 = \square \leftrightarrow -3^{\square} = 27$ f) $\log_{-2} 8 = \square \leftrightarrow -2^{\square} = 8$

A partir da observação desses casos, nos quais não é possível efetuar a logaritmação, será elaborada junto com os alunos a definição dos logaritmos:

- Dados dois números reais positivos a e b, com $a \neq 1$ e $a > 0$, se $b = a^c$ então o expoente c chama-se LOGARITMO de b na base a, ou seja $\log_a b = c$

6- Agora calcule os logaritmos usando a definição e preencha a tabela:

$a \log_2 16 =$	Logaritmo de 16 na base 2 é _____
$b \log_4 16 =$	Logaritmo de 16 na base 4 é _____
	$c \log_9 81 =$
	$d \log_6 216 =$

7- Calcule os logaritmos abaixo usando a definição:

a) $\log_3 3 =$ b) $\log_7 7 =$ c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} =$

Nos itens a, b e c você percebeu alguma particularidade. Qual?

d) $\log_5 1 =$ e) $\log_7 1 =$ f) $\log_{\frac{1}{6}} 1 =$

O que você observou nos logaritmos dos itens d, e, f? Justifique

g) $\log_5 5^2 =$ h) $\log_7 7^3 =$ i) $\log_{10} 10^5 =$

Você encontrou alguma regularidade logaritmos dos itens g, h, i? Justifique

j) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$ k) $\log_5 \frac{1}{5} =$ l) $\log_7 \frac{1}{7} =$ Há

alguma regularidade nos itens j, k, l? Justifique

m) $2^{\log_2 16}$

n) $3^{\log_3 27}$

o) $7^{\log_7 49}$

O que você observou nos itens m, n, o?

Faça um pequeno resumo das regularidades encontradas.

No final do momento 2 será feita uma sistematização de cada propriedade:

- Quando a base do logaritmo é igual do logaritmando, o resultado é sempre um.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

- Quando o logaritmando é um, o logaritmo é sempre zero.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

- Quando no logaritmando há uma potência cuja base é igual à base do logaritmo, o resultado do logaritmo é o expoente desta potência.

$$\log_a a^m = m, \text{ pois } \log_a a^m = p \Leftrightarrow a^p = a^m \text{ portanto } p = m$$

- Quando a base do logaritmo e o logaritmando forem números inversos o logaritmo será sempre -1.

$$\log_a \frac{1}{a} = -1, \text{ pois } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

- Quando o logaritmo for expoente de uma potência e a base desse logaritmo for igual a base dessa potência, o resultado será sempre o logaritmando.

$$a^{\log_a b} = b, \text{ pois } a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

APÊNDICE D – ATIVIDADES- MOMENTO 3

Momento 3- Propriedades importantes

Vamos voltar novamente às ideias estudadas na atividade 1.

1- Observe a tabela abaixo (a mesma da atividade 1) :

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

a) Calcule $\log_2 128 \times 256 =$

b) Calcule $\log_2 128 + \log_2 256 =$

c) O que você pode concluir a respeito dos itens a e b? Justifique

d) Calcule $\log_2 512 \div 8 =$

e) Calcule $\log_2 512 - \log_2 8 =$

f) O que você pode concluir a respeito dos itens d ,e? Justifique

g) Calcule $\log_2 2^5 =$

h) Calcule $5 \times \log_2 2 =$

i) O que você pode concluir a respeito dos itens h e i? Justifique

j) Calcule $\log_4 16 =$

k) Calcule $\log_2 16$ e $\log_2 4$, divida os dois resultados

l) O que você pode concluir a respeito dos itens j e k? Justifique

2- Propriedades operatórias dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos são propriedades operatórias que simplificam os cálculos dos mesmos. Faça a leitura de cada uma delas, dê dois exemplos e resolva.

1ª propriedade: Logaritmo de um produto

O logaritmo do produto de dois números positivos é igual a soma dos logaritmos de cada um deles.

Exemplos:

a) _____

b) _____

2ª propriedade: logaritmo de um quociente

Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles.

Exemplos:

a) _____

b) _____

3ª propriedade: logaritmo de uma potência

Numa mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Exemplos:

a) _____

b) _____

4ª propriedade: mudança de base

Em algumas situações podemos encontrar no cálculo logaritmos com bases diferentes. Como as propriedades logarítmicas só valem numa mesma base, é necessário fazer, antes, a conversão dos logaritmos de bases diferentes para uma única base conveniente

Exemplos:

a) _____

b) _____

3- Escreva cada uma das propriedades em linguagem matemática.

1ª propriedade: $\log_a(\mathbf{b \cdot c}) =$

2ª propriedade : $\log_a \mathbf{b/c} =$

3ª propriedade: $\log_a \mathbf{b^c} =$

4ª propriedade: $\log_a \mathbf{b} =$

APÊNDICE E – ATIVIDADES - MOMENTO 4

Para que servem os logaritmos?

Ao se estudar fenômenos físicos, químicos ou biológicos, têm muitas vezes a presença dos logaritmos como modelo de certas situações um exemplo:

1- A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui, desde que a muda é plantada ($t=0$), seguindo o seguinte modelo matemático:

$$h = 1,5 + \log_3(t + 1) \text{ com } h \text{ em metros e } t \text{ em anos.}$$

- a) No momento em que a muda é plantada, qual é a sua altura?
- b) Transcorrido 26 anos, qual será a altura de uma dessas árvores?

2-Relatório de pesquisa:

A atividade será realizada em grupos de três componentes e deverá trazer um ou mais exemplos de problemas onde são aplicados os logaritmos. Através de um trabalho escrito, os alunos devem apresentar essa investigação, abordando ainda os seguintes tópicos:

- De que forma o fenômeno abordado está relacionado aos logaritmos?
- Qual a expressão que modela esse fenômeno?
- Apresentar um exemplo real, expressando seus valores numéricos.
- Apresentar as referências consultadas, sites, artigos, etc...



Emitido em 09/04/2021

DISSERTAÇÃO Nº 16/2021 - PROFMAT - CH (10.41.13.10.01)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 27/04/2021 10:19)

CRISTIAN RENATO VON BORSTEL

ASSISTENTE EM ADMINISTRACAO

CAPPG - CH (10.41.13.10)

Matrícula: ###774#3

Visualize o documento original em <https://sipac.uffs.edu.br/documentos/> informando seu número: **16**, ano: **2021**, tipo: **DISSERTAÇÃO**, data de emissão: **27/04/2021** e o código de verificação: **b60e55bacb**