Universidade Federal do ABC
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT

Leonardo Silvestre Neman

Sistemas de Equações Lineares e suas Interpretações

Dissertação

Santo André - SP
2013

Leonardo Silvestre Neman

Sistemas de Equações Lineares e suas Interpretações

Dissertação apresentada ao Profmat da Universidade Federal do ABC, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Motta Ferreira

Co-Orientadora: Profª. Drª. Virgínia Cardia Cardoso

Santo André - SP

2013

Dedicatória

A Deus, que foi o único responsável pela História dos homens e pela Geografia dos espaços.

A meus pais Maria Leila e Silvestre (in memoriam), que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade.

Ao meu único e amado irmão Rodrigo pelo exemplo de dedicação aos estudos.

A minha amada e doce Damáris pelo apoio e compreensão diante das adversidades durante a busca deste sonho.

Agradecimentos

À Universidade Federal do ABC.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes.

Ao Orientador Prof. Dr. João Carlos da Motta pelo acompanhamento, aprendizado e paciência.

À Coorientadora Profª. Drª. Virgínia Cardia Cardoso pelo apoio, solicitude e sensatez.

Aos professores do Profmat-UFABC.

Aos meus companheiros de turma Vítor, Samuel, Régis, Maura e Alexandre, que fizeram de um mesmo ideal a semente de nossa amizade.

Ao amigo Clóvis Corrêa Júnior pela imprescindível ajuda nos momentos de angústia.

À Comunidade Escolar da EMEF Raimundo Correia (PMSP), em especial à estimada Profª. Marta Maria Gonçalves de Lemos Rocha pela viabilização deste sonho.

A todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa, registro aqui a minha gratidão.

Epígrafe

"O conhecimento nos guia para a felicidade, nos sustenta na miséria, é um ornamento entre os amigos e uma armadura contra os inimigos."

(Maomé)

Resumo

O escopo desta obra é fazer um estudo da teoria geral que envolve matrizes, determinantes e, sobretudo, sistemas de equações lineares. Em seguida, serão analisados dois artigos da Revista do Professor de Matemática (RPM /SBM) bem como quatro possíveis interpretações dos sistemas lineares no ensino médio, presentes em alocações de recursos limitados, jogos lineares finitos, redes e interpolação polinomial.

Palavras-chave: sistemas lineares, RPM, interpretação.

Abstract

The scope of this work is to study the general theory involving matrices, determinants, and especially systems of linear equations. Two articles from SBM's (Brazilian Mathematical Society) Journal of Mathematics Teacher (RPM) are analysed as well as four possible interpretations of linear systems in high school content context are discussed: allocations of limited resources, linear finite games, networks and polynomial interpolation.
Keywords: linear systems, RPM, interpretation.

Sumário

Introdução

O presente trabalho visa a apresentar os sistemas de equações lineares numa perspectiva que articula interpretações e aplicações, contando que possa contribuir na ressignificação da prática educativa matemática.

O trabalho tem ainda como propósito reconhecer a Revista do Professor de Matemática (RPM) enquanto recurso formativo ou de consulta para os professores que atuam na educação matemática.

Eu percebi na minha prática diária, como professor de uma escola pública em São Paulo, que os alunos não conseguem relacionar os temas matemáticos com outras áreas do conhecimento e que os materiais didáticos disponíveis para o professor não ajudam muito nessa tarefa. Ademais, havia uma insatisfação, de minha parte, com o meu próprio conhecimento matemático. Então não me sentia capaz para resolver, sozinho, este problema.

A motivação para a elaboração deste estudo deu-se ao desconforto sentido quando verificamos a imensa lacuna existente entre as qualidades da educação pública superior e básica. Enquanto a universidade pública, via de regra, consiste num centro de excelência em ensino, a escola pública básica, em geral, vem perdendo espaço há décadas para a iniciativa privada. Isso se deve talvez à constante alienação de professores e alunos perante uma disciplina essencial que é a matemática junto com suas ramificações, como os sistemas lineares. Embora seja uma parte inseparável da sociedade, o seu papel instrucional está aquém da sua função social. E a fim de resgatar a boa conceituação que já teve outrora, faz-se necessária e urgente uma aproximação do conhecimento científico com a escola pública básica através da qualificação dos seus professores, para que o cenário educacional do Brasil vislumbre um horizonte mais favorável.

A continuação natural dos estudos dos alunos egressos da escola pública que almejam um curso superior, e são restringidos por suas condições socioeconômicas, deveria ser na universidade pública, mas não é isso o que comumente ocorre, porque mecanismos de seleção como os vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) expõem as fragilidades de aprendizagem dos alunos ao mesmo tempo que impedem o acesso aos centros superiores de educação gratuita e de qualidade.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) sugere uma forma de diálogo entre a universidade e os profissionais que dinamizam a educação básica. É uma tentativa do Governo Federal de resgatar a qualidade da educação básica pública brasileira e com isso melhorar os índices educacionais do país, ao criar esta modalidade de pós-graduação também para as demais disciplinas do ensino médio, como, por exemplo, Letras e Física, que já se encontram em atividade.

O pioneiro programa PROFMAT, pensado no âmbito da pesquisa matemática, privilegia o aprofundamento dos professores da educação básica em conhecimentos matemáticos. É que, embora não seja o único conhecimento necessário ao professor, o programa colabora com a melhoria da educação nesta dimensão - a dos conhecimentos matemáticos do ensino básico.

Eu escolhi o tema sistemas de equações lineares devido ao fato de fazerem parte da minha prática docente como Professor de Ensino Fundamental II e Médio. A relevância deste conteúdo é notável, pois segundo Anton e Rorres (2010), mais de 75% dos problemas matemáticos nos meios científico e industrial envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio. Os sistemas fazem-se presentes em negócios; economia; sociologia; ecologia; demografia; genética; eletrônica; engenharia; física, dentre outras áreas, ou seja, em todas as áreas do saber. Além disso, devido a sua importância no pensamento algébrico, utilidade para os alunos resolverem problemas e simplicidade conceitual, os sistemas lineares fazem parte dos currículos das escolas dos Ensinos Fundamental (anos finais) e Médio. Entretanto, pressupõe-se que nas exposições elementares desse assunto, não é usual mostrar que, embora se trate de um problema algébrico, sua resolução contém um forte componente geométrico, indispensável para a sua boa assimilação. Será exatamente isso o que a análise de um dos artigos da RPM nos revelará neste trabalho. Eu recorri à RPM, na tentativa de achar abordagens diferenciadas para o tema, mas fiquei frustrado com a pouca quantidade de artigos que tratavam do assunto.

A Revista do Professor de Matemática (RPM) é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) voltada para professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Sua proposta é a de discutir temas matemáticos da sala de aula. Para isso a RPM traz sugestões de atividades didáticas; propõe desafios matemáticos; oferece informações de natureza histórica, lógica ou matemática sobre os conteúdos e também os pontos de vista de pessoas ligadas à SBM a respeito do ensino de matemática na educação básica. Dentre as publicações brasileiras voltadas ao professor de matemática, a RPM é a mais longeva. A RPM conta até o momento (início de 2013) com 80 volumes e completa 30 anos de publicação ininterrupta, um feito raro em nosso país para uma revista destinada ao ensino e aperfeiçoamento de professores de Matemática da educação básica. O primeiro volume foi publicado no segundo semestre de 1.982. Nos 14 anos seguintes da criação, a periodicidade da revista era de 2 números anuais e, a partir de 1995, passou a ser de 3 números anuais.

A revista oferece leitura agradável e a qualidade dos textos, escritos pelos seus leitores e colaboradores, faz com que seja usada constantemente por professores dos ensinos fundamental e médio, por alunos e professores dos cursos de licenciatura e apreciada até por profissionais de outras áreas.

Os artigos da RPM integram outras publicações da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, fazem parte de bibliografias indicadas para concursos de ingresso na carreira docente, são utilizados em disciplinas e em monografias de conclusão de cursos de Licenciatura em Matemática, e são reproduzidos também em Portugal para publicações destinadas a docentes. Ademais, artigos selecionados da revista deram origem à Coleção Explorando o Ensino - Matemática, em três volumes, do Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, e a dois volumes destinados aos alunos do programa de iniciação científica da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

A RPM pretende contribuir para a melhoria da educação no Brasil por meio de seus artigos e por suas seções serem um ponto de encontro entre professores do nível básico, do nível superior e pesquisadores. Os organizadores da revista acreditam que o bom professor quer saber mais conteúdo matemático para ensinar melhor.

Numa busca por artigos sobre sistemas lineares na RPM, constatei após a leitura de toda a minha coleção de revistas impressas, que 2,5% dos 80 volumes abordam o assunto nos temas de seus artigos, todo o restante é dedicado às três grandes áreas da matemática, isto é, Geometria, Análise e Álgebra. Dai a análise em apenas dois artigos. São eles:

1. Sobre o ensino de sistemas lineares (FERREIRA, Maria C. C. & GOMES, Maria L. M., Revista do Professor de Matemática 32, 1996).

2. Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares (FILHO, Adalberto A. D., Revista do Professor de Matemática 59, 2006).

Tais artigos serão apresentados na forma de fichas de leitura na análise que faremos acerca das aplicações de sistemas lineares para o ensino de matemática no nível médio.

A dissertação está estruturada em quatro capítulos, dos quais os três primeiros abordam uma teoria geral referente a matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, e o último faz a análise de dois artigos da RPM juntamente com algumas interpretações que podem ser trabalhadas na escola: alocações de recursos limitados, jogos lineares finitos, redes e interpolação polinomial. Eu senti a necessidade de realizar um estudo matemático rigoroso sobre os sistemas lineares para conhecer melhor o assunto e propor atividades que poderiam ser aplicadas no ensino médio.

Dai, resolvi pesquisar abordagens novas, uma vez que não as encontrei nos livros didáticos que a minha escola costumeiramente recebe.

Eu não apliquei as atividades aos meus alunos, pois só foi possível, neste momento, dar apenas o encaminhamento teórico. Porém, minha proposta pedagógica é mais vantajosa que a abordagem tradicional, pois apresenta os conceitos matemáticos de forma contextualizada em situações reais, além de proporcionar oportunidades de estudos interdisciplinares. E isso está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (1999).

Chamamos de interpretações e não de aplicações porque faremos a seguinte distinção destes termos: interpretar, segundo o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, significa dar sentido a tudo o que se ouve ou que se lê, e que se julga ser o verdadeiro. Ao passo que aplicar se traduz apenas em usar ou destinar. Nesse sentido, as interpretações mais recorrentes para o tema sistemas lineares são as da geometria analítica a duas e três dimensões, com as posições relativas entre retas e planos, restritos aos próprios conceitos matemáticos. Porém, as interpretações possíveis para os sistemas de equações lineares estão além disso. Eles podem sim ser interpretados, inclusive a partir de quatro variáveis, em diferentes contextos.

Em virtude do exposto acima, as estratégias metodológicas deste estudo são:

- Sistematizar conceitos e resultados matemáticos associados aos sistemas lineares.

- Analisar os artigos da RPM referentes aos sistemas lineares.

- Abordar algumas interpretações contextualizadas dos sistemas lineares .

A justificativa para a escolha do tema é a interdisciplinaridade na perspectiva de ressignificar a prática educativa em matemática na educação básica, especialmente no ensino médio.

A aprendizagem dos sistemas lineares na educação básica é um requisito indispensável para o estudo de Álgebra Linear no ensino superior. Essa disciplina é um dos pilares do curso de Matemática e faz-se presente também noutros cursos da área das Ciências Exatas, como Engenharia e Ciência da Computação.

Machado (1998) nos chama a atenção para a matemática como componente curricular. Diz que não podemos encará-la estritamente como uma linguagem formal. Afirma ainda que a linguagem matemática deve ser tratada como um sistema de representação que transcende os formalismos, característica esta que a aproxima da língua materna, da qual toma de empréstimo a sua oralidade.

Machado (1996) afirma que um dos entraves que os alunos encontram em Álgebra Linear é a dificuldade perante a passagem do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Ela assinala a necessidade de se abordar essas conversões de registros antes do acesso à universidade, caso contrário, os alunos continuarão resolvendo sistemas lineares sem dar sentido algum aos mesmos.

Battaglioli (2008) realizou uma pesquisa sobre esta temática, em que ressalta a importância de se explorar o registro gráfico na resolução dos sistemas lineares, uma vez que isso poderia contribuir para que os alunos tivessem maior facilidade não só no entendimento do conjunto solução, mas também na classificação e discussão quando necessário.

Podemos perceber que o interesse por sistemas lineares é antigo e já foi abordado de diversas maneiras ao longo do desenvolvimento histórico. A importante obra chinesa *A Arte da Matemática em Nove Capítulos*, de Chuí - Chang Suan - Shu que data possivelmente do século III a.C., é uma reconstrução de um texto anterior que foi queimado durante o reinado do imperador Ch'in Shih Heiang, um controverso tirano que foi o responsável tanto pela unificação da China quanto pela construção da Grande Muralha (Van der Waerden, 1983). Os problemas dessa obra surgem de contextos como as medidas dos campos (embrião do desenvolvimento da geometria, frações, raízes quadradas e cúbicas) e comércio/impostos (origem das razões, proporções e sistemas de equações).

No dizer de Boyer (1974), o capítulo segundo dessa obra dispõe de muitos problemas que recaem em sistemas de duas equações e duas incógnitas. O autor diz também que se trata de um livro bastante significativo, pois apresenta questões que levam a equações lineares com soluções positivas e negativas.

Boyer afirma ainda que os sistemas lineares também aparecem no papiro de Rhind (egípcio) e que os chineses também conheciam um método de resolução que se assemelhava ao escalonamento hoje utilizado.

Só em 1683, num manuscrito do japonês Seki Kowa, é que a ideia de determinante veio à tona. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, usou os determinantes para resolver sistemas lineares.

Após uma década, o uso de determinantes aparece no Ocidente num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Leibniz usou determinante e discutiu um sistema com três equações e duas incógnitas e mostrou que, se o sistema é compatível (possível), então o determinante 3×3 formado pelas colunas de seus coeficientes e a coluna de seus termos independentes é igual a zero.

Conforme Boyer (1974), a conhecida regra de Cramer utilizada para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, foi descoberta pelo escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746), datando provavelmente de 1729, tendo sido publicada dois anos após sua morte, em 1748, no seu *Treatise of algebra*. Mas o suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752) também chegou à regra (independentemente), e a publicou em 1750. Boyer frisa que eram evitados os casos em que o determinante era nulo. "Mas, até esse momento, ainda faltava uma teoria geral sobre a resolução de sistemas lineares" (Freitas, 1999, p. 33).

A ideia da eliminação Gaussiana, conhecida também como regra do escalonamento, precedeu Gauss por aproximadamente 2000 anos. Existem evidências de que os chineses usavam um procedimento análogo para resolver sistemas de equações lineares por volta de 200 a.C. (Katz, 1995). Gauss desenvolveu o método sem o uso de matrizes (o termo "matriz" foi cunhado cerca de 40 anos após) a fim de encontrar a melhor aproximação para a solução de um sistema de equações que tecnicamente não apresentava solução, dado que havia duas vezes mais equações do que incógnitas. É interessante observar que o termo matriz deriva da palavra em latim para "ventre", por ser considerada um recipiente de determinantes. Curiosamente, surgiram primeiro os determinantes e depois as matrizes. A partir de 1860, sistemas lineares com o número de equações diferente do número de incógnitas e os de determinantes nulos passaram a ser estudados. Em 1864, o matemático cujo pseudônimo era Lewis Carrol apresenta um estudo sobre a resolução de sistemas com m equações e n incógnitas. Em 1880, o matemático francês Rouché publica um artigo intitulado Notas Sobre Equações Lineares, no qual resume os casos de resolução de sistemas lineares.

Após termos uma visão do contexto histórico da RPM e dos sistemas de equações lineares, estamos prontos para mergulharmos num estudo matemático dos assuntos de interesse para, por fim, e não menos importante, abordarmos algumas interpretações no ensino médio. Com isso, o trabalho pretende agregar conhecimento aos professores para que possam levar mais qualidade à educação básica.

Convido o professor leitor a refletir sobre algumas questões enquanto lê as demais páginas:

A universidade produz conhecimento para continuar sendo científico ou para mudar a sociedade e contribuir para os processos que se dão na própria sociedade?

Como os alunos se relacionam com os conceitos deste trabalho?

Como o professor se relaciona com estes conceitos em termos didáticos?

O que o professor pensa sobre o ensino destes conteúdos?

Capítulo 1

Corpos e Matrizes

A intenção deste capítulo é definir um dos Elementos de Álgebra chamado corpo e sua relação com as matrizes, sendo estas arranjos retangulares de números que podem ser associados a um sistema linear. Além disso, o trabalho com matrizes agrada aos alunos, uma vez que identificam uma certa semelhança com as contas até então conhecidas. Todavia, devemos chamar a atenção dos alunos para o fato de algumas leis da aritmética no corpo dos reais poderem não ser válidas na aritmética matricial, como, por exemplo, a comutatividade da multiplicação, o cancelamento e a existência de um produto nulo com fatores não nulos. Por fim, é mostrado como obter a matriz inversa através da expressão $AB = BA = I$, que é uma expressão útil sob o ponto de vista teórico, mas, para calcular numericamente, não é uma boa estratégia, pois dá muito trabalho.

1.1 Corpos

Definição 1.1.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathfrak{K}$ é um corpo se existem duas operações binárias sobre $\mathfrak{K}$*

$$+ : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} \text{ (operação de adição)}$$

e

$$\cdot : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K} \text{ (operação de multiplicação),}$$

verificando as seguintes propriedades: para quaisquer elementos a, b *e* c *em* $\mathfrak{K}$ *temos*

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(lei associativa);*

2) $a + b = b + a$ *(lei comutativa);*

3) existe um único elemento em $\mathfrak{K}$*, denotado por* 0 *e denominado de elemento neutro da adição ou simplesmente o zero de* $\mathfrak{K}$*, tal que*

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ para todo } a \in \mathfrak{K};$$

4) para todo elemento $a \in \mathfrak{K}$*, existe um único elemento em* $\mathfrak{K}$*, denotado por* $-a$ *e denominado de oposto aditivo de* a *ou simétrico de* a*, tal que*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$

5) $(ab)c = a(bc)$ *(lei associativa);*

6) $ab = ba$ *(lei comutativa);*

7) existe um único elemento em $\mathfrak{K}$*, denotado por* 1 *e denominado de elemento neutro da multiplicação ou simplesmente a unidade de* $\mathfrak{K}$ *tal que*

$$a1 = 1a = a, \text{ para todo elemento } a \in \mathfrak{K};$$

8) para todo elemento $a\ (\neq 0) \in \mathfrak{K}$*, existe um único elemento em* $\mathfrak{K}$*, denotado por* a^{-1} *e denominado de inverso de* a*, tal que*

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$$

9) $a(b + c) = ab + ac$ *(lei distributiva).*

Observação 1.1.2. *Escreveremos* $a - b = a + (-b)$*, quaisquer que sejam os elementos* $a, b \in \mathfrak{K}$*.*

Proposição 1.1.3. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $0a = 0$*, para todo elemento* $a \in \mathfrak{K}$*;*

(ii) $ab = 0$ *se, e somente se,* $a = 0$ *ou* $b = 0$*, para quaisquer* $a, b \in \mathfrak{K}$*.*

Demonstração. (i) Para todo $a \in \mathfrak{K}$, $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ o que implica $0a = 0$.
(ii) Se $a \neq 0$, então $b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$.

1.2 Matrizes sobre um corpo

1.2.1 Definições e operações binárias

Definição 1.2.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e números naturais m e n. Definimos uma $m \times n$ matriz sobre $\mathfrak{K}$ como uma função definida no produto cartesiano $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ com valores no corpo $\mathfrak{K}$.*

Usualmente denotamos as $m \times n$ matrizes sobre $\mathfrak{K}$ pelas letras latinas maiúsculas $(A, B, \ldots, Z)$ e as representamos na forma, abaixo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

onde $a_{ij} \in \mathfrak{K}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

Denotaremos o conjunto de todas as $m \times n$ matrizes sobre $\mathfrak{K}$ por

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}.$$

Sobre o conjunto $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ podemos definir duas operações, conforme abaixo:

$$+ : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \times \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \to \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \text{ (adição)},$$

onde quaisquer que sejam as $m \times n$ matrizes sobre $\mathfrak{K}$ $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}],$$

$$\cdot : \mathfrak{K} \times \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \to \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \text{ (multiplicação por um escalar)},$$

onde qualquer que seja o elemento c de $\mathfrak{K}$ e uma $m \times n$ matriz sobre $\mathfrak{K}$ $A = [a_{ij}]$,

$$cA = [ca_{ij}].$$

Proposição 1.2.2. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo. Então, as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas sobre $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ satisfazem as seguintes propriedades: para quaisquer elementos $a, b \in \mathfrak{K}$ e matrizes A, B e C em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ temos*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (lei associativa);

2) $A + B = B + A$ (lei comutativa);

3) existe uma única matriz em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, denotada por 0 e denominada de matriz nula de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, tal que

$$A + 0 = 0 + A = A, \text{ para todo } A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n};$$

4) para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, existe uma única matriz em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, denotada por $-A = [-a_{ij}]$, e denominada de matriz simétrica de A, tal que

$$A + (-A) = (-A) + A = 0;$$

5) $1A = A$, para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$;

6) $(a + b)A = aA + bA$;

7) $a(A + B) = aA + aB$;

8) $(ab)A = a(bA)$.

Observação 1.2.3. *Escreveremos $A - B = A + (-B)$, quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$.*

O conjunto das matrizes sobre $\mathfrak{K}$ admite uma terceira operação binária do tipo

$$\cdot : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n} \times \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times p} \to \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times p} \text{ (multiplicação)},$$

onde quaisquer que sejam a $m \times n$ matriz $A = [a_{ij}]$ e a $n \times p$ matriz $B = [b_{jk}]$,

$$AB = [c_{ik}],$$

onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots p)$.

Proposição 1.2.4. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo. Então, a operação de multiplicação satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer matrizes A, B e C, sempre que os produtos estejam definidos, temos*

10) $(AB)C = A(BC)$ (lei associativa);

11) $A(B+C) = AB + AC$ *(lei distributiva à esquerda);*

12) $(A+B)C = AC + BC$ *(lei distributiva à direita).*

1.2.2 Matriz inversa

Definição 1.2.5. *Seja* $\mathfrak{K}$ *um corpo e* m *um número natural. Definimos a matriz unidade multiplicativa ou simplesmente a unidade de* $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times m}$ *como a matriz* $I_m = [\iota_{ij}]$*, onde*

$$\iota_{ij} = 1,\ \text{se } i = j,\ \text{e } \iota_{ij} = 0,\ \text{se } i \neq j.$$

Definição 1.2.6. *Seja* $\mathfrak{K}$ *um corpo e uma matriz* $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times m}$*. Dizemos que* A *é invertível se existe uma matriz* $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times m}$ *tal que*

$$AB = BA = I_m.$$

Nesse caso, a matriz B é chamada de matriz inversa de A.

Proposição 1.2.7. *Seja* $\mathfrak{K}$ *um corpo e uma matriz* $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times m}$*. Se* A *é invertível, então sua matriz inversa* B *é única.*

Demonstração. Se B_1, B_2 são duas matrizes inversas de A, então $B_1 = B_1 I_m = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_mB_2 = B_2$.

Proposição 1.2.8. *Seja* $\mathfrak{K}$ *um corpo e matrizes* $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times m}$*. As afirmações são verdadeiras:*

(i) Se A *é invertível, então* A^{-1} *é invertível e* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$*;*

(ii) Se as matrizes A *e* B *são invertíveis, então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*.*

Demonstração. *(i)* Imediato.

(ii) De fato, pois $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\big(A^{-1}(AB)\big) = B^{-1}\big((A^{-1}A)B\big) = B^{-1}(I_mB) = B^{-1}B = I_m$. Isso mostra que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

A intenção deste capítulo é mostrar o que é um sistema de equações lineares e a sua relação com as matrizes, através da representação matricial. Depois, é definido o que são as transformações elementares nas linhas de uma matriz e como elas podem ser usadas para encontrarmos a forma escalonada da matriz original. Na literatura, o algoritmo que reduz uma matriz à forma escalonada é conhecido como eliminação de Gauss-Jordan, que possui duas etapas: uma fase para a frente (eliminação gaussiana) onde se introduzem os escalares zeros abaixo dos primeiros elementos não nulos (pivôs) de cada linha não nula, e outra fase para trás, onde se introduzem os escalares zeros acima dos pivôs. Finalmente, é abordado o Teorema do Posto, que é um resultado utilizado para resolver e discutir os sistemas lineares.

Definição 2.0.1 *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo. Um sistema de m equações com n incógnitas*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

onde a_{ij}, b_i $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ são elementos do corpo $\mathfrak{K}$, é chamado de sistema de equações lineares.

Uma *solução* de (2.1) é uma n-upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathfrak{K}^n$ que satisfaz cada uma das suas equações constituintes. O *conjunto solução* de (2.1) é a coleção de todas as suas soluções.

Se $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, dizemos que o sistema é *homogêneo*. Caso contrário dizemos que o sistema é *não-homogêneo*.

2.1 Combinações lineares das equações

Definição 2.1.1. *Dado um sistema de equações lineares (2.1), selecionemos m escalares de $\mathfrak{K}$ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ e multipliquemos a i-ésima equação pelo escalar c_i $(i = 1, \ldots, m)$ e somemos todas as equações resultantes. A equação obtida*

$$\begin{aligned}(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_ma_{m1})x_1 + (c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{m2})x_2 + \\ \ldots + (c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \ldots + c_ma_{mn})x_m = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m. \end{aligned} \tag{2.2}$$

é denominada de combinação linear das equações em (2.1) ou simplesmente combinação linear.

Proposição 2.1.2. *Toda solução do sistema de equações lineares em (2.1) é uma solução de qualquer combinação linear de suas equações.*

Demonstração. A demonstração é imediata.

2.2 Sistemas lineares equivalentes

Consideremos um sistema de equações lineares

$$\begin{array}{ccccccccc} d_{11}x_1 & + & d_{12}x_2 & + & \cdots & + & d_{1n}x_n & = & e_1 \\ d_{21}x_1 & + & d_{22}x_2 & + & \cdots & + & d_{2n}x_n & = & e_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ d_{p1}x_1 & + & d_{p2}x_2 & + & \cdots & + & d_{pn}x_n & = & e_p \end{array}, \tag{2.3}$$

onde cada uma das p equações é uma combinação linear das equações em (2.1). Então, o seguinte resultado é válido:

Proposição 2.2.1. *Toda solução do sistema de equações lineares em (2.1) é uma solução do sistema de equações lineares em (2.3).*

Demonstração. O resultado é uma consequência direta da Proposição 2.1.2.

Definição 2.2.2. *Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se cada equação de cada sistema é uma combinação linear das equações do outro.*

A partir da Proposição 2.2.1 e da Definição 2.2.2, podemos enunciar o seguinte importante resultado:

Teorema 2.2.3. *Sistemas de equações lineares equivalentes possuem exatamente as mesmas soluções.*

Demonstração. O resultado segue diretamente da Proposição 2.2.1.

2.3 Representação matricial de um sistema

Todo sistema de equações lineares (2.1) pode ser representado sob a forma matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos coeficientes,*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz das incógnitas* e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz dos termos independentes.* A matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

associada ao sistema de equações lineares (2.1), é chamada de *matriz ampliada do sitema.*

2.4 Transformações de matrizes

Definição 2.4.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e uma matriz qualquer $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Denotemos por*

$$A_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$$

a i-ésima linha de A $(1 \leq i \leq m)$. Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz A, conforme abaixo:

i) Permuta das linhas A_i e A_j, denotada por $A_i \leftrightarrow A_j$;

ii) Multiplicação da linha A_i por um escalar não nulo $c \in \mathfrak{K}$, denotada por $A_i \rightarrow cA_i$;

iii) Substituição da linha A_i pela linha $A_i + cA_j$, onde c é um escalar não nulo de $\mathfrak{K}$ e A_j é outra linha, denotada por $A_i \rightarrow A_i + cA_j$.

Definição 2.4.2. *Se A e B são matrizes de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, dizemos que A é equivalente por linhas à matriz B se a matriz B é obtida de A através de um número finito de transformações elementares nas linhas de A.*

Proposição 2.4.3. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Então, toda transformação elementar e nas linhas de A é reversível, isto é, existe uma transformação elementar e' tal que*

$$e'\big(e(A)\big) = A \quad e \quad e\big(e'(A)\big) = A.$$

Demonstração. De fato, se e é uma transformação elementar do tipo $A_i \leftrightarrow A_j$, tomemos $e' = e$. Se e é do tipo $A_i \rightarrow cA_i$, tomemos e' como a transformação $A_i \rightarrow c^{-1}A_i$. Finalmente, se e é do tipo $A_i \rightarrow A_i + cA_j$, tomemos e' como $A_i \rightarrow A_i + (-c)A_j$.

Corolário 2.4.4. *Sejam $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Se A é equivalente por linhas à B, então B é equivalente por linhas à A.*

Nesse caso, dizemos que A e B são *matrizes equivalentes.*

2.5 Forma escalonada de uma matriz

Definição 2.5.1. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Dizemos que A está na forma escalonada se A é a matriz nula ou se:*

i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é o escalar 1;

ii) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv) se as linhas $A_1, \ldots, A_p$ são as linhas não nulas da matriz, e se o primeiro elemento não nulo da linha A_i $(1 \leq i \leq p)$ ocorre na coluna k_i $(1 \leq k_i \leq n)$, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$.

Aspecto geral de uma matriz na forma escalonada

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & k_1 & \dots & k_2 & \dots & k_p & k_p+1 & \dots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \\ A_{p+1} \\ \vdots \\ A_m \end{array} &
\begin{bmatrix}
\dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{1\,k_p+1} & \dots & a_{1\,n} \\
\dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & a_{2\,k_p+1} & \dots & a_{2\,n} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a_{p\,k_p+1} & \dots & a_{p\,n} \\
\dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Teorema 2.5.2. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Então, A é equivalente por linhas a uma matriz na forma escalonada.*

Demonstração. De fato, se A é a matriz nula, então não há o que demonstrar. Caso contrário, suponhamos que k_1 $(1 \leq k_1 \leq n)$ seja o menor inteiro positivo, tal que para uma i_1-ésima linha não nula o primeiro elemento não nulo seja o escalar $a_{i_1k_1}$. Tomemos então a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_1 \leftrightarrow A_{i_1}$. Em seguida, tomemos a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_1 \rightarrow a_{i_1k_1}^{-1}A_1$. Agora, para toda i-ésima linha $(i \neq 1)$, tomemos a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_i \leftrightarrow A_i + (-a_{ik_1})A_1$. Com isso, na primeira linha da matriz transformada o primeiro elemento não nulo é 1 e ocorre na coluna k_1, sendo todos os outros escalares, da mesma coluna, iguais ao escalar nulo.

Em seguida, suponhamos que k_2 $(1 \leq k_1 < k_2 \leq n)$ seja o menor inteiro positivo tal que para uma i_2-ésima linha não nula $(i_2 \geq 2)$ o primeiro elemento não nulo seja o escalar $a_{i_2k_2}$. Tomemos então a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_2 \leftrightarrow A_{i_2}$. Em seguida, tomemos a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_2 \rightarrow a_{i_2k_2}^{-1}A_2$. Agora, para toda i-ésima linha $(i \neq 2)$, tomemos a transformação elementar nas linhas de A do tipo $A_i \leftrightarrow A_i + (-a_{ik_2})A_2$. Com isso, na segunda linha da matriz transformada o primeiro elemento não nulo é 1 e ocorre na coluna k_2, sendo todos os outros escalares, da mesma coluna, iguais ao escalar nulo.

Continuando esse processo, ele deverá parar em algum inteiro k_p com $(1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n)$, numa matriz A' na forma escalonada e possuindo as $m-p$ linhas restantes nulas.

2.6 Resolução de sistemas de equações lineares

Proposição 2.6.1. *Dois sistemas de equações lineares $A_1X = B_1$ e $A_2X = B_2$ possuindo matrizes ampliadas $[A_1|B_1]$ e $[A_2|B_2]$ equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos o caso onde a equivalência das matrizes ampliadas se dá através de uma única transformação elementar nas linhas de $[A_1|B_1]$. Denotemos por L_i a i-ésima linha da matriz $[A_1|B_1]$. Assim, se a matriz $[A_2|B_2]$ é obtida da matriz $[A_1|B_1]$ por uma transformação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, então todas as equações do sistema $A_2X = B_2$ são combinações lineares das equações do sistema $A_1X = B_1$. De fato, toda k-ésima linha $(k \neq i, j)$ de $[A_2|B_2]$, pode ser obtida como uma combinação linear das linhas do sistema $A_1X = B_1$, a partir da escolha dos escalares $c_1 = 0, \ldots, c_k = 1, \ldots, c_m = 0$. Por outro lado, a i-ésima linha, pode ser obtida a partir da escolha $c_1 = 0, \ldots, c_i = 0, \ldots, c_j = 1, \ldots, c_m = 0$ e a j-ésima linha, a partir da escolha $c_1 = 0, \ldots, c_i = 1, \ldots, c_j = 0, \ldots, c_m = 0$. Pela Proposição 2.1.2, concluímos que toda solução do sistema de equações lineares $A_1X = B_1$ é uma solução do sistema $A_2X = B_2$.

Se a matriz $[A_2|B_2]$ é obtida da matriz $[A_1|B_1]$ por uma transformação elementar do tipo $L_i \rightarrow cL_i$, para um escalar não nulo $c \in \mathfrak{R}$, então todas as equações do sistema $A_2X = B_2$ também são combinações lineares das equações do sistema $A_1X = B_1$. Para vermos isso, observemos que toda k-ésima linha $(k \neq i)$, de $[A_2|B_2]$, pode ser obtida como uma combinação linear das linhas do sistema $A_1X = B_1$, a partir da escolha dos escalares $c_1 = 0, \ldots, c_k = 1, \ldots, c_m = 0$. Por outro lado, a i-ésima linha pode ser obtida a partir da escolha $c_1 = 0, \ldots, c_i = c, \ldots, c_m = 0$. Novamente, pela Proposição 2.1.2, concluímos que toda solução do sistema de equações lineares $A_1X = B_1$ é uma solução do sistema $A_2X = B_2$.

Agora, se a matriz $[A_2|B_2]$ é obtida da matriz $[A_1|B_1]$ por uma transformação elementar do tipo $L_i \to L_i + cL_j$, então todas as equações do sistema $A_2X = B_2$ ainda são combinações lineares das equações do sistema $A_1X = B_1$. De fato, observemos que toda k-ésima linha ($k \neq i$), de $[A_2|B_2]$, pode ser obtida como uma combinação linear das linhas do sistema $A_1X = B_1$, a partir da escolha dos escalares $c_1 = 0, \ldots, c_k = 1, \ldots, c_m = 0$. Por outro lado, a i-ésima linha pode ser obtida a partir da escolha $c_1 = 0, \ldots, c_i = 1, \ldots, c_j = c, \ldots, c_m = 0$. Similarmente aos dois casos anteriores, concluímos que toda solução do sistema de equações lineares $A_1X = B_1$ é uma solução do sistema $A_2X = B_2$.

Como cada uma das transformações elementares é reversível, concluímos que quando a equivalência das matrizes ampliadas se dá através de uma única transformação elementar nas linhas, os dois sistemas de equações lineares associados possuem o mesmo conjunto solução.

Assim, se as matrizes $[A_1|B_1]$ e $[A_2|B_2]$ são equivalentes por linhas, então uma pode ser obtida da outra através de um número finito de transformações elementares nas linhas. Como em cada transformação os sistemas lineares envolvidos possuem o mesmo conjunto solução, então podemos concluir que os sistemas de equações lineares $A_1X = B_1$ e $A_2X = B_2$ possuem o mesmo conjunto solução.

Lema 2.6.2. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ na forma escalonada. Tomemos $A = [A'|A'']$, onde $A' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times(n-1)}$, $A'' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times 1}$ e $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ as colunas de A onde ocorrem os primeiros elementos não nulos das linhas não nulas $A_1, A_2, \ldots, A_p$, respectivamente. Então, o sistema $A'X = A''$ admite solução se, e somente se, $k_p < n$.*

Demonstração. Se A está na forma escalonada, então o mesmo podemos dizer de A'. Assim, se $k_p = n$, então a p-ésima linha de A será

$$A_p = (0\ 0 \ldots 0\ 1)$$

o que implica que o sistema de equações lineares $A'X = A''$ possui uma equação do tipo

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1,$$

de onde podemos concluir que tal sistema não possui solução.

Se $k_p < n$, então o sistema de equações lineares $A'X = A''$ é da forma

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \\ A_{p+1} \\ \vdots \\ A_m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & k_1 & \ldots & k_2 & \ldots & k_p & k_p+1 & \ldots & n-1 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a'_{1\,k_p+1} & \ldots & a'_{1\,n-1} \\
\ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & a'_{2\,k_p+1} & \ldots & a'_{2\,n-1} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & a'_{p\,k_p+1} & \ldots & a'_{p\,n-1} \\
\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix} \end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a''_1 \\ a''_2 \\ \vdots \\ a''_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que possui uma solução.

Teorema 2.6.3. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ e matrizes $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$ na forma escalonada. Se A é equivalente por linhas a ambas as matrizes B_1 e B_2, então $B_1 = B_2$.*

Demonstração. Para $n = 1$, temos $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Se $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, então não podemos ter $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ equivalente por linhas a B_1. Logo, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Se $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, não podemos produzir $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ equivalente por linhas a B_1. Logo, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Em ambos os casos, obtemos $B_1 = B_2$. Suponhamos agora que para um inteiro $k \geq 1$ o resultado é verdadeiro. Sejam matrizes $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times(k+1)}$ na forma escalonada e equivalentes por linhas. Escrevamos $B_1 = [B_1'|B_1'']$ e $B_2 = [B_2'|B_2'']$. Certamente, temos que $B_1', B_2' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times k}$, B_1', B_2' estão na forma escalonada e são equivalentes por linhas. Assim, pela hipótese do Princípio de Indução Matemática, concluímos que $B_1' = B_2'$.

Dois casos são considerados:

1^o caso. Se na matriz B_1 temos $k_p = k+1$, então a matriz B_1 é do tipo

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & k_1 & \dots & k_2 & \dots & & k_p \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B_1'} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1''} \end{array}.$$

Isso nos mostra que o sistema de equações lineares $B_1'X = B_1''$ não possui solução, o que implica que o sistema $B_2'X = B_2''$ não possui solução, pelo Teorema 2.6.1, o que acarreta em $k_p = k+1$, na matriz B_2, pelo Lema 2.6.2, isto é,

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & k_1 & \dots & k_2 & \dots & & k_p \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B_2'} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_2''} \end{array}.$$

Assim, temos que $B_1'' = B_2''$.

2^o caso. Se na matriz B_1 temos $k_p < k+1$, então o sistema de equações lineares $B_1'X = B_1''$ possui ao menos uma solução X_0, pelo Lema 2.6.2. Isso implica que X_0 é solução do sistema $B_2'X = B_2''$, pelo teorema 2.6.1. Segue disso que,

$$B_1'' = B_1'X_0 = B_2'X_0 = B_2''.$$

Logo, $B_1'' = B_2''$.

Consequentemente, temos que $B_1 = B_2$.

Definição 2.6.4. *Seja uma matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$. Definimos o posto de A como o número de linhas não nulas de sua matriz em forma escalonada.*

Teorema 2.6.5. Teorema do Posto. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times n}$, $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{m\times 1}$ e o sistema de equações lineares $AX = B$. Seja p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema $[A|B]$ e p_A o posto da matriz dos coeficientes de A. Então:*

i) $p_{AB} = p_A$ se, e somente se, o sistema de equações lineares admite solução;

ii) Se $p_{AB} = p_A = n$, então o sistema de equações lineares possui única solução;

iii) Se $p_{AB} = p_A < n$, então o sistema de equações lineares possui infinitas soluções com $n - p_A$ incógnitas livres e p_A incógnitas dependentes das anteriores.

Demonstração. Pelo Teorema 2.6.3, consideremos a única matriz em forma escalonada $[A'|B']$ equivalente por linhas à matriz ampliada $[A|B]$ e denotemos $A' = [a'_{ij}]$ e $B' = [b'_i]$. Segue disso que a matriz A' é a única matriz em forma escalonada equivalente por linhas à matriz A. Como $p_A = p_{A'} \leq p_{AB}$, dois casos serão considerados:

$1^{\underline{o}}$ caso. $p_A = p_{A'} < p_{AB}$. Nesse caso, a matriz $[A'|B']$ possui uma linha do tipo

$$(0 \ldots 0\ 1)$$

o que implica que o sistema de equações $A'X = B'$ não possui solução. Pela Proposição 2.6.1, concluímos que o sistema de equações $AX = B$ não possui solução.

$2^{\underline{o}}$ caso. $p_A = p_{A'} = p_{AB}$. Para estudarmos esse caso, consideraremos dois subcasos:

$1^{\underline{o}}$ subcaso. $p_A = p_{A'} = p_{AB} = n$. A partir da hipótese do subcaso, temos que a matriz $A' = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ e na matriz B' os escalares $b'_{n+1}, \ldots, b'_m$ são todos nulos. Isso implica que o sistema de equações lineares $A'X = B'$ possui uma única solução, a saber: $x_1 = b'_1, \ldots, x_n = b'_n$. Pela Proposição 2.6.1, concluímos que o sistema de equações $AX = B$ possui uma única solução, a saber: $x_1 = b'_1, \ldots, x_n = b'_n$.

2º subcaso. $p_A = p_{A'} = p_{AB} < n$. Tomemos $p\ (= p_A = p_{A'} = p_{AB})$. Neste subcaso, o sistema de equações lineares $A'X = B'$ toma a forma, abaixo:

$$\begin{array}{c} \\ A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_p \\ A'_{p+1} \\ \vdots \\ A'_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & k_1 & \ldots & k_2 & \ldots & k_p & k_p+1 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a'_{1\,k_p+1} & \ldots & a'_{1\,n} \\ \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & a'_{2\,k_p+1} & \ldots & a'_{2\,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & a'_{p\,k_p+1} & \ldots & a'_{p\,n} \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A expressão matricial do sistema acima nos permite exprimir as variáveis x_{k_i} $(1 \leq i \leq p)$ em função das variáveis restantes, conforme abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k_1} & = & \sum_{l>k_1}(-a'_{1\,l})x_l + b'_1, \text{ onde } a'_{1k_i} = 0, \text{ para } i > 1; \\ x_{k_2} & = & \sum_{l>k_2}(-a'_{2\,l})x_l + b'_2, \text{ onde } a'_{2k_i} = 0, \text{ para } i > 2; \\ & \vdots & \\ x_{k_{p-1}} & = & \sum_{l>k_{p-1}}(-a'_{(p-1)\,l})x_l + b'_{p-1}, \text{ onde } a'_{(p-1)k_p} = 0; \\ x_{k_p} & = & \sum_{l>k_p}(-a'_{p\,l})x_l + b'_p. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Isso nos mostra que toda solução $x = (x_1, \ldots, x_n)$ do sistema de equações lineares $A'X = B'$ é obtida por uma escolha arbitrária de $n-p$ escalares, para as incógnitas no conjunto

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}\},$$

e em seguida com o cálculo dos escalares restantes x_{k_i} $(1 \leq i \leq p)$, a partir de (2.4). Novamente, pela Proposição 2.6.1, concluímos que toda solução $x = (x_1, \ldots, x_n)$ do sistema de equações lineares $AX = B$ é obtida por uma escolha arbitrária de $n - p$ escalares, para as incógnitas no conjunto

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}\},$$

e em seguida com o cálculo dos escalares restantes x_{k_i} $(1 \leq i \leq p)$, a partir de (2.4).

O teorema está demonstrado.

Capítulo 3

Determinantes

A intenção deste capítulo é apresentar os determinantes como a única função de matrizes que é n-linear e alternada. Os determinantes foram concebidos inicialmente para resolver sistemas lineares pequenos e, apesar de não serem bons instrumentos de cálculo, é apresentada uma maneira de calculá-los. Logo após, define-se a adjunta de uma matriz e a relação desta com o determinante para se encontrar a matriz inversa. Ao final, é exposta a Regra de Cramer como maneira explícita de encontrar, quando existe, a única solução de um sistema de equações lineares, sendo o modo preferido dos alunos, pois não exige muito do pensamento ao requerer apenas um processo mecânico de cálculos. Alertamos para o cuidado ao orientarmos os alunos quanto ao uso da Regra, já que alguns livros didáticos afirmam erroneamente que se todos os determinantes forem iguais a zero, então o sistema é indeterminado. É importante frisar que apenas a recíproca é verdadeira.

3.1 Definições e propriedades gerais

Definição 3.1.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, n um inteiro positivo e uma função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$, que associa a cada matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ um escalar $D(A)$ em $\mathfrak{K}$. Dizemos que D é n-linear se para cada i $(1 \leq i \leq n)$ D é uma função linear da i-ésima linha quando as outras $(n-1)$ linhas são mantidas fixas.*

Notação 3.1.2. *Sejam $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ as linhas de A. Escrevemos*

$$D(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n).$$

A afirmação de que D é n-linear significa

$$D(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \alpha_i', \dots, \alpha_n) = cD(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \dots, \alpha_i', \dots, \alpha_n),$$

ou simplesmente,

$$D(c\alpha_i + \alpha_i') = cD(\alpha_i) + D(\alpha_i').$$

Lema 3.1.3. *A combinação linear de aplicações n-lineares é uma aplicação n-linear.*

Demonstração. Sejam $D_1, D_2 : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ aplicações n-lineares e $c_1, c_2 \in \mathfrak{K}$. Consideremos a aplicação $c_1D_1 + c_2D_2 : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$, definida por

$$(c_1D_1 + c_2D_2)(A) = c_1D_1(A) + c_2D_2(A),$$

para todo $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$. Fixando todas as linhas exceto a linha i, temos que

$$\begin{aligned}(c_1D_1 + c_2D_2)(c\alpha_i + \alpha_i') &= c_1D_1(c\alpha_i + \alpha_i') + c_2D_2(c\alpha_i + \alpha_i') \\ &= cc_1D_1(\alpha_i) + c_1D_1(\alpha_i') + cc_2D_2(\alpha_i) + c_2D_2(\alpha_i') \\ &= c(c_1D_1 + c_2D_2)(\alpha_i) + (c_1D_1 + c_2D_2)(\alpha_i').\end{aligned}$$

Definição 3.1.4. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, n um inteiro positivo e uma função n-linear $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$. Dizemos que D é alternada se uma das duas condições equivalentes seguintes estão satisfeitas:*

i) $D(A) = 0$ *sempre que duas linhas de A são iguais;*

ii) Se A' é uma matriz obtida de A permutando duas linhas de A, então $D(A') = -D(A)$.

Lema 3.1.5. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, n um inteiro positivo e uma função n-linear $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$. Se $D(A) = 0$ sempre que duas linhas adjacentes de A são iguais, então D é alternante.*

Demonstração. Seja $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e denotemos suas linhas por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Consideremos $A' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ transpondo-se as linhas i e j de A, onde $i < j$. Podemos obter A' por transposições de pares de linhas adjacentes. Começamos movendo a linha α_i para a linha α_j. Isso requer $k = j - i$ transposições de linhas adjacentes. Agora movemos α_j, na $(j-1)$-ésima posição, para a i-ésima posição. Isso requer certamente $(k-1)$ transposições de linhas adjacentes. Assim, obtemos A' de A a partir de $k + (k-1) = 2k - 1$ transposições de linhas adjacentes. Logo,

$$D(A') = (-1)^{2k-1} D(A) = -D(A).$$

Definição 3.1.6. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, n um inteiro positivo e uma função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$. Dizemos que D é uma função determinante se D é n-linear, alternada e $D(I_n) = 1$, onde I_n é a matriz unidade de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.*

Definição 3.1.7. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, $n > 1$ um inteiro positivo e uma função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{(n-1)\times(n-1)} \to \mathfrak{K}$ $(n-1)$-linear. Definimos a função $D_{ij} : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ como*

$$D_{ij}(A) = D\big(A(i|j)\big),$$

para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, onde indicamos por $A(i|j)$ a $(n-1)\times(n-1)$ matriz obtida de A retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Teorema 3.1.8. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo, $n > 1$ um inteiro positivo e uma função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{(n-1)\times(n-1)} \to \mathfrak{K}$ $(n-1)$-linear alternada. Então, para cada j $(1 \leq j \leq n)$ a função $E_j : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ definida por*

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A),$$

para toda $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e com $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, é uma função n-linear alternada. Além disso, se D é uma função determinante, E_j também o é.

Demonstração. Primeiramente, observemos que $D_{ij}(A)$ não depende da i-ésima linha da matriz A. Como D é $(n-1)$-linear, então temos que a função D_{ij} é linear de qualquer linha de $A(i|j)$. Assim, para cada i $(1 \leq i \leq n)$, as funções $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$, onde $A \mapsto a_{ij}D_{ij}(A)$, são n-lineares. Pelo Lema 3.1.3, E_j é n-linear.

Agora, suponhamos que para uma matriz A tenhamos $\alpha_k = \alpha_{k+1}$ $(1 \leq k < n)$. Observemos que se $i \neq k$ e $i \neq k+1$, então a matriz $A(i|j)$ tem duas linhas iguais implicando $D_{ij}(A) = 0$. Segue disso que

$$E_j(A) = (-1)^{k+j}a_{kj}D_{kj}(A) + (-1)^{k+j+1}a_{(k+1)j}D_{(k+1)j}(A).$$

Como $a_{kj} = a_{(k+1)j}$ e $A(k|j) = A\big((k+1)|j\big)$, então $D_{kj}(A) = D_{(k+1)j}(A)$. Isso implica $E_j(A) = 0$. Pelo Lema 3.1.5, a função E_j é alternada.

Finalmente, suponhamos que D é uma função determinante. Então, $D(I_{(n-1)}) = 1$, onde $I_{(n-1)}$ é a matriz unidade de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{(n-1)\times(n-1)}$. Como $I_n(i|j)$ $(i \neq j)$ é uma matriz de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{(n-1)\times(n-1)}$ com a j-ésima linha nula e $I_n(j|j) = I_{(n-1)}$, então $D_{ij}(I_n) = 0$ $(i \neq j)$ e $D_{jj}(I_n) = 1$. Com isso, obtemos $E_j(I_n) = 1$. Portanto, E_j é uma função determinante em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

3.2 Unicidade dos Determinantes

Definição 3.2.1. *Seja n um inteiro positivo. Uma permutação de grau n é qualquer função bijetora σ do conjunto $\{1,\ldots,n\}$ em si mesmo. Denotaremos uma permutação de grau n pelas n-uplas ordenadas $\big(\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\big)$ e o conjunto de todas as permutações de grau n por S_n.*

Se σ e τ são permutações de grau n, então podemos associar de uma maneira natural uma terceira permutação, a saber: tomando a função composta $\sigma\tau$, onde $(\sigma\tau)(m) = \sigma\big(\tau(m)\big)$, para todo m. Nesse caso, sabemos que S_n, munido com essa operação, define uma estrutura de grupo finito não comutativo de ordem $n!$.

Para toda permutação de grau n, a sequência $\big(\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\big)$ pode ser obtida da sequência $(1,\ldots,n)$, por um número finito de transposições de pares de elementos. Além disso, qualquer que seja a maneira pela qual isso é feito, o número de transposições é sempre par ou é sempre ímpar. Assim, dizemos que σ é uma *permutação* *par* se o número de transposições para passar da sequência $(1,\dots,n)$ para a sequência $\big(\sigma(1),\dots,\sigma(n)\big)$ é par. Similarmente, dizemos que σ é uma *permutação ímpar* se o número de transposições para passar da sequência $(1,\dots,n)$ para a sequência $\big(\sigma(1),\dots,\sigma(n)\big)$ é ímpar. Definimos o sinal de uma permutação σ de grau n por

$$\text{sinal } \sigma = \begin{cases} +1 & ,\text{se } \sigma \text{ é par} \\ -1 & ,\text{se } \sigma \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Teorema 3.2.2. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Então, para toda função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ n-linear alternada, temos que*

$$D(A) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} (\textit{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}\right) D(I_n),$$

para toda $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

Demonstração. Consideremos $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ uma função n-linear alternada e denotemos por $\iota_1,\dots,\iota_n$ as linhas da matriz unidade I_n de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$. Então, para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, com linhas $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ temos que

$$\alpha_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\iota_j \ (1 \le i \le n).$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} D(A) &= D(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\ &= D\big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\iota_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\iota_j\big) \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_n} a_{1j_1}\dots a_{nj_n} D(\iota_{j_1},\dots,\iota_{j_n}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como D é alternada, então $D(\iota_{j_1},\dots,\iota_{j_n}) = 0$, sempre que dois dos índices j_k são iguais. Portanto em (3.1) é suficiente considerarmos somente as parcelas relativas às sequências $(j_1,\dots,j_n)$ que sejam permutações de grau n. Assim, temos que

$$D(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} D(\iota_{\sigma(1)},\dots,\iota_{\sigma(n)}). \tag{3.2}$$

Mas,

$$D(\iota_{\sigma(1)},\dots,\iota_{\sigma(n)}) = (\text{sinal } \sigma) D(\iota_1,\dots,\iota_n),$$

para toda $\sigma \in S_n$. Logo,

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} D(\iota_1, \dots, \iota_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \right) D(I_n). \end{aligned}$$

Corolário 3.2.3. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Então, existe uma única função determinante sobre $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, denotada por* det. *Nesse caso,*

$$\det : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$$

onde

$$\det(A) = \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (\textit{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a função det é uma função determinante. Sejam $\alpha_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{in})$ e $\alpha'_i = (a'_{i1} \ \dots \ a'_{i2})$ duas linhas de A, c um escalar de $\mathfrak{K}$ e fixemos todas as outras. Então,

$$\begin{aligned} \det(c\alpha_i + \alpha'_i) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (c a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \det(\alpha_1) + \det(\alpha'_1). \end{aligned}$$

Logo, det é linear nessa linha. Assim, det é uma função n-linear. Em seguida, suponhamos que α_i e α_j sejam duas linhas de A iguais, isto é,

$$a_{i\sigma(k)} = a_{j\sigma(k)},$$

para todo k $(1 \leq k \leq n)$. Para toda permutação σ de grau n, existe uma única permutação σ' de grau n tal que $\sigma'(i) = \sigma(j)$, $\sigma'(j) = \sigma(i)$ e $\sigma(k) = \sigma'(k)$, para todos os outros índices k $(1 \leq k \neq i, j \leq n)$. Segue disso que, $a_{i\sigma'(i)} = a_{i\sigma(j)} = a_{j\sigma(j)}$,

$a_{j\sigma'(j)} = a_{j\sigma(i)} = a_{i\sigma(i)}$ e sinal $\sigma = -$ sinal σ'. Logo,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{j\sigma(j)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma' \in S_n} (\text{sinal } \sigma') a_{1\sigma'(1)} \ldots a_{i\sigma'(i)} \ldots a_{j\sigma'(j)} \ldots a_{n\sigma'(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{j\sigma(j)} \ldots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\det(A) = 0$. Isso nos mostra que det é alternada. Finalmente, é de fácil verificação que $\det(I_n) = 1$. Consequentemente, concluímos que det é uma função determinante em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

Reciprocamente, pelo Teorema 3.2.2, toda função determinante D pode ser escrita como

$$D(A) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \right) D(I_n),$$

para toda $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$. Como $D(I_n) = 1$, então

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Proposição 3.2.4. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Então,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

para quaisquer $A, B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

Demonstração. Fixemos uma matriz arbitrária $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e consideremos a função $D : \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n} \to \mathfrak{K}$ definida por

$$D(A) = \det(AB),$$

para todo $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$. Denotemos por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as linhas de A. Então,

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1 B, \ldots, \alpha_n B).$$

Assim, se $c \in \mathfrak{K}$,

$$\begin{aligned}
D(c\alpha_i + \alpha_i') &= \det\big((c\alpha_i + \alpha_i')B\big) = \det(c\alpha_i B + \alpha_i' B) \\
&= c\det(\alpha_i B) + \det(\alpha_i' B) \\
&= cD(\alpha_i) + D(\alpha_i').
\end{aligned}$$

Também, se $\alpha_i = \alpha_j$, então $\alpha_i B = \alpha_j B$ e, como det é alternada, temos

$$\begin{aligned} & D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) \\ = \; & \det(\alpha_1 B, \ldots, \alpha_i B, \ldots, \alpha_j B, \ldots, \alpha_n B) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Logo, D é uma função n-linear e alternada e pelo Teorema 3.2.2,

$$D(A) = \det(A) D(I_n),$$

para todo $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$. Mas $D(I_n) = \det(I_n B) = \det(B)$, portanto

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3.3 Matriz adjunta

Proposição 3.3.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Então,*

$$\det(A^t) = \det(A),$$

para toda $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$.

Demonstração. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e tomemos $A^t = [a^t_{ij}]$. Para toda permutação σ de grau n, temos que $a^t_{i\sigma(i)} = a_{\sigma(i)i}$, para todo i ($1 \leq i \leq n$). Do Corolário 3.2.3, segue que

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sinal } \sigma) a^t_{1\sigma(1)} \ldots a^t_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} (\text{sinal } \sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} (\text{sinal } \sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

A partir do Teorema 3.1.8 e do Corolário 3.2.3, podemos tomar a fórmula

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\big(A(i|j)\big),$$

para toda $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, onde $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.

Definição 3.3.2. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ com $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, o escalar*

$$(-1)^{i+j} \det\big(A(i|j)\big)$$

é chamado de (i,j)-cofator de A.

Lema 3.3.3. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ com $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, temos*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+j} \det\big(A(i|j)\big) = \delta_{jk} \det(A)$$

onde δ_{jk} $(1 \le j,k \le n)$ é o delta de kronecker.

Demonstração. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ com $A = [a_{ij}]$, dois casos são considerados:

1º caso. $j \neq k$. Neste caso, consideremos a matriz $A' \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ formada pelas mesmas colunas de A, sendo porém a sua j-ésima coluna substituída pela k-ésima coluna. Como A' possui duas colunas iguais, $A'(i|j) = A(i|j)$ e $a'_{ij} = a_{ik}$, para todo i $(1 \le i \le n)$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A') \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} \det\big(A'(i|j)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det\big(A(i|j)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+j} \det\big(A(i|j)\big). \end{aligned}$$

2º caso. $j = k$. Neste caso, o resultado é uma consequência direta da observação feita no início do parágrafo.

O Lema 3.3.3 nos indica a construção da seguinte matriz

Definição 3.3.4. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ com $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, definimos a matriz adjunta clássica de A, denotada por adj A, como sendo a matriz de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ dada por*

$$(adj\ A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i)\ (1 \leq i, j \leq n).$$

Lema 3.3.5. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$,*

$$(adj\ A)A = A(adj\ A) = \det(A)I_n.$$

Demonstração. Consideremos o produto $A' = (adj\ A)A$, onde $A' = [a'_{ij}]$. Então, para todo par de índices i, j $(1 \leq i, j \leq n)$, temos

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (adj\ A)_{ik} a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \det A(k|i) a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (-1)^{i+k} \det A(k|i) \\ &= \delta_{ij} \det(A), \end{aligned}$$

pelo Lema 3.3.3. Ainda,

$$A(adj\ A) = \big((adj\ A)A\big)^t = \big(\det(A)I_n\big)^t = \det(A)I_n^t = \det(A)I_n.$$

Teorema 3.3.6. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Para toda matriz $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, então A é inversível em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ se, e somente se,* $\det(A)$ *é inversível em $\mathfrak{K}$. Nesse caso,*

$$A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1} adj\ A.$$

Demonstração. De fato, se A é inversível em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Isso implica que $\det(A) \neq 0$, pela Proposição 3.2.4, o que acarreta $\det(A)$ ser inversível em $\mathfrak{K}$. Reciprocamente, se $\det(A) \neq 0$, então A é inversível em $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, pelo Lema 3.3.5. Ainda, pelo mesmo Lema, segue que $A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1} adj\ A$.

3.4 Regra de Cramer

Teorema 3.4.1. *Seja $\mathfrak{K}$ um corpo e n um inteiro positivo. Dadas duas matrizes $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$ e $Y \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times 1}$, consideremos o sistema de equações lineares $AX = Y$, onde $X \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times 1}$ é uma matriz incógnita.*

Se $\det(A) \neq 0$, *então*

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \text{ para todo } i \ (1 \leq i \leq n),$$

onde B_i é a matriz obtida de A substituindo sua i-ésima coluna por Y.

Demonstração. Pelo Lema 3.3.5, temos que

$$(adj\ A)(AX) = (adj\ A)Y$$

o que implica

$$\det(A)X = (adj\ A)Y.$$

Segue disso que,

$$\det(A)x_i = \sum_{k=1}^{n} (adj\ A)_{ik} y_k, \text{ para todo } i \ (1 \leq i \leq n),$$

isto é,

$$\det(A)x_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} y_k \det\big(A(k|i)\big), \text{ para todo } i \ (1 \leq i \leq n).$$

Consideremos a matriz $B_i \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})_{n\times n}$, obtida de A substituindo sua i-ésima coluna por Y. Segue disso que

$$\det(A)x_i = \det(B_i), \text{ para todo } i \ (1 \leq i \leq n).$$

Assim, se $\det(A) \neq 0$, então

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \text{ para todo } i \ (1 \leq i \leq n).$$

Capítulo 4

Interpretações no Ensino Médio

Como já assinalamos anteriormente, fizemos uma pesquisa nos 80 volumes da Revista do Professor de Matemática (RPM) sobre os artigos que abordaram o assunto sistemas lineares. Os artigos encontrados foram apenas dois. Estes foram lidos, analisados e fichados de modo a percebermos os argumentos apresentados pelos autores. Nossa ficha de leitura elencou os seguintes itens:

Autor / Título do artigo / Referências bibliográficas / Objetivos do autor / Resumo do texto (elaborado pelo analista) / Comentários do analista.

As fichas elaboradas foram as seguintes:

FICHA 1

Autor: FERREIRA, Maria C. C. & GOMES, Maria L. M., Revista do Professor de Matemática 32, 1996.

Título: Sobre o ensino de sistemas lineares.

Referências bibliográficas: [1] LIMA, E. L. Coordenadas no espaço. Rio de Janeiro: SBM, 1993. [2] LIMA, E. L. Sobre o ensino de sistemas lineares. RPM. São Paulo: SBM, n^o 23: 8 - 18, 1993.

Objetivo: Mostrar como a interpretação geométrica dos sistemas lineares pode contribuir para sua melhor compreensão. Orientar a escolha do método de resolução/discussão entre regra de Cramer e escalonamento.

Resumo: O artigo refere-se à experiência ocorrida no ano de 1992, em Belo

Horizonte, num curso de aperfeiçoamento de professores da educação básica. Através de observações e depoimentos de alguns participantes, as autoras construíram o texto. A interpretação geométrica dos sistemas de duas equações e duas incógnitas é realizada, em geral, na 7^a série do 1^o grau (8^o ano do atual ensino fundamental). Nesse caso, cada equação representa uma reta no plano e as posições relativas (concorrentes, paralelas e coincidentes) entre elas são traduzidas, respectivamente, como sistemas que têm solução única, não têm solução e têm infinitas soluções.

Porém, não é usual interpretar geometricamente os sistemas lineares 3×3. Aqui, cada equação representa um plano no espaço tridimensional. Todavia, agora temos oito possibilidades para as posições relativas entre os planos. Quatro delas correspondem a sistemas impossíveis (nenhuma solução), três, a sistemas indeterminados (infinitas soluções) e uma a sistemas que têm única solução. Daí, podermos dissociar tipos diferentes de sistemas indeterminados (as infinitas soluções podem ser os pontos de um plano ou de uma reta) e impossíveis (a inexistência de solução dá-se quando dois ou três planos são paralelos entre si ou os três planos se intersectam dois a dois segundo retas paralelas).

Quanto à resolução/discussão dos sistemas lineares, a regra de Cramer somente poderá ser utilizada se o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo: situação esta que corresponde aos três planos se intersectarem num só ponto e o sistema ter solução única. Contudo, muitos livros didáticos afirmam erroneamente que, se um sistema tem todos os determinantes nulos da regra de Cramer, então ele é indeterminado. A interpretação geométrica possibilitou aos professores perceber claramente a falsidade dessa afirmativa.

O curso ainda chamou a atenção dos docentes para a grande importância do método do escalonamento, sendo mais geral, eficiente e com menor custo operacional na resolução/discussão dos sistemas lineares.

Comentários do analista: A geometria é um poderoso aliado no estudo de sistemas lineares que envolvem até 3 incógnitas. A Regra de Cramer perde de longe para o escalonamento, pois limita-se a sistemas quadrados $n \times n$. Além disso, calcular determinantes é uma tarefa dificílima, já que um determinante de ordem $n \times n$ é uma soma de $n!$ termos onde cada um desses termos é um produto formado por um elemento de cada linha e de cada coluna, afetado com um sinal positivo (permutação de classe par) ou negativo (permutação de classe ímpar). E, em contraste com o ambiente artificial criado nos livros didáticos, na vida real temos sistemas maiores e com números não bem comportados.

FICHA 2

Autor: FILHO, Adalberto A. D., Revista do Professor de Matemática 59, 2006.

Título: Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares.

Referências bibliográficas: [1] LAY, D. C., Álgebra linear e suas aplicações. 2^a edição. LTC, 1999. [2] PAIVA, M.. Matemática. 2^a edição. Coleção básica. Moderna, 2004.

Objetivo: Mostrar que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.

Resumo: O artigo trata de uma aplicação interessante e didática para os alunos porque sugere encaminhamentos metodológicos práticos nos quais se possa trabalhar com os conceitos de matrizes e sistemas lineares. É abordada uma dieta alimentar hipotética, isto é, não prescrita por médico ou nutricionista. Normalmente, no verso das embalagens dos alimentos consta uma tabela contendo informações acerca do valor energético, quantidade de hidratos de carbono (carboidratos), proteínas, gorduras, dentre outros componentes; e quanto cada um desses nutrientes representa percentualmente nos Valores Diários de Referência - VDR para uma alimentação adequada. Os seis alimentos analisados foram os seguintes: arroz e feijão *in natura*, peito de frango empanado congelado, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal. Assim como os quatro nutrientes supracitados.

A dieta será criada ao determinarmos as quantidades $x_1, ..., x_6$ (em respectivas porções) de cada alimento, necessárias para compor o VDR. Isso equivale a resolver um sistema com quatro equações (correspondentes ao número de nutrientes) e seis incógnitas (correspondentes ao número de alimentos). Após escalonado, o sistema mostrou-se possível e indeterminado, ou seja, apresentou infinitas soluções. Os valores de $x_1, ..., x_4$ dependem dos valores escolhidos para x_5 e x_6, ditas variáveis livres. Deste modo, podemos expressar $x_1, ..., x_4$ em termos de x_5 e x_6. Entretanto, numa situação prática nem toda solução matemática faz sentido, já que numa dieta é precípuo escolher $x_5 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geq 0, ..., x_4 \geq 0$. Então, essas restrições nos levam a quatro inequações que, geometricamente, representam semiplanos no sistema de eixos x_5 e x_6. Os valores de x_5 e x_6 que satisfazem ao mesmo tempo todas as inequações pertencem à região de intersecção dos semiplanos. Assim, as possíveis dietas poderão ser montadas.

Comentários do analista: Neste artigo, temos a oportunidade de interpretar um sistema de equações lineares com 6 variáveis, como sendo as diferentes maneiras possíveis de se montar uma dieta alimentar. O autor foi bastante feliz ao escolher o tema alimentos, porque é algo extremamente familiar e contextualizado ao mundo do aluno, sendo uma ancoragem com os conceitos matemáticos e isso produz uma aprendizagem significativa e não mecânica. O professor poderá trabalhar a interdisciplinaridade através de assuntos correlacionados, como agricultura, fome, fisiologia humana, componentes químicos, dentre outros.

Os dois artigos da RPM contribuem para a prática educativa no tocante aos sistemas lineares, pois além de unirem dois grandes campos (Geometria e Álgebra), possibilitam também à matemática conversar com outras disciplinas do ensino médio através da interdisciplinaridade.

Após sentir a necessidade de interpretar os sistemas lineares com $3, 4, 5, 6, ..., n$ incógnitas, e relacioná-los com a Biologia, Física, Química e Sociologia, resolvemos fazer uma busca na literatura universitária para apresentar propostas didáticas contextualizadas e diferenciadas que possam ser exploradas no ensino médio.

4.1 Alocação de recursos limitados

Definição 4.1.1. *Alocação de recursos limitados é o* **processo** *pelo qual n recursos existentes e disponíveis $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ são utilizados e distribuídos entre m usos alternativos $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$, que podem ser de tipos finais (programas, atividades, etc ...), de tipos intermediários (necessários à produção de um uso final), ou ainda de tipos definidos, em termos do que se defina como pretendido ou necessário.*

Três aspectos do processo de alocação de recursos merecem ser destacados.
i) Toda alocação resulta ou corresponde a um processo decisório sobre onde colocar os recursos.
ii) Alocar recursos limitados a um conjunto de atividades significa que eles não estarão disponíveis para outras atividades.
iii) Todo conjunto de prioridades se traduz num padrão específico de alocação de recursos e vice-versa: todo padrão de alocação de recursos corresponde a certas prioridades. Nesse caso, é o padrão de alocação que determina as verdadeiras prioridades. Assim, o conhecimento da distribuição dos recursos de acordo com critérios específicos (alocação) permite uma série de análises extremamente úteis.

Dentre os critérios específicos, podemos considerar o do uso da matemática, como instrumento de modelamento. Nesse sentido, uma grande quantidade de modelamentos por sistemas de equações lineares envolve a alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições. Vejamos alguns exemplos que poderão ser apresentados em sala de aula:

Exemplo 4.1.2. *Um instituto de Biologia estuda n espécies de organismos microscópicos, denotados por $M_1, \ldots, M_n$, todas elas alocadas em um mesmo recipiente. Determinou-se que elas serão alimentadas por m fontes diferentes de alimentos, denotados por $A_1, \ldots, A_m$. É conhecido que cada organismo da espécie M_j $(1 \leq j \leq n)$, consome por dia um número de unidades do alimento A_i $(1 \leq i \leq m)$, como mostra a Tabela 4.1. Se o instituto dispõe por dia de b_i $(1 \leq i \leq m)$ unidades de alimentos A_i, para colocar no recipiente, quantas unidades de organismos microscópicos de* *cada espécie podem coexistir no recipiente de modo a consumir todo o alimento?*

	M_1	M_2	$\cdots$	M_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_{m-1}	$a_{(m-1)1}$	$a_{(m-1)2}$	$\cdots$	$a_{(m-1)n}$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Tabela 4.1:

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os números de bactérias das espécies $M_1, M_2, ..., M_n$, respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias da espécie M_1 consome a_{11} de A_1 por dia, o grupo M_1 consome um total de $a_{11}x_1$ unidades por dia.

Analogamente, os grupos $M_2, ..., M_n$ consomem um total de $a_{12}x_2, ..., a_{1n}x_n$ unidades do alimento A_1 por dia, respectivamente. Como queremos usar todas as b_1 unidades de A_1 , temos a equação

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

Da mesma forma, obtemos as equações correspondentes ao consumo de $A_2, ..., A_m$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} & = & b_m \end{array}$$

Assim, obtemos um sistema de m equações lineares em n variáveis:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A forma escalonada da matriz acima fornecerá as quantidades de organismos microscópicos de cada espécie que podem coexistir no recipiente.

Exemplo 4.1.3. *Um biólogo analisará três espécies de bactérias I, II e III num mesmo tubo de ensaio, onde elas serão nutridas por três fontes distintas de alimentos A, B e C. A cada dia serão colocadas no tubo 2300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. A Tabela 4.2 mostra a quantidade, em unidades, de alimento consumida por dia, por cada micro-organismo:*

	I	**II**	**III**
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Tabela 4.2:

Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

Sejam x_1, x_2 e x_3 os números de bactérias das espécies I, II e III, respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias I consome duas unidades de A por dia, o grupo I consome um total de $2x_1$ unidades/dia. De maneira análoga, os grupos II e III consomem um total de $2x_2$ e $4x_3$ unidades do alimento A diariamente. Como queremos que sejam utilizadas todas as 2.300 unidades de A, temos a equação

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2.300$$

Da mesma forma, montamos as equações relativas ao consumo de B e C:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1.500 \end{aligned}$$

Sendo assim, estamos diante de um sistema de três equações lineares em três variáveis. A forma escalonada da matriz ampliada do sistema fornece

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right)$$

Logo, $x_1 = 100$ e $x_2 = x_3 = 350$.

Portanto, podem coexistir no tubo 100 bactérias da espécie I e 350 de cada uma das espécies II e III para que todo o alimento seja consumido.

4.2 Jogos lineares finitos

Definição 4.2.1. *Jogos lineares finitos são* **sistemas** *finitos compreendidos por* m *objetos* $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$*, onde cada um deles apresenta um número finito* p *de estados* $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p$ *pelos quais podem ser alterados por meio da aplicação de um número finito* n *de processos* $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$*, cada um dos quais produz uma quantidade finita* q *de alterações de estados* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_q$ *dos objetos.*

Em geral, as ferramentas da aritmética modular são adequadas para a análise e solução desses tipos de problemas, devido à natureza finita de tais situações, e frequentemente sistemas lineares sobre $\mathbb{Z}_p$ modelam tais problemas.

Exemplo 4.2.2. *Consideremos um sistema formado por* m *lâmpadas* $\mathcal{L}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{L}_m$*, cada uma apresentando* p *de estados* $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{p-1}$ *(*p *um número primo) de luminosidades. Representemos o conjunto dos estados das* m *lâmpadas por elementos de* $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_p)_{m\times 1}$*, onde* 0 *respresenta o estado* $\mathcal{E}_0 \ldots$ *e* $p-1$ *representa o estado* $\mathcal{E}_{p-1}$*.*

Suponhamos que o sistema seja controlado por n *interruptores* $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$*, onde cada interruptor muda diretamente o estado das lâmpadas para possíveis outros estados tais que suas ações sejam representadas por meio de elementos de* $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_p)_{m\times 1}$*. Se os interruptores* $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ *mudam diretamente os estados das lâmpadas com ações definidas pelos elementos*

$$i_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, i_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

respectivamente, onde $a_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$*, então considerando duas configurações quaisquer de estados* $s_0,\ s_1 \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_p)_{m\times 1}$*, é possível de* s_0 *chegarmos a* s_1*?*

Para decidir se é possível chegar a uma configuração final s_1, começando com uma configuração inicial s_0, precisamos determinar se existem escalares $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{Z}_p$ satisfazendo a equação

$$s_0 + x_1 i_1 + \ldots + x_n i_n = s_1.$$

Exemplo 4.2.3. *Consideremos um sistema formado por m lâmpadas* $\mathcal{L}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{L}_m$*, cada uma apresentando 2 estados* $\mathcal{E}_0$ *(desligado) e* $\mathcal{E}_1$ *(ligado), controlados por m interruptores* $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m$*, onde cada interruptor* $\mathcal{I}_i$ *muda diretamente o estado das lâmpadas para o próximo estado. Além disso, o interruptor* $\mathcal{I}_1$ *muda o estado das duas primeiras lâmpadas* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$*, o interruptor* $\mathcal{I}_i$ $(1 < i < m)$ *muda o estado das três lâmpadas em sequência* $\mathcal{L}_{i-1}, \mathcal{L}_i$ *e* $\mathcal{L}_{i+1}$*, e o interruptor* $\mathcal{I}_m$ *muda o estado das duas últimas lâmpadas* $\mathcal{L}_{m-1}$ *e* $\mathcal{L}_m$*.*

Representemos o conjunto dos estados das m lâmpadas por elementos de $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)_{m\times 1}$*, onde 0 respresenta o estado* $\mathcal{E}_0$ *e 1 o estado* $\mathcal{E}_1$*. Representemos também as ações dos interruptores por meio de elementos de* $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)_{m\times 1}$*, onde pela definição de como funcionam tomam a forma*

$$\mathcal{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots,\ \mathcal{I}_{m-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{I}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos inicialmente que todas as luzes estejam apagadas. Podemos manipular os interruptores em alguma ordem de modo a obter uma configuração final de estados *dada por*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

Para decidir se é possível chegar à configuração final desejada, precisamos determinar se existem escalares $x_1, \ldots, x_m$ em $\mathbb{Z}_2$ satisfazendo o sistema de equações lineares cuja matriz ampliada do sistema é dada por

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ilustrando para o caso de quatro lâmpadas e quatro interruptores, temos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se traduz na matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

que se reduz sobre $\mathbb{Z}_2$ a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Logo, há uma única solução para o sistema:

$$x_1 = x_4 = 0$$

e

$$x_2 = x_3 = 1$$

Em outras palavras, devemos pressionar uma vez I_2 e uma vez I_3.

4.3 Redes

Redes é uma das mais importantes e frequentes classes dos problemas de Otimização. É um campo da combinatória em teoria dos grafos. Diversas questões envolvendo redes surgiram diretamente a partir da prática cotidiana em engenharia e gestão: determinação do menor percurso, escolha de caminhos mais confiáveis em redes de tráfego, econômica ou de comunicação, coordenação de projetos, resolução de problemas de oferta e demanda, dentre outros.

Ademais, redes também fazem parte da teoria da complexidade, uma área presente na interseção da Matemática com a Ciência da computação teórica que trata da análise matemática de algoritmos.

Definição 4.3.1. *Uma rede consiste em um número finito de nós (junções ou vértices) conectados por uma série de segmentos dirigidos, conhecidos por ramos (arcos). Cada ramo é marcado com um fluxo que significa a quantidade de algum produto que pode fluir ao longo ou através daquele ramo, na direção e sentido indicado. As leis primordiais que regem o fluxo através da rede são:*

1) Em qualquer instante, o fluxo por um ramo é sempre num único e mesmo sentido.

2) A taxa de fluxo para dentro de um nó é igual à taxa de fluxo para fora do nó.

3) A taxa de fluxo para dentro da rede é igual à taxa de fluxo para fora da rede.

Assim, consideremos uma rede constituída por m nós $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$ e r ramos $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_r$, satisfazendo as três condições acima, onde se deseja determinar os valores de um conjunto de n $(1 \leq n \leq r)$ fluxos desconhecidos, em função dos $r-n$ fluxos restantes. Para cada nó $\mathcal{N}_k$ $(1 \leq k \leq m)$, consideremos o conjunto de índices $\mathcal{E}(\mathcal{D})_k$, das conexões dos ramos de entrada desse nó, com suas respectivas quantidades desconhecidas f_{i_k} $(i_k \in \mathcal{E}(\mathcal{D})_k)$ que fluem através desses ramos, e o conjunto de índices $\mathcal{E}(\mathcal{C})_k$, das conexões dos ramos de entrada desse mesmo nó, com suas respectivas quantidades conhecidas a_{j_k} $(j_k \in \mathcal{E}(\mathcal{C})_k)$, que fluem através desses ramos. Agora, consideremos o conjunto de índices $\mathcal{S}(\mathcal{D})_k$, das conexões dos ramos de saída desse nó, com suas respectivas quantidades desconhecidas f_{p_k} $(p_k \in \mathcal{S}(\mathcal{D})_k)$ que fluem através desses ramos, e o conjunto de índices $\mathcal{S}(\mathcal{C})_k$, das conexões dos ramos de saída desse mesmo nó, com suas respectivas quantidades conhecidas a_{q_k} $(q_k \in \mathcal{S}(\mathcal{C})_k)$, que fluem através desses ramos.

A partir dos três axiomas, temos que

$$\sum_{i_k \in \mathcal{E}(\mathcal{D})_k} f_{i_k} + \sum_{j_k \in \mathcal{E}(\mathcal{C})_k} a_{j_k} = \sum_{p_k \in \mathcal{S}(\mathcal{D})_k} f_{p_k} + \sum_{q_k \in \mathcal{S}(\mathcal{C})_k} a_{q_k}.$$

Assim, as quantidades de fluxos desconhecidas satisfazem o sistema de m equações lineares com n variáveis, abaixo,

$$\sum_{i_k \in \mathcal{E}(\mathcal{D})_k} f_{i_k} + \sum_{p_k \in \mathcal{S}(\mathcal{D})_k} (-1) f_{p_k} = \sum_{j_k \in \mathcal{E}(\mathcal{C})_k} (-a_{j_k}) + \sum_{q_k \in \mathcal{S}(\mathcal{C})_k} a_{q_k} \ (k = 1, \ldots, m),$$

onde n é a cardinalidade do conjunto $\bigcup_{k=1}^{m} \left(\mathcal{E}(\mathcal{D})_k \cup \mathcal{S}(\mathcal{D})_k\right)$.

Exemplo 4.3.2. *Na região central de certa cidade, as ruas de mão única se intersectam como mostrado na Figura 4.1, bem como o volume por minuto de tráfego entrando e saindo desse local durante a hora de pique:*

Determine o volume de tráfego em cada uma das quatro interseções.

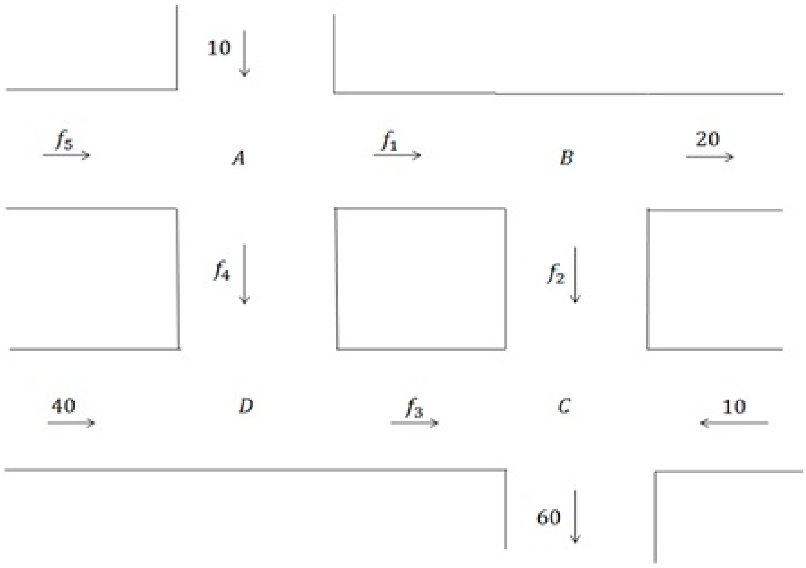

Figura 4.1:

Em cada interseção, o número de veículos entrando deve ser o mesmo que o número saindo. Por exemplo, na interseção A, o número de veículos entrando é $10 + f_5$ e o número saindo é $f_1 + f_4$. Então

$$10 + f_5 = f_1 + f_4 \qquad \text{Interseção A}$$

Similarmente

$$f_1 = f_2 + 20 \qquad \text{Interseção B}$$

$$f_2 + f_3 + 10 = 60 \qquad \text{Interseção C}$$

$$40 + f_4 = f_3 \qquad \text{Interseção D}$$

Estamos diante do sistema linear

$$\begin{cases} f_1 + f_4 - f_5 = 10 \\ f_1 - f_2 = 20 \\ f_2 + f_3 = 50 \\ f_3 - f_4 = 40 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é dada por

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 40 \end{array}\right)$$

e que possui a forma escalonada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Note que há uma variável livre. Fazendo $f_4 = r$ e expressando as variáveis dependentes em termos de f_4, obtemos

$$\begin{array}{rcrcl} f_1 & = & 30 & - & r \\ f_2 & = & 10 & - & r \\ f_3 & = & 40 & + & r \\ f_5 & = & 20 & & \end{array}$$

Essas equações descrevem todos os possíveis volumes de tráfego e nos permitem analisar os cruzamentos.

Exemplo 4.3.3. *Uma empresa petrolífera possui a rede de gasodutos para a condução de óleo, mostrada na Figura 4.2, em milhões de barris por hora.*

Analise os possíveis fluxos através desta rede:

A conservação do fluxo em cada nó é dada na Tabela 4.3.

Podemos montar o seguinte sistema linear de equações:

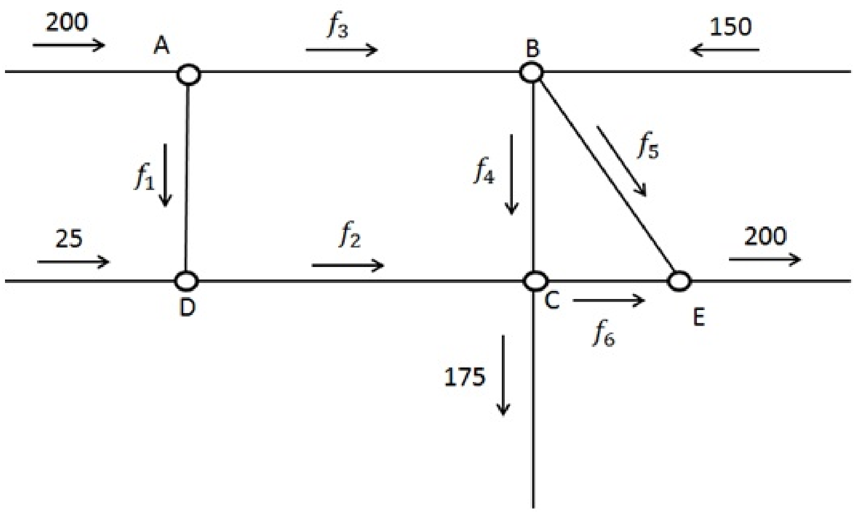

Figura 4.2:

Nó A:	$200 = f_1 + f_3$
Nó B:	$f_3 + 150 = f_4 + f_5$
Nó C:	$f_2 + f_4 = 175 + f_6$
Nó D:	$f_1 + 25 = f_2$
Nó E:	$f_5 + f_6 = 200$

Tabela 4.3:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = -25 \\ f_1 + f_3 = 200 \\ f_3 - f_4 - f_5 = -150 \\ f_2 + f_4 - f_6 = 175 \\ f_5 + f_6 = 200 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

e que possui forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 175 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Observe que há duas variáveis livres. Fazendo $f_4 = r$, $f_6 = t$ e expressando as variáveis dependentes em termos de f_4 e f_6, obtemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} f_1 & = & 150 & - & r & + & t \\ f_2 & = & 175 & - & r & + & t \\ f_3 & = & 50 & + & r & - & t \\ f_5 & = & 200 & - & t & & \end{array}$$

Essas equações descrevem todos os possíveis fluxos e nos permitem analisar a rede.

4.4 Interpolação polinomial

Seja f uma função conhecida somente em n pontos do intervalo $[a, b]$ e queremos descobrir o seu comportamento em qualquer outro ponto do referido intervalo. Para isso, através dos pontos dados, é possível encontrar uma função (chamada de aproximante) que substitui $f(x)$ dentro de um certo limite de precisão.

A função aproximante que nos interessa aqui é um polinômio, todavia poderia ser outra, como uma função racional ou exponencial, por exemplo.

Sendo assim, quando temos n pontos distintos, $x_1, ..., x_n$, $(x_i \neq x_j)$, e os valores de $f(x)$ nesses pontos, $f(x_1), ..., f(x_n)$, podemos encontrar um único polinômio $p(x)$ de grau menor do que ou igual a $(n-1)$ que satisfaz a $f(x_i) = p(x_i)$, com $i = 1, ..., n$.

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, f(x_1))$,..., $P_n = (x_n, f(x_n))$ com abcissas distintas. Consideremos ainda o polinômio de grau $(n-1)$

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$$

que interpola os pontos dados. Substituindo os pontos em $p(x)$, obtemos um sistema linear $JX = C$, em que

$$X = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz J é chamada de **Matriz de Vandermonde**.

Exemplo 4.4.1. *Um químico coletou alguns dados experimentais relacionados às concentrações de uma substância química medida em intervalos de um segundo, conforme Tabela 4.4. Encontre a concentração (em mols) após* $1,5$ *s:*

Como temos três pontos distintos, faremos uma interpolação quadrática, ou seja, aproximaremos a função por um polinômio do segundo grau da forma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Tempo (s)	**Concentração (mols)**
1	3,00
2	5,00
3	1,00

Tabela 4.4:

Substituindo-se os pontos $(1;3)$, $(2;5)$ e $(3;1)$ em $p(x)$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 5 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 1 \end{cases}$$

Podemos lançar mão da Regra de Cramer para resolver o sistema, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+9+12) - (18+3+4) = 23 - 25 = -2 \neq 0$$

Além disso,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6+1+15) - (2+9+5) = 22 - 16 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (5+27+4) - (45+1+12) = 36 - 58 = -22$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+45+36) - (54+15+4) = 83 - 73 = 10$$

Logo, $a_2 = \frac{6}{-2} = -3$, $a_1 = \frac{-22}{-2} = 11$, $a_0 = \frac{10}{-2} = -5$.

Então,

$$p(x) = -3x^2 + 11x - 5$$

Portanto,

$$p(1,5) = -3(1,5)^2 + 11(1,5) - 5 = 4,75 \text{ mols.}$$

Exemplo 4.4.2. *Um físico apresentou aos seus alunos, conforme a Tabela 4.5, alguns dados acerca da função horária do movimento de um corpo:*

Tempo (s)	**Espaço (m)**
1	3
2	-2
3	-5
4	0

Tabela 4.5:

Em seguida, perguntou aos mesmos como seria possível, por exemplo, descobrir a posição inicial $(t = 0)$ *a partir dos valores tabelados.*

Faremos aqui uma interpolação cúbica, pois possuímos quatro pontos distintos. Denotemos o polinômio interpolador por $s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ e sejam as coordenadas t e s dos pontos dados por $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$ e $s_1 = 3$, $s_2 = -2$, $s_3 = -5$, $s_4 = 0$.

A matriz ampliada do sistema linear nas incógnitas a_0, a_1, a_2 e a_3 é

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & s_1 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & s_2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & s_3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{pmatrix}$$

A forma escalonada dessa matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da qual segue que $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$ e $a_3 = 1$.

Logo, $s(t) = 4 + 3t - 5t^2 + t^3$.

Portanto, $s(0) = 4\ m$.

Considerações Finais

Este trabalho procurou ampliar os conhecimentos acerca dos sistemas de equações lineares, uma vez que é necessário aprender a ver (e não apenas olhar) os conteúdos matemáticos em seu âmago. A compreensão transcende a mera busca por soluções. As diferentes interpretações conectam o ensino à aprendizagem, visto que dão significado à álgebra na educação básica. Os sistemas lineares contêm interfaces extrínsecas à própria Matemática, permeando também outros campos do conhecimento humano.

Um dos compromissos da universidade é o de qualificar a nós professores. O Mestrado Profissional vem cumprir este papel ao dar sentido para o conhecimento científico. A prática docente pode ser enriquecida à medida que o professor adquira domínio aprofundado de conteúdos tão importantes para os alunos e presentes na sala de aula.

A análise do primeiro artigo nos mostra como a geometria auxilia o entendimento do assunto, pois os alunos têm a possibilidade de visualizar o que está acontecendo nos sistemas lineares e com isso distinguir suas diferentes soluções. Já o segundo artigo evidencia, através de uma dieta alimentar, uma interpretação dos sistemas lineares presente na vida cotidiana das pessoas, despertando talvez um maior interesse por parte dos alunos. A RPM pode ser mais explorada por nós professores como objeto de estudo. Foram abordados apenas dois artigos porque a busca foi feita por título e não pela incidência dos sistemas lineares no corpo de todos os textos lidos. A revista representa um importante instrumento para o professor de matemática capacitar-se e, com isso, lapidar sua forma de abordar os assuntos na sala de aula.

As quatro interpretações expostas no texto (alocação de recursos limitados, jogos lineares finitos, redes e interpolação polinomial) ampliam o leque de possibilidades quanto ao tratamento dos sistemas lineares, pois assuntos como jogos de computador e redes de comunicação, por exemplo, são bastante atrativos para o público juvenil, em particular. A existência de inúmeras interpretações, nas diferentes áreas do saber, abre caminho para pesquisas futuras, já que novos trabalhos podem ser desenvolvidos sobre balanceamento de equações químicas, circuitos elétricos, cadeias de Markov, sistemas de equações lineares com coeficientes complexos, entre outras alternativas. Entretanto, muitos problemas requerem cuidado ao interpretarmos seus resultados de forma adequada, visto que, embora matematicamente muitos sistemas possam ter infinitas soluções, fisicamente há quantidades finitas apenas.

Este estudo buscou ressaltar a importância de tangibilizar conceitos abstratos por meio de interpretações dos problemas cotidianos como uma valiosa ferramenta de ensino. É através da "empatia" que os professores de matemática conseguem entender melhor as dificuldades de assimilação de conteúdos por parte dos alunos e, a partir deste entendimento, uma melhor instrumentalização didática potencializa a efetividade do docente no processo de construção do conhecimento.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. A. e BUSBY, R. C. Álgebra Linear Contemporânea. Bookman, 2006.

[2] ANTON, H. A. e RORRES. C. Álgebra Linear com Aplicações. Bookman, 2002.

[3] ANTON, H. A. e RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. Bookman, 2012.

[4] BATTAGLIOLI, C. S. M. Dissertação de Mestrado Profissional: Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos - PUCSP: 2008.

[5] BOYER, C. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.

[7] DAMM, R. F. Registros de Representação. In: Educação matemática: uma introdução, pp. 135-154. São Paulo: Educ, 1999.

[8] Dicionário Priberam da Língua Portuguesa.

[9] FERREIRA, M. C. C. e Gomes, M. L. M. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. In RPM, n^o 32. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[10] FREITAS, I. M. Dissertação de Mestrado: Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno. PUC-SP: 1999.

[11] LEON, S. J. Álgebra Linear com Aplicações. LTC, 2011.

[12] LIMA, E. L. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. In RPM, n^o 23. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

[13] MACHADO, N. J. Matemática e lingua materna: análise de uma impregnação mútua. 4^a ed. São Paulo: Cortz, 1998.

[14] MACHADO, S. D. A. O Universitário principiante X Significado dos Sistemas de Equações in Anais do IV EPEM - pp. 241-248. São Paulo: SBEM, 1996. São Paulo. Secretaria de Estado da Educação.

[15] POOLE, D. Álgebra Linear. Cengage Learning, 2004.

[16] SANTOS, R. J. Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Belo Horizonte, MG: Imprensa Universitária, 2007.

[17] WINSTON, W. L. Operations Research: Applications and Algorithms. Brooks/Cole, 2004.