



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Considerações sobre o Teorema de Euler

MANUELITO SILVA SOUSA

Orientador: PROF. DR. DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

Feira de Santana-Bahia

Junho/2021



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Considerações sobre o Teorema de Euler

MANUELITO SILVA SOUSA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira.

Feira de Santana-Bahia

Junho/2021

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteadó - UEFS

Sousa, Manuelito Silva
S697c Considerações sobre o Teorema de Euler/ Manuelito Silva Sousa. –
2021.
83f.:il

Orientador: Darlan Ferreira de Oliveira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana.
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2021.

1. Teorema de Euler. 2. Superfície poligonal fechada. 3. Poliedros.
4. Classes de poliedros. I. Oliveira, Darlan Ferreira de, orient. II.
Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 513.34

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE MANUELITO SILVA SOUSA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e um dias do mês de junho de dois mil e vinte e um às 16:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: meet.google.com/zav-jjyu-dsm, da dissertação apresentada sob o título “**CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE EULER**”, do discente **Manuelito Silva Sousa**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Moreno Pereira Bonutti (UFAL) e Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 21 de junho de 2021.

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)

Orientador

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti (UFAL)

Prof.^a Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira
Coordenador do PROFMAT/UEFS

Dedico este trabalho a minha família tão amada: minha mãe e minha única irmã, que descansam em Deus, meus tios e sobrinhos, todos tão importantes na minha criação e formação como ser, como homem.

Agradecimentos

Estes últimos anos têm sido difíceis no âmbito pessoal, saúde e bem estar e a pandemia veio como uma tempestade. Se não fosse Deus, com seu amor, infinita bondade, misericórdia e sabedoria, este trabalho não teria sido feito. A Ele toda a glória e todo louvor.

Agradeço a minha família. Quem eu sou hoje e como eu serei adiante é um pouco de tudo que aprendi com todos vocês. Cada um teve sua participação para que eu chegasse aqui. Em especial, minha mãe (in memoriam) e minha tia, pois amor e carinho dados fazem efeito durante toda a vida.

Ao meu professor e orientador, Darlan Ferreira de Oliveira, que com tanta sensibilidade e competência, entendeu o momento que eu estava passando e não desistiu de mim, literalmente pegou minha mão para conduzir-me ao triunfo, à conclusão dessa dissertação. Admiro sua experiência acadêmica, o domínio dos conteúdos trabalhados e a forma como me orientou em todos os detalhes.

A todos os meus professores Ana Carla Percontini, Jean Barros, Kiskey Almeida, e Maurício Ferreira pelos ensinamentos, referências de profissionalismo e dedicação.

Aos meus colegas de curso, nos quais tenho grande admiração e sou grato pelo apoio e amizade construída ao longo de todos esses anos: Antônio, Carla, Diego, Emerson, Evaldo, Felipe, Gilsânia, Joselândio, e em especial Sidney, amigo e companheiro de caminhada. Sua generosidade em compartilhar seu lar não será esquecida como também nossos inúmeros momentos de estudos e conversas agradáveis.

*“O estudo dos trabalho de Euler
continuará a ser a melhor escola
para os diferentes campos da matemática
e nada os poderá substituir.”
(Gauss)*

Resumo

O Teorema de Euler é um resultado bastante conhecido e de grande importância em geometria. Ele faz parte dos conteúdos abordados nas séries finais da educação básica e seu estudo se estende até o nível superior de ensino. No entanto, a sua aplicação na educação básica se resume a poliedros convexos mas, através de conhecimentos básicos da Topologia, pode-se dar uma abordagem bem diferente da que aparece nos livros didáticos, sem aprofundar-se na mesma. Analisando a característica de Euler é possível classificar e organizar os poliedros em famílias. Inicialmente, é apresentado um breve histórico da vida de Euler, de modo a conhecer melhor sua obra e relevância sobre o estudo do presente tema. Posteriormente, no capítulo 2, fez-se necessário conceituar elementos básicos da geometria e algumas terminologias cujas definições são baseadas em noções topológicas. No capítulo 3, tem-se a classificação das superfícies poligonais fechadas, a apresentação dos poliedros de Platão e duas demonstrações do Teorema de Euler. Em seguida, no capítulo 4, o Teorema de Euler é aplicado para poliedros que são topologicamente equivalentes aos n -toros. Finalmente, é proposto algumas atividades para serem aplicadas aos alunos da educação básica, em especial do ensino médio, com a finalidade de compreender o conteúdo do Teorema de Euler e a sua aplicabilidade.

Palavras-chave: Superfície poligonal fechada. Teorema de Euler. Poliedros. Classes de Poliedros.

Abstract

Euler's theorem is a well-known and very important result in geometry. It is part of the content covered in the final grades of basic education and its study extends to the higher level of education. However, the way this theorem is used in basic education is limited to convex polyhedra, but through the basic knowledge of Topology it is possible to bring a different approach to those that appear in textbooks, without delving into the subject. Analyzing Euler's characteristic, the polyhedra can be classified and organized into families. Initially, a brief history of Euler's life is presented, in order to better understand his work and the significance of the present study. Later, in chapter 2, it was necessary to conceptualize the basic elements of geometry and some terminologies based on definitions in topological notions. In chapter 3, we have the classification of closed polygonal surfaces, the presentation of Plato's polyhedra and two demonstrations of Euler's theorem. Afterwards, in chapter 4, Euler's theorem is applied to polyhedra that are topologically equivalent to n -torus. Finally, some activities are proposed to be applied to basic education students, especially high school students, in order to comprehend the applicability of Euler's theorem.

Keywords: Closed polygonal surface. Euler's theorem. Polyhedra. Polyhedra classes.

Lista de Figuras

2.1	Linhas s e r	19
2.2	Semilinhas de s	20
2.3	Segmento de linha AB	20
2.4	Segmentos de linha fechados	21
2.5	Reta secante a linha s	22
2.6	Reta tangente a linha s no ponto A	22
2.7	Linha não suave no ponto A	23
2.8	Segmentos poligonais	24
2.9	Circunferência de raio r centrada no ponto C	25
2.10	Conjunto de pontos no plano	26
2.11	$\mathcal{B}_r(X) \not\subset \mathcal{A}$	26
2.12	$\mathcal{B}_r(X) \subset \mathcal{A}$	27
2.13	Linha \mathcal{C} no plano π	27
2.14	\mathcal{C}_i e \mathcal{C}_e são regiões no plano π	28
2.15	Traçado da parábola \mathcal{P}	28
2.16	Traçado da parábola \mathcal{P}	29
2.17	Região fechada circular	30
2.18	Região fechada tendo a linha r como fronteira	30
2.19	Região fechada tendo a linha s como fronteira	31

2.20	Polígono cuja fronteira é o segmento poligonal fechado simples $ABCDEF A$	31
2.21	Polígono não convexo	32
2.22	Superfície no espaço tridimensional	32
2.23	Superfícies no espaço tridimensional	33
2.24	Linhas na superfície S	34
2.25	Superfície esférica de raio r centrada no ponto O	35
2.26	Polígono cuja fronteira é o segmento poligonal fechado $ABCDEF$	37
2.27	Poliedro cuja fronteira é a superfície poligonal fechada $ABCDEFGH$	38
3.1	Transformação de um cubo numa esfera	40
3.2	Poliedro convexo com um furo	40
3.3	Transformação de um poliedro convexo furado num Toro	41
3.4	n -toros	41
3.5	Poliedro \mathcal{T}	42
3.6	Poliedro \mathcal{T} desmontado em polígonos	43
3.7	Sólidos de Platão	43
3.8	Tetraedro planificado	44
3.9	Hexaedro planificado	44
3.10	Octaedro planificado	45
3.11	Dodecaedro planificado	45
3.12	Icosaedro planificado	46
3.13	Poliedro não convexo	46
3.14	Poliedro \mathcal{P} na classe \mathcal{P}^0	47
3.15	Fotografias da superfície visível e da superfície oculta	48
3.16	Vértices Comuns e Vértices internos da superfície visível e da superfície oculta	49

3.17	Projeção de uma face sobre a superfície esférica	52
3.18	Polígono $A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}$	53
4.1	n -toros	56
4.2	Poliedro \mathcal{P} e poliedro \mathcal{P}' retirado	57
5.1	Tetraedro	68
5.2	Prisma de base retangular	69
5.3	Prisma oblíquo de base retangular	70
5.4	Pirâmide de base octogonal	71
5.5	Icosaedro	72
5.6	Dodecaedro	73
5.7	Cubo	74
5.8	Pirâmide de base hexagonal	75
5.9	Tetraedro truncado	76
5.10	Poliedro não convexo em L	77
5.11	Poliedro com um furo - Tipo 1	78
5.12	Poliedro com um furo - Tipo 2	79
5.13	Poliedro não convexo	80

Sumário

Agradecimentos	4
Resumo	7
Abstract	8
Introdução	14
1 Um pouco da História	16
2 Terminologias e Noções Preliminares	18
2.1 Dimensão	18
2.2 Linha no plano	19
2.3 Reta tangente a uma linha no plano	21
2.4 Região no plano	24
2.5 Fronteira de uma região aberta no plano	29
2.6 Superfície	32
2.7 A ideia de região numa superfície simples	34
2.8 Fronteira de uma região numa superfície simples	36
2.9 A ideia de região no espaço tridimensional	37
3 O Teorema de Euler	39

3.1	Classificação das superfícies poligonais fechadas	40
3.2	Primeira demonstração do Teorema de Euler	47
3.3	Segunda demonstração do Teorema de Euler	50
4	O Teorema de Euler para n-toros	56
4.1	Construção de poliedros de classe \mathcal{P}^1	56
4.2	O Teorema de Euler para poliedros na classe \mathcal{P}^k	59
5	Proposta de sequência didática para a educação básica	60
	Conclusão	81

Introdução

A aprendizagem em matemática se dá de diversas formas e está associada às diversas maneiras como o indivíduo faz suas conexões neurais assim como se organiza mentalmente para entender um determinado conteúdo, mas cabe ao professor dominar técnicas de ensino e possibilitar ao aluno compreender o referido assunto. Não adianta decorar fórmulas ou usar truques e macetes de memorização se não houver a apropriação do saber, sem entender o porquê nem o contexto. É preciso ir além do que está escrito através de várias pesquisas e readaptações do conteúdo trazendo-o de uma forma mais abrangente, com princípios que vão além do nível em que ensinamos, mas que trazem uma fundamentação mais sólida e aplicável. Como exemplo a sentença $V - A + F$ que aparece no Teorema de Euler à qual é encontrada nos livros didáticos se referindo exclusivamente à relação entre os elementos de poliedros convexos, pode, ser aplicada aos elementos de um poliedro não-convexo, desde que este seja topologicamente equivalente aos poliedros que são convexos, ou seja, apropriando-se de alguns conceitos da Topologia é possível usar as ideias envolvidas no Teorema de Euler para estudar a característica de Euler de poliedros em outras classes.

No capítulo 2 são trabalhadas algumas ideias e noções de geometria e topologia as quais estendem e ressignificam conceitos básicos já conhecidos pelos alunos. É tratada a ideia mais geral de poliedro com a possibilidade de suas faces não serem regiões planas.

O capítulo 3 é iniciado propondo duas transformações topológicas às quais agem num poliedro esticando suas faces e eliminando suas arestas e vértices, sem provocar cortes ou rasgos nos poliedros, ou seja, as duas transformações combinadas agem inflando o poliedro até que o mesmo se torne uma esfera, um toro, um bitoro, etc., que são todos os poliedros fechados existentes segundo um importante teorema de classificação topológica, o qual não cabe mencionar aqui. Finalizamos este capítulo apresentando duas demonstrações do Teorema de Euler com o objetivo de melhorar a compreensão do referido teorema e servir como uma fonte auxiliar de consulta para os professores da educação básica.

No capítulo 4 são estudados os poliedros que não são topologicamente equivalentes

a uma esfera, ou seja, aqueles que ao serem inflados são transformados em n -toros. Em particular, são construídos poliedros na classe \mathcal{P}^1 e é investigada a relação $V_A + F$ para os poliedros desta classe. Concluimos este capítulo mostrando por indução que o número $V - A + F$ depende da classe a qual pertence o poliedro.

Por fim, é apresentada uma sequência didática para ser aplicada ao segundo ano do ensino médio, como uma estratégia educacional para ajudar os alunos a assimilarem melhor a aplicabilidade do Teorema de Euler utilizando a manipulação de materiais concretos. A manipulação destes materiais permite que o conhecimento antes puramente abstrato tenha a sua ideia apreendida, como também consegue despertar o lúdico, a curiosidade do discente, o foco para o objeto estudado, bem como facilitar a interação e participação em grupo.

Capítulo 1

Um pouco da História

Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707, na Basileia, Suíça e foi um dos pensadores pioneiros da matemática moderna, estabelecendo uma carreira como acadêmico e contribuindo muito para os campos da geometria, cálculo, mecânica e teoria dos números, mas também desenvolveu métodos para resolver problemas em astronomia observacional e demonstrou aplicações úteis da matemática em tecnologia e assuntos públicos.

Seu talento na matemática causou grande estima de Johann Bernoulli, um importante matemático da época e de seus filhos, Nicolas e Daniel Bernoulli. Sucedendo este último na Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, onde desenvolveu a teoria das funções trigonométricas e logarítmicas, um grande avanço na disciplina.

Devido à exaustão de suas pesquisas, Euler, em 1735, perdeu a visão de um olho. Então, convidado por Frederico, o Grande, em 1741, tornou-se membro da Academia de Berlim, onde por 25 anos produziu inúmeras publicações, muitas das quais ele contribuiu para a Academia de São Petersburgo, que lhe concedeu uma pensão. Ele desenvolveu o conceito de função na análise matemática e descobriu os logaritmos imaginários de números negativos, também se interessou pela teoria dos números. Retornou à Rússia em 1766 sob o convite de Catarina II, dedicando-se novamente aos estudos da acústica e da astronomia física.

Ele consagrou a tendência de expressar matemática e física em termos aritméticos, além disso, introduziu muitos símbolos que se tornaram padrão: \sum para a soma; e para a base de logaritmos naturais; a , b e c para os lados de um triângulo com A , B e C para ângulos opostos; $f(x)$ para uma função; e i para raiz quadrada de -1 , isto é $i = \sqrt{-1}$.

Possuindo uma memória privilegiada e uma facilidade extraordinária para cálculos mentais, sua produtividade não diminuiu apesar de ter ficado completamente cego durante

os últimos anos de sua vida. Ao longo de sua vida, Euler dedicou-se excessivamente aos problemas relacionados à teoria dos números , que trata das propriedades e relações de números inteiros; nisso, sua maior descoberta, em 1783, foi a lei de reciprocidade quadrática , que se tornou uma parte essencial da teoria moderna dos números.

Euler era um autor altamente produtivo, tendo escrito centenas de artigos e publicações ao longo de sua vida, incluindo a conhecida série de ciência e filosofia: Letters to a Princess German.

Ele é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Euler sofreu uma hemorragia cerebral, quando estava trabalhando e morreu durante a noite de 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo.

Capítulo 2

Terminologias e Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e ideias que servirão de suporte para um melhor entendimento das noções discutidas ao longo deste trabalho. Assumiremos que o leitor conhece os conceitos primitivos de ponto, reta e plano apresentados previamente na geometria plana.

2.1 Dimensão

O conceito de dimensão está relacionado ao quanto de liberdade que possuímos para nos movimentar no espaço em que vivemos. Por exemplo, imagine uma pessoa que habita no espaço de um ponto. Essa pessoa pode andar em alguma direção sem sair do ponto? Se sua resposta é não, você entende que um ponto tem dimensão zero, ou seja, não temos liberdade de movimento em um ponto. Agora pense numa locomotiva de trem. Ela pode sair de uma estação e andar apenas sobre a linha férrea, para frente ou para trás. Assim, consideramos a linha férrea como a única direção em que a locomotiva pode se movimentar, ou seja, a locomotiva tem uma única liberdade de movimento. Pensemos agora num barco navegando no oceano. Em qualquer direção que ele escolha navegar ele sempre terá a opção de navegar em direção perpendicular a essa. Nesse caso o barco tem duas liberdades de movimento no oceano. Por fim, pensemos no vôo de um balão no céu. Podemos notar que o balão tem três liberdades de movimento no céu. Por exemplo, além de ir para frente ou para trás, ele pode, perpendicularmente, se deslocar para direita ou esquerda ou, ainda, perpendicularmente a essas duas escolhas, subir ou descer. A linha férrea, o oceano e o céu seriam modelos de regiões de dimensão um, dois e três, respectivamente.

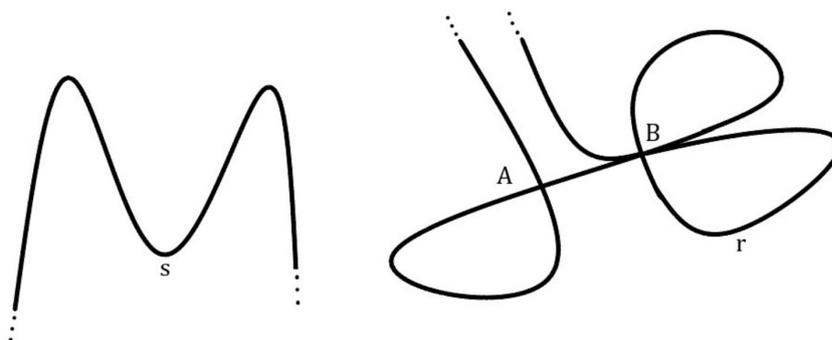
2.2 Linha no plano

De acordo com a ideia apresentada para dimensão, retas seriam nossos primeiros exemplos de regiões de dimensão um num plano. Entretanto, como a intuição deve sugerir, estas regiões não devem ser os únicos exemplos no plano.

No que segue, ao mencionarmos a palavra direção estaremos nos referindo à liberdade de movimento oferecida pela região em que nos encontramos.

Definição 2.2.1 *Uma região de dimensão um no plano com a propriedade que em cada ponto podemos nos deslocar nos dois sentidos da direção sem sair do espaço será chamado de **linha no plano**.*

Nas figuras a seguir usamos reticências para indicar que o traçado da linha, a partir daquele ponto, continua indefinidamente sem passar por um mesmo ponto por mais de uma vez.



Fonte: Autor

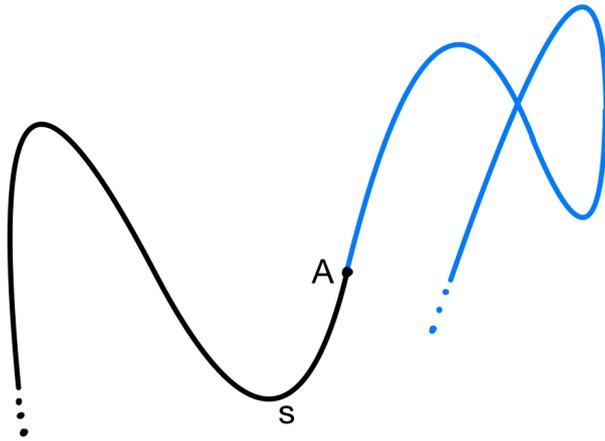
Figura 2.1: Linhas s e r

Na figura 2.1 observamos que na linha s não existem pontos do plano por onde a linha passe por mais de uma vez enquanto que no trajeto da linha r existem dois pontos por onde a linha passa por mais de uma vez. Isso sugere a seguinte definição:

Definição 2.2.2 *Uma linha cujo traçado não admite pontos por onde a linha passe por mais de uma vez será chamada de **linha simples**. Caso existam pontos por onde a linha passe por mais de uma vez à chamaremos de **linha não simples**.*

Exemplo 2.2.1 *Na figura 2.1 a linha s é simples enquanto que a linha r é não simples.*

Exemplo 2.2.2 *A Definição 2.2.2 contempla a versão com curvas da região de dimensão um no plano que conhecemos como reta. Uma reta é um exemplo de linha simples.*



Fonte: Autor

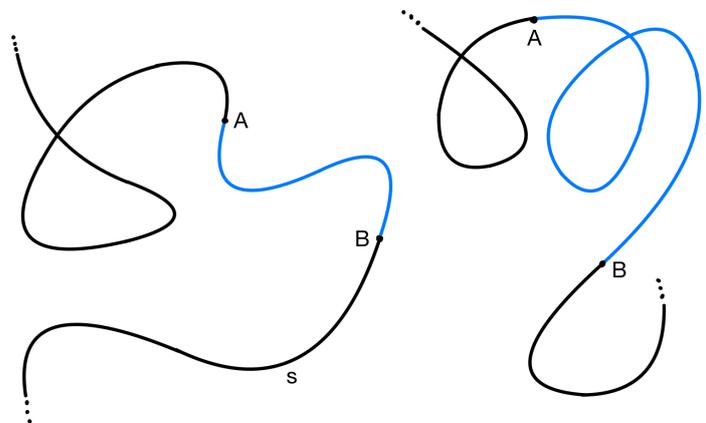
Figura 2.2: Semilinhas de s

Considere a figura 2.2 onde marcamos o ponto A sobre a linha s .

O ponto A divide a linha s em duas partes, uma em azul e outra em preto, as quais chamamos as *semilinhas* de s . De acordo com a Definição 2.2.2 chamaremos a semilinha em azul de não simples e a semilinha em preto de simples. Semirretas são exemplos de semilinhas simples.

Considere agora dois pontos distintos A e B sobre uma linha s . Chamaremos a parte da linha s compreendida entre A e B de *segmento de linha*. Os pontos A e B são chamados extremidades do segmento de linha. Segmentos de retas são exemplos de segmentos de linha.

Na figura 2.3 o segmento de linha AB sobre a linha s é chamado de **segmento de linha simples** enquanto que o segmento de linha AB sobre a linha r é chamado de **segmento de linha não simples**.

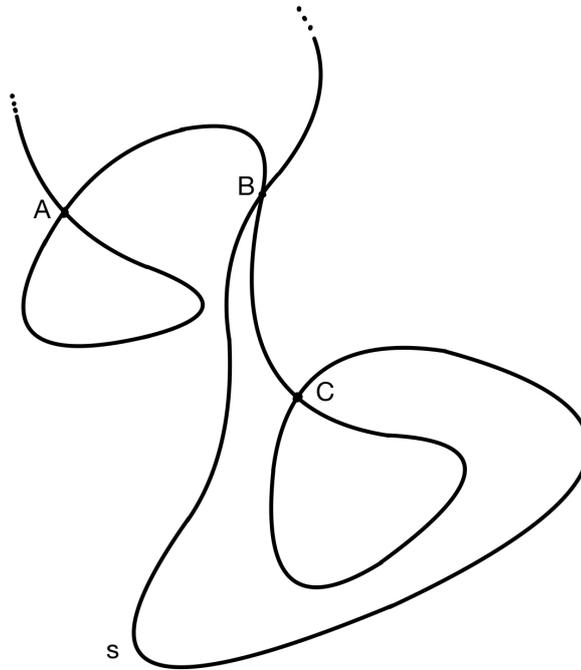


Fonte: Autor

Figura 2.3: Segmento de linha AB

No caso de linhas não simples o ponto por onde a linha passa por mais de uma vez

determina um segmento com extremidades nesse ponto. A parte da linha compreendida entre a primeira e segunda passagens pelo ponto recebe o nome de **segmento de linha fechado**. Um segmento de linha fechado também é classificado como simples ou não simples.



Fonte: Autor

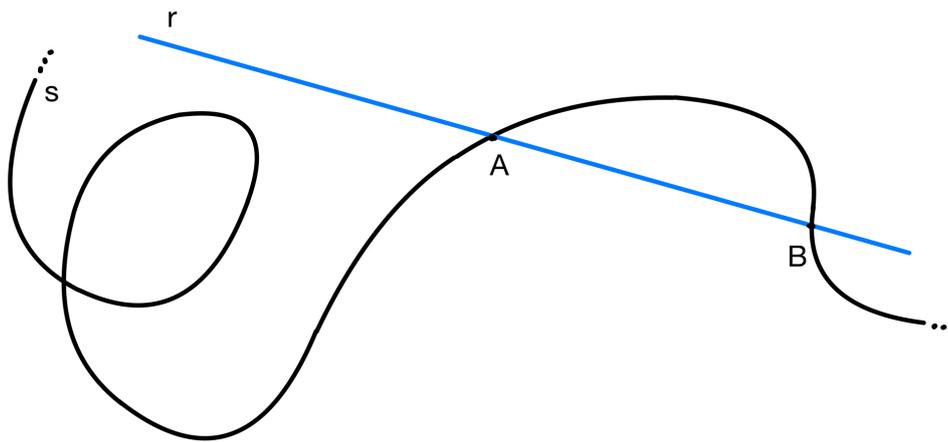
Figura 2.4: Segmentos de linha fechados

Na figura 2.4 temos dois segmentos de linha fechados com extremidades nos pontos A e B , respectivamente. No entanto, o segmento de linha fechado com extremidades no ponto A não passa por um de seus pontos por mais de uma vez enquanto que para o segmento de linha fechado com extremidade em B existe o ponto C por onde o segmento passa por duas vezes. Nesse caso dizemos que o segmento de linha com extremidade em B é **fechado não simples** enquanto que o segmento de linha com extremidade em A é **fechado simples**.

2.3 Reta tangente a uma linha no plano

Considere a linha s no plano onde estão marcados os pontos A e B .

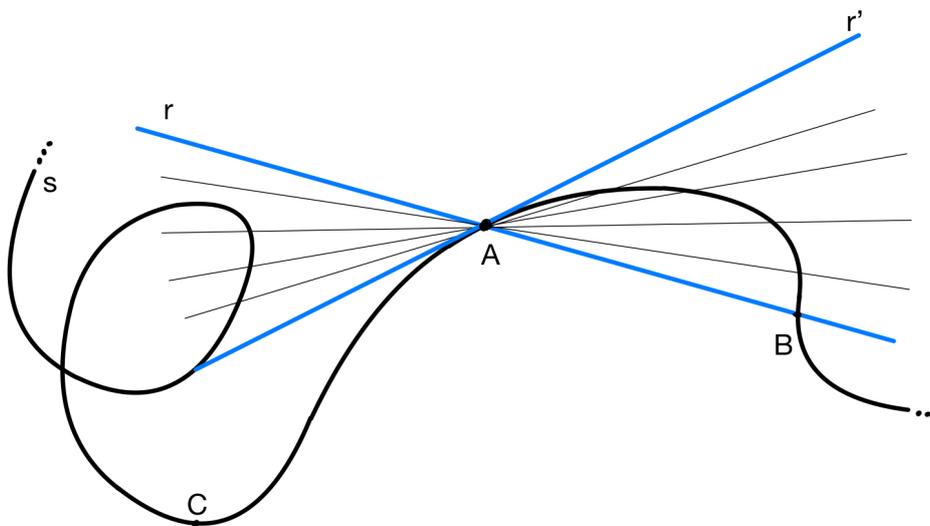
A reta r intercepta a linha s nos pontos A e B . Agora, se movermos o ponto B sobre a linha s de modo a fazê-lo ocupar o lugar do ponto A a reta r deixará de interceptar a linha s em dois pontos e ocupará a posição da reta r' . Na figura 2.6 temos a reta r' e está marcado um ponto C sobre a semilinha com origem em A que não contém B . Fazendo o mesmo procedimento com o ponto C , a reta por A e C ocupará a posição de uma reta



Fonte: Autor

Figura 2.5: Reta secante a linha s

r'' quando movermos o ponto C até fazê-lo coincidir com o ponto A . Se as retas r' e r'' coincidirem, diremos que a linha s é **suave** no ponto A e a reta r' (igual a r'') é chamada a **reta tangente** a linha s no ponto A .



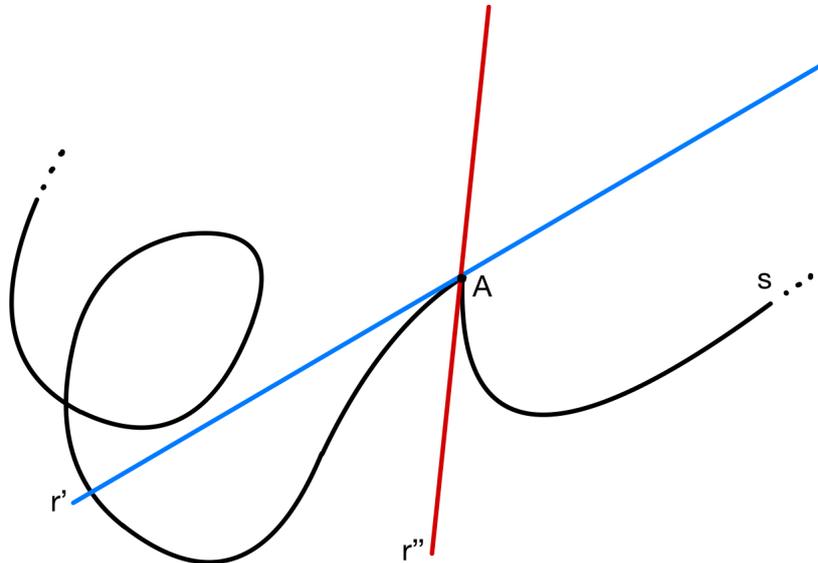
Fonte: Autor

Figura 2.6: Reta tangente a linha s no ponto A

Essa discussão sugere a seguinte definição:

Definição 2.3.1 *Uma linha com a propriedade que em cada ponto existe uma reta tangente à linha nesse ponto é chamada de **linha suave**. Se A e B são dois pontos da linha e entre eles não existem pontos onde a linha é não suave dizemos que AB é um **segmento de linha suave**. Também chamaremos de ponto não suave, o ponto no qual a linha é não suave.*

Na figura 2.7 as retas r' e r'' não coincidem no ponto A onde dizemos que a linha s é não suave no ponto A .



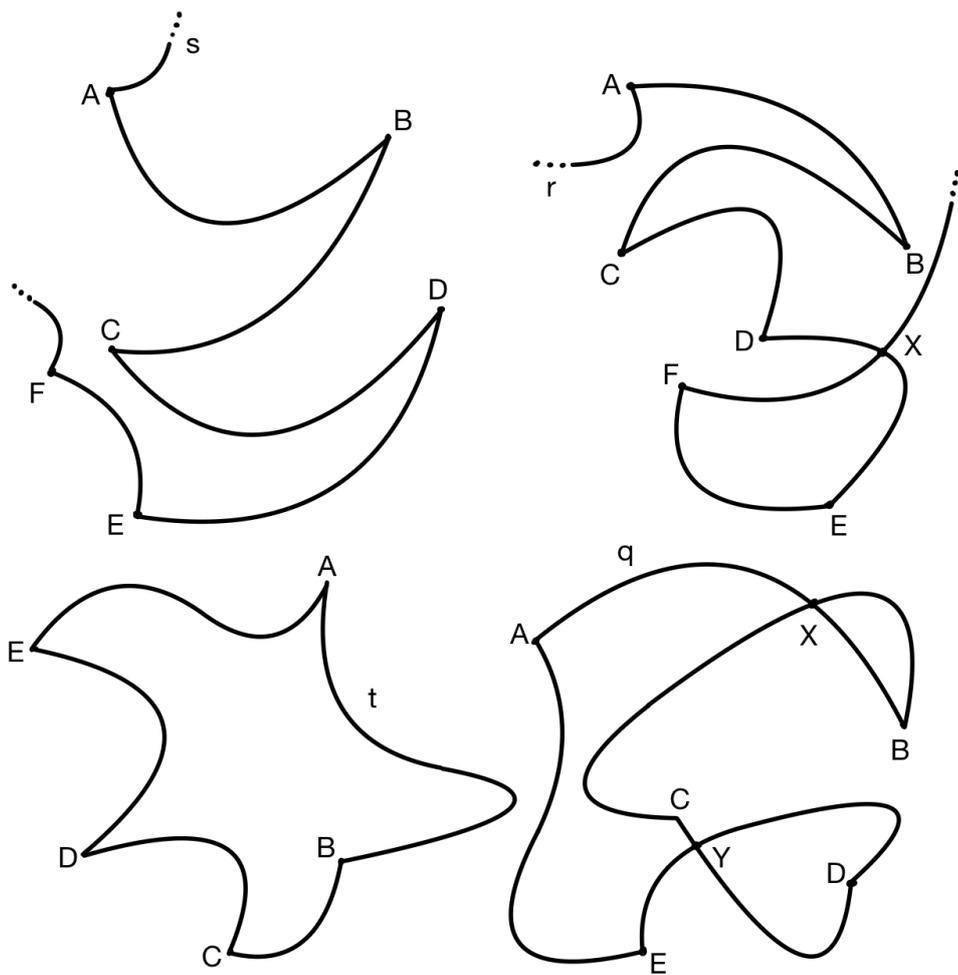
Fonte: Autor

Figura 2.7: Linha não suave no ponto A

A seguir destacamos uma linha muito útil para nossos propósitos, a linha poligonal.

Definição 2.3.2 *Considere s uma linha passando, na ordem, pelos pontos não suaves P_1, P_2, \dots, P_n de modo que os segmentos de linha $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ são segmentos de linhas suaves. Então o segmento de linha com extremidades P_1 e P_n é chamado **segmento poligonal**.*

De forma análoga a qual foram classificados segmentos de linhas como simples ou fechados também podemos classificar um segmento poligonal como simples ou fechado. Quando as extremidades P_1 e P_n coincidem na Definição 2.3.2 temos um **segmento poligonal fechado**. Na figura 2.8 o segmento poligonal s é não fechado simples, o segmento poligonal r é não fechado não simples pois existe o ponto X por onde a linha passa por mais de uma vez, o segmento poligonal t é fechado simples e o segmento poligonal q é fechado não simples pois existem os pontos X e Y por onde a linha passa por mais de uma vez.



Fonte: Autor

Figura 2.8: Segmentos poligonais

2.4 Região no plano

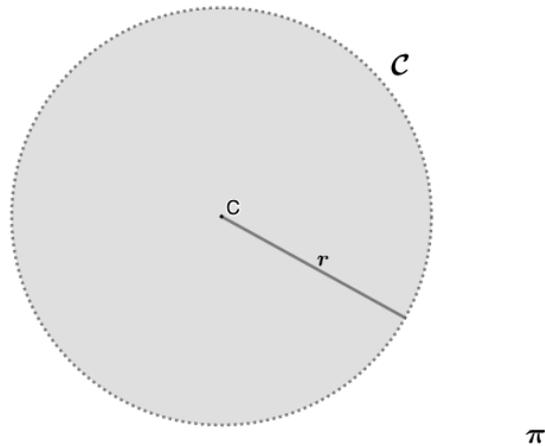
Após trabalharmos o conceito de linha no plano, nosso próximo passo é explorar as regiões de dimensão dois no plano. Nesse sentido começamos nos esforçando para dar uma boa ideia do que seria uma região no plano usando o conhecimento matemático a qual dispomos no ensino básico. O leitor que teve contato com disciplinas como topologia e análise logo entenderá que nosso conceito de região no plano é um exemplo de conjunto aberto. No entanto, nosso intuito principal é explorar tal conceito sem nos aprofundarmos em questões mais delicadas da topologia e análise.

Lembremos o conceito de circunferência.

Definição 2.4.1 *Considere um plano π e um ponto $C \in \pi$. Uma circunferência é o lugar geométrico de pontos no plano π que equidistam de C . Em outras palavras, se r é um número real positivo, o conjunto $\mathcal{C} = \{P \in \pi \mid d(P, C) = r\}$ descreve uma circunferência.*

O ponto fixo C é chamado o centro da circunferência e o número real positivo r é chamado o raio da circunferência. Considere $d(P, C)$ como a distância cartesiana entre os pontos P e C .

Na figura 2.9 a linha tracejada representa uma circunferência \mathcal{C} de raio r e centrada no ponto C



Fonte: Autor

Figura 2.9: Circunferência de raio r centrada no ponto C .

Note que a circunferência \mathcal{C} divide o plano π em duas partes, uma exterior e outra interior a circunferência. A parte interior, que denotaremos por $\mathcal{B}_r(C)$, pode ser descrita como o lugar geométrico de pontos no plano que estão a uma distância menor do que r do centro C da circunferência, isto é,

$$\mathcal{B}_r(C) = \{P \in \pi \mid d(P, C) < r\}.$$

Se atribuirmos um sistema de coordenadas xOy ao plano π referente ao qual o centro tem coordenadas $C = (x_0, y_0)$ temos que um ponto $P = (x, y)$ pertence a $\mathcal{B}_r(C)$ se, e somente se,

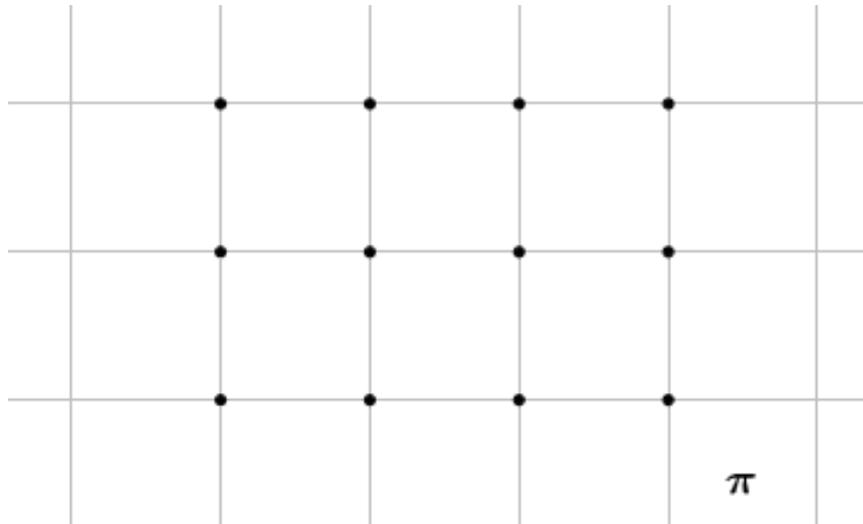
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$

Agora, estamos em condições de dar a seguinte definição para uma região no plano.

Definição 2.4.2 Considere um subconjunto \mathcal{A} de pontos do plano com a propriedade que para qualquer ponto $X \in \mathcal{A}$ existe um número real positivo r tal que $\mathcal{B}_r(X) \subset \mathcal{A}$. O conjunto \mathcal{A} é chamado de **região aberta do plano**.

Para entendermos melhor o conceito de região aberta no plano observemos alguns exemplos de subconjuntos de pontos no plano.

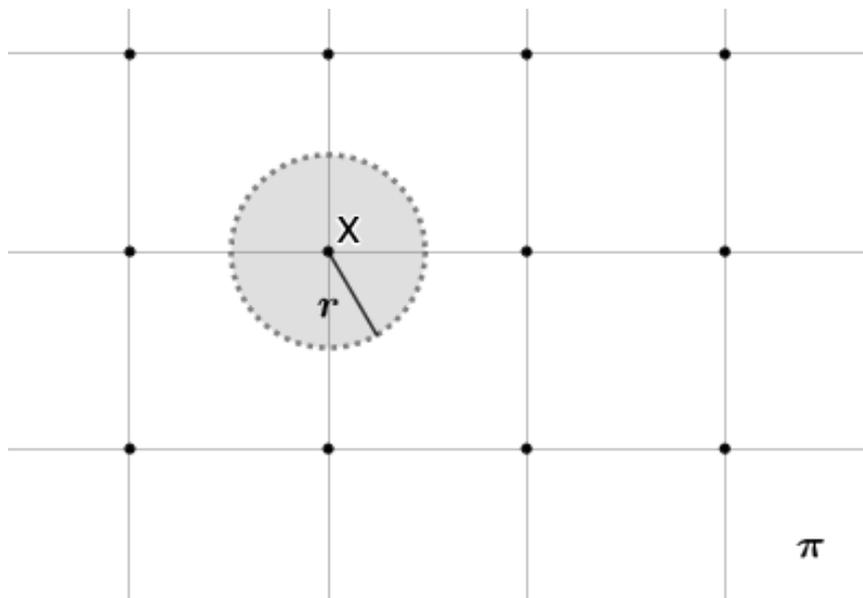
Exemplo 2.4.1 Considere o conjunto de pontos \mathcal{A} da figura 2.10.



Fonte: Autor

Figura 2.10: Conjunto de pontos no plano

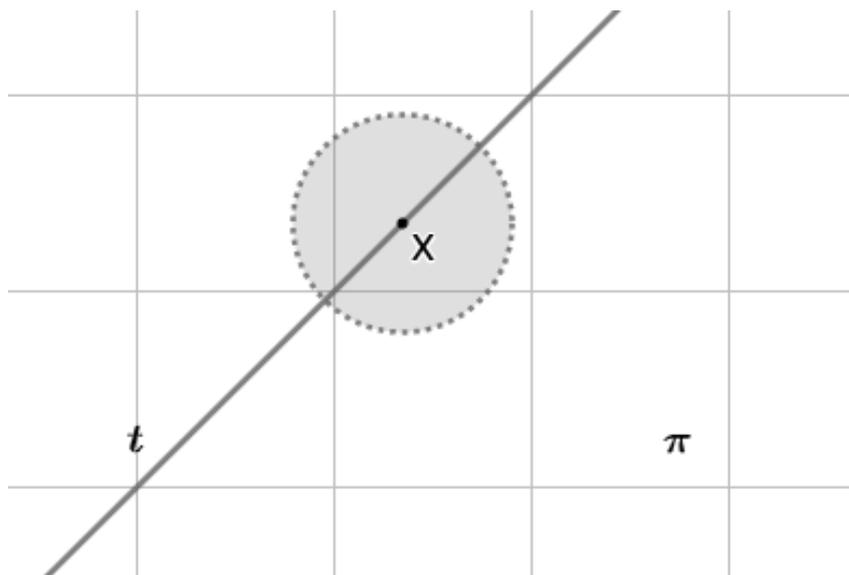
Os pontos do conjunto \mathcal{A} são obtidos pela interseção entre retas verticais e horizontais e estão destacados em negrito. Observe que escolhendo um ponto $X \in \mathcal{A}$ e para qualquer número real positivo r temos que $\mathcal{B}_r(X) \not\subset \mathcal{A}$. Desse modo \mathcal{A} não é uma região aberta no plano.



Fonte: Autor

Figura 2.11: $\mathcal{B}_r(X) \not\subset \mathcal{A}$.

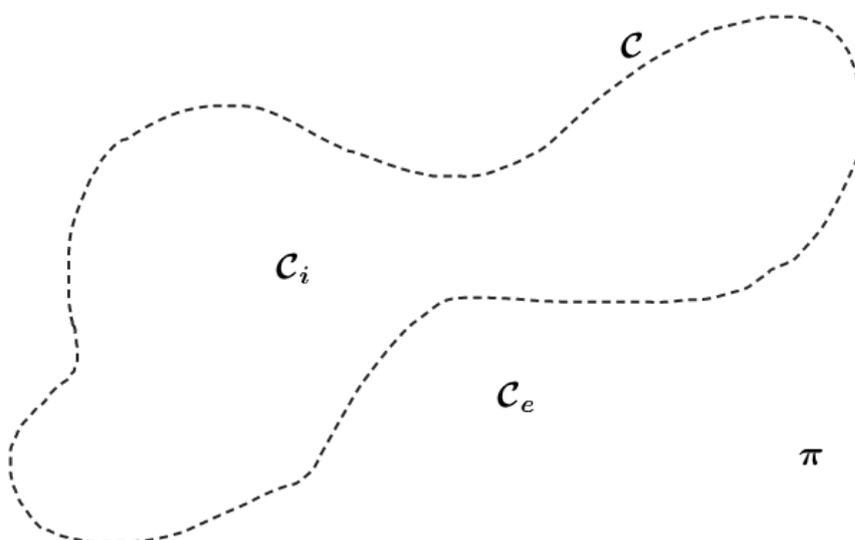
Exemplo 2.4.2 Uma reta t no plano π não é uma região aberta no plano. De fato, existe $X \in t$ tal que para qualquer número real positivo r , $\mathcal{B}_r(X) \not\subset t$. Ver figura 2.12.



Fonte: Autor

Figura 2.12: $\mathcal{B}_r(X) \not\subset \mathcal{A}$.

Exemplo 2.4.3 Considere o traçado da linha fechada simples \mathcal{C} como mostrado na figura 2.13. Podemos considerar dois conjuntos de pontos no plano π . Um conjunto \mathcal{C}_i formado por pontos no interior da linha \mathcal{C} e um conjunto \mathcal{C}_e formado por pontos que estão no exterior da linha \mathcal{C} .

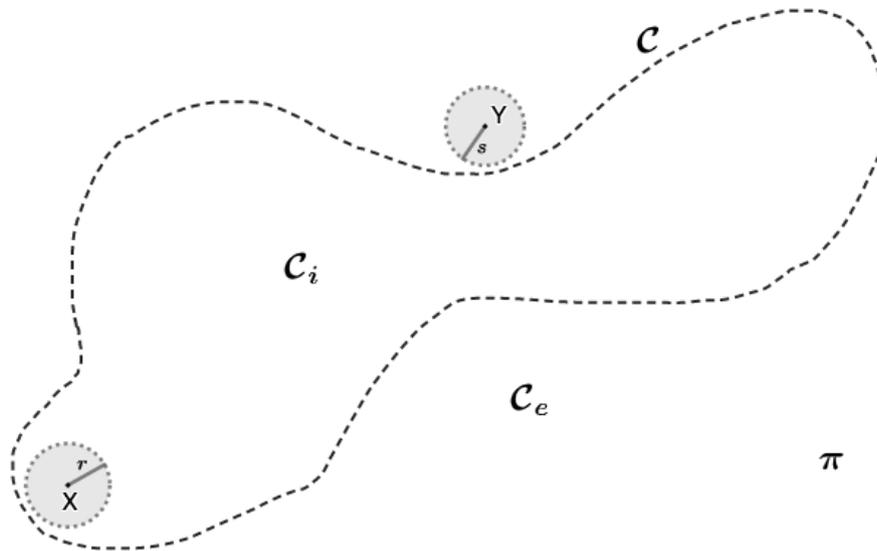


Fonte: Autor

Figura 2.13: Linha \mathcal{C} no plano π .

Note que dado um ponto qualquer $X \in \mathcal{C}_i$ e um ponto qualquer $Y \in \mathcal{C}_e$ sempre existem números reais positivos r e s tais que $\mathcal{B}_r(X) \subset \mathcal{C}_i$ e $\mathcal{B}_s(Y) \subset \mathcal{C}_e$ de onde concluímos que \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_e são regiões abertas no plano. Para justificar tal afirmação basta pensarmos que mesmo que os pontos X e Y estejam muito próximos da linha \mathcal{C} sempre haverá uma

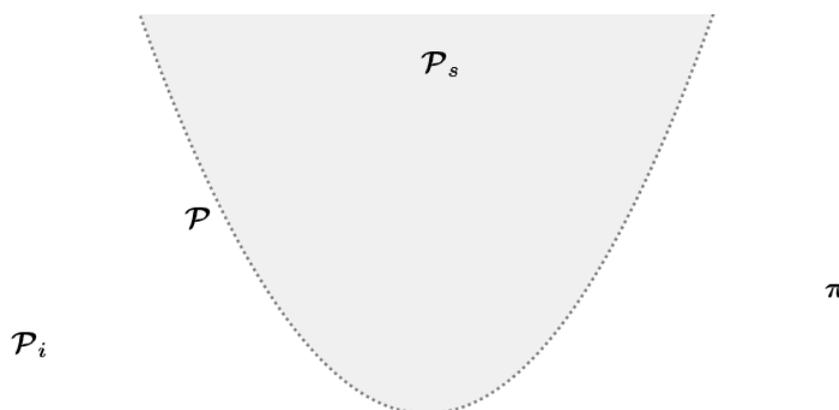
distância entre estes pontos e a linha \mathcal{C} . Assim, basta tomarmos como raios os valores $r < d(\mathcal{C}, X)$ e $s < d(\mathcal{C}, Y)$. Ver figura 2.14.



Fonte: Autor

Figura 2.14: \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_e são regiões no plano π .

Exemplo 2.4.4 Considere o traçado da parábola \mathcal{P} como mostrado na figura 2.15. Podemos considerar dois conjuntos de pontos no plano π . Um conjunto \mathcal{P}_i formado por pontos que estão abaixo da parábola e um conjunto \mathcal{P}_s , destacado em cinza, formado por pontos que estão acima da parábola.



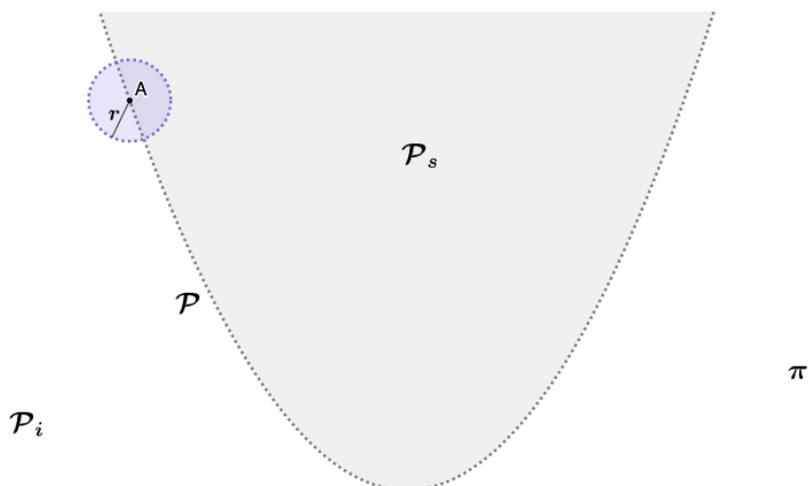
Fonte: Autor

Figura 2.15: Traçado da parábola \mathcal{P} .

Pela mesma razão descrita no exemplo 2.4.3 temos que \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_s são regiões abertas no plano π .

2.5 Fronteira de uma região aberta no plano

Voltemos a analisar os exemplos 2.4.3 e 2.4.4. No exemplo 2.4.4 se tomarmos um ponto $A \in \mathcal{P}$ para qualquer número real positivo r temos que $\mathcal{B}_r(A)$ intercepta tanto a região aberta \mathcal{P}_i como também a região aberta \mathcal{P}_s . O mesmo ocorre no exemplo 2.4.3.



Fonte: Autor

Figura 2.16: Traçado da parábola \mathcal{P} .

Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.5.1 *Seja \mathcal{R} uma região aberta no plano π . Se $X \in \pi$ tem a propriedade que para qualquer número real positivo r , $\mathcal{B}_r(X)$ intercepta tanto \mathcal{R} como $\pi - \mathcal{R}$ temos que X está na fronteira da região aberta \mathcal{R} . Denotaremos o conjunto dos pontos que estão na fronteira de \mathcal{R} por $\partial\mathcal{R}$.*

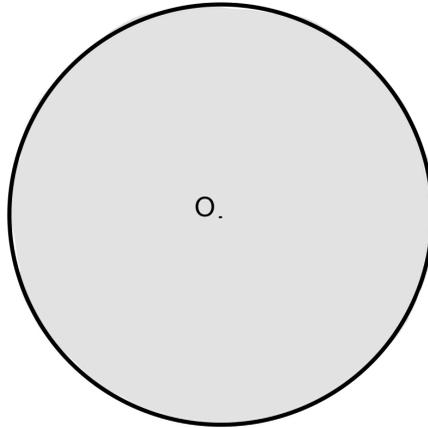
No exemplo 2.4.3 a linha \mathcal{C} , que é uma linha fechada simples, é a fronteira tanto da região \mathcal{C}_i como também da região \mathcal{C}_e e no exemplo 2.4.4 temos que a parábola \mathcal{P} , que é uma linha não fechada simples, é a fronteira comum das regiões \mathcal{P}_i e \mathcal{P}_s .

A definição a seguir será útil para nossos propósitos:

Definição 2.5.2 *Um conjunto \mathcal{F} de pontos do plano será chamado de **região fechada** quando existir uma região aberta \mathcal{R} no plano de modo que \mathcal{F} é a união da região \mathcal{R} com sua fronteira, isto é, $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.*

Exemplo 2.5.1 *O conjunto \mathcal{R} de pontos do plano dado por $\mathcal{R} = \{P \in \pi | d(P, O) \leq r\}$ é uma região fechada conhecida como círculo de raio r e centrado em O . De fato, \mathcal{R} é a*

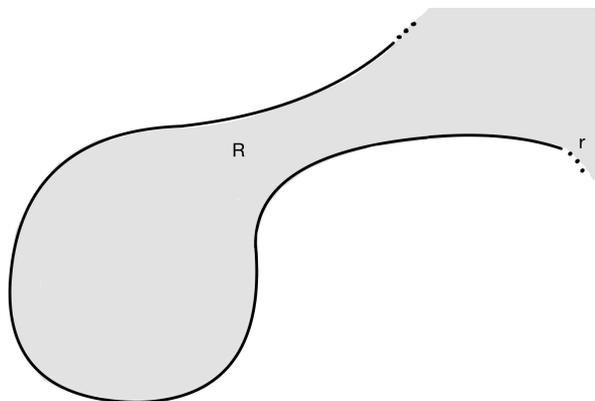
união da região aberta no plano, $\mathcal{S} = \{P \in \pi | d(P, O) < r\}$, com sua fronteira que é a circunferência centrada em O e raio r .



Fonte: Autor

Figura 2.17: Região fechada circular

Exemplo 2.5.2 Na figura 2.18 temos o exemplo de uma região fechada formada pela região \mathcal{R} em cinza e a linha não fechada simples r em preto.

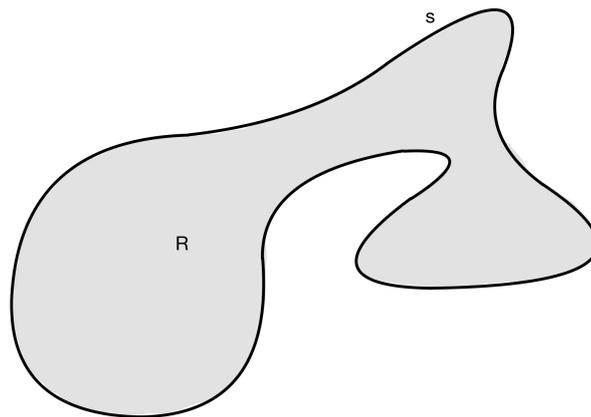


Fonte: Autor

Figura 2.18: Região fechada tendo a linha r como fronteira

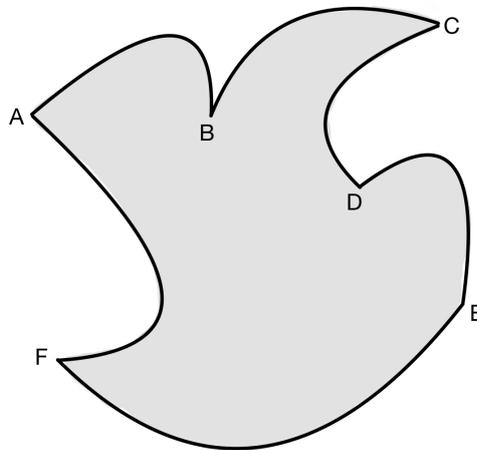
Exemplo 2.5.3 Na figura 2.19 temos o exemplo de uma região fechada formada pela região \mathcal{R} em cinza e a linha fechada simples s em preto.

Definição 2.5.3 Um **polígono** no plano é uma região fechada cuja fronteira consiste de um único segmento poligonal fechado simples.



Fonte: Autor

Figura 2.19: Região fechada tendo a linha s como fronteira



Fonte: Autor

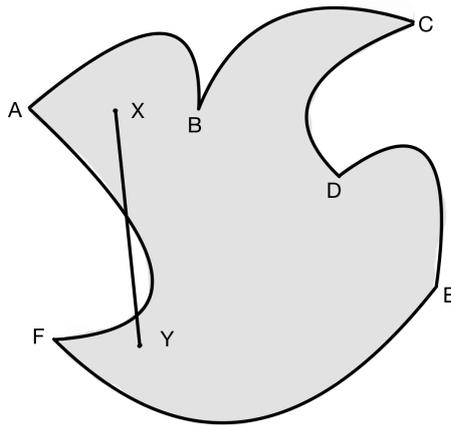
Figura 2.20: Polígono cuja fronteira é o segmento poligonal fechado simples $ABCDEFA$

Definição 2.5.4 *Seja o segmento poligonal fechado fronteira de um polígono \mathcal{P} . Chamamos cada um dos segmentos de linhas suaves que compõem o segmento poligonal fechado simples de **arestas** do polígono \mathcal{P} e cada ponto não suave que une duas arestas quaisquer de **vértices** do polígono.*

No polígono da figura 2.20 os segmentos de linhas suaves AB , BC , CD , DE , EF e FA são as arestas do polígono enquanto que os pontos não suaves A , B , C , D , E e F são seus vértices.

Definição 2.5.5 *Seja \mathcal{P} um polígono no plano. Se para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}$ temos que o segmento de reta XY está contido em \mathcal{P} dizemos que o polígono \mathcal{P} é **convexo**. Caso contrário, dizemos que \mathcal{P} é **não convexo**.*

Na figura 2.21 temos que existem X e Y pertencentes ao polígono para os quais o segmento de reta XY não está contido no polígono.



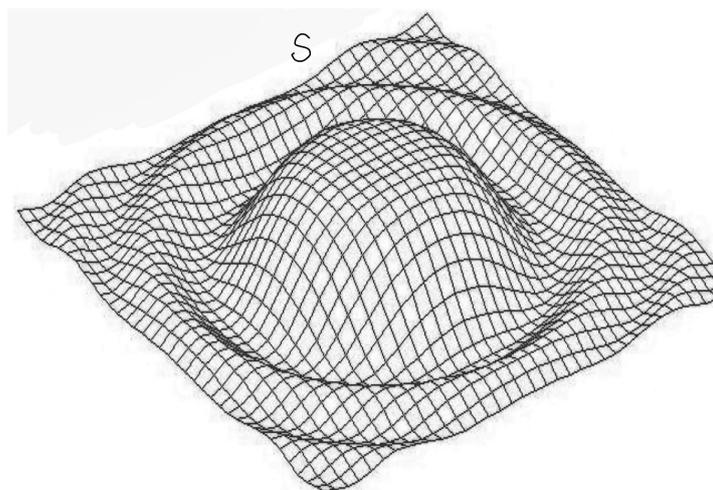
Fonte: Autor

Figura 2.21: Polígono não convexo

2.6 Superfície

Com base na definição 2.2.1 podemos entender as linhas no plano como região de dimensão um obtidos a partir de uma deformação de uma reta no plano sem corta-lá. Agora, queremos definir uma noção análoga a essa com uma dimensão a mais. Queremos definir uma região bidimensional não plano no espaço tridimensional que fosse obtido a partir da deformação de uma região plana.

Definição 2.6.1 *Uma região de dimensão dois no espaço tridimensional com a propriedade que em cada ponto podemos nos deslocar nos dois sentidos de qualquer direção como também de sua perpendicular sem sair da região será chamado de **superfície**.*



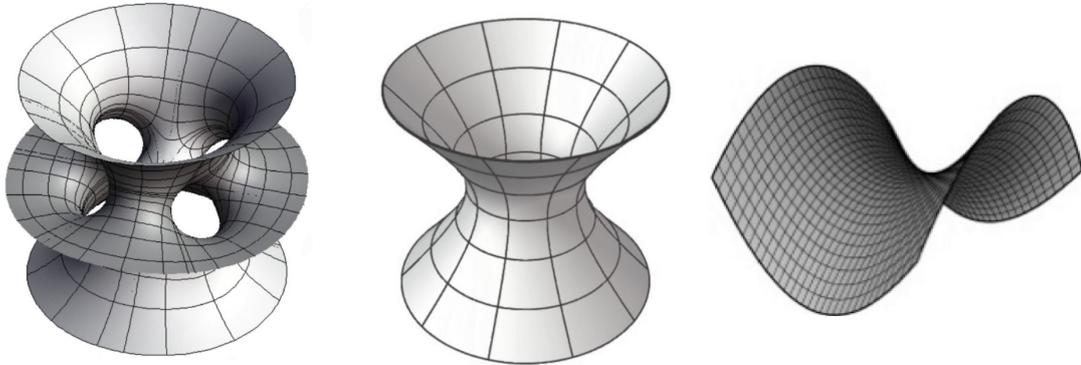
Fonte: Autor

Figura 2.22: Superfície no espaço tridimensional

Na Definição 2.6.1 existe a possibilidade da superfície se autointersectar. Na verdade exemplos bem mais complexos, do ponto de vista topológico, satisfazendo a Definição

2.6.1, podem ocorrer. No que segue chamaremos as superfícies sem autointerseção de **superfícies simples**. Veja figura 2.22

Na figura 2.23 temos mais exemplos de superfícies.



Fonte: Autor

Figura 2.23: Superfícies no espaço tridimensional

Agora que temos uma noção mais geral, do que o exemplo do plano, para uma região de dimensão dois, podemos pensar em definir o que seria uma linha nessa região.

Definição 2.6.2 *Uma região de dimensão um sobre uma superfície com a propriedade que em cada ponto podemos nos deslocar nos dois sentidos da direção sem sair da região será chamado de **linha de superfície**.*

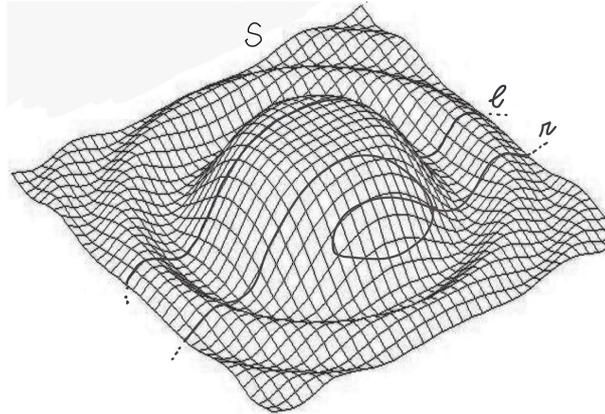
Queremos mencionar aqui que todos os conceitos envolvendo a definição de linha no plano feitos na Seção 2.2 valem de forma análoga para linhas numa superfície e, portanto, omitiremos a escrita de tais conceitos. Da mesma forma vale a ideia descrita na Seção 2.3 para a existência ou não de uma reta tangente a uma linha de superfície e, neste caso, também chamaremos a linha de superfície de suave ou não suave, respectivamente.

Na figura 2.24 temos as linhas l e r sobre a superfície S . A linha de superfície l é simples enquanto que a linha de superfície r é não simples.

A Definição 2.3.2 se reescreve, no caso de linhas numa superfície, como:

Definição 2.6.3 *Considere s uma linha de superfície passando, na ordem, pelos pontos não suaves P_1, P_2, \dots, P_n de modo que os segmentos de linha $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ são segmentos de linhas suaves na superfície. Então o segmento de linha de superfície com extremidades P_1 e P_n é chamado **segmento poligonal de superfície**.*

Também podemos definir pontos não suaves sobre uma superfície.



Fonte: Autor

Figura 2.24: Linhas na superfície S

Definição 2.6.4 Um ponto A é chamado de **ponto não suave sobre uma superfície** S se existe uma linha sobre S para a qual A é um ponto não suave.

Essa não suavidade ocorrida em um ponto de uma superfície pode se estender ao longo de uma linha.

Definição 2.6.5 Seja ℓ uma linha sobre uma superfície S onde todo ponto de ℓ é um ponto não suave sobre a superfície S . Chamaremos ℓ de **linha vincada** sobre S .

Exemplo 2.6.1 O vértice de um cone é um ponto não suave sobre o cone.

Exemplo 2.6.2 A superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = |x|\}$ é uma superfície simples que tem uma linha vincada dada pelo eixo Oz .

2.7 A ideia de região numa superfície simples

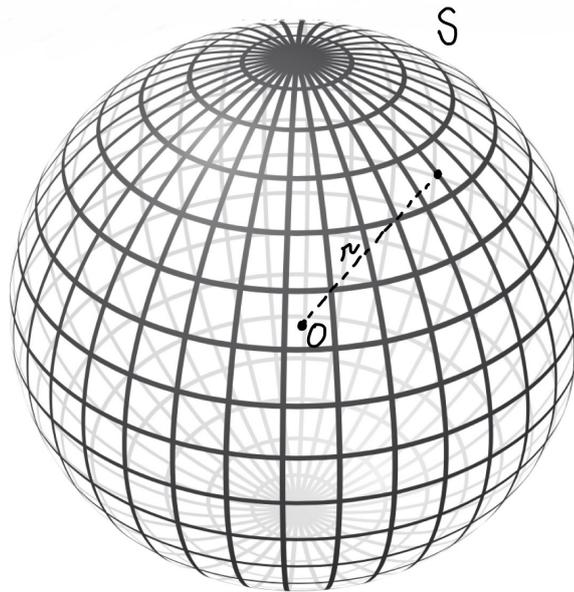
Novamente, como feito na Seção 2.4, vamos nos esforçar agora para dar uma boa definição de região numa superfície simples, usando apenas o conhecimento matemático básico ao qual dispomos.

Lembremos o conceito de superfície esférica no espaço tridimensional.

Definição 2.7.1 Considere a região ou espaço tridimensional \mathcal{E} e um ponto $O \in \mathcal{E}$. Uma superfície esférica é o lugar geométrico de pontos em \mathcal{E} que equidistam de O . Em outras palavras, se r é um número real positivo o conjunto $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P, O) = r\}$ descreve

uma superfície esférica. O ponto fixo O é chamado o centro da superfície esférica e o número real positivo r é chamado o raio da superfície esférica. Considere $d(P, O)$ como a distância cartesiana entre os pontos P e O .

A figura 2.25 representa uma superfície esférica \mathcal{S} de raio r e centrada no ponto O .



Fonte: Autor

Figura 2.25: Superfície esférica de raio r centrada no ponto O .

Note que a superfície esférica \mathcal{S} divide a região tridimensional \mathcal{E} em duas partes, uma exterior e outra interior à \mathcal{S} . A parte interior, que denotaremos por $\mathcal{D}_r(O)$, pode ser descrita como o lugar geométrico de pontos de \mathcal{E} que estão a uma distância menor do que r do centro O da superfície esférica, isto é, $\mathcal{D}_r(O) = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P, O) < r\}$. Se atribuirmos um sistema de coordenadas xyz a região tridimensional \mathcal{E} referente ao qual o centro tem coordenadas $O = (x_0, y_0, z_0)$ temos que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{D}_r(O)$ se, e somente se,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r.$$

Agora, estamos em condições de dar a seguinte definição para uma região numa superfície simples.

Definição 2.7.2 Considere um subconjunto \mathcal{A} de pontos numa superfície simples \mathcal{S} com a propriedade que para qualquer ponto $X \in \mathcal{A}$ existe um número real positivo r tal que $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}_r(X) \subset \mathcal{A}$. O conjunto \mathcal{A} é chamado de **região aberta na superfície simples**.

Uma região sobre uma superfície simples pode, ainda, ser classificada como suave ou não suave.

Definição 2.7.3 *Considere uma região aberta \mathcal{R} sobre uma superfície simples \mathcal{S} . Se todo ponto de \mathcal{R} é suave diremos que \mathcal{R} é uma **região aberta suave na superfície simples \mathcal{S}** .*

Para entender melhor o conceito de região numa superfície simples observemos alguns exemplos de subconjuntos de pontos em superfícies simples.

Os exemplos a seguir podem ser justificados com argumentos análogos aos usados na Seção 2.4 combinados com a Definição 2.7.2.

Exemplo 2.7.1 *Uma linha numa superfície simples não é uma região aberta nessa superfície.*

Exemplo 2.7.2 *Um conjunto de pontos isolados numa superfície simples não é uma região aberta nessa superfície. Entende-se por conjunto de pontos isolados ao conjunto de pontos para os quais qualquer segmento de linha com extremidade em dois quaisquer desses pontos não temos o segmento contido no conjunto.*

2.8 Fronteira de uma região numa superfície simples

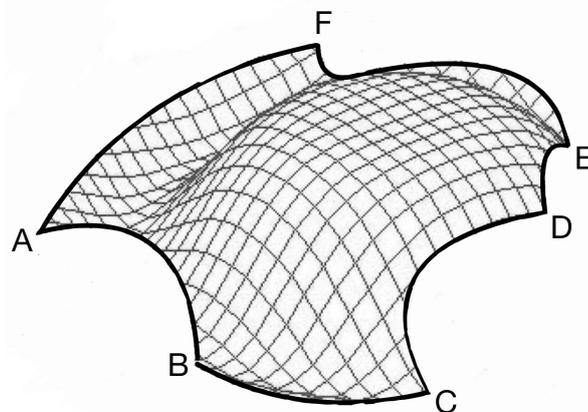
Do mesmo modo como fizemos para regiões planas podemos definir a fronteira de uma região numa superfície simples.

Definição 2.8.1 *Seja \mathcal{R} uma região aberta numa superfície simples \mathcal{S} . Se $X \in \mathcal{S}$ tem a propriedade que para qualquer número real positivo r , $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}_r(X)$ intercepta tanto \mathcal{R} como $\mathcal{S} - \mathcal{R}$ temos que X está na fronteira da região \mathcal{R} . Denotaremos o conjunto de pontos que estão na fronteira de \mathcal{R} por $\partial\mathcal{R}$.*

Definição 2.8.2 *Um conjunto \mathcal{F} de pontos numa superfície será chamado de **região fechada** quando existir uma região aberta \mathcal{R} na superfície de modo que \mathcal{F} é a união de \mathcal{R} com sua fronteira, isto é, $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.*

Definição 2.8.3 *Dizemos que \mathcal{F} é uma **região fechada suave** quando $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$ e \mathcal{R} é uma região aberta suave.*

Definição 2.8.4 Um **polígono** numa superfície é uma região fechada suave cuja fronteira é um único segmento poligonal fechado simples na superfície.



Fonte: Autor

Figura 2.26: Polígono cuja fronteira é o segmento poligonal fechado $ABCDEF$

Definição 2.8.5 Seja o segmento poligonal fechado fronteira de um polígono \mathcal{P} . Chamamos cada um dos segmentos de linhas suaves que compõem o segmento poligonal fechado simples de **arestas** do polígono \mathcal{P} e cada ponto não suave que une duas arestas quaisquer de **vértices** do polígono.

No polígono da figura 2.26 os segmentos de linhas suaves AB , BC , CD , DE , EF e FA são as arestas do polígono enquanto que os pontos não suaves A , B , C , D , E e F são seus vértices.

Dados dois polígonos, com uma aresta em comum, podemos colá-los de forma não suave ao longo dessa aresta, ou seja, essa aresta constitui uma linha vincada na superfície obtida com a colagem. As superfícies obtidas da colagem não suave de vários polígonos são chamadas de **superfícies poligonais**. Quando dispomos de um número finito de polígonos envolvidos na colagem e estes tiverem todas as suas arestas coladas as de outros polígonos temos o que chamamos de **superfície poligonal fechada**.

2.9 A ideia de região no espaço tridimensional

Definição 2.9.1 Considere um subconjunto \mathcal{A} de pontos da região ou espaço tridimensional \mathcal{E} com a propriedade que para qualquer ponto $X \in \mathcal{A}$ existe um número real positivo r tal que $\mathcal{D}_r(X) \subset \mathcal{A}$. O conjunto \mathcal{A} é chamado de **região aberta da região tridimensional**.

Definição 2.9.2 *Seja \mathcal{R} uma região no espaço tridimensional \mathcal{E} . Se $X \in \mathcal{E}$ tem a propriedade que para qualquer número real positivo r , $\mathcal{D}_r(X)$ intercepta tanto \mathcal{R} como $\mathcal{E} - \mathcal{R}$ temos que X está na fronteira da região \mathcal{R} . Denotaremos o conjunto de pontos que estão na fronteira de \mathcal{R} por $\partial\mathcal{R}$.*

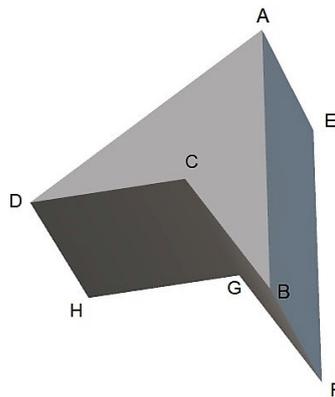
Definição 2.9.3 *Um conjunto \mathcal{F} de pontos no espaço tridimensional \mathcal{E} será chamado de **região fechada** quando existir uma região aberta \mathcal{R} no espaço \mathcal{E} de modo que \mathcal{F} é a união da região \mathcal{R} com sua fronteira, isto é, $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.*

Estamos, agora, em condições de dar a seguinte definição para poliedro.

Definição 2.9.4 *Um **poliedro** é uma região fechada do espaço tridimensional cuja fronteira é formada por uma única superfície poligonal fechada.*

Cada polígono que compõe a superfície poligonal fechada fronteira de um poliedro é denominada **face** do poliedro.

Apesar da Definição 2.9.4 ser a mais geral possível, para o nosso propósito e por razões que se tornarão evidentes, no que segue vamos considerar poliedros cuja fronteira é uma superfície poligonal fechada formada por polígonos planos, como pode ser visto na figura 2.27.



Fonte: Autor

Figura 2.27: Poliedro cuja fronteira é a superfície poligonal fechada $ABCDEFGH$

Cada segmento de linha que une duas faces é chamado de aresta e cada vértice das faces corresponde a um vértice do poliedro. O poliedro da figura 2.27 possui oito vértices (A, B, C, D, E, F, G e H), doze arestas (AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG, e DH) e seis faces (ABCD, EFGH, ABFE, AEHD, DCGH e CDFG).

Capítulo 3

O Teorema de Euler

O Teorema de Euler é, sem dúvida, um dos resultados mais importantes e belos que temos na Matemática. Em sua essência ele relaciona duas grandes áreas, a Geometria e a Topologia. Foi descoberto em 1758 por Leonhard Euler . Desde então, diversas demonstrações apareceram na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de poliedro, pois segundo alguns autores, Euler nunca se preocupou em definir precisamente esta palavra e por isso de fato nunca o demonstrou.

Um grande número de livros didáticos permite a interpretação de que todo poliedro convexo obedece a fórmula $V - A + F = 2$ o que está correto. No entanto, sem mais esclarecimentos, não se explora o fato de que ser convexo é apenas uma condição suficiente, mas não necessária, para que tenhamos $V - A + F = 2$. Em outras palavras, queremos dizer que existem poliedros não convexos onde vale a citada fórmula.

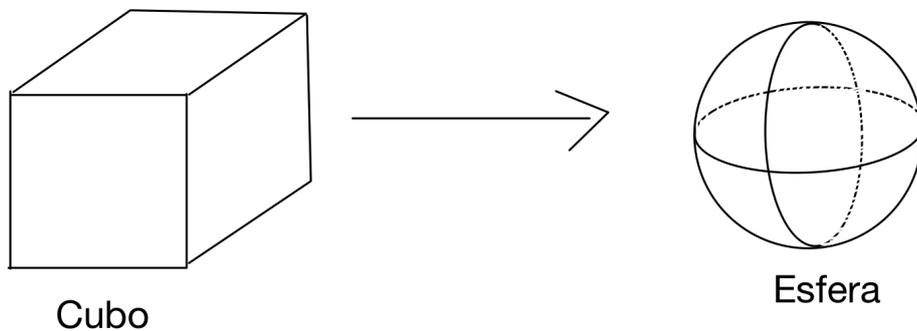
O ponto importante é que na fórmula $V - A + F = 2$ o número dois figura apenas para distinguir topologicamente uma classe de poliedros de outra. Na verdade o que importa na fórmula é o número $V - A + F$ que é um invariante topológico em dimensão dois. Esse número também é definido em dimensões maiores e eles também distinguem topologicamente os análogos aos poliedros nestas dimensões. O número $V - A + F$ assim como seus análogos em dimensões maiores recebem o nome de **característica de Euler**.

De agora em diante, sendo \mathcal{P} um poliedro com V vértices, A arestas e F faces denotamos por $\chi(\mathcal{P})$ a característica de Euler de \mathcal{P} , ou seja,

$$\chi(\mathcal{P}) = V - A + F.$$

3.1 Classificação das superfícies poligonais fechadas

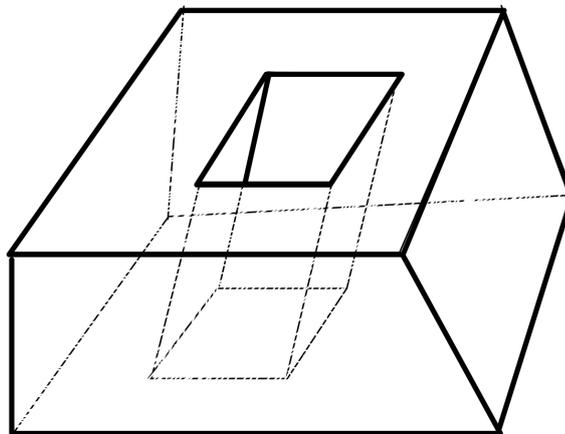
Para fixar ideias vamos propor duas transformações sobre uma superfície poligonal fechada. A primeira delas é a **transformação de suavização** que age como um ferro de gomar retirando todos os vincos apenas arredondando, ou suavizando, as arestas e vértices da superfície que forma a fronteira do poliedro. A outra é a **transformação de dilatação**, ou esticamento, da superfície, sem cortá-la. Como exemplo considere um cubo que é um poliedro cuja fronteira é formada pela união de seis quadrados. Se aplicarmos essas duas transformações de forma apropriada ao cubo podemos chegar a uma esfera. Ver 3.1



Fonte: Autor

Figura 3.1: Transformação de um cubo numa esfera

Considere a figura 3.2 abaixo. O leitor deve intuir que com as duas transformações mencionadas acima aplicadas ao poliedro da figura 3.2 não podemos chegar a uma esfera, porque por mais que este poliedro seja inflado, o buraco do meio não deixará de existir.



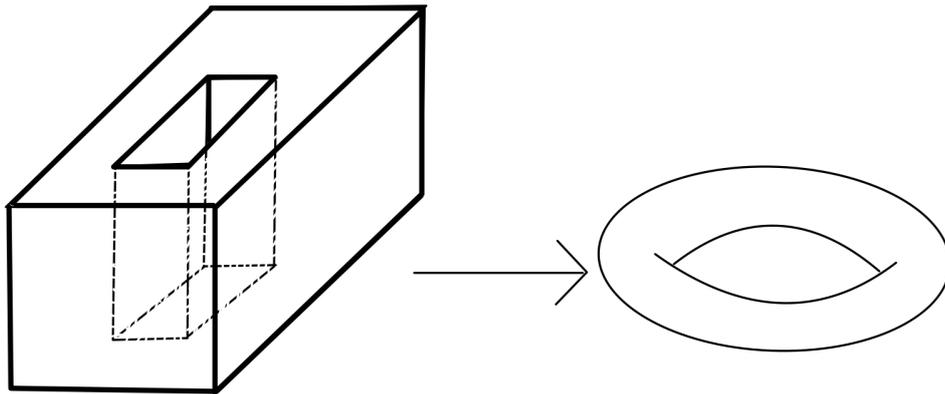
Fonte: Autor

Figura 3.2: Poliedro convexo com um furo

Exemplo 3.1.1 A figura 3.2 é o resultado obtido quando retiramos do poliedro cuja fron-

teira é formada pela união de seis polígonos quadrangulares um sólido da mesma natureza que este.

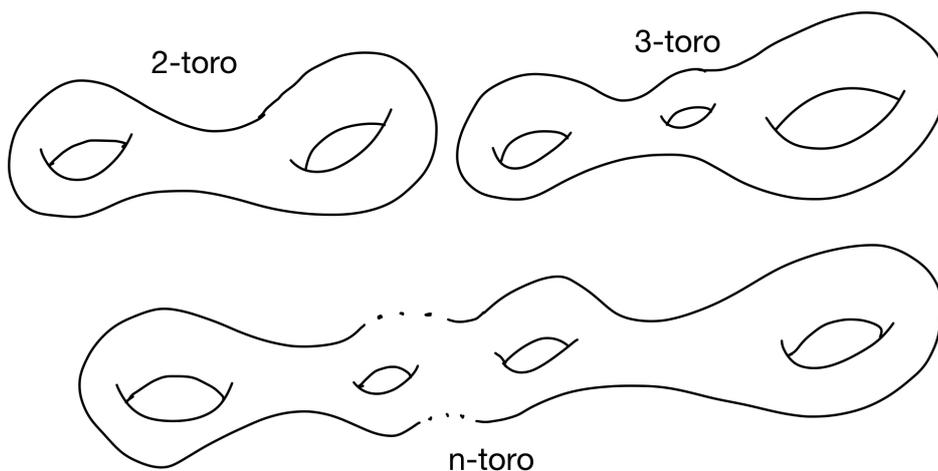
Com as transformações de suavização e dilatação podemos transformar a superfície poligonal fechada que forma a fronteira desse poliedro numa superfície conhecida como Toro, aquela que tem o formato de uma rosquinha.



Fonte: Autor

Figura 3.3: Transformação de um poliedro convexo furado num Toro

Na verdade existe um teorema que classifica todas as superfícies poligonais fechadas que são as fronteiras de poliedros no espaço tridimensional. Do ponto de vista topológico, podemos identificar uma superfície poligonal fechada através das transformações mencionadas, com um n -Toro. Ver figura 3.4.



Fonte: Autor

Figura 3.4: n -toros

Desta forma cada n -toro determina uma classe de equivalência, que denotaremos por \mathcal{P}^n , que é a classe dos poliedros cuja fronteira são superfícies que resultam num

n -toro depois de aplicadas as transformações de suavização e dilatação. No que segue mostraremos que todos os polígonos de uma mesma classe tem a mesma característica de Euler e esta pode ser dada em função do número n relacionado à classe.

Existe uma relação matemática entre o número de faces e o número de arestas de um poliedro convexo.

Lema 3.1.1 *Se um poliedro tem A arestas e F_k faces com k arestas, então*

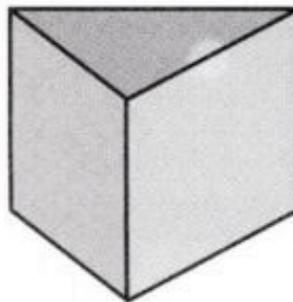
$$2A = 3F_3 + 4F_4 + \cdots + kF_k$$

Demonstração. Se um poliedro possui F_3 faces triangulares, F_4 faces quadrangulares, \cdots , F_k faces com k lados então o número total de arestas encontradas em todas as faces é

$$3F_3 + 4F_4 + \cdots + kF_k.$$

Entretanto todas as arestas são comuns a duas faces e são contadas em duplicidade. Assim o número $3F_3 + 4F_4 + \cdots + kF_k$ é o dobro do número de arestas.

Exemplo 3.1.2 *Seja \mathcal{T} o prisma de base triangular da figura 3.8 que possui os seguintes elementos: Duas faces de três lados, três faces de quatro lados e seis vértices com três arestas, isto é, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ e $V_3 = 6$.*



Fonte: Autor

Figura 3.5: Poliedro \mathcal{T}

Agora vamos decompor as faces do poliedro em figuras planas, isto é, desmontar em polígonos, conforme figura 3.6.

Podemos observar que o total de arestas constando em todas as faces é $A = 18$. é fácil ver que este não é o número correto pois na verdade temos $A = 9$. O que acontece é que cada aresta está ligada a cada duas faces, sendo assim as arestas estão sendo contadas duas vezes, donde vale a igualdade: $2A = 3 \times 2 + 4 \times 3 = 18$.

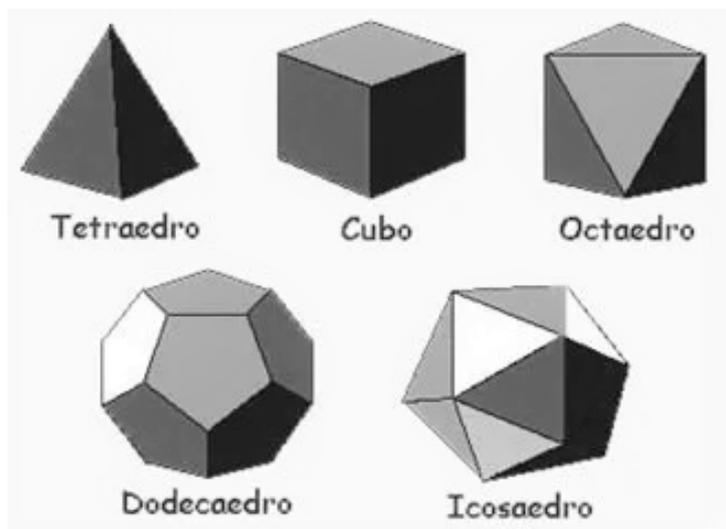


Fonte: Autor

Figura 3.6: Poliedro \mathcal{T} desmontado em polígonos

No que segue, para fixar ideias, \mathcal{P}^0 é a classe da esfera, ou 0-toro. O próximo exemplo mostra alguns poliedros da classe \mathcal{P}^0 .

Exemplo 3.1.3 (Os sólidos de Platão) *São cinco os chamados sólidos de Platão. O tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.*



Fonte: Autor

Figura 3.7: Sólidos de Platão

O tetraedro possui 4 faces triangulares, 4 vértices e 6 arestas. Na figura 3.8 é mostrado o tetraedro de forma planificada.

Observe que $\chi(\text{tetraedro}) = V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$.

O hexaedro possui 6 faces quadrangulares, 8 vértices e 12 arestas. Na figura 3.9 é mostrado o hexaedro de forma planificada.

Observe que $\chi(\text{hexaedro}) = V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$.

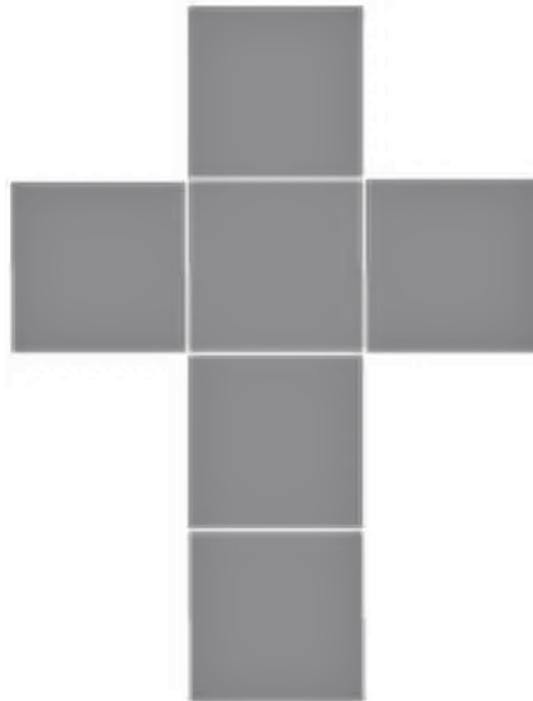
O octaedro possui 8 faces triangulares, 6 vértices e 12 arestas. Na figura 3.10 é mostrado o hexaedro de forma planificada.

Observe que $\chi(\text{octaedro}) = V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2$.



Fonte: Autor

Figura 3.8: Tetraedro planificado



Fonte: Autor

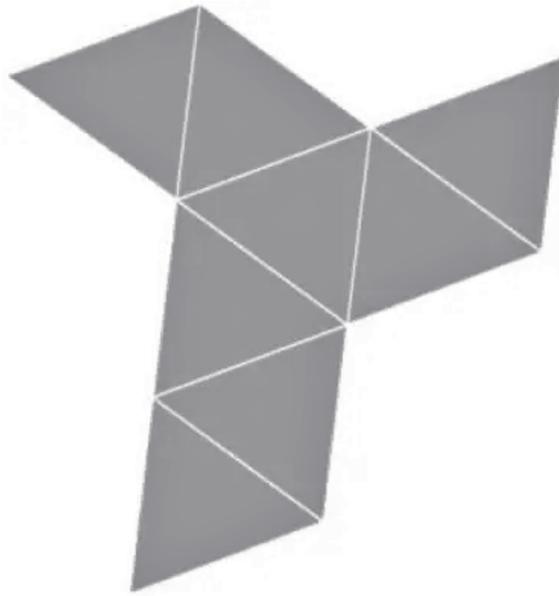
Figura 3.9: Hexaedro planificado

O dodecaedro possui 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas. Na figura 3.11 é mostrado o dodecaedro de forma planificada.

Observe que $\chi(\text{dodecaedro}) = V - A + F = 20 - 30 + 12 = 2$.

O icosaedro possui 20 faces triangulares, 12 vértices e 30 arestas. Na figura 3.12 é mostrado o icosaedro de forma planificada.

Observe que $\chi(\text{icosaedro}) = V - A + F = 12 - 30 + 20 = 2$.



Fonte: Autor

Figura 3.10: Octaedro planificado



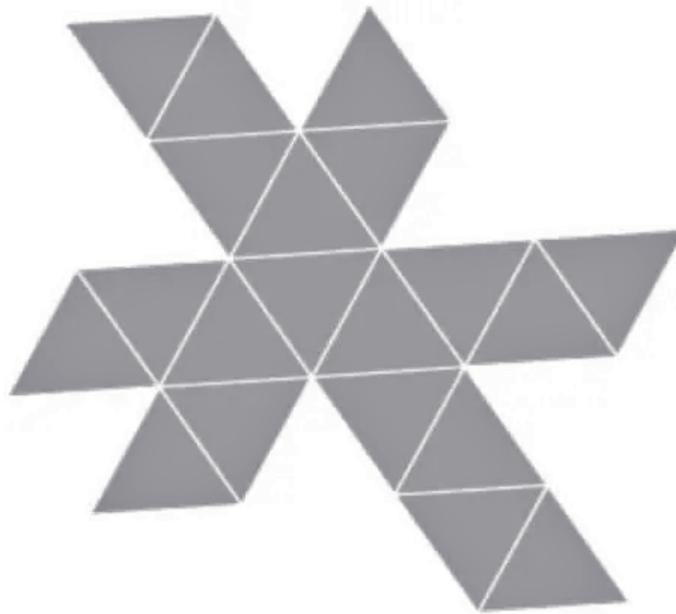
Fonte: Autor

Figura 3.11: Dodecaedro planificado

Definição 3.1.1 *Seja \mathcal{P} um poliedro. Se para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}$ temos que o segmento de reta XY está contido em \mathcal{P} dizemos que o poliedro \mathcal{P} é **convexo**. Caso contrário, dizemos que \mathcal{P} é **não convexo**.*

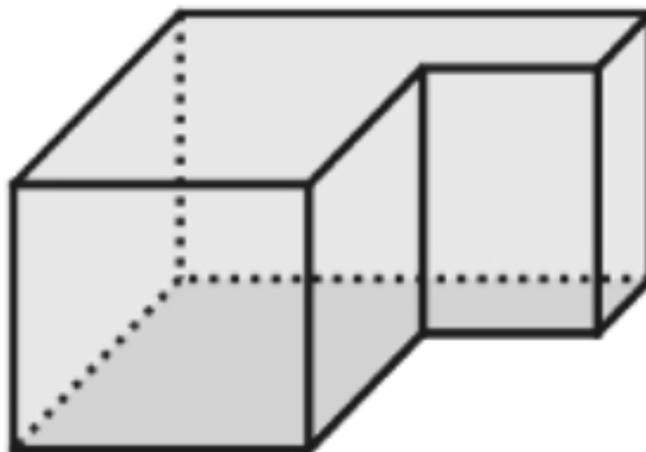
Exemplo 3.1.4 (Poliedro não convexo) *Nesse exemplo trazemos um poliedro não convexo que pode ser transformado num poliedro convexo na classe \mathcal{P}^0 .*

Este poliedro possui 6 faces quadrangulares e 2 faces em forma de L, 12 vértices e 18 arestas.



Fonte: Autor

Figura 3.12: Icosaedro planificado



Fonte: Autor

Figura 3.13: Poliedro não convexo

Observe que $\chi(\text{poliedro não convexo}) = V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$.

Diante dos exemplos acima cabe a seguinte pergunta: Todos os poliedros da classe \mathcal{P}^0 possuem característica de Euler igual a 2? A resposta é afirmativa e é o conteúdo do teorema a seguir:

Teorema 3.1.1 (Euler) *Se \mathcal{P} é um poliedro na classe \mathcal{P}^0 então $\chi(\mathcal{P}) = 2$.*

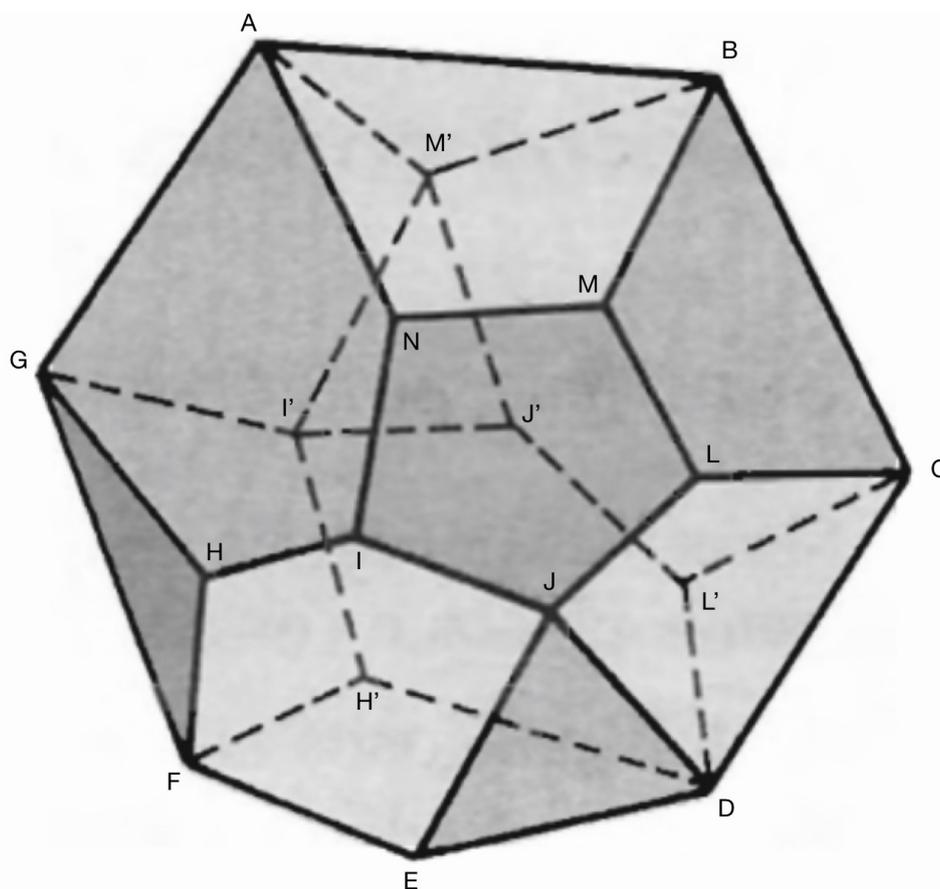
Note que, diferentemente dos enunciados que fazem menção a convexidade do

poliedro, não destacamos esse fato por entender que podemos transformar um poliedro não convexo na classe \mathcal{P}^0 em um poliedro convexo nessa mesma classe.

3.2 Primeira demonstração do Teorema de Euler

Antes de passarmos à primeira demonstração do Teorema de Euler mostraremos um exemplo que ajudará a esclarecer algumas ideias que usaremos na prova.

Exemplo 3.2.1 *Pensemos na figura 3.14 como uma fotografia do poliedro \mathcal{P} que sob o ponto de vista que foi tirada enxergamos as faces $ABMN$, $BCLM$, $CDJL$, DEJ , $EFHIJ$, FGH , $GANIH$ e $MLJIN$ e não enxergamos as faces ABM' , $BCL'J'M'$, CDL' , $DEFH'$, $FGI'H'$, $GAM'I'$, $M'J'I'$ e $J'L'DH'I'$*



Fonte: Autor

Figura 3.14: Poliedro \mathcal{P} na classe \mathcal{P}^0

Entretanto poderia ter ocorrido da fotografia ser tirada sob um ângulo que deixasse uma face totalmente escondida atrás de uma aresta. Fotografias tiradas sob estes ângulos não seriam interessantes para nossos propósitos. Chamemos as faces do poliedro \mathcal{P} que

compõem a fotografia de faces visíveis e as faces não captadas pela fotografia de faces ocultas. Desse modo podemos pensar na fotografia como uma planificação da superfície formada pelas faces do poliedro que são visíveis a qual chamaremos de S_v . Retirando do poliedro as faces visíveis podemos tirar novamente a foto e obter a fotografia das faces não captadas e pensar nessa foto como uma planificação da superfície formada pelas faces ocultas a qual chamaremos de S_o .

Depois das considerações do exemplo anterior passemos a primeira demonstração do Teorema de Euler.

Demonstração. Considere um poliedro \mathcal{P} na classe \mathcal{P}^0 . Caso este seja não convexo podemos transformá-lo adequadamente de modo a obter um poliedro convexo na classe \mathcal{P}^0 com o mesmo número de vértices, faces e arestas do poliedro original. Por esse motivo suporemos, sem perda de generalidade, que \mathcal{P} é convexo.

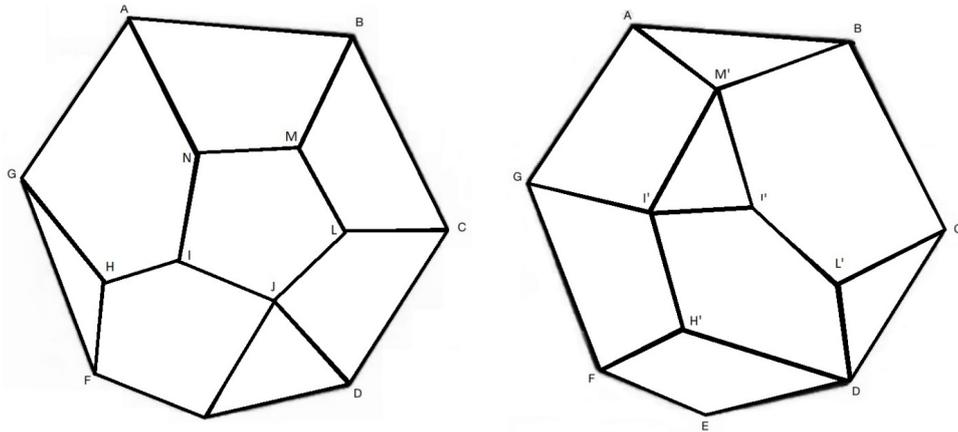


Figura 3.15: Fotografias da superfície visível e da superfície oculta

Como feito no exemplo 3.2.1 considere uma fotografia do poliedro \mathcal{P} sob um ângulo que garanta que cada uma das faces esteja ou na planificação S_v ou na planificação S_o . A figura 3.15 ilustra como será possível ver todos os polígonos presentes nas superfícies visível (S_v) e oculta (S_o). Vamos somar os ângulos internos de cada uma das faces de S_v e S_o de duas maneiras distintas. Primeiro, lembremos que a soma dos ângulos internos de uma face de k lados é dada por

$$(k - 2)\pi.$$

Assim, se S_v possui F_{3_v} faces com três lados, F_{4_v} faces com quatro lados, \dots , F_{n_v} faces com n lados temos que a soma de todos os ângulos internos das faces em S_v será dada por

$$\sum_{S_v} = F_{3_v}(3 - 2)\pi + F_{4_v}(4 - 2)\pi + \dots + F_{n_v}(n - 2)\pi$$

e se S_o possui F_{3_o} faces com três lados, F_{4_o} faces com quatro lados, \dots , F_{m_o} faces com

m lados temos que a soma de todos os ângulos internos das faces em S_v será dada por

$$\sum_{S_o} = F_{3_o}(3 - 2)\pi + F_{4_o}(4 - 2)\pi + \cdots + F_{m_o}(m - 2)\pi.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \sum_{S_v} + \sum_{S_o} &= F_{3_v}(3 - 2)\pi + F_{4_v}(4 - 2)\pi + \cdots + F_{n_v}(n - 2)\pi + \\ &\quad + F_{3_o}(3 - 2)\pi + F_{4_o}(4 - 2)\pi + \cdots + F_{m_o}(m - 2)\pi \\ &= (3F_{3_v} + 4F_{4_v} + \cdots + nF_{n_v} + 3F_{3_o} + 4F_{4_o} + \cdots + mF_{m_o})\pi \\ &\quad - (F_{3_v} + F_{4_v} + \cdots + F_{n_v} + F_{3_o} + F_{4_o} + \cdots + F_{m_o})2\pi \\ &= 2A\pi - 2F\pi \\ \sum_{S_v} + \sum_{S_o} &= (2A - 2F)\pi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, no que diz respeito aos vértices, temos os vértices internos em S_v que denotaremos por V_{i_v} , os vértices internos em S_o que denotaremos por V_{i_o} além dos vértices comuns a S_v e S_o que chamaremos de vértices no contorno e denotaremos por V_c . A figura 3.16 ilustra os ângulos nos vértices comuns em verde e os ângulos ao redor dos vértices internos em azul.

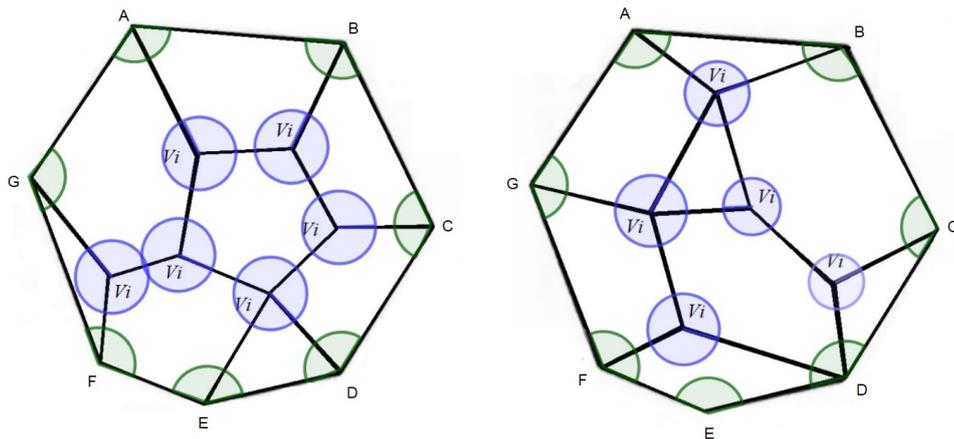


Figura 3.16: Vértices Comuns e Vértices internos da superfície visível e da superfície oculta

Dito isto, temos que a soma de todos os ângulos internos das faces em S_v e S_o é dada por

$$\sum_{S_v} + \sum_{S_o} = V_{i_v} 2\pi + V_{i_o} 2\pi + 2(V_c - 2)\pi.$$

Para justificar as duas primeiras parcelas na igualdade acima note que a soma dos ângulos ao redor de cada um dos vértices formam uma volta completa e portanto vale 2π . Para entender a terceira parcela basta lembrar que o contorno comum as duas planificações S_v e S_o é uma curva poligonal que limita um polígono de V_c lados e, portanto, a medida da soma dos ângulos internos é dada por $(V_c - 2)\pi$ para cada uma das planificações.

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{S_v} + \sum_{S_o} &= V_{i_v} 2\pi + V_{i_o} 2\pi + 2(V_c - 2)\pi \\ &= (V_{i_v} + V_{i_o} + V_c - 2)2\pi \\ &= (V - 2)2\pi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Das igualdades 3.1 e 3.2 segue que $A - F = V - 2$ donde concluímos que

$$V - A + F = 2.$$

3.3 Segunda demonstração do Teorema de Euler

Mostraremos agora a demonstração de Legendre. Para uma melhor compreensão da demonstração de Legendre faz-se necessário o entendimento de alguns conceitos básicos de Geometria Esférica. Imagine que nossos polígonos não estão mais sendo estudados num plano e sim numa superfície esférica com raio r suficientemente grande de modo que não se perceba sua curvatura. O que seriam, por exemplo, triângulos nessa superfície esférica? Antes de definirmos os triângulos teríamos que definir as retas nessa superfície esférica. Para tanto consideremos as seguintes conceitos:

Definição 3.3.1 (*Esfera*) *Seja O um ponto no espaço e r um número real positivo. Chama-se esfera de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que a distância entre O e P é menor ou igual a r , isto é: $d(O, P) \leq r$.*

Definição 3.3.2 (*Superfície Esférica*). A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que $d(O, P) = r$.

Definição 3.3.3 (*Circunferência máxima*) Uma circunferência máxima numa superfície esférica é uma circunferência com mesmo raio e mesmo centro que a superfície esférica.

As circunferências máximas nas superfícies esféricas são as análogas das retas no plano.

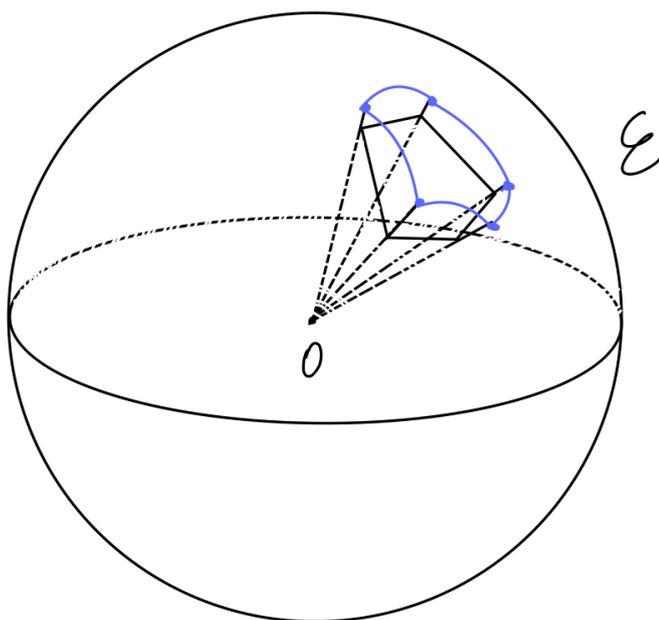
Definição 3.3.4 (*Pontos antípodas*) Dois pontos A e B sobre uma superfície esférica centrada em O são ditos antípodas se A , O e B são colineares.

Definição 3.3.5 Dados dois pontos A e B (não antípodas) sobre uma superfície esférica, o leitor pode intuir que existe uma única circunferência máxima que passa por esses pontos. A parte da circunferência máxima que une os pontos A e B será chamado de segmento de circunferência máxima AB . Note que, na verdade existem dois segmentos determinados pelos dois pontos e deve ficar claro qual dos dois segmentos está sendo considerado.

Definição 3.3.6 Dados três pontos A, B e C definimos o triângulo esférico ABC sobre uma superfície esférica como sendo a parte da superfície esférica limitada pelos segmentos de circunferências máximas AB , AC e BC .

No que segue vamos precisar calcular a área de um triângulo ou, mais geralmente, de um **polígono esférico** que se define de forma análoga aos triângulos esféricos, a saber, se $A_1A_2 \cdots A_n$ são n pontos sobre a superfície esférica definimos o polígono esférico como sendo a parte da superfície esférica limitada pelos segmentos de circunferências máximas A_1A_2 , A_2A_3 , \cdots , $A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 .

Definição 3.3.7 (projeção radial) Seja F um polígono que compõe a superfície poligonal fechada fronteira de um poliedro \mathcal{P} . Considere que todos os pontos de \mathcal{P} são interiores a uma esfera \mathcal{E} de raio r e centro O . Considere, também, que o centro da esfera está no interior do poliedro. Os pontos de interseção, com a superfície esférica de \mathcal{E} , da semirreta com origem em O e passando por um ponto de F nos dá um polígono esférico sobre a superfície esférica de \mathcal{E} que chamamos **projeção radial** de F sobre a superfície esférica de \mathcal{E} . Ver figura 3.17.



Fonte: Autor

Figura 3.17: Projeção de uma face sobre a superfície esférica

Em 1794, o matemático francês, Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) lançou o livro “*éléments de Géométrie*”, uma produção que objetivava aprimorar pedagogicamente as obras de Euclides, trazia de forma bem clara e educativa uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos baseado na soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

O teorema a seguir será muito útil para nossos propósitos:

Teorema 3.3.1 (*Girard*) *Se α, β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico numa superfície esférica de raio r , medidos em radianos, então*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}_3}{r^2},$$

onde \mathcal{A}_3 é a área do triângulo esférico.

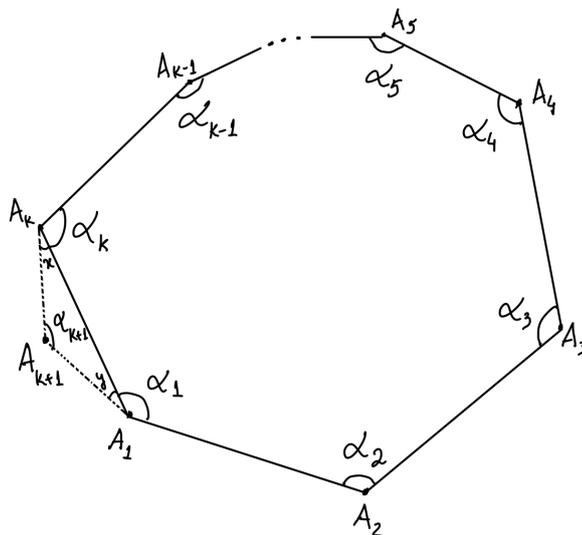
Usando o Teorema de Girard podemos provar o seguinte corolário:

Corolário 3.3.1 *Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os ângulos internos de um polígono esférico de n lados numa superfície esférica de raio r , medidos em radianos, então*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2)\pi + \frac{\mathcal{A}_n}{r^2},$$

onde \mathcal{A}_n é a área do polígono esférico e $n \geq 3$.

Demonstração. A prova será feita usando indução sobre n . Como $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \frac{A_3}{r^2}$ a afirmação do corolário é verdadeira para $n = 3$. Suponha-o verdadeiro para um natural k qualquer, ou seja, o polígono $A_1A_2 \cdots A_k$ onde α_i é o ângulo interno do vértice A_i satisfaz a igualdade $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = (k - 2)\pi + \frac{A_k}{r^2}$. Assim, se introduzirmos mais um vértice A_{k+1} no polígono $A_1A_2 \cdots A_k$ como na figura 3.18



Fonte: Autor

Figura 3.18: Polígono $A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}$

a soma dos ângulos internos do polígono obtido, $A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1}$, é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + (x + y + \alpha_{k+1}) &= (k - 2)\pi + \frac{A_k}{r^2} + \pi + \frac{A_3}{r^2} \\ &= ((k + 1) - 2)\pi + \frac{A_{k+1}}{r^2} \end{aligned}$$

onde o corolário vale para um polígono de $k + 1$ lados. Segue do principio de indução que o corolário é válido para um polígono com um número n qualquer de lados.

Depois destas considerações passemos a segunda demonstração do Teorema de Euler.

Demonstração. Seja \mathcal{P} um poliedro com F_3 faces triangulares, F_4 faces quadrangulares, \dots , F_n faces com n lados, A arestas e V vértices. Considere que todos os pontos de \mathcal{P} são interiores a uma esfera \mathcal{E} de raio r e centro O . Considere também que o centro da esfera está no interior do poliedro. A primeira observação que devemos fazer é que a interseção das projeções radiais de duas faces que tem uma aresta comum é um segmento de circunferência máxima enquanto a interseção das projeções radiais de duas faces que não tem uma aresta em comum é vazia. A segunda observação é que a união das projeções

radiais de todas as faces de \mathcal{P} sobre a superfície esférica de \mathcal{E} nos dá a superfície esférica de \mathcal{E} , ou seja, a soma das áreas de todos os polígonos esféricos obtidos como projeção radial de polígonos de \mathcal{P} nos dá a área da superfície esférica de \mathcal{E} . Outro fato importante é que a soma dos ângulos internos de polígonos esféricos que concorrem num mesmo vértice V é 2π .

A estratégia agora é calcular a soma de todos os ângulos internos de todos os polígonos esféricos obtidos como projeção radial de polígonos em \mathcal{P} . Como cada um destes ângulos concorre em algum vértice e a soma dos ângulos internos em cada vértice é 2π temos que a soma de todos os ângulos internos de todos os polígonos esféricos é dada por

$$\sum = 2\pi V. \quad (3.3)$$

Por outro lado, considere as seguintes notações:

$\mathcal{A}_{3_1}, \mathcal{A}_{3_2}, \dots, \mathcal{A}_{3_{F_3}}$ para as áreas das F_3 faces triangulares;

$\mathcal{A}_{4_1}, \mathcal{A}_{4_2}, \dots, \mathcal{A}_{4_{F_4}}$ para as áreas das F_4 faces quadrangulares;

$\mathcal{A}_{5_1}, \mathcal{A}_{5_2}, \dots, \mathcal{A}_{5_{F_5}}$ para as áreas das F_5 faces de cinco lados;

...

$\mathcal{A}_{n_1}, \mathcal{A}_{n_2}, \dots, \mathcal{A}_{n_{F_n}}$ para as áreas das F_n faces de n lados.

Sendo α_{k_i} a soma dos ângulos no polígono de área \mathcal{A}_{k_i} , \mathcal{A}_k a soma das áreas destes polígonos e usando o Corolário 3.3.1 temos que a soma de todos os ângulos internos de todos os polígonos esféricos é dada por

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_i^{F_3} \alpha_{3_i} + \sum_i^{F_4} \alpha_{4_i} + \dots + \sum_i^{F_n} \alpha_{n_i} \\ &= \sum_i^{F_3} \left((3-2)\pi + \frac{\mathcal{A}_{3_i}}{r^2} \right) + \sum_i^{F_4} \left((4-2)\pi + \frac{\mathcal{A}_{4_i}}{r^2} \right) + \dots + \sum_i^{F_n} \left((n-2)\pi + \frac{\mathcal{A}_{n_i}}{r^2} \right) \\ &= \left(\sum_i^{F_3} 3\pi + \sum_i^{F_4} 4\pi + \dots + \sum_i^{F_n} n\pi \right) - \left(\sum_i^{F_3} 2\pi + \sum_i^{F_4} 2\pi + \dots + \sum_i^{F_n} 2\pi \right) + \\ &\quad + \left(\sum_i^{F_3} \frac{\mathcal{A}_{3_i}}{r^2} + \sum_i^{F_4} \frac{\mathcal{A}_{4_i}}{r^2} + \dots + \sum_i^{F_n} \frac{\mathcal{A}_{n_i}}{r^2} \right) \\ &= (3\pi F_3 + 4\pi F_4 + \dots + n\pi F_n) - (2\pi F_3 + 2\pi F_4 + \dots + 2\pi F_n) + \\ &\quad \left(\frac{\mathcal{A}_3}{r^2} + \frac{\mathcal{A}_4}{r^2} + \dots + \frac{\mathcal{A}_n}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{(3F_3 + 4F_4 + \cdots + nF_n)}_{\text{usando o Lema 3.1.1}} \pi - \underbrace{(F_3 + F_4 + \cdots + F_n)}_{\text{soma do número total de faces}} 2\pi + \left(\frac{\overbrace{\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \cdots + \mathcal{A}_n}^{\text{somas de todas as áreas dos polígonos}}}{r^2} \right) \\
&= 2A\pi - 2F\pi + \frac{\overbrace{4\pi r^2}}{\text{área da superfície esférica}}{r^2} \\
&= (A - F + 2)2\pi
\end{aligned}$$

Comparando esta última igualdade com a equação 3.3 obtemos

$$2\pi V = (A - F + 2)2\pi$$

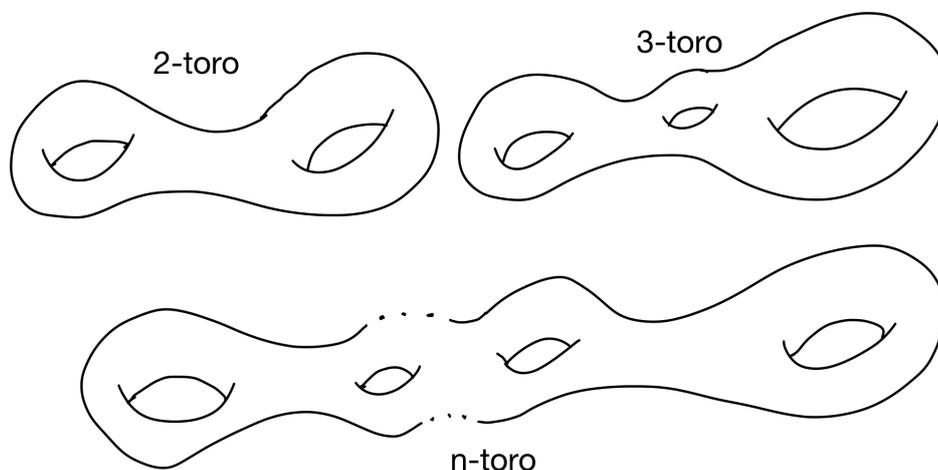
donde concluimos que

$$V - A + F = 2.$$

Capítulo 4

O Teorema de Euler para n -toros

Como mencionado anteriormente um n -toro é uma região do espaço cuja fronteira é uma das superfícies da figura 4.1. Como dito anteriormente e para efeito de contagem de arestas, vértices e faces, vamos restringir nosso estudo aos poliedros que resultam num n -toro quando submetidos as transformações de suavização e dilatação e, dentro desta classe, vamos estudar apenas os poliedros cuja fronteira é uma superfície poligonal fechada formadas por faces planas.

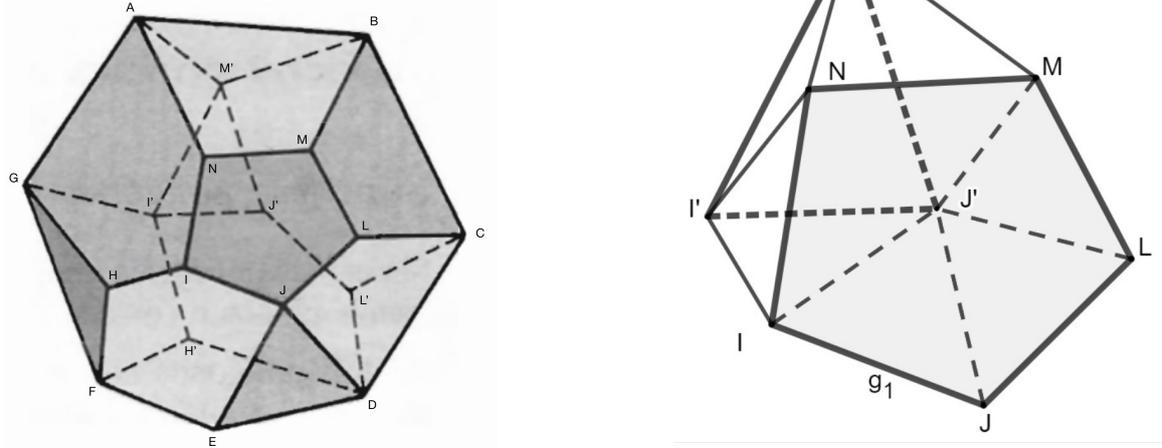


Fonte: Autor

Figura 4.1: n -toros

4.1 Construção de poliedros de classe \mathcal{P}^1

Dado um poliedro \mathcal{P} com faces planas, que pode ser considerado convexo, na classe \mathcal{P}^0 podemos construir um poliedro \mathcal{Q} na classe \mathcal{P}^1 retirando-se deste um poliedro \mathcal{P}' nesta mesma classe da forma que passaremos a descrever.



Fonte: Autor

Figura 4.2: Poliedro \mathcal{P} e poliedro \mathcal{P}' retirado

Seja F_n e F_m duas faces planas de \mathcal{P} que não possuem aresta em comum e tendo n e m arestas, respectivamente. Defina \mathcal{P}' como sendo um poliedro na classe \mathcal{P}^0 inteiramente contido no poliedro \mathcal{P} e tendo F_n e F_m como faces. Por fim, considere \mathcal{Q} o poliedro obtido ao retirarmos de \mathcal{P} além das faces F_n e F_m também o interior do poliedro \mathcal{P}' . Lembremos que o interior de um poliedro consta de todos os pontos que não fazem parte da superfície poligonal fechada que é a fronteira do poliedro. Ver figura 4.2.

Sendo V , A e F o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{P} , respectivamente, e V' , A' e F' o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{P}' , respectivamente, queremos encontrar o número

$$\chi(\mathcal{Q}) = V_q - A_q + F_q$$

onde V_q , A_q e F_q são o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{Q} , respectivamente.

Vamos analisar cuidadosamente quem são os números V_q , A_q e F_q e mostrar que estes podem ser obtidos em função dos números já conhecidos V , A , F , V' , A' e F' .

Proposição 4.1.1 *Seja \mathcal{Q} um poliedro na classe \mathcal{P}^1 obtido como descrito acima. Temos*

$$V_q = V + V' - m - n$$

onde m e n representam o número de vértices das faces F_m e F_n , respectivamente.

Demonstração. Basta notar que as faces F_m e F_n são comuns aos poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' e

como as duas somam $m + n$ vértices temos este número de vértices comuns a estes dois poliedros. Sendo assim o número de vértices do poliedro \mathcal{Q} será a soma dos vértices dos poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' menos o número de vértices comuns aos dois, ou seja,

$$V_q = V + V' - m - n.$$

Proposição 4.1.2 *Seja \mathcal{Q} um poliedro na classe \mathcal{P}^1 obtido como descrito acima. Temos*

$$A_q = A + A' - m - n$$

onde m e n representam o número de vértices das faces F_m e F_n , respectivamente.

Demonstração. Observando que as faces F_m e F_n estão presentes tanto no poliedro \mathcal{P} como no poliedro \mathcal{P}' e que elas possuem respectivamente m e n arestas, pode-se afirmar que o número de arestas do poliedro \mathcal{Q} será a soma das arestas dos poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' menos o número de arestas comuns aos dois, isto é,

$$V_q = V + V' - m - n.$$

Proposição 4.1.3 *Seja \mathcal{Q} um poliedro na classe \mathcal{P}^1 obtido como descrito acima. Temos*

$$F_q = F + F' - 4.$$

Demonstração. Como F_m e F_n são as únicas faces comuns aos poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' , quando juntamos todas as faces destes dois poliedros estamos contando duas vezes F_m e duas vezes F_n e sabendo que o poliedro \mathcal{Q} tem um buraco, isto é, não tem F_m nem F_n , podemos afirmar que o número de faces do poliedro \mathcal{Q} será a soma das faces dos poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' menos as quatro faces comuns, ou seja,

$$F_q = F + F' - 4.$$

Corolário 4.1.1 *Se \mathcal{Q} é um poliedro na classe \mathcal{P}^1 então $\chi(\mathcal{Q}) = 0$.*

Demonstração. Segue das proposições anteriores e do Teorema de Euler que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{Q}) &= V_q - A_q + F_q \\ &= (V + V' - m - n) - (A + A' - m - n) + (F + F' - 4) \\ &= (V - A + F) + (V' - A' + F') - 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

4.2 O Teorema de Euler para poliedros na classe \mathcal{P}^k

Finalizamos este trabalho mostrando como se obter a característica de Euler de um poliedro na classe \mathcal{P}^k . Para tanto vamos usar indução finita sobre o número k que representa a classe. A ideia a ser usada é que conhecendo-se o número característico de um poliedro \mathcal{P} de uma classe \mathcal{P}^{k-1} podemos fazer o procedimento descrito no início desta seção retirando-se de \mathcal{P} um poliedro \mathcal{P}' da classe \mathcal{P}^0 de modo a obter um poliedro \mathcal{Q} na classe \mathcal{P}^k e contar seu número de vértices, arestas e faces em função do número de vértices, arestas e faces de \mathcal{P} e \mathcal{P}' .

Teorema 4.2.1 *Se \mathcal{Q} é um poliedro na classe \mathcal{P}^k então $\chi(\mathcal{Q}) = 2 - 2k$.*

Demonstração. Segue do Teorema de Euler que o Teorema é válido para $k = 0$ e segue do Corolário 4.1.1 que o Teorema é válido para $k = 1$. Suponha-o válido para um natural k qualquer, ou seja, se $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}^k$ então $\chi(\mathcal{Q}) = 2 - 2k$. Seja \mathcal{T} um poliedro na classe \mathcal{P}^{k+1} . Então, existem os poliedros \mathcal{Q} na classe \mathcal{P}^k e \mathcal{Q}' na classe \mathcal{P}^0 tendo as faces planas, que não compartilham arestas, F_n e F_m em comum e sendo \mathcal{Q}' interior a \mathcal{Q} .

Sendo V, A e F o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{Q} , respectivamente, e V', A' e F' o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{Q}' , respectivamente, queremos encontrar o número

$$\chi(\mathcal{T}) = V_t - A_t + F_t$$

onde V_t, A_t e F_t são o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do poliedro \mathcal{T} , respectivamente.

Temos

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{T}) &= V_t - A_t + F_t \\ &= (V + V' - m - n) - (A + A' - m - n) + (F + F' - 4) \\ &= (V - A + F) + (V' - A' + F') - 4 \\ &= \chi(\mathcal{Q}) + \chi(\mathcal{Q}') - 4 \\ &= 2 - 2k + 2 - 4 \\ &= 2 - 2(k + 1). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a fórmula vale para um poliedro da classe \mathcal{P}^{k+1} . Segue do princípio de indução finita que o Teorema é válido para todo $k \in \mathbb{N}$.

Capítulo 5

Proposta de sequência didática para a educação básica

Os livros didáticos não abordam a possibilidade de aplicar o Teorema de Euler para poliedros não convexos. Assim, foi elaborada uma sequência didática, partindo dos conhecimentos presentes nos livros didáticos e adquiridos pelos alunos em anos anteriores, de modo a apresentar uma forma de estudar o Teorema de Euler explorando a construção dos poliedros.

Série: 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Poliedros.

Objetivos:

- Sondar e resgatar nos alunos seus conhecimentos prévios em geometria;
- Identificar as formas geométricas planas e espaciais no ambiente ao seu redor;
- Construir figuras tridimensionais a partir de suas planificações;
- Identificar os elementos que compõem um poliedro, vértices, arestas e faces, estabelecendo relações entre os mesmos;
- Desenvolver estratégias e criar hipóteses para as possíveis construções de poliedros, observando o número de vértices, arestas e faces que os compõem;
- Compreender a aplicabilidade do Teorema de Euler para identificar os poliedros da classes \mathcal{P}^0 e da classe \mathcal{P}^1 .

Conteúdos relacionados:

- Definição de poliedro;
- Elementos de um poliedro;
- Nomenclatura dos poliedros;
- Polígonos regulares e irregulares;
- Poliedros convexos e não convexos
- Poliedros regulares e irregulares;
- Poliedros de Platão;
- Planificação da superfície de um poliedro;
- Relação de Euler;
- Poliedros da classe \mathcal{P}^0 e da classe \mathcal{P}^1 .

Habilidades da BNCC:

- EF05MA16: Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos;
- EF06MA17: Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial;
- EF06MA18: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

Tempo da sequência didática:

- 3 aulas de 50 min cada uma.

Materiais necessários para a sequência didática:

- Livro didático, caderno para anotações, lápis de cor, caneta ou lápis;
- Folha de cartolina;
- Atividades impressas;

- Tesouras, cola e fita adesiva.

AULA 1

Introdução

Solicitar aos alunos que observem o espaço físico da sala, escola, rua onde mora, objetos da casa e identifiquem formas geométricas. A geometria está presente em toda a história da humanidade e as formas geométricas se apresentam de maneiras variadas em todas os setores de produção, na arte e até mesmo na natureza. A partir daí relembrar o conceito de poliedro.

Desenvolvimento

Através das respostas, trazer a definição de poliedro e seus elementos, explicar sobre sua classificação em regulares, irregulares, convexos e não convexos. Investigar relação $V - A + F$ entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro.

Organizar a sala em grupos de três alunos. Em seguida, entregar a **Atividade 1** composta por três poliedros planificados, um poliedro irregular, um poliedro de Platão e um poliedro não convexo.

Conclusão

As equipes apresentarão suas construções, com as fichas preenchidas e mostrarão se o Teorema de Euler foi satisfeito em cada caso. Verificar que houve casos em que o poliedro não convexo satisfaz o Teorema de Euler e perguntar o porquê. Esta descoberta será o tema da próxima aula.

Avaliação

Será avaliado a construção bem feita dos poliedros, o preenchimento correto das fichas, a apresentação para os demais colegas, como também, a participação positiva em trabalhar em grupo.

AULA 2

Introdução

Novamente indagar a classe o porquê de alguns poliedros não convexos satisfazerem o Teorema de Euler e outros não. Também perguntar “o que aconteceria se inflássemos todos os poliedros presentes, supondo que o material de fabricação fosse elástico o suficiente para não romper?” e “qual seria o novo formato do sólido?”

Desenvolvimento

Através da discussão realizada, explicar que os poliedros podem ser classificados em novos grupos ou famílias e que esta classificação vai depender do resultado que cada poliedro obter após a transformação de “inflar”. Aplicar a **Atividade 2** para os grupos formados, que consiste em construir poliedros convexos e não convexos da classe (todos sem furos). Solicitar que os alunos apliquem a técnica de inflar no poliedro construído e relatar o que aconteceria.

Conclusão

As equipes apresentarão suas construções, as fichas preenchidas e mostrarão se o Teorema de Euler foi satisfeito ou não. Explicar sobre a transformação de suavização e transformação de dilatação aplicada sobre estes poliedros e como todos resultarão no formato de uma esfera, portanto são classificados como poliedros da classe \mathcal{P}^0 . Esclarecer que a condição de um poliedro pertencer a classe \mathcal{P}^0 é suficiente para satisfazer a fórmula de Euler. No entanto, esta condição não é necessária, pois podemos ter três números naturais V, A e F satisfazendo a fórmula de Euler de modo que não exista um poliedro com V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $V = 100, A = 100$ e $F = 2$.

Avaliação

Espera-se que todos os alunos percebam que todos os poliedros apresentados pertençam a uma mesma família. Será avaliado também a construção bem feita dos poliedros, o preenchimento correto das fichas, a apresentação para os demais colegas, como também, a participação positiva em trabalhar em grupo.

AULA 3

Introdução

Perguntar para a classe “e se o poliedro tiver um furo, o que acontece?” ouvir as respostas e pedir que todos anotem suas suposições no caderno.

Desenvolvimento

Entregar para as equipes as folhas contendo as planificações de poliedros com um furo e solicitar que monte-os e preencham a ficha de observação. Após a montagem, permitir que os alunos façam a apresentação dos poliedros construídos e verificar o que eles perceberam da relação $V - A + F$ com o tipo de poliedro montado. A partir das explanações feitas, explicar que a relação $V - A + F$ determinada por Euler, não se refere apenas aos poliedros convexos, mas que o seu valor, chamado de Característica de Euler, designa uma classe de poliedros que após transformações resultarão num determinado formato. Indagar a turma “caso o poliedro tivesse dois furos, qual seria o formato dele “inflado”, e de qual classe pertenceria”? Fazer a relação do número de furos presentes no

poliedro com a classe pertencente.

Conclusão

Elucidar que a Característica de Euler é utilizada para organizar os poliedros em classes, e cada classe corresponde a um formato que o poliedro obterá após passar pelas transformações de suavização e dilatação. Sendo assim todos os poliedros de classe \mathcal{P}^0 , isto é, poliedros sem furo, serão transformados em esferas, os poliedros de classe \mathcal{P}^1 , isto é, poliedros com um furo serão transformados num toro.

Avaliação

Espera-se que todos os alunos percebam que todos os poliedros confeccionados têm o mesmo valor $V - A + F$ e que assim pertencem a mesma classe e que se inflados terão o formato de uma câmara de pneu inflada ou uma rosquinha. Também será avaliado a construção bem feita dos poliedros, o preenchimento correto das fichas, a apresentação para os demais colegas, como também, a participação positiva em trabalhar em grupo.

Bibliografia:

- MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Experimento cortar cubo*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) – UNICAMP
- SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. *Matemática para compreender o mundo*, vol.2, 1 edição; São Paulo: Saraiva, 2016.
- PREFEITURA DE PIRAQUARA. *Moldes de poliedros*. Disponível em <http://www.piraquara.pr.gov.br/aprefeitura/secretariaseorgaos/educacao/uploadAddress/MOLDESPOLIEDROS>

ATIVIDADE 1

Título: Relação de Euler

Objetivo: Investigar a relação $V - A + F$ entre os números de faces, vértices e arestas de um poliedro.

Material: Roteiro da atividade, folhas com planificações de poliedros, tesoura, cola, fita adesiva, caneta ou lápis.

Procedimentos:

1. Construa os poliedros planificados.
2. Analise os poliedros construídos, verifique a forma, constituição, semelhanças e diferenças entre eles.
3. Anote todas as observações feitas.
4. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros.

Preencha o quadro a seguir:

Poliedro	Convexo		Regular		Nº vértices	Nº arestas	Nº faces	$V - A + F$
	sim	não	sim	não				

Tabela 5.1: Dados dos poliedros construídos

Observações:

ATIVIDADE 2

Título: Poliedros da classe \mathcal{P}^0

Objetivo: Perceber que todo poliedro convexo ou não convexo, sem furos pertence a classe \mathcal{P}^0 .

Material: Roteiro da atividade, folhas com planificações de poliedros convexos e não convexos, tesoura, cola, fita adesiva, caneta ou lápis.

Procedimentos:

1. Construa os poliedros planificados.
2. Analise os poliedros construídos, verifique a forma, constituição, semelhanças e diferenças entre eles.
3. Anote todas as observações feitas.
4. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros.

Preencha o quadro a seguir:

Poliedro	Convexo		Regular		Nº vértices	Nº arestas	Nº faces	$V - A + F$	Formato Inf.
	sim	não	sim	não					

Tabela 5.2: Dados dos poliedros construídos

Observações:

ATIVIDADE 3

Título: Poliedros da classe \mathcal{P}^1

Objetivo: Perceber que todo poliedro com um furo pertence a classe \mathcal{P}^1 .

Material: Roteiro da atividade, folhas com planificações de poliedros convexos, tesoura, cola, fita adesiva, caneta ou lápis.

Procedimentos:

1. Construa os poliedros planificados.
2. Analise os poliedros construídos, verifique a forma, constituição, semelhanças e diferenças entre eles.
3. Anote todas as observações feitas.
4. Determine o total de vértices, arestas e faces nos poliedros.

Preencha o quadro a seguir:

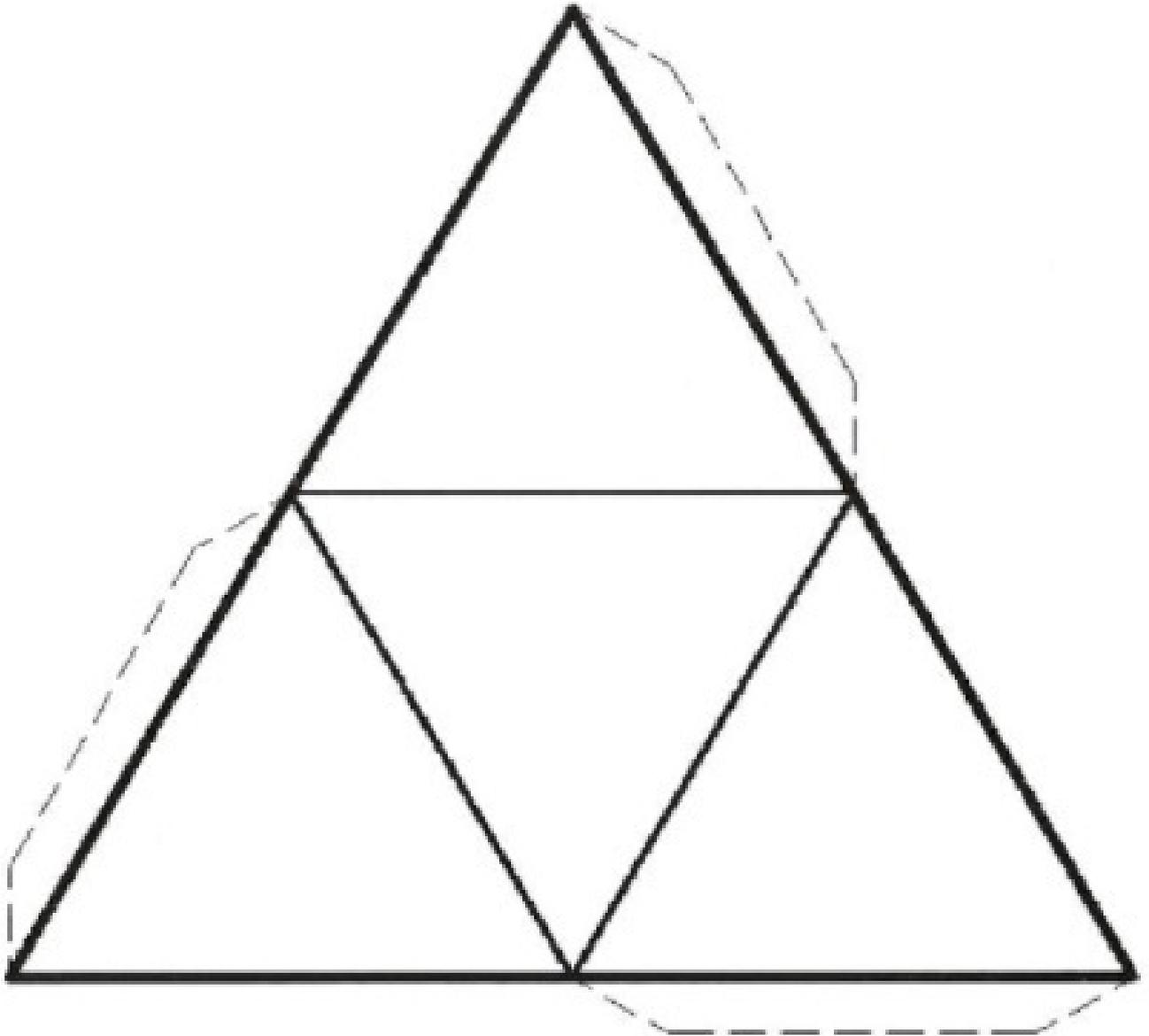
Poliedro	Convexo		Regular		Nº vértices	Nº arestas	Nº faces	$V - A + F$	Formato Inf.
	sim	não	sim	não					

Tabela 5.3: Dados dos poliedros construídos

Observações:

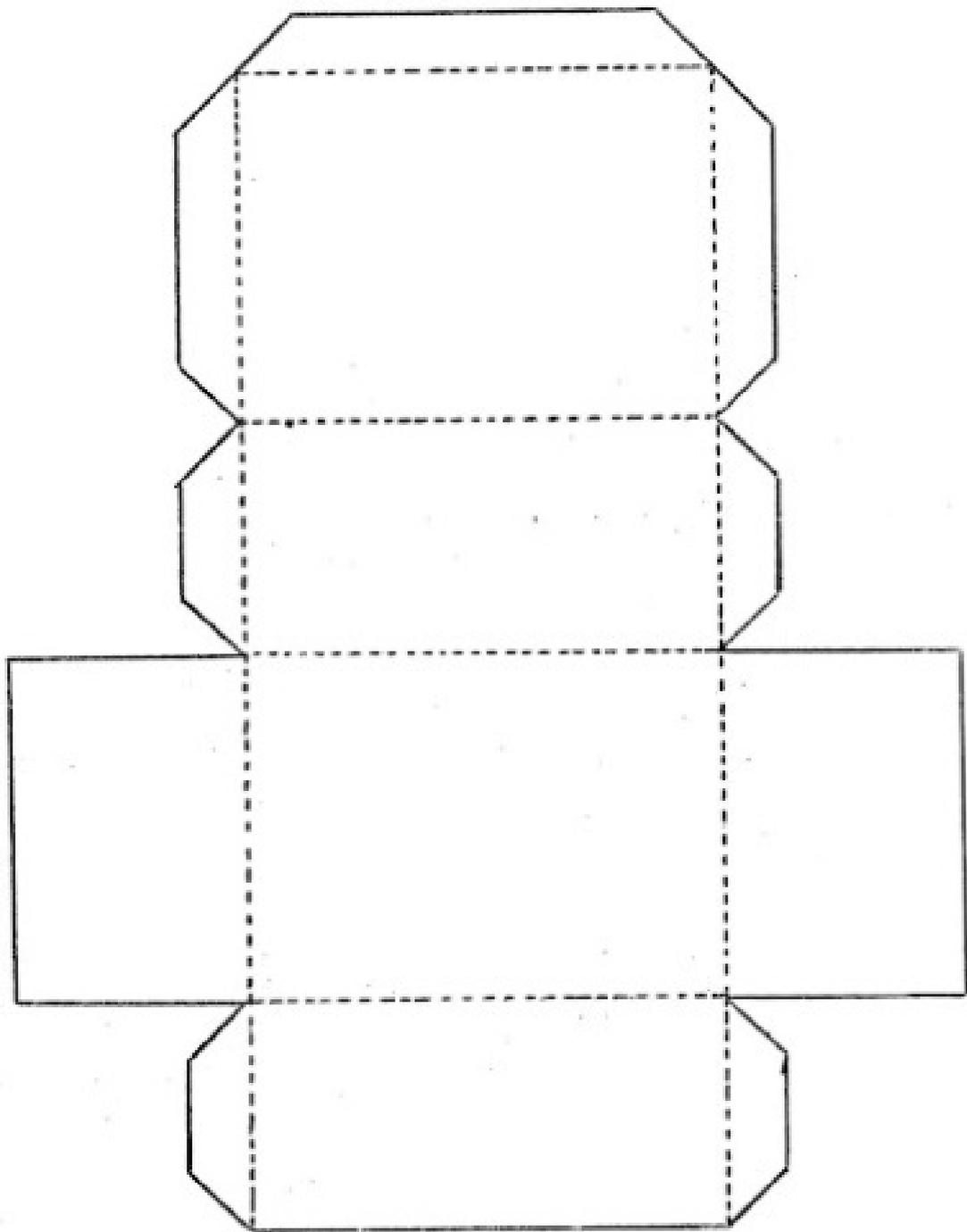
Planificação dos poliedros

Abaixo estão as figuras dos poliedros planificados que serão utilizados nas atividades.



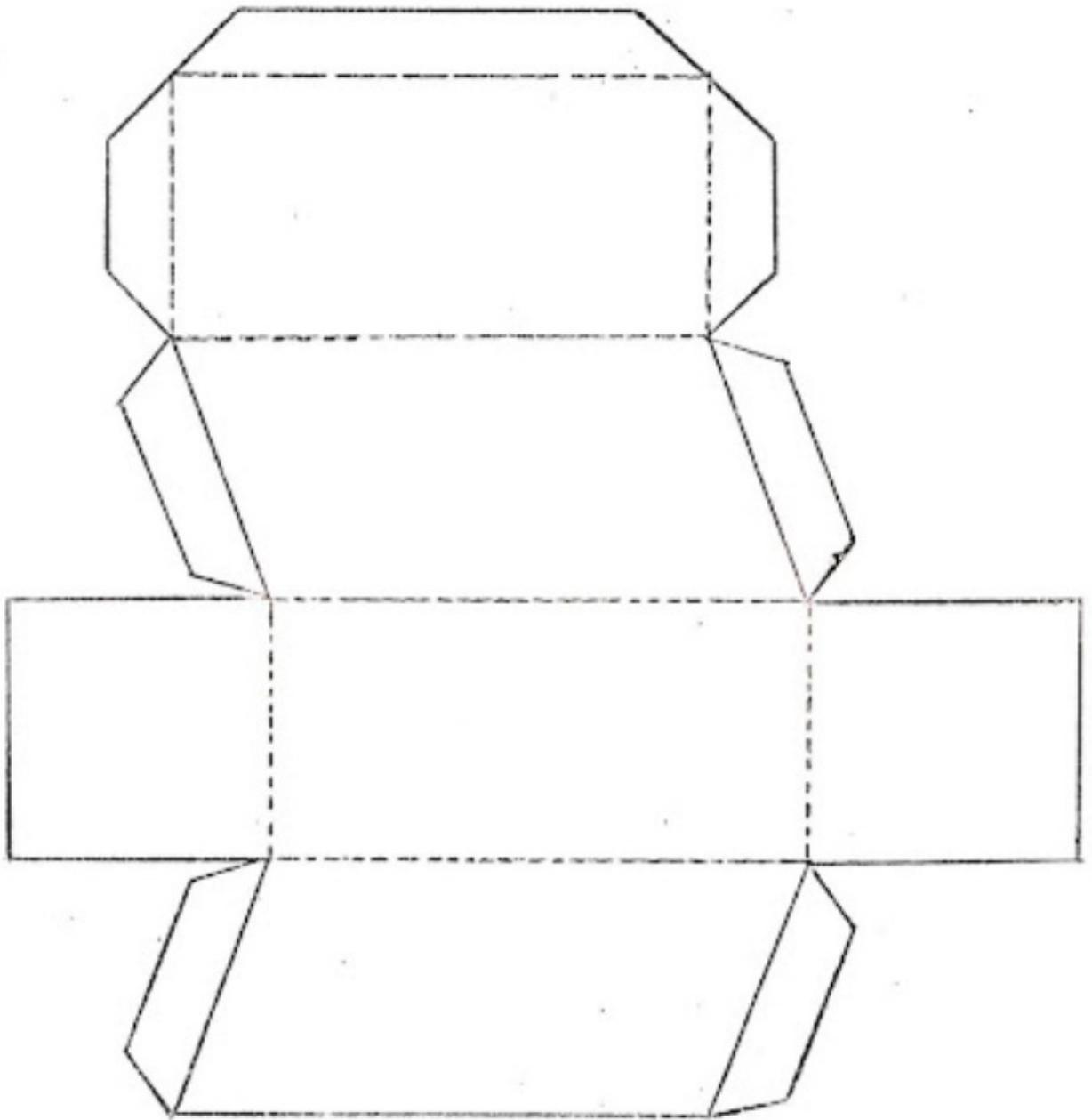
Fonte: Autor

Figura 5.1: Tetraedro



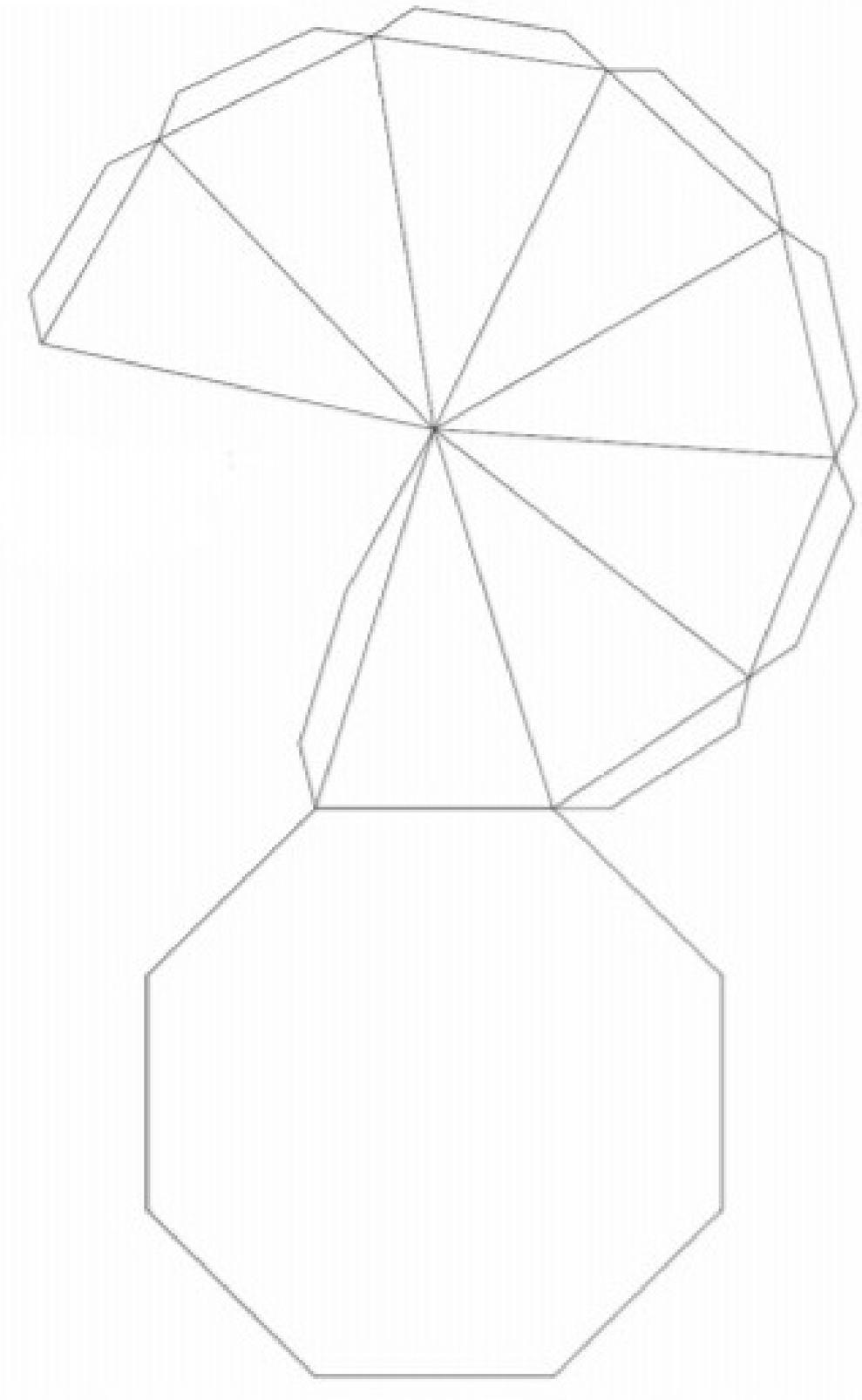
Fonte: Autor

Figura 5.2: Prisma de base retangular



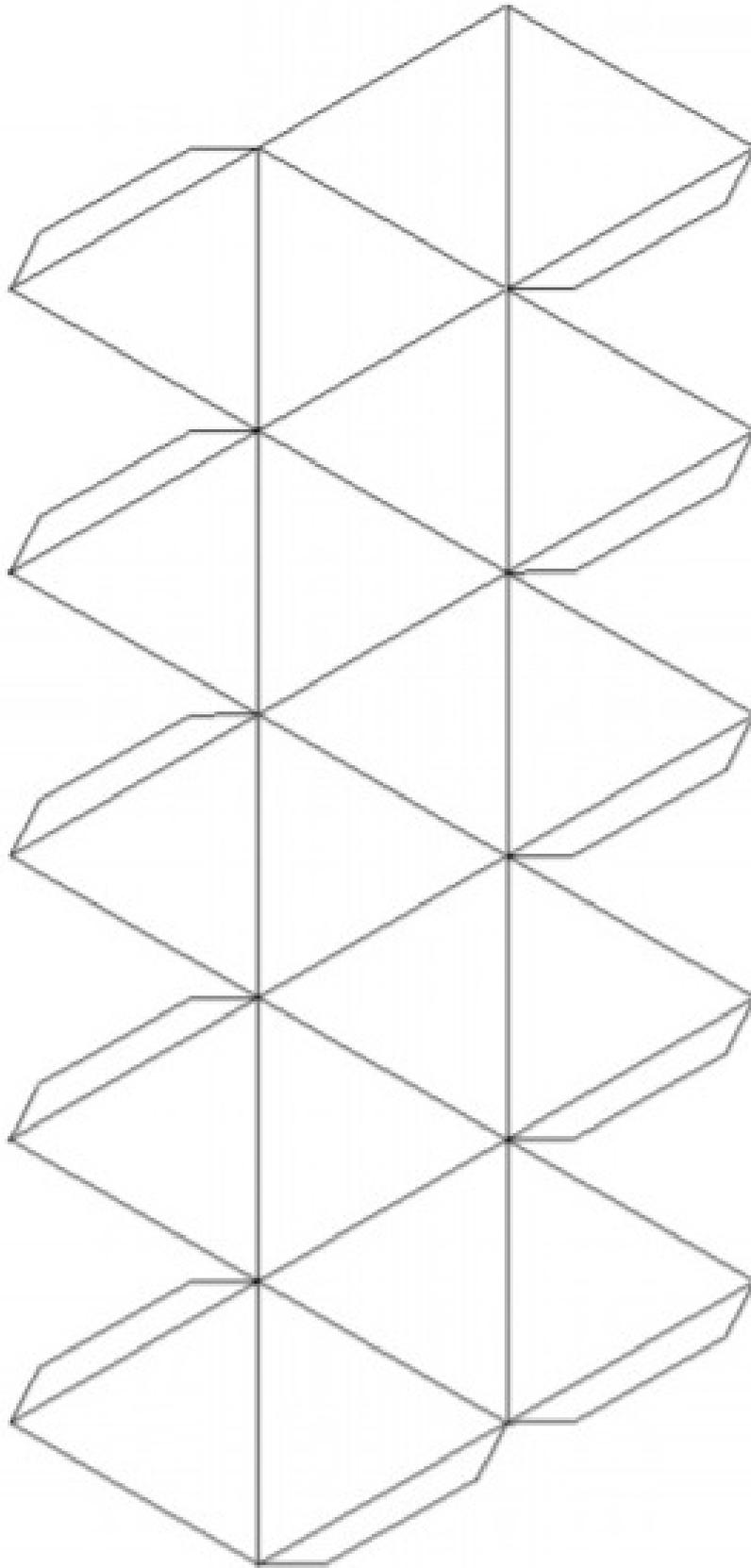
Fonte: Autor

Figura 5.3: Prisma obluo de base retangular

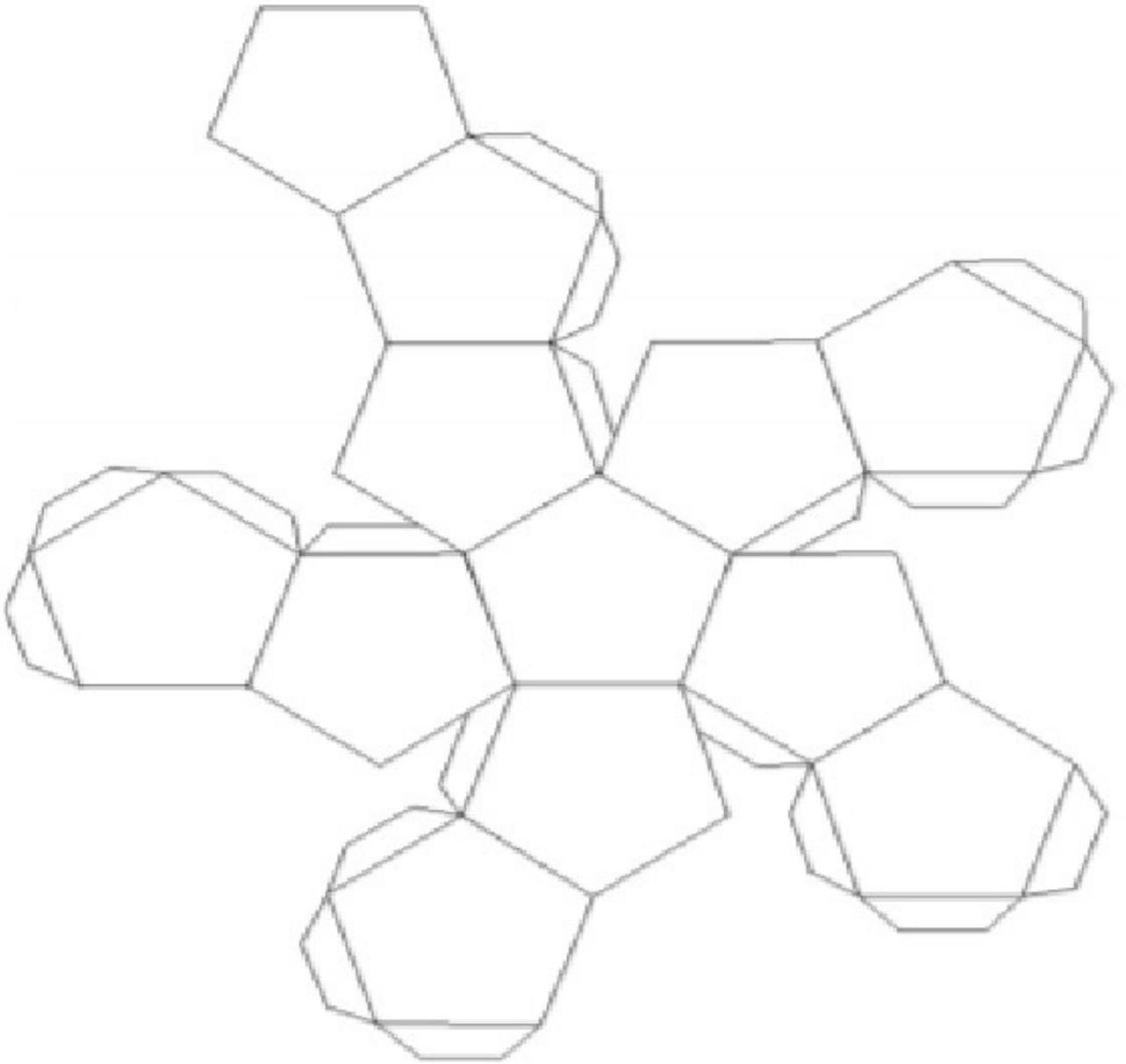


Fonte: Autor

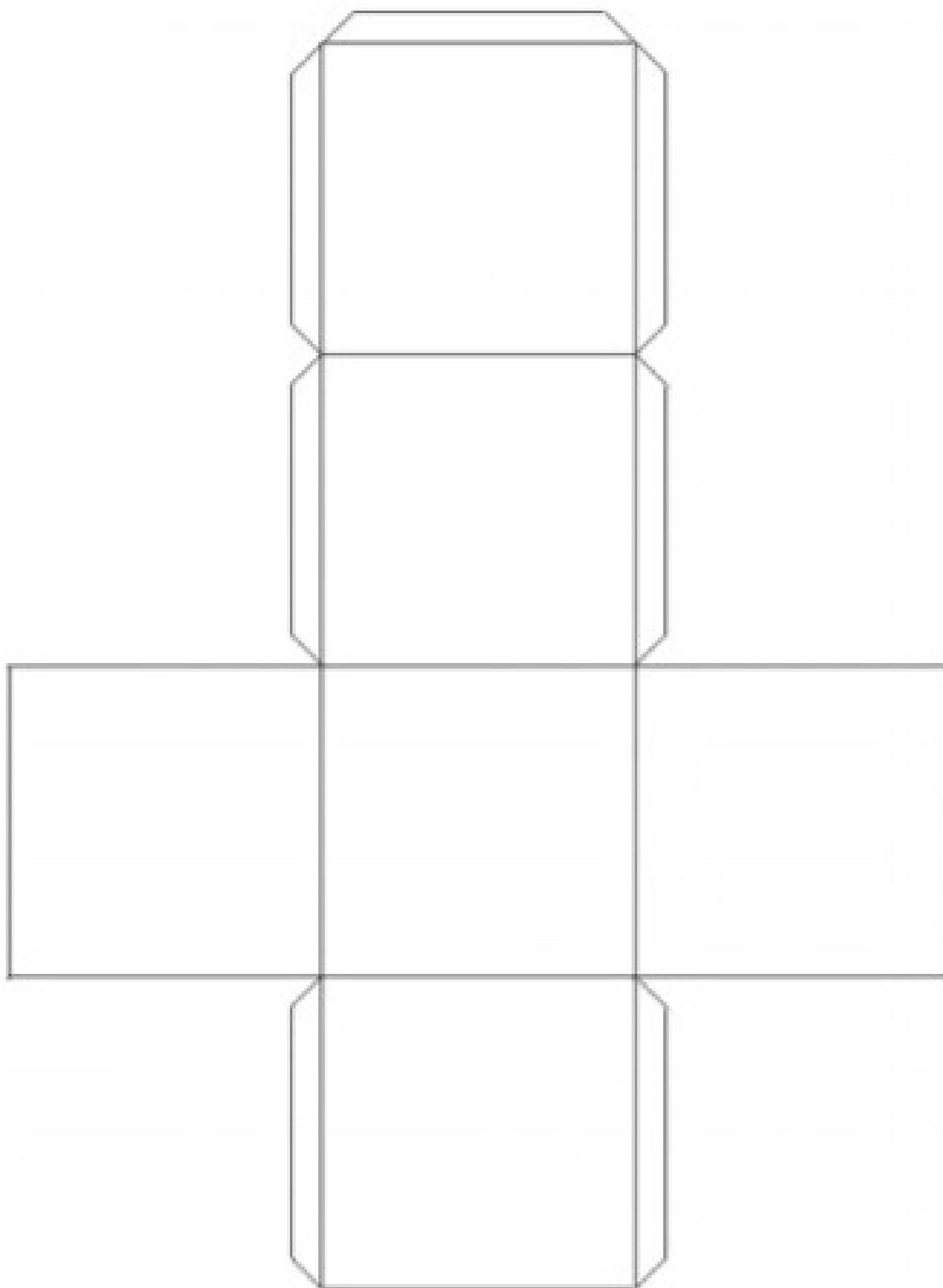
Figura 5.4: Pirâmide de base octogonal



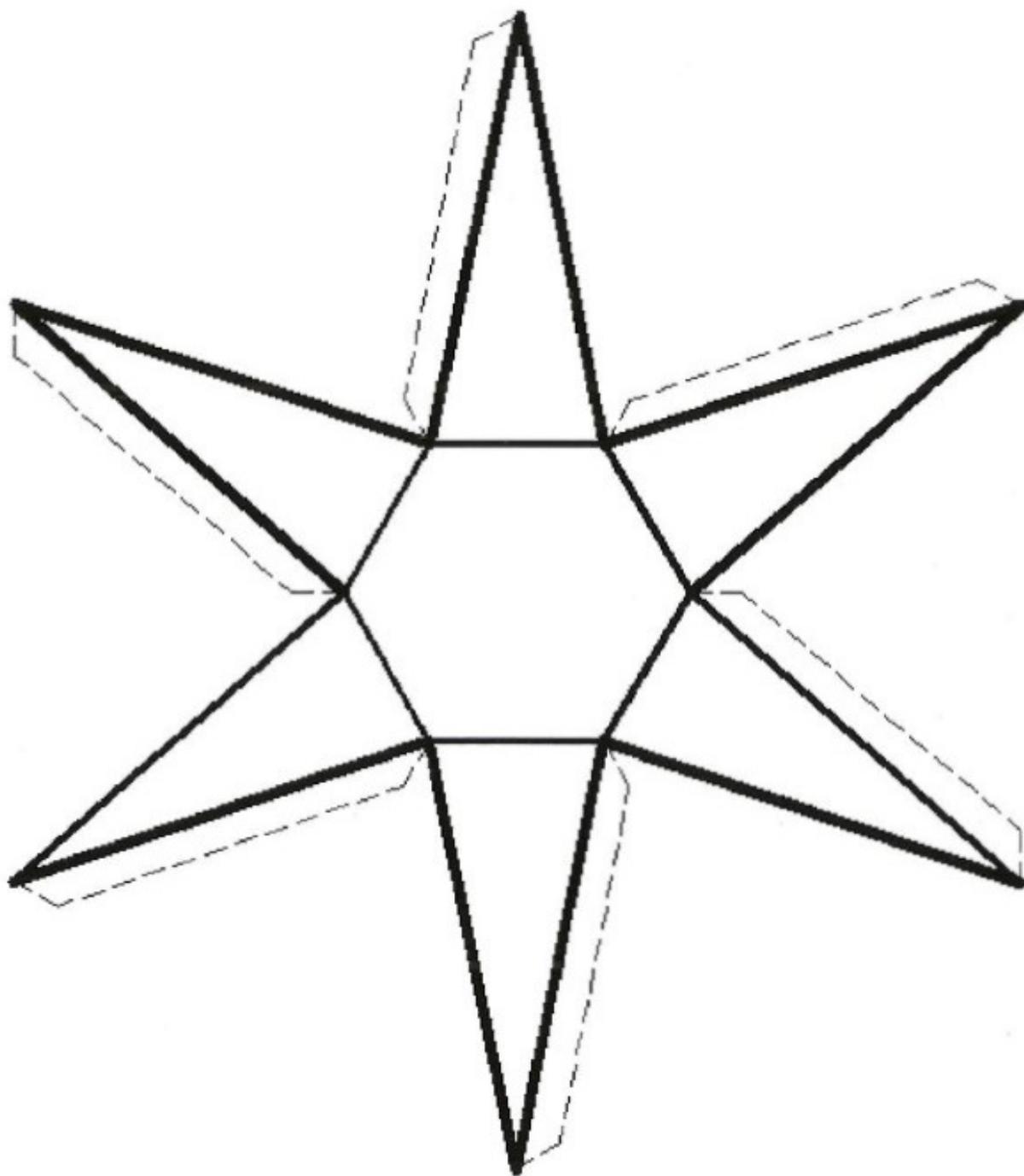
Fonte: Autor
Figura 5.5: Icosaedro



Fonte: Autor
Figura 5.6: Dodecaedro

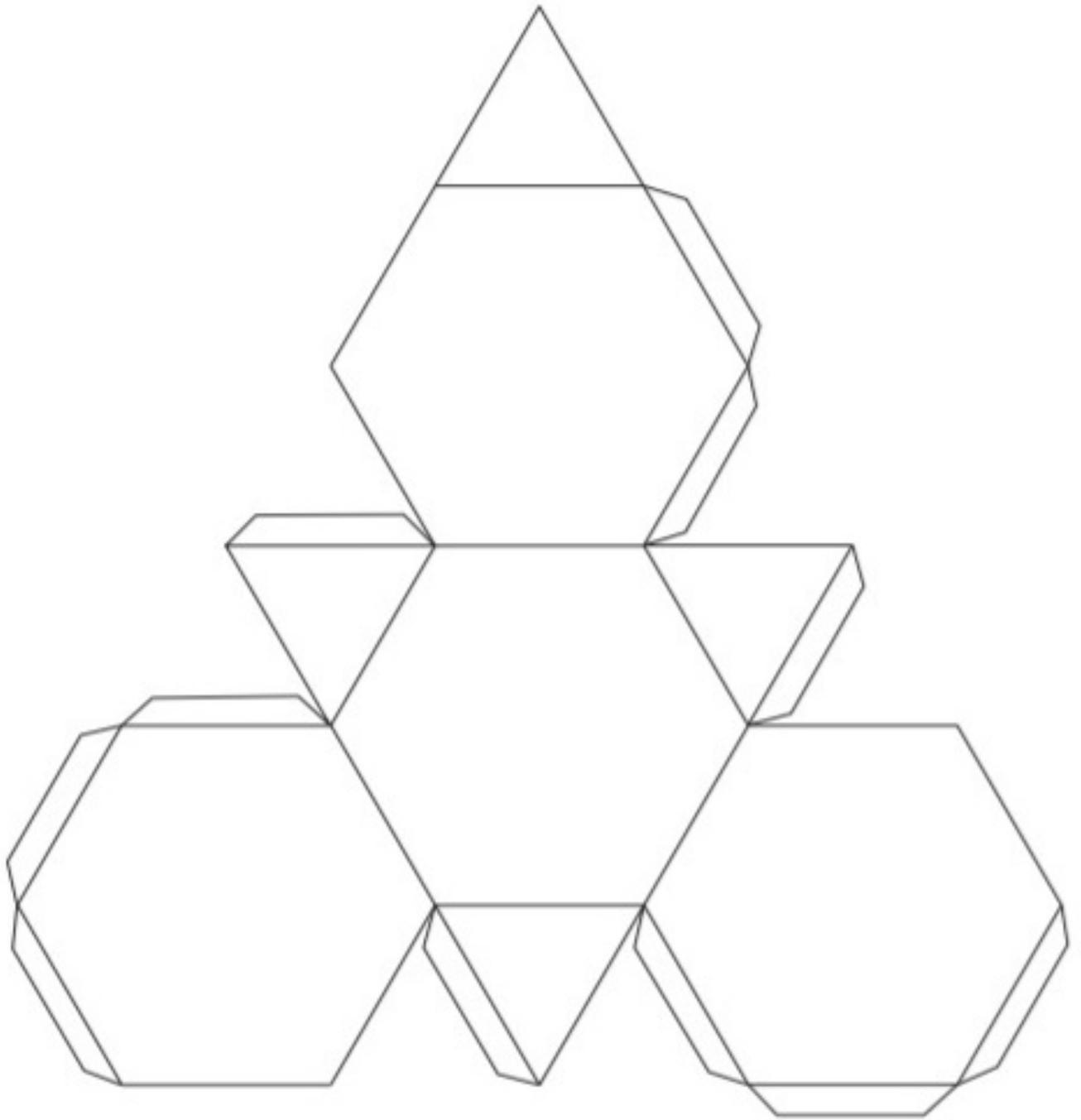


Fonte: Autor
Figura 5.7: Cubo



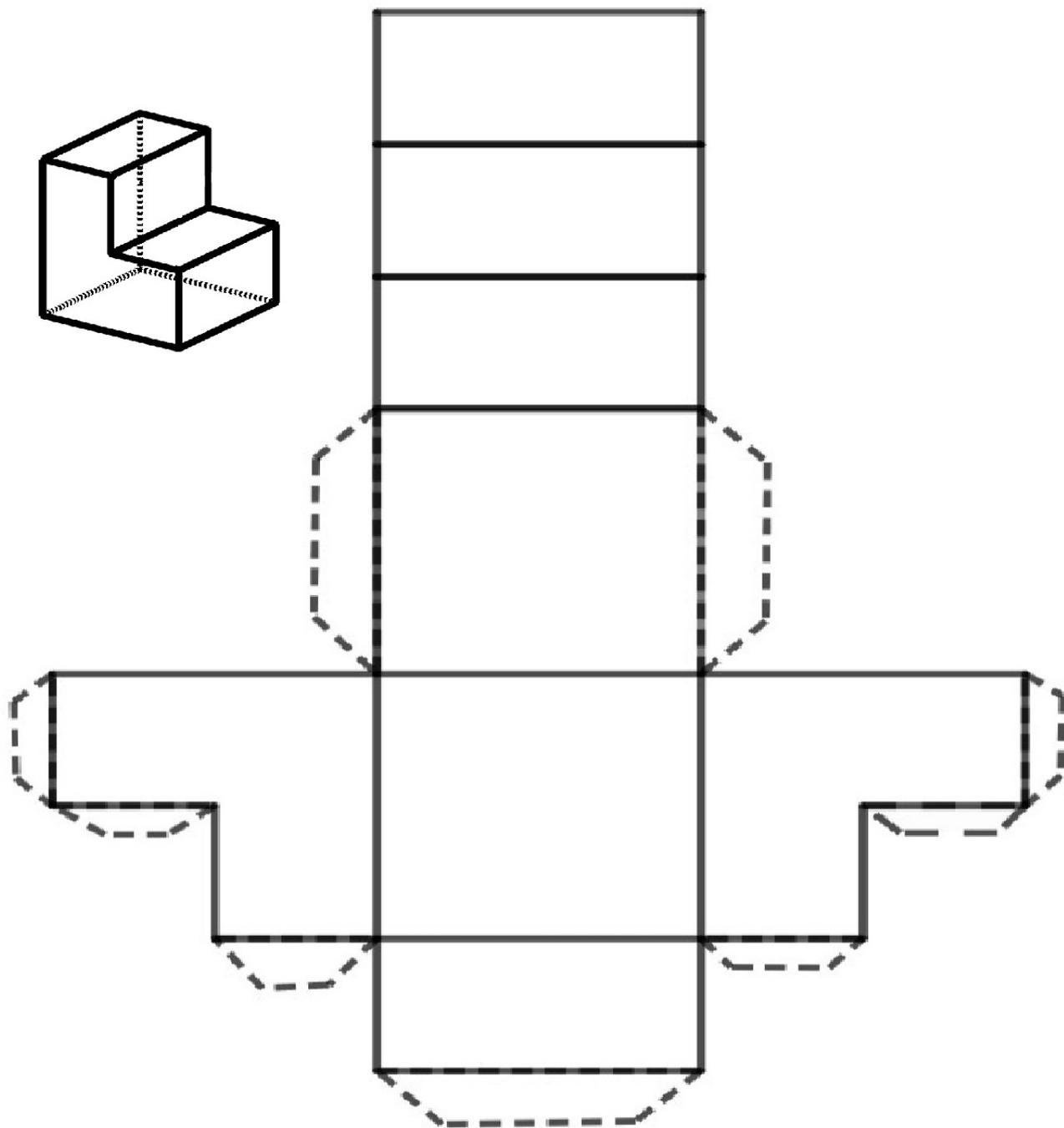
Fonte: Autor

Figura 5.8: Pirâmide de base hexagonal



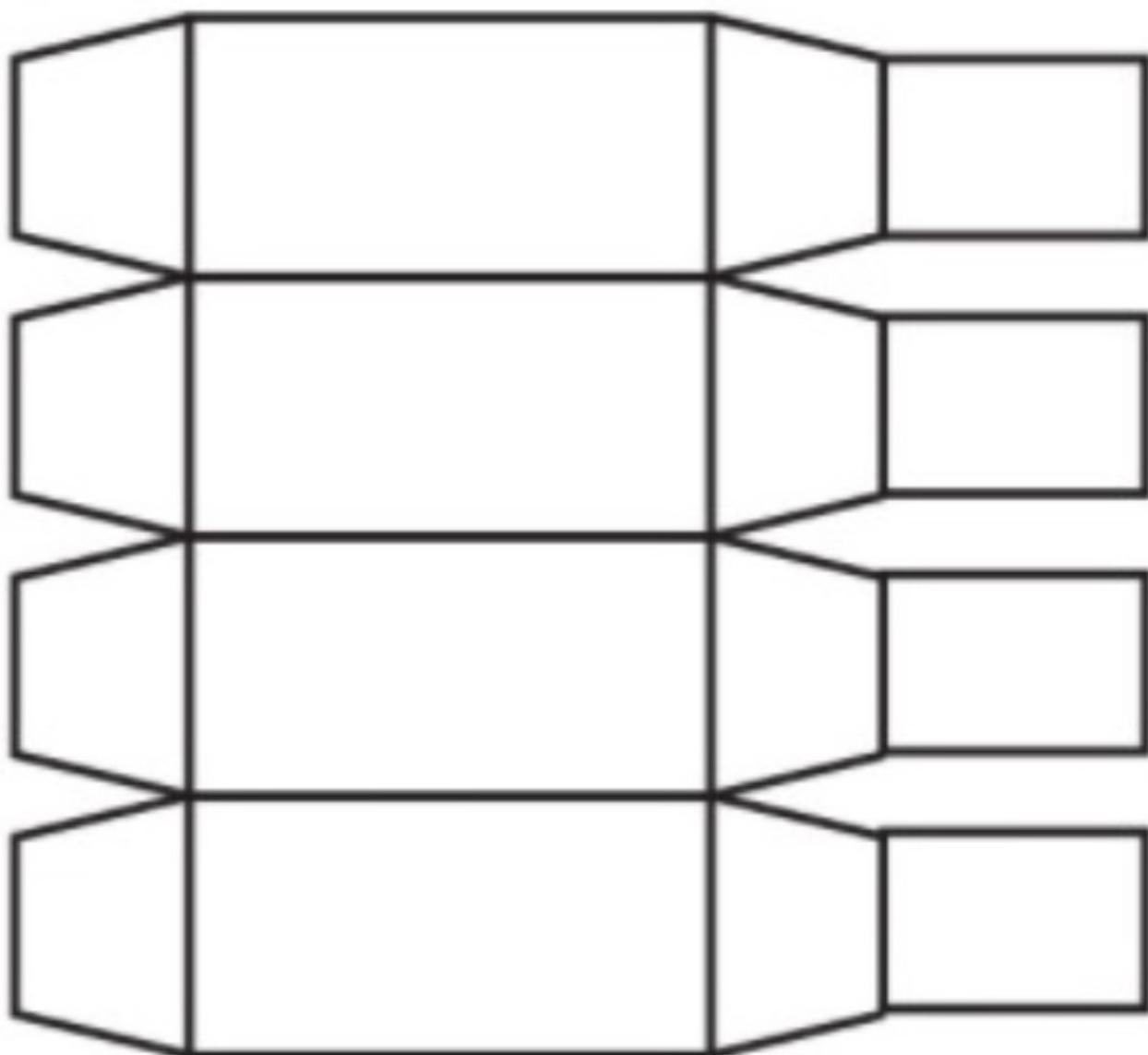
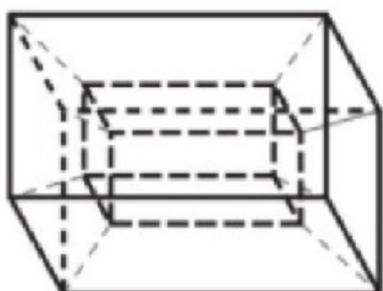
Fonte: Autor

Figura 5.9: Tetraedro truncado

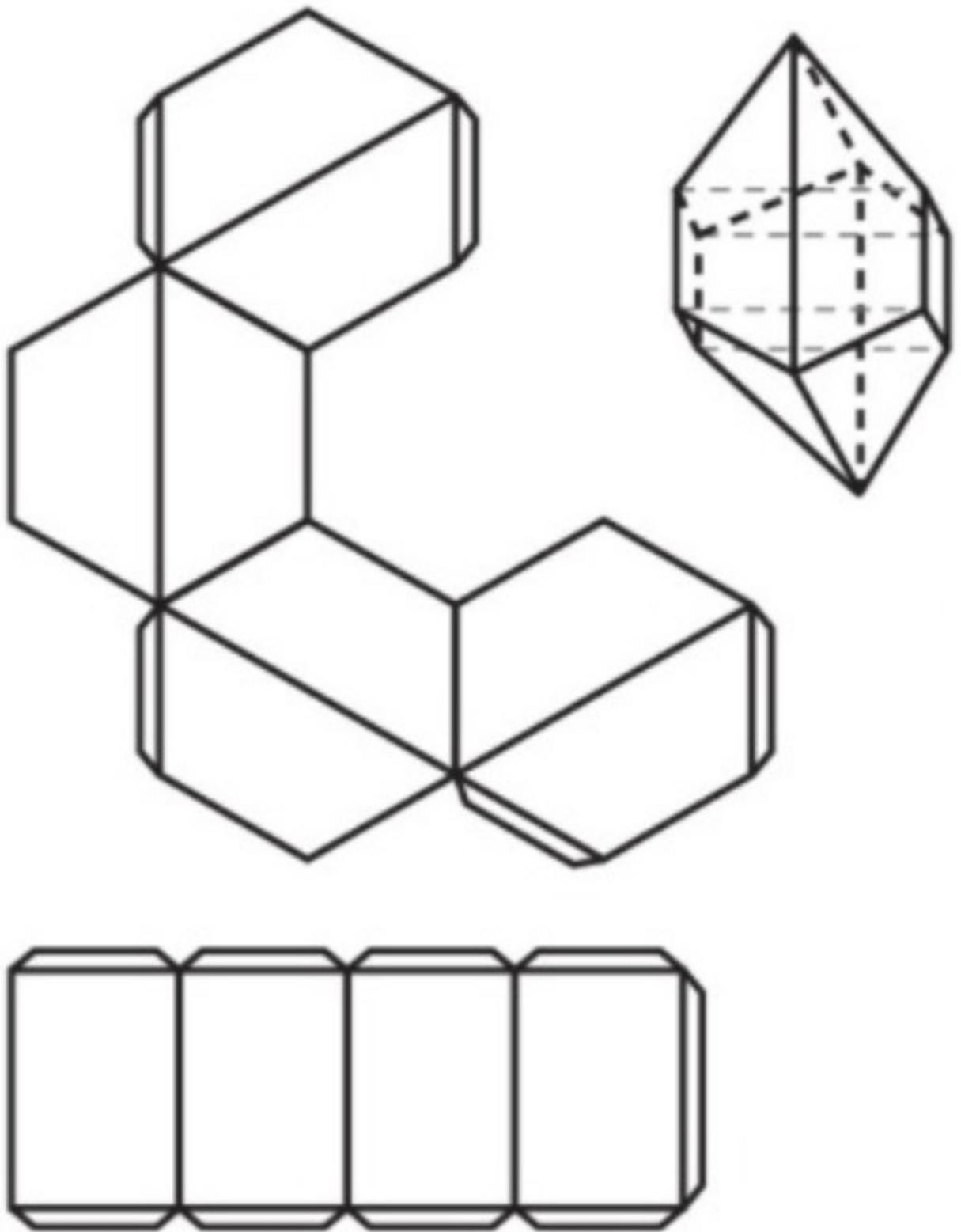


Fonte: Autor

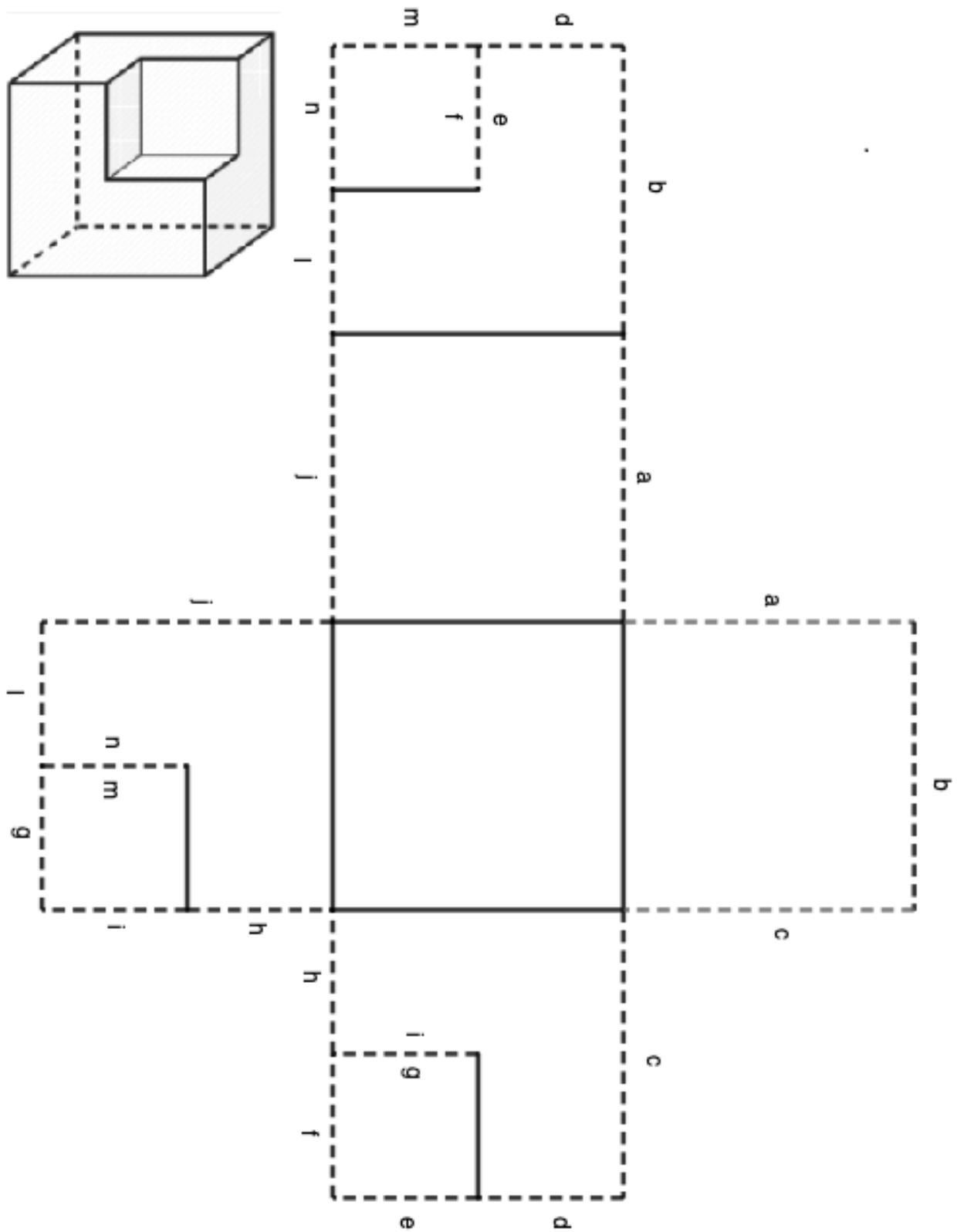
Figura 5.10: Poliedro não convexo em L



Fonte: Matemática Multimídia
Figura 5.11: Poliedro com um furo - Tipo 1



Fonte: Matemática Multmídia
Figura 5.12: Poliedro com um furo - Tipo 2



Fonte: Autor

Figura 5.13: Poliedro não convexo

Conclusão

Apesar de estarmos tratando, em alguns momentos, de questões topológicas, que caberiam conceitos mais elaborados de topologia e análise para uma melhor conceituação, seguimos a linha de tentar explicar de forma mais simples e acessível deixando de lado o rigor matemático e visando apenas o entendimento da noção em questão.

Mesmo não tendo aplicado estes resultados numa sequência didática, pois estávamos vivenciando um momento de pandemia onde as aulas eram ministradas de forma remota, deixamos como sugestão o roteiro de uma sequência didática que ao nosso ver pode ajudar os alunos na compreensão dos conceitos estudados nesse trabalho. Acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis permite uma melhor visualização tridimensional dos elementos da geometria espacial, em particular no entendimento dos elementos que compõem os poliedros.

Referências Bibliográficas

- [1] BIOGRAPHY. *Leonhard Euler*, 2 abr. 2014, <https://www.biography.com/scientist/leonhard-euler>. Acessado em 17 jul. 2020.
- [2] BOYER, Carl B. *Leonhard Euler*. Encyclopedia Britannica, 11 abr. 2020, <https://www.britannica.com/biography/Leonhard-Euler>. Acessado em 17 jul. 2020.
- [3] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*, Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [4] MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Experimento ortar cubo*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) – UNICAMP.
- [5] FILHO, Zoroastro Azambuja. *Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática - vol. 3. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/3/5.htm>. Acesso em 20 out.2020.
- [6] GONTIJO, Helen Kássia C. *Teorema de Euler em Sala de Aula*, 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Ainda sobre o Teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática - vol. 5. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/5/6.htm>. Acesso em 20 out. 2020.
- [8] MIALICH, Flávia Renata. *Poliedros e Teorema de Euler*, 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2013.
- [9] PARREIRA, José Roberto P. *Poliedros e o Teorema de Euler*, 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- [10] SIQUEIRA, Rogério Monteiro de. *História, tradição e pesquisa sob disputa: o caso dos poliedros na geometria*. Revista Brasileira de História da Matemática, [S. l.],

v. 9, n. 17, p. 53-63, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2009v9n1753-63. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/169>. Acesso em: 10 nov. 2020.