UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Um estudo do seno: da história até o som

Jullymary Alves da Costa Borges

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Jullymary Alves da Costa Borges

Um estudo do seno: da história até o som

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Janete Crema Simal

USP – São Carlos
Junho de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Borges, Jullymary Alves da Costa
B732e Um estudo do seno: da história até o som / Jullymary Alves da Costa Borges; orientadora Janete Crema Simal. -- São Carlos, 2021.
140 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Aplicações das funções seno. 2. Correspondência entre senóides e sons. I. Simal, Janete Crema, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Jullymary Alves da Costa Borges

A study of the sine: from history to sound

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Janete Crema Simal

USP – São Carlos
June 2021

Este trabalho é dedicado aos meus pais por toda dedicação e amor, à minha filha Ana Luiza que me motiva a enfrentar os desafios e ao meu marido Anderson por todo apoio.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por toda a força e pela oportunidade de realizar o Mestrado.

Agradeço especialmente à minha orientadora Janete Crema Simal por toda atenção, paciência, colaboração durante a elaboração desse trabalho e aprendizado que suas considerações me proporcionaram.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) - USP São Carlos, pela dedicação e colaboração. Também quero agradecer a todos os meus colegas de curso por todo apoio e incentivo durante a jornada. E a CAPES pelo incentivo através do auxílio financeiro.

“A educação é a arma mais poderosa
para mudar o mundo.”
(Nelson Mandela)

RESUMO

BORGES, J. A. C. **Um estudo do seno: da história até o som**. 2021. 140 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Neste trabalho compilamos fatos históricos, teóricos e aplicados relativos ao conceito do seno, tanto do ponto de vista geométrico como analítico. Além disso elaboramos uma sequência didática, com uso do software Geogebra, associando as funções senóides com os sons que elas descrevem.

Palavras-chave: Aspectos históricos das funções seno e cosseno; Tábua de cordas de Ptolomeu; Aplicações das funções seno e suas variações; Correspondência entre senóides e sons.

ABSTRACT

BORGES, J. A. C. **A study of the sine: from history to sound**. 2021. 140 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In this work we compile some aspects of the history, theory and applications of the concept of sine, either from the geometric point of view or the analitical one. Besides we elaborate a didactic sequence using Geogebra and associate sinusoid functions with the sounds they represent.

Keywords: Historical facts of sine and cosine; Ptolomy's table of chords; Applications of sine function and its variations; Relationship between sinusoid and sounds.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A trigonometria explorada no Ensino Fundamental pressupõe certa dose de dificuldade para os alunos, por explorar conceitos geométricos com os quais não estão familiarizados. Quando, no Ensino Médio transformamos conceitos trigonométricos em funções, estas dificuldades aumentam, dado que precisamos associar conhecimentos da geometria com funções reais e, valores que antes eram calculados sobre ângulos notáveis passam a ser calculados sobre quaisquer números reais.

Se antes os conceitos de seno e cosseno eram tratados apenas do ponto de vista geométrico. Após o desenvolvimento do Cálculo, passaram a ser tratados como funções, mostrando-se fundamentais na Física, Astronomia, Engenharia, Medicina, etc. A importância da função seno e suas variações, é incontestável no mundo real, já que se prestam a descrever inúmeros fenômenos periódicos e oscilatórios. Por isso é tão importante o domínio de tal conhecimento.

Por acreditar que o primeiro passo para que um professor torne um conteúdo atraente para seus alunos, seja o conhecimento pleno do mesmo, de modo geral compilamos neste trabalho:

- Tópicos históricos relatando a criação do seno (e consequentemente do cosseno) e exploramos geometricamente as propriedades que levaram à criação da Tábua de cordas de Ptolomeu.
- O estudo teórico das funções senóides.
- Algumas de suas contextualizações em problemas concretos contemporâneos, em especial sua relação com o som (a representação matemática de ondas sonoras elementares).

Além disso, elaboramos uma sequência didática contextualizando as senóides com sons e nela utilizamos o *software* Geogebra.

Mais especificamente, descrevemos abaixo o conteúdo de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos um breve histórico do seno e cosseno. Demonstramos as propriedades do seno da soma, da diferença e do arco duplo, e vimos como Ptolomeu elaborou sua Tábua de Cordas, através destas propriedades.

No Capítulo 3, saímos do contexto da geometria para definirmos seno e cosseno como funções e exploramos outras propriedades, como as de prostaférese. Estudamos ainda as funções senóides, isto é, $y = a + b\,\mathrm{sen}(cx + d)$.

No Capítulo 4, recordamos alguns conceitos do Cálculo e vimos como eles se aplicam às funções $y = \mathrm{sen}\,x$ e $y = \cos x$. Este capítulo tem o objetivo de subsidiar os estudos dos modelos físicos que terão por soluções as senóides.

No Capítulo 5, estudamos alguns modelos dados por equações diferenciais que descrevem fenômenos físicos periódicos e têm por soluções funções senóides, como o Sistema Massa Mola e o Pêndulo Simples.

Explanamos algumas características das ondas sonoras e apresentamos um breve histórico sobre os primórdios do estudo do som, realizados por Pitágoras. Estudamos também a equação da corda vibrante e vimos matematicamente o que Pitágoras havia percebido há mais de 2500 anos, que a frequência de oscilação de uma corda é dobrada quando diminuímos seu tamanho pela metade e assim o som produzido pela oscilação da corda é o mesmo porém mais agudo. Mais especificamente e em linguagem musical, uma oitava acima.

E no Capítulo 6, apresentamos uma sequência didática com o estudo das senóides $y = a + b\,\mathrm{sen}\,cx$, onde fazemos uso do Geogebra para verificar como a variação dos parâmetros a, b, e c, alteram o comportamento desta função e do som por ela descrito. Para isso utilizamos o *software* “O som produzido pela função seno”.

CAPÍTULO 2

UM BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Os conceitos relacionados à trigonometria se desenvolveram em diferentes povos, como por exemplo, a razão entre lados de triângulos semelhantes já era usada pelos egípcios e babilônios. Nos egípcios, a preocupação de manter constante a inclinação das faces nas pirâmides levaram-nos a introduzir um conceito equivalente ao da cotangente de um ângulo. Mas é apenas com os gregos que encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) e os comprimentos das cordas que os subentendem. Esse conhecimento foi utilizado pelo grego Aristarco de Samos para calcular as distâncias da Terra relativas ao Sol e à Lua.

Os conhecimentos obtidos pelos gregos sobre as relações entre retas e círculos foram muito aplicados na resolução de problemas relacionados à astronomia, mas ainda não era parecido com o conceito atual de trigonometria. O astrônomo Hiparco de Niceia, durante a segunda metade do segundo século a.C., compilou um tratado em 12 livros que se ocupam da construção de uma tábua de cordas, relacionando valores correspondentes de cordas de um círculo árbitrário para vários ângulos. Esse obra é considerada a primeira tabela trigonométrica, fazendo com que Hiparco ganhasse o direito de ser chamado "pai da trigonometria".

Segundo Eves (2011, p. 204), outra obra grega importante para a trigonometria foi o livro de Claúdio Ptolomeu, escrito por volta de 150 D.C, *Syntaxis mathematica*, ficou conhecido como o *"Almagesto"*. A obra é composta de 13 livros. O livro I contém a tábua de cordas de arcos de $\frac{1}{2}^\circ$ a 180° para cada $\frac{1}{2}^\circ$, e tem como base os escritos de Hiparco. O livro traz também uma pequena explanação de como a tábua de cordas foi obtida a partir da proposição geométrica conhecida como Teorema de Ptolomeu: *Num quadrilátero cíclico, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos de dois pares de lados opostos.*

Uma das aplicações importantes deste resultado são as fórmulas de seno da soma e da diferença de ângulos, que veremos nesse capítulo. Estas fórmulas em particular, tiveram uma importância fenomenal para a obtenção das fórmulas de prostaférese que permitem a conversão de produtos em somas, muito utilizado em estudos de astronomia, muitos séculos depois. A obra, Almagesto de Ptolomeu, foi instrumento indispensável para os astrônomos por mais de mil anos.

A divisão da circunferência em 360 graus já era usada na Grécia, mas não se sabe ao certo o que motivou esse tipo de divisão. Uma possível explicação é sua relação com a Astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze "signos" e 36 "decanatos" ou o ciclo das estações do ano de aproximadamente 360 dias.

Na trigonometria, os hindus introduziram um equivalente à função seno como forma de substituir as tabelas de cordas gregas, e os valores dos senos dessas tabelas são bem próximos dos valores correspondentes em tabelas atuais.

De acordo com Eves (2011, p. 248), "o trabalho do século VI, *Pancã Siddhãntika*, do astrônomo Varãhamihira, contém um resumo da trigonometria hindu antiga e uma tábua de senos que pode ter sido oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu". Assim como os gregos, para os hindus a trigonometria era uma ferramenta na solução de problemas relacionados à Astronomia.

Já na trigonometria árabe, por um certo período, foram utilizados concomitantemente os sistemas de origens grega (tabelas de cordas) e indiana (função seno), mas a trigonometria árabe se rendeu finalmente à função seno indiana, e os árabes foram responsáveis por levar a nova formulação desse conceito à Europa.

A trigonometria, durante o primeiro milênio e meio de sua existência, era apenas um conceito auxiliar de Astronomia e Geografia. Somente no século XVII, foram descobertas aplicações da trigonometria na refração e em outros ramos da Física.

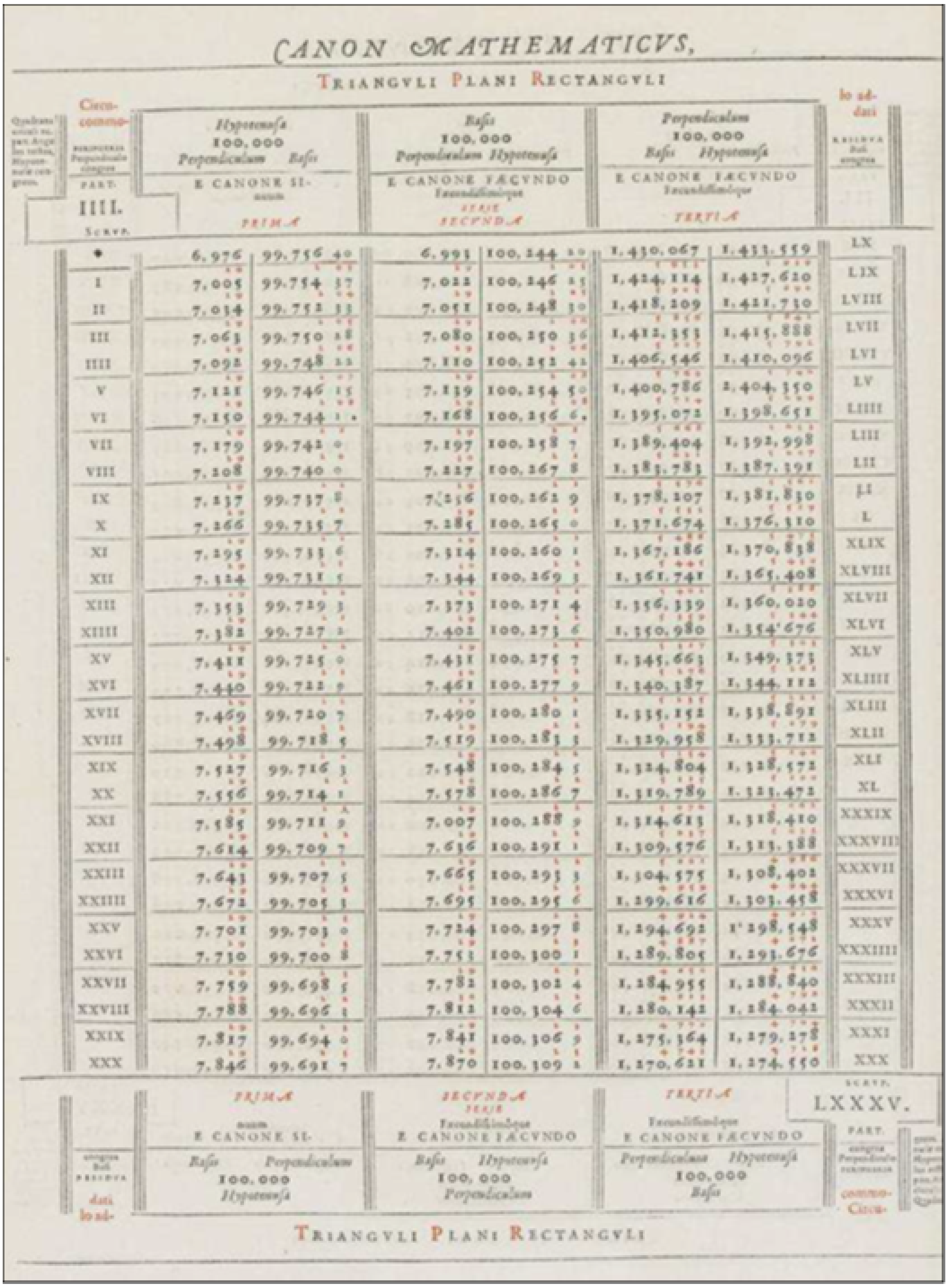
O astrônomo matemático, discípulo de Copérnico, Georg Joachim Rhaeticus (1514 – 1574), se dedicou à construção de tabelas trigonométricas com maior precisão. Foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. A primeira tabela que fornece as seis funções trigonométricas foi publicada por ele em 1551. As tabelas de Rhaeticus foram melhoradas por Bartholomaus Pitiscus (1561-1613) em 1593. O trabalho de Pitiscus foi o primeiro a usar o termo trigonometria.

No século XVI a trigonometria foi aperfeiçoada e sistematizada, e se obtiveram publicações de excelentes tábuas.

Nesse período e começo do século dezessete ocorreu um maior interesse por trigonometria. Viète aplicou a trigonometria a problemas algébricos e aritméticos ampliando assim o alcance do assunto. No livro *Canon mathematicus seu ad triangula* traz grandes contribuições à trigonometria. Esse trabalho pode até ser considerado o primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver métodos para a resolução de triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas.

Abaixo vemos uma página da tabela elaborada por Viète, que se baseou nas publicações de Rhaeticus:

Figura 1 – Uma página de Canon Mathematicus (1579) de Viète.



CANON MATHEMATICVS,

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

PART. IIII. SCRVP.	Hypotenusa 100,000 Perpendiculum	Basis	Basis 100,000 Perpendiculum	Hypotenusa	Perpendiculum 100,000 Basis	Hypotenusa	
	E CANONE SINUUM PRIMA		E CANONE FÆCUNDO Fæcundissimoque SERIE SECUNDA		E CANONE FÆCUNDO Fæcundissimoque TERTIA		
•	6,976	99.756 40	6,993	100,244 10	1,430,067	1,433,559	LX
I	7.005	99.754 37	7.022	100,246 15	1,424,114	1,427,620	LIX
II	7.034	99.752 33	7.051	100,248 30	1,418,209	1,421,730	LVIII
III	7.063	99.750 18	7.080	100,250 36	1,412,353	1,415,888	LVII
IIII	7.092	99.748 22	7.110	100,252 41	1,406,546	1,410,096	LVI
V	7.121	99.746 15	7.139	100,254 50	1,400,786	2,404,350	LV
VI	7.150	99.744 1.	7.168	100,256 6,	1,395,072	1,398,651	LIIII
VII	7.179	99.742 0	7.197	100,258 7	1,389,404	1,392,998	LIII
VIII	7.208	99.740 0	7.227	100,267 8	1,383,783	1,387,391	LII
IX	7.237	99.737 8	7.256	100,262 9	1,378,107	1,381,830	LI
X	7.266	99.735 7	7.285	100,265 0	1,371,674	1,376,310	L
XI	7.295	99.733 6	7.314	100,260 1	1,367,186	1,370,838	XLIX
XII	7.324	99.731 5	7.344	100,269 3	1,361,741	1,365,408	XLVIII
XIII	7.353	99.729 3	7.373	100,271 4	1,356,339	1,360,020	XLVII
XIIII	7.382	99.727 2	7.402	100,273 6	1,350,980	1,354'676	XLVI
XV	7.411	99.725 0	7.431	100,275 7	1,345,663	1,349,373	XLV
XVI	7.440	99.722 9	7.461	100,277 9	1,340,387	1,344,112	XLIIII
XVII	7.469	99.720 7	7.490	100,280 1	1,335,152	1,338,891	XLIII
XVIII	7.498	99.718 5	7.519	100,283 3	1,329,958	1,333,712	XLII
XIX	7.527	99.716 3	7.548	100,284 5	1,324,804	1,328,572	XLI
XX	7.556	99.714 1	7.578	100,286 7	1,319,789	1,323,472	XL
XXI	7.585	99.711 9	7.007	100,288 9	1,314,613	1,318,410	XXXIX
XXII	7.614	99.709 7	7.636	100,291 1	1,309,576	1,313,388	XXXVIII
XXIII	7.643	99.707 5	7.665	100,293 3	1,304,575	1,308,402	XXXVII
XXIIII	7.672	99.705 3	7.695	100,295 6	1,299,616	1,303,458	XXXVI
XXV	7.701	99.703 0	7.724	100,297 8	1,294,692	1'298,548	XXXV
XXVI	7.730	99.700 8	7.753	100,300 1	1,289,805	1,293,676	XXXIIII
XXVII	7.759	99.698 5	7.782	100,302 4	1,284,955	1,288,840	XXXIII
XXVIII	7.788	99.696 3	7.811	100,304 6	1,280,142	1,284,042	XXXII
XXIX	7.817	99.694 0	7.841	100,306 9	1,275,364	1,279,278	XXXI
XXX	7.846	99.691 7	7.870	100,309 1	1,270,621	1,274,550	XXX
	PRIMA E CANONE SINUUM		SECUNDA SERIE Fæcundissimoque E CANONE FÆCUNDO		TERTIA Fæcundissimoque E CANONE FÆCUNDO		SCRVP. LXXXV. PART.
	Basis 100,000 Hypotenusa	Perpendiculum	Basis 100,000 Perpendiculum	Hypotenusa	Perpendiculum 100,000 Basis	Hypotenusa	

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

A página fornece (da esquerda para direita): o seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante para ângulos de 4° a 4°30′. E de baixo para cima (da esquerda para direita): cosseno, seno, cotangente, cossecante, tangente e secante de 85°30′ para 86°.
Fonte: (ROEGEL, 2010, p. 7)

Como dissemos antes, em particular as fórmulas de prostaférese foram usadas para a conversão de produtos (de grandes números) em somas, por exemplo, na fórmula: $2 \operatorname{sen} a \cos b =$

$\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)$, podemos substituir o produto $2\,\text{sen}\,a\cos b$ pela soma $\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)$.

Fazendo o uso de uma tabela de senos e cossenos com valores atualizados que foi transcrita parcialmente, iremos exemplificar o uso de uma das fórmulas de prostaférese.

Utilizando essa fórmula podemos calcular o produto de dois números quaisquer como a soma de outros dois números.

Tabela 1 – Razões trigonométricas

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
0	0	1	0
1	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,052336	0,99863	0,052408
⋮	⋮	⋮	⋮
16	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,325568	0,945529	0,344328
⋮	⋮	⋮	⋮
60	0,866025	0,5	1,732051
61	0,87462	0,48481	1,804048
⋮	⋮	⋮	⋮
75	0,965926	0,258819	3,732051
76	0,970296	0,241922	4,010781
77	0,97437	0,224951	4,331476
⋮	⋮	⋮	⋮
86	0,997564	0,069756	14,30067
87	0,99863	0,052336	19,08114

Fonte: http://www.ufrgs.br/biomec/materiais/Tabela%20Trigonometrica.pdf

Exemplo: Determinar o produto de 551,27 por 22,49.

Primeiramente dividimos ambos os números por potências de 10 para que seus valores fiquem entre 0 e 1. Então encontramos através da tabela, valores aproximados para:

$$2\,\text{sen}\,a = 0,55127 \Longrightarrow \text{sen}\,a = 0,275635 \Longrightarrow a = 16^\circ$$
$$\cos b = 0,224951 \Longrightarrow b = 77^\circ$$

Fazendo uso da tabela novamente encontramos os valores de $\text{sen}(a+b)$ e $\text{sen}(a-b)$ e através da fórmula de prostaférese obtemos:

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,a\cos b &= \text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b) \\ 0,55127\cdot 0,224951 &= \text{sen}(16^\circ+77^\circ)+\text{sen}(16^\circ-77^\circ) = \text{sen}\,93^\circ+\text{sen}(-61^\circ) \end{aligned}$$

Como $\text{sen}(\pi-x)=\text{sen}\,x$ e $\text{sen}(-x)=-\text{sen}\ x$ temos que:

$$0,55127\cdot 0,224951 = \text{sen}\,87^\circ - \text{sen}\,61^\circ = 0,99863-0,87462 = 0,12401$$

Portanto,

$$551,27\cdot 22,49 = 0,55127\cdot 10^3\times 0,2249\cdot 10^2 = 0,12401\cdot 10^5 = 12401.$$

Assim o produto entre dois números se torna apenas um problema de adição.

Além da fórmula citada no exemplo, há outras três fórmulas que relacionam produto com adição e diferença entre dois números:

$$2\,\text{sen}\,b\cos a = \text{sen}(a+b)-\text{sen}(a-b)$$

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$$

$$2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$$

Essas identidades foram amplamente utilizadas por matemáticos e astrônomos no final do século XVII como uma forma de facilitar o cálculo de produtos de números muito grandes através da conversão de produtos em somas ou diferenças.

Como foram muito utilizadas pelo alemão Johanes Werner (1468-1528), como forma de simplificar os cálculos em seus estudos sobre Astronomia, as fórmulas ficaram conhecidas como fórmulas de Werner. Já o método ficou conhecido como prostaférese, oriundo de uma palavra grega que significa “adição e subtração”.

Podemos destacar também a obra *Trigonometrie* (1637) do matemático inglês Oughtred, que tem importância histórica por apresentar uma das primeiras tentativas de introduzir abreviações para os nomes das funções trigonométricas.

Outros matemáticos da época, como John Wallis (1616-1703) e Isaac Newton (1642-1727), aprofundaram o estudo de séries infinitas. Newton, por exemplo, expandiu o $\text{arcsen}\,x$ em séries de potências.

A trigonometria toma a sua forma atual quando, em 1748, Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viéte no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Uma vez transformadas em funções reais, mostraram-se fundamentais para a descrição de movimentos periódicos. Dentre eles destacamos o problema da corda vibrante (que veremos no Capítulo 5, Subseção 5.3.3).

De acordo com Medeiros e Andrade (1978, p. 163), em 1746 D'Alembert deduz a equação linear da corda vibrante. Vários outros matemáticos se ocuparam do estudo desta, como Euler, Lagrange, Bernoulli e Fourier.

Bernoulli encontrou uma solução para esta equação na forma de série infinita de senos. Tal solução gerou muitas controvérsias. Uma delas seria o fato de que se tal série fizesse sentido, então qualquer função poderia ser representada por ela, o que para Euler seria uma contradição pois implicaria que todas as funções são ímpares e periódicas. Lagrange, em seu trabalho de propagação do som, quase resolve a questão.

Cinquenta anos mais tarde, Fourier apresenta seu trabalho sobre condução de calor, onde aparecem soluções na forma de séries de funções trigonométricas, trabalho este que foi recusado por Lagrange.

Mas, confiando em sua intuição física, Fourier prossegue seus estudos, que no futuro se mostrariam corretos.

Na sua obra "La theorie analytique de la chaleur", de 1822, mostra que funções descontínuas e periódicas podem ser representadas por séries infinitas de senos e cossenos de arcos múltiplos.

O problema da convergência de tais séries só seria resolvido em 1829 por Dirichlet, que dá nome às condições para que uma função possa ser representada através de séries trigonométricas.

Pela importância no desenvolvimento desta teoria denominamos atualmente as séries trigonométricas de Séries de Fourier, bem como a técnica para obtenção das soluções no problema da corda vibrante, como no problema do calor, de Método de Fourier.

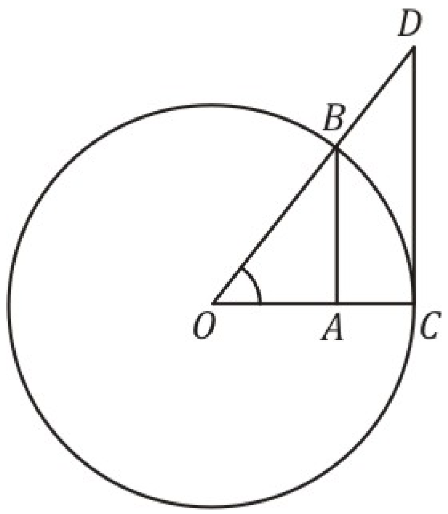
Com tais soluções, pôde-se comprovar matematicamente o que Pitágoras houvera descoberto 2500 anos atrás - que o som varia com o comprimento da corda e que, por exemplo, ao reduzir o comprimento de uma corda pela metade, mantendo-a com a mesma tensão, produz-se um som com o dobro da altura (frequência) do som da corda original, o que veremos na Seção 5.3 e na Subseção 5.3.3.

Por fim, uma curiosidade que se nos apresentou, foi com relação à origem do nome seno. Segundo Boyer (2010), vem do latim sinus que significa volta, curva, cavidade.

Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. Em particular, o uso de Fibonacci do termo sinus rectus arcus rapidamente encorajou o uso universal de seno.(BOYER, 2010)

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os outros nomes vem a partir de sua interpretação geométrica. Segundo Eves (2011, p. 266), ao se colocar o ângulo no centro de uma circunferência de raio unitário, dos resultados de semelhança de triângulos temos que os valores de $\tan\theta$ e $\sec\theta$ são dados pelos comprimentos do segmento tangente CD e segmento secante OD.

Figura 2 – Tangente



Fonte:
https://www.obaricentrodamente.com/2011/11/muitos-nomes-e-palavras-usadas-hoje-em.html

Assim como cosseno significa “seno do complemento do ângulo”, cotangente significa “tangente do complemento” e assim por diante.

2.1 Ptolomeu e sua tábua de cordas

O *Almagesto* foi a obra sobre Astronomia mais influente até o século XVI. Como mencionado anteriormente, o livro I da obra apresenta os métodos utilizados para calcular o comprimento das cordas e a construção da tábua de cordas.

Na construção de sua tabela de cordas, Ptolomeu utilizou-se de algumas proposições de Euclides e também de resultados já obtidos por Hiparco. Dentre os métodos utilizados por Ptolomeu para encontrar o comprimento das cordas, destacaremos a aplicação do Teorema de Ptolomeu que possibilitou obter as fórmulas trigonométricas atualmente conhecidas por seno da soma e diferença de ângulos.

Segundo as traduções do *Almagesto*, Ptolomeu fez uma relação entre cada arco com o comprimento de sua respectiva corda, dividindo a circunferência em 360 partes e seu diâmetro em 120 partes.

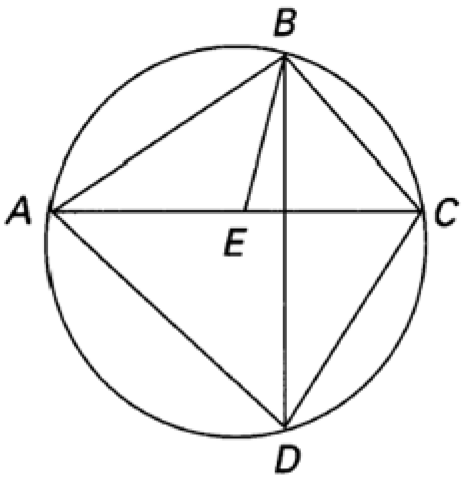
Destacaremos a seguir alguns resultados que foram utilizados por Ptolomeu na construção de sua tábua de cordas, e que já traziam conceitos de trigonometria. Os conceitos apresentados a seguir são baseados em Oliveira (2010).

2.1.1 Teorema de Ptolomeu

Teorema 1. Dado qualquer quadrilátero inscrito em uma circunferência, o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos.

Demonstração. Dado o quadrilátero ABCD inscrito, determine o ponto E na diagonal $\overline{AC}$ de forma que $A\hat{B}E = D\hat{B}C$.

Figura 3 – Teorema de Ptolomeu



Fonte: (OLIVEIRA, 2010, p.31)

Dessa forma, os triângulos ABE e DBC são semelhantes pelo caso Ângulo - Ângulo (AA) pois:
$A\hat{B}E = D\hat{B}C$ (por construção)
$B\hat{A}E = B\hat{D}C$ (subtendem o mesmo arco BC)
Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \tag{2.1}$$

Os triângulos ABD e EBC são semelhantes pelo caso Ângulo - Ângulo (AA), pois:
$A\hat{B}D = E\hat{B}C$ (por construção)
$A\hat{D}B = B\hat{C}E$ (subtendem o mesmo arco AB)
Então:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} \tag{2.2}$$

Somando-se 2.1 e 2.2 obtemos:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{CE} \cdot \overline{BD}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot (\overline{AE} + \overline{CE}) \text{ mas } \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$$

$$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}}$$

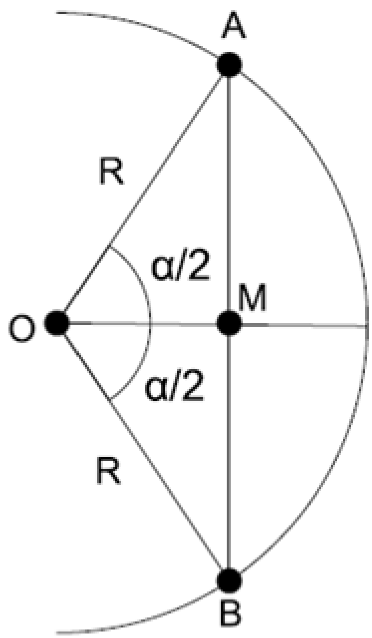
□

2.1.2 Relacionando cordas e seno

Para facilitar o entendimento da trigonometria de Ptolomeu iremos relacionar corda de um determinado ângulo central com o seno deste ângulo.

Dada uma circunferência de centro O e raio R, sejam A e B pontos sobre a circunferência. Assim $\overline{AB}$ é o comprimento da corda do ângulo central $\alpha = A\hat{O}B$. Seja M o ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Figura 4 – Relacionando corda e seno



Fonte: (OLIVEIRA, 2010, p.20)

Denotando-se por $c(\alpha)$ o comprimento da corda correspondente ao ângulo central α. Em linguagem atual teríamos:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{c}(\alpha)}{R}$$

$$\boxed{\mathrm{c}(\alpha) = 2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

2.1.3 Relacionando ângulo central e ângulo inscrito de uma circunferência

Vamos demonstrar a proposição conhecida como Teorema do ângulo inscrito.

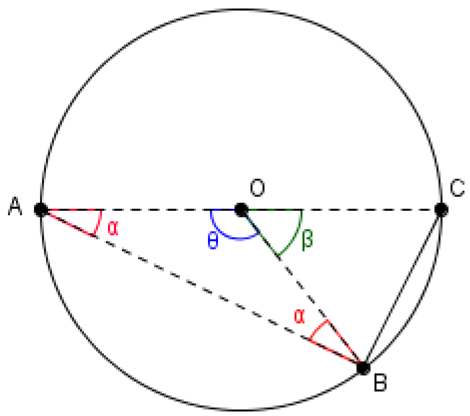
Proposição 1. Sejam A, B e C pontos distintos sobre uma circunferência de centro O.

Seja a corda $\overline{BC}$ e os correspondentes ângulos inscrito e central dados por $\alpha = C\hat{A}B$ e $\beta = C\hat{O}B$.

Então $\beta = 2\alpha$, isto é, o ângulo central que determina a corda BC é duas vezes o ângulo inscrito que determina a mesma corda.

Caso I: O centro O pertence à corda AC (o caso, o centro O pertence à corda AB é inteiramente análogo a este).

Figura 5 – Caso I: ângulo inscrito



Fonte: próprio autor

Neste caso observemos que o triângulo AOB é isósceles e portanto $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha$.

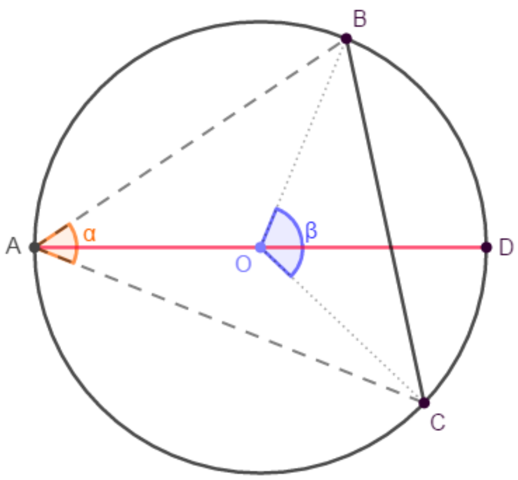
Logo se $\theta = A\hat{O}B$ então $\theta + 2\alpha = 180°$.

Por outro lado $\theta + \beta = 180°$, portanto $\beta = 2\alpha$.

Caso II: O centro O não pertence às cordas AB ou AC, mas O pertence ao setor determinado por $B\hat{A}C$.

Seja D ponto da circunferência de forma que $\overline{AD}$ seja diâmetro da circunferência.

Figura 6 – Caso II: ângulo inscrito



Fonte: próprio autor

Os pontos A, B e D estão nas condições do caso I e portanto os ângulos $B\hat{O}D = 2B\hat{A}D \quad (1)$.

Mas A, D e C também estão nas condições do caso I. Portanto $D\hat{O}C = 2D\hat{A}C \quad (2)$.

Mas

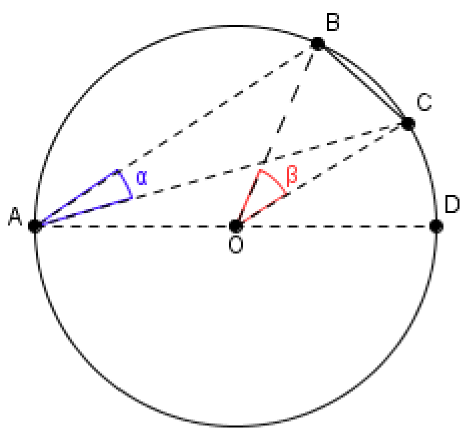
$$\alpha = B\hat{A}D + D\hat{A}C$$

$$\beta = B\hat{O}D + D\hat{O}C$$

$\therefore\ \beta = 2\alpha$, como queríamos.

Caso III: O centro O não pertence às cordas AB ou AC e nem ao setor determinado por $B\hat{A}C$.

Figura 7 – Caso III: ângulo inscrito



Fonte: próprio autor

Com as notações do caso II, observemos que valem (1) e (2) e que:

$$\alpha = B\hat{A}D - D\hat{A}C$$

$$\beta = B\hat{O}D - D\hat{O}C$$

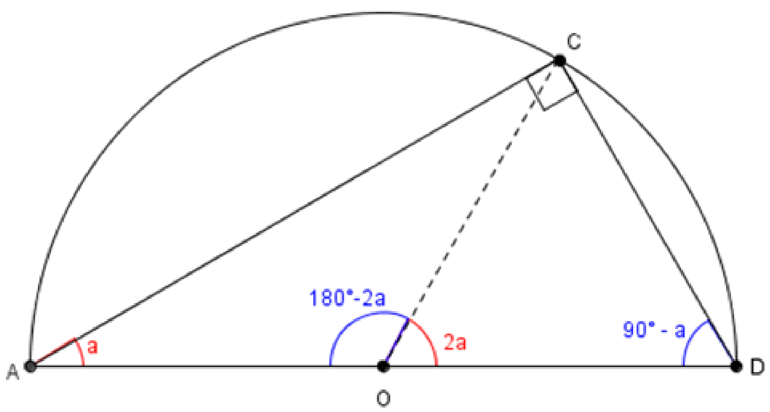
$\therefore \quad \beta = 2\alpha.$

Para obtermos as relações entre seno e cosseno da soma ou da diferença de ângulos, precisaremos da relação entre cordas e os ângulos que as determinam.

Para não causar confusão, usaremos notações distintas para designar cordas relacionadas aos ângulos central e inscrito.

Denotaremos por $\mathrm{c}(b)$ comprimento da corda correspondente a um ângulo central b e por $crd(b)$ comprimento da corda correspondente a um ângulo inscrito b.

Observação 1. Observe o diagrama abaixo.



Fonte: próprio autor

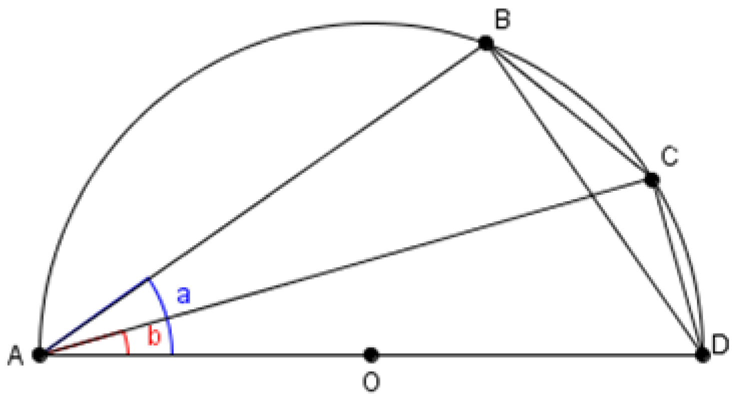
Então de acordo com a notação acima e com o resultado anterior temos que:

$$\overline{CD} = \mathrm{crd}(a) = \mathrm{c}(2a) \text{ bem como } \overline{AC} = \mathrm{crd}(90^\circ - a) = \mathrm{c}(180^\circ - 2a)$$

Utilizando o seu teorema, Ptolomeu calculou o comprimento da corda da diferença de dois arcos, a corda do arco metade e a corda da soma de dois arcos, que veremos a seguir.

2.1.4 Corda da diferença entre dois arcos

Figura 8 – Corda da diferença



Fonte: próprio autor

Dado um semicírculo construído sobre o diâmetro $\overline{AD}$, podemos observar na figura que os comprimentos das cordas dos arcos são dados por:

$$\overline{CD} = \text{crd}b$$

$$\overline{BC} = \text{crd}(a-b)$$

$$\overline{BD} = \text{crd}a$$

$$\overline{AD} = 2R$$

$$\overline{AC} = \text{crd}(90^\circ - b)$$

$$\overline{AB} = \text{crd}(90^\circ - a)$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{BD}\cdot\overline{AC}$$

$$\text{crd}(90^\circ - a)\cdot\text{crd}\,b + 2R\cdot\text{crd}(a-b) = \text{crd}\,a\cdot\text{crd}(90^\circ - b)$$

$$2R\cdot\text{crd}(a-b) = \text{crd}\,a\cdot\text{crd}(90^\circ - b) - \text{crd}(90^\circ - a)\cdot\text{crd}\,b$$

Relacionando cada corda ao seu ângulo central correspondente temos:

$$2R\cdot\text{c}(2a-2b) = \text{c}\,(2a)\cdot\text{c}(180^\circ - 2b) - \text{c}(180^\circ - 2a)\cdot\text{c}\,(2b)$$

Usando a relação entre corda e seno e transcrevendo a fórmula em linguagem atual temos:

$$2R\cdot\left[2R\,\mathrm{sen}(\frac{2a-2b}{2})\right]=2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{180^\circ-2b}{2}\right)-2R\,\mathrm{sen}(180^\circ-2a)\cdot 2R\,\mathrm{sen}(2b)$$

$$4R^2\cdot\mathrm{sen}(a-b)=4R^2\cdot\mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}(90^\circ-b)-4R^2\cdot\mathrm{sen}(90^\circ-a)\cdot\mathrm{sen}\,b$$

Lembrando que o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar temos:

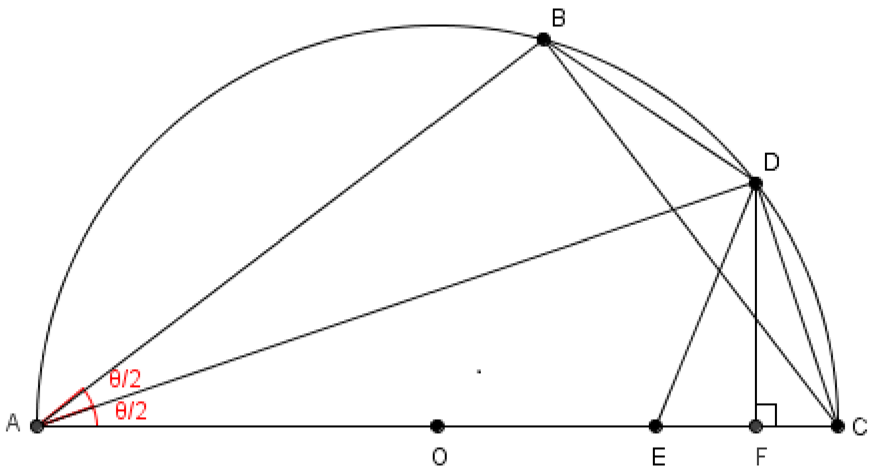
$$\boxed{\mathrm{sen}(a-b)=\mathrm{sen}\,a\cdot\cos b-\mathrm{sen}\,b\cdot\cos a} \tag{2.3}$$

2.1.5 Corda do arco metade

Buscando obter o comprimento de cordas de ângulos menores, Ptolomeu deduziu a fórmula da corda da metade do ângulo de uma corda conhecida.

Vejamos o diagrama abaixo:

Figura 9 – Corda do arco metade



Fonte: próprio autor

Temos um semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$. Traçamos então a perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando por D, determinando o ponto F.

Seja θ o ângulo correspondente à corda $\overline{BC}$. Calculemos então a corda $\overline{DC}$ correspondente ao ângulo $\frac{\theta}{2}$, onde D está no arco BC.

A partir de A, marcamos o ponto E sobre o segmento $\overline{AC}$ de modo que $\overline{AE}=\overline{AB}$.

Desta forma, por construção, os triângulos ABD e AED são congruentes, pelo caso Lado - Ângulo - Lado (LAL). Consequentemente $\overline{BD}=\overline{DE}$, e o triângulo DEC é isósceles, de altura $\overline{DF}$.

Portanto $\overline{EF}=\overline{FC}$ o que nos dá $\overline{FC}=\dfrac{(\overline{AC}-\overline{AB})}{2}$.

Também temos que os triângulos ADC e DFC são semelhantes, pelo caso Ângulo - Ângulo (AA), já que $A\hat{D}C = 90^\circ = D\hat{F}C$ e $A\hat{C}D = 90^\circ - \frac{\theta}{2} = F\hat{C}D$. Assim,

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{FC}$$

Logo $\overline{DC}^2 = \overline{AC} \cdot \frac{(\overline{AC} - \overline{AB})}{2}$.

Usando a Observação 1, reescrevemos as cordas acima em termos de cordas de ângulos centrais:

$\overline{DC} = \mathrm{c}(\theta), \overline{AC} = \mathrm{c}(180^\circ) = 2R, \overline{AB} = \mathrm{c}(180^\circ - 2\theta)$, o que nos dá:

$$(c(\theta))^2 = \mathrm{c}(180^\circ) \cdot \left(\frac{\mathrm{c}(180^\circ) - \mathrm{c}(180^\circ - 2\theta)}{2} \right)$$

Convertendo tais cordas para seno:

$$\left(2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)^2 = (2R \operatorname{sen} 90^\circ) \cdot \left(\frac{2R \operatorname{sen} 90^\circ - 2R \operatorname{sen}(90^\circ - \theta)}{2} \right)$$

$$4R^2 \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)^2 = 2R^2(\operatorname{sen} 90^\circ - sen(90^\circ - \theta))$$

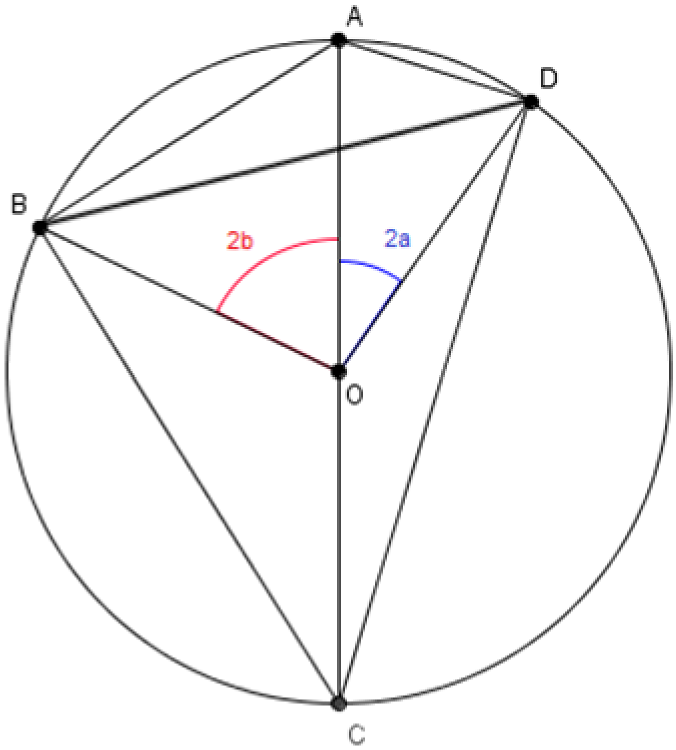
$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \tfrac{\theta}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)}} \tag{2.4}$$

2.1.6 Corda da soma

Seja o quadrilátero ABCD inscrito na circunferência de centro O, conforme figura abaixo:

Figura 10 – Corda da soma



Fonte: (OLIVEIRA, 2010, p.36)

Analisando a figura temos os comprimentos das cordas dados por:

$$\overline{AB} = \mathrm{c}\,(2b)$$

$$\overline{AD} = \mathrm{c}\,(2a)$$

$$\overline{CD} = \mathrm{c}\,(180^\circ - 2a)$$

$$\overline{BC} = \mathrm{c}\,(180^\circ - 2b)$$

$$\overline{AC} = 2R$$

$$\overline{BD} = \mathrm{c}\,(2a + 2b)$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

$$2R \cdot \mathrm{c}\,(2a + 2b) = \mathrm{c}\,(2b) \cdot \mathrm{c}\,(180^\circ - 2a) + \mathrm{c}\,(2a) \cdot \mathrm{c}\,(180^\circ - 2b)$$

Em linguagem de senos:

$$2R \cdot 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2a+2b)}{2}\right) = 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{2b}{2}\right) 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{(180^\circ - 2a)}{2}\right) + 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{2a}{a}\right) 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{(180^\circ - 2b)}{2}\right)$$

$$4R^2 \operatorname{sen}(a+b) = 4R^2 \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - a) + 4R^2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - b)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a} \tag{2.5}$$

Construção da Tábua de Ptolomeu

De acordo com Pereira e Morey (2015), para compor sua tabela, Ptolomeu primeiramente obteve os valores das cordas de alguns ângulos através da construção de polígonos inscritos em uma circunferência. Eram resultados conhecidos dos gregos:

1. corda de 60°, correspondente a medida do lado do hexágono inscrito na circunferência (ou lado do triângulo equilátero),
2. corda de 90°, correspondente ao lado do quadrado inscrito na circunferência,
3. corda de 120°, correspondente ao lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Ptolomeu obteve a medida da corda de 36°, que corresponde à medida do lado de um decágono inscrito, e a corda de 72°, lado de um pentágono inscrito. Apresentou ainda a construção e a determinação do comprimento do lado desses polígonos.

Fazendo uso das fórmulas da corda da diferença de dois arcos, a corda do arco metade e a corda da soma de dois arcos, obteve a medida da corda de vários outros arcos. Por exemplo, com a fórmula da diferença de arcos obteve a corda de $12^\circ = 72^\circ - 60^\circ$. Com a fórmula da corda do arco metade determinou as cordas de 6°, 3°, $1\frac{1}{2}^\circ$ e $\frac{3}{4}^\circ$.

Assim, com a fórmula da soma de arcos e com os valores obtidos seria possível construir uma tabela cujos arcos são múltiplos de $1\frac{1}{2}^\circ$, ficaria faltando calcular as cordas nesse intervalo de $1\frac{1}{2}^\circ$.

Pelas proposições geométricas conhecidas até então, não foi possível determinar as cordas de arcos que não eram frações de $1\frac{1}{2}^\circ$. Ainda de acordo com Pereira e Morey (2015): "para encontrar a $crd1^\circ$ e deste modo completar a tabela, Ptolomeu recorreu a uma interpolação que permitiu deduzir a seguinte desigualdade: $0,01745130 < \operatorname{sen} 1^\circ < 0,01745279$."

Então, fazendo uso dessa aproximação e a fórmula da soma dos arcos Ptolomeu completa sua tabela de cordas com arcos variando de 0 a 180° com intervalo de $\frac{1}{2}^\circ$.

Uma sugestão de atividades didáticas inspiradas na construção da Tábua de cordas de Ptolomeu

Para a realização das atividades, os alunos já devem conhecer as fórmulas de seno da soma e da diferença de ângulos, seno da metade de um ângulo e que o cosseno de um ângulo é o seno do ângulo complementar.

Atividade 1: Fazendo uso do seno da soma e da diferença de ângulos, do seno da metade de um ângulo, construir uma tabela de senos de 0 a 90 graus (considerar 4 casas decimais), de 6 em 6 graus. Sabendo-se que $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$ e $\operatorname{sen} 72° = 0,9511$. Explique como obteve os valores.

Atividade 2: Use a tabela construída anteriormente para elaborar uma tabela de cossenos de 0 a 90 graus.

CAPÍTULO

3

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Segundo Lima *et al.* (2001, p.213): “com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal ocorreu a necessidade de atribuir o conceito de função de uma variável real às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante.”

Ainda segundo Lima *et al.* (2001, p.214): “as funções trigonométricas são periódicas. Sendo assim, são usadas para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, como: movimentos de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação de sangue, batimentos cardíacos entre outros.”

No presente trabalho, focaremos o estudo das funções seno e cosseno pois o objetivo será apresentar aplicações dessas funções em fenômenos vibratórios, e por consequência, na produção de sons.

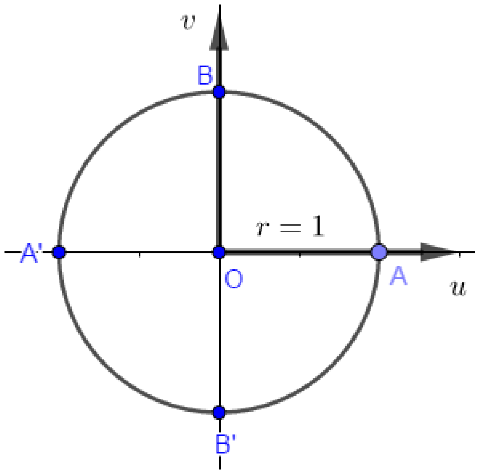
As definições apresentadas a seguir são baseadas em Iezzi (2013).

3.1 Ciclo trigonométrico

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais uOv no plano.

Tomemos uma circunferência $\mathscr{C}$ de centro O, na origem do sistema, e raio igual a 1.

Figura 11 – Ciclo trigonométrico



Fonte: próprio autor

Seja $(0,0)$ a origem da circunferência e o ponto $A = (1,0)$. Vamos agora definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre $\mathscr{C}$, isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência da seguinte forma:

1. se $x = 0$, então P coincide com A;

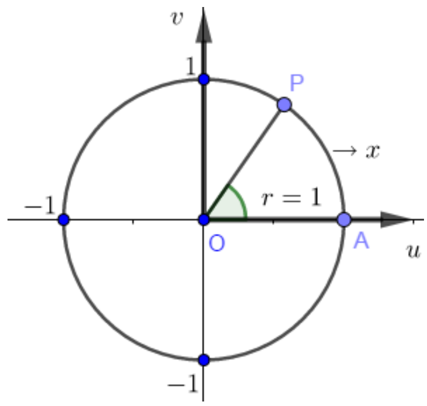
2. se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

3. se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

A circunferência assim definida é chamada ciclo trigonométrico.

O ponto P associado a x é chamado de imagem de x no ciclo.

Figura 12 – Ciclo trigonométrico



Fonte: próprio autor

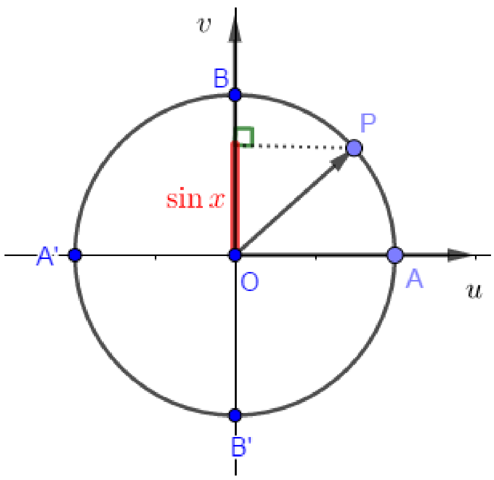
Os eixos u e v dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes iguais, chamadas quadrantes, numeradas de 1 a 4 a partir do ponto A, no sentido anti-horário.

Uma vez que a qualquer real x associamos um ponto P sobre o ciclo trigonométrico, segundo o sistema de coordenadas $u0v$, P terá uma ordenada e uma abcissa. Tais números serão utilizados para definirmos as funções a seguir.

3.1.1 Funções Seno e Cosseno

- **Função seno**

Figura 13 – Função seno

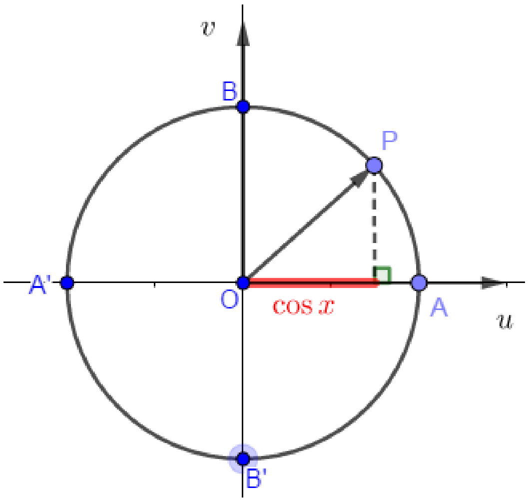


Fonte: próprio autor

Definiremos a função seno, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x a ordenada do correspondente ponto P no ciclo trigonométrico, e denotaremos $f(x) = \operatorname{sen} x$.

- **Função cosseno**

Figura 14 – Função cosseno



Fonte: próprio autor

De modo análogo ao anterior, definiremos a função cosseno, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que associa a cada real x a abscissa do correspondente ponto P no ciclo trigonométrico, e denotaremos $f(x)=\cos x$.

Das definições dadas temos que:

Propriedades: Sejam as funções $f(x)=\operatorname{sen} x$ e $f(x)=\cos x$. Então:

1. $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$

2. Para todo x real tem-se que $f(x+2\pi)=f(x)$. Neste caso dizemos que $f(x)$ é 2π periódica.

Observação: De modo geral, se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e para o menor $T>0$ são tais que $f(x+T)=f(x)$ para todo x, diz-se que f é T periódica, ou periódica de período T.

Conforme vimos na Capítulo 2, equações (2.5) e (2.3), temos que para todo x,y real valem:

$$1)\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x\cdot\cos y+\operatorname{sen} y\cdot\cos x \tag{3.1}$$

$$2)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x\cdot\cos y-\operatorname{sen} y\cdot\cos x \tag{3.2}$$

Lembrando que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, o que nos dá $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$ teremos de (3.2) que:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y-\operatorname{sen} y\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\
&= \cos x\cos y-\operatorname{sen} y\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

De modo análogo, usando (3.1) teremos:

$$\begin{aligned}
\cos(x-y) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+y\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\operatorname{sen} y\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\
&= \cos x\cos y+\operatorname{sen} y\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Assim, para todo x, y real valem ainda:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y \tag{3.3}$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y \tag{3.4}$$

Das propriedades (3.1) e (3.3), onde tomamos $x=y$ concluímos ainda que:

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen} x\cos x, \text{ para todo } x \text{ real.} \tag{3.5}$$

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x, \text{para todo } x \text{ real.} \tag{3.6}$$

Propriedade 1. Fórmulas de Werner ou prostaférese

Para todo x, y real são válidas as seguintes igualdades:

$$2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos y=\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y) \tag{3.7}$$

$$2\cdot\operatorname{sen} y\cdot\cos x=\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)$$

$$2\cdot\cos x\cdot\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y) \tag{3.8}$$

$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = -\cos(x+y) + \cos(x-y). \tag{3.9}$$

Demonstração. Para demonstrar estes fatos faremos uso de (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4). Vamos demonstrar apenas a igualdade (3.7) que as demais seguem de modo inteiramente análogo.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x + \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos y \end{aligned}$$

□

Proposição 2. Valem as seguintes identidades para as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{3.10}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \tag{3.11}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{3.12}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \tag{3.13}$$

Demonstração. Para provar (3.10), vejamos que de (3.1) e (3.2) concluímos que:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b.$$

Assim fazendo $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$ obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} &= \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

□

De modo análogo demonstramos as demais identidades.

Definição 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que uma tal função é par se para todo x real tem-se $f(-x) = f(x)$.

De modo análogo diremos que tal função é ímpar se para todo x real tem-se $f(-x) = -f(x)$.

Teorema 2. $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar e $f(x) = \cos x$ é uma função par.

Demonstração. De fato, segue de (3.2) e de (3.4) que para todo x real temos:

$\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen}(0 - x) = \operatorname{sen} 0 \cos x - \operatorname{sen} x \cos 0 = -\operatorname{sen} x.$

Bem como,

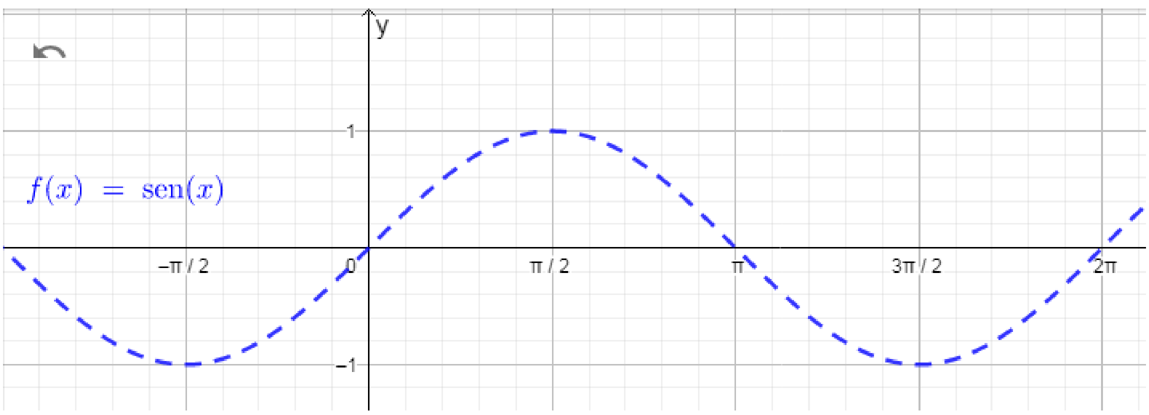
$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} x = \cos x$, como queríamos. □

Gráficos

Com base no ciclo trigonométrico, podemos esboçar os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$.

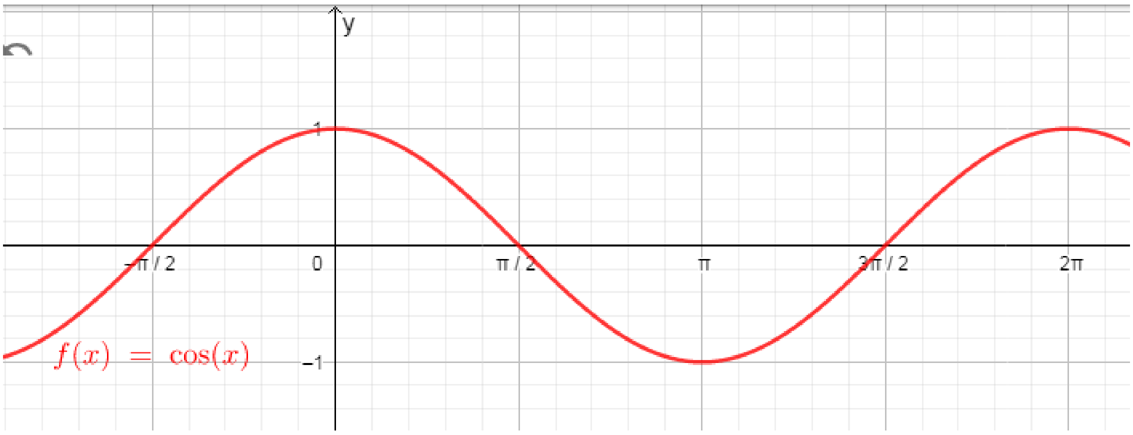
Vimos também que ambas tem imagem no intervalo $[-1, 1]$ e são periódicas de período $T = 2\pi$.

Figura 15 – $y = \operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Figura 16 – $y = \cos x$



Fonte: próprio autor

As curvas que tais gráficos determinam são denominadas senóides (note que o gráfico de $f(x) = \cos x$ é uma translação horizontal do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, pois $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Destacaremos os seguintes elementos associados a estas funções:

1. **Período:** Como vimos em ambos os casos $T = 2\pi$. Veja que este é o tamanho do intervalo que a função leva para realizar um ciclo completo.

2. **Frequência:** Denotando-se a frequência por ω temos então que:

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$$

3. **Amplitude de oscilação:** É definida como sendo a metade da diferença entre o maior valor e o menor valor que a senóide atinge num ciclo.

$$A = \frac{(\text{valor} \quad \text{máx.} - \text{valor} \quad \text{mín.})}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1.$$

Em resumo temos:

Tabela 2 – Elementos da funções seno e cosseno

$f(x)$	T	ω	A
$\operatorname{sen} x$	2π	$\frac{1}{2\pi}$	1
$\cos x$	2π	$\frac{1}{2\pi}$	1

Fonte: próprio autor

3.2 Funções periódicas envolvendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$

Muitos fenômenos periódicos podem ser modelados através de uma função trigonométrica cuja equação é composta de senos e/ou cossenos. Para que os alunos possam compreender de forma significativa a modelagem de um fenômeno periódico que envolva senos ou cossenos, é necessário que reconheçam as propriedades de funções que são variações de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e de $f(x) = \cos x$, a saber:

$$f(x) = a + b \operatorname{sen} cx \text{ e } f(x) = a + b \cos cx.$$

Para isso, vejamos que alterações os parâmetros a, b e c impõem aos gráficos das funções originais, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

As curvas que os gráficos de tais funções determinam também serão chamadas de curvas senoidais ou simplesmente senóides.

3.2.1 Funções do tipo $y = b \cdot \operatorname{sen} x$ e $y = b \cdot \cos x$

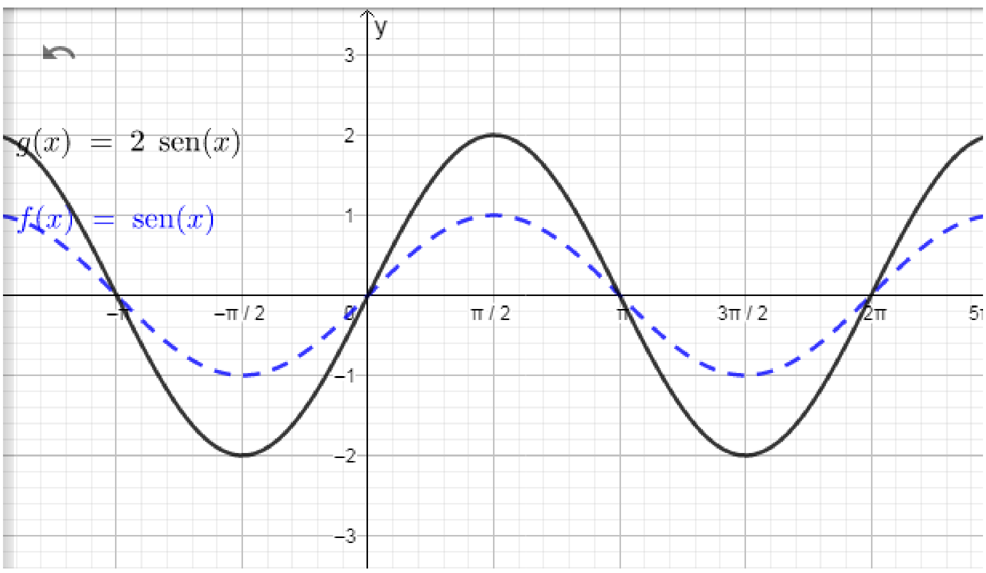
Vejamos o caso específico da função $y = 2 \operatorname{sen} x$. Utilizando uma tabela e comparando-se os valores de $y = \operatorname{sen} x$ e de $y = 2 \operatorname{sen} x$ para alguns valores especiais de x, podemos construir o gráfico de ambas num mesmo sistema de eixos cartesianos, e verificar a interferência da constante $b = 2$ na forma do gráfico.

Tabela 3 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 \operatorname{sen} x$

x	$y = \operatorname{sen} x$	$y = 2 \operatorname{sen} x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 17 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 \operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Comparando-se estas duas funções, observamos que o parâmetro $b = 2$ altera a amplitude de oscilação para duas vezes a amplitude da função original. Já T e ω se mantêm os mesmos. Assim,

Tabela 4 – Determinando os elementos das funções

	$\operatorname{sen} x$	$2 \operatorname{sen} x$
T	2π	2π
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
A	1	2

Fonte: próprio autor

Já se $b = -1$, utilizando tabela comparativa entre $y =$ sen x e $y = -\operatorname{sen} x$ temos:

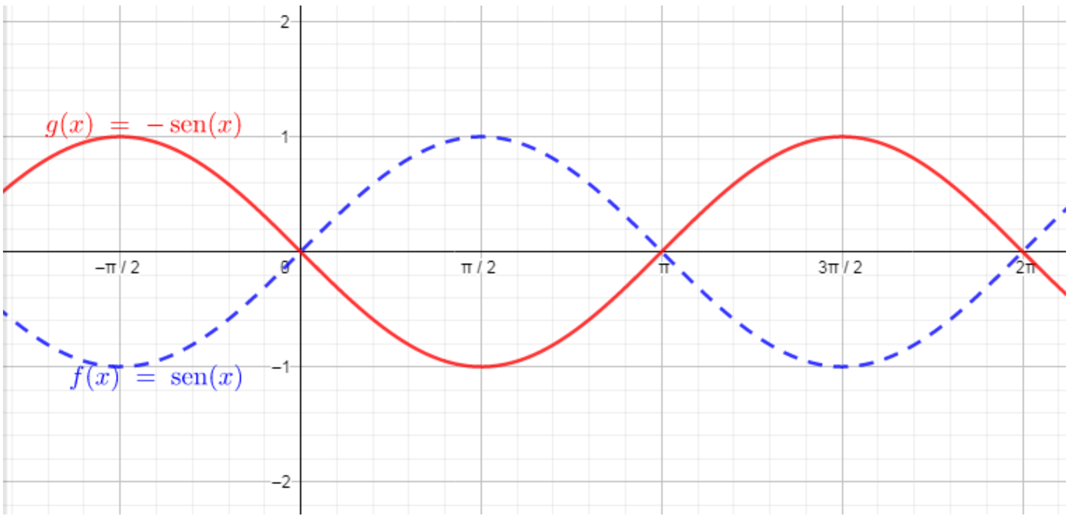
Tabela 5 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} x$

x	$y = \operatorname{sen} x$	$y = -\operatorname{sen} x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
2π	0	0

Fonte: próprio autor

Assim podemos ver que o gráfico de $y = -\operatorname{sen} x$ será a reflexão do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ em relação ao eixo x, conforme figura abaixo:

Figura 18 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Note que a amplitude da oscilação se mantém. Note também que o período e consequentemente a frequência também permanecem os mesmos, o que nos dá a tabela abaixo.

Tabela 6 – Determinando os elementos das funções

	$\operatorname{sen} x$	$-\operatorname{sen} x$
T	2π	2π
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
A	1	1

Fonte: próprio autor

De modo geral, se $b < 0$, devemos refletir o gráfico de $y = |b| \operatorname{sen} x$ em relação ao eixo x.

De forma análoga, para $b \neq 0$, $y = b \cos x$, constataremos as mesmas propriedades. Em resumo temos a seguinte tabela:

Tabela 7 – Determinando os elementos das funções

	$\operatorname{sen} x$	$b \operatorname{sen} x$
T	2π	2π
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
A	1	$\vert b \vert$

Fonte: próprio autor

3.2.2 Funções do tipo $y = \operatorname{sen} cx$ e $y = \cos cx$

Vejamos agora o caso específico $y = \operatorname{sen} 2x$.

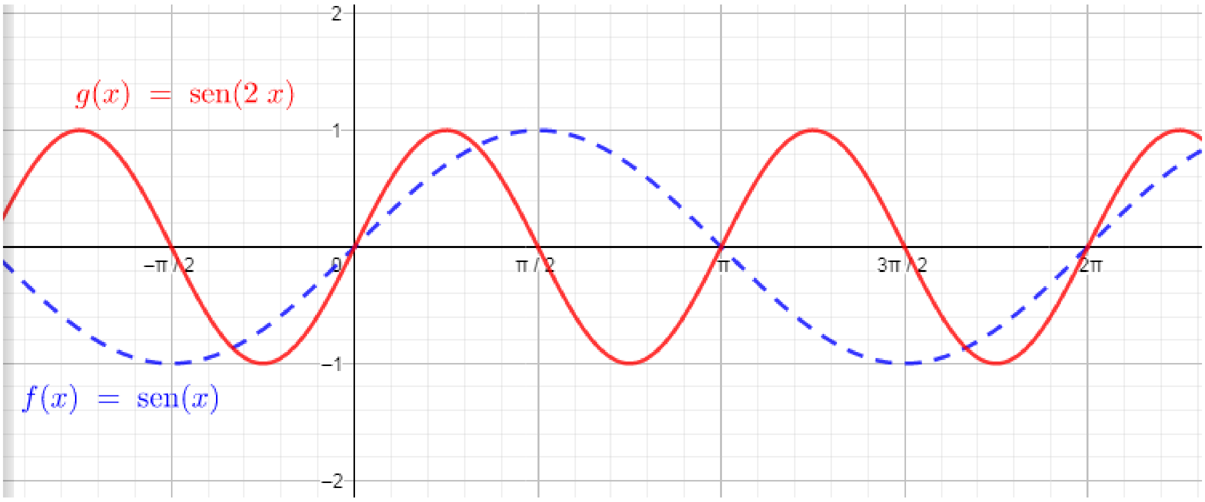
Utilizando-se uma tabela com os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen} 2x$ e traçando o gráfico de ambas, vemos que a amplitude de oscilação não mudou, porém a frequência, e consequentemente, o período de oscilação mudaram.

Tabela 8 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$

$2x$	x	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 2x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
2π	π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 19 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$



Fonte: próprio autor

Neste caso o período caiu pela metade e a frequência ficou multiplicada por 2.

De fato, como $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$ para todo x, mostremos que se $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ então $g(x+\pi) = g(x)$. Temos que $g(x+\pi) = \operatorname{sen}(2(x+\pi)) = \operatorname{sen}(2x+2\pi) = \operatorname{sen}(2x) = g(x)$, como queríamos.

De modo geral, se $c > 0$ e $g(x) = \operatorname{sen} cx$, então $g(x+\frac{2\pi}{c}) = \operatorname{sen}(cx+2\pi) = \operatorname{sen} cx = g(x)$. Assim temos a seguinte tabela:

Tabela 9 – Determinando os elementos das funções

	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} cx$, $c > 0$
T	2π	$\frac{2\pi}{c}$
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{c}{2\pi}$
A	1	1

Fonte: próprio autor

Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, se $-c < 0$ então $y = \operatorname{sen}(-cx) = -\operatorname{sen} cx$, isto é, seu gráfico é a reflexão em torno do eixo x do gráfico de $y = \operatorname{sen}|c|x$. Mas em ambas teremos:

Tabela 10 – Determinando os elementos da função

	$\operatorname{sen} cx$
T	$\frac{2\pi}{\|c\|}$
ω	$\frac{\|c\|}{2\pi}$
A	1

Fonte: próprio autor

Como $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x$, os gráficos de $\cos cx$ e $\cos(-cx)$ são os mesmos.

3.2.3 Funções do tipo $y = b \cdot \operatorname{sen} cx$ e $y = b \cdot \cos cx$

Com base no exposto, obtemos o gráfico de $y = b \cdot \operatorname{sen} cx$ modificando para $|b|$ a amplitude do gráfico de $y = \operatorname{sen} cx$. Analogamente para o gráfico $y = b \cdot \cos cx$.

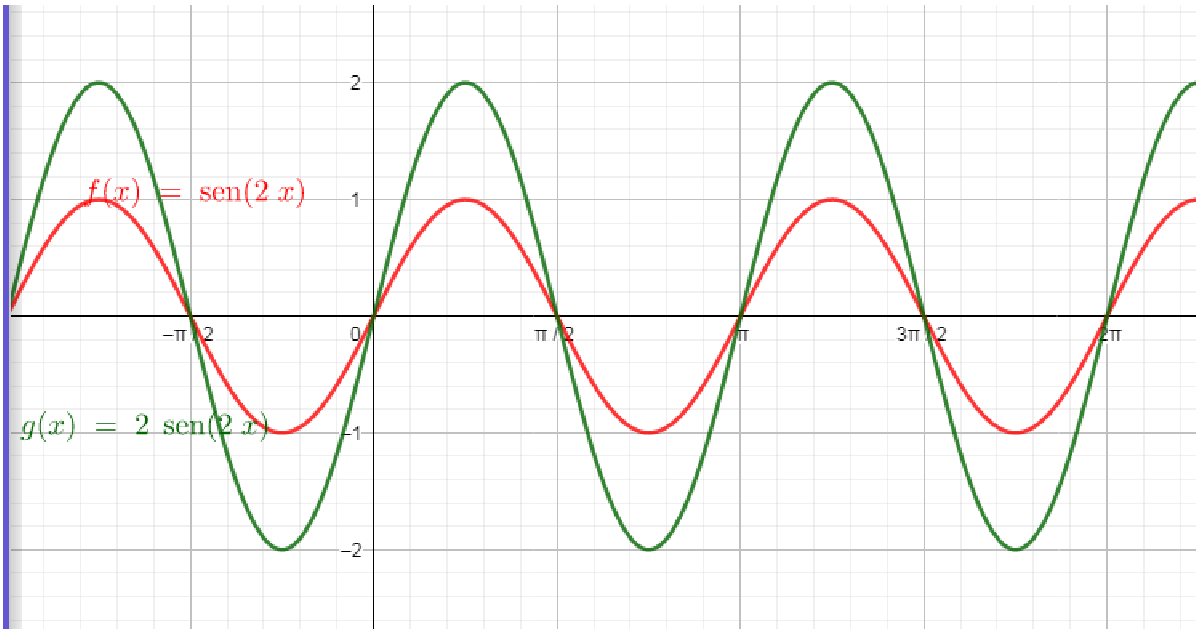
Vejamos o gráfico do caso $y = 2 \cdot \operatorname{sen} 2x$:

Tabela 11 – Comparando $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 2 \operatorname{sen} 2x$

$2x$	x	$y = \operatorname{sen} 2x$	$y = 2 \operatorname{sen} 2x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	-2
2π	π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 20 – Comparando $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 2 \operatorname{sen} 2x$



Fonte: próprio autor

De modo geral, se $b, c \neq 0$, $y = b \operatorname{sen} cx$ terá:

Tabela 12 – Elementos das funções $y = b \operatorname{sen} cx$

	$\operatorname{sen} x$	$b \operatorname{sen} cx$
T	2π	$\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\lvert c\rvert}{2\pi}$
A	1	$\lvert b\rvert$

Fonte: próprio autor

3.2.4 Funções do tipo $y = a + b \cdot \operatorname{sen} cx$ e $y = a + b \cdot \cos cx$

Para estas situações, basta esboçar o gráfico de $y = b \cdot \operatorname{sen} cx$ e transladá-lo verticalmente.

De fato,vimos que $y = b \operatorname{sen} cx$ tem amplitude $A = |b|$, período $T = \frac{2\pi}{|c|}$ e frequência $\omega = \frac{|c|}{2\pi}$.

De modo análogo, se $f(x) = a + b.\operatorname{sen} cx$, então $f\left(x + \frac{2\pi}{c}\right) = a + b.\operatorname{sen} c\left(x + \frac{2\pi}{c}\right) = a + b.\operatorname{sen}(cx + 2\pi) = a + b.\operatorname{sen} cx = f(x)$. Assim tanto $f(x) = b.\operatorname{sen} cx$ como $f(x) = a + b.\operatorname{sen} cx$ têm os mesmos período e frequência. Além disso, para cada x, a diferença entre estas funções é a. Logo o gráfico de $y = a + b.\operatorname{sen} cx$ é o gráfico de $y = b.\operatorname{sen} cx$ transladado verticalmente para cima em a unidades se $a > 0$. Se $a < 0$ transladamos para baixo em $|a|$ unidades. Logo a amplitude de ambos será a mesma pois da definição da amplitude temos que,

$$A = \frac{((|b| + a) - (-|b| + a))}{2} = |b|.$$

Assim translações verticais da função $y = b \operatorname{sen} cx$ não modificam período, frequência, nem amplitude desta. Apenas imagem que passará a ser $Im = [-|b| + a, |b| + a]$.

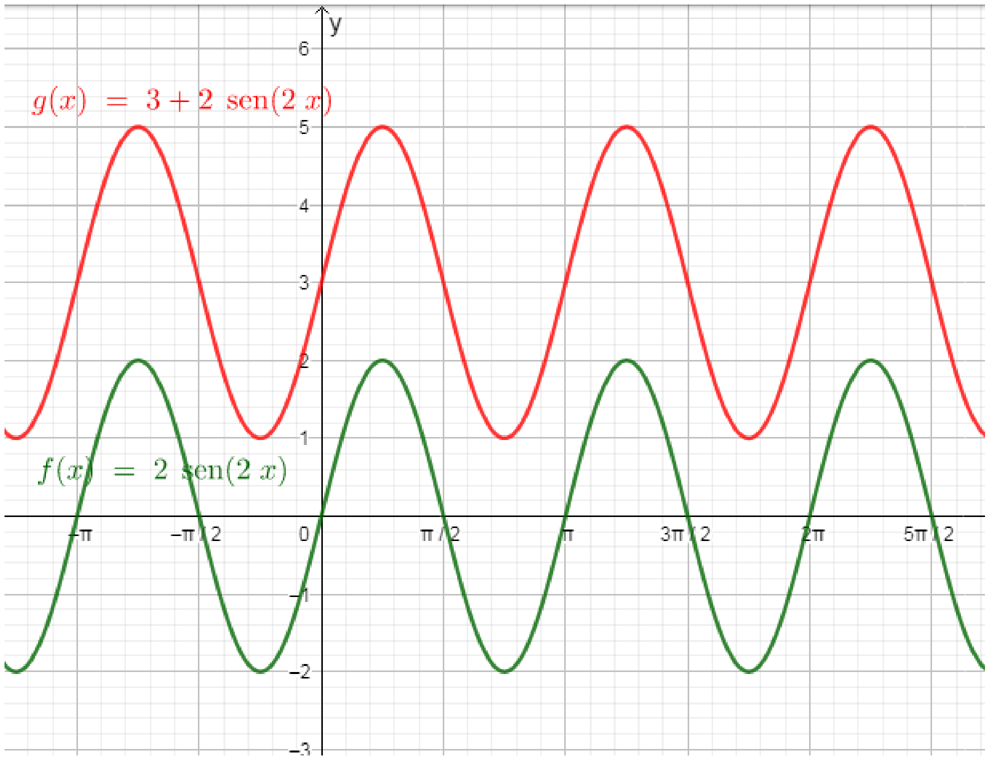
Vejamos o caso específico $y = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen} 2x$:

Tabela 13 – Comparando $y = 2 \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 + 2 \operatorname{sen} 2x$

$2x$	x	$y = 2\operatorname{sen} 2x$	$y = 3 + 2\operatorname{sen} 2x$
0	0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	2	5
π	$\frac{\pi}{2}$	0	3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-2	1
2π	π	0	3

Fonte: próprio autor

Figura 21 – Comparando $y = 2\operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 + 2\operatorname{sen} 2x$



Fonte: próprio autor

De modo geral, para a, b, $c \neq 0$, $y = a + b\operatorname{sen} cx$ terá:

Tabela 14 – Elementos das funções $y = a + b\operatorname{sen} cx$

	$\operatorname{sen} x$	$y = a + b\operatorname{sen} cx$
T	2π	$\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\lvert c\rvert}{2\pi}$
A	1	$\lvert b\rvert$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-\lvert b\rvert + a, \lvert b\rvert + a]$

Fonte: próprio autor

3.2.5 Funções do tipo $y = \operatorname{sen}(cx - d)$ e $y = \cos(cx - d)$

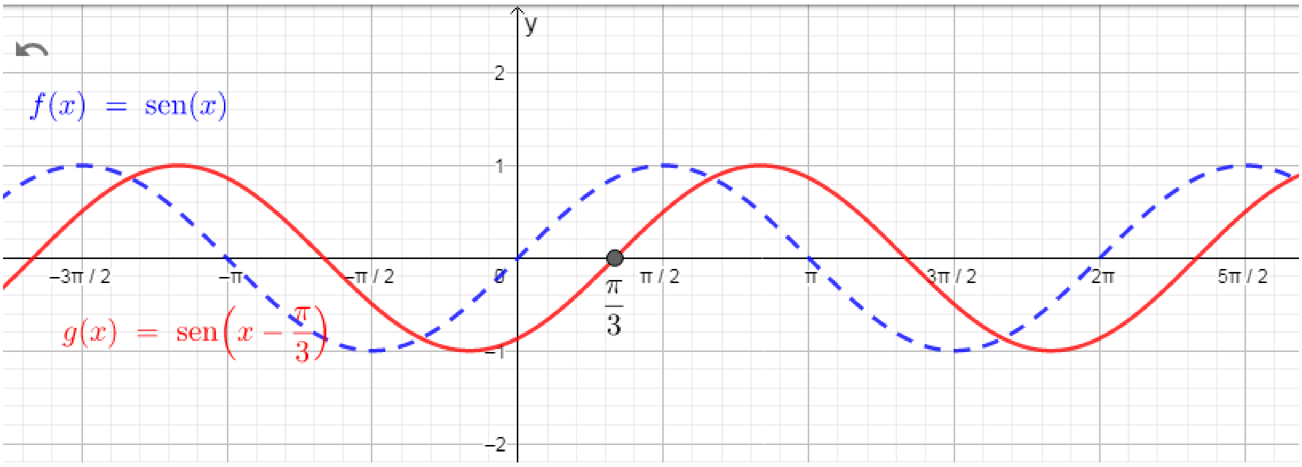
Vejamos o exemplo $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Tabela 15 – Determinando os valores de $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$ para os arcos notáveis

x	$x - \frac{\pi}{3}$	$y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$
$\frac{\pi}{3}$	0	0
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	π	0
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{3}$	2π	0

Fonte: próprio autor

Figura 22 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



Fonte: próprio autor

Vimos que $y = \operatorname{sen} x$ tem amplitude $A = 1$, período $T = 2\pi$ e frequência $\omega = \frac{1}{2\pi}$.

$y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ terá estes mesmos elementos. De fato, se $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$ então $f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3} + 2\pi) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = f(x)$, isto é, $f(x)$ também tem período 2π e consequentemente frequência $\omega = \frac{1}{2\pi}$.

Além disso, $f(x)$ atinge valor máximo quando $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, pois $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$. Bem como assumirá valor mínimo se $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ pois $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

Mas seu gráfico será obtido transladando-se horizontalmente, e para a direita, o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ em $d = \frac{\pi}{3}$ unidades.

De modo geral, $y = \operatorname{sen}(x - d)$ é a translação horizontal do gráfico de $\operatorname{sen} x$ em d unidades para a direita se $d > 0$ e para a esquerda se $d < 0$.

De modo análogo o gráfico de $y = \cos(x - d)$ é a translação horizontal do gráfico de $y = \cos x$ em d unidades, para a direita ou para esquerda, dependendo do sinal de d.

Denominamos,

$$d = \text{ângulo de fase da oscilação}$$

Para $y = a + b \operatorname{sen}(cx - d)$ ou $y = a + b\cos(cx - d)$ continuamos a chamar d de ângulo de fase da oscilação, mas neste caso, o gráfico destas funções é translação horizontal do gráfico de $y = a + b \operatorname{sen} cx$ ou $y = a + b\cos cx$ em $\frac{d}{c}$ unidades, para a direita ou para a esquerda, dependendo do sinal de $\frac{d}{c}$.

Logo não serão alterados período, frequência, amplitude nem imagem da oscilação.

Tabela 16 – Elementos das funções $y = a + b\operatorname{sen}(cx - d)$

	$y = \operatorname{sen} x$	$y = a + b\operatorname{sen}(cx - d)$
T	2π	$\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$
ω	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\lvert c\rvert}{2\pi}$
A	1	$\lvert b\rvert$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-\lvert b\rvert + a, \lvert b\rvert + a]$

Fonte: próprio autor

CAPÍTULO

4

RECORDANDO ALGUNS CONCEITOS DO CÁLCULO

Nesta seção, vamos recordar alguns conceitos do Cálculo e ver como eles se aplicam às funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para, no próximo capítulo, estudarmos modelos físicos descritos por tais funções.

Como nosso estudo ficará restrito a tais funções, algumas definições não serão dadas no seu sentido mais amplo, como por exemplo, os conceitos de limite e continuidade dados abaixo.

O presente capítulo se apoia em Guidorizzi (1987).

4.1 Continuidade de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$

Definição de Limite

Sejam $I = (a, b)$ intervalo de reta, $f : I \to \mathbb{R}$ e $p \in I = (a, b)$.

Dizemos que f tem *limite* L, quando x tende a p, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Denotamos este fato por $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

Quando tal limite existe ele é único, isto é, não existe $\bar{L} \neq L$ tal que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \bar{L}$.

Definição de função contínua

Sejam $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $p \in (a, b)$. Dizemos que f é contínua em p se:

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

No caso de $f(x)$ ser contínua para todo p real dizemos que f é contínua na reta ou simplesmente contínua.

- **Propriedades das funções contínuas:**

Sejam $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $p \in (a,b)$. Então:

$$f \pm g \text{ é contínua em } p; \tag{4.1}$$

$$f \cdot g \text{ é contínua em } p; \tag{4.2}$$

$$\frac{f}{g} \text{ é contínua em } p \quad \text{se} \quad g(p) \neq 0; \tag{4.3}$$

Já se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ for contínua em p e $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ for tal que $f(p) \in (c,d)$ e for contínua em $f(p)$ então

$$g \circ f \text{ é contínua em } p. \tag{4.4}$$

Teorema do Confronto

Teorema 3. Seja $p \in \mathbb{R}$ e sejam f, g, h funções reais definidas para x tal que $0 < |x - p| < r$, para algum $r > 0$. Suponhamos ainda que para estes valores de x tenhamos

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

e que exista $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L$$

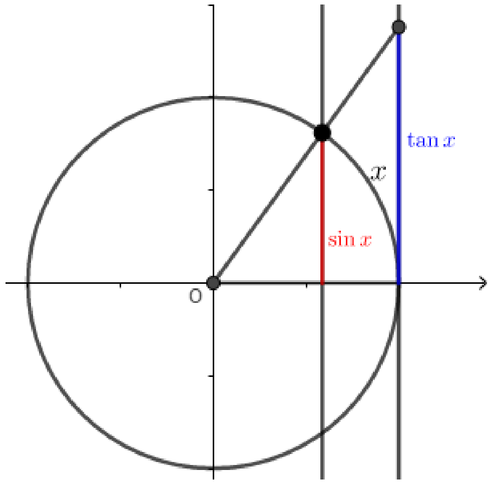
Continuidade de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$

Lema 1. Se $|x| < \frac{\pi}{2}$ então $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| < |\, tgx|$

Demonstração. Dividimos o estudo em dois casos:

1. $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$

Figura 23 – Caso 1: $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$



Fonte: próprio autor

Como x é o tamanho do arco esboçado acima vemos claramente que

$$0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x < \operatorname{tg} x \tag{4.5}$$

2. Agora se $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ então $0 \leqslant -x < \frac{\pi}{2}$. Logo por (4.5) temos

$$0 \leq \operatorname{sen}(-x) \leq -x < \operatorname{tg}(-x)$$

Mas $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(-x) = \cos x$

Assim se $0 \leqslant -x < \frac{\pi}{2}$

$$0 \leqslant -\operatorname{sen} x \leqslant -x < -\operatorname{tg} x \tag{4.6}$$

Logo de (4.5) e (4.6) temos que se $|x| < \frac{\pi}{2}$ então

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| < |\operatorname{tg} x|$$

□

Com este resultado mostraremos:

Lema 2. Se $x, p \in \mathbb{R}$ e $|x - p| < \pi$ temos:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| \leqslant |x - p| \tag{4.7}$$

$$|\cos x - \cos p| \leqslant |x - p| \tag{4.8}$$

Demonstração. De fato, segue de (3.11) e do Lema que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-p}{2}\right|\left|\cos\frac{x+p}{2}\right| \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-p}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-p}{2}\right| \text{ para } \left|\frac{x-p}{2}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Logo se $|x-p| < \pi$ então $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| \leqslant |x-p|$

Por outro lado, também do Lema 1 e de (3.13) tem-se que

$$|\cos x - \cos p| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-p}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\frac{x+p}{2}\right| \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-p}{2}\right| \leqslant |x-p| \text{ se } |x-p| < \pi$$

Portanto $|\cos x - \cos p| \leqslant |x-p|$ para $|x-p| < \pi$ □

Teorema 4. $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ são funções contínuas para todo $p \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue de (4.7) e de (4.8) que dado $\varepsilon > 0$ se $|x-p| < \varepsilon$ então $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| < \varepsilon$ bem como $|\cos x - \cos p| < \varepsilon$.

Portanto $\lim\limits_{x\to p} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} p$ e $\lim\limits_{x\to p} \cos x = \cos p$ para todo p real. □

4.2 Derivadas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$

Limites fundamentais

Proposição 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

De fato, vimos no Lema 1 que para $|x| < \frac{\pi}{2}$ temos

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| < |\operatorname{tg} x|$$

Assim se $x \neq 0$, dividimos por $|\operatorname{sen} x|$ e obtemos

$$1 \leq \left|\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right| < \frac{1}{|\cos x|}$$

o que nos dá:

$$|\cos x| < \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < 1 \quad \text{, para} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Mas $|x| < \frac{\pi}{2}$, logo$|\cos x| = \cos x$ e $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Portanto,

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1$, pelo Teorema do Confronto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Observação 2. note que este resultado nos diz que para x tal que $|x|$ seja suficientemente pequeno temos, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cong 1$ ou $\operatorname{sen} x \cong x$.

Proposição 4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Demonstração. Seja x tal que $|x| < \frac{\pi}{2}$. Então $0 < 1 + \cos x$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \\ &= \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} = \\ &= -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \end{aligned}$$

Assim segue das propriedades das funções contínuas, (4.2) e (4.3) e da Proposição 3 que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-1 \cdot 0 \cdot 1}{2} = 0$$

□

Derivada de uma função

Definição 2. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $p \in (a,b)$. Dizemos que f é derivável em p se existir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

E neste caso dizemos que sua derivada em p é denotada por

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Para todo x tal que $\exists f'(x)$ definimos a função derivada de f e denotamos

$$f'(x) = \frac{d(f)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Derivadas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$

Teorema 5. $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ são deriváveis $\forall x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \cos x \ \text{ e } \ g'(x) = -\operatorname{sen} x$$

.

Demonstração. Para $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$$

Segue de (2.5) e das Proposições 3 e 4 que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \right) = \cos x$$

Já se $g(x) = \cos x$ e $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h) - \cos x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \left[\cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] = -\operatorname{sen} x$$

□

Regra da Cadeia para derivação de função composta

Teorema 6. Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $Im_g \subset D_f$.

Então a derivada da composta $f(g(t))$ será

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t))g'(t)$$

ou

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

Exemplo: Encontre a derivada de $y = \operatorname{sen}(6t-3)$:

Fazendo $y = \operatorname{sen} x$ e $x = 6t - 3$ teremos que

$$y' = \cos(6t-3).(6t-3)' = 6\cos(6t-3)$$

CAPÍTULO

5

ALGUNS FENÔMENOS DESCRITOS ATRAVÉS DE SENÓIDES

As definições de equações diferenciais ordinárias e suas aplicações, apresentadas a seguir se apoiam em Figueiredo e Neves (1997) e Cassago e Ladeira (2006).

5.1 Tópicos de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

Seja $x = x(t)$ e $x' = \dfrac{dx}{dt}$ e $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ suas correspondentes derivadas de primeira e segunda ordens.

Teorema 7. Teorema de existência e unicidade Sejam $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Então para todo $t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ existe uma única função $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, duas vezes derivável, satisfazendo o problema

$$\begin{cases} x'' + a_1x' + a_2x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Demonstração: Podemos ver a demonstração do caso geral do Teorema de existência e unicidade, para equações diferenciais ordinárias, em Figueiredo e Neves (1997), Capítulo 4, Seção 4.1, Teorema 4.1, onde no nosso caso, tomamos $p(t) = a_1$, $q(t) = a_2$ e $f(t) = 0$.

Corolário 1. Seja $\omega_0 > 0$ e seja a equação diferencial

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{5.1}$$

Então toda solução de (5.1) é da forma

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \tag{5.2}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Prova: De fato, observemos primeiramente que se $x(t)$ é da forma (5.2) então

$$\begin{aligned} x'(t) &= \omega_0(-a\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + b\cos\omega_0 t) \\ x''(t) &= \omega_0^2(-a\cos\omega_0 t - b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t) \\ &= -\omega_0^2 x(t) \end{aligned}$$

Portanto

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad \forall t$$

Para mostrar que toda solução de (5.1) tem forma (5.2) tomemos $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, solução qualquer de $x'' + \omega_0^2 x = 0$.

Então $\exists\, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} y(0) &= x_0 \\ y'(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Mas se em (5.2) tomarmos

$$a = x_0 \text{ e } b = \frac{y_0}{\omega_0}$$

Vem que

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{y_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \tag{5.3}$$

também é solução de:

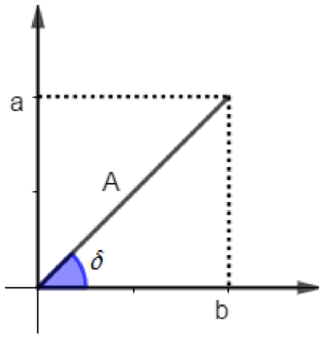
$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = y_0 \end{cases}$$

Mas pelo Teorema de Existência e Unicidade a solução deste problema é única, assim $y(t) = x(t)$ dada por (5.3).

Logo toda solução de $x'' + \omega_0^2 x = 0$ é da forma $x(t) = a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$.

Mas para tornar mais claro o papel dos parâmetros a e b em (5.2), vamos escrever esta solução de outra forma. Para isso associaremos ao par (b, a) o par (A, δ) onde

Figura 24 – Coordenadas polares do par (b,a)



Fonte: próprio autor

$$b = A\cos\delta$$
$$a = A\,\mathrm{sen}\,\delta,$$

isto é,

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \;\text{ e }\; \mathrm{tg}(\delta) = \left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{para } \; b \neq 0$$

Substituindo em (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = \\ &= A\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\omega_0 t + A\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t \end{aligned}$$

$$= A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta) \tag{5.4}$$

Se $b = 0$, então podemos escrever $y(t) = a.\cos\omega_0 t = A.\mathrm{sen}(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$, onde $A = a$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Note que, em qualquer dos casos, e neste modo de escrever (5.2) ficam claros os seguintes aspectos desta oscilação:

- A = amplitude da oscilação de $y(t)$
- $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ = frequência da oscilação de $y(t)$
- δ = ângulo de fase da oscilação de $y(t)$

Por evidenciar esses parâmetros dizemos que (5.4) é a forma Amplitude-Fase da oscilação dada também por (5.2). Note que os parâmetros a e b influenciam tanto a amplitude, quanto a fase de oscilação, mas não influencia a frequência da oscilação.

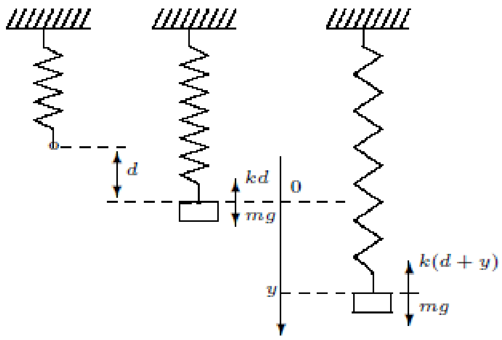
5.2 Oscilador Harmônico Simples

Nesta seção baseamos nossos estudos em Cassago e Ladeira (2006), Capítulo 2.

5.2.1 Sistema massa mola

Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de movimento periódico ou movimento harmônico. No caso particular, que trataremos a seguir, no qual a força que atua no corpo é proporcional à sua distância até a posição de equilíbrio e não há presença de nenhuma força de atrito ou forças externas, o movimento é denominado *movimento harmônico simples*. O sistema massa-mola da figura constitui um oscilador harmônico simples.

Figura 25 – Sistema massa-mola



Fonte: (CASSAGO; LADEIRA, 2006, Cap. 2)

Consideremos o sistema descrito pelo diagrama acima. Nele tomamos uma mola suspensa verticalmente tendo sua extremidade presa num suporte rígido. Quando fixamos um corpo de massa $m > 0$ na outra extremidade da mola, ela se distende de d unidades de comprimento. A mola exerce sobre o corpo uma força restauradora R, proporcional ao seu deslocamento, dada pela *Lei de Hooke*. Essa força atua no sentido oposto ao deslocamento e tem intensidade $R = kd$, onde $k > 0$ é a constante elástica da mola. Após pendurado o corpo, o sistema fica em equilíbrio, e como as forças atuantes no corpo são a força peso $P = mg$ e a força restauradora R, temos que:

$$R = P$$

$$kd = mg$$

Além disso, por consequência da *2º Lei de Newton*, temos que a resultante das forças atuantes no corpo é dada por $F = ma$, onde a é a aceleração do corpo. Primeiramente, iremos adotar o sistema de coordenadas em que a origem está na posição de equilíbrio e o eixo y está positivamente orientado na direção vertical sentido descendente. Denotaremos $y(t)$ o deslocamento do corpo (à partir da posição de equilíbrio) em função do tempo.

Ao deslocarmos o corpo a partir da posição de equilíbrio, (isto é, puxando-o para baixo ou empurrando-o para cima, sempre na direção vertical), temos a força resultante F.

Chamando de $y(t)$ a posição da massa no instante t, teremos que $F = my''(t)$.

Além disso, uma vez que o corpo está deslocado a partir da origem, o total das forças atuantes será dado por

$$F = mg - k(y+d)$$

lembrando que a força restauradora atua contra o movimento da massa e a força peso atua para baixo.

Mas $mg = kd$, portanto

$$my'' + ky = 0 \tag{5.5}$$

ou

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \tag{5.6}$$

onde $k > 0$ e $m > 0$.

Fazendo $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, vemos que esta equação é do tipo (5.1) e portanto terá solução da forma

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$$

ou

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta) \;\text{ onde }\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\, A = \sqrt{a^2+b^2}, \mathrm{tg}(\delta) = \left(\frac{a}{b}\right)$$

e se $b = 0$, temos $A = a$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Nesta última representação da solução, como dissemos antes, fica evidente que o movimento terá frequência de oscilação fornecida por $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$, onde $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ e amplitude de oscilação A.

Vemos assim que a amplitude e fase da oscilação dependem de a e b, e consequentemente da posição e velocidade iniciais da massa.

Já a frequência depende da massa m e da constante de elasticidade da mola k, já que $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Note que aumentando k, a constante de elasticidade da mola, ou diminuindo a massa m, a frequência $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ aumentará.

Exemplo: Suponha que num sistema massa-mola, como o que acabamos de descrever, a constante de elasticidade da mola k, seja igual à massa do corpo, m. Suponha ainda que no instante $t = 0$, o corpo esteja em repouso, localizado a duas unidades abaixo da posição de equilíbrio.

1. Determine sua posição no futuro t.

2. Determine quando o corpo passará pela posição de equilíbrio pela primeira vez.

Resolução:

1.Seja $y(t)$ sua posição num instante futuro t. Então $y(t)$ deve satisfazer:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Veja que neste caso a massa foi puxada para 2 unidades abaixo da posição de equilíbrio e solta a partir do repouso, o que justifica os valores de $y(0)$ e $y'(0)$. Então de (5.3) temos

$$y(t) = 2\cos t + 0\,\text{sen}\, t = \tag{5.7}$$

$$= 2\cos t = 2\,\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{para} \quad t \geq 0. \tag{5.8}$$

2. Usando (5.8) vamos procurar o primeiro valor de $t > 0$ tal que $y(t) = 0$ (posição de equilíbrio).

Assim vemos que a solução passará pela posição de equilíbrio sempre que:

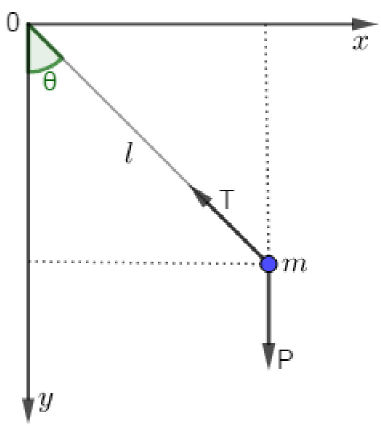
$$2\,\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \text{, isto é,} \quad \left(t + \frac{\pi}{2}\right) = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Como buscamos o primeiro instante, após iniciado o movimento, tal que o corpo passará pela posição de equilíbrio, teremos: $t + \frac{\pi}{2} = \pi$ o que nos dá $t = \frac{\pi}{2}$.

5.2.2 Pêndulo Simples

Seja um corpo de massa m fixado na extremidade de um fio inextensível e de comprimento l, onde a outra extremidade está fixada num suporte rígido, de acordo com o esboço a seguir.

Figura 26 – Pêndulo simples



Fonte: próprio autor

Colocamos a massa m a oscilar e supomos que esse movimento se dê no plano.

Colocamos a origem do sistema de coordenadas no ponto onde a extremidade do fio está presa e orientamos positivamente o eixo vertical no sentido descendente e o eixo horizontal orientado para direita.

Vamos decompor as forças que atuam sobre m na direção horizontal e vertical.

Seja θ o ângulo que o fio faz com o eixo y.

Assim $x = l\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $y = l\cos\theta$.

Veja que $\theta = \theta(t)$, isto é, varia com o tempo, logo

$$x(t) = l\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \tag{5.9}$$

$$y(t) = l\cos(\theta(t)) \tag{5.10}$$

Consideremos que as únicas forças que atuam sobre m são a força peso $\vec{P}$ e a tensão $\vec{T}$.

Designando por P o módulo de $\vec{P}$ e por T o módulo de $\vec{T}$ e decompondo a resultante das forças nas direções de x e y temos da 2ª *Lei de Newton* que

$$mx'' = -T\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$my'' = -T\cos\theta + mg$$

Multiplicando-se a primeira equação por $\cos\theta$ e a segunda por $\mathrm{sen}\,\theta$ obtemos

$$mx''\cos\theta = -T\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = my''\,\mathrm{sen}\,\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

isto é,

$$x''(t)\cos\theta(t) - y''(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) = -g\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \tag{5.11}$$

Voltando em (5.9) e (5.10), derivando-as duas vezes em t teremos pela regra da cadeia

$$x'(t) = l\cos\theta(t)\theta'(t)$$

$$y'(t) = l(-\,\mathrm{sen}\,\theta(t))\theta'(t)$$

e

$$x''(t) = l[(-\,\mathrm{sen}\,\theta(t))(\theta'(t))^2 + \cos\theta(t)\theta''(t)]$$

$$y''(t) = l[(-\cos\theta(t))(\theta'(t))^2 - \mathrm{sen}\,\theta(t)\theta''(t)]$$

Substituindo em (5.11)

$$l\cos\theta(t)[(-\operatorname{sen}\theta(t))(\theta'(t))^2+\cos\theta(t)\theta''(t)]-l\operatorname{sen}\theta(t)[(-\cos\theta(t))(\theta'(t))^2-\operatorname{sen}\theta(t)\theta''(t)]=-g\operatorname{sen}\theta(t)$$

O que nos dá

$$l(\cos^2\theta(t)+\operatorname{sen}^2\theta(t))\theta''(t)=-g\operatorname{sen}\theta(t)$$

$$\theta''(t)+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta(t)=0$$

Supondo que as oscilações sejam pequenas, isto é,que $\theta(t)\approx 0$, de acordo com a Observação 2 da Seção 4.2, podemos aproximar $\operatorname{sen}\theta(t)\approx\theta(t)$ e assim ficamos com a equação

$$\theta''+\frac{g}{l}\theta=0,\ \theta=\theta(t)$$

Fazendo $\omega_0^2=\frac{g}{l}$ temos

$$\theta''+\omega_0^2\theta=0$$

que é equação do tipo (5.1).

Novamente se fixarmos que no instante $t=0$, $\theta(0)=\theta_0$ e $\theta'(0)=\gamma_0$ então por (5.1) ou (5.4) sua solução será

$$\theta(t)=\theta_0\cos\omega_0 t+\frac{\gamma_0}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

ou

$$\theta(t)=A(\operatorname{sen}\omega_0 t+\delta)$$

onde

$$A=\sqrt{\theta_0^2+\frac{\gamma_0^2}{\omega_0^2}}\text{ e }\operatorname{tg}(\delta)=\frac{\theta_0\omega_0}{\gamma_0}\text{ ou, se }\gamma_0=0, A=\theta_0\text{ e }\delta=\frac{\pi}{2}$$

Vejamos que a frequência de oscilação é dada por $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Como g é constante, a frequência será inversamente proporcional a $\sqrt{l}$ e portanto quanto maior for o comprimento do fio, menor será a frequência e consequentemente maior o período da oscilação $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Note que a massa do corpo não interfere na solução.

5.3 Ondas sonoras

As ondas sonoras são variações no tempo da pressão do ar. São ondas **longitudinais** (ou seja, a onda se propaga na mesma direção em que se dá o movimento de oscilações do meio) e **mecânicas** pois necessitam de um meio material para se propagar. Por esse motivo, o som não se propaga no vácuo.

Sendo o som um fenômeno periódico, em seu estudo são usados os conceitos da *Análise de Fourier* que não serão estudados com devido aprofundamento no presente trabalho. O nome

"Análise de Fourier" foi dado em homenagem ao matemático francês, que desenvolveu a teoria, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 —1830).

Segundo Bortolossi (2020) , de forma simplificada, a ideia básica da Análise de Fourier é a seguinte: fenômenos periódicos podem ser aproximados por somas de funções trigonométricas da forma $y = b\,\text{sen}(cx+d)$(possivelmente, com um número infinito de parcelas), com b, c e d constantes. Estudaremos o tipo mais elementar, com sons que podem ser representados por funções $y = b\,\text{sen}(cx)$ através de experimentos sonoros realizados pelo Geogebra. Mais adiante, veremos como os parâmetros b e c afetam as propriedades do som correspondente.

Os sons são fenômenos que geram sinais: ondas sonoras produzem variações de pressão cujos valores mudam com o tempo. Esses valores podem ser, por exemplo, convertidos em sinais elétricos através de um microfone e com o auxílio de um computador, esses sinais elétricos são convertidos em números e são exibidos em um gráfico, do sinal correspondente.

De acordo com Anton e Rorres (2012), Capítulo 10, Seção 10.19, o ouvido humano possui estruturas capazes de canalizar as ondas sonoras e de serem estimuladas pelas diferentes frequências de ondas sonoras. Em seguida, certas estruturas ativam células nervosas que enviam estes sinais ao cérebro onde são interpretados como som.

Para o sistema auditivo o tipo mais elementar de onda sonora é uma variação senoidal da pressão do ar, e esta pode ser descrita por uma função do tempo:

$$q(t) = A_0 + A\,\text{sen}(\omega t - \delta) \tag{5.12}$$

Sendo,

- $q(t) =$ pressão atmosférica no tímpano;
- $A_0 =$ pressão atmosférica normal;
- $A =$ variação máxima de pressão em relação à pressão atmosférica normal;
- $\dfrac{\omega}{2\pi} =$ frequência da onda em ciclos por segundos; cuja unidade é medida em Hertz (Hz)
- $\delta =$ ângulo de fase da onda.

Para ser percebida como um som, pelo ser humano, uma onda sonora precisa ter frequências no intervalo de aproximadamente 20 a 20000 ciclos por segundo. As frequências fora desse intervalo não são capazes de estimular as estruturas auditivas e produzir os sinais nervosos.

5.3.1 Características do som

Para descrevermos as características do som, usamos como parâmetro nossa sensibilidade auditiva. O ouvido humano, distingue no som três características: altura (ou tom), intensidade (ou sonoridade) e timbre.

- **Altura**

  A altura está relacionada com a frequência da onda sonora e permite ao ouvido distinguir o som grave (baixo) ou som agudo (alto). Quanto maior a frequência, mais agudo é o som; frequências menores determinam sons mais graves.

  No caso deste som ser descrito através de uma única parcela senoidal, como em (5.12), esta propriedade será dada através de ω.

- **Intensidade**

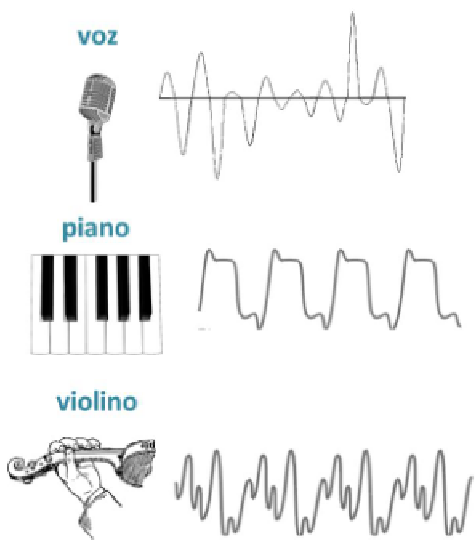
  Qualidade que depende, entre outras coisas, da amplitude da onda e permite distingui-lo como forte ou fraco.

  No caso deste som ser descrito por $q(t)$ dada em (5.12), esta propriedade dependerá de A.

- **Timbre**

  O timbre é a característica que nos permite distinguir dois sons da mesma altura e mesma intensidade, quando emitidos por fontes sonoras diferentes. Por exemplo, a mesma nota musical emitida por um piano e um violão são facilmente identificadas pelo ouvido por causa da diferença de timbre. Podemos dizer que o timbre está relacionado a forma da onda.

Figura 27 – Formas de onda da voz humana, piano e violino.



Fonte:http://www.descomplicandoamusica.com/timbre/

Na Figura 27, vemos ondas sonoras que são somas, finitas ou não, de funções da forma $y = A_0 + A\,\mathrm{sen}(\omega t - \delta)$.

5.3.2 Pitágoras e o Monocórdio

Segundo Juliane (2003, p. 8), "a Matemática e a Música se relacionam a partir da necessidade de equacionar e solucionar o problema da consonância, isto é, reunião de sons harmoniosos, com o objetivo de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito."

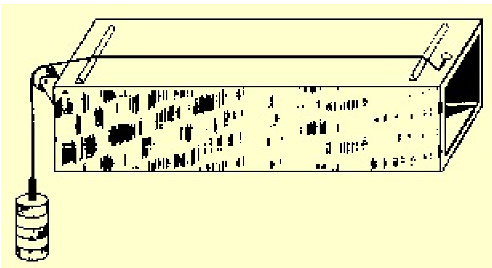
A ideia de Música como ciência nasceu com Pitágoras (século VI a.C). Acredita-se que seu experimento foi umas das primeiras tentativas de compreender e organizar os sons.

> Conta uma lenda que Pitágoras despertou sua curiosidade em relação à música quando, ao passar em frente à oficina de um ferreiro, ouviu o som de cinco martelos batendo em uma bigorna e percebeu que os martelos soavam harmonicamente, exceto um. Curioso, ele tentou estabelecer uma relação entre os martelos, cujos sons produzidos eram harmônicos: pressupôs algumas possíveis razões, como a força com a qual o martelo era conduzido, e, como não conseguiu encontrar a resposta, decidiu pesar os martelos e percebeu que a massa de cada martelo era de 12, 9, 8, e 6 unidades de peso.(CLUBE, 2018)

Buscando compreender os fenômenos sonoros, Pitágoras fez experimentos e observou algumas relações entre estes números, como por exemplo, a proporção dos pesos entre si: $6 = \frac{1}{2} \times 12$; $8 = \frac{2}{3} \times 12$ e $9 = \frac{3}{4} \times 12$.

Para investigar as relações numéricas descobertas e os sons, Pitágoras confeccionou um instrumento musical chamado de monocórdio, que consistia de uma corda presa nas extremidades. Dividiu essa corda em 12 espaços iguais e considerou o som produzido pela corda inteira como o som fundamental.

Figura 28 – Monocórdio de Pitágoras



Monocórdio de Pitágoras

Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-sala-2/

Esse instrumento foi utilizado para que ele, partindo da relação entre o comprimento da corda estendida e a altura do som emitido quando tocada, estabelecesse relações de comprimentos que produzissem determinados intervalos sonoros.

E analisando os sons produzidos em algumas divisões da corda, ele observou que o som produzido pressionando o ponto central da corda era o mesmo, porém mais agudo, que o som produzido pela corda inteira. Hoje, sabemos que essa equivalência de sons significa que a nota emitida pela metade de uma corda tem frequência duplicada em relação a frequência da corda original, fato este que comprovaremos na Subseção (5.3.3).

Segundo (CLUBE, 2018), ele chegou as seguintes conclusões:

- pressionando a corda na sexta marca (correspondente a 1/2 do comprimento da corda), se produzia o que chamamos de a oitava do som produzido pela corda inteira;
- pressionando a corda na nona marca (correspondente a 3/4 do comprimento da corda), resultava o que chamamos de a quarta do som produzido pela corda inteira;
- e pressionando a corda na oitava marca (correspondente a 2/3 do comprimento da corda), resultava o que chamamos de a quinta do som produzido pela corda inteira.

Assim, as frações $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$, correspondiam à oitava, à quarta e à quinta do som fundamental.

Pitágoras observou em seus estudos que os sons produzidos tocando outras marcas de seu monocórdio resultavam em sons não tão agradáveis como os anteriores.

De acordo com (UNIVESP, 2014), Pitágoras foi responsável pela construção da primeira escala musical o que contribuiu para a afinação dos instrumentos da época.

Observação: É curioso pensar que a Pitágoras, tão conhecido por um resultado geométrico (Teorema de Pitágoras) que diz:

"a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa",

sejam atribuídos os primeiros estudos sobre sons e construção da primeira escala musical. Assuntos que são tão distintos entre si, mas não distantes do ponto de vista matemático, pois para nosso espanto, muito mais tarde, se descobre que os sons, em particular as notas musicais, são descritos por somas, finitas ou não, de funções senoidais. Senos estes que são usados para medir o tamanho dos catetos do triângulo retângulo.

5.3.3 Equação da corda vibrante no plano

Suponha que uma corda fina de comprimento l perfeitamente flexível seja posta a vibrar (em pequenas vibrações) e que este movimento se dê no plano, digamos (x, u).

Suponhamos que tal corda seja feita de material homogêneo cuja densidade de massa seja constante e igual a $\rho > 0$. E suponhamos que a única força atuante seja a tensão δ. Aqui desconsideramos as forças de atrito e consideramos a força gravitacional pequena comparada com as tensões da corda.

Podemos mostrar que se $u(x,t)$ designa a posição de cada ponto x da corda no instante t e que se fixarmos as extremidades da corda, $u(x,t)$ satisfará o problema de contorno:

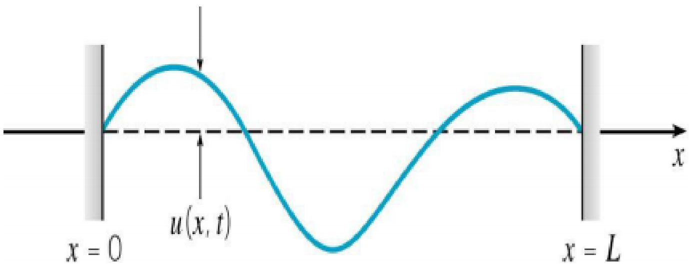
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), x \in (0,l), t > 0 \tag{5.13}$$

$$u(0,t) = 0 = u(l,t) \forall t > 0 \tag{5.14}$$

onde $c^2 = \dfrac{\delta}{\rho}$.

A condição (5.14) nos diz que as extremidades da corda $x = 0$ e $x = l$ estão fixas na posição $u = 0$, para todo tempo $t > 0$.

Figura 29 – Corda vibrante



Fonte:http://www.ufjf.br/sandro-mazorche/files/2012/11/Equacoes-Diferenciais-II-EDP1.pdf

Se $u(x,t)$ é a posição do ponto x da corda no tempo t então $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ nos dá a velocidade do ponto x da corda, no instante t e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ a aceleração do ponto x da corda no instante t.

Dizemos que a corda está em posição de equilíbrio se $u(x,t) = 0 \; \forall t > 0, x \in [0,l]$.

Dizemos que ela está em repouso se sua velocidade for nula, $\forall x \in [0,l]$, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$$

O gráfico de $u(x,t)$ para cada t fixo, nos dá a posição de cada ponto x da corda neste instante t, isto é, a posição em que a corda se encontra neste instante. E sabemos do Cálculo que, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ nos dá a concavidade do gráfico de $u(x,t)$, em cada ponto x, para t fixo.

Observemos a Figura 29. Nela vemos intervalos onde o gráfico tem a concavidade ora para baixo, ora para cima. Da equação (5.13) temos que a força atuante sobre a corda é proporcional à derivada segunda de u com relação a x, que por sua vez nos fornece a concavidade do gráfico.

Assim, quando a corda encontra-se com concavidade voltada para baixo temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) < 0$ e consequentemente $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) < 0$, o que nos indica que a força que atua sobre a corda está no sentido descendente.

Já se a concavidade for para cima, o que nos dá $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) > 0$ então $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) > 0$, o que indica que a força que atua sobre o ponto x da corda atua para cima.

Percebemos assim o movimento oscilatório modelado pela equação (5.13).

Com a teoria de Séries de Fourier e do Método de Fourier pode-se mostrar que uma solução qualquer de (5.13) e (5.14) será dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

onde $u_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{l} t\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$, e $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Para mais detalhes, sugerimos a leitura de Boyce e Diprima (1969), Capítulo 10, Seção 10.7.

As constantes a_n e b_n vão depender da posição e velocidade iniciais da corda.

Obs: É fácil ver que cada $u_n(x,t)$ satisfaz (5.13) e (5.14).

Como em (5.4), podemos reescrever:

$$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} t + \delta_n\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

onde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\operatorname{tg} \delta_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Assim a frequência de oscilação de cada u_n será

$$\omega_n = \frac{\frac{n\pi c}{l}}{2\pi} = \frac{nc}{2l},\ n = 1,2,3...$$

Denominamos $\omega_1 = \frac{c}{2l}$ de frequência fundamental do sistema. Veja que ele depende de $c = \sqrt{\frac{\delta}{\rho}}$, $\delta =$ tensão na corda e $\rho =$ densidade de massa da corda. Logo aumentando-se a tensão da corda δ, ou diminuindo-se a densidade ρ, temos que c cresce e portanto a frequência ω, aumenta.

Bem como se diminuirmos l, ω também aumenta. E como $\omega_n = n\omega_1$ o mesmo ocorrerá com a frequência de oscilação dos demais $u_n(x,t)$, $n > 1$.

Veja que aqui podemos perceber que as conclusões de Pitagóras estavam certas.

De fato, suponha que uma corda de mesmo material que a anterior e com a mesma densidade de massa ρ, sujeita a mesma tensão δ mas agora com metade do comprimento original.

Fixando suas extremidades ela também satisfará (5.13) e (5.14) mas para $x \in \left(0, \frac{l}{2}\right)$.

Logo tal problema terá solução dada por $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n(x,t)$ onde

$$\overline{u}_n(x,t) = \left(a_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi c}{l} t + b_n \cos \frac{2n\pi c}{l} t\right) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{l} \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

e portanto a frequência de cada $\overline{u}_n$ será

$$\overline{\omega}_n = \frac{\frac{2n\pi c}{l}}{2\pi} = \frac{nc}{l} = 2\omega_n$$

Isso comprova o fato de que reduzindo-se a corda pela metade, as correspondentes oscilações terão frequências duplicadas, produzindo o mesmo som, porém mais agudo, o que em música se denomina uma oitava acima.

CAPÍTULO

6

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo se dedica a apresentar um plano de aula com sugestões de atividades sobre as funções trigonométricas, especificamente as senóides, com o objetivo de que a aprendizagem desses conceitos ocorra de forma contextualizada e portanto mais significativa.

Para isso, associaremos as senóides e seus gráficos aos sons que eles representam. Comparando-se a função $y = \operatorname{sen} x$ com $y = a + b \operatorname{sen} cx$, veremos como a introdução dos parâmetros, a, b, c, não só modificam o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, mas correspondem a um som determinado.

6.1 A BNCC

6.1.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional. (BRASIL, 2018, p. 7)

A BNCC é um instrumento que busca garantir um nível comum de aprendizagem para todos os alunos. Foi estruturada com enfoque no desenvolvimento de competências.

Segundo (BRASIL, 2018, p. 8): "competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho."

Pode-se observar que o objetivo deste documento é que a escola promova uma educação integral, ressaltando que esta seja um espaço que busque promover o desenvolvimento intelectual, emocional, social de nossos estudantes, para que se tornem cidadãos autônomos, críticos e atuantes na sociedade.

6.1.2 A BNCC no Ensino Médio

O Ensino Médio é um grande desafio ao direito de acesso à educação, devido às altas taxas de evasão escolar e também, em relação à aprendizagem significativa dos conhecimentos que são propostos nessa etapa da educação escolar, pois exigem maior reflexão e abstração.

> Sendo a finalidade do Ensino Médio garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea". (BRASIL, 2018, p. 464)

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC do Ensino Médio estão organizadas em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências humanas e sociais aplicadas, e para cada uma dessas áreas são definidas competências específicas. No âmbito de cada competência são descritas habilidades a serem desenvolvidas ao longo dessa etapa.

De acordo com a BNCC, as competências e habilidades que serão desenvolvidas no Ensino Médio buscam que, ao final dessa etapa, o aluno seja capaz de mobilizar todas elas para compreender e analisar situações da realidade e assim atuar na sociedade e no seu entorno de forma transformadora, consciente e ética.

6.1.3 A área de Matemática e suas tecnologias (Ensino Médio)

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Pode-se observar que a BNCC coloca o uso de tecnologias como uma ferramenta importante no processo de ensino aprendizagem de todas as áreas do conhecimento. No plano de aula elaborado no presente trabalho, buscou-se proporcionar a aprendizagem de conceitos sobre funções senóides e suas relações com o som (um conceito físico) e para isso fizemos uso do *software* Geogebra.

Além disso, a BNCC ressalta que no Ensino Médio, a área de Matemática e suas tecnologias deve aprofundar as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, de forma que o estudante desenvolva autonomia e possa construir uma visão integrada dessa área e sua aplicação à realidade.

Destacamos duas competências específicas que segundo (BRASIL, 2018, p. 531) devem ser desenvolvidas no Ensino Médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Com o intuito de explorar estas competências, desenvolvemos um plano de aula onde associamos funções senóides e seus gráficos com os sons que representam e investigamos como mudanças nos parâmetros destas funções alteram gráficos e sons correspondentes.

6.2 O Geogebra como recurso didático

O *software* Geogebra se popularizou como ferramenta para tornar o ensino de Matemática mais dinâmico e interessante. O *site* do programa oferece gratuitamente as opções de uso on-line ou *download*.

Segundo o *site* do programa: “O Geogebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos.”(GEOGEBRA, 2020)

Para a realização das atividades propostas no plano de aula, optou-se pelo uso dos aplicativos “Calculadora Gráfica do Geogebra” e “Som produzido pela função seno”.

Figura 30 – Tela inicial da Calculadora Gráfica do Geogebra

Fonte: https://www.geogebra.org/graphing

Dessa forma pode-se ter maior agilidade e melhor visualização dos gráficos das funções trigonométricas.

Além disso, para contextualização do tema, exploramos o aplicativo “Som produzido pela função seno” para traduzir as funções senóides em sons, observando-se como a modificação dos parâmetros nelas envolvidos modificam os sons correspondentes.

6.3 Plano de aula: Sons de senos

Conteúdo: Funções seno, cosseno, seus gráficos e variações destas.

Bimestre: 1º

Tempo previsto: 8 aulas

Ano: 2ª série do Ensino Médio

Materiais necessários: giz, lousa, papel milimetrado, computador ou celular para uso do *software* Geogebra

Metodologia: aula expositiva, dialogada, proposição e resolução de exercícios com ou sem uso de tecnologia

Pré-requisitos:

- Circunferência: arco, ângulo central, comprimento da circunferência
- Unidades de medida de arcos e ângulos: grau, radiano e comprimento de um arco

- Ciclo trigonométrico: arco orientado, ciclo trigonométrico e arcos côngruos
- seno e cosseno da soma e da diferença e paridade destas funções

Habilidade da BNCC (EM13MAT306): Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Objetivos:

- Motivar os estudos das senóides e suas variações $y = a + b\,\mathrm{sen}\,cx$, relacionando-os com os sons que elas representam, investigando o papel dos parâmetros a, b e c nos correspondentes gráfico e som produzidos.

Desenvolvimento:

6.3.1 1ª AULA: Introdução ao estudo das funções seno e cosseno

Os estudos realizados nos anos anteriores sobre trigonometria estavam relacionados estritamente a situações problema no triângulo retângulo. Na 2ª série do Ensino Médio ampliaremos este conceito e abordaremos seno e cosseno como funções.

Segundo Lima *et al.* (2001, p. 241): "As funções trigonométricas possuem a propriedade fundamental de serem periódicas. Assim, são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, como: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc."

Neste plano de aula abordaremos a importância das funções trigonométricas, especificamente as funções senóides, para descrever ondas sonoras (as mais elementares). Antes de iniciar a atividade será apresentado ao aluno o aplicativo do Geogebra "Som produzido pela função seno", esse aplicativo oferece a possibilidade de relacionar sons a gráficos, e será utilizado com mais detalhes em uma atividade posterior.

Destacamos que não é objetivo deste plano explicar o fenômeno do som, que é objeto de estudo da disciplina de Física. Seria interessante que o professor de Matemática entrasse em contato com o professor de Física para que , entre outras coisas, uniformizassem a linguagem e as notações.

Inicialmente será mencionado que as ondas sonoras podem ser modeladas por funções e que essas funções podem ser representadas graficamente.

Como forma de primeiro contato dos alunos com gráficos de funções trigonométricas, usaremos o aplicativo mencionado para emitir um som grave. E os alunos serão questionados de como seria o gráfico que modela esse som. Logo após seria apresentado o gráfico correspondente ao som, destacando-se seu caráter oscilatório e periódico.

Em seguida, seria emitido um som mais agudo. E os alunos seriam questionados sobre que característica foi modificada nesse som, e se o gráfico da função que o representa teria o mesmo formato do gráfico daquela apresentada anteriormente.

Logo após, seria apresentado o gráfico correspondente ao som mais agudo e seria mencionado aos alunos que o formato do gráfico não sofreu alterações mas que as “ondas” do gráfico foram “espremidas horizontalmente”.

Depois apresentaríamos um dos sons anteriores, mas com intensidade (vulgo volume) maior e, em seguida, apresentaríamos o gráfico da função que o representa. Destacando que agora, o gráfico foi “esticado verticalmente”.

Será destacado que foram apresentadas as representações gráficas dos tipos de funções que serão estudadas a seguir.

ATIVIDADE 1: Introdução ao conceito de função seno e função cosseno

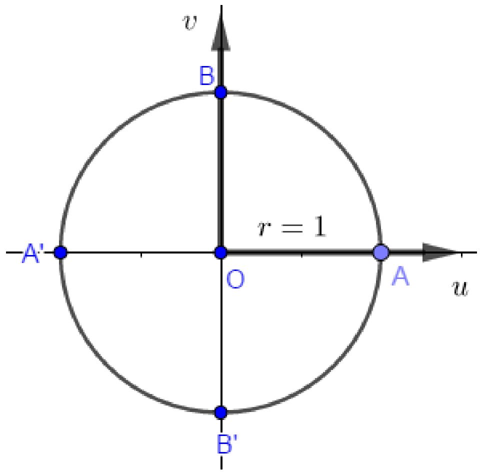
Para realizar a primeira atividade proposta, os alunos já desenvolveram em aulas anteriores a definição de radianos e a conversão de ângulos mais comuns de graus para radianos. Também já tem certa familiaridade com o ciclo trigonométrico, pois desenvolveram atividades sobre redução ao primeiro quadrante para arcos com medida entre $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$, ou seja, relacionar o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do primeiro quadrante.

Considerando que os alunos apreenderam esses conceitos, essa primeira aula busca introduzir o conceito de seno e cosseno de números reais.

Para isso, será feita uma retomada, com a construção na lousa, de forma detalhada, do ciclo trigonométrico. Em seguida, definiremos as funções seno e cosseno.

Tomemos uma circunferência $\mathscr{C}$ de centro O, na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais uOv, e raio igual a 1.

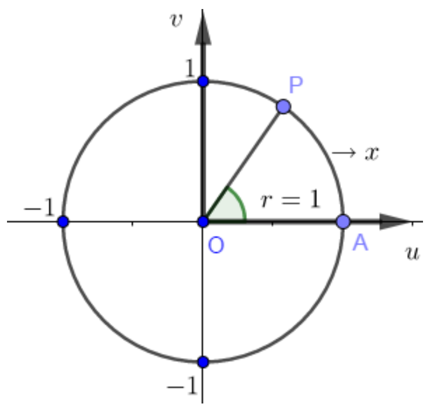
Figura 31 – Ciclo trigonométrico



Fonte: próprio autor

Seja $(0,0)$ a origem da circunferência e o ponto $A = (1,0)$. Vamos agora definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre $\mathscr{C}$, isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência da seguinte forma:

Figura 32 – Percorrendo o ciclo trigonométrico



Fonte: próprio autor

1. se $x = 0$, então P coincide com A;

2. se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

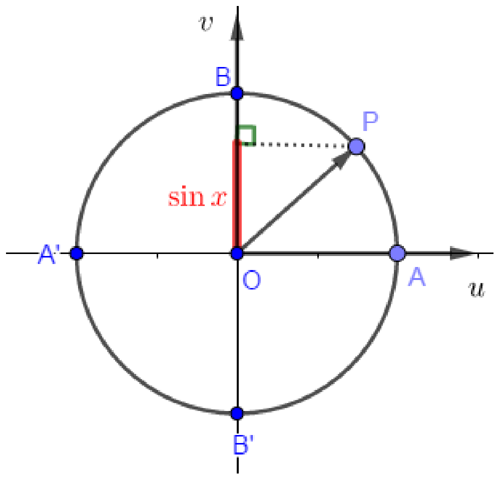
3. se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

O ponto P associado a x é chamado de imagem de x no ciclo.

Uma vez que a qualquer real x associamos um ponto P sobre o ciclo trigonométrico, segundo o sistema de coordenadas $u0v$, P terá uma ordenada e uma abscissa. Tais números serão utilizados para definirmos as funções seno e cosseno.

Definiremos a função seno, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x a ordenada do correspondente ponto P no ciclo trigonométrico, e denotaremos $f(x) = \operatorname{sen} x$.

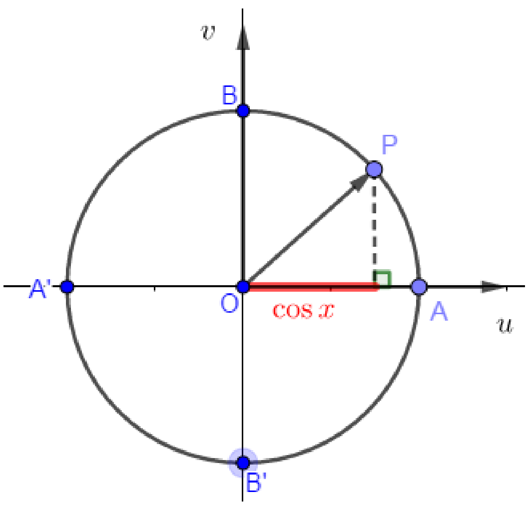
Figura 33 – Função seno



Fonte: próprio autor

De modo análogo ao anterior, definiremos a função cosseno, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x a abscissa do correspondente ponto P no ciclo trigonométrico, e denotaremos $f(x) = \cos x$.

Figura 34 – Função cosseno



Fonte: próprio autor

Ao final da explicação os alunos deverão realizar a construção dos gráficos das funções seno e cosseno, e para conhecer a forma desses gráficos, essa construção será feita em papel milimetrado.

Primeiramente, deverão construir uma tabela com os valores de seno de x e cosseno de x.

Tabela 17 – Determinando os valores de seno e cosseno para os arcos notáveis

ângulo x (em graus)	arco x (em radianos)	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \cos x$
0	0	0	1
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180	π	0	-1
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360	2π	0	1

Fonte: próprio autor

Com os valores obtidos deverão construir, em papel milimetrado, o plano cartesiano e esboçar o gráfico das funções seno e cosseno. Para isso usarão como valores aproximados $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$.

Após a construção, e através da análise dos valores da tabela e dos gráficos construídos, identificarão domínio e imagem das funções, verificando que nos dois casos tanto o domínio da função $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ será $D = \mathbb{R}$, bem como a imagem de ambas será $Im = [-1, 1]$.

Os alunos deverão ser levados a observar que após um ciclo completo de tamanho 2π, as funções repetem seu comportamento. Assim serão convidados a esboçar o gráfico no intervalo $[2\pi, 4\pi]$. E então, definiremos 3 elementos importantes associados a tais funções:

Período (T)**:** tamanho do menor intervalo onde ocorre uma oscilação completa. Matematicamente, $T > 0$ é tal que $f(x) = f(x+T)$ para todo x.

Frequência (ω)**:** $\omega = \frac{1}{T}$

Amplitude de oscilação (A)**:** é a metade da diferença entre o maior valor e o menor valor que a função atinge num ciclo.

$$A = \frac{(\text{valor} \quad \text{máx.} - \text{valor} \quad \text{mín.})}{2}$$

No caso $f(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi) = f(x+2\pi)$ e $f(x) = \cos x = \cos(x+2\pi) = f(x+2\pi)$, isto é, para ambas as funções, $T = 2\pi$, já que estas funções foram definidas sobre o ciclo trigonométrico e um ciclo completo tem tamanho 2π. Aqui também podemos recordar a fórmula de seno e cosseno da soma de arcos e assim confirmar matematicamente o que vemos através da representação do ciclo trigonométrico.

Em seguida, os alunos destacarão esses elementos na função seno e cosseno, obtendo os seguintes valores:

Tabela 18 – Elementos da função seno

$y = \operatorname{sen} x$			
Período	**Frequência**	**Amplitude**	**Imagem**
$T = 2\pi$	$\omega = \frac{1}{2\pi}$	$A = 1$	$[-1, 1]$

Fonte: próprio autor

Tabela 19 – Elementos da função cosseno

$y = \cos x$			
Período	**Frequência**	**Amplitude**	**Imagem**
$T = 2\pi$	$\omega = \frac{1}{2\pi}$	$A = 1$	$[-1, 1]$

Fonte: próprio autor

Ao final da aula, com auxílio do Geogebra, seriam apresentados gráficos da função original e também gráficos em que o período, frequência ou amplitude sejam diferentes da função seno original. Por exemplo, os gráficos das seguintes funções: $y = 2\operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$, em seguida, seria perguntado para os alunos: Parece uma função seno? O que difere da original?

Além disso, também com o auxílio do Geogebra seria usado pelo professor, o *software* “O som produzido pela função seno”, para mostrar os sons e gráficos correspondentes as funções $y = 15\operatorname{sen}(80\pi x)$ e $y = 8.6\operatorname{sen}(440\pi x)$, e deixaríamos a pergunta: o que existe de diferente em cada som e qual a relação com os gráficos apresentados?

Salientamos que, neste primeiro momento, apenas os gráficos seriam apresentados, mas não as funções que os representam. Por fim, destacaria que todas essas questões serão estudadas nas aulas seguintes.

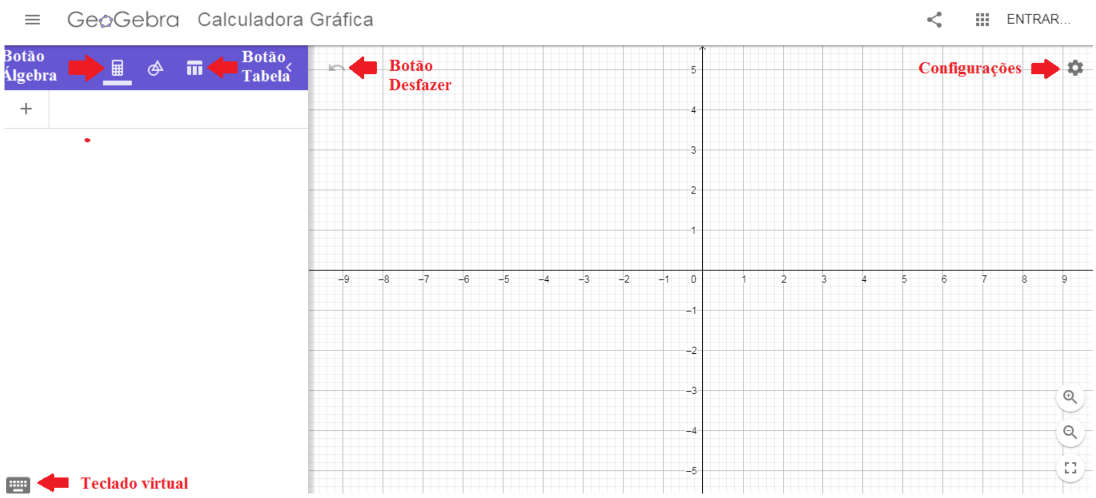
6.3.2 2ª AULA: Apresentando o Geogebra

Para dar maior agilidade na construção dos gráficos das funções que serão analisadas faremos uso do *software* Geogebra, em específico, do aplicativo Calculadora Gráfica.

Esta aula se dedica a apresesentar aos alunos o *software* Geogebra e suas funcionalidades. Para isso, refaremos a construção dos gráficos das funções seno e cosseno. Mas poderá ser omitido caso os alunos tenham familiaridade com o mesmo.

Ao abrir o aplicativo os alunos verão uma tela com a seguinte aparência e funções:

Figura 35 – Tela inicial do aplicativo Calculadora Gráfica



Fonte: próprio autor

Botão Álgebra: quando acionado permite que seja digitado o comando sobre as funções cujo gráfico desejamos esboçar.

Botão Tabela: quando ativado exibe uma tabela de valores para uma dada função.

Botão Desfazer: desfaz sua atividade passo a passo.

Configurações: nesse campo é possível decidir se irá exibir eixos, malha, entre outros. E também é possível formatar os eixos e malha.

Teclado virtual: é possível inserir as expressões algébricas no teclado do computador e também através do teclado virtual embutido.

Em um primeiro momento, os alunos irão conhecer cada um desses comandos, manipulando de forma livre cada um deles.

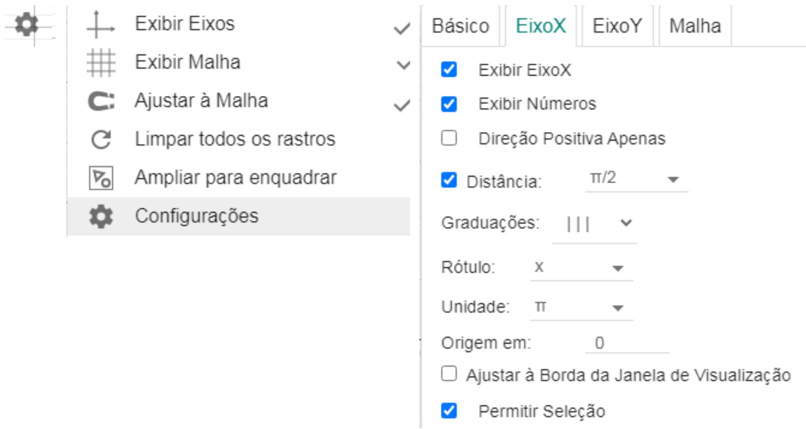
Ao abrir o aplicativo, o botão Álgebra já estará selecionado, e os alunos realizarão a construção de gráficos de funções que já conhecem, como função afim ou quadrática. Para isso, basta digitar no campo "Entrada"a função desejada.

Depois desse primeiro contato, será realizada a construção dos gráficos das funções seno e cosseno. Para isso, será necessário alterar as configurações do eixo x.

O aluno irá alterar a unidade de medida do eixo x para radiano, e o eixo x será dividido em intervalos de $\frac{\pi}{2}$.

Essa alteração será feita da seguinte maneira:

Figura 36 – Configurando o eixo x

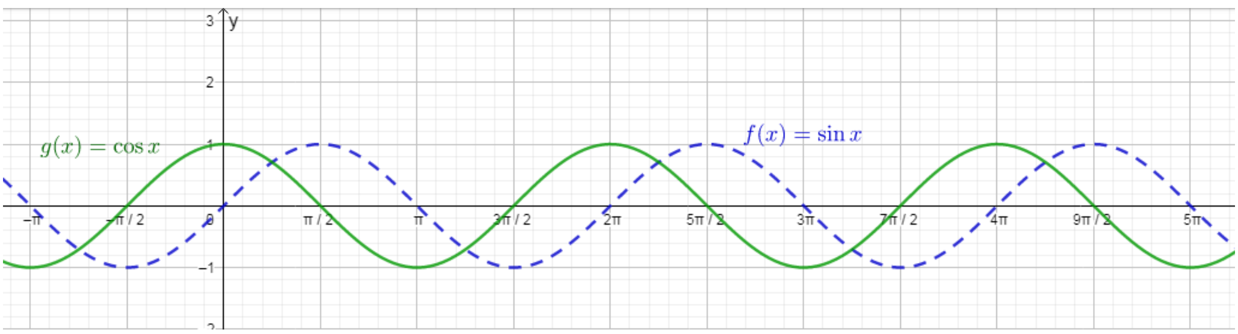


Fonte: próprio autor

Em seguida, farão a construção dos gráficos seno e cosseno em um mesmo plano cartesiano, para isso, é necessário com o auxílio do teclado virtual digitar a função: $y = \operatorname{sen} x$ no campo de entrada algébrica. Da mesma forma, digitar a função $y = \cos x$ no campo de entrada algébrica.

Aqui será chamada a atenção para que os alunos comparem os gráficos com os valores obtidos na Tabela 16, que foi registrada pelo aluno em seu caderno na aula anterior.

Figura 37 – Funções seno e cosseno



Fonte: próprio autor

Após a construção, será feita a retomada dos elementos das funções trigonométricas, definidos na aula passada: período, frequência, amplitude e imagem.

Também será observado que um gráfico é o deslocamento horizontal do outro em $\frac{\pi}{2}$ unidades e, relembrado através da propriedade do seno da soma de ângulos que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x = \cos x$. Desta forma, diremos que a função $y = \cos x$ está na classe das funções senóides, pois em essência é a função seno deslocada para esquerda em $\frac{\pi}{2}$ unidades.

6.3.3 3ª AULA: "Achatando e esticando" as funções seno e cosseno

6.3.3.1 Estudando as funções $y = b\,\mathrm{sen}(cx)$ e $y = b\cos(cx)$

Para que os alunos entendam com mais facilidade os modelos físicos que envolvem a função seno e suas variações, será importante que saibam esboçar os gráficos de tais funções. Bem como, a partir de gráficos dados, consigam descrever as funções que estes representam.

Nas aulas que seguem propomos que os alunos construam gráficos e reconheçam as propriedades de funções do tipo $y = a + b\,\mathrm{sen}(cx)$ e $y = a + b\cos(cx)$, comparando-as com as funções elementares $y = \mathrm{sen}\,x$ e $y = \cos x$. Por meio de tal comparação, os alunos poderão, através das atividades propostas, investigar o papel de cada parâmetro a, b e c no gráfico correspondente da função associada. Nas explanações a seguir, daremos prioridade às funções envolvendo senos, já que o mesmo pode ser feito com as que envolvem cosseno.

Para dar maior dinamismo às atividades, usaremos o *software* Geogebra na construção dos gráficos.

Estudaremos inicialmente funções com parâmetros $b, c > 0$. Dividiremos inicialmente a investigação explorando primeiramente as funções $f(x) = b\,\mathrm{sen}\,x$ e em seguida $f(x) = b\,\mathrm{sen}\,cx$.

ATIVIDADE 2:

Funções $y = b\,\mathrm{sen}\,x$ **e** $y = b\cos x$**,** $(b > 0)$

Para realizar o estudo de tais funções, os alunos completarão a tabela com o valores de alguns arcos notáveis e construirão os gráficos das funções $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$ e $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$ no Geogebra.

A elaboração da tabela levará em conta os valores que marcam a divisão entre os quadrantes do ciclo trigonométrico, isto é, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

Tabela 20 – Comparando $y = \mathrm{sen}\,x$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$ e $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$

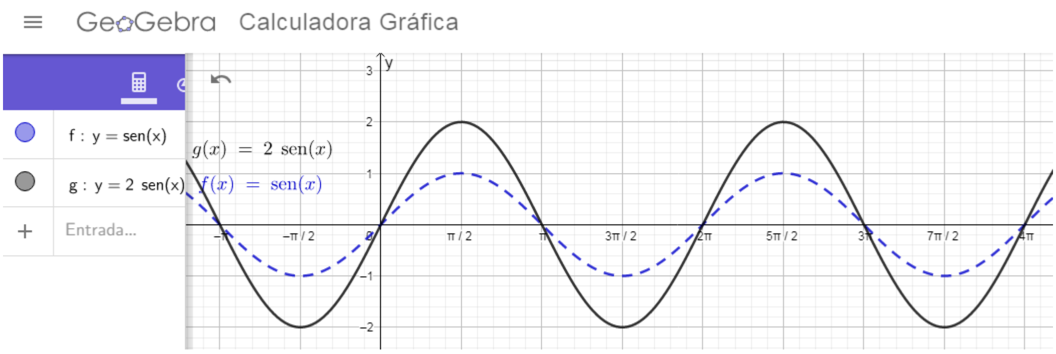
x	$y = \mathrm{sen}\,x$	$y = 2\,\mathrm{sen}\,x$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

x	$y = \mathrm{sen}\,x$	$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
2π	0	0

Fonte: próprio autor

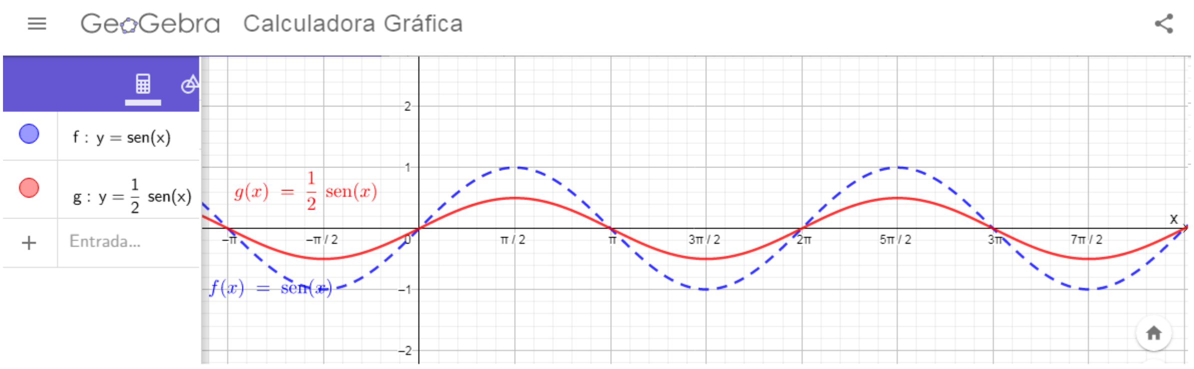
Após a construção da tabela os alunos farão a construção, na Calculadora Gráfica do Geogebra, dos gráficos dessas funções, sempre comparando cada uma delas com a função elementar $y = \operatorname{sen} x$. Também determinarão os elementos: período, frequência, amplitude e imagem dessas funções.

Figura 38 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 \operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Figura 39 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Levaremos os alunos a construírem a seguinte tabela:

Tabela 21 – Determinando os elementos das funções

	$y = \operatorname{sen} x$	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$
Período (T)	2π	2π	2π
Frequência (ω)	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$
Amplitude (A)	1	2	$\frac{1}{2}$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-2, 2]$	$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Fonte: próprio autor

E analisando todos esses dados, responderão às seguintes questões:

Responda:

1)Qual a diferença entre os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 \operatorname{sen} x$?

2)Qual a diferença entre os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$?

3)Qual a relação entre $y = \operatorname{sen} x$ e $y = b \operatorname{sen} x$, para $b \neq 1$ e $b > 0$? Analise período, frequência, amplitude e imagem.

4) Para que valores de $b > 0$ o gráfico será achatado verticalmente e para quais valores de $b > 0$ será esticado verticalmente ?

Resolução:

1)Espera-se que o aluno observe que a constante 2 "esticou verticalmente" o gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$.

2)Espera-se que o aluno observe que a constante $\frac{1}{2}$ *"achatou verticalmente" o gráfico da função* $y = \operatorname{sen} x$.

3)Busca-se que após a realização da atividade o aluno perceba que período e frequência não foram alterados. No entanto, a constante b alterou a amplitude da senóide de 1 para b, e consequentemente a imagem que passou a ser $[-b, b]$.

4) Se $b > 1$ *o gráfico será esticado verticalmente e se* $0 < b < 1$ *será achatado verticalmente.*

Logo deverão concluir que vale a tabela a seguir.

Isto é,

Tabela 22 – Elementos de $y = b \operatorname{sen} x$, $b \neq 1, b > 0$

$y = b \operatorname{sen} x$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
2π	$\frac{1}{2\pi}$	b	$[-b, b]$

Fonte: próprio autor

De modo análogo, podemos realizar essa sequência didática para o estudo da função $y = b \cos x$.

6.3.3.2 Estudando as funções $y = b \operatorname{sen} cx$ e $y = b \cos cx$, $(b, c > 0)$

Inicialmente analisaremos as funções $y = \operatorname{sen} cx$. Para isso, os alunos irão completar uma tabela com valores de alguns arcos notáveis da função $y = \operatorname{sen} 2x$ e, em seguida, construirão com o auxílio do Geogebra os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ em um mesmo plano cartesiano.

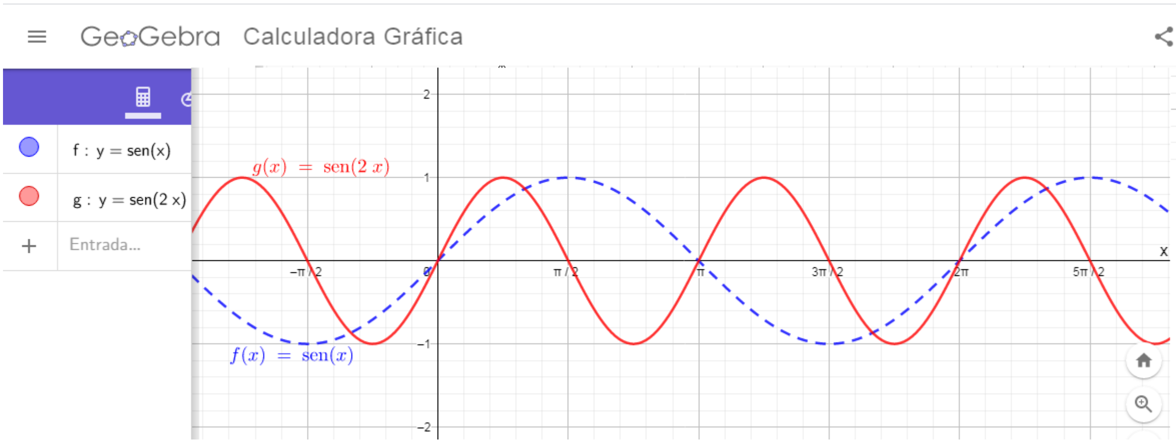
Como conhecemos os valores de seno sobre os arcos notáveis: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, vamos orientar os alunos a primeiramente atribuir a $2x$ os valores dos arcos notáveis na primeira coluna , depois preencherem a segunda e por fim a terceira coluna da tabela.

Tabela 23 – Determinando os valores de $y = \operatorname{sen} 2x$ para os arcos notáveis

$2x$	x	$y = \operatorname{sen} 2x$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

Fonte: próprio autor

Figura 40 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$



Fonte: próprio autor

Analisando os dois gráficos no intervalo $[0, 2\pi]$, a função $y = \operatorname{sen} 2x$ teve duas oscilações completas, isto é, seu período caiu pela metade em relação a $y = \operatorname{sen} x$.

Consequentemente sua frequência dobrou em relação a $y = \operatorname{sen} x$. Mas suas imagem e amplitude mantiveram-se iguais à de $y = \operatorname{sen} x$.

Então deverão responder:

1)Determine o período, frequência, amplitude e imagem de $y = \operatorname{sen} 2x$.

2) Como você escreveria todos os pontos onde $y = \operatorname{sen} 2x$ atinge o seu valor máximo?

Resolução:

1)Do gráfico, é possível verificar que a nova função oscila mais vezes no intervalo 2π *que* $y = \operatorname{sen} x$. *Temos que o período* $T = \pi$, *pois a nova função precisou de um intervalo de tamanho* π, $[0, \pi]$, *para ter uma oscilação completa. Consequentemente oscilou 2 vezes mais que* $y = \operatorname{sen} x$ *no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Como o valor máximo que esta função assume é 1 e o mínimo é -1, *concluímos que a* *amplitude será;*

$$A = \frac{\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}}{2} = \frac{[1-(-1)]}{2} = 1$$

Assim, temos que:

Tabela 24 – Determinando os elementos das funções

	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 2x$
Período (T)	2π	π
Frequência (ω)	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{\pi}$
Amplitude (A)	1	1
Imagem	$[-1,1]$	$[-1,1]$

Fonte: próprio autor

Confirmando matematicamente, se $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ *então* $f(x+\pi) = \operatorname{sen}(2(x+\pi)) = \operatorname{sen}(2x+2\pi) = \operatorname{sen} 2x = f(x)$ *para todo x. Logo* $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ *é* π *periódica. Assim sua frequência é* $\omega = \frac{1}{\pi}$ *que é o dobro da frequência de* $y = \operatorname{sen} x$.

Conclusão: o período diminuiu e consequentemente a frequência aumentou. Já a imagem permanece no intervalo $[-1,1]$.

2)Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, *assim quando* $2x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} 2x = 1$. *E isso ocorrerá para* $2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{4}$, *isto é,* $\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

Além disso, vimos através do gráfico que $T = \pi$, *logo para todos os valores* $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{4} + k\pi$ *teremos que* $\operatorname{sen} 2x = 1$. *(Ver o gráfico).*

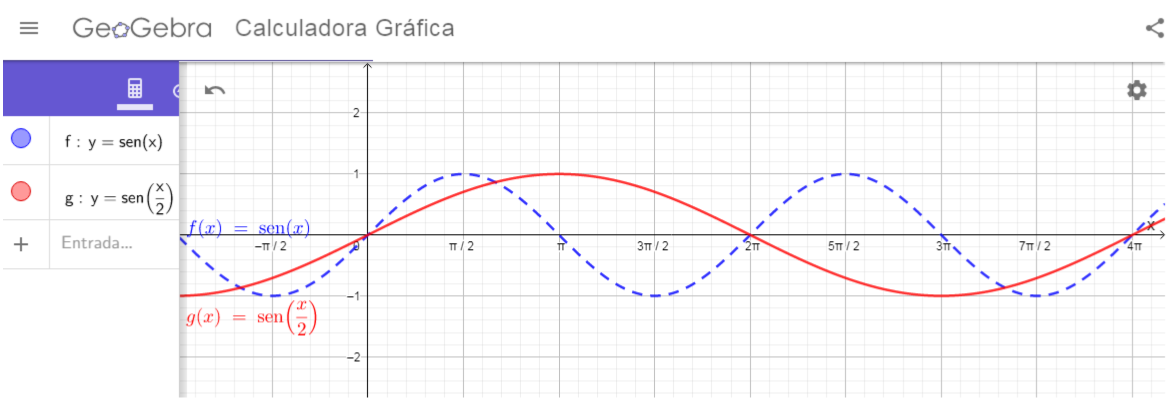
Da mesma forma, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Novamente, como conhecemos os valores de seno sobre os valores dos arcos notáveis: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, vamos orientar os alunos a preencherem primeiramente a primeira coluna atribuindo a $\frac{x}{2}$ os valores dos arcos notáveis, depois a segunda e por fim a terceira coluna.

Tabela 25 – Determinando os valores de $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$ para os arcos notáveis

$\frac{x}{2}$	x	$y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-1
2π	4π	0

Fonte: próprio autor

Figura 41 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$



Fonte: próprio autor

Responda:

3)Comparando as funções $= \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, analise os elementos período, frequência, amplitude e imagem.

4)Investigue qual a diferença entre os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} cx$, com $c > 0$.

Resolução:

3)Da análise da tabela e do gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, os alunos poderão observar que em relação a função $y = \operatorname{sen} x$, a amplitude e imagem se mantiveram inalteradas.

Já o período ficou maior pois a função completa um ciclo no intevalo de 4π e, consequentemente a frequência diminuiu.

Tabela 26 – Determinando os elementos das funções

	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 2x$	$y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
Período (T)	2π	π	4π
Frequência (ω)	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
Amplitude (A)	1	1	1
Imagem	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-1,1]$

Fonte: próprio autor

4))Espera-se que os alunos percebam que a constante $c > 0$ altera o período e, consequentemente a frequência, da função seno original.

Sabemos que a função seno é periódica e seu período é 2π, isto é, para todo u temos $\operatorname{sen}(u) = \operatorname{sen}(u + 2\pi)$.

Assim se $f(x) = \operatorname{sen} cx$ então $f(x + \frac{2\pi}{c}) = \operatorname{sen}(cx + 2\pi) = \operatorname{sen}(cx) = f(x)$ e portanto

$f(x) = f(x + \frac{2\pi}{c})$ *para todo x. Logo,*

$$T = \frac{2\pi}{c} \text{ é o período de } f(x) = \operatorname{sen} cx, c > 0$$

e portanto sua frequência é $\frac{c}{2\pi} = c \cdot \frac{1}{2\pi}$, *isto é, c vezes a frequência de* $\operatorname{sen} x$.

Observamos que quando $0 < c < 1$ o período aumenta e consequentemente a frequência diminui. Já se $c > 1$ o período diminui e a frequência aumenta.

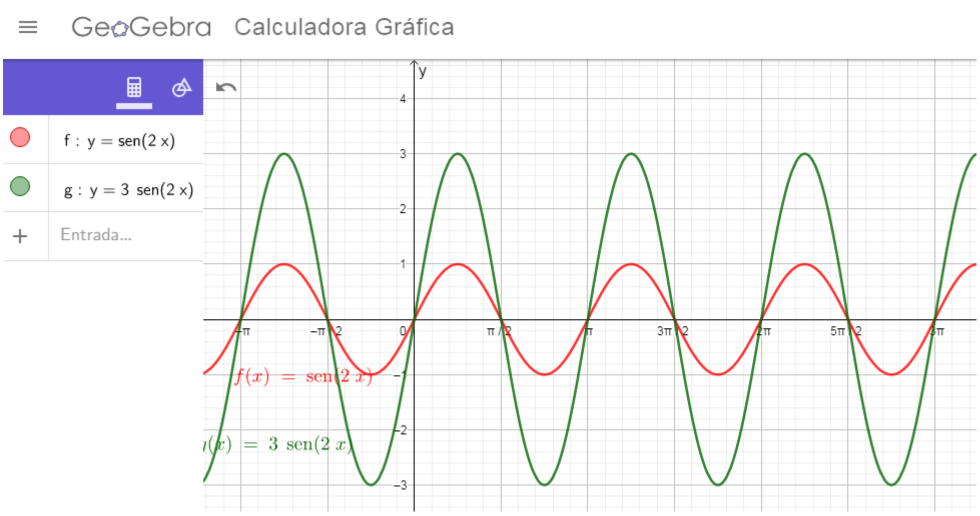
Podemos agora, propor aos alunos o estudo das funções $= b \operatorname{sen} cx$. Para tal análise, faremos a construção de tabela e gráfico das seguintes funções: $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

Tabela 27 – Comparando $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

$2x$	x	$y = \operatorname{sen} 2x$	$y = 3 \operatorname{sen} 2x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	3
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	-3
2π	π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 42 – Comparando $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

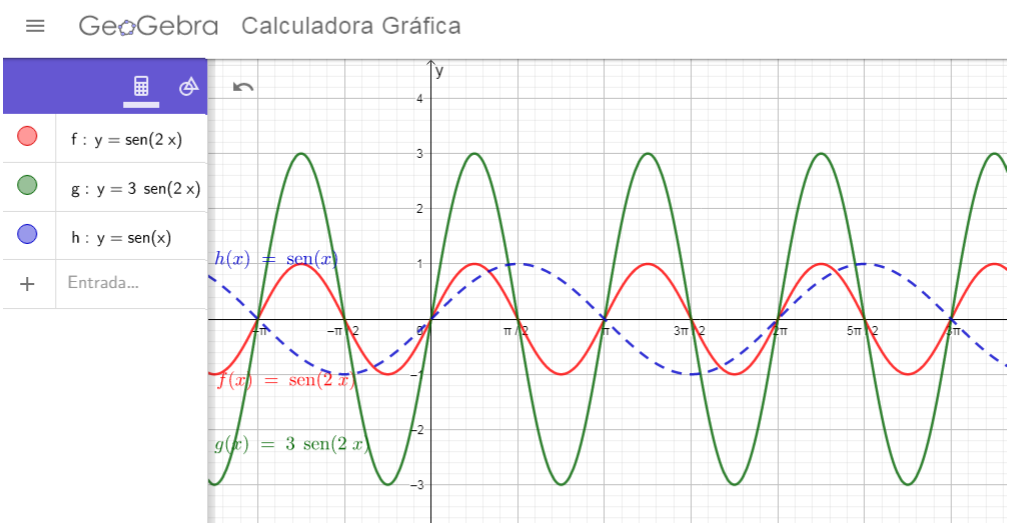


Fonte: próprio autor

Após as construções, os alunos serão questionados sobre as transformações observadas nos elementos T, ω, A e imagem das funções.

Em seguida, será feita por meio da construção de gráficos no Geogebra, a comparação entre a função elementar $y = \operatorname{sen} x$ e as funções $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

Figura 43 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} 2x$ e $y = 3\operatorname{sen} 2x$



Fonte: próprio autor

Da observação dos gráficos dados, os alunos obterão os seguintes valores para os elementos das funções:

Tabela 28 – Elementos das funções

	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 2x$	$y = 3\operatorname{sen} 2x$
Período (T)	2π	π	π
Frequência (ω)	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$
Amplitude (A)	1	1	3
Imagem	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-3,3]$

Fonte: próprio autor

Com a investigação realizada nos exemplos dados, os alunos serão levados a concluírem que para $b, c > 0$ temos que:

Tabela 29 – Elementos da função $y = b\operatorname{sen} cx, c > 0$

$y = b\operatorname{sen} cx$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
$\frac{2\pi}{c}$	$\frac{c}{2\pi}$	b	$[-b,b]$

Fonte: próprio autor

Concluíremos observando que o parâmetro b modifica a amplitude e consequentemente a imagem da função seno original, achatando-a verticalmente quando $0 < b < 1$ e esticando-a se $b > 1$. Já o parâmetro c é responsável por alterar o período, e consequentemente a frequência da oscilação. Esticando a gráfico horizontalmente se $0 < c < 1$ e comprimindo horizontalmente se $c > 1$.

6.3.4 4ª AULA: Sons de senos

Qual a relação entre funções trigonométricas e ondas sonoras?

Essa aula tem como objetivo mostrar aos alunos como as funções senóides estão relacionadas com o som, um fenômeno físico que observamos no nosso cotidiano.

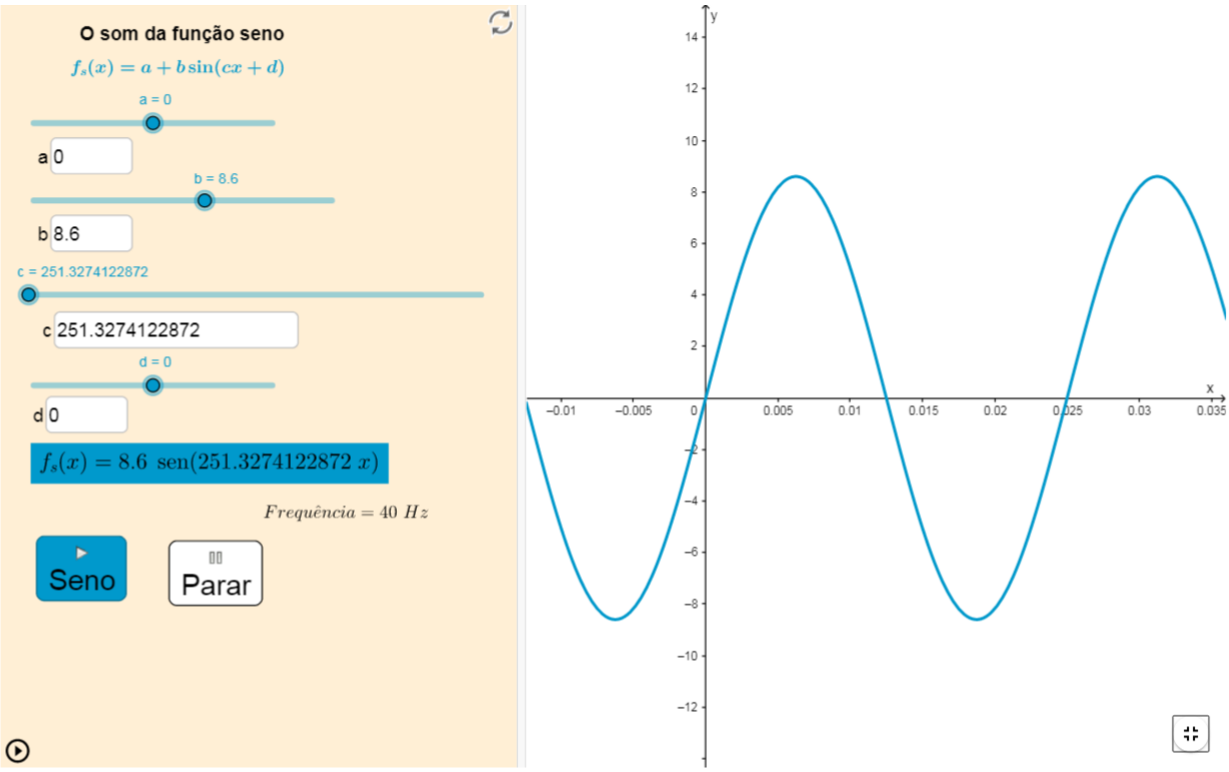
Não daremos explicações físicas sobre o que é o som. O ideal é que este conteúdo fosse dado simultaneamente pelos docentes de Física e de Matemática, o que é possível, já que o conceito de som é explorado pela disciplina de Física também no segundo ano do Ensino Médio. Se isso não for feito de modo simultâneo, seria interessante contatar o professor da disciplina de Física, relatando o que será explorado através da Matemática.

Com isso esperamos que a associação de um gráfico com o som que ele representa, reforce o entendimento do papel dos parâmetros b, c na função $y = b\,\text{sen}\,cx$.

Para isso, utilizaremos como recurso didático, a atividade do Geogebra, "O som da função seno" de autoria de Lemke (2018), que associa funções senóides com os sons correspondentes.

Para acessar a atividade no *site* do Geogebra, clique na opção Materiais. Ao clicar, serão exibidas atividades de diversos conteúdos matemáticos. No campo de pesquisa digite o título da atividade: "O som poduzido pela função seno" ou "O som da função seno".

Figura 44 – Atividade: O som do seno



Fonte:https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0
(LEMKE, 2018)

A atividade apresenta inicialmente o gráfico da função $y = b\,\text{sen}\,cx$, onde $b = 8.6$ e a frequência desta oscilação é $\omega = 40$. Como a frequência é dada por $\omega = \frac{c}{2\pi}$ concluímos que $c = 2\pi\omega = 251,3274122872$. Assim nesta curva, $b = 8.6$ e $c = 251,3274122872$.

Neste momento acionaremos o aplicativo “O som da função seno” do Geogebra e os alunos passarão a ouvir um som.

Então diremos que esta função descreve uma onda sonora com frequência de 40 Hz (Hertz ou ciclos por segundo) que é a unidade que mede a frequência de ondas sonoras.

Convidamos então os alunos a modificarem os parâmentros b e c e anotarem as caracterísiticas sonoras de cada som produzido.

Primeiramente os alunos manterão fixo $b = 8.6$ e $c = 251.3272...$, e irão ouvir o som correspondente a estes parâmetros.

Depois irão aumentar e diminuir b, mantendo c fixo, e deverão responder:

1. O que ocorre quando aumentamos b?
2. O que ocorre quando diminuímos b?

Resolução:

Os alunos perceberão que o som que ouvem é o mesmo, mas a intensidade (que vulgarmente conhecemos como volume do som) aumenta se b aumenta, e diminui se b diminui. Assim observando o gráfico e som correspondente a uma mesma função, vemos que variando b variamos a amplitude do gráfico e em correspondência, o “volume” ou intensidade do som.

Dessa forma, verificamos que alterando b temos o mesmo som, mas com intensidades diferentes.

Depois os alunos serão convidados a manter $b = 8.6$ e a aumentar e diminuir o valor de c, e deverão descrever o que ocorre.

Resolução:

Talvez eles tenham dificuldade de explicar que o som ficará mais agudo se aumentarmos c e mais grave se o diminuirmos. Pode ser que descrevam essas alterações como um som mais “fininho”.

Esta característica é denominada altura do som, e será salientado que não é altura no sentido de aumentar o volume do som. Mas que a altura caracteriza a frequência do som, isto é, se ele é mais agudo ou grave. Assim para uma frequência mais alta (maior) o som é mais agudo e para uma frequência mais baixa, o som será mais grave.

Deverão comparar o som ouvido com o correspondente gráfico e notar que quando aumentamos c o som fica mais agudo e a frequência da oscilação aumenta. Assim tal som também é dito de alta frequência ou alto. Já quando diminuímos c a frequência no correspondente gráfico diminui e o som fica mais grave, ou de baixa frequência ou baixo.

Assim os alunos perceberão que alterando-se c e mantendo-se b, a amplitude do gráfico não muda. Mas o que muda é a frequência de oscilação do gráfico, bem como a frequência do som.

Neste momento será esclarecido aos alunos que intensidade e altura são duas características que distinguem o som. (Existe outra característica denominada timbre, que não será tratado aqui.)

Além disso, o ouvido humano é capaz de perceber apenas sons com frequências entre 20 a 20000Hz (ou ciclos por segundo). Sons com frequências abaixo de 20 Hz ou acima de 20000 Hz não são perceptíveis ao ouvido humano.

Cada animal, tem uma faixa de percepção de sons. Por exemplo, cães ouvem sons com frequências entre 15 e 45000Hz, sapos entre 50 e 10000Hz, gatos entre 60 e 65000Hz e morcegos entre 1000 e 120000 Hz.

Após essa análise das alterações que os parâmetros b e c provocam no gráfico e som correspondente, os alunos aplicarão esses conceitos na atividade “Gincana dos sons”.

GINCANA DOS SONS

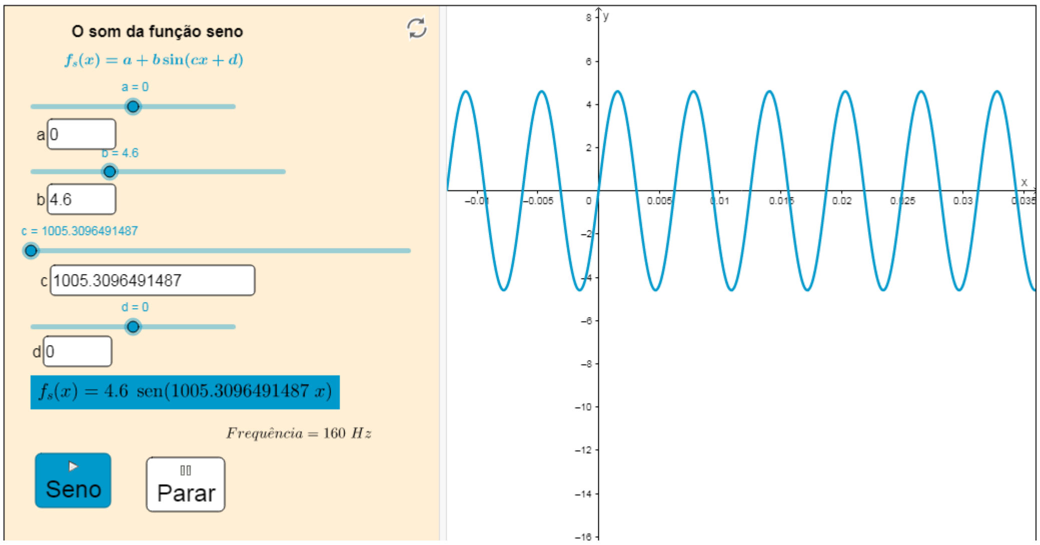
Para realizar a atividade os alunos serão divididos em equipes com 3 integrantes e cada equipe receberá os gráficos de algumas funções senóides impressos. (Ver Apêndice A).

Utilizando o aplicativo do Geogebra “O som da função seno”, usado anteriormente, serão apresentados alguns sons para os alunos. O objetivo deste exercício é fazer com que os alunos associem os sons apresentados com algum gráfico impresso na folha à eles entregue.

Foram escolhidos valores de b e c de forma que fosse mais fácil perceber as alterações sonoras. Primeiramente será emitido um som que denominaremos “som inicial”, que corresponde a seguinte função $f(x) = 4.6\,\text{sen}(320\pi x)$, após a apresentação será indicado o gráfico do correspondente som. Poderá ser feita a projeção do gráfico deste “som inicial” ou entregar para cada equipe uma folha com o gráfico.

Dessa forma, para realização da atividade, os alunos além das alterações sonoras, também utilizarão como parâmetro o gráfico do “som incial” .

Figura 45 – Atividade: Gincana dos sons



Fonte: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

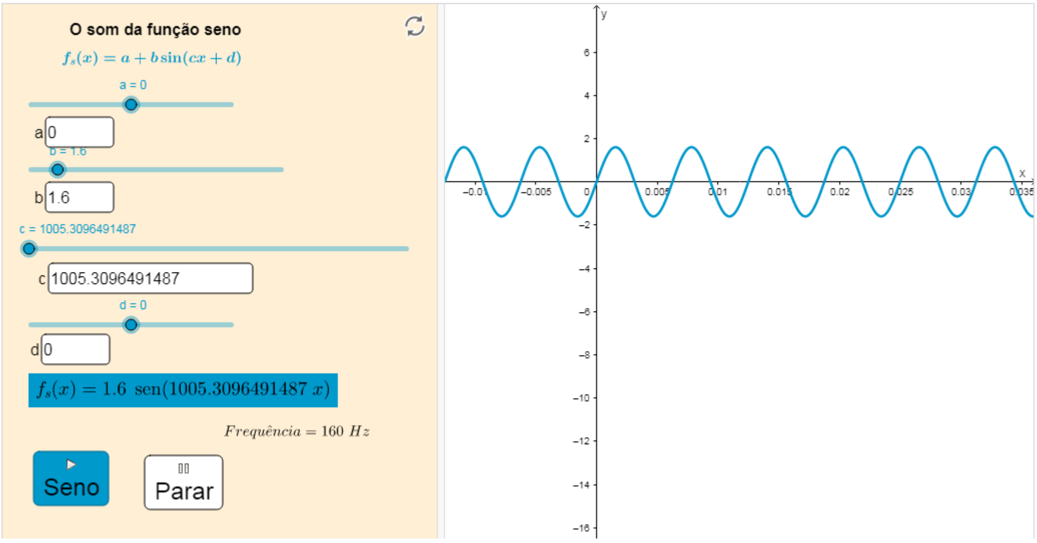
Logo após, será avisado aos alunos que serão feitas algumas alterações nos parâmetros da função que foi apresentada anteriormente, e que após ouvir o som será solicitado que tentem identificar que parâmetro foi alterado, se o valor do parâmetro aumentou ou diminuiu e qual dos gráficos que receberam é o gráfico correspondente a esse som.

Sempre apresentaremos o som inicial e depois o som alterado. Os alunos deverão comparar o novo som apresentado sempre em relação ao “som inicial” do aplicativo, e verificar que modificação foi realizada neste “som inicial”.

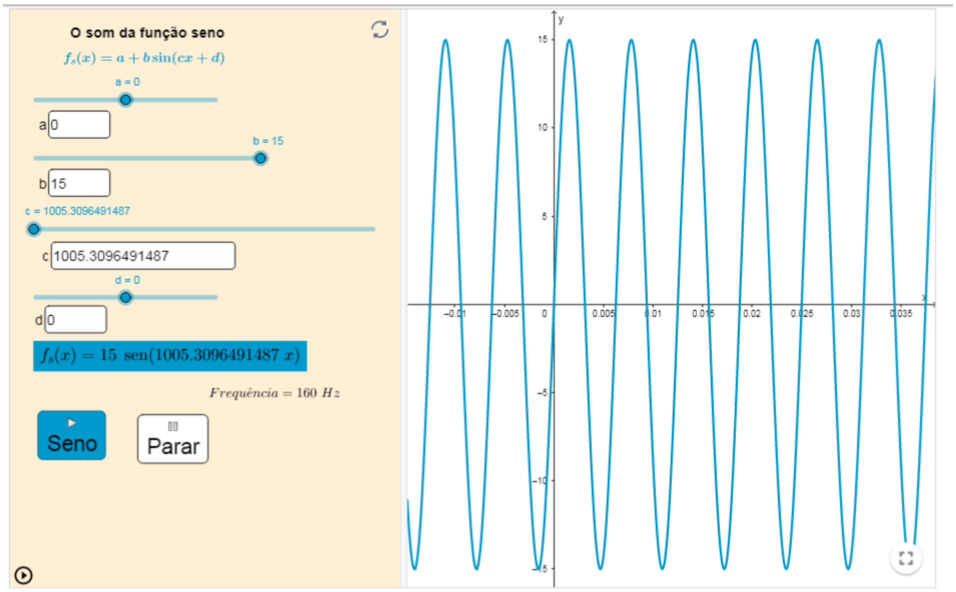
Para cada som apresentado, serão dados, dois minutos para que os integrantes das equipes discutam entre si sobre a alteração feita e o possível gráfico correspondente daquele som, após este intervalo de tempo a equipe deverá colocar no gráfico escolhido o número da ordem de apresentação daquele som. Por exemplo, para o primeiro som apresentado o gráfico correspondente deverá ser numerado com 1.

As primeiras alterações serão com relação à intensidade do som. O parâmetro c não será alterado e serão emitidos os sons de intensidade $b = 1.6$ e depois $b = 15$. Ou seja, ondas sonoras descritas pelas funções $f(x) = 1.6\,\mathrm{sen}(320\pi x)$ e $f(x) = 15\,\mathrm{sen}(320\pi x)$.

Figura 46 – Alterando a intensidade do som



Fonte: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0



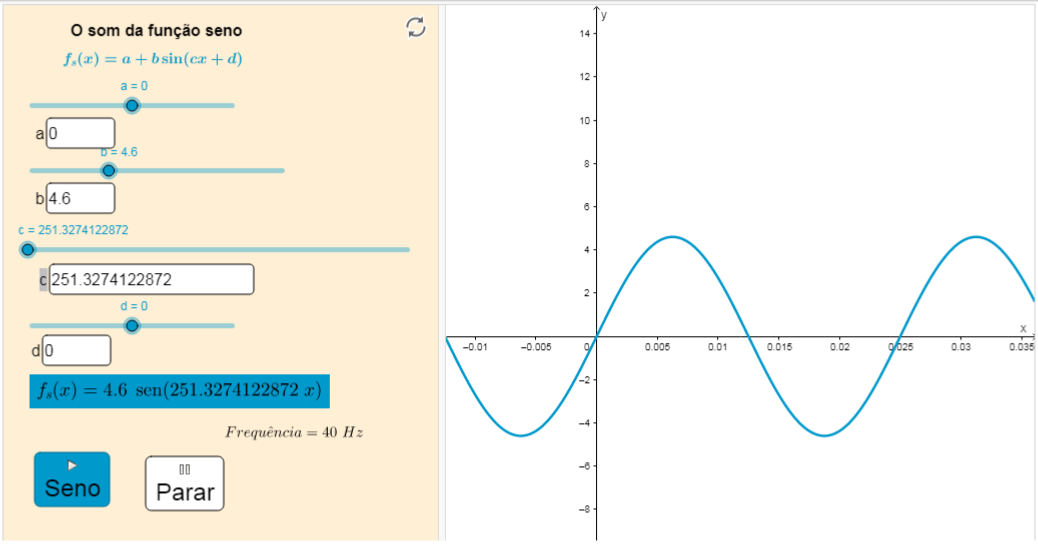
Fonte: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

Espera-se que o aluno perceba que o som é o mesmo e que apenas a intensidade mudou. Que a intensidade ou "volume" do som diminuiu no primeiro som apresentado, e que esse som deve ser associado ao gráfico de menor amplitude. E que no segundo som a intensidade é maior e que este som deve ser associado ao gráfico de maior amplitude.

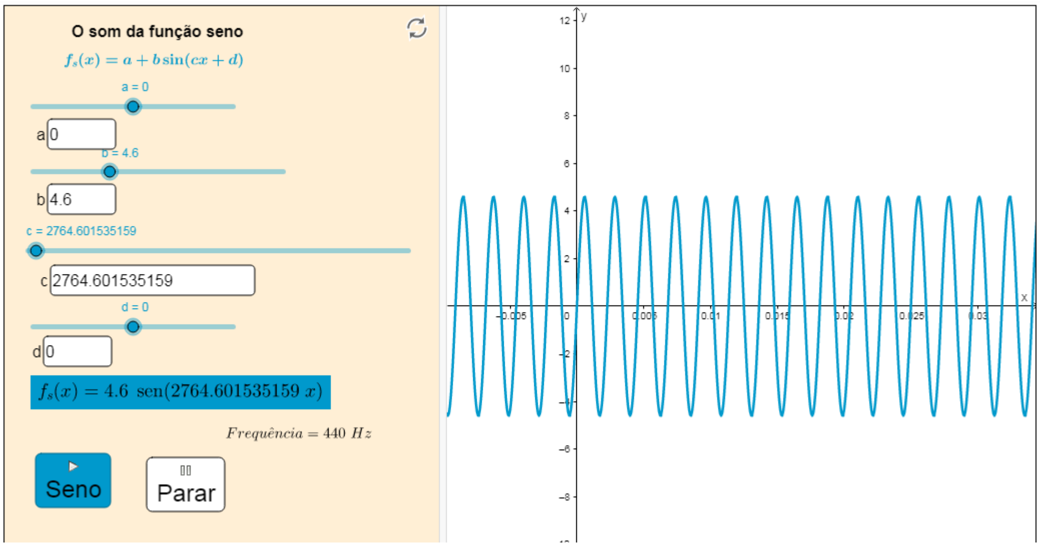
Agora, colocamos o parâmetro b original, ou seja, $b = 4.6$ e mantemos este valor fixo e faremos alterações no parâmetro c.

Serão emitidos sons com parâmetro $c = 40 \cdot 2\pi$, ou seja, som com frequência de 40 Hz. E, $c = 440 \cdot 2\pi$, ou seja, som com frequência de 440 Hz. Portanto, ondas sonoras descritas pelas funções $f(x) = 4.6\,\mathrm{sen}(80\pi x)$ e $f(x) = 4.6\,\mathrm{sen}(880\pi x)$.

Figura 47 – Alterando a altura do som



Fonte: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0



https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

Após a apresentação dos sons de diferentes frequências, espera-se que o aluno note a mudança na altura dos sons apresentados. Percebam que o som de 40 Hz será grave e o som de 440 Hz será mais agudo que o "som inicial" apresentado.

Por fim, que consigam associar estes sons aos correspondentes gráficos, verificando que o som mais grave corresponde ao gráfico de maior período e consequentemente menor frequência. E o som mais agudo ao gráfico com menor período e consequentemente maior frequência.

Ao final da atividade as equipes pontuarão a cada gráfico numerado corretamente com o correspondente som.

6.3.5 5ª AULA: Estudando os gráficos para constantes $-b, -c$ negativas

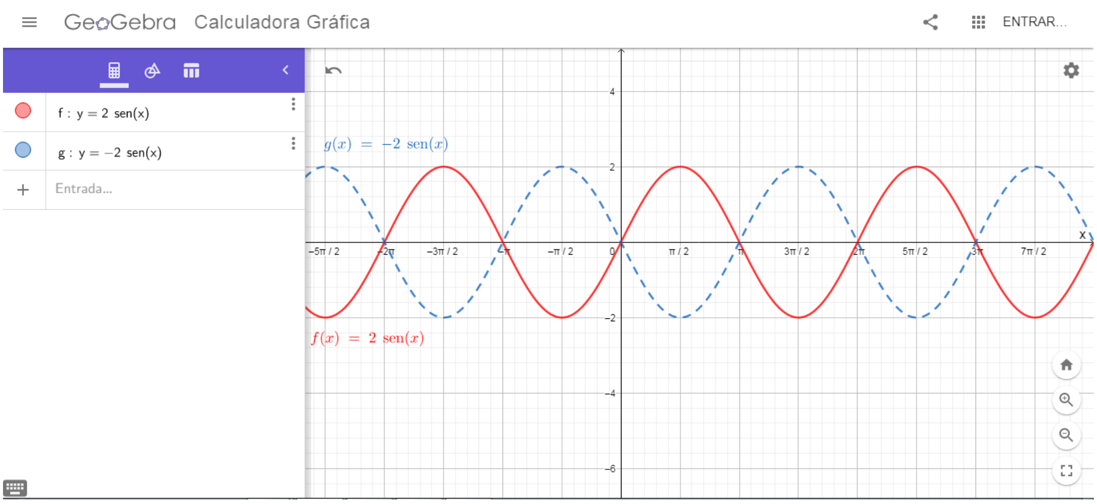
Primeiramente será feito estudo de funções $y = -b\,\text{sen}\,x$ para $-b < 0$. Dessa forma, o aluno completará a tabela e construirá em um mesmo plano cartesiano no Geogebra as funções $y = 2\,\text{sen}\,x$ e $y = -2\,\text{sen}\,x$.

Tabela 30 – Comparando $y = 2\,\text{sen}\,x$ e $y = -2\,\text{sen}\,x$

x	$y = 2\,\text{sen}\,x$	$y = -2\,\text{sen}\,x$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	1	-1
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	2	-2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2	2
2π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 48 – Comparando $y = 2\,\text{sen}\,x$ e $y = -2\,\text{sen}\,x$



Fonte: próprio autor

Depois de analisar os dados obtidos, o aluno será questionado: qual a diferença entre os gráficos de $y = 2\,\text{sen}\,x$ e $y = -2\,\text{sen}\,x$? Ocorreu alguma alteração com os valores de período, frequência, amplitude e imagem dos gráficos?

Resolução:

Após a construção, poderão verificar que o gráfico $y = -2\,\text{sen}\,x$ será a reflexão do gráfico de $y = 2\,\text{sen}\,x$ em relação ao eixo x. E que período, frequência, amplitude e imagem se mantiveram inalterados.

Portanto, para $y = -b\,\text{sen}\,x$, com $-b < 0$, dizemos que o gráfico será a reflexão, em relação ao eixo x, de $y = b\,\text{sen}\,x$, com $b > 0$.

Em seguida, será proposto aos alunos que façam a mesma análise para o caso $y = \text{sen}(-cx)$, vamos exemplificar com $-c = -2$. Aqui diremos aos alunos que podemos construir a tabela com os valores de $\text{sen}(-2x)$ para vários valores de x. Mas podemos usar uma propriedade já vista em sala de aula.

Neste momento recordaremos a propriedade de que $\text{sen}(-u) = -\text{sen}(u)$. Deste modo, teremos que $y = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}\,2x$.

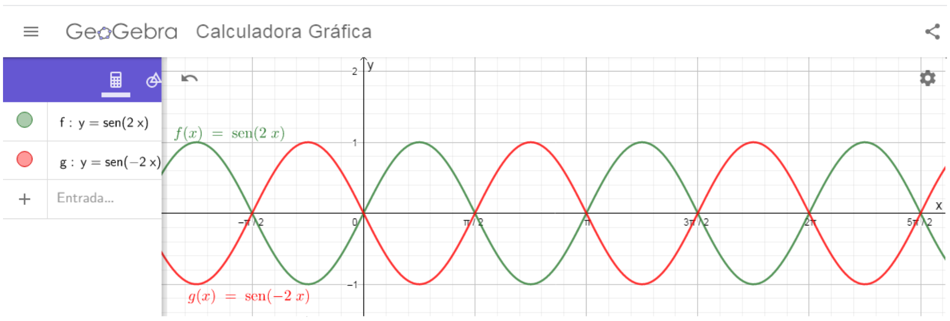
Assim, os alunos terão a tabela comparativa entre $y = \text{sen}(2x)$ e $y = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}(2x)$:

Tabela 31 – Comparando $y = \text{sen}\,2x$ e $y = \text{sen}(-2x)$

$2x$	x	$y = \text{sen}\,2x$	$y = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}\,2x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	1
2π	π	0	0

Fonte: próprio autor

Figura 49 – Comparando $y = \text{sen}\,2x$ e $y = \text{sen}(-2x)$



Fonte: próprio autor

Ao final da atividade, os alunos serão indagados sobre a diferença entre os gráficos de $y = \text{sen}\,2x$ e $y = \text{sen}(-2x)$. E se ocorreram alterações em relação aos valores de período, frequência, amplitude e imagem dos gráficos.

Resolução:

A função seno é ímpar, assim temos, a seguinte propriedade, $\text{sen}(-2x) = -\text{sen}\,2x$. *Dessa forma* *os alunos observarão que o gráfico $y = \operatorname{sen} 2x$ também será a reflexão, em relação ao eixo x, do gráfico $y = \operatorname{sen}(-2x)$.*

Então de modo geral, temos que:

$$y = -b\operatorname{sen}(cx) \text{ e } y = b\operatorname{sen}(-cx)$$

são a mesma função, escrita de modo diferente.

Tabela 32 – Elementos da função

$y = -b\operatorname{sen} cx$ ou $y = b\operatorname{sen}(-cx)$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
$\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$	$\frac{\lvert c\rvert}{2\pi}$	$\lvert b\rvert$	$[-\lvert b\rvert, \lvert b\rvert]$

Fonte: próprio autor

Toda essa sequência didática pode ser realizada para a função $y = \cos x$. Mas como a função cosseno é par, ou seja, $\cos(-x) = \cos x$, temos que os gráficos das funções $y = \cos(cx)$ e $y = \cos(-cx)$ serão idênticos.

6.3.6 6ª AULA: Transladando verticalmente as funções seno e cosseno

Funções $y = a + b\operatorname{sen} cx$ e $y = a + b\cos cx$, $(b, c > 0)$

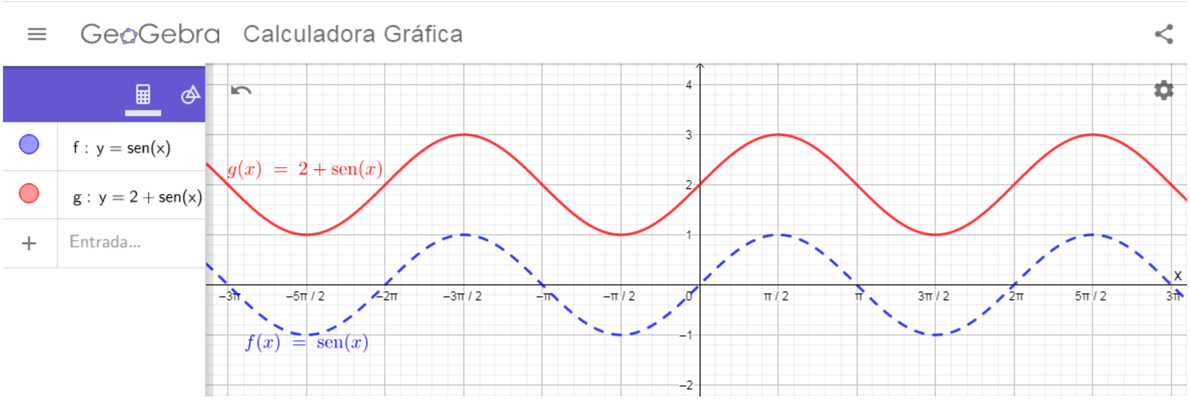
Complete a tabela e construa em um mesmo plano cartesiano o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 + \operatorname{sen} x$.

Tabela 33 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 + \operatorname{sen} x$

x	$\operatorname{sen} x$	$2 + \operatorname{sen} x$
0	0	$2 + 0 = 2$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4+\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	$2 + 1 = 3$
π	0	$2 + 0 = 2$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$2 + (-1) = 1$
2π	0	$2 + 0 = 2$

Fonte: próprio autor

Figura 50 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 + \operatorname{sen} x$



Fonte: próprio autor

Observe que neste caso a constante 2 somada à $\operatorname{sen} x$ não achatou e nem esticou o gráfico, mas o suspendeu em 2 unidades.

Responda:

1)Determine T,ω, A e a imagem da função $y = 2 + \operatorname{sen} x$.

2)Qual a diferença observada nos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2 + \operatorname{sen} x$?

Resolução:

1)Ao analisar a tabela e o gráfico, o aluno irá encontrar os seguintes valores:

Tabela 34 – Elementos da função

$y = 2 + \operatorname{sen} x$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
2π	$\frac{1}{2\pi}$	1	$[1,3]$

Fonte: próprio autor

2)O aluno poderá verificar que T,ω e A são os mesmos para as duas funções, mas a imagem mudou, devido ao deslocamento para cima. O que ocorreu é que a adição de 2 elevou, isto é, deslocou o gráfico verticalmente em duas unidades em relação ao gráfico original, alterando a imagem, mas nenhum outro elemento do gráfico.

Neste momento podemos perguntar: e se fosse a função $y = -2 + \operatorname{sen} x$, como seria seu gráfico? Esperaríamos aqui que os alunos concluíssem que o gráfico seria rebaixado em duas unidades, sem sofrer esticamento nem encolhimento.

Ainda para discutir a variação que a constante a causa , e resgatar o estudo realizado sobre os parâmetros b e c, iremos construir o gráfico da função $y = 1 + 2\operatorname{sen} 4x$ utilizando a tabela construída juntamente com os alunos. Pelo fato de os alunos conhecerem a forma do gráfico $y = \operatorname{sen} x$ e o valores dos senos dos arcos $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ é interessante que estes sejam os valores atribuídos a $4x$. Assim, construíremos a seguinte tabela:

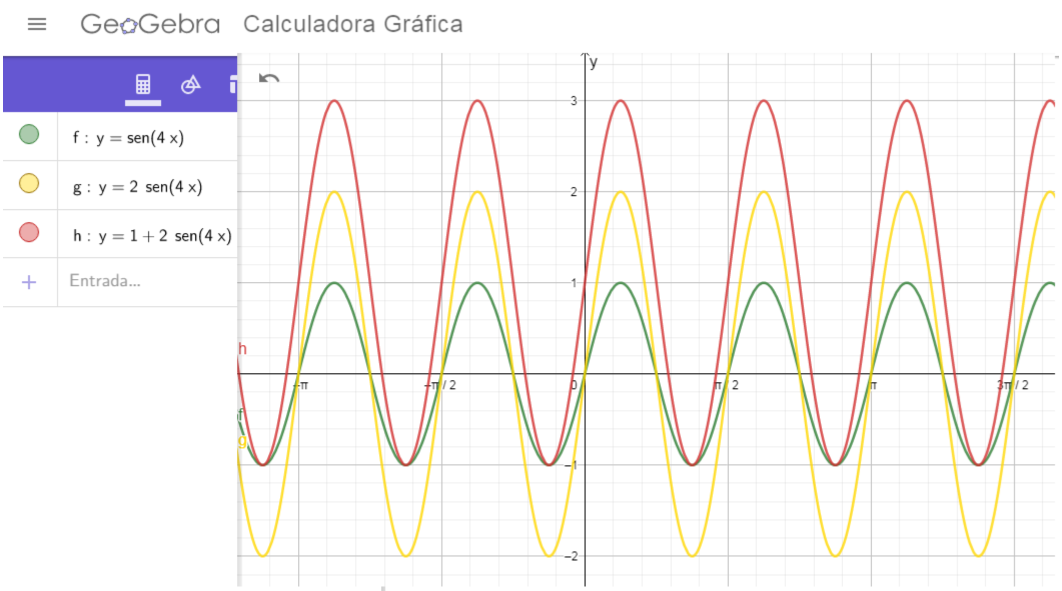
Tabela 35 – Comparando $y = \operatorname{sen} 4x$, $y = 2\operatorname{sen} 4x$ e $y = 1 + 2\operatorname{sen} 4x$

$4x$	x	$y = \operatorname{sen} 4x$	$y = 2\operatorname{sen} 4x$	$y = 1 + 2\operatorname{sen} 4x$
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	2	3
π	$\frac{\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1	-2	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	0	1

Fonte: próprio autor

Após o preenchimento da tabela e com o auxílio do Geogebra, o aluno construirá em um mesmo plano cartesiano os três gráficos. Em seguida, poderá analisar as alterações provocadas no gráfico pelo parâmetro a.

Figura 51 – Comparando $y = \operatorname{sen} 4x$, $y = 2\operatorname{sen} 4x$ e $y = 1 + 2\operatorname{sen} 4x$



Fonte: próprio autor

Responda:

3)O que ocorre com o gráficos de $y = 1 + 2\operatorname{sen} 4x$ em relação à $y = 2\operatorname{sen} 4x$?

4)O que podemos concluir sobre o que ocorre com o gráfico de $y = a + b\operatorname{sen} cx$ em relação a $y = b\operatorname{sen} cx$, seja para $a > 0$, $a < 0$ e $a = 0$.

Resolução:

3)A adição de 1 à função $y = 2\operatorname{sen} 4x$ elevou o gráfico uma unidade do que era originalmente, sem alterar qualquer outro elemento do gráfico.

4)A conclusão será de que a adição de $a > 0$ à função deslocará o gráfico em a unidades para cima, se $a < 0$, o deslocamento será em $|a|$ unidades para baixo e se $a = 0$, a função não foi alterada e portanto o gráfico permanece o mesmo.

Em resumo temos:

Tabela 36 – Elementos das funções $y = a + b\operatorname{sen} cx$

$y = a + b\operatorname{sen} cx$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
$\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$	$\frac{\lvert c\rvert}{2\pi}$	$\lvert b\rvert$	$[-\lvert b\rvert + a, \lvert b\rvert + a]$

Fonte: próprio autor

Toda essa sequência didática pode ser aplicada a função $y = a + b\cos cx$, onde serão constatadas as mesmas propriedades.

Caso opcional: $y = \operatorname{sen}(x - d)$

Em funções deste tipo, d é denominado ângulo de fase. Veremos que ele determinará, no correspondente gráfico, um deslocamento horizontal em relação ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$.

Para isso vejamos um caso simples:

Compararemos os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$. Para isso, os alunos completarão a seguinte tabela.

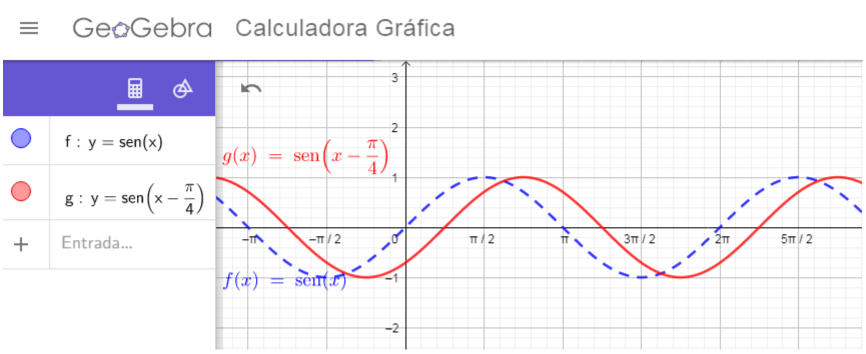
Tabela 37 – Valores de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ para os arcos notáveis

$x - \frac{\pi}{4}$	x	$y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	- 1
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0

Fonte: próprio autor

Com os valores obtidos construirão o gráfico da função no Geogebra e, em seguida, poderão analisar a alteração provocada pela constante **d** no gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$.

Figura 52 – Comparando $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Fonte: próprio autor

Responda

5)Qual é a diferença entre os gráficos das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$?

Resolução:

*5)O aluno poderá verificar que a constante **d** transladou o gráfico horizontalmente. No caso do gráfico proposto ocorreu um deslocamento de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita. E que os valores de período, frequência, amplitude e imagem permaneceram os mesmos em relação à função original.*

Em resumo temos que,

Tabela 38 – Elementos das funções $y = b\operatorname{sen}(cx - d)$

$y = b\operatorname{sen}(x-d)$			
Período	Frequência	Amplitude	Imagem
2π	$\frac{1}{2\pi}$	$\lvert b\rvert$	$[-\lvert b\rvert, \lvert b\rvert]$

Fonte: próprio autor

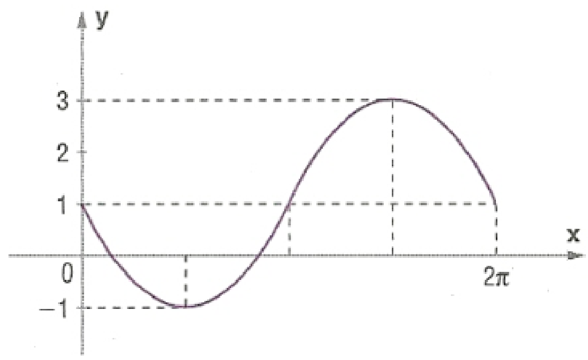
Um caso importante a recordar é que $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x = \cos x$.

Logo o gráfico de $y = \cos x$ é o deslocamento para esquerda em $\frac{\pi}{2}$ unidades, do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$. Por isso em essência, $y = \cos x$ é dita também uma senóide.

Em seguida, será proposto aos alunos a realização da atividade "gincana dos gráficos", que terá como objetivo identificar conceitos ainda não bem compreendidos e reforçar os papéis dos parâmetros a, b, c na função $y = a + b\operatorname{sen}(cx)$. Os necessários esclarecimentos serão realizados durante a atividade.

Antes de iniciar a gincana, será feita na lousa, juntamente com os alunos a resolução do seguinte exercício:

(UFRGS)Se $f(x) = a + b\operatorname{sen} x$ tem como gráfico:



Então:

1. $a = -2$ e $b = 1$

2. $a = -1$ e $b = 2$

3. $a = 1$ e $b = -1$

4. $a = 1$ e $b = -2$

5. $a = 2$ e $b = -1$

Resolução:

Vemos através dos valores de máximo e mínimo que a função alcança, que a amplitude do gráfico é:

$$Amplitude = \frac{\text{valor máx.} - \text{valor mín}}{2} = \frac{3-(-1)}{2} = 2$$

Logo a função $\operatorname{sen} x$ *foi multiplicada por* $b = 2$ *ou* $b = -2$*, isto é, temos* $y = a + 2\operatorname{sen} x$ *ou* $y = a - 2\operatorname{sen} x$*. Além disso, a imagem* $[-1,3] = [a - |-2|, a + |2|] = [a-2, a+2]$*, logo* $a = 1$*, isto é,* $y = 1 + 2\operatorname{sen} x$ *ou* $y = 1 - 2\operatorname{sen} x$*.*

Na função $y = 1 + 2\operatorname{sen} x$ *o máximo é atingido em* $\frac{\pi}{2}$ *e o mínimo em* $\frac{3\pi}{2}$*. Neste gráfico ocorre o contrário, isto é, o mínimo é atingido em* $\frac{\pi}{2}$ *e o máximo em* $\frac{3\pi}{2}$*. Logo o gráfico dado refere-se a função* $y = 1 - 2\operatorname{sen} x$*, isto é,* $a = 1$ *e* $b = -2$*.*

Resposta: d).

Após, a análise desse exemplo, iniciaremos a gincana dos gráficos.

GINCANA DOS GRÁFICOS

Para realizar essa atividade, os alunos serão divididos em grupos de 3 integrantes, e cada grupo receberá folhas com a impressão de 7 gráficos de senóides numerados e cada integrante do grupo receberá uma tabela que deverá ser preenchida em 20 minutos, em conjunto pela equipe. (Ver apêndice B).

A equipe será orientada a primeiramente preencher cada linha da tabela, deixando a coluna "Função" como última coisa a ser feita. Sugerimos que após 15 minutos de trabalho, o professor peça para os alunos observarem se tem algum "gráfico de cabeça para baixo", isto é, refletido em relação ao eixo x quando comparado com uma função seno usual. Se existir, deverão checar se precisam corrigir algum parâmetro na coluna Função.

No final da atividade, cada equipe entregará uma tabela preenchida ao professor, outra deverá ser entregue a outra equipe e outra ficará no grupo. O professor fará a correção na sala com os alunos e estes deverão anotar na última coluna o total de pontos obtidos por gráfico, sendo que cada resposta correta anotada nas colunas período, frequência, amplitude e imagem valerá 1.0 ponto e cada resposta correta na coluna Função deverá valer 2.0 pontos. Deste modo cada equipe pontuará no máximo 42 pontos.

A(s) equipe(s) campeã(s) serão declaradas pelas próprias equipes vencedoras, sendo eventualmente contestadas pela equipe que ficou com a folha de respostas dela(s). Neste caso o professor, deverá checar quem está correto. Os vencedores deverão receber em suas folhas de respostas um selo "Estrela". O professor decide se a atividade valerá nota ou não. A atividade encontra-se no Apêndice B.

6.3.7 Sugestão de exercícios envolvendo senóides

Nesta seção sugerimos alguns exercícios, explorando os elementos das senóides, com o intuito de reforçar os conceitos estudados. Também colocamos alguns exercícios de vestibular envolvendo outras aplicações das senóides, reforçando que este tipo de função não é mera abstração matemática, mas tem forte relação com, por exemplo, os movimentos periódicos.

Dividimos os exercícios em 3 categorias:

A) Explorando senóides e seus gráficos,

B) Explorando senóides e suas relações com o som

C) Movimento harmônico simples.

LISTA DE EXERCÍCIOS

A) Explorando senóides e seus gráficos

1. (adaptado) - Ver (DANTE, 2005, p.182). Determine:

   a) O valor de **b**, sabendo que o período da função $f(x) = 1 + \operatorname{sen} bx$ é igual a 3π;

   b) O valor de **m**, sabendo que o período da função $f(x) = \operatorname{sen} \frac{2x}{m}$ é igual a $\frac{5\pi}{2}$.

   Resolução:

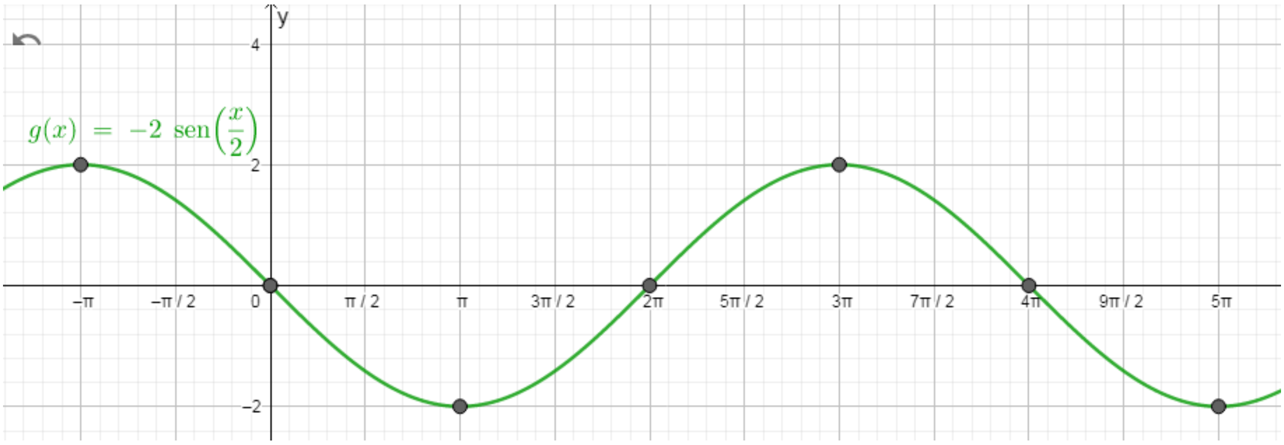
a) Sabemos que b pode ser positivo ou negativo. Assim, qualquer que seja o caso, podemos dizer que $T = \frac{2\pi}{|b|}$. *Portanto* $3\pi = 2\pi/|b| \rightarrow |b| = 2/3 \rightarrow b = \pm 2/3$.

b) Como antes, $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{|m|}} = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow m = \pm\frac{5}{2}$

2. Ver (DANTE, 2005, p. 182). Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período da função $g(x) = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$.

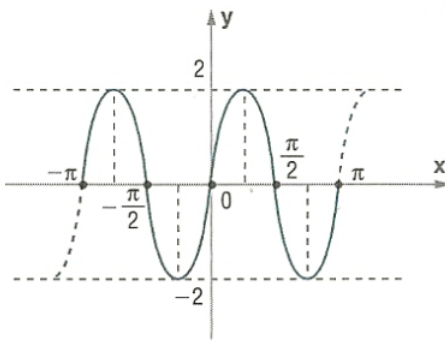
   Resolução:

   $D(g) = \mathbb{R}$. *Fazendo uma comparação com* $y = a + b\,\mathrm{sen}\,cx$, *vemos que* $a = 0$, $b = -2$ *e* $c = \frac{1}{2}$. *logo* $Im = [-2, 2]$ *e* $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. *Logo o gráfico será:*



Fonte: próprio autor

3. Ver (DANTE, 2005, p. 183). O gráfico abaixo representa a função:



   a) $y = -2\cos x$
   b) $y = \cos\frac{x}{2}$
   c) $y = 2\,\mathrm{sen}\,x$
   d) $y = \mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$
   e) $y = 2\,\mathrm{sen}\,2x$

Resolução:

$f(0) = 0$ *elimina as alternativas a) e b).*

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *elimina as alternativas c) e d).*

Verificando a alternativa e):

Assim, se $y = b\operatorname{sen} cx$*, pelo gráfico temos que a amplitude é igual a 2, portanto,* $b = 2$*.*

$T = \pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 2$

Resposta: e)

4. Ver (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 43) Em nosso organismo ocorrem diversos fenômenos que se repetem periodicamente, chamamos fenômenos periódicos. Um exemplo é a respiração.

Figura 53 – Processo de respiração

Fonte: SOUZA, 2016,p.33.

Durante a inspiração, ocorre a contração do diafragma e dos músculos intercostais externos, o que acarreta um aumento no volume pulmonar e no tamanho da caixa torácica. Na expiração, o diafragma e os músculos intercostais externos relaxam; consequentemente há a diminuição do tamanho da caixa torácica, e o volume pulmonar também diminui.

Suponha que o volume de ar nos pulmões de um indivíduo adulto saudável, do sexo masculino, em repouso, a partir de um instante inicial $t = 0$, possa ser representado aproximadamente pela função $f(t) = 2{,}65 - 0{,}25\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$, sendo t o tempo em segundos e $f(t)$ o volume de ar nos pulmões, em litros, t segundos após o instante inicial.

a) Determine o volume de ar nos pulmões deste indivíduo no instante:

- inicial $t = 0$
- $t = 1{,}25$

- $t = 2,5$
- $t = 3,75$
- $t = 5$

b) Após a expiração, existe um volume de ar que permanece nos pulmões. No caso do indivíduo em questão, qual é esse volume?

c) No processo de respiração, qual o volume máximo de ar nos pulmões desse indivíduo?

Resolução:

a)Após realizar os cálculos, teremos os seguintes valores:

$$f(0) = 2,4L$$

$$f(1,25) = 2,65L$$

$$f(2,5) = 2,9L$$

$$f(3,75) = 2,65L$$

$$f(5) = 2,4L$$

b)Analisando inicialmente a função, temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

irá variar no intervalo de $[-1,1]$. *Quando expiramos, o volume de ar no pulmão é mínimo e assim buscamos o valor mínimo da função dada. Logo* $-0,25\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ *assumirá o valor mínimo igual a* $-0,25$ *e portanto* $f(t)$ *assumirá o valor mínimo* $2,65 - 0,25 = 2,4$. *Assim, o volume mínimo de ar que permanecerá nos pulmões, no processo de respiração será de 2,4 litros.*

c)Da mesma forma que analisamos a questão anterior, quando inspiramos o volume de ar nos pulmões é máximo. A função $-0,25\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ *assume o valor máximo* $0,25$ *e portanto* $f(t)$ *assumirá o valor máximo* $2,65 + 0,25 = 2,9$. *Logo o volume máximo de ar nos pulmões, durante o processo de respiração, será de 2,9 litros.*

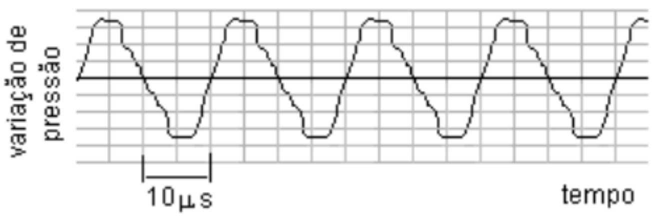
Observação: Veja que b) e c) referem-se à imagem I de $f(t)$, onde $I = [2,65 - 0,25; 2,65 + 0,25] = [2,4; 2,9]$

B) Explorando senóides e seus sons

1. FUVEST (2002):O som de um apito é analisado com o uso de um medidor que, em sua tela, visualiza o padrão apresentado na figura abaixo. O gráfico representa a variação da pressão que a onda sonora exerce sobre o medidor, em função do tempo, em μs $(1\mu s = 10^{-6}s)$. Analisando a tabela de intervalos de frequências audíveis, por diferentes seres vivos, conclui-se que esse apito pode ser ouvido apenas por:

Figura 54 – Espectros auditivos de alguns animais

Seres vivos	Intervalos de Freqüência
cachorro	15 Hz – 45.000 Hz
ser humano	20 Hz – 20.000 Hz
sapo	50 Hz – 10.000 Hz
gato	60 Hz – 65.000 Hz
morcego	1000 Hz – 120.000 Hz



Fonte: https://www.curso-objetivo.br

a) seres humanos e cachorros.

b) seres humanos e sapos.

c) sapos, gatos e morcegos.

d) gatos e morcegos.

e) morcegos.

Resolução

De acordo com o gráfico, o período da onda é de $20\mu s$*, que é o intervalo correspondente a uma onda completa.*

$T = 20\mu\text{s} = 20 \cdot 10^{-6}\text{s} = 2 \cdot 10^{-5}\text{s}$

A frequência ω *do som é dada por:*

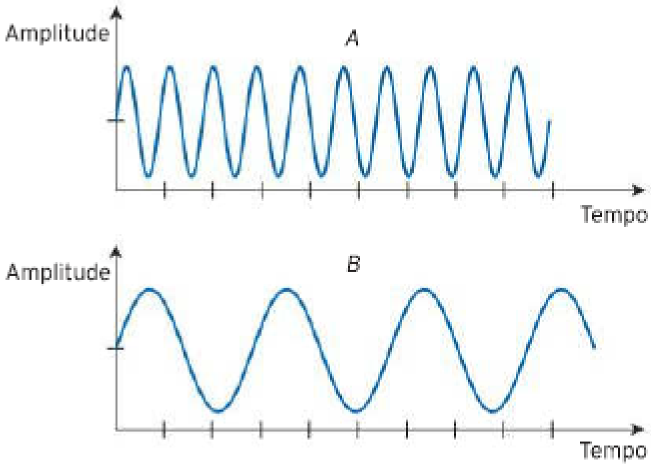
$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} = 0,5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

De acordo com a tabela dada, apenas o gato e o morcego conseguem perceber um som de frequência de 50000 Hz.

Resposta: d)

2. Ver (VáLIO; AL, 2016, p. 180)Duas ondas sonoras são representadas a seguir.

Figura 55 – Ondas sonoras



a) Identifique qual gráfico representa o som mais grave.

b) Sabendo que a frequência do som mais grave é de 35 Hz, calcule a frequência aproximada do som mais agudo.

Resolução

a) *Analisando os gráficos podemos observar que o período da onda A é menor que período da onda B.*

Como a frequência é dada por $\omega = \frac{1}{T}$*, ou seja, a frequência é inversamente proporcional ao período de oscilação, quanto maior o período, menor será a frequência e consequentemente, o som será mais grave.*

Logo o gráfico B representa o som mais grave.

b) *Dada a frequência da onda sonora do gráfico B,* $\omega_B = 35Hz$*. Calcularemos o seu período:*

$$\omega_B = \frac{1}{T_B} \Rightarrow 35 = \frac{1}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{1}{35}s$$

Pelo gráfico podemos observar que o período do som mais agudo é $\frac{1}{3}$ *do período do som mais grave. Assim, temos que:*

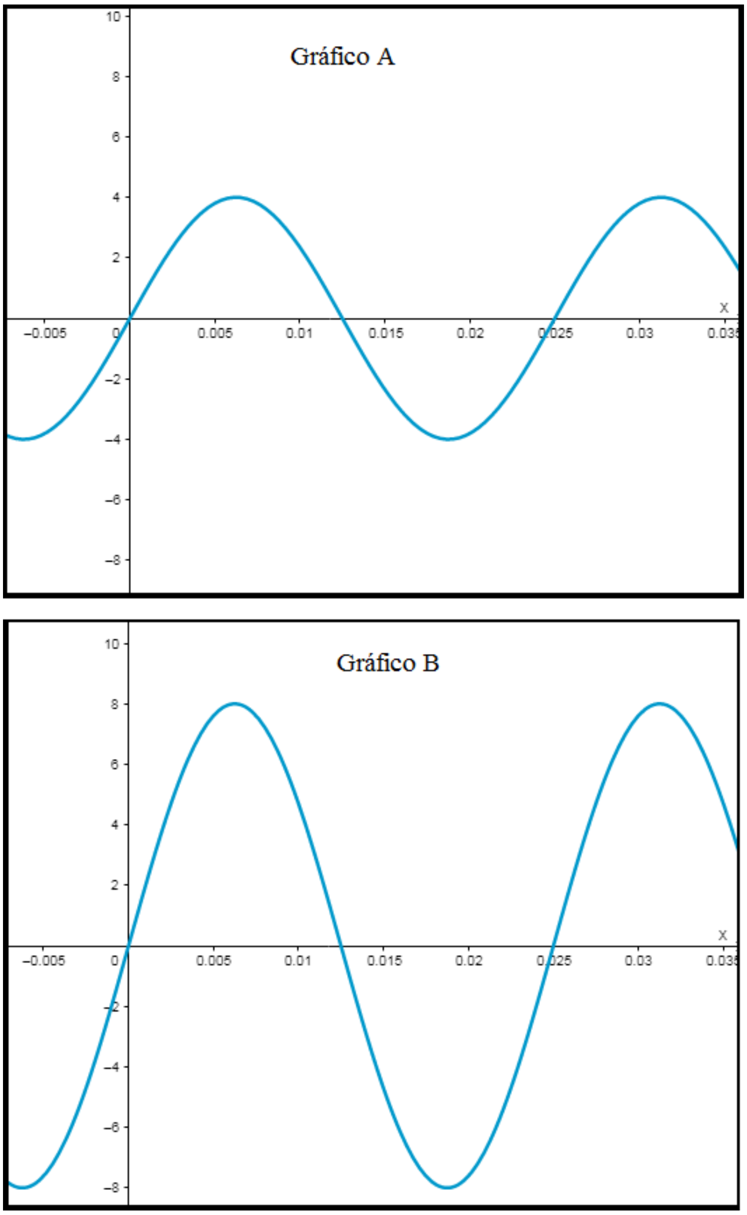
$$T_A = \frac{T_B}{3} = \frac{\frac{1}{35}}{3} = \frac{1}{105}s$$

Logo:

$$\omega_A = \frac{1}{\frac{1}{105}} = 105Hz$$

3. Os seguintes gráficos representam duas ondas sonoras de mesma frequência.

Figura 56 – Gráficos de ondas sonoras



Fonte: https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

Identifique o gráfico que representa a onda de maior intensidade.

Resolução

Como a frequência é a mesma, a intensidade da onda sonora depende da amplitude, quanto maior o valor da amplitude da função que modela a onda sonora mais forte será o som.

A amplitude é a metade da diferença entre o maior valor e o menor valor que a função atinge num ciclo.

Da observação do gráfico verificamos que o gráfico com maior valor de amplitude é o gráfico B, logo representa a onda sonora de maior intensidade.

C) Movimento harmônico simples

Lembramos ao leitor que mais informações sobre este tema encontram-se detalhados na **Seção 5.2 Oscilador Harmônico Simples** e **Subseção 5.2.1 Sistema massa mola.**

1. (UEL-PR) Movimento Harmônico Simples é o movimento periódico oscilatório em que um sistema vibra com uma certa amplitude em torno de um ponto de equilíbrio. Um determinado movimento harmônico simples é descrito pela função $y = 0,050\cos(2\pi t + \pi)$, em unidades do Sistema Internacinal. Nesse movimento, a amplitude e o período valem, respectivamente:

   a) 0,050 e 1
   b) 0,050 e 0,50
   c) π e 2π
   d) 2π e π
   e) 2 e 1

   Resolução:

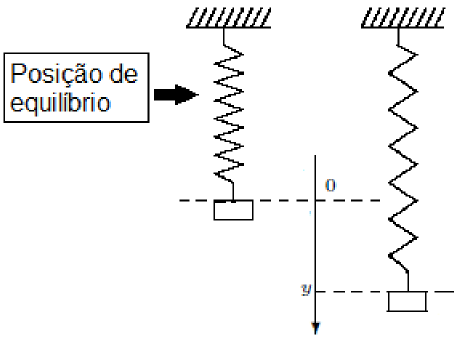
   $Amplitude(A) = 0,05$

   $Período(T) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

   Resposta: a).

2. Sabendo-se que num sistema massa mola, um corpo de massa m é preso a uma mola, é posto a oscilar. Dizemos que ele está no posição de equilíbrio se estiver na posição $y = 0$ (posição que ele se encontraria se a mola não for contraída nem distendida).Adotamos o eixo y orientado positivamente no sentido descendente.

Figura 57 – Sistema massa-mola



Fonte: adaptado (CASSAGO; LADEIRA, 2006, Cap. 2)

Sabendo-se que sua posição num instante t qualquer é dado por $y = 2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ determine:

a) Qual sua posição no instante $t = 0$? Neste caso ele se encontra abaixo ou acima da posição de equilíbrio?

b) Quando o corpo passará pela primeira vez pela posição de equilíbrio?

c) Quais as alturas máxima e a mínima, em relação à posição de equilíbrio, que este corpo alcancará?

Resolução:

a)Para $t = 0$, *temos que,* $y = 2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Como de acordo com o sistema de coordenados adotado, o eixo y encontra-se orientado positivamente no sentido descendente, $y(0) = -2$ *indica que o corpo está duas unidades acima da posição de equílibrio, isto é, a mola foi empurrada para cima em duas unidades.*

b)Como o movimento começa no instante $t = 0$, *devemos determinar o primeiro valor de* $t > 0$, *tal que o corpo passará pela posição de equilíbrio, ou seja,*

$$y = 2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

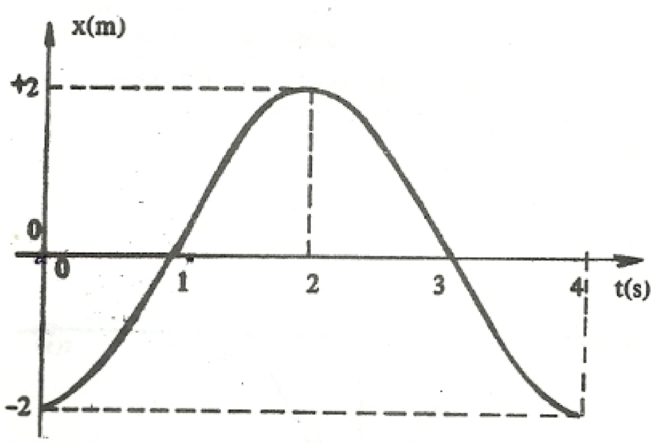
Como o seno se anula em 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$..., *basta fazermos* $\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ *isto é,* $t = \frac{\pi}{2}$.

c)Analisando a função $y = \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ *observamos que sua imagem varia no intervalo de* $[-1, 1]$. *Assim* $y = 2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, *terá valor máximo quando* $\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$,*ou seja,* $y = 2$. *E o valor mínimo ocorre quando* $\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$, *ou seja,* $y = -2$

Assim a mola permitirá que o corpo diste no máximo duas unidades, abaixo ou acima, da posição de equilíbrio.

3. (adaptado) Ver (DOCA, 1987, p. 5)O gráfico a seguir ilustra a posição em função do tempo de um corpo que realiza o movimento harmônico simples em um sistema massa-mola.

Figura 58 – Posição em função do tempo



Fonte: Doca, Ricado Helou, 1987, p.9

Pede-se:

a) A amplitude da oscilação, o período e a frequência;

b) Determinar a equação do movimento.

Resolução:

a) *Como a imagem do gráfico é* $[-2,2]$ *segue que a amplitude A da oscilação é*

$$A = \frac{2-(-2)}{2} = 2$$

Como uma oscilação completa se dá no intervalo $[0,4]$ *temos que o período é* $T = 4$ *e consequentemente a frequência será*

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$$

b) *Sabendo-se que se o corpo realiza movimento harmônico simples então a função que descreve seu movimento é* $x = b\,\mathrm{sen}(ct+d)$.

Como o período é dado por $T = \frac{2\pi}{c}$ *e* $T = 4$ *segue que* $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. *E portanto* $x(t) = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t+d\right)$.

Mas novamente observando o gráfico temos que $x(1) = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+d\right) = 0$, *assim* $\frac{\pi}{2}+d = 0$ *e portanto* $d = -\frac{\pi}{2}$. *Logo* $x = b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Finalmente para definir o sinal de b, observamos novamente o gráfico e calculamos:

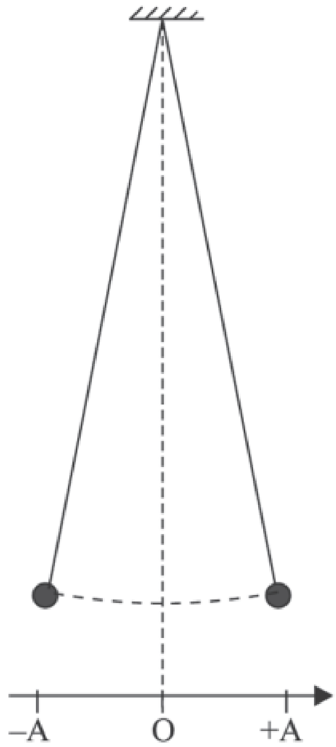
$-2 = x(0) = b\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -b$ *e portanto* $b = 2$.

Assim $x = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

PÊNDULO SIMPLES

Lembramos ao leitor que mais informações sobre este tema encontram-se detalhados na **Subseção 5.2.2 Pêndulo Simples**.

1. UNIFESP(2008): Um estudante faz o estudo experimental de um movimento harmônico simples (MHS) com um cronômetro e um pêndulo simples como o da figura, adotando o referencial nela representado. Considere desprezível a influência de forças resistivas.



Ele desloca o pêndulo para a posição $+A$ e o abandona quando cronometra o instante $t = 0$. Na vigésima passagem do pêndulo por essa posição, o cronômetro marca $t = 30s$.

a) Determine o período (T) e a frequência (f) de oscilação deste pêndulo.

b) Esboçe o gráfico x (posição) $\times$ t (tempo) desse movimento, dos instantes $t = 0$ a $t = 3s$;

Resolução

a) *Pelo enunciado, temos que no intervalo de 30 segundos ocorrem 20 oscilações completas do pêndulo. Assim se T é o período para que o pêndulo realize uma oscilação completa, temos que:*

$$20T = 30s$$
$$T = \frac{3}{2}s \Rightarrow T = 1.5s$$

Para determinar a frequência, sabemos que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0.67Hz$$

b) *Por tratar-se de movimento harmônico simples, sabemos que a oscilação do pêndulo será regida pela função* $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$*.Pelos dados do problema* $x(0) = A = A\,\mathrm{sen}(\delta)$. *Logo* $\mathrm{sen}(\delta) = 1$ *o que nos dá* $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Logo $x(t) = A.\operatorname{sen}(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$*. Para determinar* ω_0*,*

$$1.5 = T = \frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = \frac{4\pi}{3}$$

.

Portanto $x(t) = A\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

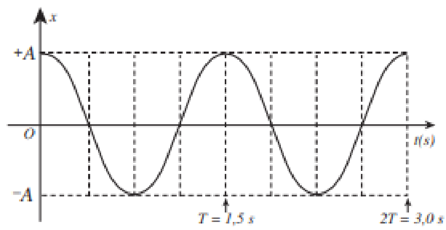
Como o período desta oscilação é $T = 1.5$ *temos que* $A = x(0) = x(1.5) = x(3.0)$. *Logo teremos 2 ciclos completos no intervalo* $[0,3]$.

Buscando os pontos onde $x(t) = 0 = A\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$ *temos que,* $\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) = k\pi$*, com* $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Assim $t = \frac{3}{4\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2} + k\right)$. *Como o gráfico deve ser esboçado no intervalo* $[0,3]$ *temos que* $0 \leq t = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2} + k\right) \leq 3$.

Assim $k = 1,2,3,4$*, isto é,* $x(t)$ *se anulará em* $t = \frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{15}{8}$ *e* $\frac{21}{8}$.

Logo seu gráfico será:



2. ENEM(2014): Christiaan Huygens, em 1656, criou o relógio de pêndulo. Nesse dispositivo, a pontualidade baseia-se na regularidade das pequenas oscilações do pêndulo. Para manter a precisão desse relógio, diversos problemas foram contornados. Por exemplo, a haste passou por ajustes até que, no início do século XX, houve uma inovação, que foi sua fabricação usando uma liga metálica que se comporta regularmente em um largo intervalo de temperaturas. Fonte: YODER, J. G. Unrolling Time: Christiaan Huygens and the mathematization of nature. Cambridge: Cambridge University Press, 2004 (adaptado).

   Desprezando a presença de forças dissipativas e considerando a aceleração da gravidade constante, para que esse tipo de relógio realize corretamente a contagem do tempo, é necessário que o(a):

   a) comprimento da haste seja mantido constante.

   b) massa do corpo suspenso pela haste seja pequena.

   c) material da haste possua alta condutividade térmica.

   d) amplitude da oscilação seja constante a qualquer temperatura.

   e) energia potencial gravitacional do corpo suspenso se mantenha constante.

Resolução

Como desejamos que o pêndulo realize um movimento harmônico simples, isto é, que realize um movimento periódico, então desejamos que seu movimento seja regido pela função $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$ *onde* $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$*, g = módulo da aceleração da gravidade, que é constante e l = comprimento da haste do pêndulo.*

E esta formulação não depende da massa do corpo, temperatura, material do corpo e nem energia potencial do corpo.

Resposta: a).

CAPÍTULO

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em conversas com outros professores de Matemática, constatamos que as funções trigonométricas são vistas pelos alunos como um conceito complexo e abstrato, acarretando certo desinteresse pela sua aprendizagem. E apesar de sua aplicabilidade em inúmeros processos periódicos e ondulatórios, nem sempre os alunos têm a oportunidade de constatarem tais fatos nas aulas de Matemática.

Por este motivo, buscamos elaborar um material de apoio aos professores curiosos no assunto que compilasse questões históricas, teóricas e aplicadas sobre as senóides, com o intuito de que este conhecimento pudesse ser utilizado para enriquecer as aulas, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Além disso trouxemos uma sequência didática com propostas de atividades, que através do *software* Geogebra, relacionam a função seno às ondas sonoras, mostrando como é adequada ao estudo desse fenômeno físico tão presente em nossas vidas. E desta maneira fizemos um estudo detalhado das funções $y = a + b \operatorname{sen} cx$.

Acredito que toda a pesquisa realizada para a elaboração da dissertação me proporcionou um grande enriquecimento teórico e aplicado sobre o assunto. Apesar de eu não estar atuando no Ensino Médio, alguns dos fatos históricos que foram aqui destacados, podem ser utilizados no Ensino Fundamental, como motivadores para o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo ou como curiosidade. Por exemplo, o fato dos gregos, que com auxílio de conhecimentos geométricos que já possuíam, e em tempos onde não haviam calculadoras, chegaram a valores bem próximos dos atuais para as razões trigonométricas de ângulos não notáveis e que o uso de tais valores foi usado para transformar produtos de números grandes ou pequenos em adições, o que possibilitou o desenvolvimento da astronomia.

Todo este conhecimento proporcionou uma reflexão sobre minha prática docente, sobre a importância de buscar abordar o conteúdo matemático de forma contextualizada e, sempre que possível fazer o uso de recursos computacionais que podem tornar o ensino de Matemática muito mais dinâmico, significativo e enriquecedor para os alunos.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012. Citado na página 73.

BORTOLOSSI, H. J. **Funções Trigonométricas no Ensino Médio: Sons e Fourier**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kVsfvrsM>. Acesso em: 02/10/2018. Citado na página 73.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. New York: John Wiley, 1969. Citado na página 78.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2010. Citado nas páginas 28 e 29.

BRASIL. **Ministério da Educação.Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15/07/2020. Citado nas páginas 81, 82 e 83.

CASSAGO, H.; LADEIRA, L. A. da C. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 2006. Citado nas páginas 65, 68 e 122.

CLUBE. **Clubes de Matemática da OBMEP - As frações da música**. 2018. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-sala-2/>. Acesso em: 23/08/2018. Citado nas páginas 75 e 76.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único**. São Paulo: Ática, 2005. Citado nas páginas 115 e 116.

DOCA, R. H. **Coleção Objetivo. Sistema de métodos de aprendizagem; livro 14**. 1987. Citado na página 123.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011. Citado nas páginas 23, 24 e 29.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas (Coleção Matemática Universitária)**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1997. Citado na página 65.

GEOGEBRA. **O que é o Geogebra**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 01/08/2020. Citado na página 83.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 2. ed. [S.l.]: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1987. Citado na página 59.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria**. 9. ed. São Paulo: Saraiva S. A., 2013. Citado na página 41.

JULIANE, J. P. **Matemática e Música**. São Carlos, 2003. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~dplm/TGMatematicaMusica.pdf>. Acesso em: 25/08/2018. Citado na página 75.

LEMKE, R. **Som produzido pela função seno**. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0>. Acesso em: 15/09/2018. Citado na página 101.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: SOLGRAF Publicações Ltda., 2001. Citado nas páginas 41 e 85.

MEDEIROS, L. A.; ANDRADE, N. G. **Iniciação às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científcos, 1978. Citado na página 28.

OLIVEIRA, J. **Tópicos selecionados de Trigonometria e sua história**. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de São Carlos - Campus São Carlos, São Carlos, 2010. Citado nas páginas 30, 31 e 38.

PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. B. Um ensaio sobre a história da trigonometria antes do século xv. **Conexões: ciência e tecnologia**, 2015. Citado na página 39.

ROEGEL, D. A reconstruction of the tables of rheticus'canon doctrinae triangulorum (1551). **HAL Id: <inria-00543931>**, 2010. Citado na página 25.

SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. da S. R. **Contato Matemática, 2º ano**. São Paulo: FTD, 2016. Citado na página 117.

UNIVESP, U. V. do Estado de S. P. **Matemática - Aula 27 - Matemática e Música: parte 1 - vídeo (13 min.)**. 2014. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-sala-2/>. Acesso em: 23/08/2018. Citado na página 76.

VáLIO, A. B. M.; AL et. **Ser protagonista: física, 2º ano: ensino médio**. São Paulo: Edições SM, 2016. Citado na página 119.

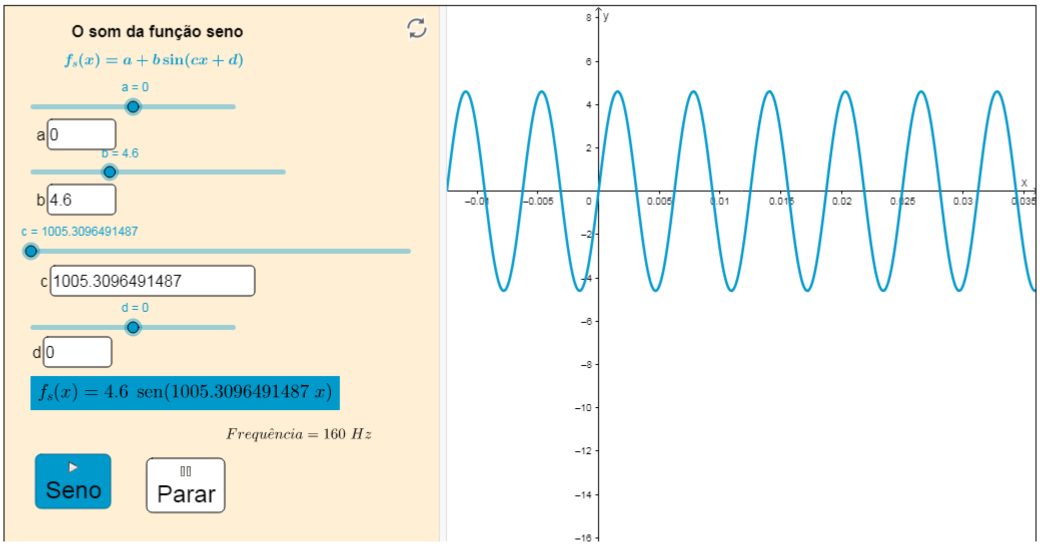
APÊNDICE

A

GINCANA DOS SONS

Gráfico da onda sonora descrita pela função $f(x) = 4.6\,\text{sen}(160 \cdot 2\pi x)$, que denominamos "som inicial". Esse gráfico será utilizado pelo aluno como "padrão" para auxiliá-lo na identificação das alterações realizadas nos parâmetros da função da onda sonora que classificamos como "som inicial".

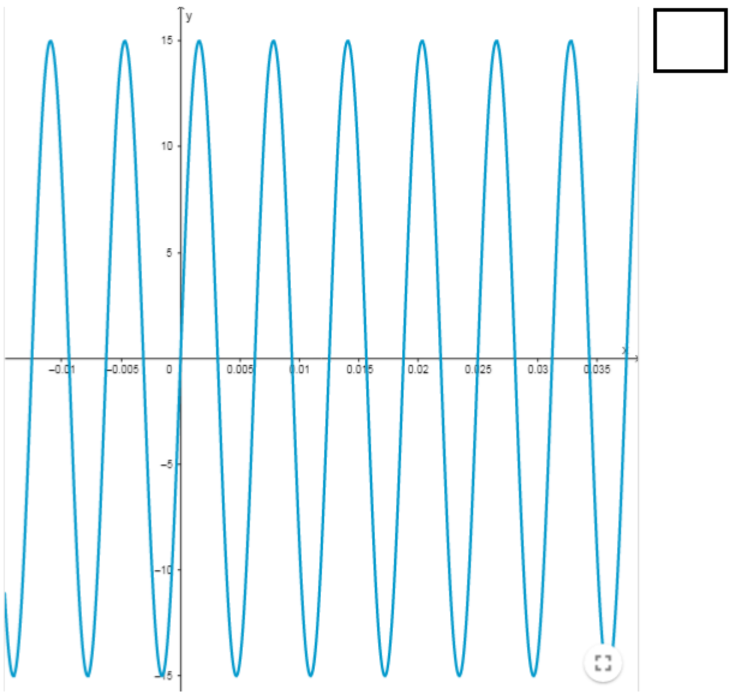
Figura 59 – Atividade: Gincana dos sons

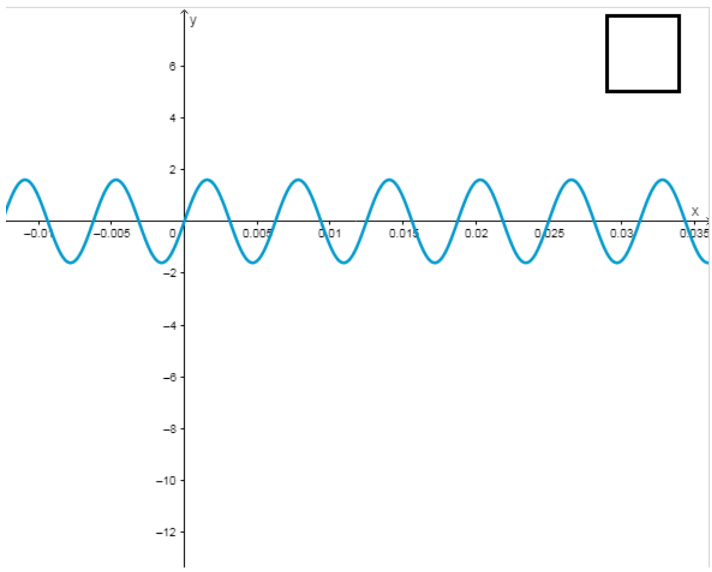


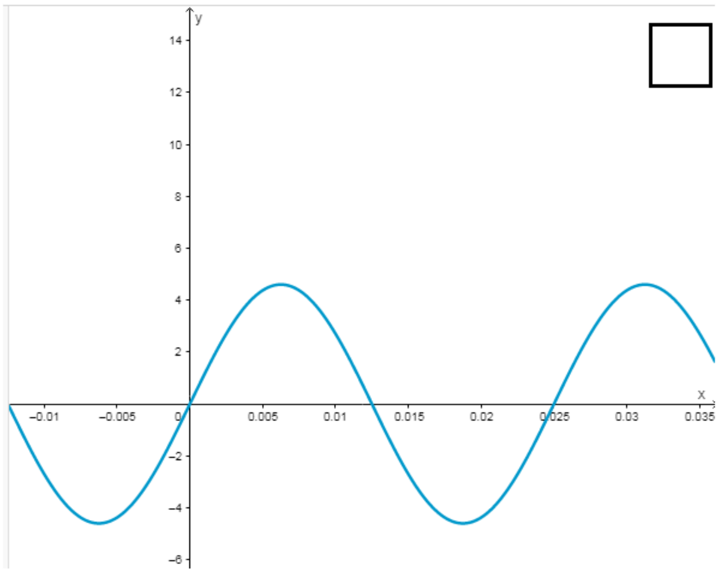
Fonte:https://www.geogebra.org/m/owWVzkJ0

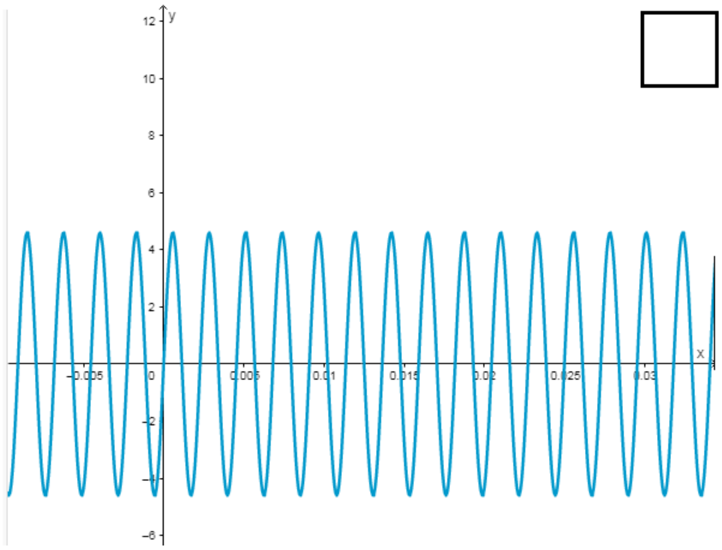
Atividade

Os gráficos a seguir representam ondas sonoras que sofreram alterações nos parâmetros de suas funções em relação à função do “som inicial”. Após comparar o “som incial” com o som com modificações, numere os gráficos dados, de acordo com a ordem em que o som foi ouvido:






y
14
12
10
8
6
4
2
x
−0.01
−0.005
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
−2
−4
−6


y
12
10
8
6
4
2
x
−0.005
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
−2
−6

Sugestões de modificações nos parâmetros da função das ondas sonoras da atividade "Gincana dos sons:"

A atividade "O som da função do seno" disponível no *site* do Geogebra mostra que a função $f(x) = a + b\,\mathrm{sen}(cx + d)$ é adequada para modelar as ondas sonoras. Ao iniciar a atividade, podemos ouvir a onda sonora descrita pela seguinte função $f(x) = 8.6\,\mathrm{sen}(40 \cdot 2\pi x)$. É possível alterar os parâmetros dessa função e ouvir novos sons. Para que essas alterações sejam percepíveis aos nossos ouvidos, devemos alterar os parâmetros b e c da função.

Desse modo, para realizar a atividade Gincana do som foram escolhidos valores de b e c, em que essas alterações fossem percebidas mais facilmente. Segue abaixo as funções que sugerimos para a atividade Gincana dos sons:

$$f(x) = 1.6\,\mathrm{sen}(320\pi x)$$

$$f(x) = 15\,\mathrm{sen}(320\pi x)$$

$$f(x) = 4.6\,\mathrm{sen}(80\pi x)$$

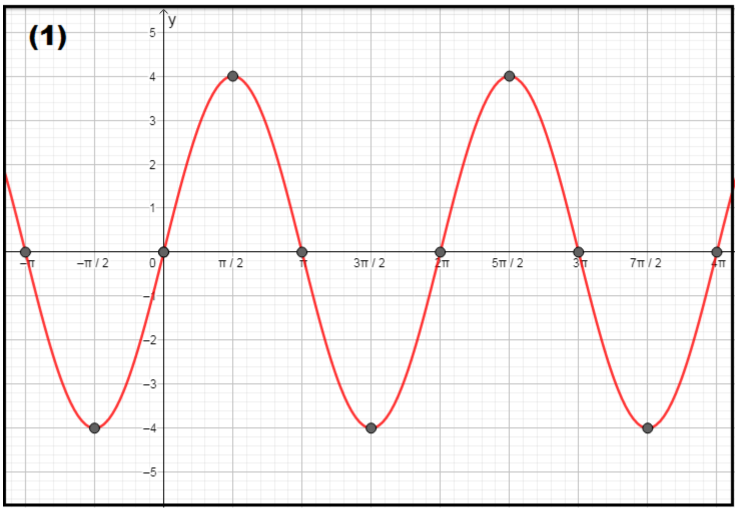
$$f(x) = 4.6\,\mathrm{sen}(880\pi x)$$

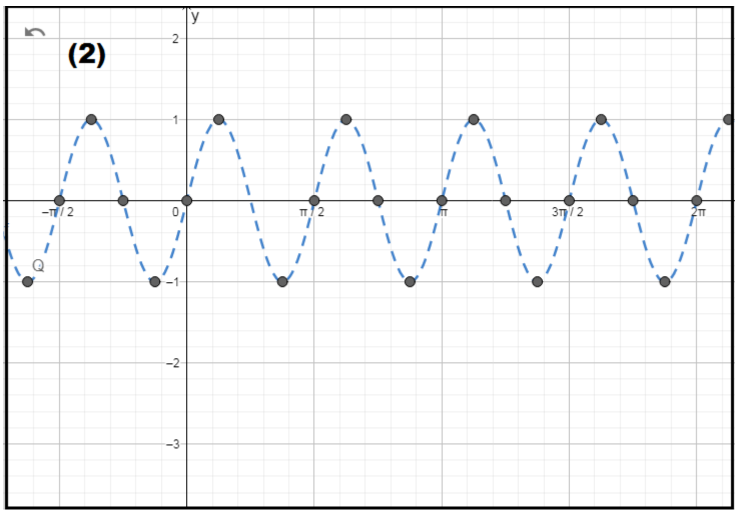
APÊNDICE

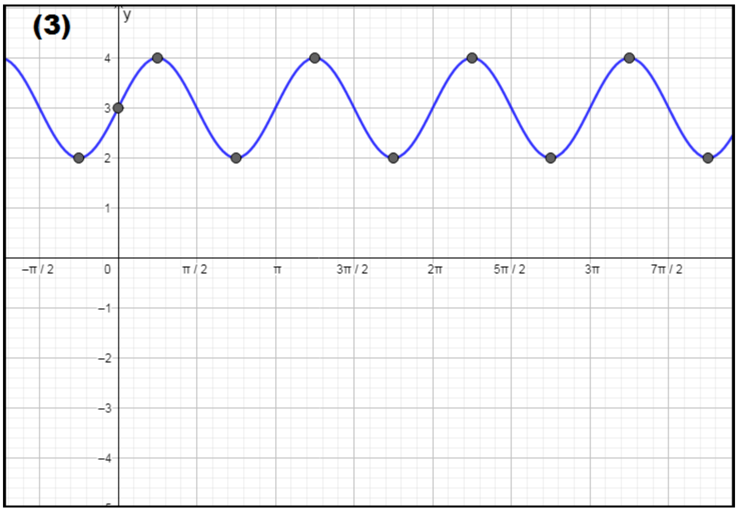
B

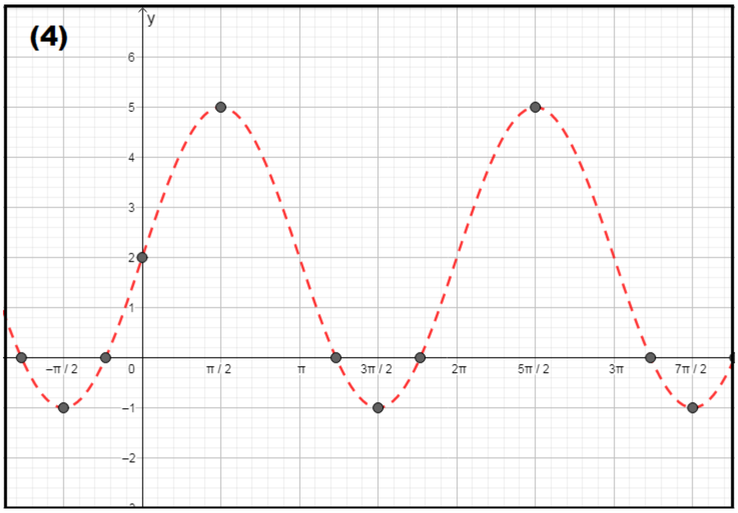
GINCANA DOS GRÁFICOS

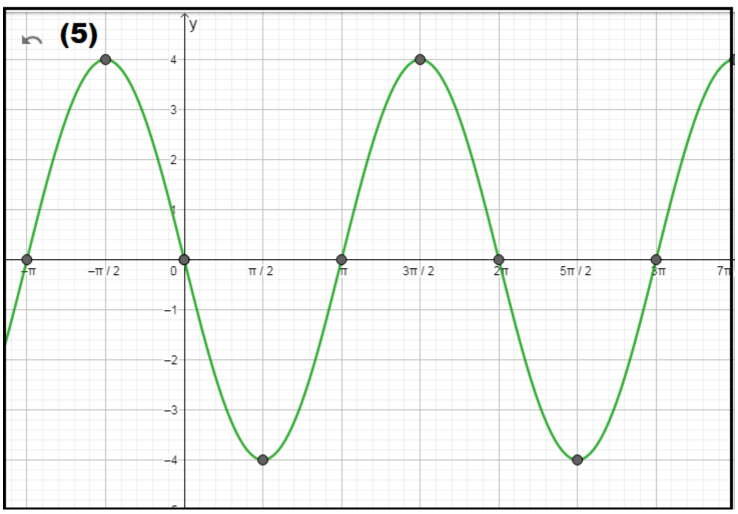
Analise os gráficos a seguir e determine os elementos: período, frequência, amplitude e imagem. Após determinar os principais elementos das funções, escreva a função que descreve cada gráfico:

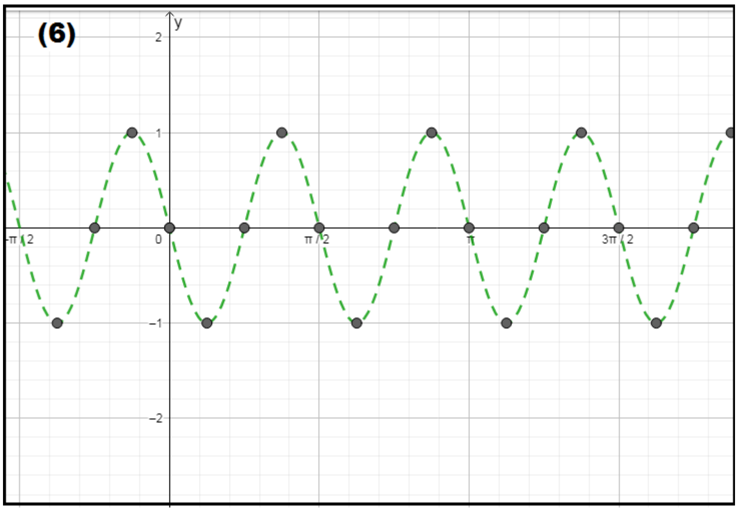


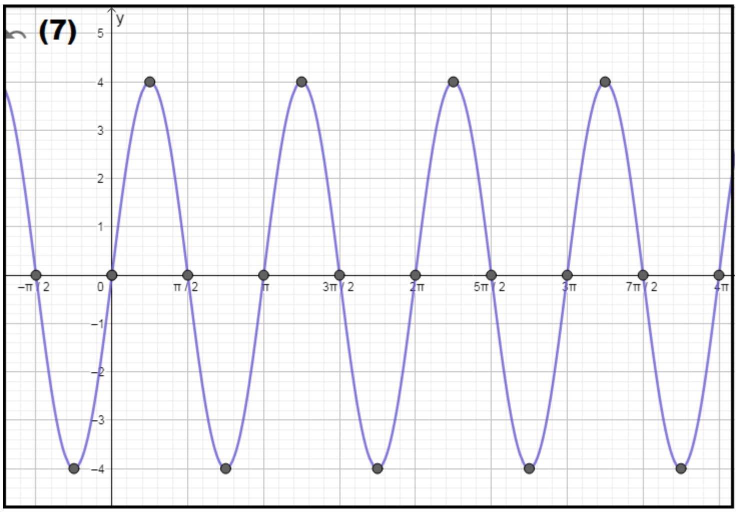



(3)
y
4
3
2
1
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
7π / 2
−1
−2
−3
−4


(4)
y
6
5
4
3
2
1
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
7π / 2
−1
−2


(5)
y
4
3
2
1
−π / 2
0
π / 2
3π / 2
5π / 2
−1
−2
−3
−4


(6)
y
2
1
-π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
−1
−2


(7)
y
5
4
3
2
1
−π / 2
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2
3π
7π / 2
4π
−1
−2
−3
−4

Gincana dos Gráficos:

Preencha a tabela, identificando os elementos pedidos e, em seguida, escreva a função descrita por cada gráfico:

Tabela 39 – Gincana dos gráficos

Gráfico	Período	Frequência	Amplitude	Imagem	Função	Pontos
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

Fonte: próprio autor

ICMC USP
SÃO CARLOS