UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

RICARDO DA SILVA OLIVEIRA

UM ESTUDO SOBRE O PRODUTO GEOMÉTRICO E ALGUMAS APLICAÇÕES

CASCAVEL-PR
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RICARDO DA SILVA OLIVEIRA

UM ESTUDO SOBRE O PRODUTO GEOMÉTRICO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Clezio Aparecido Braga (orientador)
Emerson Vitor Castelani
Sandro Marcos Guzzo

CASCAVEL-PR
2021

Oliveira, Ricardo da Silva
O048e Um estudo sobre o Produto Geométrico e algumas aplicações / Ricardo da Silva Oliveira; orientador Clezio Aparecido Braga. Cascavel, 2021.
66 p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Campus de Cascavel) Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2021.

1. Ensino de Matemática. 2. Álgebra Geométrica. 3. Produto Geométrico. 4. Álgebra e Geometria. I. Braga, Clezio Aparecido, orient. II. Título.

Ricardo da Silva Oliveira

UM ESTUDO SOBRE O PRODUTO GEOMÉTRICO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientador - Clezio Aparecido Braga
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Emerson Vitor Castelani
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Sandro Marcos Guzzo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 13 de abril de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradecer é o ato de demonstrar gratidão, e sou grato, primeiramente, à minha esposa, mulher determinada, trabalhadora e incansável em suas atitudes.

Aos meus filhos Manuela e Bernardo, os quais são motivo de alegria, de amor e de esperança.

Aos meus pais, José Possidônio e Maria Oliveira, que desde criança me incentivaram a estudar e buscar meus objetivos.

Agradeço aos meus amigos, João Cesar e Vilson, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Agradeço ao meu Orientador, professor Clezio, pela paciência, pelas orientações valiosas e por ter me desafiado a ser um professor pesquisador.

Agradeço aos professores do Mestrado Profissional em Matemática, que tanto nos auxiliaram durante e após as aulas.

Agradeço aos meus colegas do Mestrado Profissional em Matemática. Sem o apoio, as risadas, a troca de materiais, tudo seria muito mais difícil.

Agradeço à banca que se faz presente nesta defesa final da minha dissertação. Obrigado pelo tempo desprendido e por todas as sugestões e apontamentos. Creio que o aprendizado coletivo supera o individual.

Por fim, agradeço a Deus por todas as oportunidades oferecidas a mim ao longo da minha existência. Sem minha fé, certamente, minha caminhada até aqui teria sido mais difícil.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar, de modo simplificado, a relação entre a álgebra geométrica e a geometria analítica e álgebra linear. De modo especial, nossa proposta foi a evidenciar onde e como a ação da álgebra geométrica permite tirar conclusões e fazer descrições e interpretações sobre fatos geométricos. Para isso, baseamos nossos estudos nos pressupostos da Álgebra de Clifford (1845-1879). Inicialmente relembramos alguns conceitos essenciais de álgebra linear. Após, trouxemos à luz o conceito de álgebras de Clifford, listando algumas propriedades e mostrando como o produto geométrico funciona. Por fim, apresentamos algumas aplicações para geometria bidimensional e tridimensional. Diante disso, percebemos o poder das Álgebras de Clifford em problemas ligados a geometria e física devido à robustez de suas ferramentas algébricas, e também, pela elegância que descreve os principais conceitos da geometria analítica de Descartes.

Palavras-chaves: Álgebra de Clifford. Álgebra. Geometria. Produto Geométrico.

Abstract

The main purpose of this work is to present, in a simple way, the relationship between geometric algebra and analytical geometry and linear algebra. In a special way, our purpose was to highlight where and how the action of geometric algebra allows us to draw conclusions, descriptions and make interpretations about geometrics facts. In order to do this, we have based our studies on the assumptions of Clifford's Algebra (1845-1879). First of all, we remember the essential concepts of linear algebra. Afterward, we brought to light the conception of Clifford's algebras, listing some properties and showing how the geometric product work. Finally, we present some applications for bidimensional and tridimensional geometry. So, we realized the power of Clifford's algebras in problems related to geometry and physic due to the hardness of its algebraic tools and also, by the elegance that it describes the main concepts of Descartes analytical geometry.

Keywords: Clifford algebra. Geometry. Algebra. Geometric Product

Sumário

Introdução

A Álgebra Geométrica recentemente tem atraído a atenção de várias áreas de conhecimento entre elas a física, a engenharia, a ciência da computação e também da matemática. Tendo sua origem e conceitos fundamentados nas álgebras de Hamilton, de Grassmann e de Clifford, a Álgebra Geométrica resgata conceitos desenvolvidos no século XIX e que foram praticamente esquecidos no século XX, onde a descrição e os cálculos geométricos foram substituídos principalmente pelas descrições vetoriais, cálculos tensoriais e matriciais. No final do século XX e início do século XXI, no entanto, os cientistas começaram a reavaliar o uso dessas antigas ferramentas matemáticas sobre uma nova ótica. Uma figura central nesse processo foi David Hestenes, um físico teórico americano da Universidade Estadual do Arizona que percebeu que álgebras de Dirac e Matrizes de Pauli poderiam ser unificadas em uma única teoria não matricial. Esse foi o passo inicial para a aplicação do "já esquecido"produto de Clifford à física clássica. Essa nova forma de compreensão e uso dessa ferramenta matemática ficou conhecida como "Álgebra Geométrica".

O sucesso de Hestenes ao aplicar o produto de Clifford a teorias físicas teve grande impacto não somente para a física em si, mas também para pesquisas aplicadas em engenharia e computação. Entre as principais aplicações podemos destacar o controle de braços robóticos, computação gráfica, visão computacional, entre outras; além da formulação de uma linguagem universal para tratar de problemas físicos e geométricos. Nascia ali a Álgebra Geométrica.

Nesse trabalho apresentamos, de uma forma simplificada, a relação que a Álgebra Geométrica tem com os conteúdos de geometria analítica e álgebra linear estudadas nos cursos de graduação, como os conceitos são traduzidos entre a visão tradicional e através da ferramentas da Álgebra Geométrica. Serão abordados os espaços de duas e três dimensões de forma deixar claro onde e como a ação da Álgebra Geométrica permite tirar conclusões e fazer descrições e interpretações de natureza geométrica.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Esse primeiro capítulo é desenvolvido com a intenção de inserir as ferramentas básicas que serão utilizadas ao longo desse texto.

O primeiro conceito para contextualizar e criar o nosso universo algébrico de trabalho será o conceito geral de corpo. Em seguida, discutimos mais detalhadamente o corpo dos números complexos e os quatérnios.

1.1 Definição de Corpos

***Definição* 1.** *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações, uma adição e uma multiplicação. Esse conjunto, munido dessas duas operações será chamado de corpo se forem verificados os seguintes axiomas:*

Axiomas de Adição

A1) **Associatividade da adição**:

$(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall\ a,b,c \in \mathbb{K}.$

A2) **Comutatividade da adição**:

$a+b = b+a,\ \forall\ a,b,c \in \mathbb{K}.$

A3) **Existência de elemento neutro aditivo**:

exite $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a+0 = a,\ \forall\ a \in \mathbb{K}.$

A4) **Existência de elementos simétricos**:

$\forall\ a \in \mathbb{K}$, existe $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a+(-a) = 0.$

Axiomas de Multiplicação

M1) **Associatividade da multiplicação**:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$.

M2) **Comutatividade da multiplicação**:

$a \cdot b = b \cdot a,\ \forall\ a, b \in \mathbb{K}$.

M3) **Existência de elemento neutro multiplicativo**:

exite um elemento $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tal que $a \cdot 1 = a,\ \forall\ a \in \mathbb{K}$.

M4) **A existência de inversos** :

$\forall\ a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Há uma propriedade de compatibilidade entre as duas operações.

D1) **Distributividade da multiplicação em relação à adição**:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{K}$.

Usaremos a notação $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar um corpo com as operações $+$ e $\cdot$.

Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com suas operações usuais de adição e multiplicação são exemplos de corpos (infinitos). Os conjuntos $\mathbb{Z}_p$ (p um número primo) com a soma e o produto usuais de classes de restos módulo p são exemplos de corpos finitos.

O corpo do números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tem uma propriedade adicional, possui um subconjunto próprio $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

a) dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, tem-se que: $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $\mathbb{R}^+$ é fechado em relação à adição e à multiplicação;

b) dado $a \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das três alternativas: ou $a = 0$ ou $a \in \mathbb{R}^+$ ou $-a \in \mathbb{R}^+$ (0 é o elemento neutro da adição).

Se definimos o conjunto dos números negativos $\mathbb{R}^- = \{-a; a \in \mathbb{R}^+\}$, então podemos escrever o conjunto dos números reais como uma união disjuntas $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$. Essa partição de $\mathbb{R}$ define uma ordem parcial e caracteriza $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo. Para mais detalhes veja [2].

1.2 O Corpo dos Números Complexos

O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C} = \{(a+bi) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \text{ é tal que } i^2 = -1\}$ possui uma estrutura de corpo quando munido das operações de adição e multiplicação, definidas da seguinte forma:

dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$

i) $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

ii) $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Essas duas operações assim definidas satisfazem os axiomas de definição de corpo e fazem de $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos.

Verificaremos cada uma das propriedades da definição de corpo, de forma a deixar explícito como a ação do produto complexo age nos elementos do conjunto $\mathbb{C}$.

A1) **Associatividade da adição**:

$$\begin{aligned} ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= (a + c + e) + (b + d + e)i \\ &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i). \end{aligned}$$

A2) **Comutatividade da adição**:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (c + di) + (a + bi). \end{aligned}$$

A3) **Existência de elemento neutro para a adição**:

Existe um elemento neutro 0, escrito na forma complexa como $0 = 0 + 0i$ e tal que $(a + bi) + (0 + 0i) = (a + bi),\ \forall\ (a + bi) \in \mathbb{C}$

A4) **Existência de simétricos**:

Para todo número complexo $z = a + bi$, existe um $-z = -(a + bi) = (-a) + (-b)i$ tal que $z + (-z) = 0$.

M1) **Associatividade da multiplicação**:

$(z \cdot w) \cdot y = z \cdot (w \cdot y),\ \forall\ z, w, y \in \mathbb{C}$.

$$[(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) \quad = \quad [(ac - bd) + (ad + bc)i] \cdot (e + fi)$$

$$
\begin{aligned}
&= (ac-bd)e + (ac-bd)fi + (ad+bc)ie + (ad+bc)ifi \\
&= (ac-bd)e - (ad+bc)f + (ac-bd)fi + (ad+bc)ie \\
&= ace - bde - adf - bcf + acfi - bdfi + adei + bcei \\
&= ace - adf - bde - bcf + acfi + adei - bdfi + bcei \\
&= a(ce-df) - b(de+cf) + a(de+cf)i + b(ce-df)i \\
&= (a+bi)\cdot[(ce-df)+(cf+de)i] \\
&= (a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)].
\end{aligned}
$$

M2) **Comutatividade da multiplicação**:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (ca-db)+(cb+da)i \\
&= (c+di)(a+bi),
\end{aligned}
$$

$\forall\ a+bi, c+di \in \mathbb{C}$.

M3) **Existência de elemento neutro multiplicativo**:

Existe um elemento $1 = 1+0i \in \mathbb{C}$ tal que $(a+bi)(1+0i) = (a+bi)$.

M4) **Existência de inversos (simétricos multiplicativos)**:

Dado $z = a+bi \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$, existe um elemento $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-bi}{a^2+b^2} \in \mathbb{C}$ tal que $1 = zz^{-1} = (a+bi)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-bi}{a^2+b^2}\right)$.

D1) **distributividade da multiplicação em relação à adição**: $z\cdot(w+y) = z\cdot w + z\cdot y,\ \forall\ y, w, z \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)\cdot[(c+di)+(e+fi)] &= (a+bi)\cdot[(c+e)+(d+f)i] \\
&= a(c+e) - b(d+f) + [a(d+f)+b(c+e)]i \\
&= ac + ae - bd - bf + (adi + afi + bci + bei) \\
&= ac - bd + adi + bci + ae - bf + afi + bei \\
&= (a+bi)\cdot(c+di) + (a+bi)\cdot(e+fi).
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto dos números complexos munidos dessas operações é de fato um corpo.

É usual indicar um número complexo $z = (a+bi) \in \mathbb{C}$, por $z = \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)}i$, onde $\mathrm{Re(z)} = a$ é a **parte real** de z e $\mathrm{Im(z)} = b$ é a **parte imaginária** de z.

A partir dessa nomenclatura, se fixarmos um sistema de coordenadas cartesianas no plano e associarmos a parte real do número complexo ao eixo Ox, a parte imaginária

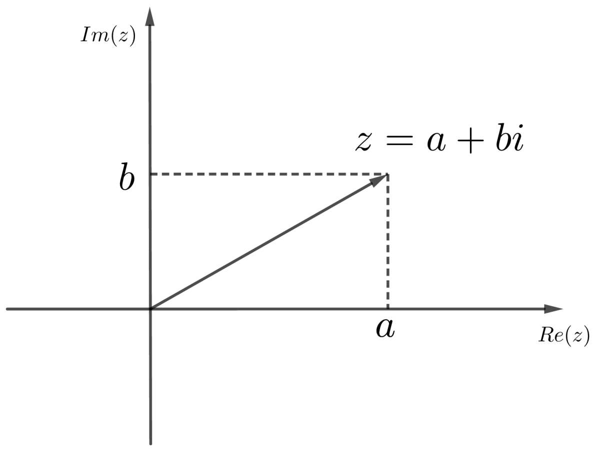

Figura 1.1: Representação de um número complexo.

ao eixo Oy, podemos então denominar o eixo Ox (abscissas) de **eixo real** e o eixo Oy (ordenadas) de **eixo imaginário**.

O complexo $z = a + bi$ fica então representado pelo ponto $P(a, b)$, onde o ponto P é chamado de *afixo* do número complexo z. A representação dos complexos como pontos do $\mathbb{R}^2$ é chamada de **plano de Argand-Gauss**.

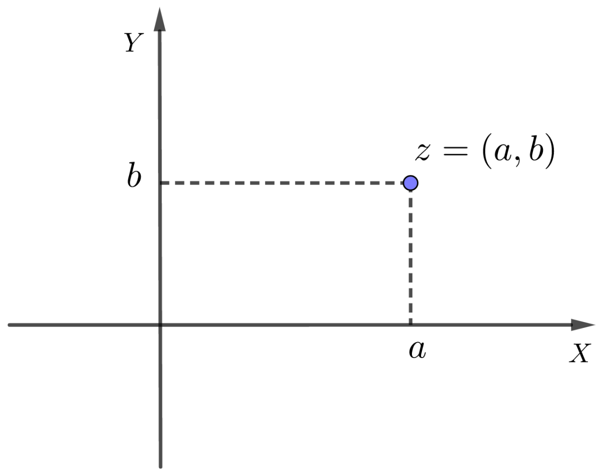

Figura 1.2: Número complexo representado por um ponto.

Os números complexos possuem também uma representação geométrica polar. A representação polar consiste em, a cada número complexo $z = a + bi$, associar um par ordenado (ρ, θ), onde $a = \rho\cos(\theta)$; $b = \rho\text{sen}(\theta)$; $\rho = |z|$ e θ é o ângulo entre o eixo *real* e o segmento que liga o afixo P de z à origem. Veja a Figura 1.3.

Observe que podemos substituir θ adicionado de múltiplos de 2π por um θ no intervalo $[0, 2\pi)$.

Assim, o número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito em sua forma geométrica

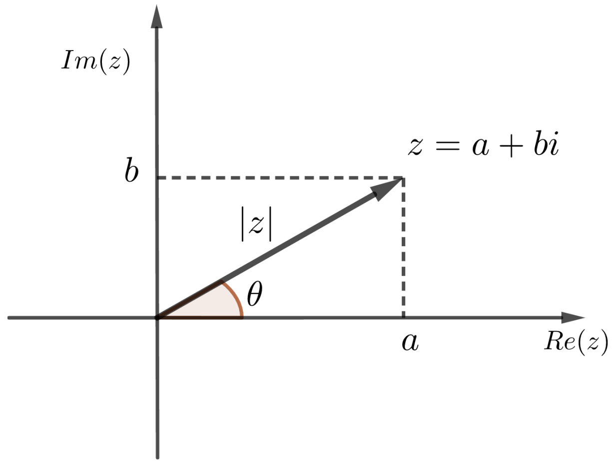

Figura 1.3: Representação polar de um número complexo

polar como:

$$z = \rho \cos\theta + \rho \mathrm{sen}\theta\ i,$$

ou ainda, para quem está habituado com a exponenciação complexa, como $z = e^{\theta i}$.

Pelo teorema de Pitágoras podemos calcular o valor no número real, não negativo, ρ como sendo o "módulo" de z e escrever

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O ângulo θ é chamado de argumento do número complexo z, denotado por $\arg(z)$ e calculado pela expressão

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}, \text{ se } \theta \neq \pi/2 + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad \cos(\theta) = \frac{a}{|z|}, \text{ se } z \neq 0.$$

Essa representação é conhecida como ***Forma Polar*** do número complexo z. Podemos também representar a número complexo z sendo o par $(|z|, \arg(z))$.

Definimos o conjugado de um número complexo $z = a+bi$ como sendo, $\bar{z} = a-bi$. Geometricamente esse conjugado é obtido pela reflexão do complexo z em relação ao eixo Re(z), conforme a Figura 1.4.

Um fato interessante a se observar é que, se multiplicarmos dois complexos de módulo unitário, $z_1 = \cos(\theta_1)+i\mathrm{sen}(\theta_1)$ e $z_2 = \cos(\theta_2)+i\mathrm{sen}(\theta_2)$, obtemos $z_1z_2 = (\cos(\theta_1)+ i\mathrm{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_2)) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)$, que ainda é um complexo de módulo unitário. De forma geral, se z_1 é um complexo de módulo unitário e $z_2 = \rho(\cos(\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_2))$, então

$$z_1z_2 = (\cos(\theta_1) + i\mathrm{sen}(\theta_1))\rho(\cos(\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_2)) = \rho(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Em outras palavras, como o argumento de z_1z_2 é $\theta_1 + \theta_2$, podemos ver que z_1z_2 é obtido de z_2 pela rotação de um ângulo θ_1.

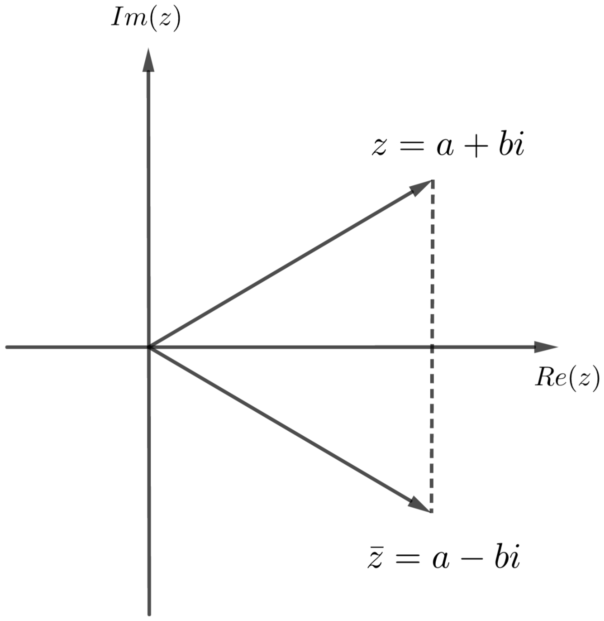

Figura 1.4: Conjugado de um número complexo.

1.3 Espaços Vetoriais

Definição 2. *Um conjunto V não vazio será chamado de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, se possui duas operações. Uma adição, que leva um par de vetores u e v de V a um vetor $u + v \in V$ e, uma multiplicação por escalar, que leva um escalar $a \in \mathbb{K}$ e um elemento $u \in V$, a um elemento $au \in V$ verificando as propriedades abaixo.*

Primeiramente em relação à adição:

A1) **Associatividade da adição**:

$(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall \ u, v, w \in V.$

A2) **Comutatividade da adição**:

$u + v = v + u, \ \forall \ u, v \in V.$

A3) **A existência de elemento neutro**:

exite $0 \in V$, tal que $u + 0 = u, \ \forall \ u \in V.$

A4) **A existência de simétricos**:

$\forall \ u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0.$

Em relação à multiplicação por escalar:

ME1) **Distributividade em relação a soma de vetores**:

$a(u+v) = au + av, \ \forall \ a \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$.

ME2) **Distributividade em relação a soma de escalares**:

$(a_1 + a_2)u = a_1 u + a_2 u, \ \forall \ a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ e $u \in V$.

ME3) **Associatividade**:

$(a_1 a_2)u = a_1(a_2 u), \ \forall \ a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ e $u \in V$.

ME4) **Regularidade do produto por escalar**:

$1v = v, \ \forall \ v \in V$.

Os elementos de V são denominados vetores e os elementos de $\mathbb{K}$ são chamados de escalares. Sendo assim, o elemento 0 de V é chamado de vetor nulo e o elemento $-v$ de vetor oposto de v.

***Proposição* 3.** *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) *se $u, v \in W$, então $u + v \in W$.*

ii) *se $a \in \mathbb{K}$ e $v \in W$, então $av \in W$.*

***Definição* 4.** *Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ vetores de V. Dizemos que um vetor v de V é uma combinação linear de $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ se existirem escalares $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ tais que*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n. \tag{1.1}$$

Dados os vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ pertencentes a um espaço vetorial V. Denotaremos por $G(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores em V.

***Proposição* 5.** *Seja $W = G(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, onde $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ são vetores de um espaço vetorial V. Valem as afirmações a seguir:*

i) *W é um subespaço de V.*

ii) *W é o menor subespaço de V, contendo $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$, i.e, qualquer subespaço de V que contém $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ também contém $G(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$.*

O subespaço vetorial W obtido na Proposição (5) é chamado de *subespaço vetorial gerado* pelos vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ e o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ é chamado de gerador de W.

Vimos na equação (1.1) quando um vetor é obtido por uma combinação linear. Agora, dizemos que os vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ pertencentes V são *linearmente independentes* se, e somente se, nenhum dos vetores puder ser escrito como combinação linear dos demais, ou de forma equivalente

$$\text{se } a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0, \text{ então, } a_1 = a_2 = ... = a_n = 0.$$

Em outras palavras, a única forma de obter o vetor nulo como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ é com todos os escalares $a_i = 0$.

1.3.1 Bases e dimensões

***Definição* 6.** *Seja $\lambda = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial $V \neq \{0\}$. Então, dizemos que λ é uma base de V, se as seguintes condições são verificadas:*

i) *λ é linearmente independente.*

ii) *$V = G\ (\lambda)$.*

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto gerador no qual cada vetor de V pode ser escrito de modo único como combinação linear desses vetores.

O número de elementos de uma base λ de um espaço vetorial V é um invariante desse espaço. Esse número será denominado de dimensão de V e denotado por $dimV$. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $dimV = 0$.

Se a base de um espaço vetorial V tem n elementos, então dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão finita.

1.3.2 Transformações Lineares

Sejam V e Wespaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear de V em W é uma aplicação $T : V \rightarrow W$que possui as seguintes propriedades:

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, para quaisquer v_1 e v_2 em V;

ii) $T(av) = aT(v)$, para quaisquer v em V e a em $\mathbb{K}$.

Essas propriedades são equivalentes a

$$T(v_1 + av_2) = T(v_1) + aT(v_2),$$

para quaisquer v_1 e v_2 em V e para qualquer a em $\mathbb{K}$.

A partir de transformações lineares dadas, pode-se obter novas transformações lineares por meio das seguintes operações

Sejam $T : V \to W$ e $S : V \to W$ transformações lineares. Definimos a soma de T e S, denotada por $T + S$, como a aplicação $T + S : V \to W$ dada, para todo $v \in V$, por

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v).$$

Se $k \in \mathbb{K}$, definimos o produto de k por T, denotando-o kT, como a aplicação $kT : V \to W$ dada, $\forall\ v \in V$, por

$$(kT)(v) = kT(v).$$

1.3.3 Vetores geométricos e suas propriedades

Por vetores geométricos vamos entender os vetores dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Iniciamos apresentando as grandezas matemáticas que são determinadas apenas pelo seu valor numérico, não necessitando de uma direção ou sentido, as quais são chamadas de escalares. Alguns exemplos de grandezas escalares são: A carga elétrica, Temperatura, a Massa de um corpo, etc. Há também grandezas que precisam de uma direção e um sentido para serem determinadas. Essas são chamadas de grandezas vetoriais e são representadas por vetores. As representações deste objeto são bastante variadas e pertencem aos registros em língua natural, simbólicos, gráficos, a partir dos quais podemos ter representações figurais, gráficas e simbólicas, neste caso, em particular, com o uso de trigonometria, de coordenadas de uma base ortogonal ou, ainda, com uso de matrizes ([7], 2016, p 2).

Graficamente, essas grandezas podem ser vistas como segmento de reta orientado e são representadas por três propriedades, as quais determinam um vetor, sendo o módulo, direção e sentido. São exemplos de vetores: a velocidade, a aceleração, a força, o campo magnético, o campo elétrico, e tantos outros.

O módulo dá a grandeza, informa o comprimento de um vetor v e é denotado por $|v|$. A sua direção determinada por uma reta suporte e seu sentido por uma flecha numa das suas extremidade. Chamaremos de *versor* ou de *vetor unitário*, o vetor cujo comprimento é 1.

Dois vetores são ditos paralelos se possuem a mesma direção. Se dois vetores possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, são ditos iguais. O oposto de um vetor v, que é denotado por $-v$, além de ser paralelo a v tem o mesmo comprimento, porém o sentido é o oposto.

Podemos definir a multiplicação de um vetor v por um escalar a, com $a \in \mathbb{R}$ sendo av, o qual terá comprimento $|av| = |a||v|$, mesma direção de v. O sentido será mantido se a for positivo e será o oposto se a for negativo.

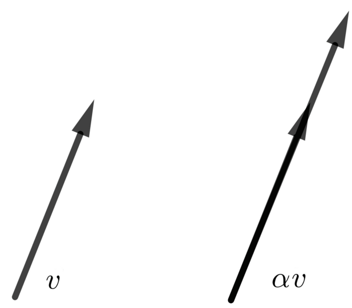

Figura 1.5: Um vetor v multiplicado por um escalar $a > 0$.

Tomando um vetor v e a e b reais, podemos apresentar algumas propriedades da multiplicação por escalar:

i) Associativa: $a(bv) = (ab)v$.

ii) Idenditade: $1v = v$.

iii) Oposto: $-v = (-1)v$.

Para representarmos um vetor analiticamente utilizaremos os componentes do vetor. Para isso, vamos utilizar o sistema de eixos cartesianos, fixando um ponto de origem e definimos um sistema de coordenadas xy em $\mathbb{R}^2$ (xyz em $\mathbb{R}^3$). É possível definir esses componentes a partir das projeções do vetor nesses eixos.

Neste caso, os componentes do vetor v serão os vetores $\vec{v_x}$ e $\vec{v_y}$ projetados nos eixos x e y do plano cartesiano.

Utilizando relação trigonométrica aplicada a um triângulo retângulo e escrevendo $|v|$ para indicar o "tamanho"de v, podemos determinar o módulo dos componentes do vetor, vejamos os detalhes

$$\text{sen } \theta = \frac{v_y}{|v|} \;\Rightarrow\; v_y = |v| \cdot \text{sen } \theta,$$

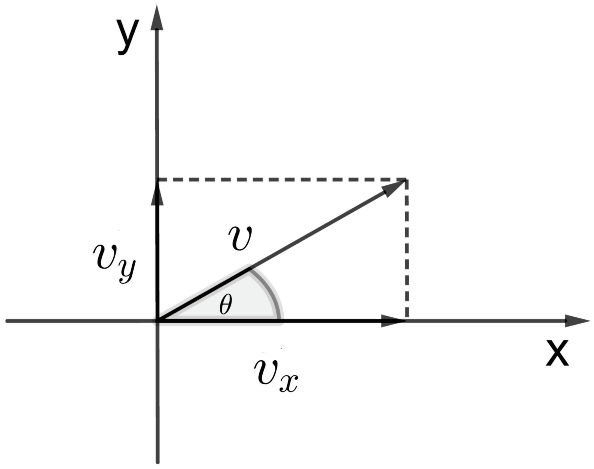

Figura 1.6: Componentes de um vetor.

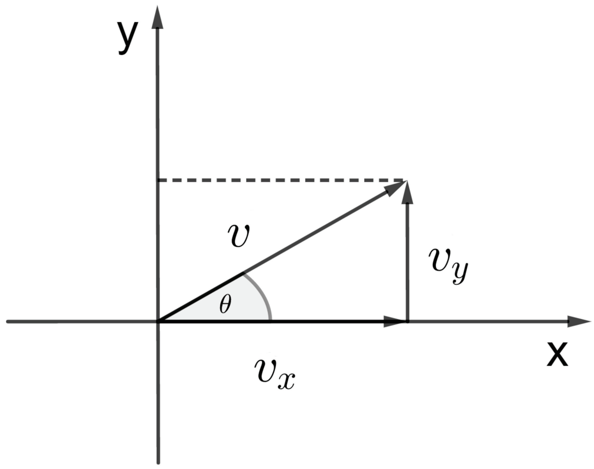

Figura 1.7: Componentes de um vetor.

e

$$\cos\ \theta = \frac{v_x}{|v|} \ \Rightarrow \ v_x = |v| \cdot \cos\ \theta.$$

Finalmente, aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$v^2 = v_y^2 + v_x^2,$$

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}.$$

A partir daqui, vamos considerar o conjunto $\{e_1, e_2\}$ de versores não paralelos, como uma base para o sistema xy, e um ponto de partida sendo a origem desse sistema. Sendo assim, escreveremos um vetor de forma única como uma combinação linear desses versores, ou seja, no plano podemos escrever o vetor $v = v_1e_1 + v_2e_2$ assim os escalares v_1

e v_2 são chamados de componentes ou coordenadas dos vetores.

Podemos generalizar para outras dimensões, isto é,

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + ... + v_n e_n.$$

Após a escolha da base, vamos representar também os vetores como matrizes linhas, ou seja, dado um vetor v no plano, podemos representá-lo por

$$v = (v_1, v_2),$$

ou no $\mathbb{R}^n$ por

$$v = (v_1, v_2, ..., v_n).$$

A soma de vetores pode ser realizada de duas formas. Para a primeira forma, dados dois vetores u e w, devemos considerar o deslocamento do início do vetor u até o final do vetor w, lembrando que o segundo vetor tem que iniciar na extremidade do primeiro, como mostra a Figura 1.8 assim o vetor resultante v será a soma desses vetores.

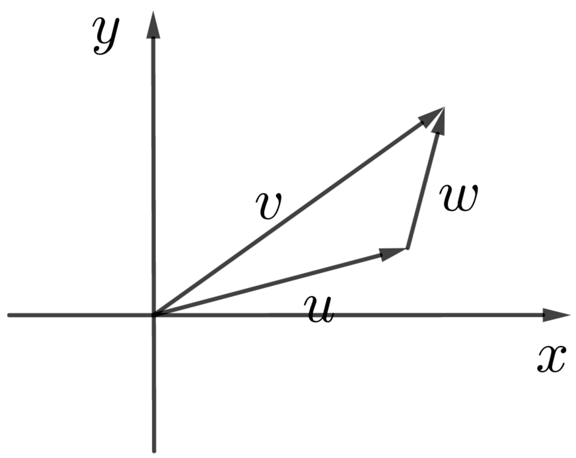

Figura 1.8: Soma de dois vetores.

A segunda forma para calcularmos a soma dos vetores será por meio da regra do paralelogramo. Para isso, tomando os vetores u e v, basta traçarmos retas paralelas aos mesmos formando um paralelogramo, conforme a Figura 1.9. A diagonal, com extremidade no início dos dois vetores, será o vetor resultante da soma.

Também podemos definir a diferença entre dois vetores u e v, para isso basta utilizar a seguinte regra: somamos o primeiro vetor com o oposto do segundo vetor, isto é, $u - v = u + (-v)$.

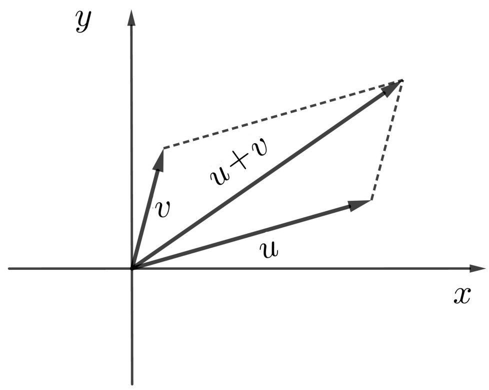

Figura 1.9: Soma utilizando regra do paralelogramo.

As propriedades de espaço vetorial são satisfeitas para a soma e produto or escalar de vetores geométricos. Abaixo listamos algumas propriedades válidas para essa adição e multiplicação por escalar.

Considerando os vetores u, v e $w \in V$ e os escalares a e b pertencentes ao conjunto dos números reais, temos:

i) Comutatividade: $u + v = v + u, \forall\ u, v \in V.$

Prova:

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2) + (v_1, v_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

ii) Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\ u, v, w \in V.$

Prova:

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) \\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= u + (v + w). \end{aligned}$$

iii) Distributividade: $a(u + v) = au + av, \forall\ u, v \in V$ ***e*** $\forall a \in \mathbb{R}.$

Prova:

$$\begin{aligned} a(u + v) &= a((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) \\ &= a(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (au_1 + av_1) + (au_2 + av_2)\\
&= (au_1, au_2) + (av_1, av_2)\\
&= au + av.
\end{aligned}
$$

1.3.4 Produto escalar, vetorial e misto

Dado um $\mathbb{K}$ espaço vetorial V ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), um produto interno sobre V é uma aplicação

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K},$$

tal que:

i) Para todos $u \in V$, o produto interno $\langle u, u\rangle$ é real e não negativo, ou seja, $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$;

ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o produto interno é comutativo: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle\ \forall\ u, v \in V$;

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o produto interno comuta conjugado: $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}\ \forall\ u, v \in V$;

iii) É linear na primeira coordenada, ou seja, satisfaz: $\forall\ u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$,

$$\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle.$$

Combinando as propriedades de conjugação complexa com ii) e iii) obtemos $\langle w, au + bv\rangle = \overline{a}\langle w, u\rangle + \overline{b}\langle w, v\rangle$. Note, porem, que quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ é comutativo e bilinear.

Um espaço $\mathbb{K}$ vetorial V, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ é chamado de *Espaço Vetorial com Produto Interno*.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) dizemos que V é um espaço vetorial real (complexo) com produto interno.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno usual, é um espaço vetorial real com produto interno. O produto interno usual é conhecido como produto escalar, indicado por um ponto $(\cdot)$ e definido por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n.$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar é chamado de *Espaço Euclidiano n-Dimensional.*

De forma análoga se define o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots x_n\overline{y_n}.$$

O espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ com o produto interno usual é chamado de *Espaço Unitário n-Dimensional.*

Trabalharemos nesse texto com os espaços Euclidianos e usaremos a notação $u \cdot v$ para indicar o produto interno $\langle u, v \rangle$.

Dado um vetor $u \in V$, o módulo (ou comprimento) do vetor u é dado por

$$|u| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Se um vetor u é tal que $|u| = 1$, dizemos que um é um vetor normal ou unitário.

O produto escalar de dois vetores está relacionado com o ângulo formado por eles, ou seja, se u e v são dois vetores não nulos de um Espaço Euclidiano V e θ o ângulo formado entre eles, então

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta. \tag{1.2}$$

Da equação 1.2, verificamos que o ângulo formado entre dois vetores pode ser calculado como

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}.$$

Se o produto escalar entre dois vetores for nulo, ou seja, se $u \cdot v = 0$, então os vetores serão ortogonais entre si. Usaremos a notação de $u \perp v$ para indicar a ortogonalidade entre u e v e escrevemos

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

Se o produto escalar entre dois vetores for maior que zero, ou seja, $u \cdot v > 0$ então $\cos \theta > 0$, e assim $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ que implica θ ser agudo ou nulo. Já, se $u \cdot v < 0$ então $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ e logo θ será obtuso ou raso.

Chamamos um conjunto S de vetores de V de *conjunto ortogonal*, quando quaisquer dois vetores distintos desse conjunto são ortogonais. E, caso cada vetor de S tenha módulo 1, o conjunto será chamado de *conjunto ortonormal.*

Se uma base $\lambda = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V, então chamamos de *base ortogonal* e, se além disso, os vetores forem unitários, então chamaremos de *base ortonormal.*

Se escolhermos uma base ortonormal $\lambda = \{e_1, e_2 \ldots e_n\}$ de V e dois vetores u e $v \in V$ escritos nessa base como $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$, então

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{ e } |u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

Em particular, quando $V = \mathbb{R}^2$ e escolhemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, dois vetores u e $v \in \mathbb{R}^2$ e escrevendo na base como $u = u_1e_1 + u_2e_2$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2$ o produto interno entre eles será o número real

$$u \cdot v \ = u_1v_1 + u_2v_2 \text{ e o módulo } |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Em $\mathbb{R}^3$, com base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ as mesmas identidades se escrevem como

$$u \cdot v \ = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \text{ e } |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Particularizando nosso estudo para $\mathbb{R}^3$, segundo [3], na álgebra linear tradicional, dados três vetores a, b e c se escrevermos esses vetores numa matriz onde a, b e c são linhas, o *determinante* dessa matriz será calculado por

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3,$$

onde, a_i, b_i e c_i são as componentes dos vetores a, b e c correspondentes.

Assim, tomando a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 3, ou seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

o determinante dessa matriz é definido como

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Podemos reescrever essa expressão pela expansão de Laplace como

$$detA = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{11} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} a_{12} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{13}.$$

O *Produto Vetorial* entre dois vetores u e v de $\mathbb{R}^3$ será representado por $u \times v$. Segundo [5], a forma mais fácil para definição desse produto está em estabelecer regras para o produto de elementos de uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$.

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0,$$

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_1 = -e_3,$$

$$e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_2 = -e_1,$$

$$e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_1 \times e_3 = -e_2.$$

Sendo assim, dados os vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, a equação do produto vetorial será

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3.$$

Note que cada componente pode ser expressa por um determinante de uma matriz de 2ª ordem

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Podemos usar uma notação que facilita a memorização do produto vetorial, veja

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

O Produto Vetorial satisfaz algumas propriedades que passamos listar abaixo.

Dados os vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ e $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, temos

i) $u \times u = 0$.

ii) $u \times v = -(v \times u)$.

iii) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.

iv) $(au) \times v = u \times (av) = a(u \times w)$.

O Produto Vetorial, em geral, não é associativo, ou seja, $u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$. Além disso, dados dois vetores u e v não nulos, dizemos que são paralelos se, e somente, se o Produto Vetorial entre eles seja nulo, i.e., $u \times v = 0$.

Como o resultado desse produto é um terceiro vetor, podemos então calcular o módulo, direção e sentido desse vetor.

Dados dois vetores u e v, o módulo do produto vetorial é equivalente à área do paralelogramo formado pelos dois vetores, conforme a Figura 1.10.

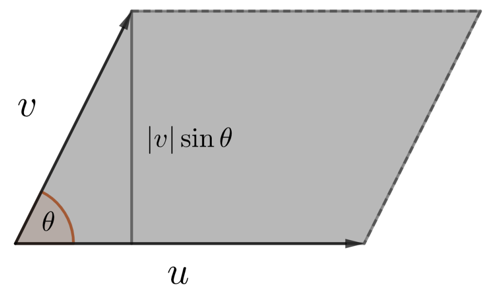

Figura 1.10: Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial de dois vetores.

Ou seja,

$$|u \times v| = |u||v|\text{sen } \theta.$$

Logo,

$$|u \times v| = \text{Área do Paralelogramo.}$$

O vetor resultante será ortogonal a ambos os vetores u e v e o sentido desse vetor pode ser encontrado através da *regra da mão direita*, ou seja, basta esticarmos os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção e sentido do vetor u e depois fecharmos a mão na direção e sentido do vetor v, o polegar esticado apontará na direção e sentido do vetor $u \times v$.

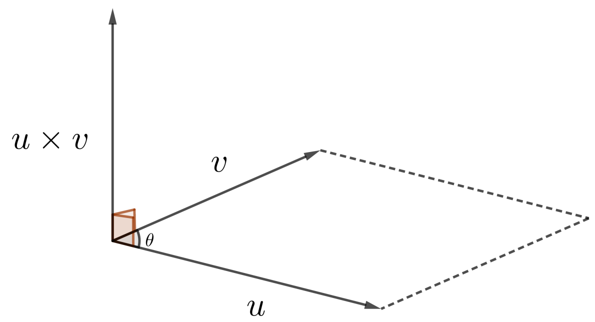

Figura 1.11: Direção e sentido do vetor $u \times v$.

Vamos definir agora um outro produto no espaço $\mathbb{R}^3$, com ele podemos obter o volume de um paralelepípedo determinado por três vetores.

Dado três vetores u, v e w não nulos, chamaremos de *produto misto* o número real $u \cdot (v \times w)$.

Usando as definições de produto vetorial, podemos verificar que

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_3.$$

Agora, usando produto escalar entre u e $v \times w$ chegamos ao número real

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_3.$$

Assim, o produto misto é o determinante de uma matriz 3×3, onde as linhas são as coordenadas dos vetores u, v e w nesta ordem.

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

O volume do paralelepípedo, determinado por três vetores u, v e w não nulos, é determinado pelo módulo do produto misto.

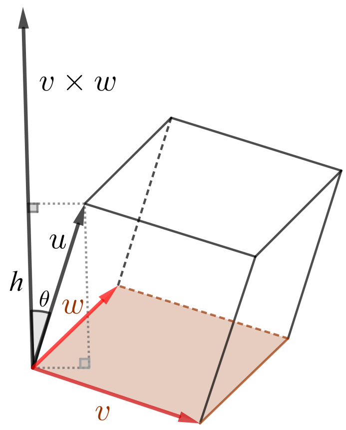

Figura 1.12: Produto misto.

Como vimos anteriormente, a área da base do paralelepípedo é dada pelo módulo do produto vetorial $|v \times w|$. Já a altura do paralelepípedo, observando o ângulo θ formado entre os vetores u e $v \times w$ e usando as relações métricas no triângulo retângulo, mede $||u|| \cos\theta$. sendo assim, o volume denotado por Vol, será

$$\text{Vol} = |v \times w| \; |u| \cos\theta.$$

Comparando o resultado com o produto escalar

$$u \cdot v = |u| \; |v| \cos\theta,$$

temos que

$$u \cdot (v \times w) = |v \times w| \; |u| \cos\theta.$$

Logo,

$$\text{Vol} = |u \cdot (v \times w)|.$$

O produto misto satisfaz algumas propriedades, sendo que determinadas delas decorrem diretamente das propriedades de determinantes:

i) $u \cdot (u \times v) = 0$ pois $v \times w$ é ortogonal a u. Uma interpretação seria o cálculo de um determinante com duas linhas ou colunas iguais.

ii) $u \cdot (v \times w) = -u \cdot (w \times v)$**.** Ao trocar a ordem de uma das linhas em um determinante o resultado muda de sinal, ou seja, com uma permutação haverá troca de sinal, com duas não.

iii) Com o resultado anterior temos que $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$. Pois, sabemos que $u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v)$, permutando duas linhas, sabemos que o resultado do determinante não muda, logo $w \cdot (u \times v) = u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$.

1.4 Complemento Ortogonal

Como já mencionado no caso do produto escalar (veja equação 1.2), quando temos um espaço vetorial V, munido de um produto interno, temos a noção de ortogonalidade entre dois vetores. De fato, nesse espaço podemos definir a noção de ângulo entre dois vetores u e v pela fórmula

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}, \tag{1.3}$$

onde, $0 \leq \theta \leq \pi$. Podemos observar que se $\cos(\theta) = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, com isso, temos a noção de ortogonalidade nesse espaço vetorial. Segue da equação 1.3 que dois vetores não nulos, u e v são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.

Seja v um vetor de V e W um subespaço vetorial de V. Dizemos que v é ortogonal a W se v é ortogonal a cada vetor de W. O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W é chamado do *complemento ortogonal de* W e denotado por $W^{\perp}$.

***Exemplo* 1.** *Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar e W o plano dado pela equação $x + y + z = 0$. O vetor $v = (1, 1, 1)$ é ortogonal a W, pois v é um vetor normal a esse plano. Para encontrarmos $W^{\perp}$, temos que encontrar todos os vetores do tipo $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ tais que o produto escalar com os vetores da forma $(-y - z, y, z)$, y e $z \in \mathbb{R}$, sejam nulos. Executando os cálculos obtemos $W^{\perp} = \{(a, a, a); a \in \mathbb{R}\}$ o qual é uma reta que passa pela origem e tem o vetor v como vetor diretor.*

Proposição 7. *Seja W um subespaço de um espaço vetorial com produto interno V. Então:*

(i) $W^{\perp}$ *é um subespaço vetorial de* V;

(ii) $W \bigcap W^{\perp} = \{0\}$;

(iii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$;

(iv) $V = W + W^{\perp}$.

Em virtude da proposição anterior, escrevemos $V = W \oplus W^{\perp}$ e dizemos que V é soma direta de W com seu complemento ortogonal $W^{\perp}$.

1.5 Álgebras

Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto munido de três operações: uma adição, $+ : A \times A \longrightarrow A$ entre elementos de A; um produto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times A \longrightarrow A$ e um produto $\odot : A \times A \longrightarrow A$, entre elementos de A; tais que $(A, +, \cdot)$ constituem um espaço vetorial e o produto $(\odot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

A1) **Distributividade à direita:**

$(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$, $\forall x, y, z \in A$;

A2) **Distributividade à esquerda:**

$z \odot (x + y) = z \odot x + z \odot y$, $\forall x, y, z \in A$;

A3) **Lei de compatibilidade com escalares:**

$(a \cdot x) \odot (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \odot y)$, $\forall x, y \in A$ e $\forall a, b, \in \mathbb{K}$;

Se, além disso, o produto for associativo, dizemos que A é álgebra associativa.

Se existir um elemento $1 \in A$ tal que $1 \odot x = x \odot 1 = x$, dizemos que A é uma álgebra com unidade e, se $x \odot y = y \odot x, \forall x, y \in A$, dizemos que a álgebra A é uma álgebra comutativa. Caso ambas ocorram, dizemos que A é uma álgebra comutativa com identidade.

Se o espaço vetorial $(A, +, \cdot)$ for de dimensão finita, então dizemos que A é uma álgebra de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$.

Exemplos típicos de álgebras associativas com unidades são as álgebras de polinômios (em uma indeterminada) e as álgebras de matrizes, sendo que a álgebra de polinômios é comutativa.

1.6 A álgebra dos Quatérnios

Como vimos na Seção (1.2), o conjunto dos números complexos pode ser representado no plano pela associação de cada número complexo a um vetor de $\mathbb{R}^2$. Isso permite ver um número complexo como um vetor bidimensional e também utilizar propriedades dos números complexos para tratar problemas relacionados ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

A pergunta que surge então é: poderia essa ideia ser generalizada para a terceira dimensão? Essa foi uma das maiores preocupações do físico William Rowan Hamilton (1805-1865). Como um número complexo pode ser representado no plano na forma $x+yi$ sobre um eixo real e um imaginário, seria razoável pensar em uma estrutura similar no espaço consistindo de uma tripla da forma $x+yi+zj$, onde teríamos um eixo real e dois eixos imaginários?

Poderíamos tentar escrever um elemento espacial na forma $x+yi+zj$, onde j representaria um terceiro eixo perpendicular aos demais. Os complexos i e j teriam as propriedades $i^2 = j^2 = -1$ e, obviamente valendo a propriedade distributiva, o módulo calculado a partir do produto $(x+yi+zj)(x-yi-zj)$.

Observe, porem, que $(x+yi+zj)(x-yi-zj) = x^2+y^2+z^2-yz(ij+ji)$ tem um termo que não deveria aparecer. Uma forma de contornar o problema seria definindo que $ij = -ji$. Com isso, resgatamos o módulo e também o produto escalar. Mas há um problema de fechamento da operação de produto. Por exemplo, ao multiplicarmos $(a+bi+cj)$ por $(x+yi+zj)$ obtemos:

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) = ax-by-cz+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz-cy)ij$$

e a definição $ij = -ji$ não desaparece com o termo em ij nesse caso. Hamilton então "apelidou"o termo ij de k como sendo um termo desconhecido e fez tentativas em busca de eliminar esse termo das equações.

Figura 1.13: Placa dos Quatérnios - Ponte do Broome.

fonte:https://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton

De acordo com [6], um certo dia, caminhando ao longo do Royal Canal próximo à Ponte Boome em Dublin na Irlanda, Hamilton percebeu instantaneamente que se usasse um quatro termo a operação seria automaticamente fechada.

Para compreender melhor a ideia de Hamilton, considere um elemento da forma $a+bi+cj+dk$. Mantendo as identidades $i^2 = j^2 = -1$ e $ij = -ji$, ao refazer os cálculos anteriores teremos $(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2(-k^2)-bd(ik+ki)-cd(jk+ki)$. Dessa forma para resgatar o módulo, bastaria definir $k^2 = -1,\ ik = -ki$ e $jk = -kj$. Mas ao passo que $ij = k$, quais seriam os valores para ik e jk?

Um cálculo direto, usando associatividade e o fato de que $ij = k$, mostra que

$$ik = i(ij) = (ii)j = i^2j = -j,\ jk = j(ij) = -j^2i = -i$$

e

$$ijk = (ij)(ij) = i(ji)j = -i(ij)j = -i^2j^2 = -1.$$

Em homenagem a W.D. Hamilton o conjunto dos quatérnios é denotado por $\mathbb{H}$ e é definido pelo conjunto dos objetos compostos de quatro componentes, uma real e três imaginárias da seguinte forma

$$\mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\ e\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Deste modo, a é chamado de parte real e $bi+cj+dk$ é denominado parte imaginária do quatérnio (que também é conhecida com parte vetorial). Chamaremos de *quatérnio puro* quando a for igual a zero. Além disso, como a multiplicação não é comutativa, consideramos as seguintes regras quanto as unidades imaginárias,

$$ij = k\ ,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

A definição de soma para quatérnios é semelhante a soma de números complexos, pois é associativa e comutativa, ou seja, somamos ou subtraímos os coeficientes das bases correspondentes. Por exemplo, a soma dos quatérnios $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ e $r = r_1 + r_2i + r_3j + r_4k$, resulta em:

$$s = (q_1 + r_1) + (q_2 + r_2)i + (q_3 + r_3)j + (q_4 + r_4)k.$$

Já para produto de quatérnios utilizaremos as regras estabelecidas para o produto dos números unitários i, j e k. Esse produto também é semelhante ao produto de números complexos. Por exemplo, utilizando a distributividade para o produto dos dois quatérnios $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ e $r = r_1 + r_2i + r_3j + r_4k$, resulta em

$$\begin{aligned} qr &= (q_1 + q_2i + q_3j + q_4k)(r_1 + r_2i + r_3j + r_4k) \\ &= q_1r_1 + q_1r_2i + q_1r_3j + q_1r_4k + q_2ir_1 + q_2ir_2i + q_2ir_3j + q_2ir_4k + q_3jr_1 + q_3jr_2i \\ &+ q_3jr_3j + q_3jr_4k + q_4kr_1 + q_4kr_2i + q_4kr_3j + q_4kr_4k \\ &= (q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) + (q_1r_2 + q_2r_1 + q_3r_4 - q_4r_3)i \\ &+ (q_1r_3 - q_2r_4 + q_3r_1 + q_4r_2)j + (q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1)k. \end{aligned}$$

Observe que se q e r forem quatérnios puros, então

$$\begin{aligned} qr &= (q_2i + q_3j + q_4k)(r_2i + r_3j + r_4k) \\ &= q_2ir_2i + q_2ir_3j + q_2ir_4k + q_3jr_2i + q_3jr_3j + q_3jr_4k + q_4kr_2i + q_4kr_3j + q_4kr_4k \\ &= (-q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) + (q_3r_4 - q_4r_3)i + (-q_2r_4 + q_4r_2)j + (q_2r_3 - q_3r_2)k. \end{aligned}$$

Compare a parte imaginária de qr com a definição de produto vetorial dada na subseção 1.3.4 ao identificarmos i com e_1, j com e_2 e k com e_3.

Naturalmente, produto não é comutativo, ou seja, existem q e $r \in \mathbb{H}$ tais que $qr \neq rq$, as unidades imaginárias já demonstram isso.

Dado o quatérnio $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$, o seu conjugado será esse mesmo quatérnio mas com os sinais da parte imaginária invertidos, ou seja,

$$\overline{q} = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k.$$

Como era previsto por Hamilton, o módulo de um quatérnio será o resultado da raiz quadrada da soma do quadrado de seus coeficientes. Assim, o módulo do número

$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, será

$$|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}.$$

Capítulo 2

Álgebra de Clifford

A Álgebra de Clifford é associativa e de grande importância na matemática e na física. Com ela podemos generalizar sistemas numéricos, como por exemplo, os números reais, complexos e quatérnios. Diante disto, neste capítulo veremos esse formalismo matemático revelador, que possui inúmeras vantagens sobre a álgebra linear tradicional e, em muitos casos, pode substituir a álgebra vetorial [5]. A idéia central na Álgebra de Clifford é o uso da noção de subespaços vetoriais para representar propriedades de segmentos de reta, "segmentos de planos" e "segmentos de volumes". Outra vantagem é poder estender à dimensões superiores utilizando os mesmas técnicas, sem a necessidade de definições adicionais.

2.1 Produto de Clifford

Vamos apresentar de forma intuitiva, primeiramente no plano e depois no espaço como funciona o produto de Clifford, que também é chamado de produto geométrico.

Tomando um vetor qualquer do plano $\mathbb{R}^2$, podemos escrevê-lo como combinação linear de uma base ortonormal, isto é, $v = v_1e_1 + v_2e_2$. Para calcular o módulo de v, iniciaremos escrevendo o quadrado do seu módulo, utilizando um possível produto de vetores, ou seja,

$$|v|^2 = vv. \tag{2.1}$$

Expandindo a expressão algébrica

$$vv = (v_1e_1 + v_2e_2)(v_1e_1 + v_2e_2)$$

e supondo que a propriedade distributiva seja satisfeita, temos

$$vv = v_1v_1e_1e_1 + v_1v_2e_1e_2 + v_2v_1e_2e_1 + v_2v_2e_2e_2,$$

$$vv = v_1^2 e_1 e_1 + v_2^2 e_2 e_2 + v_1 v_2 e_1 e_2 + v_2 v_1 e_2 e_1.$$

Pela Geometria Euclidiana clássica,

$$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2. \tag{2.2}$$

Temos então, de (2.1) e (2.2)

$$v_1^2 e_1 e_1 + v_2^2 e_2 e_2 + v_1 v_2 e_1 e_2 + v_2 v_1 e_2 e_1 = v_1^2 + v_2^2.$$

Para que essa igualdade seja satisfeita, devemos impor que

$$e_1 e_1 = e_2 e_2 = 1, \text{ e}$$

$$v_1 v_2 e_1 e_2 + v_2 v_1 e_2 e_1 = 0. \tag{2.3}$$

Note que usando a relação (2.3) já chegamos ao valor do quadrado do módulo de v em (2.2). Usando a associatividade para os componentes dos vetores em (2.3) e os colocando em evidência, obtemos:

$$v_1 v_2 (e_1 e_2 + e_2 e_1) = 0.$$

Basta então, tomar $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$, o que nos leva

$$(e_1 e_2) = -(e_2 e_1).$$

Note que $e_1 e_2$ é um novo elemento, chamamos esse novo elemento de *bivetor*, o qual representa geometricamente um fragmento orientado do plano, formado pelos versores e_1 e e_2. A Figura 2.1 apresenta um exemplo de bivetor.

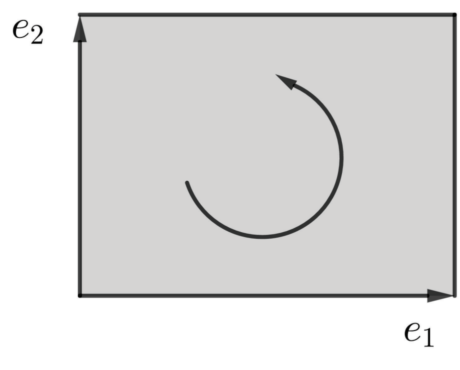

Figura 2.1: Um bivetor e_{12}.

Usaremos a notação $e_1 e_2$ ou e_{12} para um *bivetor*.

Usando as relações acima e dados os vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2$ no espaço bidimensional, podemos definir o Produto de Clifford entre esses dois vetores por

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_{12}. \tag{2.4}$$

Por não possuir versores, o primeiro termo do lado direito da equação (2.4) resulta em um escalar, o qual é chamado de produto interno e representado por $u \cdot v$. Historicamente, esse termo é chamado de *produto de Gibbs-Heaviside*. O produto interno fica então definido pela equação

$$u \cdot v = (u_1v_1 + u_2v_2).$$

Compare com a definição de produto escalar apresentada no capítulo anterior.

O segundo termo do lado direito da equação é chamado de *produto externo*, historicamente conhecido como *produto de Grassmann*, sendo representado por $\wedge$. O produto externo pode ser definido por

$$e_i \wedge e_j = \begin{cases} 0, & se\ i = j \\ e_ie_j, & se\ i \neq j \end{cases}$$

Usando essa definição e tomando os vetores u e v temos que

$$u \wedge v = (u_1v_2 - u_2v_1)e_{12}. \tag{2.5}$$

O coeficiente do bivetor em 2.5 determina a área desse *bivetor*, ou seja, a área é determinada por $|u_1v_2 - u_2v_1|$. Além disso, a unidade de $\mathbb{R}$, os vetores e_1, e_2 e o *bivetor* e_{12} formam uma base para a Álgebra de Clifford, chamada de nesse caso de Cl_2, que possui dimensão 4. Um multivetor, ou seja, um elemento qualquer de Cl_2, pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base, $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$.

Assim, podemos escrever um multivetor em Cl_2 como sendo a combinação linear desses elementos, ou seja:

$$u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_{12}.$$

De modo análogo, exigindo as mesmas condições sobre um possível produto de vetores no espaço $\mathbb{R}^3$, um multivetor de Cl_3, é dado pela combinação linear dos elementos da base $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$. Assim, podemos escrever um multivetor qualquer do espaço usando os 8 elementos dessa base, na forma

$$u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + u_4e_{12} + u_5e_{13} + u_6e_{23} + u_7e_{123}.$$

Note que um novo elemento é introduzido, denotado por e_{123}, chamado de *trivetor*, que é a multiplicação de três vetores ortogonais e distintos do $\mathbb{R}^3$, esse *trivetor* é uma "porção" orientada do espaço tridimensional, que dá significado a um elemento orientado de volume.

A multiplicação de elementos básicos em Cl_3 é dada na tabela a seguir

	1	e_1	e_2	e_3	e_2e_3	e_3e_1	e_1e_2	$e_1e_2e_3$
1	1	e_1	e_2	e_3	e_2e_3	e_3e_1	e_1e_2	$e_1e_2e_3$
e_1	e_1	1	e_1e_2	$-e_3e_1$	$e_1e_2e_3$	$-e_3$	e_2	e_2e_3
e_2	e_2	$-e_1e_2$	1	e_2e_3	e_3	$e_1e_2e_3$	$-e_1$	e_3e_1
e_3	e_3	e_3e_1	$-e_2e_3$	1	$-e_2$	e_1	$e_1e_2e_3$	e_1e_2
e_2e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	$-e_3$	e_2	-1	$-e_1e_2$	e_3e_1	$-e_1$
e_3e_1	e_3e_1	e_3	$e_3e_1e_2$	$-e_1$	e_2e_3	-1	$-e_2e_3$	$-e_2$
e_1e_2	e_1e_2	$-e_2$	e_1	$e_1e_2e_3$	$-e_3e_1$	e_2e_3	-1	$-e_3$
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	e_3e_1	e_1e_2	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1

Produto geométrico dos elementos básicos da Álgebra de Clifford Cl_3.

Em geral, a Álgebra de Clifford ou Álgebra Geométrica do espaço $\mathbb{R}^n$, Cl_n possui uma base com 2^n. vetores.

Até aqui, apresentamos o produto geométrico para duas e três dimensões, então é natural sugerir que, usando o produto externo, podemos expandir para subespaços orientados k-dimensionais, para $0 \leq k \leq n$, a partir de k vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Em Álgebra Geométrica, tais subespaços são chamados de k-blades, onde k é o grau do *blade*. Portanto, por exemplo, um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é um 0-blade, um vetor $a \in \mathbb{R}^n$ é um 1-blade, um elemento da forma $a \wedge b$ é um 2-blade, enquanto $a \wedge b \wedge c$ é um 3-blade, e assim por diante. Tal como vetores são elementos primitivos em Álgebra Vetorial, k-blades são primitivas computacionais em Álgebra Geométrica. A diferença fundamental é que blades em Álgebra Geométrica comportam a representação de subespaços de dimensionalidade de 0 a n, enquanto que a Álgebra Vetorial está restrita ao uso de escalares e vetores como elementos primitivos para computação. Veja [12] para maiores detalhes.

Vale lembrar que se $1 \leq i, j \leq 3$ e $i \neq j$, então $e_i \wedge e_j = e_i e_j$ e que $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_1e_2e_3$. Assim, quando mencionarmos 2-blade e 3-blades podemos escrever na forma de produto geométrico ou na forma de produto externo sem muita preocupação.

O número de elementos no produto é chamado de grau. Ou seja, a parte *escalar*, a parte *vetorial*, a parte *bivetorial* e a parte *trivetorial* possuem os graus $0, 1, 2$ e 3, respectivamente, que são os valores possíveis para k quando $n = 3$.

Segundo Vaz, em [8], uma das vantagens da Álgebra Geométrica é que em muitos casos podemos dividir *vetores*, *bivetores* e até *trivetores*. Entretanto, nem sempre é possível encontrar um elemento inverso para um multivetor, especialmente em dimensões maiores. Por exemplo, $A = 3 + e_2 + e_5 - e_{12} - e_{15} + 3e_{125}$ na Álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^5$ não é inversível, para ser mais exato, em $Cl_{4,1}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [13].

Podemos calcular o inverso v^{-1} de um vetor v da seguinte forma.

Dado o vetor $v \neq 0$ temos que

$$\frac{vv}{|v|^2} = 1 \Longrightarrow \frac{v}{|v|^2}v = 1.$$

Isto é,

$$v^{-1} = \frac{v}{|v|^2}.$$

A associatividade do produto geométrico permite calcular os inversos dos elementos $u \wedge v$ e $u \wedge v \wedge w$ como sendo, respectivamente

$$(u \wedge v)^{-1} = \frac{(v \wedge u)}{\|(u \wedge v)\|^2} \text{ e } (u \wedge v \wedge w)^{-1} = \frac{(w \wedge v \wedge u)}{\|(u \wedge v \wedge w)\|^2}.$$

Os valores $\|(u \wedge v)\|^2$ e $\|(u \wedge v \wedge w)\|^2$ são calculado por

$$\|(u \wedge v)\|^2 = (u \wedge v)(v \wedge u) = uvvu = uv^2u = u|v|^2u = u^2|v|^2 = |u^2||v|^2 \quad \text{e}$$

$$\|(u \wedge v \wedge w)\|^2 = (u \wedge v \wedge w)(w \wedge v \wedge u) = uvw^2vu = uv|w|^2vu = uv^2|w|^2u =$$
$$u^2|v^2||w|^2 = |u|^2|v|^2||w|^2.$$

Sugerimos ao leitor interessado na inversibilidade de elementos de uma álgebra de Clifford uma leitura de [3], seção 6.5.

Como vimos acima, em vários casos, o produto geométrico é inversível, sendo assim, esse produto é uma ferramenta poderosa para a solução de problemas de geometria, facilitando a simplificação da solução durante as manipulações algébricas.

Um outro conceito também de grande importância na Álgebra Geométrica é o de dualidade. Em [3], seção 5.5, o autor inicia a seção descrevendo o que será chamado de o espaço dual, e depois associa isso às bases para construir o dual de cada k-vetor.

Seguindo sua linha de raciocínio, dado um k-vetor, com $k = 0, 1, 2$ e 3, esse k vetor determina um subespaço W de dimensão k. Todavia, esse mesmo subespaço pode ser especificado por seu complemento ortogonal $W^\perp$, que é um subespaço de dimensão $(n - k)$ ortogonal ao subespaço original (veja 1.4). O subespaço $W^\perp$ será chamado dual de W e denotaremos por W^*.

Exemplificando, o complemento ortogonal de uma reta r é o plano ortogonal a ela, chamado de dual e denotado por r^*, o mesmo plano é gerado por um bivetor, como por exemplo na Figura 2.2. Já o complemento ortogonal de um plano gerado por um bivetor $e_1 \wedge e_2$ é uma reta ortogonal a ele. Definimos o dual $(e_1 \wedge e_2)^*$ como sendo um vetor v ortogonal ao plano e com o mesmo módulo do bivetor.

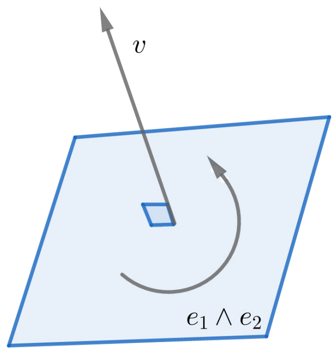

Figura 2.2: Dual de um bivetor.

O complemento ortogonal do espaço especificado por um *trivetor* é a origem (um escalar). Definimos o dual de $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)^*$ como sendo um escalar a com mesmo módulo do trivetor, ou seja 1. Já o complemento ortogonal dos escalares é todo o espaço. Assim, definimos o dual a^* como sendo o trivetor $a(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ com o mesmo módulo de a.

Vamos denotar o trivetor $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ por I e chamá-lo de elemento unitário de volume.

Definiremos o dual de um k-vetor B $(0 \leq k \leq 3)$ como sendo

$$B^* = -BI = BI^{-1}$$

Usaremos esse trivetor para determinar o sinal do k-vetor que especifica o complemento ortogonal, tendo em vista que o k-vetor e sua reversão de sinal definem o mesmo subespaço com sinais opostos.

Vejamos alguns exemplos, primeiramente tomando um trivetor $I = (e_1e_2e_3)$, vamos calcular os duais dos vetores e_1, e_2 e e_3:

$$\begin{aligned} {e_1}^* &= e_1I^{-1} = e_1e_3e_2e_1 = -e_2e_3, \\ {e_2}^* &= e_2I^{-1} = e_2e_3e_2e_1 = -e_3e_1, \\ {e_3}^* &= e_3I^{-1} = e_3e_3e_2e_1 = -e_1e_2. \end{aligned}$$

Ou seja, o dual dos vetores e_1, e_2 e e_3, são respectivamente os bivetores $-e_2e_3, -e_3e_1$ e $-e_1e_2$.

Já, o dual dos bivetores e_2e_3, e_3e_1 e e_1e_2 são:

$$(e_2e_3)^* = e_2e_3I^{-1} = e_2e_3e_3e_2e_1 = e_1,$$
$$(e_3e_1)^* = e_3e_1I^{-1} = e_3e_1e_3e_2e_1 = e_2,$$
$$(e_1e_2)^* = e_1e_2I^{-1} = e_1e_2e_3e_2e_1 = e_3.$$

O dual de um escalar 1 será

$$1^* = 1I^{-1} = 1e_3e_2e_1 = -I.$$

o dual do trivetor I, será:

$$e_1e_2e_3^* = e_1e_2e_3I^{-1} = e_1e_2e_3e_3e_2e_1 = 1.$$

2.2 Alguns Cálculos

Iniciamos com os cálculos do produto de geométrico para vetores no $\mathbb{R}^2$. Assim, dados os vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2$, temos

$$uv = (u_1e_1 + u_2e_2)(v_1e_1 + v_2e_2).$$

Usando a distributividade,

$$uv = \underbrace{(u_1v_1 + u_2v_2)}_{\text{escalar}} + \underbrace{(u_1v_2 - u_2v_1)e_{12}}_{\text{bivetor}}.$$

Chegamos que a parte escalar é o produto interno e o parte bivetorial é o produto externo, ou seja

$$u_1v_1 + u_2v_2 = u \cdot v,$$

$$(u_1v_2 - u_2v_1)e_{12} = u \wedge v.$$

Assim,

$$uv = u \cdot v + u \wedge v.$$

Em três dimensões podemos ver que a forma do produto entre dois vetores se mantém, ou seja, dados os vetores $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ pertencentes a $\mathbb{R}^3$, teremos

$$uv = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3)(v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3).$$

Usando a distributividade,

$$\begin{aligned} uv &= u_1e_1v_1e_1 + u_1e_1v_2e_2 + u_1e_1v_3e_3 \\ &+ u_2e_2v_1e_1 + u_2e_2v_2e_2 + u_2e_2v_3e_3 \\ &+ u_3e_3v_1e_1 + u_3e_3v_2e_2 + u_3e_3v_3e_3. \end{aligned}$$

Utilizando a associatividade para os coeficientes dos versores, temos

$$\begin{aligned} uv &= u_1v_1e_1e_1 + u_1v_2e_1e_2 + u_1v_3e_1e_3 \\ &+ u_2v_1e_2e_1 + u_2v_2e_2e_2 + u_2v_3e_2e_3 \\ &+ u_3v_1e_3e_1 + u_3v_2e_3e_2 + u_3v_3e_3e_3. \end{aligned}$$

Usando as relações $e_ie_i = 1$, e $(e_ie_j) = -(e_je_i)$, temos

$$\begin{aligned} uv &= u_1v_1 + u_1v_2e_1e_2 + u_1v_3e_1e_3 - u_2v_1e_1e_2 + u_2v_2 \\ &+ u_2v_3e_2e_3 - u_3v_1e_1e_3 - u_3v_2e_2e_3 + v_3v_3 \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + v_3v_3 + u_1v_2e_1e_2 - u_2v_1e_1e_2 \\ &+ u_1v_3e_1e_3 - u_3v_1e_1e_3 + u_2v_3e_2e_3 - u_3v_2e_2e_3 \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + v_3v_3 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_1e_2 + (u_1v_3 - u_3v_1)e_1e_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)e_2e_3. \end{aligned}$$

Temos então, que

$$u_1v_1 + u_2v_2 + v_3v_3 = u \cdot v, \text{ e}$$

$$(u_1v_2 - u_2v_1)e_1e_2 + (u_1v_3 - u_3v_1)e_1e_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)e_2e_3 = u \wedge v.$$

Portanto,

$$uv = u \cdot v + u \wedge v. \tag{2.6}$$

Observe que os coeficientes de $e_1e_2,\ e_1e_3,$ e e_2e_3 que aparecem no produto externo $u \wedge v$ são os mesmos componentes do produto vetorial $u \times v$. Note que o produto vetorial, como visto em geometria analítica vetorial, nada mais é do que o dual de $u \wedge v$, ou seja, $u \times v = (u \wedge v)^*$ e é um vetor ortogonal ao bivetor com o mesmo módulo.

Uma diferença crucial entre o produto vetorial e o produto externo, é que esse último pode ser definido em outras dimensões, ao passo que o produto vetorial exige um complemento ortogonal de dimensão 1 para representar a característica de um bivetor de uma forma vetorial.

Agora, no caso do produto entre um vetor $u = u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$ e um $bivetor B = v_{12}e_1e_2 + v_{13}e_1e_3 + v_{23}e_2e_3$, temos

$$uB = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3)(v_{12}e_1e_2 + v_{13}e_1e_3 + v_{23}e_2e_3). \tag{2.7}$$

Utilizando a distributividade, temos

$$uB = u_1v_{12}e_1e_1e_2 + u_1v_{13}e_1e_1e_3 + u_1v_{23}e_1e_2e_3$$

$$+u_2v_{12}e_2e_1e_2 + u_2v_{13}e_2e_1e_3 + u_2v_{23}e_2e_2e_3$$

$$+u_3v_{12}e_3e_1e_2 + u_3v_{13}e_3e_1e_3 + u_3v_{23}e_3e_2e_2.$$

Agora, usando as relações $e_ie_j = -e_je_i$ e $e_ie_i = 1$ e agrupando os termos semelhantes, chegando em

$$uB = (-u_2v_{12}-u_3v_{13})e_1+(u_1v_{12}-u_3v_{23})e_2+(u_1v_{13}+u_2v_{23})e_3+(u_1v_{23}-u_2v_{13}+u_3v_{12})e_1e_2e_3.$$

Nesse caso, o produto geométrico é a soma de um *vetor* e de um *trivetor*.

Note, porém, que o coeficiente $(u_1v_{23} - u_2v_{13} + u_3v_{12})$ do trivetor $e_1e_2e_3$ é o popular produto misto . De fato, se escrevermos o bivetor B como $B = a \wedge b$, onde $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ e $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, teremos que $v_{12}e_1e_2 + v_{13}e_1e_3 + v_{23}e_2e_3 = B = a \wedge b = (a_1b_2 - a_2b_1)e_1e_2 + (a_1b_2 - a_3b_1)e_1e_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3$. Então $v_{12} = (a_1b_2 - a_2b_1), v_{13} = (a_1b_3 - a_3b_1)$ e $v_{23} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3$.

Como o coeficiente do trivetor é $(u_1v_{23} - u_2v_{13} + u_3v_{12}) = u_1(a_2b_3 - a_3b_2) - u_2(a_1b_3 - a_3b_1) + u_3(a_1b_2 - a_2b_1)$, que nos dá exatamente o *produto misto* dos vetores u, a e b. Compare com a definição de produto misto dada na página 35.

Isso nos diz que a teoria básica do cálculo vetorial usado nos cursos de geometria analítica em nível de graduação é na verdade um arranjo simplificado de uma teoria muito mais ampla e poderosa.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades do produto geométrico

Dados os vetores u, v e w em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ tem-se:

i) Se os vetores u e v são paralelos, então o produto geométrico é igual ao produto interno. De fato, pela equação (2.6), $uv = u \cdot v + u \wedge v$, como u é paralelo a v, $u \wedge v = 0$ e temos o resultado.

ii) Se os vetores u e v são perpendiculares, então o produto geométrico é igual ao produto externo. Novamente pela equação (2.6) e por $u \cdot v = 0$, temos que $uv = u \wedge v$.

iii) O produto geométrico é compatível com a multiplicação por escalar real pelas propriedades de homogeneidade

$$a(uv) = (au)v = u(av).$$

iv) Vale as propriedades de distributividade do produto geométrico em relação à soma de vetores

$$u(v+w) = (uv) + (uw),$$

$$(u+v)w = (uw) + (vw).$$

v) O produto geométrico é associativo

$$u(vw) = (uv)w.$$

Entretanto o produto geométrico não é comutativo, isto é, em geral não vale que a identidade

$$uv = vu.$$

Basta pegar u e v dois vetores ortogonais (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) e teremos

$$uv = u \wedge v \text{ e } vu = v \wedge u = -u \wedge v.$$

Podemos também fazer o contrário, escrever o produto interno e o produto externo por meio do produto geométrico. De (2.6) é possível escrever

$$uv = u \cdot v + u \wedge v$$

e

$$vu = u \cdot v - u \wedge v.$$

Combinando essas duas equações vem

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu)$$

e

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu).$$

Com um boa dose de sacrifício é possível provar todas as propriedades do produto interno e do produto externo por meio dessas duas últimas equações.

Por fim, mas não menos importante, a relação

$$u \wedge v \wedge w = \frac{1}{6}(uvw + vwu + wuv - wvu - vuw - uwv)$$

que associa os produtos externo e o produto geométrico.

Capítulo 3

Aplicações e relações

Como já vimos, a Álgebra Geométrica pode ser aplicada em várias áreas de pesquisa. Alguns trabalhos apresentam exemplos da utilização da Álgebra Geométrica para a construção de objetos geométricos na área de computação. Em [9], o autor apresenta um algoritmo para detecção de objetos em imagens, o qual conclui em seu trabalho que o algoritmo foi eficiente, já que se observou uma maior rapidez nas verificações ao utilizar Álgebra Geométrica.

Já [10] apresenta uma aplicação dos conceitos da Álgebra de Clifford à resolução do PDGDM (Problema Discreto de Geometria de Distâncias Moleculares) instigado pela análise geométrica do problema discretizado, como interseção de esferas. O autor também enfatiza que a Álgebra Geométrica Conforme, lida de forma simples e intuitiva com estas interseções, o que tornou também o trabalho com distâncias intervalares promissor.

Um outro exemplo é apresentado por [11], onde mostra que a simplicidade alcançada em algumas formulações utilizando a Álgebra Geométrica diminui o custo de manutenção do programa, tornando a leitura do código mais simples.

Nesse intuito, buscamos promover algumas aplicações na geometria plana e espacial dando exemplos de como o produto da Álgebra Geométrica pode ser usado para resolver problemas da geometria.

3.1 Aplicação no plano

Em princípio, vamos utilizar Álgebra Geométrica para mostrar algumas identidades da trigonometria plana, iniciando com a **Lei dos Cossenos.** Assim, considere um triângulo com os lados formados pelos vetores u, v e w e ângulos internos α, β e γ, as medidas dos lados sendo a, b e c, com

$$u + v + w = 0. \tag{3.1}$$

3.1.1 Lei dos Cossenos

Usando a direção dos ângulos no sentido horário, conforme a Figura 3.1.

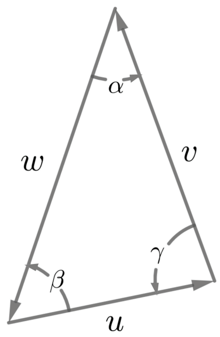

Figura 3.1: Triângulo formado pelos vetores u, v e w.

Os comprimentos dos vetores são $|u| = a, |v| = b$ e $|w| = c$. Como o ângulo α inicia em w e termina em $-v$ podemos calcular o produto geométrico entre w e $-v$ como

$$-wv = -w \cdot v - w \wedge v = cb \cos\alpha + cb\ (e_1 \wedge e_2)\text{sen}\ \alpha.$$

Usaremos a notação $I = e_1 \wedge e_2$ e de maneira semelhante calculamos o produto geométrico que define os ângulos β e γ, assim teremos as três equações:

$$-wv = -w \cdot v - w \wedge v = cb \cos\alpha + cbI\ \text{sen}\ \alpha,$$

$$-uw = -u \cdot w - u \wedge w = ac \cos\beta + acI\ \text{sen}\ \beta,$$

$$-vu = -v \cdot u - v \wedge u = ba \cos\gamma + baI\ \text{sen}\ \gamma.$$

Separando as partes escalares e bivetoras das equações, temos:

$$u \cdot v = -ab\ \cos\gamma,\ \text{e}\ u \wedge v = abI\ \text{sen}\gamma, \tag{3.2}$$

$$v \cdot w = -bc\ \cos\alpha,\ \text{e}\ v \wedge w = bcI\ \text{sen}\alpha, \tag{3.3}$$

$$w \cdot u = -ca\ \cos\beta,\ \text{e}\ w \wedge u = caI\ \text{sen}\beta. \tag{3.4}$$

Agora, colocando em evidência w na equação 3.1, e depois elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$w = -u - v,$$

$$
\begin{aligned}
w^2 &= (-u-v)^2,\\
&= u^2+uv+vu+v^2\\
&= u^2+v^2+uv+vu\\
&= u^2+v^2+2[\frac{1}{2}(uv+vu)]\\
w^2 &= u^2+v^2+2[u\cdot v]\\
c^2 &= a^2+b^2+2[u\cdot v].
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.2) no lugar de $u \cdot v$ chegamos na equação

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma.$$

conhecida como Lei dos cossenos.

3.1.2 Lei dos Senos

Já, para a **Lei dos Senos**, vamos tomar o produto externo entre a equação 3.1 e o vetor u, como segue

$$
\begin{aligned}
(u+v+w) &= 0,\\
(u+v+w)\wedge u &= 0\wedge u,\\
u\wedge u+v\wedge u+w\wedge u &= 0,\\
0+v\wedge u+w\wedge u &= 0,\\
-u\wedge v+w\wedge u &= 0,\\
u\wedge v &= w\wedge u. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Agora, fazendo o produto externo da mesma equação 3.1 com o vetor v, temos

$$
\begin{aligned}
(u+v+w) &= 0,\\
(u+v+w)\wedge v &= 0\wedge v,\\
u\wedge v+v\wedge v+w\wedge v &= 0,\\
u\wedge v+0+w\wedge v &= 0,\\
u\wedge v-v\wedge w &= 0,\\
u\wedge v &= v\wedge w. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Combinando as equações 3.5 e 3.6, temos

$$u\wedge v = v\wedge w = w\wedge u. \qquad (3.7)$$

Agora, substituindo os valores dos produtos externos calculados nas equações 3.2, 3.3 e 3.4 na equação 3.7, obtemos

$$abI \text{ sen}\gamma = bcI \text{ sen}\alpha = caI \text{ sen}\beta.$$

E por fim, multiplicando cada termo pelo inverso de $abcI$ teremos

$$\frac{\text{sen}\gamma}{c} = \frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b}.$$

3.1.3 Área de um triângulo

Como sabemos que o módulo do produto externo $u \wedge v$ é área do paralelogramo formado por estes vetores, podemos então calcular a área orientada A do triângulo da Figura 3.1, como sendo $\frac{1}{2}u \wedge v$ e como pela equação 3.7 temos que $u \wedge v = v \wedge w = w \wedge u$, logo

$$A = \frac{1}{2}u \wedge v = \frac{1}{2}v \wedge w = \frac{1}{2}w \wedge u.$$

Usando as equações 3.2, 3.3 e 3.4, podemos mostrar que

$$|A| = \frac{1}{2}(u \wedge v)I^{-1} = \frac{1}{2}(v \wedge w)I^{-1} = \frac{1}{2}(w \wedge u)I^{-1},$$

$$|A| = \frac{1}{2}ab \text{ sen}\gamma = \frac{1}{2}bc \text{ sen}\alpha = \frac{1}{2}ca \text{ sen}\beta.$$

Portando, a área do triângulo é igual o comprimento da base pela altura.

3.1.4 Reflexão de um vetor

Trataremos agora o procedimento para refletir um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em relação a u, sendo u não nulo, e obter o vetor refletido v'.

Observando a Figura 3.2, temos que $v' = v_{\parallel} - v_{\perp}$, onde $v_{\parallel}$ é a componente de v paralela a u e $v_{\perp}$ a componente perpendicular a u. Vejamos como calcular a componente paralela

$$v_{\parallel} = |v|\cos(\theta)\frac{u}{|u|} = |v||u|\cos(\theta)\frac{u}{|u|^2} = (vu)u^{-1}.$$

Já a componente $v_{\perp}$ é dada por

$$v_{\perp} = v - v_{\parallel} = v - (vu)u^{-1} = (vu - vu)u^{-1} = (v \cdot u)u^{-1}.$$

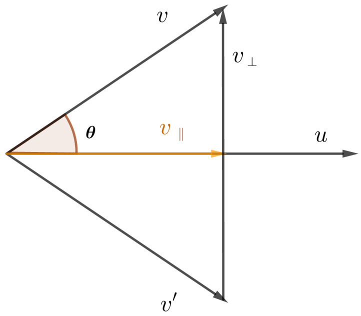

Figura 3.2: Reflexão do vetor v em relação ao vetor u.

Assim,

$$v' = (vu)u^{-1} - (v \cdot u)u^{-1} = (vu - v \cdot u)u^{-1} = uvu^{-1}.$$

Para verificarmos em $\mathbb{R}^3$ a reflexão de um vetor v em relação a um plano β, vamos considerar um vetor unitário n normal ao um plano β. Para obter a reflexão de v em relação ao plano β, conforme mostrado na Figura 3.3, façamos o seguinte: tomamos $v' = v_\parallel - v_\perp$, com $v_\parallel$ a componente paralela de β e $v_\perp$ a componente perpendicular de β.

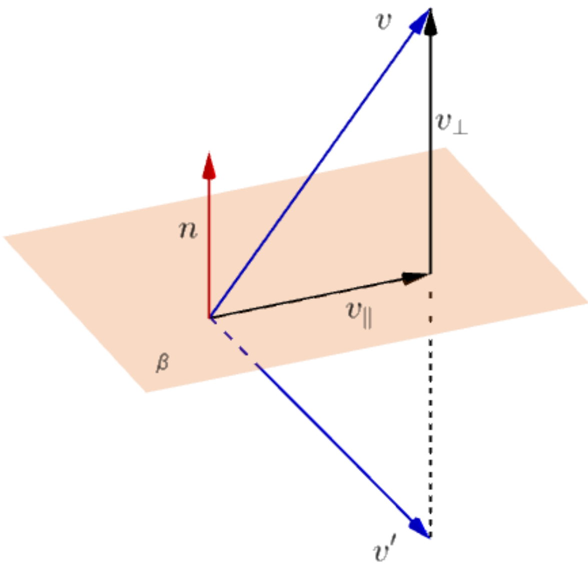

Figura 3.3: Reflexão de v em relação ao plano β.

Uma observação importante é que $v_\parallel$ ao plano β é $v_\perp$ do vetor normal n e $v_\perp$ do plano β é $v_\parallel$ do vetor normal n.

Seja $v' = v_\parallel - v_\perp$. Como $v_\parallel$ é componente paralela ao plano β e $v_\perp$ a componente perpendicular ao mesmo plano, utilizando a reflexão plana anterior com $u = n$, obtemos

$$v_\parallel = (v \cdot n)n^{-1} \text{ e } v_\perp = (vn)n^{-1}.$$

Assim,

$$v' = -nvn^{-1}.$$

Aplicando mais uma reflexão, mas agora em relação a um outro plano α, também com vetor normal unitário u, temos que

$$v'' = -uv'u^{-1} = (un)v(n^{-1}u^{-1}) = (un)v(un)^{-1}.$$

Uma outra notação é

$$v'' = RvR^{-1},$$

onde, $R = un$ e $R^{-1} = (un)^{-1}$.

Essas duas reflexões seguidas, como vistas acima, geram uma rotação. Então v'' é a rotação de v sendo o ângulo de rotação de duas vezes o ângulo entre os vetores n e u girando em torno de um vetor l ortogonal ao plano gerado por u e n. Chamaremos o multivetor R de rotor. Um rotor pode se obtido através da operação

$$R = \cos\frac{\phi}{2} - \rho\,\mathrm{sen}\frac{\phi}{2},$$

onde, ϕ é o ângulo de rotação e ρ é um bivetor referente ao eixo de rotação.

Esses são apenas alguns exemplos das inúmeras aplicações de Álgebra Geométrica.

3.2 O produto complexo como um caso particular de Álgebra Geométrica no plano

Há algumas semelhanças entre operações de números complexos, como definidas nos Capítulo 1, e as operações de Álgebra Geométrica. Segundo [4], uma das conquistas da Álgebra Geométrica de Clifford, é que ela generaliza os números complexos para espaços de dimensão arbitrária. Vamos fazer uma discussão apenas para duas e três dimensões. Iniciaremos com a comparação entre o número complexo imaginário puro i e o *bivetor* $I = e_1e_2$ da Álgebra Geométrica no plano, vejamos

Calculando o quadrado do *bivetor* $I = e_1e_2$, temos

$$(e_1 \cdot e_2)^2 = (e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1.$$

Note que o quadrado do bivetor é um escalar real e tem o mesmo valor numérico do quadrado do número imaginário i no corpo dos números complexos. Além disso, há uma estrutura de espaço vetorial sobre ambos os sistemas.

O plano de Argand Gauss pode ser visto dentro da estrutura da Álgebra Geométrica ao identificarmos vetores com números complexos. Como no plano sempre podemos ter dois vetores básicos, escolhemos a base ortonormal e_1, e_2 e então, podemos identificar o complexo $z = a + be_2e_1$ por

$$v = ae_1 + be_2.$$

Multiplicando v por e_1 (na Álgebra Geométrica) da seguinte forma

$$ve_1 = ae_1^2 + be_2e_1 = a + be_2e_1 = z.$$

De forma idêntica, ao multiplicarmos z por e_1 obtemos

$$ze_1 = (a + be_2e_1)e_1 = ae_1 + be_2e_1e_1 = ae_1 + be_2.$$

Por essa associação temos que o vetor e_1 representa o eixo real e o *bivetor* a parte imaginária.

Abaixo, vamos observar a rotação de um vetor utilizando os números complexos e também a Álgebra Geométrica.

Dado um número complexo $z = a + bi$, multiplicando repetidas vezes por i, obtemos

$$i(a + bi) = -b + ai.$$
$$i(ai - b) = -a - bi.$$
$$i(-a - bi) = b - ai.$$
$$i(-ai + b) = a + bi.$$

Note que retornamos ao número complexo z após essas 4 multiplicações, na Figura 3.4 podemos observar que para cada multiplicação por i, o número complexo z é girado 90° no sentido anti-horário.

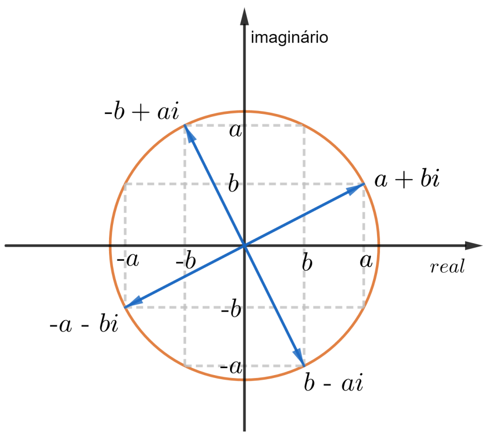

Figura 3.4: Produto de um vetor pelo número complexo i.

Por outro lado, multiplicando um vetor $v = v_1e_1 + v_2e_2$ pelo bivetor $I = e_{21}$ pela esquerda temos

$$e_{21}(v_1e_1 + v_2e_2) = v_1e_{211} + v_2e_{212} = -v_2e_1 + v_1e_2.$$

$$e_{21}(v_1e_2 - v_2e_1) = v_1e_{212} - v_2e_{211} = -v_1e_1 - v_2e_2.$$

$$e_{21}(-v_1e_1 - v_2e_2) = -v_1e_{211} - v_2e_{212} = v_2e_1 - v_1e_2.$$

$$e_{21}(-v_1e_2 + v_2e_1) = -v_1e_{212} + v_2e_{211} = v_1e_1 + v_2e_2.$$

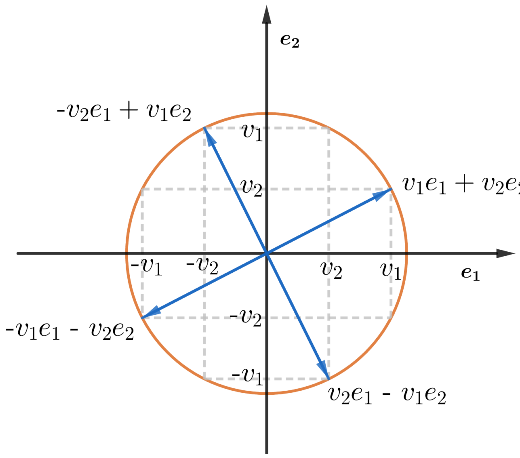

Figura 3.5: Produto de um vetorial pelo *bivetor* I.

Novamente retornamos ao vetor inicial, ou seja, o vetor foi girado 90° a cada multiplicação como mostra a Figura 3.5. Caso queiramos girar no sentido anti-horário é só multiplicar o vetor v pelo bivetor $I = e_2e_1$ à direta, pois sabemos que esse produto é anticomutativo, ou seja:

$$vI = -Iv. \tag{3.8}$$

Observe que o mesmo efeito seria obtido multiplicando por $-i$ na álgebra dos complexos.

Notem agora que o comportamento de i e do bivetor I são diferentes quando multiplicados por vetores. Por exemplo, considere o vetor $v = v_1e_1 + v_2e_2$, então

$$\begin{aligned} vi &= (v_1e_1 + v_2e_2)i \\ &= v_1e_1i + v_2e_2i. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fazendo iv, temos

$$\begin{aligned} iv &= i(v_1e_1 + v_2e_2) \\ &= v_1e_1i + v_2e_2i. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Verificamos então, que a multiplicação de um vetor por i é comutativa pois $vi = iv$ conforme as equações 3.10 e 3.9. E a multiplicação de um vetor v por I, é anticomutativa como já vimos na equação 3.8.

Portanto, podemos verificar que no plano tanto os números complexos quanto a Álgebra de Clifford possuem propriedades semelhantes, porém a Álgebra Geométrica pode ser representada em dimensões maiores que a dos números complexos. Vimos também na Seção 1.3 que a álgebra dos quatérnios é uma generalização dos complexos, e por fim na próxima seção mostraremos que a Álgebra Geométrica também é uma generalização dos quatérnios.

3.3 Relação dos quatérnios com a Álgebra de Clifford

Observem que no $\mathbb{R}^3$, a operações e propriedades da Álgebra Geométrica podem ser codificadas nos quatérnios.

Sejam p e q dois quatérnios puros, sendo $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Temos que

$$\begin{aligned} pq &= (p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= -p_1 q_1 + p_1 q_2 k - p_1 q_3 j - p_2 q_1 k - p_2 q_2 + p_2 q_3 i + p_3 q_1 j - p_3 q_2 i - p_3 q_3 \\ &= -(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + (p_2 q_3 - p_3 q_2) i + (-p_1 q_3 + p_3 q_1) j + (p_1 q_2 - p_2 q_1) k. \end{aligned}$$

Como

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = p \cdot q, \text{ e}$$

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) i + (-p_1 q_3 + p_3 q_1) j + (p_1 q_2 - p_2 q_1) k = p \wedge q,$$

concluímos que

$$pq = -(p \cdot q) + (p \wedge q).$$

Podemos notar que o produto de dois quatérnios puros codifica o produto interno e o externo do vetores do $\mathbb{R}^3$.

Note também, que o produto de um quatérnio com seu conjugado resulta no quadrado do módulo desse quatérnio, ou seja, dado o quatérnio q, temos que

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0 q_0 - q_0 q_1 i - q_0 q_2 j - q_0 q_3 k + q_1 i q_0 - q_1 i q_1 i - q_1 i q_2 j - q_1 i q_3 k \\ &+ q_2 j q_0 - q_2 j q_1 i - q_2 j q_2 j - q_2 j q_3 k + q_3 k q_0 - q_3 k q_1 i - q_3 k q_2 j - q_3 k q_3 k \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2.$$

Podemos verificar que há muita semelhança entre o produto dos Quatérnios e o produto geométrico. Essa semelhança, segundo [5], não é apenas coincidência, as relações entre i, j e k, no produto entre quatérnios, são as mesmas válidas no produto geométrico de bivetores, pois ambos são anticomutativos.

Assim, substituindo os *bivetores* e_3e_2, e_1e_3 e e_2e_1 por i, j e k respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
(e_3e_2)(e_1e_3)(e_2e_1) &= ijk = -1, \\
(e_3e_2)(e_1e_3) = (e_2e_1) &= ij = k, \\
(e_2e_1)(e_3e_2) = (e_1e_3) &= ki = j, \\
(e_1e_3)(e_2e_1) = (e_3e_2) &= jk = i, \\
(e_re_r)(e_re_r) &= ii = jj = kk = -1.
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos as mesmas relações existentes entre i, j e k. Mostramos que a Álgebra Geométrica é semelhante a dos quatérnios, mais do que isso, é uma álgebra mais generalizada.

Não podemos deixar de observar que o produto de dois quatérnios puros não gera um quatérnio completo, assim como o produto geométrico de dois vetores não resulta somente em outro vetor.

Assim, o que apresentamos até aqui foi uma álgebra onde podemos somar, subtrair, multiplicar e até dividir quantidades vetoriais. Vimos conceitos novos como, por exemplo, bivetores, trivetores, entre outros. Com esses conceitos, conseguimos identificar uma linguagem mais fácil e intuitiva para tratar problemas físicos e geométricos, a qual consegue unificar a relação vetorial e métrica em um só produto chamada de *Álgebra Geométrica*.

Capítulo 4

Conclusão

A Álgebra Geométrica foi apresentada em 1878 pelo matemático Willian Kingdon Clifford. O britânico elaborou uma nova estrutura matemática que foi usada para demonstrar a eficácia de sua proposição de estudos relacionados à álgebra vetorial.

Clifford buscou, em sua pesquisa, analisar as teorias desenvolvidas por William Rowan Hamilton e de Hermann Günther Grasmann. O primeiro pôde generalizar a álgebra dos números complexos, que passou a constituir-se por quatro partes e que seu criador a chamou de quatérnios. Já, o segundo teórico generalizou a geometria de Euclides, propondo um tratamento matemático válido para um espaço de qualquer dimensão. Nessa proposição, ele também sugeriu que as grandezas físicas não fossem representadas por objetos numéricos, mas sim por objetos geométricos e, com isso, criou-se o conceito dos objetos vetoriais [5].

A partir dessas análises, Clifford formulou uma nova álgebra vetorial que amalgamava ambas as teorias de Hamilton e de Gransmann, porém de uma forma mais simples, sendo denominada de Álgebra Geométrica, ou como muitos a conhecem: Álgebra de Clifford.

Diante disso, elaboramos nossa pesquisa calcada nos pressupostos teóricos de Clifford a fim de demonstrar a aplicabilidade de sua teoria no ensino da álgebra, possibilitando que o ensino não fique limitado à teoria da álgebra vetorial.

Nesse sentido, verificamos que a teoria de Clifford busca relacionar os objetos algébricos e geométricos fazendo com que haja comunicabilidade entre eles, ou seja, é possível simplificar alguns cálculos, sendo que o resultado do produto geométrico unifica duas relações (a vetorial e a métrica) em um só produto, respectivamente através de um bivetor e um escalar.

Diante do exposto, notamos, por meio dos exemplos aqui apresentados, que a teoria de Clifford possui diversas aplicações em várias áreas do conhecimento, reduzindo e facilitando cálculos. Com isso, essa teoria passou a ter mais atenção dos matemáticos e cientistas da computação nos últimos anos e dai a relevância do trabalho em mãos.

Referências Bibliográficas

[1] Hestenes, D. *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Academic Publishing, Dordrecht/Boston/London, 1999.

[2] Souza, J. da S. *Números Reais: Um Corpo Ordenado e Completo*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2013.

[3] Katani, K. *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics*, Okayama University Japan, 2015.

[4] Miller, R. A. *Geometric Algebra: An Introduction with Applications in Euclidean and Conformal Geometry*, San Jose State University, 2013.

[5] Vieira, R. S. Tópicos de Álgebra Geométrica. 2006.

[6] Doran, C.; Lasenby, A. *Geometric Algebra for Physicists.* Cambridge 2007.

[7] Andriotti, C. L. *Vetores e suas representações em livros didáticos de engenharia.* EBRAPEM, UFPR. Curitiba-PR, 2016.

[8] Vaz Jr., J. *A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade* Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 234 (1997).

[9] Faria, V. R. de. *Uma Introdução à Álgebra Geométrica e Aplicações em Detecção de Objetos em Imagens.* Tese (Mestrado), UEM. Maringá-PR, 2018.

[10] Alves, R. S. de O. *Álgebra de Clifford Aplicada ao Cálculo de Estruturas Moleculares.* Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2013.

[11] Félix, K. *Álgebra geométrica aplicada à simulação de corpos rígidos.* Tese (Graduação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, Porto Alegre-RS, 2009.

[12] Fernandes, L. A. F; Lavor C.; Oliveira Neto, M. M. *Álgebra Geométrica e Aplicações,* Notas em Matemática Aplicada, n. 85, SBMAC, São Carlos-SP 2017.

[13] Acus, A.; Dargys, A. *The Inverse of a Multivector: Beyond the Threshold p+q=5,* Adv. Appl. Clifford Algebras 28, n. 65 Springer-Verlag, Berlin 2018.