



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL



Método dos Mínimos Quadrados

Abril de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Método dos Mínimos Quadrados

Silvano Matucheski

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Fabiana Magda Garcia Papani
Regiane Slongo Fagundes
Paulo Domingos Conejo

Cascavel, 07 Abril de 2021.

MM445m Matucheski, Silvano
Método dos Mínimos Quadrados / Silvano
Matucheski; orientadora Fabiana Magda Garcia
Papani. -- Cascavel, 2021.
139 p.

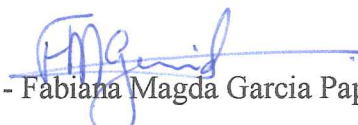
Dissertação (Mestrado Profissional Campus de
Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do
Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, ,
2021.

1. Método dos Mínimos Quadrados. I. Papani,
Fabiana Magda Garcia, orient. II. Título.

SILVANO MATUCHESKI

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:



Orientadora - Fabiana Magda Garcia Papani

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)



Regiane Slongo Fagundes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo



Paulo Domingos Conejo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 07 de abril de 2021

Agradecimentos

Agradeço aos Doadores de Sangue, pessoas que permanecem no anonimato e garantem a vida de tantos. Em especial, agradeço aos Cinco que salvaram minha vida e que talvez eu carregue um pouquinho deles em mim.

Quero agradecer aos meus professores, a minha família, aos meus colegas, meus alunos e ao pessoal que nos dá suporte, na manutenção, na limpeza e na organização de nossas Universidades e Colégios.

Lembrando da frase de Issac Newton, que escreveu em 1676: “Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes” numa carta a Robert Hooke, quero agradecer a todos que contribuíram de uma forma ou outra para que este trabalho fosse concluído. A frase de Issac Newton não era original, pois Bernardo de Chartres a pronunciou em latim, com outras nuances (*nanos gigantum humeris insidentes* - Somos como anões aos ombros de gigantes), mas ela expressa o significado de “descobrir a verdade a partir das descobertas anteriores”. E, é isso o que a Escola, num sentido mais plural, faz.

Resumo

O método dos mínimos quadrados é utilizado para ajustar curvas a dados coletados em experimentos e para acompanhar ou projetar a evolução de um fato. Pode ser utilizado para dar os primeiros alertas sobre o comportamento de uma doença ou descrever um processo físico, por exemplo. No primeiro capítulo são apresentadas as bases matemáticas em que o método está alicerçado. No segundo capítulo estão presentes as descrições do método dos mínimos quadrados e tipos de curvas que podemos gerar a partir dos dados coletados ou observados. O texto é concluído apresentando no último capítulo atividades de aplicação do método dos mínimos quadrados em situações reais, procurando instigar no aluno a curiosidade a respeito do método, sem a intenção de produzir ou validar conhecimento científico. A apresentação tem um cunho estritamente didático, oferecendo subsídios para que o professor possa fazer uma introdução adequada do conteúdo ao aluno.

Abstract

The Ordinary Least Squares is utilized to adjust curves to data collected in experiments and to monitor or project the evolution of a fact. It can be used to give the first alerts about the behavior of a disease or to describe a physical process. The first chapter presents the mathematical bases on which the method is based. In the second chapter there are descriptions of the Ordinary Least Squares method and types of curves that we can generate from the data collected or observed. The text is concluded presenting in the last chapter activities of application of the Ordinary Least Squares method in real situations, trying to instill in the student curiosity about the method, without the intention of producing or validating scientific knowledge. The presentation is strictly didactic, offering subsidies so that the teacher can make an appropriate introduction of the content to the student.

Lista de Tabelas

2.1	Pontos tomados ao acaso para o estudo de Regressão Linear	71
2.2	Cálculos preliminares da Regressão Linear	76
2.3	Cálculos preliminares para o ajuste por uma Função Polinomial de grau 2	81
2.4	Cálculos preliminares para Função Aproximadora do Caso Logarítmico	86
2.5	Cálculos preliminares para Função Aproximadora do Caso Exponencial	88
2.6	Cálculos dos Erros Quadráticos	90
3.1	Desenvolvimento das Raízes nas Sementes de Linhaça (em mm).	99
3.2	Desenvolvimento dos Caules nas Sementes de Linhaça (em mm).	100
3.3	Cálculos a serem Utilizados nas Funções Aproximadoras	101
3.4	Cálculos para determinar o Erro Quadrático das Funções Aproximadoras- Linhaça	105
3.5	Desenvolvimento dos Radículas	108
3.6	Desenvolvimento dos Caules (em mm)	109
3.7	Cálculos preliminares das Funções Aproximadoras - Raiz Feijão 3	110
3.8	Cálculos para determinar erro quadrático (Feijão 3)	112
3.9	Evolução das Sementes de Painço em Terra Úmida	115
3.10	Cálculos preliminares das funções aproximadoras do Painço-semente 2	116
3.11	Cálculos para o Erro Quadrático das Funções Aproximadoras-Painço	117
3.12	Dados Oficiais Covid-19 - China	122
3.13	Cálculos Preliminares das Funções Aproximadoras - Covid-19 - China	123
3.14	Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 5 pontos	124

3.15	Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 12 pontos . . .	126
3.16	Cálculos a serem Utilizados nas Funções Aproximadoras	127
3.17	Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 22 pontos . . .	129
3.18	Cálculos para Funções Aproximadoras Covid-19-Brasil de 26/02/2020 à 31/03/2020 . .	132

Lista de Figuras

1.1	Representação de uma Função pelo Diagrama de Venn	22
1.2	Exemplos de Gráficos de Funções Polinomiais	24
1.3	Gráficos de Funções Cúbicas	25
1.4	Exemplos de Gráficos de Funções Exponenciais	26
1.5	Gráficos de Funções Logarítmicas	27
1.6	Limite de $y=f(x)$	28
1.7	Gráfico para ilustrar Taxa de Variação	31
1.8	Derivada e reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$	35
2.1	Plotagem dos dados da Tabela 2.1	71
2.2	Inserção da Linha de Tendência Linear pelo Excel	72
2.3	Diferenças (d_i) entre a posição observada e a posição fornecida pela linha de tendência	73
2.4	Gráfico da Função Aproximadora para a Tabela 2.1	82
2.5	Plotagem dos Pontos e Linha de Tendência Logarítmica	87
2.6	Plotagem dos Pontos e Linha de Tendência Exponencial	89
2.7	Gráficos das Funções Aproximadoras aos Pontos da Tabela 2.1	91
2.8	Gráficos das Funções Aproximadoras Linear, Polinomial, Exponencial e Logarítmica	92
3.1	Sementes de Linhaça - 1º dia	97
3.2	Sementes de Linhaça - 6º dia	98
3.3	Semente 2 de Linhaça - Caule em desenvolvimento	98

3.4	Gráfico do desenvolvimento da raiz da Linhaça (em mm)	100
3.5	Gráfico para a regressão linear e quadrática - linhaça	103
3.6	Gráficos para as funções aproximadoras exponencial e logarítmica - linhaça	104
3.7	Disposição das Sementes no Experimento	106
3.8	Germinação das Sementes no Experimento (04/02/2020)	107
3.9	Sementes de Feijão (04/02/2020	107
3.10	Visualização das Sementes no dia 06/02/2020	108
3.11	Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm	110
3.12	Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm	111
3.13	Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm	112
3.14	Sementes de Painço em 09/02/2020	113
3.15	Sementes de Painço em 25/02/2020	114
3.16	Plotagem dos dados referentes a semente de feijão (3)	115
3.17	Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste polinomial de grau 3	116
3.18	Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste Regressão Linear	117
3.19	Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste Polinomial de grau 3	118
3.20	Aplicativo da Universidade John Hopkins 31/01/2020	119
3.21	Aplicativo da Universidade John Hopkins 02/02/2020	120
3.22	Gráfico Produzido pelo Aplicativo da Universidade John Hopkins 02/02/2020	120
3.23	Gráfico Produzido pelo Aplicativo da Universidade John Hopkins 05/02/2020	121
3.24	Gráfico com o número de infectados até 10/02/20 - Covid-19: China	122
3.25	Gráfico da função aproximadora exponencial com 5 pontos - Covid-19 - China	125
3.26	Gráfico das funções aproximadoras com 12 pontos - Covid-19 - China . . .	126
3.27	Gráfico Covid-19 na China - 22 pontos	128
3.28	Print do Gráfico com Casos Oficiais de Mortes em 31/03	131
3.29	Gráfico dos Casos Oficiais de Mortes por Covid-19 até 31/03	134
3.30	Gráfico dos Casos Oficiais de Mortes por Covid-19 até 31/03	134

Conteúdo

Introdução	19
1 Subsídios Matemáticos	21
1.1 Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral	22
1.1.1 Funções	22
1.1.2 Limites e Derivadas de Funções Reais de uma variável	27
1.1.3 Funções Reais de várias variáveis reais - Derivadas Parciais	35
1.2 Conceitos de Álgebra Linear	37
1.2.1 Matrizes	37
1.2.2 Determinantes	43
1.2.3 Matriz Particionada em Blocos	52
1.2.4 Sistemas Lineares e Matrizes	53
1.2.5 Forma Quadrática e Matriz Positiva Definida	54
1.2.6 Espaço Vetorial Real	57
1.3 Matriz Hessiana e a relação entre formas quadráticas e pontos críticos	66
1.3.1 Matriz Hessiana e Pontos Críticos	66
1.3.2 Relação entre formas quadráticas e pontos críticos	67
2 Método dos Mínimos Quadrados	69
2.1 Caso Discreto	70
2.1.1 Regressão Linear	70
2.1.2 Caso Polinomial	79

2.1.3	Caso Geral Linear	83
2.1.4	Caso Logarítmico	86
2.1.5	Caso Exponencial - caso redutível a regressão linear	88
2.2	Erro Quadrático Mínimo	90
2.3	Método Mínimos Quadrados versus Interpolação Polinomial	93
3	Aplicações	95
3.1	Aplicação 1: Germinação de Sementes	97
3.1.1	Descrição do experimento	97
3.1.2	Exercício	98
3.1.3	Resolução	100
3.2	Aplicação 2: Desenvolvimento de Sementes de Girassol e Leguminosas . . .	106
3.2.1	Apresentação do experimento	106
3.2.2	Exercício:	109
3.2.3	Resolução:	109
3.3	Aplicação 3: Desenvolvimento de Sementes de Painço	113
3.3.1	Descrição do experimento	113
3.3.2	Exercício	114
3.4	Aplicação 2: O Episódio do Coronavírus (vírus SARS-CoV-2)	119
3.4.1	Na China	119
3.4.2	Exercício	121
3.4.3	Resolução	123
3.4.4	Covid-19 no Brasil	131
3.4.5	Exercício	133
3.4.6	Resolução	133
	Conclusão	135

Introdução

É natural do ser humano a busca por padrões e por controlar e/ou explicar atividades inerentes à vida humana em tudo que estuda. Contudo, o controle absoluto sobre os fenômenos nem sempre é possível e esses padrões nem sempre serão encontrados. Porém, sob certas circunstâncias, é possível determinar uma aproximação matemática a algo que nossa mente identifica como um padrão.

Somos compelidos a usar um gráfico quando duas ou três incógnitas nos são apresentadas. Essa tendência surge tanto por condicionamento, devido aos bancos escolares, quanto por objetividade, o formato visual para análise, interpretação e apresentação de resultados é mais agradável e geralmente facilita o entendimento.

Muito do que se faz na ciência vem de dados contendo erros que, por menores que sejam, interferem nos cálculos necessários ao complemento dos estudos. Uma das ferramentas a nosso alcance é o Método dos Mínimos Quadrados que é utilizado para, a partir de medidas, chegar a uma função que determina uma curva de aproximação para os dados. Diferente da interpolação polinomial, que faz com que a curva passe pelos pontos dados, o Método dos Mínimos Quadrados não exige que a curva passe exatamente sobre os pontos tabelados, mas nos dá uma curva (reta, parábola, exponencial ou polinomial, entre outras possibilidades) que melhor se aproxima desses pontos tabelados, permitindo fazer projeções futuras sobre o comportamento dos dados. A aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados pode ainda ser usada para aproximar uma função cuja a álgebra é muito complicada por funções mais simples.

Muitos estudos de Modelagem Matemática como o de Silva (2017), sobre a influência do protetor solar no tempo de exposição ao sol, se valem do Método dos Mínimos Quadrados para entender o comportamento desses dados e fazer projeções. Um exemplo sobre crescimento de plantas, foi utilizado por Bem (2017) no estudo do desenvolvimento do cânhamo marrom. O autor ajustou os modelos não lineares, Gompertz e Logístico, na descrição dos caracteres morfológicos do cânhamo, além de discorrer sobre o uso do Método dos Mínimos Quadrados como instrumento de análise do crescimento de plantas. Ressaltamos, entretanto, que o uso das funções aproximadoras em nosso trabalho terá um caráter meramente didático e centrado tão somente no início do desenvolvimento de

sementes.

A aplicação do Método dos Mínimos Quadrados pode começar pela observação dos dados coletados dispostos num plano cartesiano, ou gráfico da função a ser aproximada, a fim de verificar sua disposição e escolher qual família de funções melhor se ajusta aos dados. Ou seja, não existe um algoritmo pronto para chegar à família de curvas de que necessitamos, esse é um processo de determinação basicamente heurístico.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar, utilizando dados obtidos de experimentos e/ou de situações cotidianas e o Método dos Mínimos Quadrados, como diversos conteúdos dos bancos escolares podem ser usados, tomadas as devidas proporções de complexidade, para explicar e até ajudar no controle de fenômenos relacionados à atividade humana.

Apresentaremos os casos mais comuns destinados a avaliar uma sequência de pontos, ou informações, suas características e como a Matemática trabalha esses dados e os transforma em informações úteis aos analistas.

Consideraremos como de domínio do leitor as operações matemáticas dentro dos conjuntos numéricos, bem como, os Softwares citados no desenvolvimento desse conteúdo. Para construir os gráficos foi utilizada a Planilha Eletrônica Microsoft Excel, no entanto, o leitor pode utilizar outras Planilhas Eletrônicas disponíveis tanto para Windows como para Linux, como a WPS da Kingsoft Office, que possui uma licença gratuita para uso doméstico.

Capítulo 1

Subsídios Matemáticos

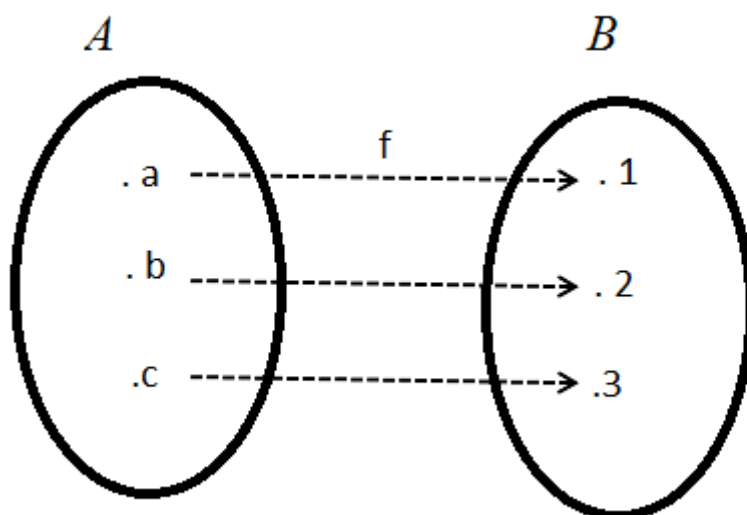
Neste Capítulo iremos revisar alguns conceitos de álgebra linear que podem ser encontrados em Lima (2006), Boldrini (1980), Lipschutz (1994), Steinbruch (1987), Hefez (2016) entre outros, e conceitos de cálculo diferencial que podem ser encontrados em Bortolossi (2003), Grossinho (2009), Iezzi (1977), Muniz Neto (2015), entre outros, que servirão como suporte para o desenvolvimento desse estudo. Esses mesmos conteúdos, mas com ênfase no Ensino Médio, também estão disponíveis em Bonjorno (2005) e Paiva (2013). São conhecimentos importantes para o andamento do restante do trabalho. Já os textos de Balbo (2020) e Bastos (2009), assim como, os vídeos de Bevilacqua (2017) e Brandão (2020) ajudam a compreender os mecanismos por trás dos cálculos utilizados no capítulo 2.

1.1 Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral

1.1.1 Funções

Definição 1. Função: Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação R do conjunto A no conjunto B é qualquer subconjunto de $A \times B$. Dizemos que uma relação f de A em B é uma **função** de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B .

Figura 1.1: Representação de uma Função pelo Diagrama de Venn



Fonte: Próprio Autor.

Definição 2. Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função $f : A \rightarrow B$, é dita,

- **injetora**, se elementos distintos do conjunto A (domínio da função) estão relacionados com elementos distintos do conjunto B (contra-domínio da função);
- **sobrejetora** se, para todo $y \in B$, existir pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$;
- **bijetora** se ela for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Quando $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que a função é uma função real com variáveis reais e é basicamente destas funções que falaremos neste trabalho.

Definição 3. Dizemos que a função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é:

- **Crescente** se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;

- **Decrescente** se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
- **Não Decrescente** se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **Não Crescente** se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definição 4. Função Inversa: Sejam A e B dois conjuntos não vazios e $f : A \rightarrow B$ uma função. Dizemos que f é inversível se a relação $g : B \rightarrow A$ tal que, $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x), \forall x \in A$ e $y \in B$. A função g é chamada inversa de f e denotada por f^{-1} .

Proposição 1. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. f é inversível se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $f^{-1} : B \rightarrow A$ é uma função, então f é bijetora.

1. Sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Assim, temos que $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$. Como f^{-1} é uma função de B em A , $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora.
2. Seja $y \in B$, sendo $f^{-1} : B \rightarrow A$ uma função, concluímos que $\exists x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. então $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetora.

De 1. e 2. concluímos que f é bijetora.

(\Leftarrow) Se f é bijetora então a relação inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função.

1. Seja $y \in B$. Como f é sobrejetora, $\exists x \in A$ tal que $y = f(x)$, portanto, $f^{-1}(y) = x$.
2. Seja $y \in B$ e $x_1, x_2 \in A$. Suponha que $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, deste modo, $f(x_1) = f(x_2) = y$. Como f é injetora $x_1 = x_2$.

De 1. e 2. concluímos que f^{-1} é uma função. □

Apresentaremos, na sequência, alguns tipos de funções que serão utilizadas no capítulo 2.

Definição 5. Função Polinomial: Seja n um número inteiro não negativo. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.

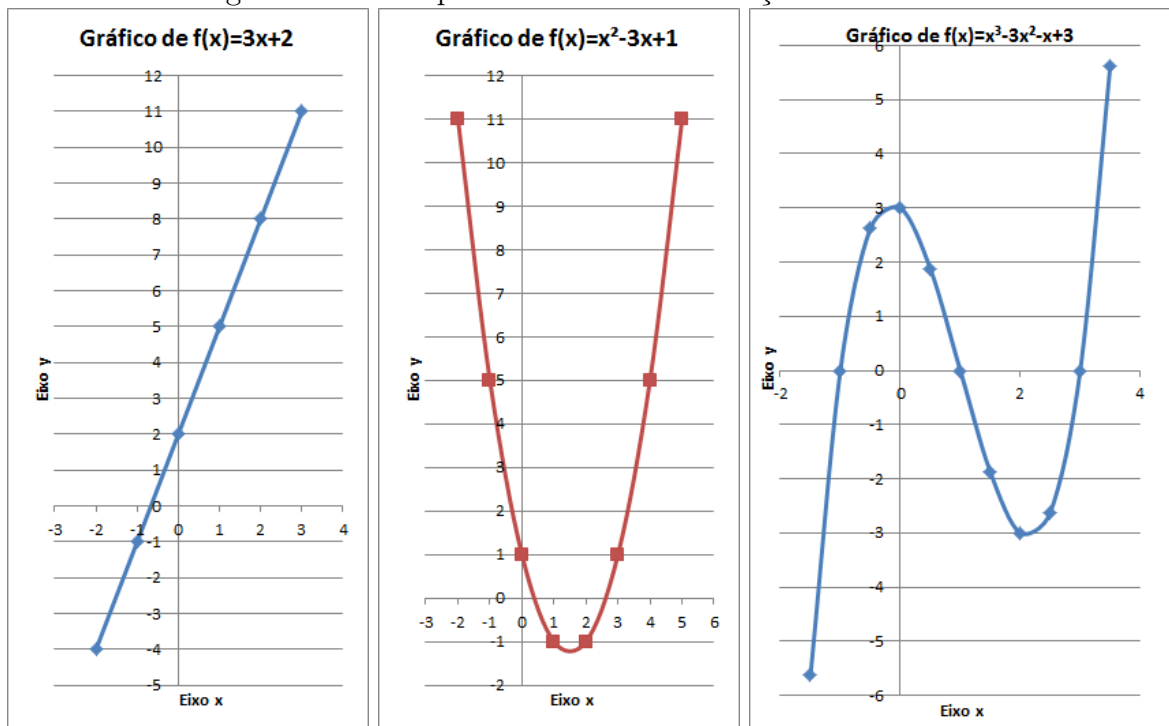
Exemplo 1. Fazem parte desse contexto as funções:

- **Constante:** $f(x) = a_0$, quando $n = 0$;

- **Afim:** $f(x) = a_0 + a_1x$ em que $n = 1$. No caso particular em que $f(x) = a_1x$, isto é, $a_0 = 0$ chamamos a função de Linear;
- **Quadrática:** $a_2x^2 + a_1x + a_0$, quando $n = 2$;
- **Cúbica:** $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para $n = 3$.

A figura 1.2 mostra alguns exemplos dessas funções:

Figura 1.2: Exemplos de Gráficos de Funções Polinomiais



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

Observações:

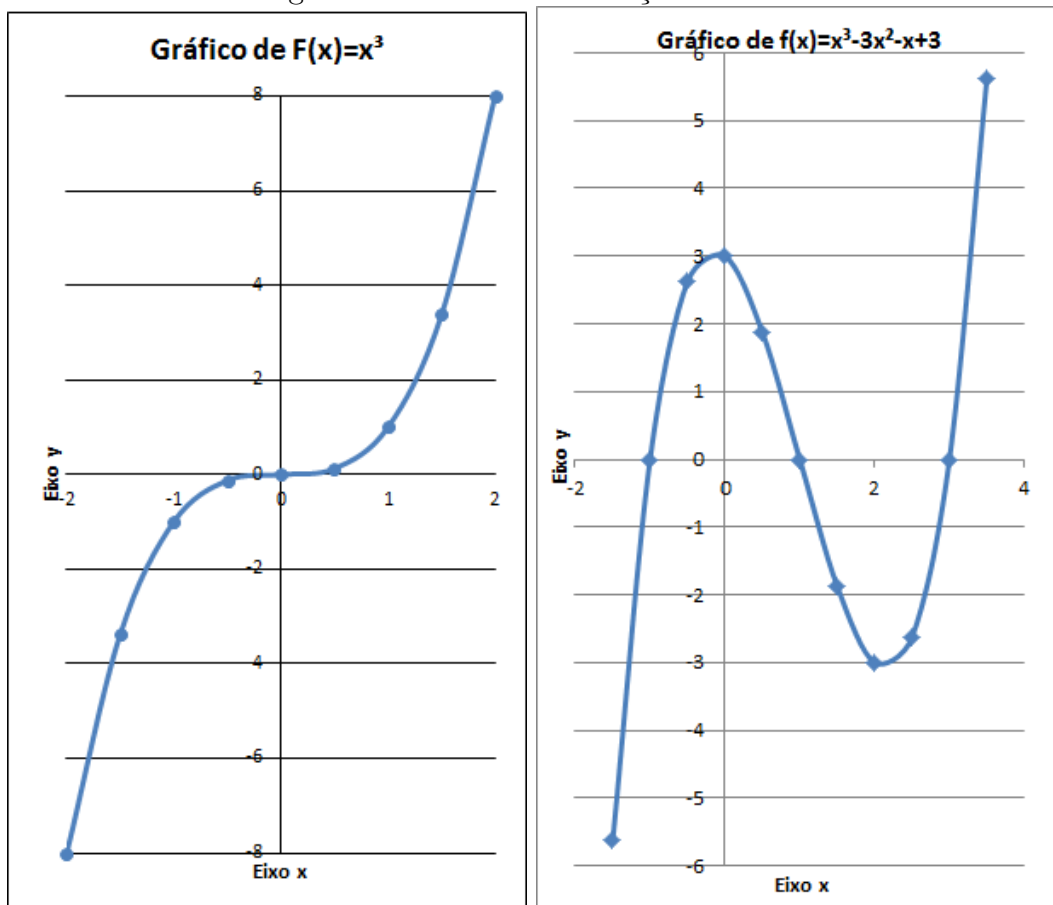
Observação 1. No caso da função afim, dada por $f(x) = ax + b$, o valor de a determina se ela é crescente ou decrescente. Quando $a > 0$ a função é crescente em todo o domínio de \mathbb{R} , no entanto, se $a < 0$ a função é decrescente.

Observação 2. No caso da função quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, se $a < 0$, a função cresce até o vértice dado pelo par ordenado $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ e decresce a partir dele. Se $a > 0$, a função decresce até o vértice e cresce a partir dele.

Observação 3. No caso das funções cúbicas, dadas por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, o comportamento da função quanto ao (de)crescimento depende da função específica. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é crescente em todo o domínio, já a função $f(x) =$

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ cresce até $x = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6}$, depois decresce até $x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6}$ e volta a crescer, como pode ser observado na Figura 1.3.

Figura 1.3: Gráficos de Funções Cúbicas



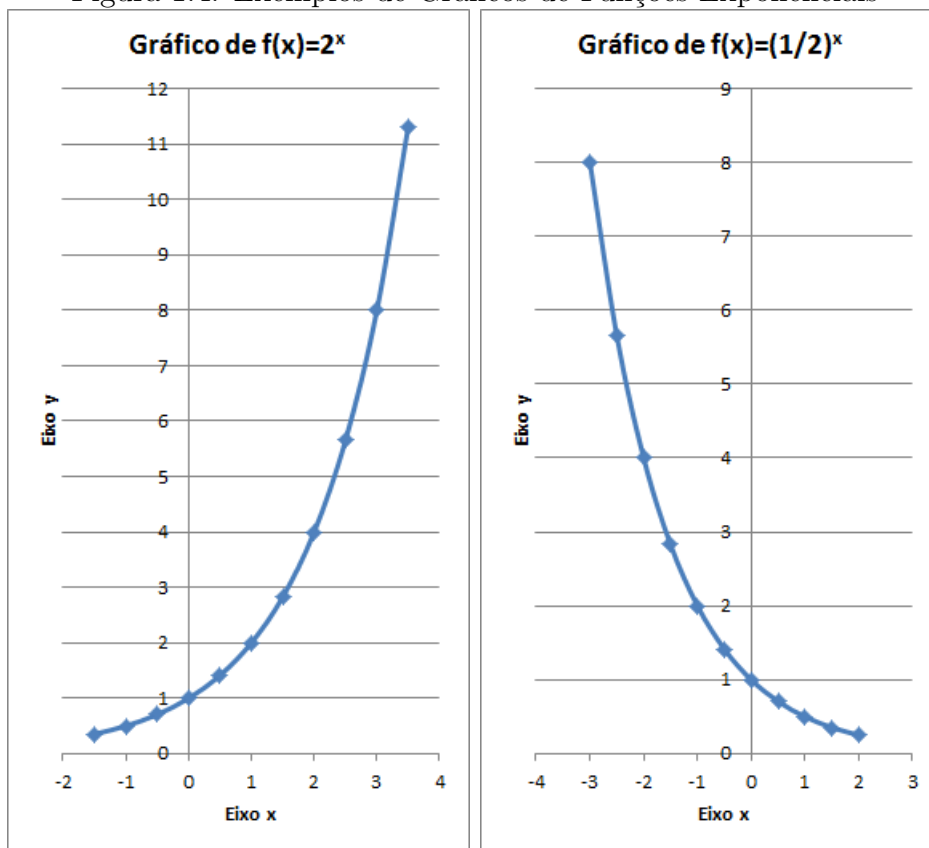
Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

Definição 6. Função Exponencial: Seja a um número real positivo e $a \neq 1$. A função exponencial de base a , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, é definida por $f(x) = a^x$.

Destacamos que, se $a > 1$ a função é crescente e se $0 < a < 1$, a função é decrescente, isto é, $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e, $a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

A Figura 1.4 traz o gráfico de $f(x) = 2^x$ e de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para ilustrar o tópico.

Figura 1.4: Exemplos de Gráficos de Funções Exponenciais



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

Definição 7. Função Logarítmica: Seja a um número real positivo e $a \neq 1$. A função logarítmica na base a , $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por

$$f = \log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

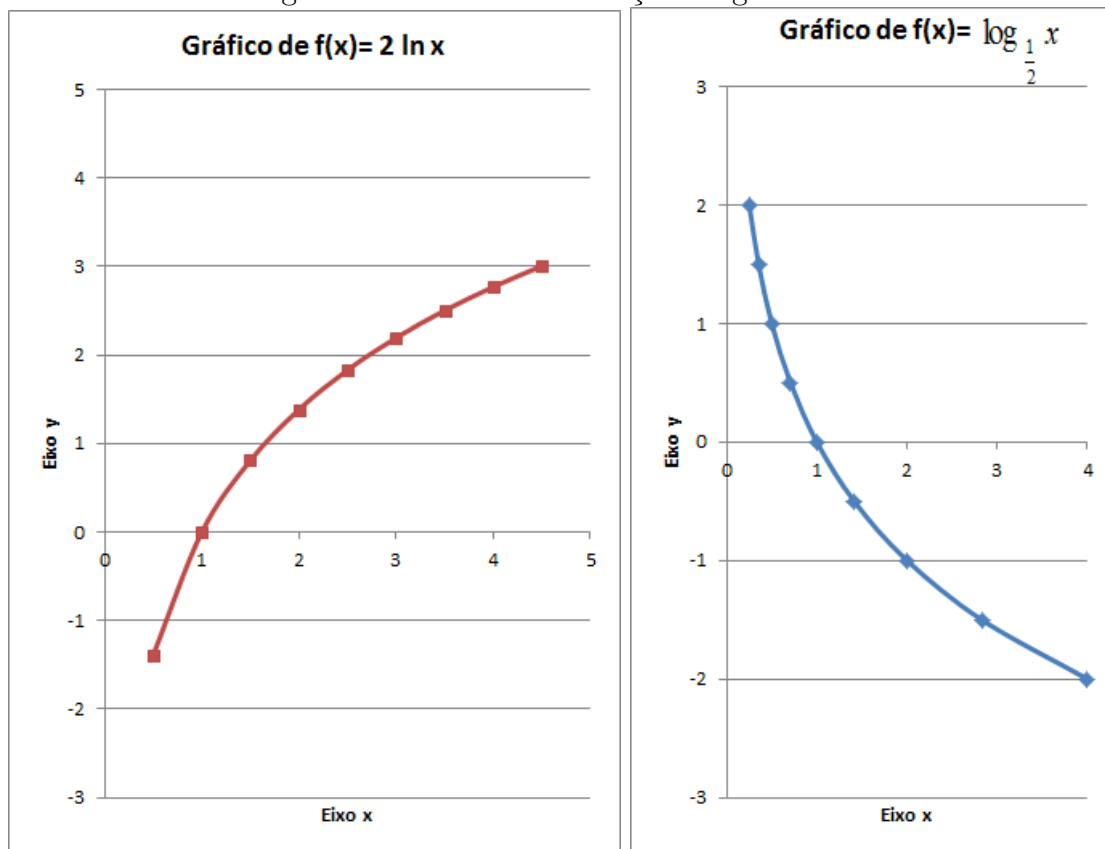
que associa cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado de logaritmo de x na base a .

A função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é a inversa da função exponencial e assim, por definição de função inversa, temos as propriedades:

- $a^{\log_a x} = x$;
- $\log_a(a^x) = x$;
- $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Na Figura 1.5 são apresentados os gráficos das funções $f(x) = 2 \ln x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para ilustrar o conteúdo. \ln é a notação usada para representar a função logarítmica que usa na base o número irracional $e \approx 2,71828\dots$.

Figura 1.5: Gráficos de Funções Logarítmicas



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

1.1.2 Limites e Derivadas de Funções Reais de uma variável

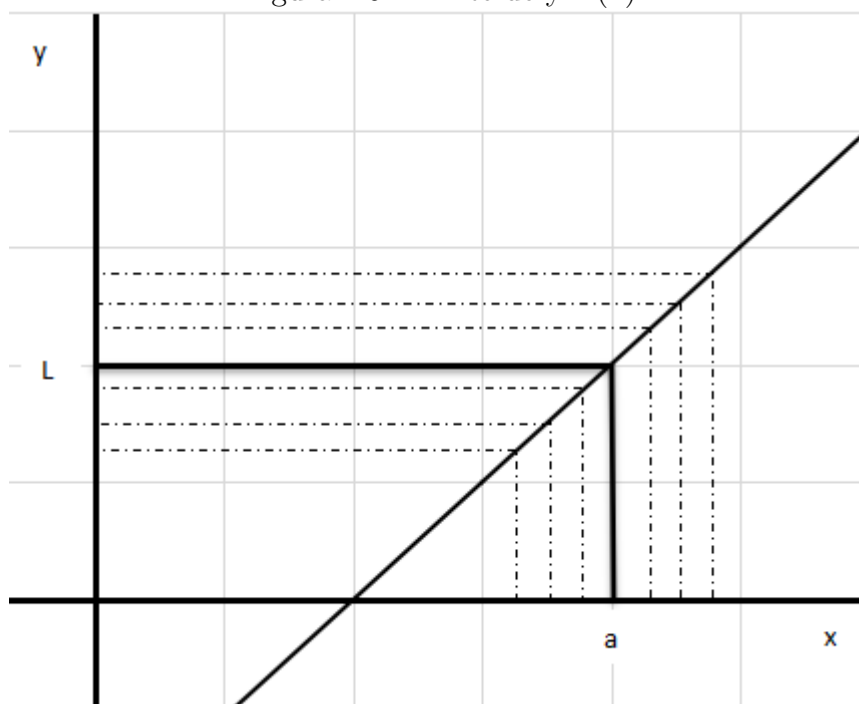
Definição 8. Limite: *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f tem limite L quando x tende a a , e denotamos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Figura 1.6: Limite de $y=f(x)$



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excell da Microsoft.

Algumas Propriedades de Limites

Considere as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

então,

- $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L \pm M.$

Demonstração. A demonstração será feita para o caso $f + g$. Como

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Para termos $|(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$ para $x \in I$ próximo de a , com $x \neq a$, é suficiente que tenhamos $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$.

Como temos $\frac{\epsilon}{2} > 0$ e os limites de f e g são

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

a definição de limite garante a existência de reais positivos δ_1 e δ_2 tais que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}; \quad (1.1)$$

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.2)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\delta > 0$, então sempre que $0 < |x - a| < \delta$ ocorre 1.1 e 1.2. Portanto, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$|(f + g)(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como queríamos. □

2. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = LM$.

Demonstração. Novamente, vamos estimar $|(fg)(x) - LM|$ por excesso em termos de $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$. Temos que

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - LM| &= |f(x)(g(x) - M) + (f(x) - L)M| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |f(x) - L||M| \\ &\leq (|f(x) - L| + |L|)|g(x) - M| + |f(x) - L||M| \\ &= |f(x) - L||g(x) - M| + |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L|. \end{aligned}$$

Portanto, a fim de que $|(fg)(x) - LM| < \epsilon$ para $x \in I$ próximo, mas diferente, de a é suficiente que tenhamos cada uma das parcelas $|f(x) - L||g(x) - M|$, $|L||g(x) - M|$ e $|M||f(x) - L|$ menores que $\frac{\epsilon}{3}$. Então, fazemos:

$$(a) \quad |f(x) - L| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \quad \text{e} \quad |g(x) - M| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}};$$

$$(b) \quad |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{3(|L| + 1)};$$

$$(c) \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{3(|M| + 1)}.$$

Então, é suficiente que tenhamos

- $|f(x) - L| < \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|M| + 1)} \right\};$
- $|g(x) - M| < \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|L| + 1)} \right\}.$

Se $\epsilon_1 = \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|M| + 1)} \right\}$ e $\epsilon_2 = \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|L| + 1)} \right\}$, então $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, e a definição de limites garante a existência de $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $|f(x) - L| < \epsilon_1$, para todo $x \in I$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon_1$, e $|g(x) - M| < \epsilon_2$, para todo $x \in I$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon_2$. Assim, se $|\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $\delta > 0$ e das condições $x \in I$ e $0 < |x - a| < \delta$ temos, simultaneamente, $|f(x) - L| < \epsilon_1$ e $|g(x) - M| < \epsilon_2$, como necessário. \square

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{L}{M}.$$

Demonstração. Do mesmo modo que no caso do produto, iniciaremos a demonstração pelo caso em que $f = 1$:

- Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.

Considerando que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ temos

$$\exists \delta_1, N > 0; 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > N \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{N}.$$

De $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon.$$

Considerando $\epsilon \cdot |M| \cdot N$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0; 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon \cdot |M| \cdot N.$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, vem

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)||M|} = |g(x) - M| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|M|} < \frac{\epsilon \cdot |M| \cdot N}{N \cdot |M|} = \epsilon$$

como queríamos mostrar.

- Agora, para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{L}{M}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

como queríamos mostrar. \square

Definição 9. Função Contínua: Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in I$ se e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Uma função é dita contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Definição 10. Taxa Média de Variação: Seja $f(x)$, denominamos Taxa Média de Variação da função $y = f(x)$, no intervalo $[a, x]$ ao quociente:

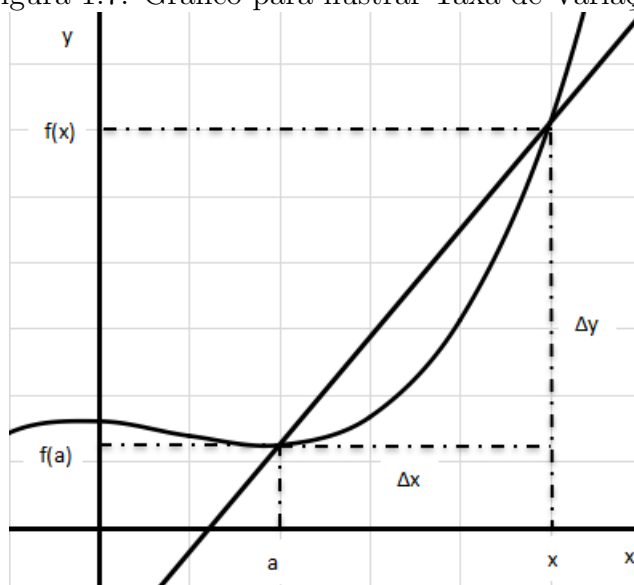
$$T_m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Podemos observar que a Taxa Média corresponde ao coeficiente angular m da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, isto é,

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que α é o ângulo que a reta que passa por $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ forma com o eixo x .

Figura 1.7: Gráfico para ilustrar Taxa de Variação



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software WPS Office.

Definição 11. Derivada: Denominamos derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa a e é denotada por $f'(a)$, o limite, se existir e for finito, da razão $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero, ou seja,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Ou de forma equivalente,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A interpretação geométrica da derivada de uma função $f(x)$, no ponto a , quando existe, é que $f'(a)$ fornece o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto a .

A derivada de uma função f , definida num intervalo real aberto, é a função f' , tal que seu valor, em qualquer ponto x do domínio de f , é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Algumas Propriedades de Derivadas

Sejam $f, g, h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in I$, então:

1. Se k é uma constante e $f(x) = k$ para todo $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. Seja $f(x) = k \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0.$$

□

2. Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração. Fazendo $h = x - a$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}((a + h)^n - a^n) = \\ &= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k - a^n \right) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} = \\ &= na^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(na^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} \right) \right) = na^{n-1}.$$

□

3. Se $g(x) = k \cdot f(x)$, sendo k uma constante e $f(x)$ uma função derivável, então $g'(x) = k \cdot f'(x)$.

Demonstração.

$$g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{kf(x) - kf(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} k \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} k \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = kf'(x).$$

□

4. $f \pm g$ é derivável em a , com $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

Demonstração. Para a soma de funções, temos

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

para $x \in I \setminus \{a\}$.

A derivada de $(f + g)'(x)$ é

$$(f + g)'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a).$$

Para $(f - g)'(x)$ é completamente análogo a $(f + g)'(x)$.

□

5. fg é derivável em x , com $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Demonstração. Observemos que

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) f(a).$$

Como g é derivável em a , g é contínua em a , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

□

6. Se $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x , com

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Demonstração. Para conseguirmos atingir nosso objetivo, devemos olhar primeiro para o caso em que $f(x) = 1$. Assim, como $g(x) \neq 0 \forall x \in J \subset I$, temos, para $x \in J \setminus \{a\}$, que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right) - \left(\frac{1}{g(a)}\right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right) = \\ &= -g'(a) \cdot \frac{1}{g(a)^2} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

Para finalizarmos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a) \cdot \frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

7. Sejam I e J intervalos abertos e $g : I \rightarrow J$ e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas. Se as derivadas de $f(x)$ e $g(x)$ existem nesses intervalos, então

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

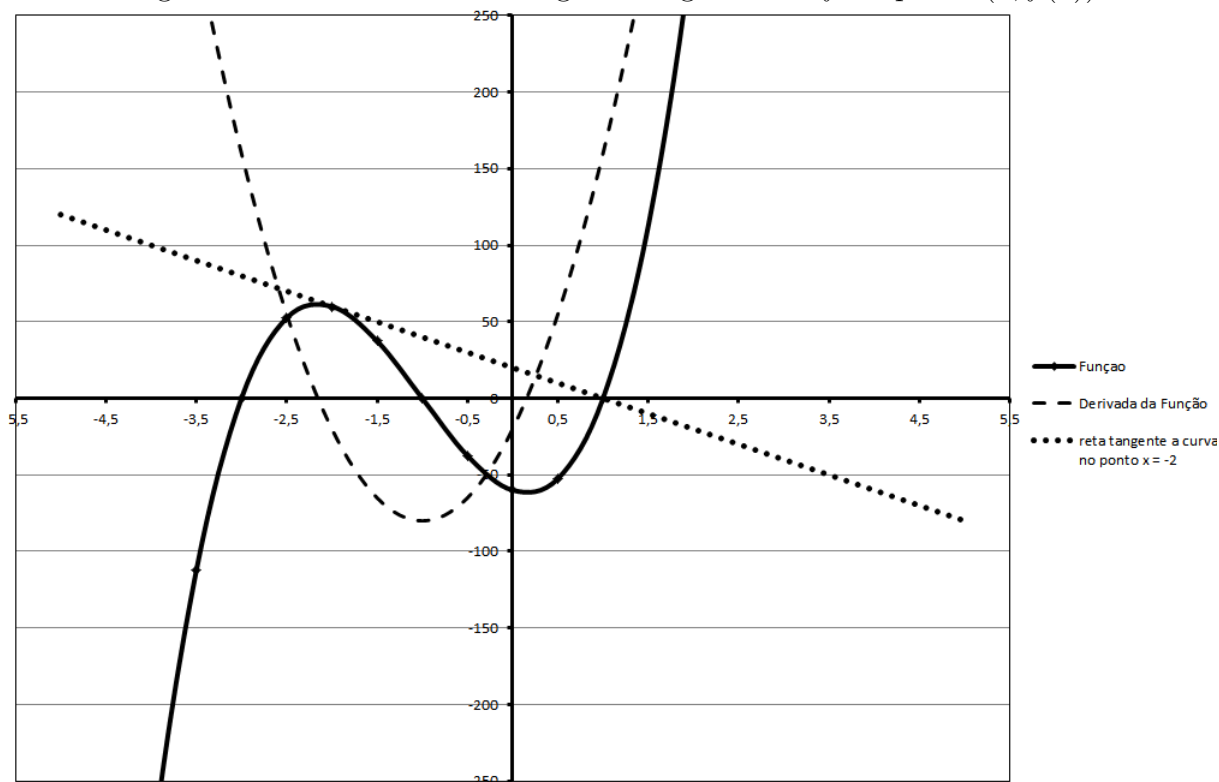
Demonstração.

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \right] \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\ (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a))g'(a). \end{aligned}$$

□

Na Figura 1.8, observamos a função $f(x) = 20x^3 + 60x^2 - 20x - 60$ sua derivada $f'(x) = 60x^2 + 120x - 20$ e a reta que tangencia o gráfico da função no ponto $x = -2$, cujo coeficiente angular é igual a $-20 = f'(-2)$.

Figura 1.8: Derivada e reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software WPS Office.

1.1.3 Funções Reais de várias variáveis reais - Derivadas Parciais

Definição 12. Derivada Parcial: Seja $f : F_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada variável x_i e em cada ponto $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ do domínio de f , definimos a **derivada parcial** de f com relação a x_i no ponto $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ como o número:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_n) = \lim_{x_i \rightarrow p_i} \frac{f(p_1, \dots, x_i, \dots, p_n) - (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{x_i - p_i}$$

caso o limite exista.

Na prática, derivamos em relação a uma variável x_i considerando as demais como constante. Somente a i -ésima coordenada sofre variação.

Dada uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis, suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ com $(i = 1, \dots, n)$, também são funções de n variáveis. Podemos, então, derivar parcialmente $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ obtendo as derivadas parciais de segunda ordem da função f .

Definição 13. Classe: Uma função $f : F_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^k se todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ existem e são contínuas em F_f .

Teorema 1.1.1. (Teorema de Young) Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de classe C^2 em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n , então, $\forall x \in U$ e para cada par de índices i, j vale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Para maiores detalhes sobre esse teorema veja Bortolossi (2003, p.176) e Apostol (1969, p.277).

Exemplo 2. Calcular as derivadas parciais da função $z = f(x, y) = 5x^3y^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x^3y^2 + 15x^2\Delta xy^2 + 15x\Delta x^2y^2 + 5\Delta x^2y^2 - 5x^3y^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 15x^2y^2 + 15x\Delta xy^2 + 5\Delta xy^2 = 15x^2y^2.$$

De modo análogo, ou aplicando a regra de derivação para função potência (e função polinomial) para fazer a derivada parcial em relação a y , chegamos a:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y, \quad \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 2 \cdot 15x^2y = 30x^2y \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y \partial x} = 3 \cdot 10x^2y = 30x^2y.$$

1.2 Conceitos de Álgebra Linear

1.2.1 Matrizes

Definição 14. Matriz: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos uma matriz real de ordem m por n , ou simplesmente uma matriz m por n (escrevemos $m \times n$) como uma tabela formada por elementos de \mathbb{R} distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos de \mathbb{R} são chamados entradas da matriz. Se a matriz A for $m \times m$ dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem m .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Definição 15. Matriz Oposta: Dada a matriz $A = [a_{ij}]$, definimos a **matriz oposta** de A , como a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Definição 16. Matriz Nula: A matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, é uma **matriz nula** se todo $a_{ij} = 0$.

Definição 17. Matriz Quadrada: Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Dizemos que A é uma matriz quadrada se $m = n$.

Definição 18. Matriz Diagonal: Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0 \forall 0 \leq i, j \leq m$.

Adição de Matrizes

Definição 19. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a **soma** de A e B , denotada por $A + B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall 1 \leq i \leq m$ e $\forall 1 \leq j \leq n$.

Exemplo 3. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Se A , B e C são matrizes de mesma ordem $m \times n$, então:

1. a adição é associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
2. a adição é comutativa: $A + B = B + A$;
3. existe o elemento neutro: $A + 0 = A$;
4. existe o elemento oposto: $A + (-A) = 0$.

Multiplicação de Matriz por Escalar

Definição 20. Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos o produto de A pelo número real c , como sendo a matriz $B = cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$.

Exemplo 4. Dados $c = 6$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$
temos que $B = cA = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 30 \\ 12 & 42 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$.

Multiplicação de Matrizes

Definição 21. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, o produto de A por B , denotado por AB , é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$, tal que,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (1.3)$$

Exemplo 5. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

temos que $C = AB$ é

$$C = AB = \begin{bmatrix} 41 & 26 & 11 \\ 40 & 7 & 15 \\ 25 & 10 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

Desde que as somas e produtos estejam definidos, a multiplicação de matrizes cumpre as propriedades:

1. Associativa:

$$A(BC) = (AB)C.$$

2. Distributiva:

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{e} \quad A(B + C) = AB + AC.$$

No entanto, a multiplicação de matrizes não é comutativa e não obedece a lei do anulamento do produto e a lei do cancelamento do produto. Ou seja,

1. Existem matrizes A e B em que $AB \neq BA$;
2. Podemos ter $AB = 0$ mesmo que $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
3. Podemos ter $AB = AC$ com $B \neq C$ e $A \neq 0$.

Matriz Identidade ou Matriz Unidade

Definição 22. Matriz Identidade: A matriz diagonal de ordem m cujos elementos da diagonal principal são iguais ao número 1 é chamada matriz identidade (ou Unidade) e é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas de mesma ordem m . É indicada por I_m .

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Matriz Transposta

Definição 23. Matriz Transposta: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de Transposta de A , e denotamos por A^t , a matriz $[b_{ij}]_{n \times m}$, em que

$$b_{ij} = a_{ji}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Assim, a matriz A^t é construída por meio da troca ordenada das linhas pelas colunas da matriz A .

Exemplo 6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 41 & 26 & 11 \\ 40 & 7 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

A Matriz Transposta de A é

$$A^t = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 26 & 7 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 2}.$$

Matriz Simétrica

Definição 24. Uma matriz quadrada $A_{m \times m}$ é dita simétrica quando $A = A^t$. Ou seja, os elementos a_{ij} da matriz são iguais aos elementos a_{ji} , $\forall 0 \leq i, j \leq m$.

Exemplo 7. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ 5 & 0 & 6 & 13 \\ 7 & 11 & 13 & 8 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Matriz Inversa

Definição 25. Seja A uma matriz quadrada de ordem m , chamamos de inversa de A , e denotamos A^{-1} , a uma matriz quadrada B de ordem m tal que $AB = BA = I_m$.

Exemplo 8. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, a inversa da matriz A é a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Triangular Superior

Definição 26. Uma matriz triangular superior (inferior) de ordem n é uma matriz quadrada em que todos os elementos abaixo (acima) da diagonal principal são iguais a zero,

isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Operações Elementares na linha de uma Matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotamos por L_i a **i -ésima** linha de A e definimos as **operações elementares nas linhas** da matriz A como segue:

1. Permutação das linhas L_i e L_j , indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. Multiplicação de uma linha L_i por um número real a não nulo, indicada por $L_i \leftrightarrow aL_i$;
3. Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com a vezes uma outra linha L_j , indicada por $L_i \leftrightarrow L_i + aL_j$.

Matrizes Elementares

Definição 27. Uma matriz elementar de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n obtida da matriz identidade I_n a partir da aplicação de uma operação elementar. Denotamos por $E = e(I_n)$, em que e é uma operação elementar.

Exemplo 9. A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida da operação elementar $e : L_1 \leftrightarrow L_2$ sobre a matriz I_2 .

Lema 1.2.1. Seja e uma operação elementar sobre matrizes de $M(m, n)$, em que $M(m, n)$ é o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$. Considere a matriz elementar $E = e(I_m)$, então $e(A) = EA$, para todo $A \in M(m, n)$.

Exemplo 10. Considere as matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ em que E é a matriz elementar obtida da operação elementar $e : L_3 = L_3 + 3L_1$ sobre I_3 . O produto EA é

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que fazer $L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_1$ na matriz A ($e(A)$).

Definição 28. Duas matrizes A e B são equivalentes se uma delas é obtida da outra após a realização de um número finito de operações elementares.

Teorema 1.2.2 (Matriz Inversa). Seja A uma matriz quadrada de ordem n ,

1. A é inversível se, e somente se, A é equivalente a I .

Demonstração: Para a verificação do teorema basta verificarmos se existe uma matriz B , tal que

$$AB = I_n.$$

Para isso, vamos denotar as colunas de B por X_1, \dots, X_n , em que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix},$$

e, denotar as colunas da matriz identidade I_n , por E_1, \dots, E_n . Desta forma,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A j -ésima coluna do produto AB é igual a AB_j . Assim, analisando coluna a coluna a igualdade matricial $AB = I_n$ vemos que determinar B é equivalente a resolver n sistemas lineares $AX_j = E_j$, para $j = 1, \dots, n$.

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formamos as matrizes aumentadas $[A|E_1], [A|E_2], \dots, [A|E_n]$. No entanto, as matrizes dos sistemas são todas iguais a A e podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz $n \times 2n$

$$[A|E_1E_2 \cdots E_n] = [A|I_n].$$

Transformando $[A|I_n]$ na sua forma escalonada reduzida chegamos na matriz $Y|S$ e temos duas possibilidades: Ou a matriz Y é a matriz identidade, ou não é.

- Se Y é a matriz identidade, então A é inversível;
- Se Y não é a matriz identidade, Y terá pelo menos uma linha nula o que implica em que a matriz A não é inversível.

□

Exemplo 11. Encontrar, se existir, a inversa de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz aumentada a ser escalonada é $[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Após aplicar o escalonamento, chegamos a matriz

$$[I_3|A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

2. Se A é não inversível, então A é equivalente a matriz nula.

1.2.2 Determinantes

Definição 29. Determinante: Dada uma matriz quadrada A , $n \times n$, o determinante de A é o número real definido da seguinte forma,

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (-1)^{J(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)},$$

em que S_n é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, f é uma permutação do conjunto S_n e $J(f)$ é o número de inversões de f .

Usaremos a notação $\det A$ ou $|A|$ para representar determinante de A .

Para saber mais sobre permutação veja, por exemplo, Martins (2015, p. 29).

Assim,

- Se $A = (a_{11})$, então $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

O determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3 é facilmente calculado pelo método prático conhecido como Regra de Sarrus, veja, por exemplo, Iezzi e Hazzan (2013, p. 84). Já para calcular determinantes de matrizes de ordem maior que 3 é necessário recorrer a outros métodos, como por exemplo o Teorema de Laplace. Elaborado pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) este teorema permite o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n por meio de n determinantes de matrizes de ordem $n - 1$. Esse processo pode ser repetido inúmeras vezes até chegar a determinantes de ordem 2 ou 3, que como já foi dito anteriormente podem ser obtidos por cálculos menos elaborados. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Martins (2015, p.59).

Teorema 1.2.3. (*Teorema de Laplace*) Considere a matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. O determinante da matriz A é igual a soma dos produtos dos elementos de uma linha ou de uma coluna qualquer da matriz A pelos respectivos cofatores desses elementos, isto é,

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

ou

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

em que $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ (chamado de cofator) e D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém quando se retira a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz A .

Exemplo 12. Para calcular o determinante da matriz A abaixo, podemos escolher, por exemplo, a linha 1 e calcular seus cofatores:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 14;$
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 30;$
- $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -24.$

Assim,

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 2(14) + (-1)(30) + 3(-24) = -74.$$

Na sequência apresentaremos algumas proposições a respeito de determinantes importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 2. *O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta.*

Demonstração. O determinante de uma matriz de ordem igual a n é igual ao somatório de todos os produtos distintos possíveis formados por n fatores tomados entre os n^2 elementos da matriz, de tal forma que em um desses produtos haja exatamente um fator de cada linha e de cada coluna. Assim, para obter tais produtos, podemos fixar os índices das linhas e permutar os índices das colunas.

Desse modo, seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada, $n \times n$, cuja transposta é representada pela matriz $A^t = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

O determinante de A^t é

$$\det A^t = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}.$$

Substituindo $b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$ por $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$, temos

$$\det A^t = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

Como cada uma das permutações j são bijetoras, $j_1 = j(1) = k$, para algum $1 \leq k \leq n$, considerando l a inversa de j temos $a_{j_1 1} = a_{k_l k}$. O mesmo acontece com j_2, j_3, \dots, j_n e após uma reordenação obtemos

$$\det A^t = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \det A.$$

□

Exemplo 13.

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ temos } \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$

$$\text{como } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ obtemos } \det A^t = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Proposição 3. *Ao permutarmos duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada A , geramos uma nova matriz B , o determinante da matriz gerada é o oposto do determinante da matriz A .*

Demonstração. Permutando duas linhas ou colunas de posição alteramos a ordem dos índices dos elementos na permutação, tendo como consequência o acréscimo de uma inversão na permutação e, por isso, o sinal dos produtos mudam. \square

Exemplo 14.

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ temos } \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$

$$\text{como } B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ obtemos } \det B = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2.$$

Proposição 4. *Se uma matriz quadrada A tem 2 linhas iguais então $\det A = 0$.*

Demonstração. Na propriedade 2, ao permutarmos 2 linhas de uma matriz o sinal do determinante da nova matriz é oposto ao da matriz original. Então, ao trocarmos as linhas iguais da matriz A geramos uma matriz B , onde $\det A = -\det B$, como B é igual a A a única forma dessa igualdade ocorrer é se $\det A = \det B = 0$. \square

Proposição 5. *Se uma matriz quadrada A , $n \times n$, tem uma linha ou coluna nula, então $\det A = 0$.*

Demonstração. Como cada produto elementar com sinal de A tem um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna da matriz, o produto elementar terá pelo menos um elemento nulo, vindo da linha ou da coluna nula. Assim, todo produto elementar será nulo e, como o determinante é a soma desses produtos, $\det A = 0$. \square

Proposição 6. *Ao multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A por um número real k , o determinante da nova matriz é o produto de k pelo determinante da matriz A .*

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e B igual a matriz A em que, por exemplo, a primeira linha é multiplicada por k ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, o determinante de B é

$$\det B = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} k a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = k \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = k \det A.$$

\square

Exemplo 15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $\det A$ é dado por: $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Multiplicando, por exemplo, a linha 2 por 3, temos a matriz C dada por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } \det C = -6 = 3(-2) = 3 \det A.$$

Teorema 1.2.4. (Teorema de Jacobi) Se B é obtida de A substituindo uma linha por ela mesma adicionada ao múltiplo de outra, o determinante de B é igual ao determinante de A .

Demonstração. Seja A uma matriz $n \times n$ e B , por exemplo, a matriz obtida de A substituindo a linha 1 pela linha 1 somada a k vezes a linha 2, assim

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

e

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \cdots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} (a_{1j_1} + ka_{2j_1}) a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \\ &= \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} + k \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{2j_1} + ka_{2j_1}) a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

A segunda parcela da soma é o determinante de uma matriz com duas linhas iguais e portanto igual a zero.

Logo,

$$\det B = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} (a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}) = \det A$$

□

Exemplo 16. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, como visto anteriormente, a matriz A tem determinante igual a -2.

Ao adicionar à linha 2 a linha 1 multiplicada por 3, obtemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é $\det B = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = -2$.

Observação 4. Podemos observar, nas proposições 2 e 5 e no Teorema de Jacobi (1.2.4), como cada uma das operações elementares interferem no determinante de uma matriz.

Proposição 7. *Se A e B são matrizes equivalentes, então $\det A = k \det B$, para algum $k \neq 0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição segue da definição de matrizes equivalentes (veja definição 28), das proposições 2, 5 e do Teorema de Jacobi (1.2.4). \square

Proposição 8. *Sejam A uma matriz $n \times n$ e E a matriz elementar obtida de I_n por meio da operação elementar e . Assim, $\det(EA) = \det(e(A)) = \det E \det A$.*

Demonstração. A demonstração segue do lema 1.2.1. \square

Proposição 9. *Seja $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ uma matriz triangular superior (ou inferior). O determinante de A é dado por*

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{mm}.$$

Demonstração. O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n é

$$\det A = \sum_{j \in S_n} (-1)^{J(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

O determinante é igual ao somatório de todos os produtos distintos de n fatores tomados nos n^2 elementos da matriz, escolhidos de modo que em cada um desses produtos tenha exatamente um fator de cada linha e de cada coluna e que seja associado a cada um dos produtos o sinal positivo ou negativo. Garantindo, dessa forma, que todo produto diferente da diagonal principal tenha pelo menos um termo com $i < j$ cujo valor é igual a $a_{ij} = 0$, portanto, $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 0$.

Logo, o determinante de uma matriz triangular inferior qualquer ficará restrito ao produto dos elementos da diagonal principal, isto é, $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$. \square

De modo análogo, podemos demonstrar a propriedade para a matriz triangular superior.

Proposição 10. *Seja $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ uma matriz diagonal. O determinante de A é dado por*

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{mm}.$$

Demonstração. Como toda matriz diagonal é uma matriz triangular, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. \square

Proposição 11. *Seja A uma matriz quadrada, $n \times n$. A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A$ é diferente de zero.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que, se A é inversível, então $\det A \neq 0$.

Pelo Teorema 1.2.2, A é equivalente a identidade. Logo, pela proposição 7, $\det A = k \det I_n$, para algum $k \neq 0 \in \mathbb{R}$. Como $\det I_n = 1$, temos que $\det A \neq 0$.

Mostremos agora que, se $\det A \neq 0$, então A é inversível.

Suponhamos que A seja não inversível. Assim, novamente pelo Teorema 1.2.2 A é equivalente a uma matriz N , em que N possui uma linha nula. Logo, $\det A = k \det N$. Como N tem uma linha nula, pela proposição 3, $\det N = 0$ e assim, $\det A = k \cdot 0 = 0$. Portanto, A não é inversível. \square

A próxima propriedade foi desenvolvida pelo matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856).

Teorema 1.2.5. *(Teorema de Binet) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Demonstração. Se A é não inversível, então AB é não inversível e obtemos $\det A = 0$ e $\det AB = 0$ e segue o resultado. Se A é inversível, pelo teorema 1.2.2, $A = E_1 \cdots E_r$, em que os E_i 's são matrizes elementares. Assim, $AB = (E_1 E_2 \cdots E_r)B$ e temos, utilizando a proposição 8,

$$\det(AB) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \det(B) = \det(E_1 \cdots E_r) \det(B) = \det(A) \det(B).$$

\square

Exemplo 17. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ seus determinantes são:

$$\det A = -2 \quad \text{e} \quad \det B = 3.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 24 \\ 43 & 54 \end{bmatrix} \text{ logo } \det AB = 1026 - 1032 = -6$$

$$-6 = -2 \cdot 3 = \det A \det B = \det(AB).$$

Definição 30. (*Matriz de Vandermonde*) Uma matriz de Vandermonde é toda matriz em que os termos de cada linha estão em progressão geométrica, isto é,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Tal tipo de matriz foi descrita pelo matemático francês Alexandre-Theóphile Vandermonde (1735-1796) e seu determinante possui uma característica particular descrita no teorema a seguir,

Teorema 1.2.6. *Seja V a Matriz de Vandermonde gerada por $\{x_i\}_{i=0}^n$, então $\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.*

Prova. Vamos provar por indução sobre n :

- O teorema é válido para $n=2$

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0).$$

- Supondo o teorema válido para $n - 1$, verificaremos que o mesmo é válido para n . Para tanto, primeiramente, faremos as seguintes operações elementares nas linhas da matriz V .

Linha i recebe linha i - linha 1, com $i = 2, \dots, n + 1$. Obtendo a matriz

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \cdots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \cdots & x_2^{n-1} - x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \cdots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Cabe observar que este tipo de operação elementar não altera o determinante da matriz, como visto no Teorema de Jacobi (1.2.4). Assim,

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 & \cdots & x_1^{n-1} - x_0^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 & \cdots & x_2^{n-1} - x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & x_n^3 - x_0^3 & \cdots & x_n^{n-1} - x_0^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Em seguida, com o objetivo de zerar todos os termos da primeira linha à direita do 1, multiplicamos a coluna k por $-x_0$ e, a seguir, somamos a coluna k com a coluna $k+1$, $k = 1, \dots, n$. Como essas operações também não alteram o determinante (ver Proposição 2 e Teorema 1.2.4), temos que

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0x_1 & x_1^3 - x_0x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} - x_0x_1^{n-2} \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0x_2 & x_2^3 - x_0x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_0x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0x_n & x_n^3 - x_0x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_0x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & x_1^2(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & x_2^2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & x_n^2(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace (1.2.3) na primeira linha (ou coluna) da matriz V chegamos a,

$$|V| = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Aplicando a hipótese de indução, obtemos

$$|V| = \prod_{i,j=0}^n (x_j - x_i). \quad (1.5)$$

□

Exemplo 18. O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

é dado por

$$|A| = (4 - 3) \cdot (4 - 2) \cdot (3 - 2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Observação 5. Assim, se não houver elementos x_i repetidos, o Teorema nos garante que o determinante de uma matriz de Vandermonde é diferente de 0 (zero).

1.2.3 Matriz Particionada em Blocos

Uma matriz **particionada** é uma matriz A que foi dividida em submatrizes, isto é, os elementos dessa matriz particionada também são matrizes. Se as submatrizes de cada bloco forem resultantes da divisão dessa matriz A em linhas e colunas consecutivas, dizemos que a matriz foi **particionada em blocos**.

Exemplo 19. Seja a Matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Podemos particioná-la de modo que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

em que

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

A terna ordenada (1, 2, 3) é a solução do sistema, uma vez que $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$ satisfaz as três equações do sistema.

O conjunto formado por todas as soluções de um sistema linear é chamado conjunto solução do sistema. Os sistemas lineares podem não apresentar solução, apresentar uma única solução ou apresentar infinitas soluções.

Todo sistema linear S pode ser escrito na forma matricial $S, AX = B$, em que A é a matriz dos coeficientes, X é matriz formada pelas variáveis e B a matriz formada pelo termos independentes. Se A é inversível temos que $X = A^{-1}B$. Portanto, S tem uma única solução.

1.2.5 Forma Quadrática e Matriz Positiva Definida

Definição 32. Forma Quadrática: Seja A uma matriz $n \times n$, simétrica, a **forma quadrática** associada à matriz A é a função escalar

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\rightarrow Q(h) = h^T A h \end{aligned}$$

Exemplo 21.

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definição 33. Matriz Positiva Definida: Dizemos que a matriz A é positiva definida se, a forma quadrática associada a A , $Q(h) = h^T A h > 0$, $\forall h \neq 0$ em \mathbb{R}^n .

Exemplo 22. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

é positiva definida uma vez que

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0).$$

Menores Principais Líderes

Definição 34. Menor Principal Líder: O menor principal líder de ordem k de uma matriz $n \times n$ é o determinante de uma submatriz $k \times k$ de A obtida quando removemos as últimas $n - k$ linhas e as últimas $n - k$ colunas da matriz A .

As proposições a seguir são necessárias para a prova do Teorema 1.2.7.

Proposição 15. *Se A é uma matriz positiva definida, então A é inversível.*

Demonstração. Suponha que A seja não inversível. Assim, existe um vetor não nulo x tal que $Ax = 0$, pois o sistema homogêneo possui infinitas soluções. Assim, $x^T Ax = x^T 0 = 0$, contradizendo a hipótese, uma vez que A é positiva definida. Logo, A é inversível. \square

Proposição 16. *Seja A é uma matriz simétrica e Q é uma matriz inversível, então,*

1. $Q^T A Q$ é uma matriz simétrica.

Demonstração. $(Q^T A Q)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T A Q$. Logo $Q^T A Q$ é simétrica. \square

2. A é positiva definida se, e só se, $Q^T A Q$ é positiva definida.

Demonstração. Primeiramente mostremos que se A é positiva definida, então $Q^T A Q$ é positiva definida.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

$$x^T (Q^T A Q)x = (x^T Q^T) A (Qx) = (Qx)^T A (Qx) > 0,$$

pois, A é positiva definida.

Provemos agora que se $Q^T A Q$ é positiva definida, então A é positiva definida. Devemos provar que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Ax > 0$.

Como Q é inversível, o sistema linear $Qy = x$ tem solução, ou seja $\exists y_0 \neq 0$, tal que $Qy_0 = x$. Assim,

$$x^T Ax = (Qy_0)^T A (Qy_0) = (y_0^T Q^T) A (Qy_0) = y_0^T (Q^T A Q)y_0 > 0,$$

uma vez que $Q^T A Q$ é positiva definida. \square

O próximo teorema relaciona a positividade de uma matriz simétrica com os menores principais líderes dessa matriz.

Teorema 1.2.7. *(Matriz Positiva Definida) Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. Se todos os menores principais líderes são maiores que zero, então A é positiva definida.*

Demonstração. A demonstração será feita em duas partes. Inicialmente, o teorema será demonstrado para uma matriz diagonal A , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

A forma quadrática de A é dada por

$$Q(h) = (h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = (h_1^2 a_1 + h_2^2 a_2 + \cdots + h_n^2 a_n).$$

Os menores principais líderes de A são:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 a_2, \quad \cdots, \quad A_n = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Se todos os menores principais líderes de A são maiores que zero, temos $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$ e portanto $Q(h) > 0$, para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$ e $h \neq 0$, assim, A será positiva definida.

Faremos a demonstração do caso geral por indução sobre n e utilizaremos as proposições 15 e 16.

- Sabemos que a afirmação é válida para matrizes 1×1 .
- Supomos válido para uma matriz $n \times n$ e provaremos sua validade para uma matriz $(n+1) \times (n+1)$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix},$$

uma matriz $(n+1) \times (n+1)$, simétrica. Particionando A do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} A_n & a \\ a^T & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix},$$

em que

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{bmatrix} a_{1(n+1)} \\ a_{2(n+1)} \\ \vdots \\ a_{n(n+1)} \end{bmatrix}.$$

Assumindo que todos os menores principais líderes de A são positivos, a submatriz A_n é positiva definida, pela hipótese indutiva. Assim, pela Proposição 15, A_n é inversível. Tomando $d = a_{n+1,n+1} - a^T(A_n)^{-1}a$, I_n a matriz identidade $n \times n$ e 0_n a matriz nula, $n \times 1$, podemos reescrever A como

$$A = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ (A_n^{-1}a)^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0_n \\ 0_n^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A_n^{-1}a \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} = Q^T B Q.$$

Temos que $\det Q = \det Q^T = 1$ e $\det B = d \det A_n$, pela proposição 14. Logo, pelo Teorema de Jacobi (1.2.4), $\det A = d \det A_n$. Como os menores principais líderes são todos positivos, $\det A > 0$ e $\det A_n > 0$, temos, portanto, $d > 0$.

Calculemos agora a forma quadrática de B . Seja

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

em que X é um vetor $n \times 1$. Assim,

$$Y^T B Y = \begin{bmatrix} X & x_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0_n \\ 0_n^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_{n+1} \end{bmatrix},$$

Pela proposição 13, $Y^T B Y = X^T A_n X + dx_{n+1}^2 > 0$, pois, A_n é positiva definida e $d > 0$. Logo, B é positiva definida. Como $A = Q^T B Q$, pela Proposição 16, A é positiva definida.

□

1.2.6 Espaço Vetorial Real

Definição 35. *Seja $V \neq \emptyset$ um conjunto. Uma função $f : V \times V \rightarrow V$ é chamada operação em V .*

Definição 36. Espaço Vetorial Real: *Um conjunto $V \neq \emptyset$, munido de uma operação adição,*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow u + v \end{aligned}$$

e de uma operação multiplicação por escalar, \cdot ,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (k, v) &\rightarrow kv \end{aligned}$$

é um espaço vetorial real se as operações $+$ e \cdot satisfazem as propriedades:

- **A1** : *A adição é associativa:*

$$(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in V.$$

- **A2** : *A adição é comutativa:*

$$u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

- **A3**: A adição possui elemento neutro:

$$\exists 0 \in V, \text{ tal que } v + 0 = v, \forall v \in V.$$

- **A4**: A adição possui elementos simétricos:

$$\forall v \in V, \exists -v \in V, \text{ tal que } v + (-v) = 0.$$

- **ME1**: A multiplicação por escalar é distributiva em relação a adição:

$$a(u + v) = au + av, \forall a \in K \text{ e } u, v \in V;$$

$$(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v, \forall a_1, a_2 \in K \text{ e } v \in V.$$

- **ME2**: A multiplicação por escalar é associativa:

$$(a_1a_2)v = a_1(a_2v), \forall a_1, a_2 \in K \text{ e } v \in V.$$

- **ME3**: A multiplicação por escalar admite elemento neutro:

$$1v = v, \forall v \in V.$$

Os elementos de V são chamados de *vetores* e os elementos de \mathbb{R} de *escalares*. Exemplo: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ com as operações de soma e multiplicação por escalares usuais são espaços vetoriais sobre \mathbb{R} .

Definição 37. Subespaço Vetorial: *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Dizemos que W é um subespaço vetorial de V , ou simplesmente um subespaço de V , se W , com as operações de adição e multiplicação por escalar de V , é um espaço vetorial.*

Proposição 17. *Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V , então W é subespaço se, e somente se, $0 \in W$ e se $u, v \in W$, então $u + av \in W, \forall a \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se W é um subespaço vetorial então as propriedades 1 e 2 seguem diretamente da definição.

(\Leftarrow) As propriedades *A1, A2, ME1, ME2, ME3* seguem do fato de $W \subset V$ e V é um espaço vetorial. Além disso, $0 \in W$, pois $0 \cdot u = 0 \in W$ por 2, e $u \in W \Rightarrow -1 \cdot u = -u \in W$, também por 2. \square

Definição 38. Conjuntos Linearmente Independentes: *Sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de um espaço vetorial V . Dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são linearmente independentes (LI) se a equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$$

for satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$.

Se existe algum $a_i \neq 0$, tal que $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$ dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são *linearmente dependentes* (LD). O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é linearmente independente ou dependente se os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são, respectivamente, independentes ou dependentes.

Proposição 18. *Se L é linearmente independente e H é um subconjunto de L , então H é linearmente independente.*

Demonstração. Sejam

$$H = \{u_1, \dots, u_r\} \quad \text{e} \quad L = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}.$$

Suponha que H seja linearmente dependente. Então, existe a_1, \dots, a_r não todos nulos tais que $a_1u_1 + \dots + a_ru_r = 0$. Assim, $a_1u_1 + \dots + a_ru_r + 0 \cdot u_{r+1} + \dots + 0 \cdot u_n = 0$ com pelo menos um $a_i \neq 0$. Mas, isso contradiz a hipótese de que L é linearmente independente. Logo, H é linearmente independente. \square

Definição 39. Combinação Linear: *Seja V um espaço vetorial e sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de V . Diremos que um vetor v de V é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_r se existirem números reais a_1, a_2, \dots, a_r tais que*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r.$$

Exemplo 23. O vetor $v = (1, -3, 0)$ em \mathbb{R}^3 é uma combinação linear de $v_1 = (2, 4, 0)$ e $v_2 = (1, 3, 0)$, pois

$$(1, -3, 0) = 3(2, 4, 0) + (-5)(1, 3, 0).$$

Definição 40. Subespaço Gerado: *Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores de V . Definimos $G(\alpha) = \{\text{combinações lineares de } v_1, \dots, v_r\}$, isto é, $G(\alpha) = \{a_1v_1 + \dots + a_rv_r, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r\}$.*

Proposição 19. *$G(\alpha)$ é um subespaço vetorial de V .*

Demonstração. Sejam

- $G(\alpha) \neq \emptyset$, pois $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_r$.
- $a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in G(\alpha)$.

Então, existem números reais a_1, a_2, \dots, a_r e b_1, b_2, \dots, b_r tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_rv_r$.

Fazendo $u + av = (a_1 + ab_1)v_1 + (a_2 + ab_2)v_2 + \dots + (a_r + ab_r)v_r$. Logo, $u + av$ é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_r e conseqüentemente pertence a $G(\alpha)$. Logo $G(\alpha)$ é subespaço de V . \square

Definição 41. Bases: *Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V . Dizemos que α é uma base de V se*

- α é linearmente independente;
- $V = G(\alpha)$.

Proposição 20. *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores v_1, \dots, v_n . Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Boldrini (1980, p.118).

Proposição 21. *Todas as bases de V possuem o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Sejam $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Como B é LI e C gera V , então, pela proposição anterior $r \leq n$. Por outro lado, C é LI e B gera V , então, $n \leq r$. Logo $n = r$. \square

Definição 42. Dimensão: *O número de elementos de uma base de um espaço vetorial é chamado de dimensão de V e é denotado por $\dim V$.*

Exemplo 24. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base do \mathbb{R}^2 conhecida como base canônica, logo, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$;

Exemplo 25. A base canônica de \mathbb{R}^3 é formada pelos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1)$, ou seja, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$;

Exemplo 26. $\beta = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , que possui n vetores e, portanto, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Definição 43. *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V , definimos $U + W = \{u + w; u \in U \text{ e } w \in W\}$.*

Proposição 22. *Considere U e W subespaços de V . Então $U + W$ é subespaço de V .*

Demonstração. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in U + W$.

Como $v_1, v_2 \in U + W$ existem u_1 e u_2 elementos de U e existem w_1, w_2 elementos de W tais que $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$.

Então, $v_1 + av_2 = (u_1 + w_1) + a(u_2 + w_2) = (u_1 + au_2) + (w_1 + aw_2) \in U + W$. Logo, $U + W$ é subespaço de V . \square

Se $H = U + W$ e $U \cap W = 0$ dizemos que o subespaço H é soma direta de U e W , e denotamos $H = U \oplus W$.

Proposição 23. *Se H é soma de direta de U e W , então todos os elementos de H são escritos de maneira única como $u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração. Seja $y \in H$ e suponha $y = u_1 + v_1$ e $y = u_2 + v_2$, com $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in W$.

$$\text{Assim, } u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Temos que $u_1 - u_2 \in U$, pois u_1 e $u_2 \in U$ e que $u_1 - u_2 \in W$, pois $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$ e $v_2 - v_1 \in W$, uma vez que v_2 e $v_1 \in W$. Portanto, $u_1 - u_2 \in U \cap W = \{0\}$ e assim $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

$$\text{Se } u_1 = u_2, \text{ temos } v_2 - v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Logo, y é escrito de maneira única como soma de um elemento de U com um elemento de W . □

Definição 44. Produto Interno: *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de vetores $u, v \in V$ associa um número real denotado por $\langle u, v \rangle$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- **PI 1** $\langle v, v \rangle \geq 0$;
- **PI 2** $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
- **PI 3** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- **PI 4** $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- **PI 5** $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$.

Exemplo 27. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $\langle u, v \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definido por $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$. Essa função é um produto interno no \mathbb{R}^n conhecido como produto interno usual ou produto escalar.

Definição 45. Distância: *Seja V um espaço com produto interno. Definimos a norma Euclidiana do vetor v de V , ou comprimento de v , por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.*

Definição 46. A **distância** entre dois vetores $u, v \in V$, $d(u, v)$, é definida como

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}.$$

Exemplo 28. Considerando $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, e o produto interno usual, temos que

$$u - v = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

Assim,

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definição 47. Vetores Ortogonais: Sejam V um espaço vetorial com produto interno e u, v vetores de V . Dizemos que u e v são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$.

Definição 48. Conjunto Ortogonal: Um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais.

Definição 49. Base Ortogonal: Uma base ortogonal de um espaço vetorial V é um conjunto B que além de ser base de V é ortogonal.

Proposição 24. Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos de V é linearmente independente.

Demonstração. Sejam V um espaço com produto interno e $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores ortogonais de V . Consideremos a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0.$$

Vamos mostrar que $a_i = 0, \forall 1 \leq i \leq r$. Fixe $1 \leq i \leq r$. Então,

$$\langle a_1v_1 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle = a_1\langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i\langle v_i, v_i \rangle + a_{i+1}\langle v_{i+1}, v_i \rangle + \dots + a_r\langle v_r, v_i \rangle = a_i\langle v_i, v_i \rangle, \quad (1.6)$$

já que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ sempre que $j \neq i$, por outro lado

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0. \quad (1.7)$$

De 1.6 e 1.7, segue que $a_i\langle v_i, v_i \rangle = 0$ e como v_i é um vetor não nulo, temos necessariamente que $a_i = 0$. Como i foi tomado de modo arbitrário em seu intervalo de variação, segue o resultado. \square

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, apresentado a seguir, garante que todo espaço vetorial V admite uma base ortogonal, uma vez que mostra como obter uma base ortogonal de um espaço vetorial V a partir de uma base qualquer.

Proposição 25. Processo de Gram-Schmidt - Existência de Bases Ortogonais: Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ em que

- $w_1 = v_1,$
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1,$
- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2,$
- \vdots
- $w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}$

é uma base ortogonal de V .

Demonstração. O conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal, pois $\langle w_i, w_j \rangle = 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$. Como o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (pois, é base de V), cada vetor w_i é não nulo. Logo, o conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V e, portanto, é um conjunto linearmente independente. Como $n = \dim V$, segue que $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V . \square

Se além de serem dois a dois ortogonais, os vetores do conjunto tiverem norma 1, o conjunto é chamado de conjunto ortonormal.

Uma vez que dado um vetor $v, v/\|v\|$ é um vetor de norma 1, todo conjunto ortogonal sempre pode ser ortonormalizado.

Definição 50. Complemento Ortogonal: *Sejam v um espaço vetorial com produto interno e G um subconjunto de V . O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a G é chamado complemento ortogonal de G e é denotado por G^\perp .*

Proposição 26. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e G um subconjunto de V , então G^\perp é um subespaço de V .*

Demonstração. Para provarmos que G^\perp é um subespaço de V devemos mostrar que (veja proposição 17),:

1. $0 \in G^\perp$;
2. Se $u, v \in G^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $u + \alpha v \in G^\perp$.

Assim,

1. O vetor nulo pertence a G^\perp pois $\langle 0, u \rangle = 0, \forall u \in G$;

2. Se $u, v \in G^\perp$ então $\langle u, g \rangle = 0$ e $\langle v, g \rangle = 0, \forall g \in G$. Logo,
 $\langle u + \alpha v, g \rangle = \langle u, g \rangle + \alpha \langle v, g \rangle = 0 + 0 = 0$ e, portanto, $u + \alpha v \in G^\perp$.

□

Proposição 27. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e G um subespaço de V , então $V = G \oplus G^\perp$.*

Demonstração. Para provarmos que $V = G \oplus G^\perp$ precisamos mostrar que,

1. $V = G + G^\perp$;
2. $G \cap G^\perp = \{0\}$.

1. Mostremos primeiramente que $V = G + G^\perp$.

Obviamente $G + G^\perp \subset V$. Por outro lado, se $y \in V$ e $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de G . Cabe lembrar que o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt nos garante que todo espaço vetorial admite bases ortogonais.

Considere

$$u = \sum_{i=1}^n \langle y, u_i \rangle u_i.$$

Note que $u \in G$, uma vez que é combinação linear dos u_i 's. Agora, como $y = u + (y - u)$, se mostrarmos que $y - u \in G^\perp$ a primeira parte da demonstração está concluída.

Considere agora $g \in G$. Utilizando as propriedades de produto interno, veja definição 44, e o fato de B ser base ortonormal, temos,

$$\begin{aligned} \langle y - u, g \rangle &= \langle y - \langle y, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle y, u_n \rangle u_n, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \rangle \\ &= \alpha_1 \langle y, u_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle y, u_n \rangle - \alpha_1 \langle y, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle - \dots - \alpha_n \langle y, u_1 \rangle \langle u_1, u_n \rangle \\ &\quad - \dots - \alpha_1 \langle y, u_n \rangle \langle u_n, u_1 \rangle - \dots - \alpha_n \langle y, u_n \rangle \langle u_n, u_n \rangle = \\ &= \alpha_1 \langle y, u_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle y, u_n \rangle - \alpha_1 \langle y, u_1 \rangle - \dots - \alpha_n \langle y, u_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

Logo $y - u \in G^\perp$.

2. Mostremos agora que $G \cap G^\perp = \{0\}$. É óbvio que $\{0\} \subset G \cap G^\perp$. Por outro lado, seja $g \in G \cap G^\perp$. Então, $g \in G$ e $g \in G^\perp$.

Como $\langle g, h \rangle = 0, \forall h \in G$. Em particular, $\langle g, g \rangle = 0$ e, portanto, pela definição de produto interno $g = 0$.

Assim, $G \cap G^\perp = \{0\}$ e podemos concluir que $V = G \oplus G^\perp$.

□

Proposição 28. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e G um subespaço de V . A decomposição $y = u + v$, com $u \in G$ e $v \in G^\perp$ é única.*

Demonstração. A demonstração desse resultado segue diretamente do fato de V ser soma direta de G com G^\perp . □

Teorema 1.2.8. *(Menor Distância) Sejam V um espaço vetorial com produto interno, G um subespaço de V e $y \in V$. Se $y = u + v$, com $u \in G$ e $v \in G^\perp$, então u é o elemento de G à menor distância de y .*

Demonstração. Seja $y \in V$ tal que $y = u + v$, com $u \in G$ e $v \in G^\perp$. Seja g um outro vetor qualquer de G . A distância de g a y , de acordo com a definição 46 é $d\langle g, y \rangle = \sqrt{\langle g - y, g - y \rangle}$.

Agora,

$$\begin{aligned} \langle g - y, g - y \rangle &= \langle g - u + u - y, g - u + u - y \rangle = \\ &= \langle g - u, g - u \rangle + \langle g - u, u - y \rangle + \langle u - y, g - u \rangle + \langle u - y, u - y \rangle = \\ &= \langle g - u, g - u \rangle + 2\langle g - u, u - y \rangle + \langle u - y, u - y \rangle. \end{aligned}$$

Como $g - u \in G$ e $u - y \in G^\perp$ temos $\langle g - u, u - y \rangle = 0$ e, portanto,

$$\langle g - y, g - y \rangle = \langle g - u, g - u \rangle + \langle u - y, u - y \rangle.$$

Temos também que $\langle g - u, g - u \rangle > 0$ e, portanto, $\langle g - y, g - y \rangle > \langle u - y, u - y \rangle$, ou seja,

$$d\langle g, y \rangle^2 > d\langle u, y \rangle^2 \text{ e conseqüentemente } d\langle g, y \rangle > d\langle u, y \rangle.$$

□

1.3 Matriz Hessiana e a relação entre formas quadráticas e pontos críticos

1.3.1 Matriz Hessiana e Pontos Críticos

Definição 51. Gradiente de f : Seja $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , e P um ponto interior de F . Chamamos de gradiente de uma função f a matriz, $n \times 1$, formada pelas derivadas parciais de f no ponto P , isto é,

$$D_f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}.$$

Definição 52. Ponto Crítico: Seja $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e P um ponto interior de F . P é um ponto crítico de f se $D_f(P) = 0$, ou, se D_f não está definida em P .

Definição 53. Matriz Hessiana: Seja $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e P um ponto interior de F . Chamamos matriz Hessiana de uma função f , de classe C^2 , num ponto P , a matriz simétrica formada pelas derivadas de segunda ordem de f no ponto P ,

$$D_f^2(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 29. Dada a função $f(x) = 3x^5y^4 + 4x^4y^3$, suas derivadas de parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^4y^4 + 16x^3y^3 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^5y^3 + 12x^4y^2.$$

E, suas derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 60x^3y^4 + 48x^2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 60x^4y^3 + 48x^3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36x^5y^2 + 24x^4y.$$

Portanto, o gradiente de f é,

$$D_f(x, y) = \begin{bmatrix} 15x^4y^4 + 16x^3y^3 \\ 12x^5y^3 + 12x^4y^2 \end{bmatrix}.$$

E a matriz hessiana é,

$$D_f^2(x, y) = \begin{bmatrix} 60x^3y^4 + 48x^2y^3 & 60x^4y^3 + 48x^3y^2 \\ 60x^4y^3 + 48x^3y^2 & 36x^5y^2 + 24x^4y \end{bmatrix}.$$

Como esperado, essa matriz é simétrica.

Definição 54. Considere uma função $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in F \subset F$, dizemos que:

- p é um **ponto de máximo local** de f em F se existe uma bola aberta $B_r(p)$ de centro p e raio r tal que $f(x) \leq f(p) \forall x \in B_r(p) \cap F$;
- p é um **ponto de mínimo local** de f em F se existe uma bola aberta $B_r(p)$ de centro p e raio r tal que $f(x) \geq f(p) \forall x \in B_r(p) \cap F$;
- p é um **ponto de sela** se é um ponto crítico que não é ponto de máximo ou mínimo.

1.3.2 Relação entre formas quadráticas e pontos críticos

Teorema 1.3.1. (Polinômio de Taylor de ordem 2) Seja a função $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e p um ponto do interior de F . Então, existe um único polinômio p_2 , de grau 2, de n variáveis que satisfaz as condições,

$$p_2(p) = f(p), \quad D_f(p) = D_{p_2}(p) \quad e \quad D_f^2(p) = D_{p_2}^2(p)$$

de modo que

$$p_2(x) = f(p) + D_f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^T D_f^2(p)(x - p)$$

em que $D_f(p)$ é o gradiente da função f em p e $D_f^2(p)$ é a matriz Hessiana de f no ponto p .

Vale que

$$f(x) = p_2(x) + R_2(p, x)$$

em que $R_2(p, x)$ é o erro e satisfaz a propriedade,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R_2(p, x)}{\|x - p\|^2} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - p_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0.$$

Isto é, o erro $R_2(p, x)$ vai para zero mais rapidamente do que o quadrado da distância entre p e x .

A demonstração pode ser encontrada em Marcon (2018, p. 10).

Na sequência apresentamos um teorema que relaciona a positividade da forma quadrática relacionada a matriz Hessiana de uma função f com os pontos de mínimo dessa função.

Teorema 1.3.2. (*Mínimo Local*) *Considere uma função $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 e p um ponto crítico de f . Se a matriz Hessiana desse ponto p é positiva definida, então p é um ponto de mínimo local de f .*

Demonstração. Para provar, vamos nos valer da aproximação oferecida pelo polinômio de Taylor de segunda ordem,

$$f(x) = f(p) + D_f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(x - p)^T D_f^2(p)(x - p) + R_2(p, x)$$

Como p é um ponto crítico de f , então $D_f(p) = 0$ e assim,

$$f(x) = f(p) + \frac{1}{2} \cdot (x - p)^T \cdot D_f^2 f(p) \cdot (x - p) + R_2(p, x).$$

Considerando que o erro $R_2(p, x)$ tende à zero quando x tende a p e utilizando a variável $h = x - p$, que representa o deslocamento em relação ao ponto p , concluímos que

$$f(p + h) \approx f(p) + \frac{1}{2} h^T D_f^2(p) h,$$

$$f(p + h) - f(p) \approx \frac{1}{2} h^T D_f^2(p) h.$$

Observemos que o lado direito da expressão corresponde à forma quadrática da matriz Hessiana de f no ponto p . Assim, se $D_f^2(p)$ é positiva definida, então $\frac{1}{2} \cdot h^T \cdot D_f^2(p) \cdot h > 0$, $\forall h \neq 0$. Assim, $f(p + h) - f(p) > 0$, ou ainda,

$$f(p + h) > f(p), \forall h \neq 0.$$

Desta maneira, p é um ponto de mínimo local de f . □

Capítulo 2

Método dos Mínimos Quadrados

Quando se trata de descrever o comportamento de um experimento ou uma situação real que possa ser mensurada por meio de dados coletados em intervalos regulares, podemos nos valer de instrumentos matemáticos, tais como, funções aproximadoras, que mostram a evolução desses experimentos ou situações reais e nos ajudam a entendê-los. Nesse campo, podemos lançar mão de métodos de aproximação ou de interpolação, tais como, Interpolação Linear, Interpolação Quadrática, Método dos Mínimos Quadrados e o Método da Máxima Verossimilhança, além de outros métodos de ajuste de curvas. Goes (2017) utilizou os Métodos da Máxima Verossimilhança, da Interpolação, o Método dos Mínimos Quadrados, *B-Splines* acoplado ao Método dos Mínimos Quadrados e *B-Splines* acoplado ao Método da Máxima Verossimilhança na formação de imagens digitais, e concluiu que as curvas geradas a partir das formas polinomiais são bastante semelhantes apesar das diferenças observadas em cada método. Para determinar o melhor ajuste recorreu ao estudo do erro gerado pela função aproximadora. Silva (2017), fez um estudo sobre a influência do protetor solar no tempo de exposição ao sol usando o Método dos Mínimos Quadrados para entender o comportamento dos dados e fazer projeções. O Método dos Mínimos Quadrados, objeto de estudo deste trabalho, é um método de aproximação utilizado para situações em que o experimento (estudo, observação, dados) leva a um problema sobredeterminado, isto é, existem muitas informações para poucas variáveis, e estas estão dispersas, não obedecendo a um critério rigoroso que gere uma curva perfeita para mostrar a solução esperada. Ou, ainda, quando há a necessidade de extrapolar um resultado, isto é, fazer uma previsão ou estimativa futura. Além das funções aproximadoras polinomiais, sendo que a de grau 1 recebe o nome de Regressão Linear e é amplamente utilizada na Estatística, o método pode gerar funções aproximadoras exponenciais, logarítmicas, entre outras. Pode, ainda, ser utilizado para estudar curvas expressas por funções, em que as derivadas ou integrais são muito complexas ou demandam muito tempo para sua determinação, por meio de uma função mais simples.

Esse último caso não será objeto de estudo. Neste capítulo apresentaremos o Método dos Mínimos Quadrados e no capítulo 3 serão disponibilizados alguns exemplos práticos que podem ser discutidos e trabalhados em sala de aula com os alunos do Ensino Médio.

Como o leitor irá observar no decorrer desse capítulo, antes de escolher qual a melhor função dentre uma determinada família de funções (afim, polinomial, logarítmica ou exponencial) é a melhor para aproximar um conjunto de dados, devemos escolher qual é a família de funções que iremos utilizar.

A **escolha dessa família de funções**, geralmente, se dá pela visualização dos pontos no plano cartesiano por informações prévias a respeito do experimento, ou ainda, algum outro tipo de conhecimento a respeito do fenômeno a ser estudado (Ruggiero, 2000, p. 269), por exemplo, se ele trata de análise de velocidade, já sabemos previamente que as funções do tipo lineares são as mais indicadas; no caso do crescimento bacteriano sabemos que a função aproximadora mais indicada é a exponencial.

2.1 Caso Discreto

Dado um conjunto de pontos aleatórios (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$, o Método dos Mínimos Quadrados, caso discreto, não procura uma função que passe exatamente por estes pontos, mas que passe o mais próximo possível deles, minimizando o erro entre os valores observados e os fornecidos pela função aproximadora, isto é, o Método dos Mínimos Quadrados, fará com que obtenhamos uma função $\psi(x)$ que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre y_i e $\psi(x_i)$, fazendo com que a função assuma a melhor aproximação para os dados disponíveis. Cabe observar que as diferenças $y_i - \psi(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, são tomadas ao quadrado para não correremos o risco de uma diferença anular outra. A raiz quadrada da soma do quadrado dessas diferenças, entre os pontos observados e a curva aproximadora, é chamada de Erro Quadrático Mínimo, que será estudado no final da seção. Porém, não é a única forma de avaliar a curva aproximadora produzida. A Estatística, por exemplo, se vale de outro método, o r^2 , que não será objeto de estudo dessa dissertação.

2.1.1 Regressão Linear

Quando a função ψ escolhida para aproximar o conjunto de pontos observados é uma função afim, isto é, $\psi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, o método dos mínimos quadrados é conhecido como Regressão Linear. A Tabela 2.1 traz dados aleatórios para darmos início ao processo que gerará uma função aproximadora pelo Método dos Mínimos Quadrados. A Regressão Linear é uma ferramenta utilizada por estatísticos para interpretar os dados coletados,

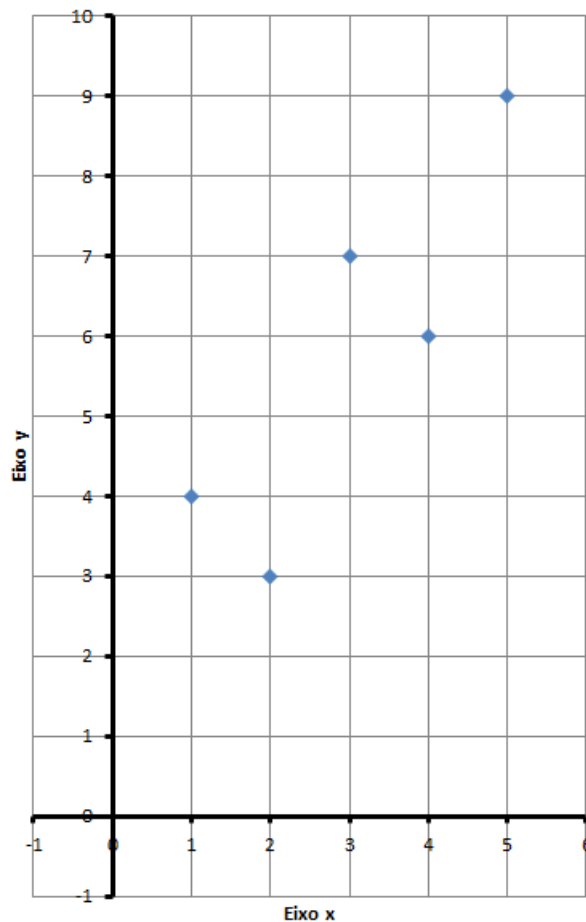
verificar se eles têm uma forte relação linear entre si e, em caso afirmativo, por meio da função tentar entender e projetar futuras interações produzidas pelos dados observados inicialmente. Observando a Figura 2.1, se decidirmos trabalhar com Regressão Linear, a pergunta é: Dentre todas as retas possíveis, qual melhor se aproxima desses pontos? Cabe ressaltar que entendemos por *melhor reta* aquela que minimiza os erros em relação aos dados observados.

Tabela 2.1: Pontos tomados ao acaso para o estudo de Regressão Linear

x_i	y_i
1	4
2	3
3	7
4	6
5	9

Fonte: proposto pelo autor.

Figura 2.1: Plotagem dos dados da Tabela 2.1

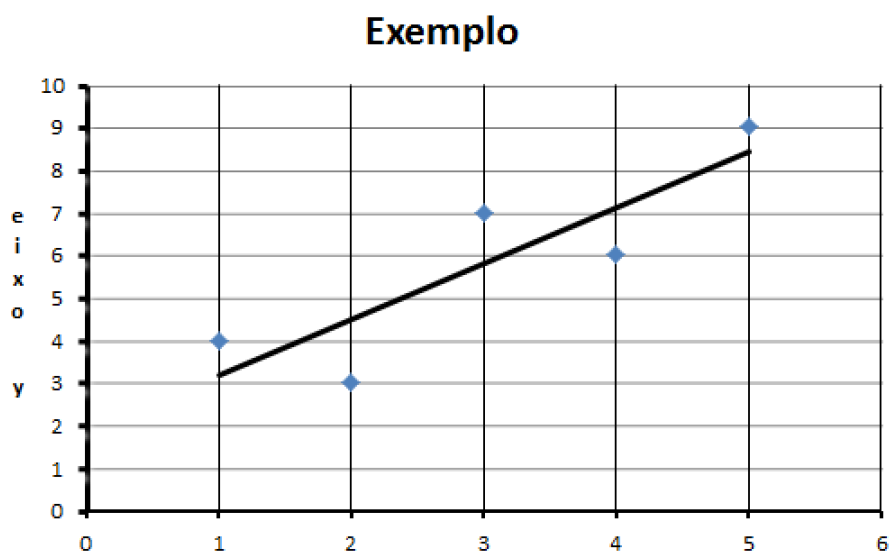


Fonte: Elaborado pelo autor a partir do Software Excel da Microsoft.

No programa Excel é possível acrescentar a Linha de Tendência ao Gráfico (veja a Figura 2.2), essa linha é uma aproximação gerada pelo programa utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. No programa, a linha de tendência pode ser de vários tipos, tais como: linear, polinomial, exponencial, logarítmica, as quais apresentaremos neste trabalho. A escolha do tipo da função aproximadora será discutida na seção 2.

A Linha de Tendência Linear é usada para avaliar se existe uma relação linear entre duas variáveis.

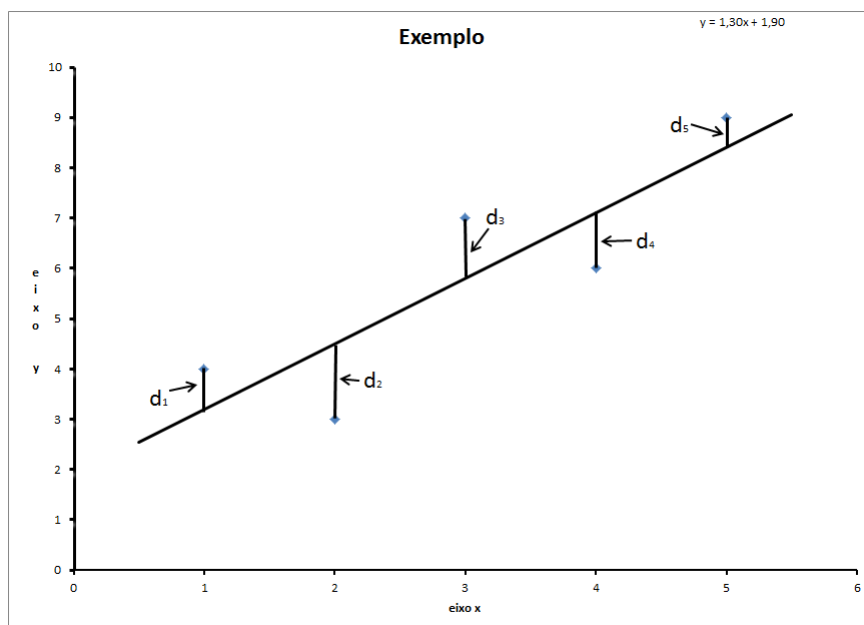
Figura 2.2: Inserção da Linha de Tendência Linear pelo Excel



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do Software Excel da Microsoft.

A Figura 2.3 mostra as diferenças entre os pontos e a reta aproximadora e, também, a expressão da função de regressão linear calculada pelo Excel para os dados apresentados na Tabela 2.1.

Figura 2.3: Diferenças (d_i) entre a posição observada e a posição fornecida pela linha de tendência



Fonte: Elaborado pelo autor a partir do Software Excel da Microsoft.

Observe que ao representar os pontos pela linha de tendência, surge uma diferença entre a posição do ponto (x_i, y_i) e o valor de $\psi(x_i)$, identificado no gráfico pelos segmentos d_i , com $i = 1, 2, \dots, n$. Essas diferenças, representadas pelos segmentos, serão utilizadas para avaliar a função aproximadora, e serão tratadas como um erro na aproximação. Para avaliar esse erro cometido na aproximação serão apresentados, na seção 2.2, o cálculo do Erro Quadrático Mínimo, bem como exemplos de aplicação.

Como já dissemos anteriormente, sejam n pontos do Plano Cartesiano, $i = 1, 2, \dots, n$, e $y = \psi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$, a reta aproximadora que queremos determinar. Uma vez que conhecemos os valores $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, obtidos no experimento ou estudo de caso, teremos que determinar os valores para α_1 e α_2 que minimizam a soma dos quadrados das distâncias exemplificadas na Figura 2.3, isto é, minimizam $S = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \psi(x_i))^2$, e que conseqüentemente determinam a reta que mais se aproxima de todos os pontos.

Assim, para escolher a reta aproximadora devemos encontrar α_1 e α_2 que minimizam

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i]^2. \quad (2.1)$$

Para encontrar o mínimo de S , precisamos encontrar o(s) ponto(s) crítico(s) dessa função e verificar qual(is) desse(s) ponto(s) crítico(s) é ponto de mínimo. Para determinar o(os) ponto(s) crítico(s) devemos derivar S em relação a α_1 e α_2 (veja as

regras de derivação na seção 1.1.2) e igualar essas derivadas a zero, obtendo

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_2} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)(-x_i) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_2 x_i &= 0 \\ - \sum_{i=1}^n y_i x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_1 x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_2 (x_i)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Isolando as variáveis no primeiro membro dessas equações, chegamos ao sistema linear nas variáveis α_1 e α_2 , conhecido como Sistema Normal

$$\begin{cases} \alpha_1 n + \alpha_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases}.$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Provaremos a seguir que $\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} \neq 0$, logo o sistema possui solução

única. Assim, temos um único ponto crítico e ele é mínimo.

De fato, tomando um conjunto de pontos (x_i, y_i) , com $i = 1, 2, \dots, n$, $x_i \neq x_j$,

e

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right).$$

Agora,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) + \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - 2x_i \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{n}. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Se $x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0$, então $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = nx_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, o que

não ocorre, pois, se $i \neq j$ então $x_i \neq x_j$ logo $\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Resta provar que o único ponto crítico de S é ponto de mínimo. Para isso, precisamos olhar para a matriz Hessiana (H) de S e mostrar que H é positiva definida, veja Teorema 1.3.1.

$$H = \begin{bmatrix} 2n & 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}.$$

A fim de verificar a positividade de H , olhemos para seus menores principais líderes:

$$H_1 = 2n > 0;$$

$$H_2 = H = \begin{vmatrix} 2n & 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4n^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right) > 0,$$

conforme já observado na Equação (2.3).

Assim, todos os menores principais líderes de S são positivos e, portanto, pelo Teorema 1.2.5 a matriz é positiva definida como queríamos demonstrar.

Para exemplificar, vamos encontrar a reta que melhor aproxima os pontos da Tabela 2.1. Para determinar a equação, manualmente, é prático usar um quadro ou uma tabela para agilizar os cálculos. A Tabela 2.2 apresenta os dados tabulados.

Tabela 2.2: Cálculos preliminares da Regressão Linear

x	y	xy	x^2
1	4	4	1
2	3	6	4
3	7	21	9
4	6	24	16
5	9	45	25
<hr/>			
$\Sigma x_i = 15$	$\Sigma y_i = 29$	$\Sigma x_i y_i = 100$	$\Sigma x_i^2 = 55$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, nesse exemplo o sistema (2.2) é dado por

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Ou equivalente

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 15\alpha_2 = 29 \\ 15\alpha_1 + 55\alpha_2 = 100 \end{cases} \quad (2.4)$$

Resolvendo o sistema encontramos $\alpha_1 = \frac{19}{10}$ e $\alpha_2 = \frac{13}{10}$.

Temos, então, que a função linear que melhor se aproxima dos pontos dados é $f(x) = 1,9 + 1,3x$.

Observações:

Observação 6. A partir da Equação (2.2) temos

$$\alpha_1 n + \alpha_2 \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k \quad e \quad (2.5)$$

$$\alpha_1 \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k x_k. \quad (2.6)$$

De 2.5 segue que

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n} - \alpha_2 \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \Rightarrow \alpha_1 = \bar{y} - \alpha_2 \bar{x} \quad (2.7)$$

em que \bar{y} e \bar{x} são as médias aritméticas de y_k e x_k , $k = 1, \dots, n$, respectivamente.

Substituindo na Equação (2.6) encontramos

$$\begin{aligned} (\bar{y} - \alpha_2 \bar{x}) \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k - \alpha_2 \bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \alpha_2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - \alpha_2 \bar{x} \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n y_k x_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k \\ \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x} \sum_{k=1}^n x_k \right) &= \sum_{k=1}^n y_k x_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k \\ \alpha_2 &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k x_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x} \sum_{k=1}^n x_k}. \end{aligned}$$

Substituindo \bar{x} e \bar{y} chegamos a

$$\alpha_2 = \frac{\sum_{k=1}^n y_k x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n x_k}.$$

Multiplicando numerador e denominador por n obtemos

$$\alpha_2 = \frac{n \sum_{k=1}^n y_k x_k - \sum_{k=1}^n y_k \sum_{k=1}^n x_k}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}. \quad (2.8)$$

De um modo geral, os Livros de Estatística - por exemplo, Crespo (1996) e Oliveira (2013) - trazem as fórmulas (2.7) e (2.8) prontas para o cálculo da Linha de Regressão Linear $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$ e fazem referência que elas são baseadas no Método dos Mínimos Quadrados.

Para determinar a equação, esses livros recomendam usar um quadro ou tabela para agilizar os cálculos. Do mesmo modo que fizemos com a construção da Tabela 2.2 que traz os dados já tabulados.

Observação 7. Outro método prático para chegarmos ao sistema normal é substituir os pontos observados na equação $y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, de forma a obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1 = y_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_2 = y_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_n = y_n \end{cases}.$$

Na forma matricial temos

$$AX = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Multiplicando ambos os lados por A^t , temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Após resolver a multiplicação, obtemos o sistema normal

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}.$$

Um exemplo de resolução pode ser visto em Zanardini (2018).

2.1.2 Caso Polinomial

Se o objetivo for aproximar os n pontos amostrais (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, por uma função polinomial de grau m , $2 \leq m < n$, seguimos o mesmo procedimento adotado na regressão linear, isto é, minimizar soma do quadrado das distâncias entre y_i e $\psi(x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ de modo que a função aproximadora assuma a melhor aproximação para os pontos dados. Isto é, queremos minimizar $S = \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2 - \dots - \alpha_n x_i^n]^2$.

Derivando S em relação $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ e igualando essas derivadas a zero, temos o sistema $AX = B$, em que,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} & \sum_{i=1}^n x_i^{m+3} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^3 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear $AX = B$ encontramos os candidatos a ponto de mínimo. Mas, ainda temos duas perguntas a responder: Assim como na regressão linear, esse sistema sempre tem solução única? A solução deste sistema é ponto de mínimo? Com o objetivo de responder a estas questões notemos que

Observação 8. A matriz A do sistema 2.9 pode ser escrita como

$$A = M^t M, \quad (2.10)$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}.$$

Se $m + 1 = n$, temos que $\det A = \det(M^t M) = \det M^t \det M = (\det M)^2$. Logo $\det A \geq 0$.

Notemos ainda que a matriz M é uma matriz de Vandermonde com $x_i \neq x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, logo $\det M \neq 0$ e conseqüentemente $\det A > 0$ e o sistema $AX = B$ com A dada na Equação (2.9) possui solução única.

Com o objetivo de mostrar que a solução do sistema $AX = B$ é um ponto de mínimo, vamos calcular a Hessiana, H , de A . Voltando às derivadas parciais de S em relação a α_i , $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \alpha_0} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \cdots - \alpha_m \cdot x_i^m)(-1) \\ \frac{\delta S}{\delta \alpha_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \cdots - \alpha_m \cdot x_i^m)(-x_i) \\ &\vdots \\ \frac{\delta S}{\delta \alpha_m} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \cdots - \alpha_m \cdot x_i^m)(-x_i^m). \end{aligned}$$

Obtemos

$$H = \begin{bmatrix} 2n & 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & 2 \sum_{i=1}^n x_i^m \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \sum_{i=1}^n x_i^3 & \cdots & 2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i^m & 2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & 2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} & \cdots & 2 \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix} = 2A,$$

em que A é a matriz dada na Equação (2.9).

Olhemos, agora, para os menores principais líderes de H :

$$H_1 = 2n > 0; \quad H_2 = 2^2 \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix};$$

$$H_3 = 2^3 \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{vmatrix}; \dots; H_m = 2^m A.$$

De forma análoga ao constatado na Equação (2.3), podemos concluir que $H_2 > 0$, $H_3 > 0, \dots$, $H_m > 0$. Assim, todos os menores principais líderes de H são positivos e portanto pelos Teoremas 1.2.5 e 1.3.1 a única solução do sistema normal é ponto de mínimo.

Agora, se n for diferente $m + 1$ (o que na prática é o que ocorre, em geral o número de pontos é bem maior que o grau do polinômio), o argumento anterior não pode ser utilizado, uma vez que não podemos calcular o determinante da matriz não quadrada M .

Neste caso, a prova de que o sistema tem solução única e que esta solução é um ponto de mínimo, o que de fato ocorre, fica bem complicada utilizando o argumento que a matriz Hessiana é positiva definida e vamos, portanto, justificar este fato utilizando os argumentos de complemento ortogonal que apresentaremos na seção 2.1.3.

Assim, se queremos aproximar os dados por um polinômio de grau 2 o Sistema Normal que devemos resolver é dado por

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Para exemplificar, vamos encontrar o polinômio de grau 2 que melhor se ajusta aos dados apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.3: Cálculos preliminares para o ajuste por uma Função Polinomial de grau 2

x	y	xy	x^2	x^3	x^4	x^2y
1	4	4	1	1	1	4
2	3	6	4	8	16	12
3	7	21	9	27	81	63
4	6	24	16	64	256	96
5	9	45	25	125	625	225
$\Sigma x_i = 15$	$\Sigma y_i = 29$	$\Sigma x_i y_i = 100$	$\Sigma x_i^2 = 55$	$\Sigma x_i^3 = 225$	$\Sigma x_i^4 = 979$	$\Sigma x_i^2 y_i = 400$

Fonte: Elaborado pelo autor.

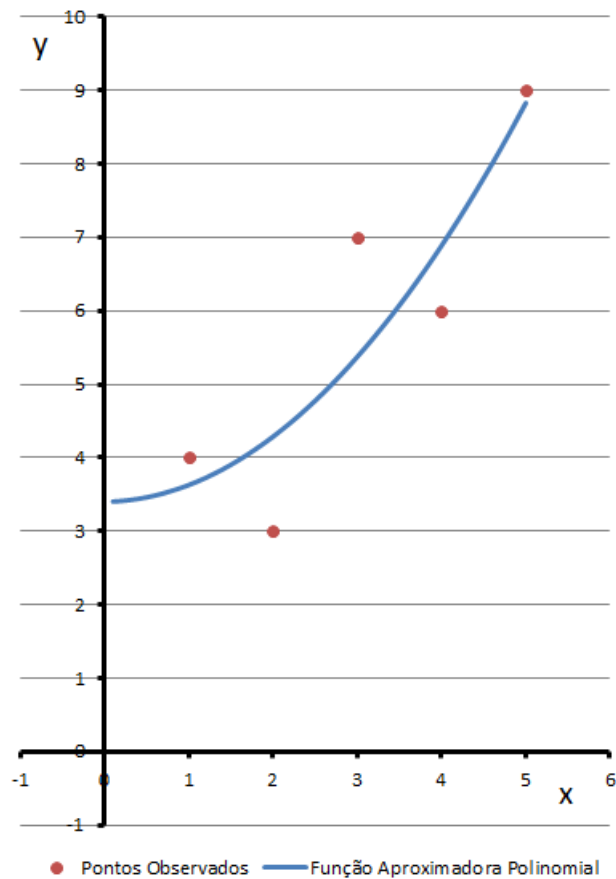
O sistema linear, dado pela Equação (2.11), é mostrado em (2.12):

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 100 \\ 400 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Resolvendo o sistema linear, encontramos, $\alpha_0 = \frac{17}{5}$, $\alpha_1 = \frac{1}{70}$ e $\alpha_2 = \frac{3}{14}$ e portanto o polinômio de grau 2, que melhor se aproxima dos dados é

$$P(x) = \frac{17}{5} + \frac{1}{70}x + \frac{3}{14}x^2.$$

Figura 2.4: Gráfico da Função Aproximadora para a Tabela 2.1



Fonte: Próprio autor utilizando software Excel da Microsoft.

2.1.3 Caso Geral Linear

De um modo geral, devemos escolher m funções g_1, g_2, \dots, g_m , $m \leq n$, linearmente independentes, contínuas no intervalo $[x_1, x_n]$, e encontrar m constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, tais que, $\psi(x_i) = \alpha_1 g_1(x_i) + \alpha_2 g_2(x_i) + \dots + \alpha_m g_m(x_i)$, se aproxime ao máximo y_i .

Por exemplo, se o diagrama de dispersão sugerir que a curva que melhor se aproxima dos pontos observados é um polinômio de grau m , as funções são $g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2, \dots, g_{m+1} = x^m$.

Escolhendo $\psi(x_i) = \alpha_1 g_1(x_i) + \alpha_2 g_2(x_i) + \dots + \alpha_m g_m(x_i)$ nosso objetivo é determinar as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, que minimizam

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \psi(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^m [y_i - \alpha_1 g_1(x_i) - \alpha_2 g_2(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i)]^2. \quad (2.13)$$

Para determinar os pontos mínimos de S , devemos derivar S em relação a cada um dos α_m procurados e igualar essas derivadas a 0 (zero), obtendo

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i))(-g_1(x_i)) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_2} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i))(-g_2(x_i)) = 0$$

⋮

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_m} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_m g_m(x_i))(-g_m(x_i)) = 0.$$

Assim,

$$- \sum_{i=1}^n y_i g_1(x_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_1(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_1(x_i)) = 0$$

$$- \sum_{i=1}^n y_i g_2(x_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_2(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_2(x_i)) = 0$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ - \sum_{i=1}^n y_i g_m(x_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_m(x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_m(x_i)) &= 0. \end{aligned}$$

Isolando as variáveis no primeiro membro dessas equações obtemos o sistema linear nas variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_1(x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_1(x_i)) &= \sum_{i=1}^n y_i g_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_2(x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_2(x_i)) &= \sum_{i=1}^n y_i g_2(x_i) \\ & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_1 g_1(x_i) g_m(x_i) + \cdots + \sum_{i=1}^n \alpha_m g_m(x_i) (g_m(x_i)) &= \sum_{i=1}^n y_i g_m(x_i). \end{aligned}$$

Na forma matricial temos o sistema dado por $AX = B$, em que

$$A = \begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_m \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_2, g_m \rangle \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_m, g_1 \rangle & \langle g_m, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_m, g_m \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \langle g_1, y \rangle \\ \langle g_2, y \rangle \\ \vdots \\ \langle g_m, y \rangle \end{bmatrix}.$$

$g_l = (g_l(x_1), g_l(x_2), \dots, g_l(x_n))$, com $l = 1, 2, \dots, m$, e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Resolvendo esse sistema linear encontramos as m constantes que o problema requer. Cabe ressaltar que minimizar a função S é encontrar uma função $f(x) = \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_m g_m(x)$, isto é, uma f que pertence ao espaço gerado $\langle g_1, g_2, \dots, g_m \rangle$, que minimiza a distância até o vetor y . Considerando $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$, temos pelo Teorema da Menor Distância (1.2.8) que existe um único elemento $f \in G$ que minimiza a distância ao ponto y , isto é, existe uma única $f(x) = \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_m g_m(x)$ que é ponto de mínimo da função S . Como os vetores g_1, g_2, \dots, g_m são linearmente independentes, f é escrita de maneira única como combinação de g_1, g_2, \dots, g_m , e, portanto, existe um único conjunto de parâmetros $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, solução do sistema, que fornece a solução do problema.

Observação 9. Sejam n o número de pontos dados e m o número de funções no ajuste. Para que a solução do problema seja única devemos ter m vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n , o que é impossível se $n < m$. Logo, para que o problema tenha solução única, o número de funções utilizadas no ajuste (m) deve ser menor ou igual ao número de pontos amostrados, como citado no início. Esta exigência está longe de ser um problema, uma vez que o número de pontos amostrados, em geral é bem grande.

Observação 10. E, no caso particular do ajuste polinomial, a solução é única? Pelo que já foi observado anteriormente, para que a solução seja única o conjunto $\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_m\}$ deve ser linearmente independente.

Lembremos que $g_l = (g_l(x_1), g_l(x_2), \dots, g_l(x_n))$, com $l = 1, \dots, m$, e que no caso do ajuste polinomial $g_1(x) = 1$ para qualquer x ; $g_2(x) = x, \dots, g_m(x) = x^{(m-1)}$. Considere M a matriz cujas linhas são esses vetores, isto é,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(m-1)} & x_2^{(m-1)} & \cdots & x_n^{(m-1)} \end{bmatrix}.$$

1. Se $m = n$, M é uma matriz de Vandermonde e, portanto, $\det M$ é diferente de zero, conseqüentemente os vetores são linearmente independentes.
2. Se m é diferente de n , ($m < n$), $L = 1, x, x^2, \dots, x^{(m-1)}$ é um subconjunto de $Z = 1, x, x^2, \dots, x^{(m-1)}, x^m, \dots, x^{(n-1)}$ e como Z é linearmente independente, L também é. Assim, no caso do ajuste polinomial o ponto que minimiza S existe e é único.

2.1.4 Caso Logarítmico

Para a **Função Aproximação Logarítmica**, usaremos as funções aproximadoras $g_1 = 1$ e $g_2 = \ln x$ e, portanto, a curva será dada por $\psi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln x$, aplicando na matriz 2.14 obtemos

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i & \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i (\ln x_i) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \sum_{i=1}^n 1 & + & \alpha_2 \sum_{i=1}^n \ln x_i & = & \sum_{i=1}^n y_i \\ \alpha_1 \sum_{i=1}^n \ln x_i & + & \alpha_2 \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 & = & \sum_{i=1}^n y_i (\ln x_i) \end{cases} . \quad (2.16)$$

Tabela 2.4: Cálculos preliminares para Função Aproximadora do Caso Logarítmico

x	$\ln x$	$(\ln x)^2$	y	$y \ln x$
1	0,00000	0,00000	4	0,00000
2	0,69314	0,48044	3	2,07942
3	1,09861	1,20694	7	7,69027
4	1,38629	1,92179	6	8,31774
5	1,60943	2,59026	9	14,48487
$\Sigma x_i =$	$\Sigma \ln x_i =$	$\Sigma (\ln x_i)^2 =$	$\Sigma y_i =$	$\Sigma y_i \ln x_i =$
15	4,78747	6,19943	29	32,57230

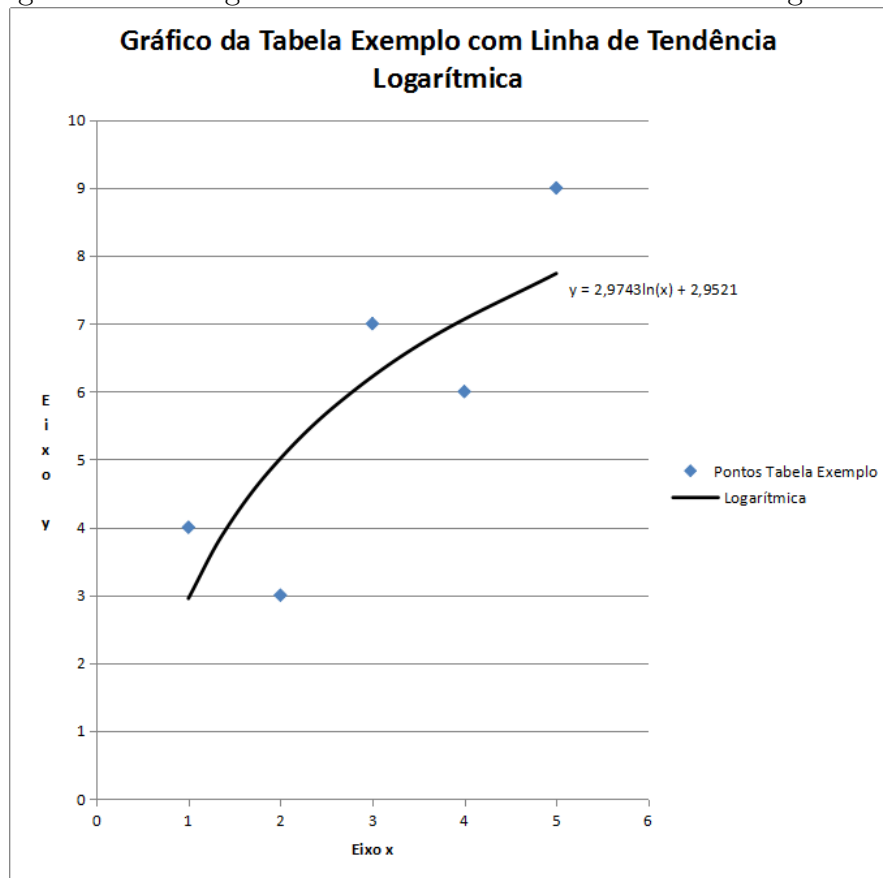
Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo os valores da tabela no sistema linear, obtemos:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 & + & 4,78747\alpha_2 & = & 29 \\ 4,78747\alpha_1 & + & 6,19943\alpha_2 & = & 32,57230 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $\alpha_1 = 2,95205$ e $\alpha_2 = 2,97437$. Na figura 2.5 podemos ver o gráfico da função aproximadora $\psi(x) = 2,97437 \ln x + 2,95205$.

Figura 2.5: Plotagem dos Pontos e Linha de Tendência Logarítmica



Fonte: Próprio autor utilizando software Excel da Microsoft.

2.1.5 Caso Exponencial - caso redutível a regressão linear

O objetivo desta seção é mostrar como fica o método dos mínimos quadrados quando desejamos aproximar o conjunto de pontos por uma função exponencial, isto é uma função do tipo $y = Ae^{BX}$. Com o objetivo de trabalhar com um sistema linear, facilitando assim nossos cálculos, vamos aplicar a função logaritmo natural (\ln) em ambos os lados da equação, obtendo $\ln y = \ln(Ae^{BX}) = \ln A + \ln(e^{BX}) = \ln A + Bx$. Assim nosso trabalho se resume a fazer uma regressão linear no conjunto de pontos $(x_i, \ln y_i)$.

Para exemplificar ajustaremos uma função exponencial aos dados apresentados na Tabela 2.1.

Pelo observado anteriormente devemos resolver o sistema linear,

$$\begin{cases} \alpha_1 \sum_{i=1}^n 1 + \alpha_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\ln y_i) x_i \end{cases} \quad (2.17)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \sum_{i=1}^n (\ln y_i) x_i \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

em que $\alpha_1 = \ln A$ e $\alpha_2 = B$.

Tabela 2.5: Cálculos preliminares para Função Aproximadora do Caso Exponencial

x	y	$\ln y$	$x \ln y$	x^2
1	4	1,38629	1,38629	1
2	3	1,09861	2,19722	4
3	7	1.94591	5,83773	9
4	6	1.79175	7,16703	16
5	9	2.19722	10,98612	25
$\Sigma x_i = 15$	$\Sigma y_i = 29$	$\Sigma \ln y_i = 8,41978$	$\Sigma x_i \ln y_i = 27,57439$	$\Sigma x_i^2 = 55$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo as informações obtidas na tabela 2.5 o sistema linear em questão fica:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 15\alpha_2 = 8,41978 \\ 15\alpha_1 + 55\alpha_2 = 27,57439 \end{cases} \quad (2.19)$$

Resolvendo o Sistema Linear, determinamos,

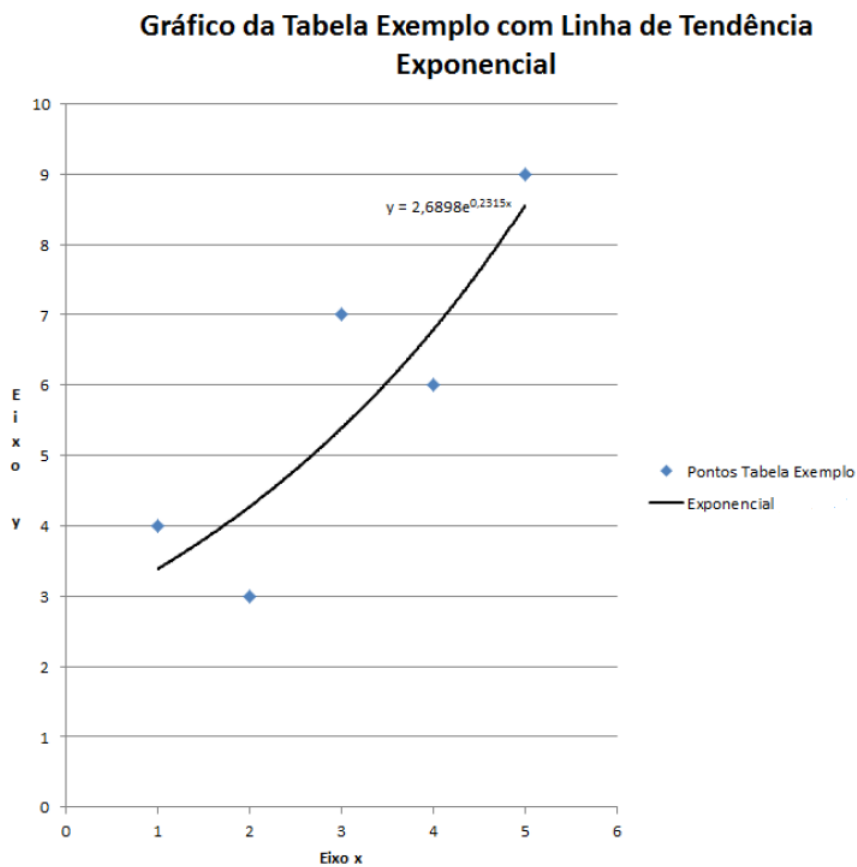
$$\alpha_1 = 0,98945 \quad \alpha_2 = 0,23150$$

Logo, $\ln A = 0,98945$, portanto, $A = e^{0,98945}$, isto é,

$$\psi(x) = e^{0,98945} e^{0,23150x} = e^{0,98945+0,23150x} \approx 2,6898e^{0,23150x}$$

O gráfico (Figura 2.6) mostra a plotagem dos pontos e a respectiva Linha de Tendência inserida e calculada pelo Excel.

Figura 2.6: Plotagem dos Pontos e Linha de Tendência Exponencial



Fonte: Próprio autor utilizando software Excel da Microsoft.

2.2 Erro Quadrático Mínimo

Como no método dos mínimos quadrados não é exigido que a função aproximadora passe pelos pontos observados, existe, a princípio, como já observado anteriormente uma diferença entre o valor observado (y_i) e o valor estimado pela função aproximadora $\psi(\psi(x_i))$. Para avaliar quão boa é a aproximação, usamos o Erro Quadrático, dado por $EQ = \sqrt{\sum_{k=1}^n [y_k - \psi(x_k)]^2}$. Quanto mais o erro se aproximar de zero, melhor a aproximação dada pela curva $\psi(x)$.

Para exemplificar, vamos calcular o Erro Quadrático cometido ao aproximar os dados da Tabela 2.1 pela funções Afim, Quadrática, Logarítmica e Exponencial. Lembremos que as Funções aproximadoras encontradas anteriormente são:

$$F_1(x) = 1,9 + 1,3x \text{ (regressão linear)}$$

$$F_2(x) = 0,21428x^2 + 0,01428x + 3,40000 \text{ (aproximação quadrática)}$$

$$F_3(x) = 2,6898e^{0,2315x} \text{ (aproximação exponencial)}$$

$$F_4(x) = 2,97437 \ln x + 2,95205 \text{ (aproximação logarítmica)}$$

Tabela 2.6: Cálculos dos Erros Quadráticos

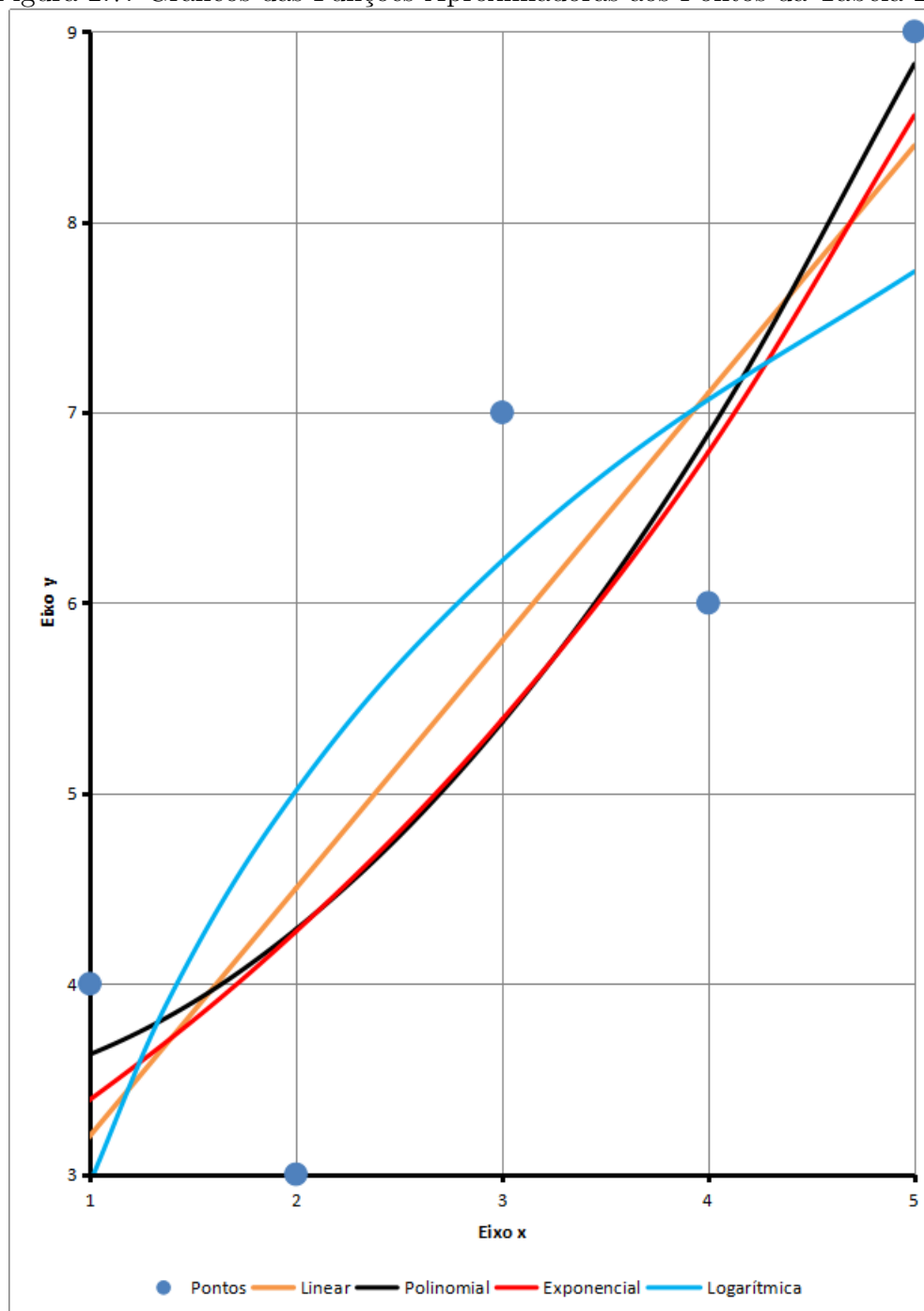
Valores Tabela			Valores de y				Erros Quadráticos			
Ponto	x	y	Afim	Quadrática	Exponencial	Logarítmica	$E(Afim)$	$E(Quad)$	$E(Exp)$	$E(Log)$
A	1	4	3,2	3,62856	3,39046	2,95205	0,64	0,13796	0,37153	1,09819
B	2	3	4,5	4,28568	4,27364	5,01372	2,25	1,65297	1,62215	4,05506
C	3	7	5,8	5,37136	5,38688	6,21972	1,44	2,65246	2,60215	0,60883
D	4	6	7,1	6,88560	6,79010	7,07540	1,21	0,78428	0,62425	1,15648
E	5	9	8,4	8,82840	8,55885	7,73911	0,36	0,02944	0,19461	1,58984
Somatório Erros Quadráticos							5,90	5,25714	5,41469	8,50840
Erro Quadrático							2,42	2,29284	2,32694	2,91691

Fonte: Elaborado pelo autor.

Isso nos diz que a melhor função aproximadora para os dados apresentados na tabela 2.1, entre as funções aproximadoras calculadas, foi a Polinomial de Grau 2 e a pior foi a Logarítmica.

É possível fazer uma avaliação visual dos gráficos das funções aproximadoras (Figura 2.7) e, após, a confirmação através de cálculo da curva que melhor minimiza a função S .

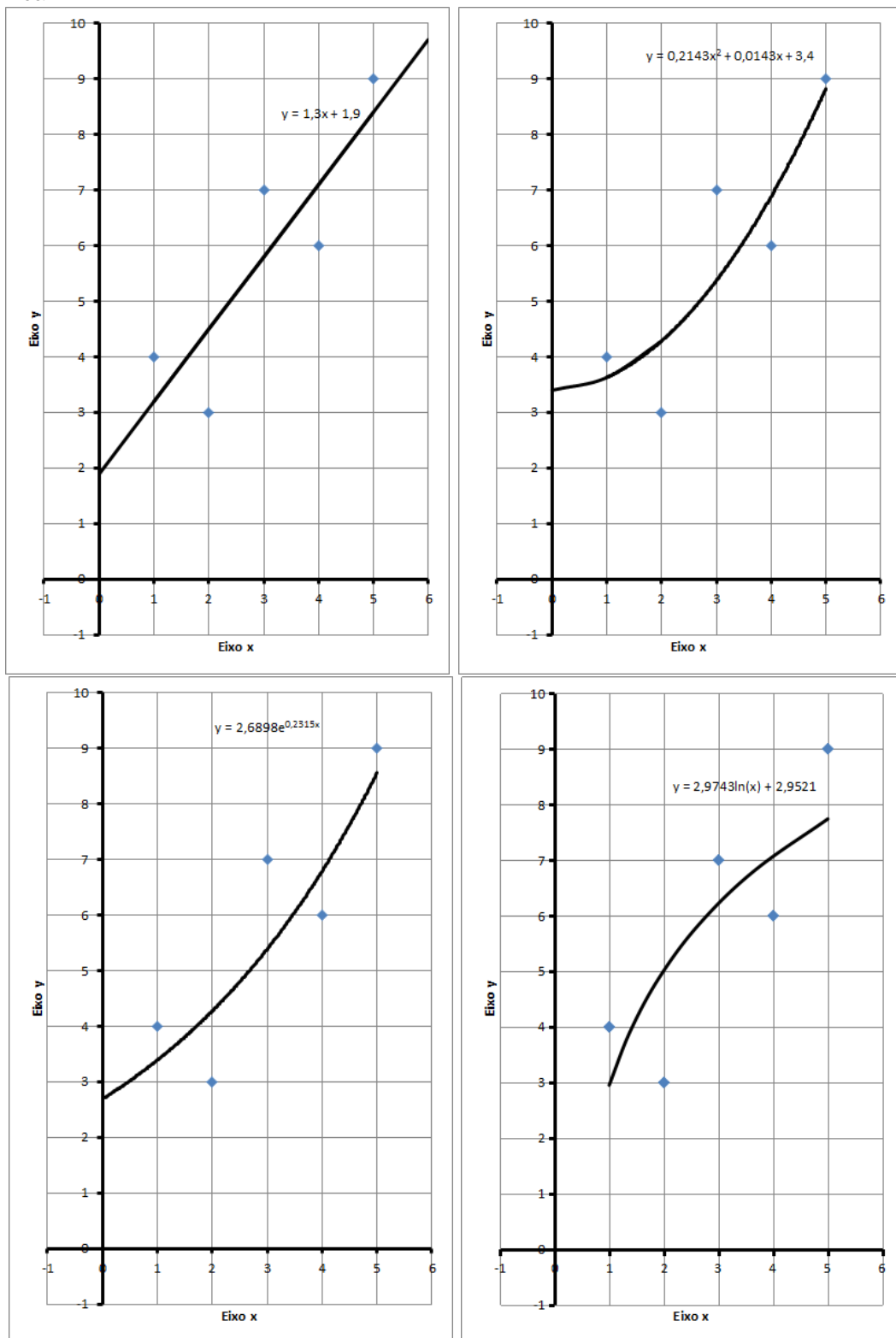
Figura 2.7: Gráficos das Funções Aproximadoras aos Pontos da Tabela 2.1



Fonte: Próprio autor utilizando software Excel da Microsoft.

Na sequência, apresentamos os gráficos das funções aproximadoras (Regressão Linear, Polinomial, Exponencial e Logarítmica) para os dados da Tabela 2.1 plotados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, porém individualizados, diferente de quando tratamos do erro quadrático em que as quatro funções aproximadoras foram plotadas num mesmo sistema cartesiano (Figura 2.7).

Figura 2.8: Gráficos das Funções Aproximadoras Linear, Polinomial, Exponencial e Logarítmica



Fonte: Próprio autor utilizando software Excel da Microsoft.

2.3 Método Mínimos Quadrados versus Interpolação Polinomial

Dados $n + 1$ pontos, a interpolação produzirá um polinômio de grau menor ou igual a n , uma vez que precisamos ter pelo menos n equações para resolver de forma determinada um sistema com n variáveis.

Dados $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$, pontos do Plano Cartesiano (pontos observados), diferente do que ocorre no método dos mínimos quadrados, na interpolação polinomial desejamos encontrar um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tal que $P(x_i) = y_i$.

$$\text{Assim, } \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} .$$

Note que ao escrever o Sistema Linear na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

a Matriz dos Coeficientes é uma Matriz de Vandermonde (1.4), formada pelos pontos observados.

O Teorema de Vandermonde (veja Seção 1.2.2) nos garante que o determinante desta matriz é diferente de zero uma vez que os elementos x_i , com $i = 0, 1, 2, \dots, n$, são distintos dois a dois, e portanto, o sistema linear tem solução única.

Vejamos o exemplo proposto por Brandão (2020) [10]. O autor propõe encontrar um polinômio que passe pelos pontos $A = (-2, -15)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 3)$, $D = (1, 0)$ e $E = (2, -3)$.

Neste exemplo, nosso trabalho se resume a resolver o Sistema Linear para esse problema que é expresso por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Resolvendo o sistema chegamos a $a_4 = 0$, $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = -1$ e $a_0 = 3$.

Portanto, nosso polinômio interpolador é $P(x) = 3 - x - 3x^2 + x^3$. Note que é um polinômio de grau 3, mesmo possuindo 5 pontos para a interpolação, isso aconteceu pois encontramos coeficiente de grau 4 (a_4) igual a zero.

Se nosso estudo está limitado aos dados coletados, a interpolação nos fornece uma ótima ferramenta de análise para o intervalo observado. Porém, esse método apresenta um problema: ele fornecerá um polinômio que passa exatamente pelos pontos dados. Se tivermos um conjunto de 5 pontos ele fornecerá um polinômio de grau 4 ou menor, mesmo que a posição desses pontos sugiram que uma reta ou uma função exponencial representariam melhor esse conjunto de pontos. Tornando, assim, o Método dos Mínimos Quadrados mais flexível quanto a função fornecida para análise do problema e confiável para previsões, tendências ou extrapolações ao intervalo das observações (RUGGIERO, 2000).

Capítulo 3

Aplicações

O objetivo deste Capítulo é mostrar alguns exemplos de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados. Embora os dados coletados digam respeito a duas áreas específicas da ciência, uma delas inclusive bem no topo do cenário mundial, nossa pretensão aqui tem cunho exclusivamente didático, ou seja, não pretendemos aqui apresentar um modelo a ser utilizado pela ciência, mas fornecer respostas para as perguntas que mais recaem sobre os Professores de Matemática:

Para que isso serve? Onde vou usar isso? Isso tem aplicação?

Essas aplicações que podem ser feitas em sala de aula, em cursos Técnicos ou em cursos regulares, numa abordagem multidisciplinar, dão subsídios para que o Método dos Mínimos Quadrados sirva de ponte com outros conteúdos ministrados no Ensino Médio: matrizes, funções, sistemas lineares e outros. E, para que os alunos também possam vislumbrar a presença de alguns tópicos tidos como puramente matemáticos na vida cotidiana. Esse capítulo apresenta, ainda, a exposição de exercícios propostos a partir de experimentos realizados e da coleta de dados divulgados através de aplicativos hospedados em sites da internet. A análise dos dados obtidos acaba por colocar o aluno em contato com a estatística e por consequência com softwares para elaboração de tabelas e gráficos como, por exemplo, o Excel de propriedade da empresa Microsoft ou o WPS Office cujo proprietário é a WPS. De acordo com o objetivo do professor, o aluno pode ser instigado a observar, a relatar e a analisar um fenômeno, é a experimentação em ação. O professor poderá levar seu aluno a pensar em como produzir o experimento, como organizar seus dados, como explicar para outros os efeitos de sua experiência. É um aprendizado duradouro, que, além das experiências com o conteúdo ministrado, deixa marcas no aprendizado do aluno no que diz respeito à multidisciplinaridade.

Neste trabalho apresentamos experimentos com germinação de sementes e análise de dados relacionados a COVID-19 na fase inicial em que a doença apareceu

na China e, posteriormente, no Brasil. A disposição desses dados sobre um plano cartesiano e as funções que melhor descrevem essa disposição nos ajuda a tomar decisões a respeito de fatos, como é o caso da pandemia de Sars-Covid-19

As sementes utilizadas nos experimentos foram retiradas de pacotes comuns de feijão e de alimentos para pássaros, adquiridas em supermercado, sem qualquer tratamento especial e sem a intenção de produzir conhecimento científico sobre germinação. Se o experimento for realizado de forma interdisciplinar, a compra das sementes não é obrigatória. Elas podem ser conseguidas com antecipação, seja o professor separando algumas sementes que utiliza em sua alimentação ou de seus animais de estimação, ou pedindo aos alunos, com certo prazo de antecedência. Temos vários filhos de agricultores e de comerciantes em nossas escolas públicas e privadas do Oeste do Paraná e é uma forma de inseri-los no processo. E isso não se restringe ao fato de trazer a semente, mas, também, de usar como disparador para uma pesquisa mais aprofundada. Num projeto interdisciplinar, os alunos poderiam pesquisar a origem da semente, seus formatos, similaridades, identificar a que grupo pertencem, se são comestíveis ou não. Isto envolveria professores de outras áreas e faria a diferença na condução de uma educação que preza por qualidade.

Sobre a pandemia de Sars-Covid-19, os dados foram utilizados para mostrar a função aproximadora em relação aos números oficiais divulgados, também sem a pretensão de apresentar um modelo que descreva a evolução dos números de infectados ou de mortos. Nesse caso, também ocorreram e ocorrem demoras na alimentação de dados por dificuldades técnicas, por erros sistêmicos ou por falha humana. Por isso, reiteramos que os cálculos aqui apresentados apenas mostrarão como os números se comportariam se não ocorressem interferências e se este modelo fosse o mais adequado. Cabe lembrar que esses dados são suscetíveis a alterações por parte das autoridades envolvidas no levantamento dos mesmos. Isso ocorre devido a exames em fase de conclusão e/ou verificação e outras causas que não são objeto de estudo desse trabalho. E, com o decorrer do tempo, cada ação tomada será refletida nos dados posteriores, sendo um parâmetro para verificar se a ação surtir o efeito desejado, se determinou a piora no estudo realizado ou se não interferiu no processo.

Cada proposta de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados será acompanhado de um texto explicativo do experimento e de exercícios elaborados a partir dessa proposta. De acordo com o que vimos no capítulo 2, para aplicar o Método dos Mínimos Quadrados será necessário que os alunos resolvam o Sistema Normal, e para chegar a esse sistema os alunos necessitaram efetuar algumas operações básicas: soma, multiplicação e potenciação. Além disso, o conhecimento prévio dos gráficos de funções afins, polinomiais, exponenciais e logarítmicas ajudará na escolha do tipo de função escolhida para efetuar o ajuste.

3.1 Aplicação 1: Germinação de Sementes

3.1.1 Descrição do experimento

O objetivo do experimento é observar o processo de germinação e desenvolvimento da semente de linhaça para coletar dados e aplicar o Método dos Mínimos Quadrados, determinando as Funções Aproximadoras, seus erros quadráticos e analisando os resultados obtidos.

Neste caso específico, o objetivo é acompanhar a evolução das sementes, 2 vezes ao dia, durante alguns dias. Na germinação, a radícula, que é a raiz embrionária, é a primeira estrutura a aparecer e terá seu desenvolvimento acompanhado. Em sala, o professor deverá conduzir o experimento de maneira que os dados sejam coletados num mesmo horário. Nesse ponto, o envolvimento de outros professores, num projeto interdisciplinar, pode colaborar com precisão dos dados.

No experimento, 18 sementes de linhaça foram depositadas individualmente numa forma de gelo, submersas na água (Fig. 3.1). O desenvolvimento foi acompanhado, diariamente, com observações às 6h e às 18h. Nove dessas sementes germinaram, no entanto, seis delas se desenvolveram pouco ou pararam o processo de germinação e foram descartadas. Às 18h do 6º dia, as três sementes restantes foram transferidas para outro recipiente com algodão embebido em água, para fixar as raízes (Fig. 3.2). Elas tiveram seu desenvolvimento acompanhado com medidas realizadas às 6h e às 18h, sendo que os caules foram notados às 18h do 7º dia e no 10º dia as raízes cessaram o crescimento. Os dados relativos ao crescimento das raízes e caules estão transcritos nas Tabelas 3.1 e 3.2 e poderão ser usados para que o professor elabore outros exercícios envolvendo funções aproximadoras, tais como o exercício a seguir.

Figura 3.1: Sementes de Linhaça - 1º dia



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.2: Sementes de Linhaça - 6º dia



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.3: Semente 2 de Linhaça - Caule em desenvolvimento



Fonte: Próprio autor.

3.1.2 Exercício

Considerando as medidas obtidas para o desenvolvimento das raízes da semente 2 (Tabela 3.1), a partir do dado referente às 18h do 3º terceiro dia (os valores anteriores foram descartados por serem iguais a zero e um dos ajustes a ser realizado ser exponencial), temos 13 pontos observados. Apesar de existir uma função polinomial de grau menor ou igual a 12, nosso objetivo neste trabalho não é fazer interpolação e sim aplicar o Método dos Mínimos Quadrados para diferentes tipos de funções aproximadoras, isto é, após escolher o tipo de função aproximadora.

1. Utilize os dados da semente 2 e plote os pontos obtidos num plano cartesiano e conjecture qual tipo de função: afim, quadrática, exponencial ou logarítmica, você acha que melhor se ajusta a esses pontos.
2. Encontre as funções aproximadoras para,
 - (a) a regressão linear;
 - (b) a função polinomial de grau 2;
 - (c) a função exponencial;

- (d) a função logarítmica.
3. Calcule o erro quadrático de cada função do item anterior e determine dentre elas a melhor função aproximadora, baseado no menor erro quadrático. Sua conjectura foi confirmada ou refutada?

Tabela 3.1: Desenvolvimento das Raízes nas Sementes de Linhaça (em mm).

observação	semente 1	semente 2	semente 3
1º dia - 6h	0	0	0
1º dia - 18h	0	0	0
2º dia - 6h	0	0	0
2º dia - 18h	1	0	1
3º dia - 6h	1	0	1
3º dia - 18h	4	2	3
4º dia - 6h	5	3	4
4º dia - 18h	7	5	7
5º dia - 6h	10	6	8
5º dia - 18h	12	7	11
6º dia - 6h	14	10	15
6º dia - 18h	16	12	16
7º dia - 6h	17	14	16
7º dia - 18h	20	15	17
8º dia - 6h	27	23	17
8º dia - 18h	35	30	19
9º dia - 6h	35	38	19
9º dia - 18h	35	40	19

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de observação.

Tabela 3.2: Desenvolvimento dos Caules nas Sementes de Linhaça (em mm).

observação	semente 1	semente 2	semente 3
1º dia - 6h	0	0	0
1º dia - 18h	2	2	2
2º dia - 6h	5	5	5
2º dia - 18h	7	8	5
3º dia - 6h	15	15	11
3º dia - 18h	20	28	15
4º dia - 6h	25	40	22
4º dia - 18h	38	45	30
5º dia - 6h	45	50	32
5º dia - 18h	52	57	42

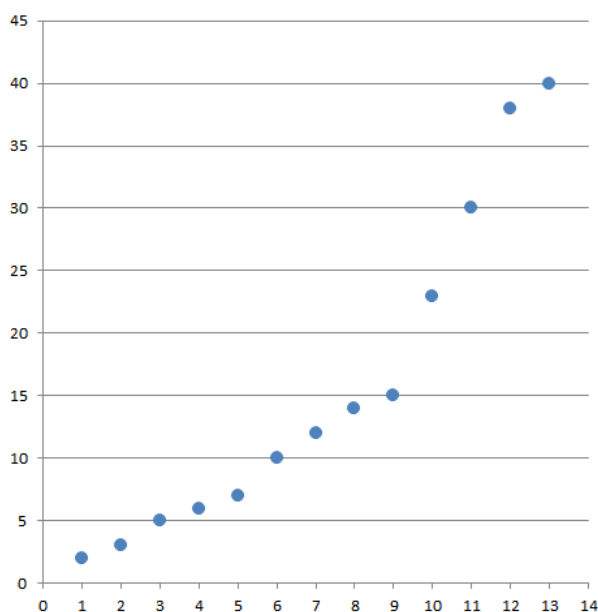
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de observação.

3.1.3 Resolução

- Primeira etapa:

Em sala de aula, o primeiro passo é pedir para os alunos plotar os treze pontos, e tentarem identificar qual tipo de função é a mais adequada para aproximar os dados obtidos. Essa é a pergunta norteadora da apresentação do conteúdo.

Figura 3.4: Gráfico do desenvolvimento da raiz da Linhaça (em mm)



Fonte: Próprio autor.

Pela posição dos pontos no plano cartesiano, alguém poderia sugerir que a Regressão Linear forneceria a melhor função aproximadora, outros diriam que é a função quadrática, ou ainda, a função exponencial. A resposta a essa dúvida será verificada no final do exercício com o cálculo dos erros quadráticos.

Tabela 3.3: Cálculos a serem Utilizados nas Funções Aproximadoras

observação	x	y	xy	x^2	x^3	x^4	$\ln x$	$\ln y$	$y \ln x$	$\ln^2 x$	$x \ln y$
3ºdia 18h	1	2	2	1	1	1	0	0,693	0	0	0,693
4ºdia 06h	2	3	6	4	8	16	0,693	1,098	2,079	0,480	2,196
4ºdia 18h	3	5	15	9	27	81	1,098	1,609	5,490	1,205	4,827
5ºdia 06h	4	6	24	16	64	256	1,386	1,791	8,316	1,920	7,164
5ºdia 18h	5	7	35	25	125	625	1,609	1,945	11,263	2,588	9,725
6ºdia 06h	6	10	60	36	216	1296	1,791	2,302	17,910	3,207	13,812
6ºdia 18h	7	12	84	49	343	2401	1,945	2,484	23,340	3,783	17,388
7ºdia 06h	8	14	112	64	512	4096	2,079	2,639	29,106	4,322	21,112
7ºdia 18h	9	15	135	81	729	6561	2,197	2,708	32,955	4,826	24,372
8ºdia 06h	10	23	230	100	1000	10000	2,302	3,135	52,946	5,299	31,350
8ºdia 18h	11	30	330	121	1331	14641	2,397	3,401	71,910	5,745	37,411
9ºdia 06h	12	38	456	144	1728	20736	2,484	3,555	94,392	6,170	42,660
9ºdia 18h	13	40	520	169	2197	28561	2,564	3,688	102,560	6,574	47,944
somas	91	205	2009	819	8281	89271	22,545	31,048	452,267	46,119	260,654

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.1.

- Segunda etapa:

A partir dos dados observados, será construída a Tabela 3.3 que fornecerá os pré cálculos com o fim de encontrar as funções aproximadoras.

1. Para a **regressão linear**, temos uma reta a ser encontrada. Essa reta é dada pela equação $y = a + bx$, onde a e b são as constantes a serem descobertas resolvendo o sistema 2.2, apresentado na seção 2.1.1, isto é:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}$$

Substituindo pelos dados da Tabela 3.3 chegamos a:

$$\begin{bmatrix} 13 & 91 \\ 91 & 819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 2009 \end{bmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} 13a + 91b = 205 \\ 91a + 819b = 2009 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear encontramos $a = -6,301$, $b = 3,153$ e a **função aproximadora obtida por regressão linear** é dada por $y = -6,301 + 3,153x$, isto é, dentre todas as retas a reta que melhor aproxima os pontos, segundo o Método dos Mínimos Quadrados é a reta de equação $y = -6,301 + 3,153x$.

2. Para a **Aproximação Quadrática** a Função Aproximadora de grau 2 é dada pelo Sistema Normal 2.11 reproduzido a seguir,

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n 1 & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k^2 \end{bmatrix}$$

Com base na tabela 3.3, o Sistema Linear a ser resolvido é

$$\begin{cases} 13\alpha_0 + 91\alpha_1 + 819\alpha_2 = 205 \\ 91\alpha_0 + 819\alpha_1 + 8281\alpha_2 = 2009 \\ 819\alpha_0 + 8281\alpha_1 + 89271\alpha_2 = 21551 \end{cases}$$

E os valores para as constantes são $\alpha_1 = 4,156$, $\alpha_2 = -1,032$ e $\alpha_3 = 0,299$, e portanto, a **função quadrática** que melhor aproxima os dados é

$$P(x) = 4,156 - 1,032x + 0,299x^2$$

3. Para a **aproximação exponencial**, devemos encontrar os valores $A = e^{\alpha_1}$ e α_2 tais que a função $y = Ae^{\alpha_2 x}$ melhor se ajuste aos pontos tabelados.

Uma vez que $\ln y = \alpha_1 + \alpha_2 x$ encontramos os valores de α_1 e α_2 por regressão linear. A partir dos dados obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \sum_{i=1}^n (\ln y_i) x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 91 \\ 91 & 819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,048 \\ 260,654 \end{bmatrix}$$

que após resolvido nos fornece a **função aproximadora exponencial** dada por:

$$\ln y = 0,722 + 0,238x \text{ ou } y = 2,058e^{0,238x}$$

4. Para a **aproximação logarítmica**, a curva é dada por $y = a + b \ln x$, em que

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i & \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \ln x_i \end{bmatrix}$$

Assim, temos

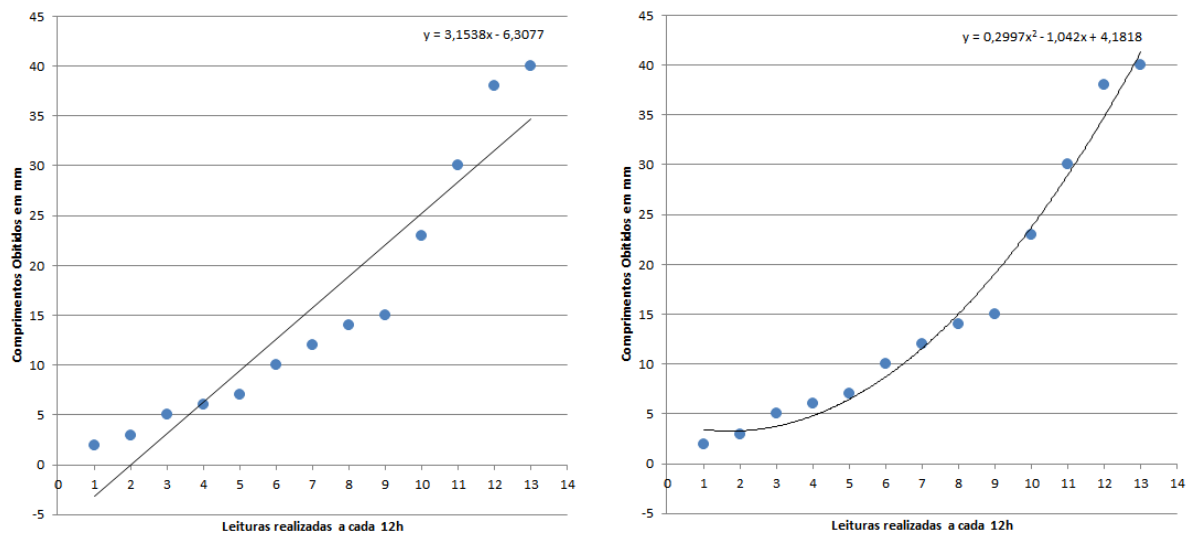
$$\begin{bmatrix} 13,000 & 22,545 \\ 22,545 & 46,119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205,000 \\ 452,267 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o Sistema, encontramos $\alpha_1 = -8,125$ e $\alpha_2 = 13,778$

Logo, a **função aproximadora logarítmica** é dada por $y = -8,125 + 13,778 \ln x$.

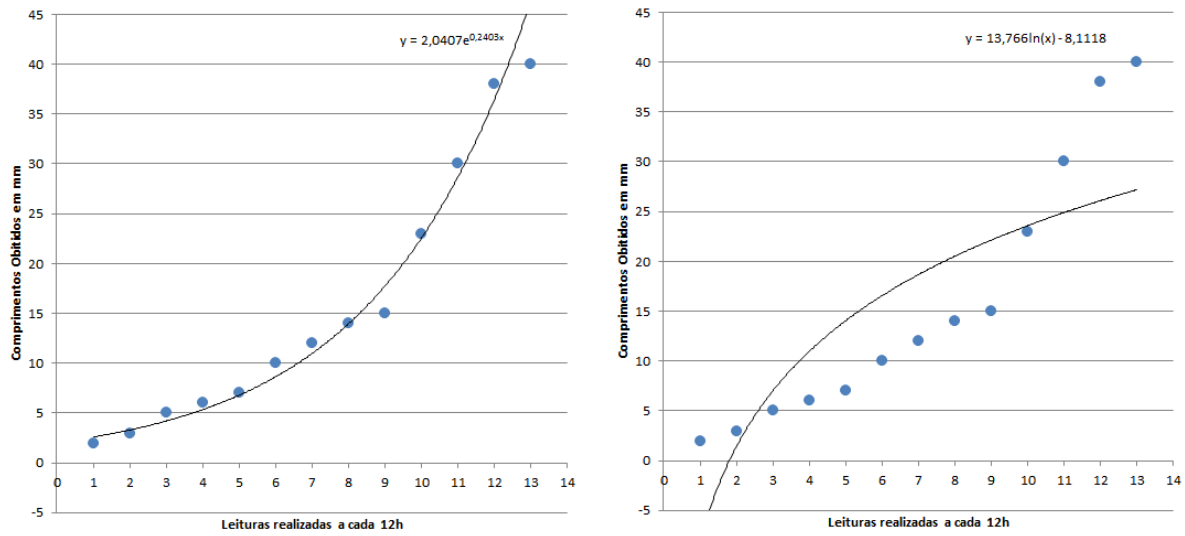
Nas Figuras 3.5 e 3.6 estão dispostos os gráficos gerados pelos pontos, bem como, as Funções Aproximadoras.

Figura 3.5: Gráfico para a regressão linear e quadrática - linhaça



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

Figura 3.6: Gráficos para as funções aproximadoras exponencial e logarítmica - linhaça



Fonte: Próprio Autor com o Auxílio do Software Excel da Microsoft.

Podemos observar nas Figuras 3.5 e 3.6 que as funções aproximadoras apresentadas pelo software Excel diferem das que encontramos manualmente. Isso se deve aos arredondamentos que foram realizados. Uma análise visual dos gráficos anteriores permite descartar a função aproximadora obtida por regressão linear e a obtida pela aproximação logarítmica. Mas, nos deixaria em dúvida quanto a escolha entre as funções quadrática e exponencial, ficando a decisão da melhor função aproximadora, dentre essas últimas, baseada no erro quadrático.

- Terceira etapa:

Para determinar o erro quadrático vamos usar a tabela 3.4:

Tabela 3.4: Cálculos para determinar o Erro Quadrático das Funções Aproximadoras-Linhaça

x	y (mm)	Linear	$ y - f(x)_{Li} $	Quadrática	$ y - f(x)_Q $	Expon	$ y - f(x)_E $	Logarít	$ y - f(x)_{Lo} $
1	2	-3,148	5,148	3,423	1,423	2,610	0,610	-8,125	10,125
2	3	0,005	2,995	3,288	0,288	3,312	0,312	1,425	1,574
3	5	3,158	1,842	3,751	1,249	4,202	0,797	7,011	2,011
4	6	6,311	0,311	4,812	1,188	5,331	0,668	10,975	4,975
5	7	9,464	2,464	6,471	0,529	6,763	0,236	14,049	7,049
6	10	12,617	2,617	8,728	1,272	8,581	1,418	16,561	6,561
7	12	15,770	3,770	11,583	0,417	10,886	1,113	18,685	6,685
8	14	18,923	4,923	15,036	1,036	13,811	0,188	20,525	6,525
9	15	22,076	7,076	19,087	4,087	17,522	2,522	22,148	7,148
10	23	25,229	2,229	23,736	0,736	22,231	0,768	23,600	0,600
11	30	28,382	1,618	28,983	1,017	28,203	1,796	24,913	5,086
12	38	31,535	6,465	34,828	3,172	35,781	2,218	26,112	11,887
13	40	34,688	5,312	41,271	1,271	45,395	5,395	27,214	12,785
$\Sigma(y_1 - \psi(x_i))^2$:			218,000		38,180		49,111		695,954

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.3.

Após calcular os erros quadráticos utilizando a fórmula apresentada na Seção 2.2, $EQ = \sqrt{\sum_{k=1}^n [y_k - \psi(x_k)]^2}$, encontramos que o erro quadrático para a função aproximadora Linear é $EQ(Linear) = \sqrt{218,000} = 14,764$; para a função aproximadora Quadrática é $EQ(Quadrática) = \sqrt{38,180} = 6,179$; para a função aproximadora Exponencial é $EQ(Exponencial) = \sqrt{49,111} = 7,007$ e para a função aproximadora Logarítmica é $EQ(Logarítmica) = \sqrt{695,954} = 26,380$.

Isto mostra que entre as quatro funções aproximadoras calculadas, a função aproximadora quadrática é a melhor para este caso. Observe que de fato os erros das funções linear e logarítmica são bem maiores que os erros para as funções quadrática e exponencial, ratificando a percepção visual.

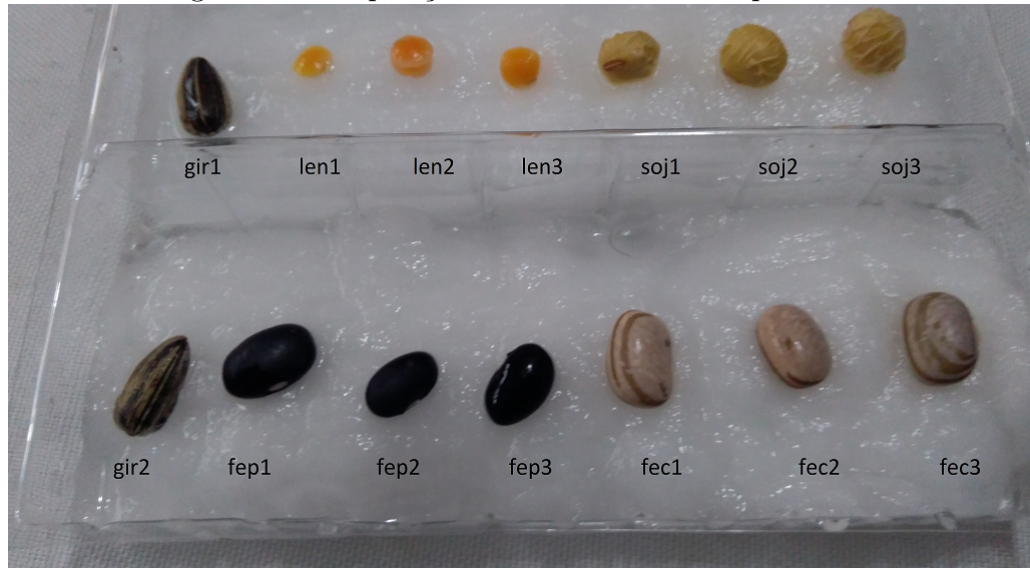
3.2 Aplicação 2: Desenvolvimento de Sementes de Girassol e Leguminosas

3.2.1 Apresentação do experimento

Num segundo experimento, foram utilizadas 2 sementes de girassol, 3 sementes de feijão preto, 3 sementes de feijão carioca, 3 sementes de soja e 3 sementes de lentilha Libanesa (ou Lentilha Rosa). O "plantio" ocorreu em algodão com água, na tarde do dia 02/02/2020, conforme Figura 3.7. Houve acompanhamento diário, duas vezes ao dia, às 09h e às 17h.

No dia 07 de fevereiro, as sementes foram transplantadas para terra a fim de obter sustentação, devido ao tamanho atingido por suas raízes e caules. As sementes continuaram a receber água, mantendo a terra úmida. Sob essas novas condições, no dia 08 de fevereiro, o caule do feijão preto (fep3) atingiu 70mm às 09h e 85mm às 17h. Às 17h do dia 09 de fevereiro seu caule tinha 100mm de comprimento, sendo cessado o processo de medidas.

Figura 3.7: Disposição das Sementes no Experimento



Fonte: Próprio autor.

Nas Figuras 3.8 e 3.9 do dia 04/02/20, podemos ver as germinações, das lentilhas 1 e 2 e do feijão preto 3, e ainda perceber que não foi a semente considerada mais bonita que se desenvolveu, tanto nas lentilhas quanto nos feijões. Podemos verificar também que, para experiências em sala de aula, ou como tarefa de casa, é mais viável usar leguminosas (feijão, lentilha) às gramíneas (arroz, trigo), que devido ao processamento industrial a que são submetidas, não germinam.

Figura 3.8: Germinação das Sementes no Experimento (04/02/2020)



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.9: Sementes de Feijão (04/02/2020)



Fonte: Próprio autor.

No experimento foram observadas sementes que se destacaram, germinando e se desenvolvendo muito mais que as demais. Exemplo do Feijão (fep3), das lentilhas (len1 e len3). Esse fato pode ser observado na Tabela 3.5, Tabela 3.6 e na Figura 3.10 . As Tabelas 3.5 e 3.6 tiveram suprimidos os dados referentes às sementes que não germinaram.

Figura 3.10: Visualização das Sementes no dia 06/02/2020



Fonte: Próprio autor.

Cabe observar que os períodos em que as medidas foram tomadas não são periódicos. Para resolver este problema vamos utilizar períodos de observação de 8h. Aqueles que não contem informação são descartados. Assim, o dado coletado em 03/02 às 9h será considerado $x = 1$, o que foi coletado às 17h do mesmo dia é $x = 2$, $x = 3$ corresponde ao valor que deveria ter sido coletado às 01h do dia 04/02, $x = 4$ é a coleta do dia 04/02 às 9h e assim sucessivamente, conforme tabelas a seguir.

Tabela 3.5: Desenvolvimento dos Radículas

Desenvolvimento das Radículas (em mm) às 09h e às 17h									
dia	gir1	len1	len2	len3	soj2	soj3	fep2	fep3	fec2
03/02	0	1	1	1	0	0	0	0	0
03/02	0	2	1	1	0	0	0	3	0
04/02	0	2	2	2	0	0	0	12	0
04/02	0	2	2	2	0	0	4	15	0
05/02	0	2	2	2	0	0	13	15	6
05/02	0	5	3	5	0	0	15	15	7
06/02	5	5	3	5	9	0	15	26	11
06/02	11	5	0	7	15	0	18	26	11
07/02	11	9	0	7	25	0	28	28	20
07/02	11	11	0	10	25	10	28	32	31

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de observação.

Tabela 3.6: Desenvolvimento dos Caules (em mm)

Desenvolvimento dos Caules (água e algodão) às 09h e às 17h								
dia	gir1	len1	len2	len3	soj2	fep2	fep3	fec2
03/02	0	0	0	0	0	0	0	0
03/02	0	3	0	0	0	0	0	0
04/02	0	5	2	2	0	0	0	0
04/02	0	8	3	4	0	0	0	0
05/02	0	8	3	6	0	0	13	0
05/02	0	10	3	7	0	7	17	0
06/02	0	20	3	15	0	10	27	0
06/02	0	20	0	18	0	13	27	0
07/02	7	30	0	26	0	23	41	0
07/02	10	36	0	30	10	23	55	12
Desenvolvimento dos Caules com Terra								
08/02	0	0	0	0	0	0	85	0
09/02	0	0	0	0	0	0	100	0

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de observação.

3.2.2 Exercício:

A partir dos dados coletados, sobre o crescimento das raízes (tabela 3.5), escreva as funções aproximadoras linear, cúbica e logarítmica para o desenvolvimento das raízes do feijão 3. E, após, baseado na função que melhor aproxima os dados coletados calcule o valor para o comprimento da raiz à 01h do dia 06/02.

Observação 11. A função aproximadora exponencial não será trabalhada pois a primeira observação tem valor nulo e a disposição dos dados no plano cartesiano não indica essa função. Os dados coletados durante o experimento foram mantidos caso o professor queira explorá-los, em sala de aula, com seus alunos.

3.2.3 Resolução:

A Tabela 3.7 contém os cálculos preliminares para determinar as funções aproximadoras.

Tabela 3.7: Cálculos preliminares das Funções Aproximadoras - Raiz Feijão 3

x	y (mm)	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$\ln x$	$(\ln x)^2$	xy	$y \ln x$
1	0	1	1	1	1	1	0,000	0,000	0	0,000
2	3	4	8	16	32	64	0,693	0,480	6	2,079
4	12	16	64	256	1024	4096	1,386	1,920	48	16,632
5	15	25	125	625	3125	15625	1,609	2,588	75	24,135
7	15	49	343	2401	16807	117649	1,945	3,783	105	29,175
8	15	64	512	4096	32768	262144	2,079	4,322	120	31,185
10	26	100	1000	10000	100000	1000000	2,302	5,299	260	59,852
11	26	121	1331	14641	161051	1771561	2,397	5,745	286	62,322
13	28	169	2197	28561	371293	4826809	2,564	6,574	364	71,792
14	32	196	2744	38416	537824	7529536	2,639	6,964	448	84,448
somas: 75	172	745	8325	99013	1223925	15527485	17,614	37,675	1712	381,620

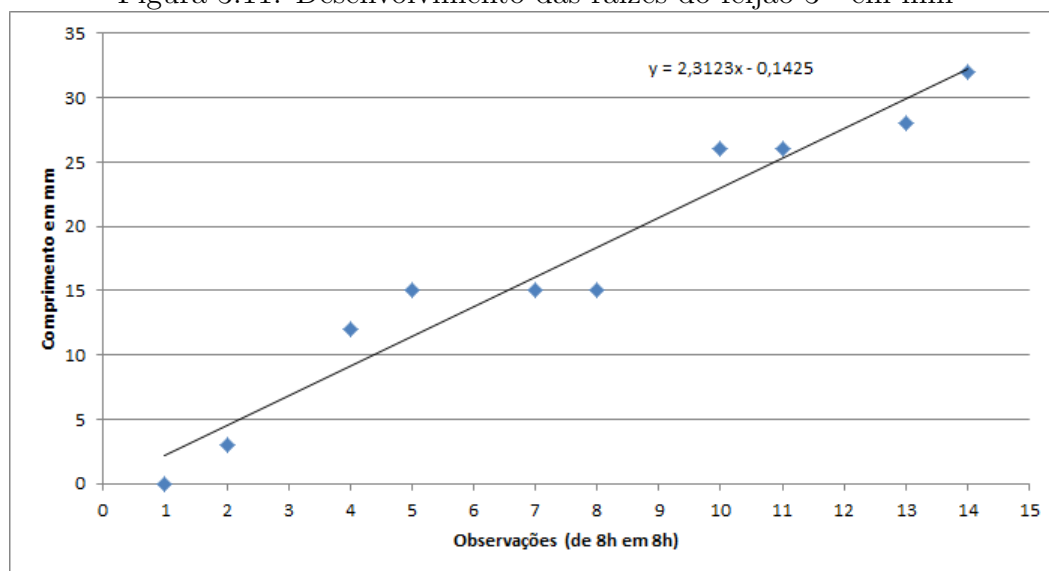
Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.5.

- Para a função aproximadora linear o sistema é dado por

$$\begin{bmatrix} 10 & 75 \\ 75 & 745 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172 \\ 1712 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema encontramos a **função aproximadora linear** $y = 2,312x - 0,142$ que pode ser vista na Figura 3.11, gerada pelo software Excel, para ilustrar o problema.

Figura 3.11: Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm



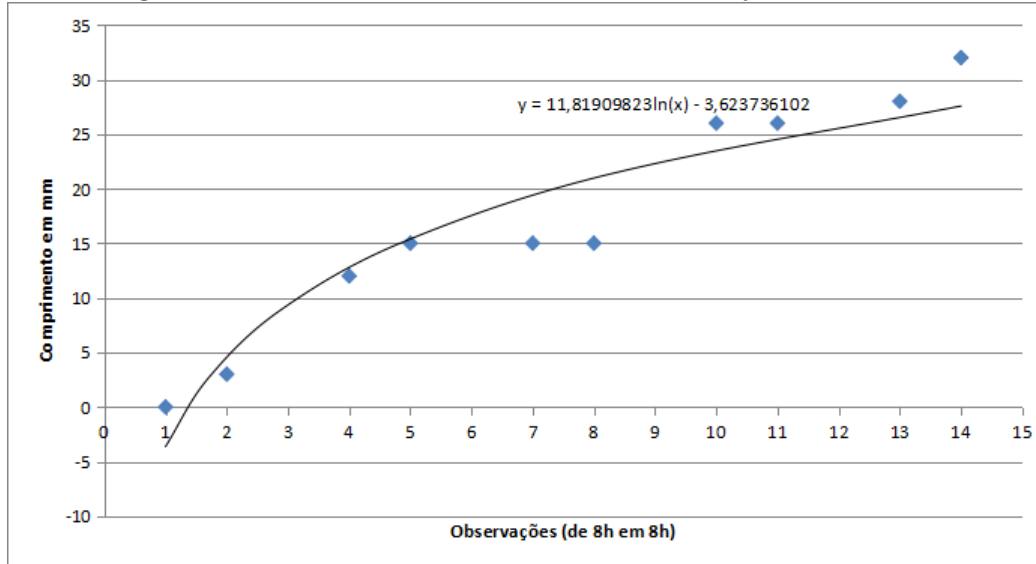
Fonte: Próprio autor.

- O sistema para a **função aproximadora logarítmica** é

$$\begin{bmatrix} 10,000 & 17,326 \\ 17,326 & 36,960 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172,000 \\ 378,164 \end{bmatrix}.$$

E, resolvendo encontramos $\alpha_1 = -3,635$ e $\alpha_2 = 11,829$, portando a função é escrita como $y = -3,635 + 11,829 \ln x$, mostrada na Figura 3.12.

Figura 3.12: Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm



Fonte: Próprio autor.

- Para a função aproximadora cúbica temos o sistema

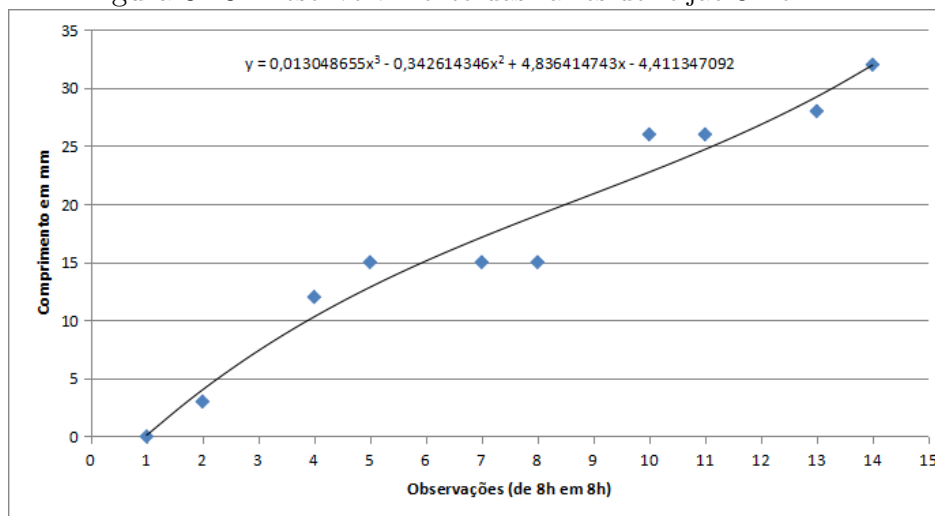
$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^3 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores da Tabela 3.7, chegamos a

$$\begin{bmatrix} 10 & 75 & 745 & 8325 \\ 75 & 745 & 8325 & 99013 \\ 745 & 8325 & 99013 & 1223925 \\ 8325 & 99013 & 1223925 & 15527485 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172 \\ 1712 \\ 19024 \\ 225422 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\alpha_0 = -4,411$, $\alpha_1 = 4,836$, $\alpha_2 = -0,342$ e $\alpha_3 = 0,013$ a solução do sistema e a função aproximadora cúbica, cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.13, é dada por $y = 0,013x^3 - 0,342x^2 + 4,836x - 4,411$.

Figura 3.13: Desenvolvimento das raízes do feijão 3 - em mm



Fonte: Próprio autor.

- Antes de encontrar uma estimativa para o tamanho do caule do feijão à 01h do dia 06/02, vamos determinar a função, dentre as calculadas, que melhor aproxima os dados utilizando o erro quadrático.

Tabela 3.8: Cálculos para determinar erro quadrático (Feijão 3)

x	y	$\psi(x)(Lin)$	$ y - \psi(x)(Lin) ^2$	$\psi(x)(Log)$	$ y - \psi(x)(Log) ^2$	$\psi(x)(Cub)$	$ y - \psi(x)(Cub) ^2$
1	0	2,170	4,708	-3,635	13,213	0,096	0,009
2	3	4,482	2,196	4,564	2,446	3,997	0,994
4	12	9,106	8,375	12,763	0,582	10,293	2,913
5	15	11,418	12,830	15,403	0,162	12,844	4,648
7	15	16,042	1,085	19,383	19,212	17,142	4,588
8	15	18,354	11,249	20,962	35,553	19,045	16,362
10	26	22,978	9,132	23,602	5,749	22,749	10,569
11	26	25,290	0,504	24,729	1,613	24,706	1,674
13	28	29,914	3,663	26,705	1,674	29,220	1,488
14	32	32,226	0,051	27,582	19,515	31,933	0,004
somam:			53,793		99,719		43,249

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.5.

Assim, encontramos o erro quadrático para a função aproximadora Linear igual a $EQ(Linear) = \sqrt{53,793} = 7,334$; para a função aproximadora Logarítmica igual a $EQ(Logarítmica) = \sqrt{99,719} = 9,985$ e para a função aproximadora Cúbica igual a $EQ(Cúbica) = \sqrt{43,249} = 6,576$. Logo, a função que melhor aproxima os dados é a função aproximadora cúbica. Portanto, o valor estimado para o dia 06/02 à 01h ($x = 9$) é 20,888mm.

3.3 Aplicação 3: Desenvolvimento de Sementes de Painço

3.3.1 Descrição do experimento

Experimento iniciado às 18h do dia 09 de fevereiro, com depósito de 92 sementes de Painço, para alimentação de pássaros, sobre terra úmida, ou seja, não foram enterradas. O objetivo, nesse caso, é observar o crescimento médio dos caules das sementes que por ventura germinarem. Os dados foram coletados às 9h30 e as 17h durante 7 dias. As sementes (Figura 3.14) receberam apenas água e tomaram sol até as 12h.

É um experimento um pouco mais controlado sem sofrer com a ação do tempo ou de pássaros e grandes insetos.

Figura 3.14: Sementes de Painço em 09/02/2020



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 3.15 é possível ver como estava o desenvolvimento das plantas no dia 25/02/2020. Na Tabela 3.9 temos o crescimento dos caules de duas dessas plantas entre os dias 12/02, quando os caules foram percebidos, e 15/02, quando encerramos a observação. A partir dessa data, as folhas começaram a se desenvolver enquanto os caules estagnaram. Como o objetivo era acompanhar o crescimento dos caules o acompanhamento foi interrompido.

Figura 3.15: Sementes de Painço em 25/02/2020



Fonte: Próprio autor.

Observação 12. Neste experimento o intervalo de coleta de dados não é periódico. Para contornar esse problema, dividiremos os intervalos de 3 em 3 horas iniciando às 08h do dia 12/02. Assim, os extremos dos intervalos adquirem a seguinte configuração:

0 : 12/02, 08h	1 : 12/02, 11h	2 : 12/02, 14h	3 : 12/02, 17h
4 : 12/02, 20h	5 : 12/02, 23h	6 : 13/02, 02h	7 : 13/02, 05h
8 : 13/02, 08h	9 : 13/02, 11h	10 : 13/02, 14h	11 : 13/02, 17h
12 : 13/02, 20h	13 : 13/02, 23h	14 : 14/02, 02h	15 : 14/02, 05h
16 : 14/02, 08h	17 : 14/02, 11h	18 : 14/02, 14h	19 : 14/02, 17h
20 : 14/02, 20h	21 : 14/02, 23h	22 : 15/02, 02h	23 : 15/02, 05h
24 : 15/02, 08h	25 : 15/02, 11h	26 : 15/02, 14h	27 : 15/02, 17h

Sendo que, a primeira observação assume o valor $x = 0,5$, a segunda $x = 3$ e assim sucessivamente.

3.3.2 Exercício

A Tabela 3.9 mostra o desenvolvimento do caule observado em duas sementes de Painço, enquanto que, na Figura 3.16, podemos observar a plotagem dos dados coletados para a semente 2 com os sete primeiros dados.

1. Calcule as funções aproximadoras por regressão linear e polinomial de grau 3.

Observação 13. A escolha das funções aproximadoras se deu pela observação da plotagem dos dados que sugere que esses tipos de funções são mais adequadas.

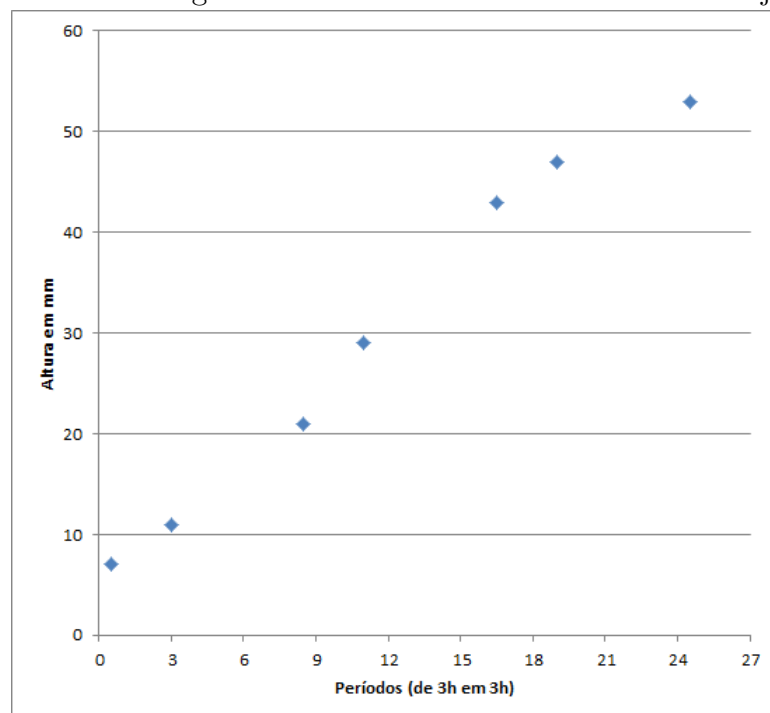
- Utilize a função aproximadora mais adequada, para encontrar um valor aproximado para a oitava observação (note que esta observação não foi utilizada nos cálculos). Compare o valor aproximado encontrado pelo modelo com o valor observado.

Tabela 3.9: Evolução das Sementes de Painço em Terra Úmida

Crescimento do Painço (em mm) entre 12/fev e 15/fev, às 9h30(*) e às 17h(**).								
semente	12 *	12 **	13 *	13 **	14 *	14 **	15 *	15 **
1	7	9	18	25	33	40	42	50
2	7	11	21	29	43	47	53	55

Fonte: Próprio autor após observação.

Figura 3.16: Plotagem dos dados referentes a semente de feijão (3)



Fonte: Próprio autor.

- Iniciaremos construindo a Tabela 3.10 que nos fornecerá os cálculos preliminares para obtenção das funções aproximadoras por regressão linear e polinomial de grau 3.

Tabela 3.10: Cálculos preliminares das funções aproximadoras do Painço-semente 2

x	y (mm)	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	xy	x^2y	x^3y
0,5	7	0,25	0,125	0,062	0,031	0,015	3,5	1,75	0,875
3,0	11	9,00	27,000	81,000	243,000	729,000	33,0	99,00	297,000
8,5	21	72,25	614,125	5220,062	44370,531	377149,515	178,5	1517,25	12896,625
11,0	29	121,00	1331,000	14641,000	161051,000	1771561,000	319,0	3509,00	38599,000
16,5	43	272,25	4492,125	74120,062	1222981,031	20179187,020	709,5	11706,75	193161,375
19,0	47	361,00	6859,000	130321,000	2476099,000	47045881,000	893,0	16967,00	322373,000
24,5	53	600,25	14706,125	360300,062	8827351,531	216270112,500	1298,5	31813,25	779424,625
Σ : 83	211	1436,00	28029,500	584683,248	12732096,120	285644620,000	3435,0	65614,00	1346752,500

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.9.

A função aproximadora polinomial de grau 3 para a semente 2 de Painço é dada pelo sistema

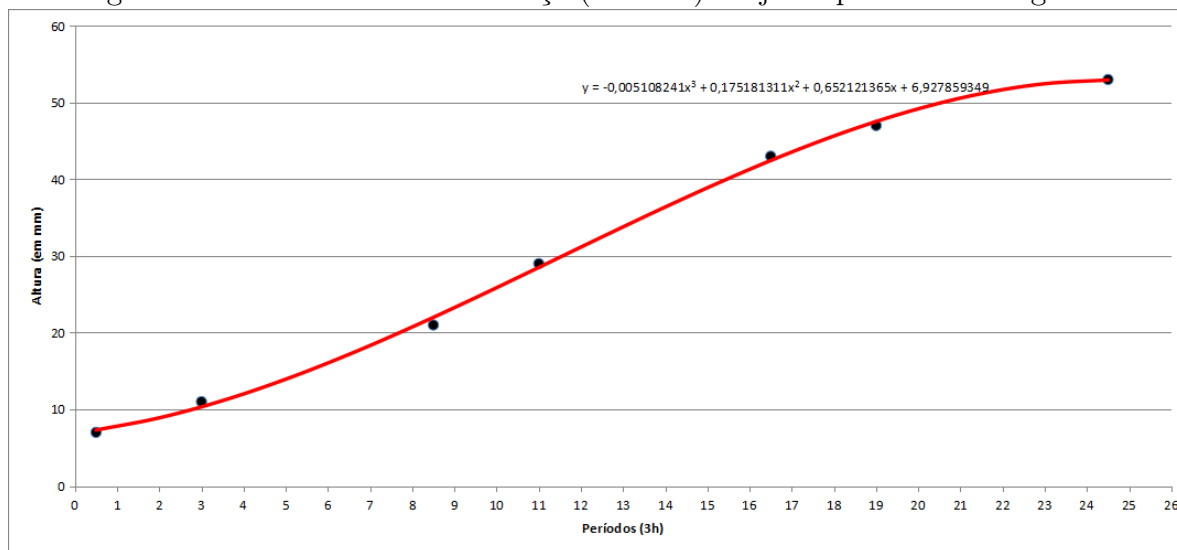
$$\begin{bmatrix} 7,0 & 83,000 & 1436,000 & 28029,500 \\ 83,0 & 1436,000 & 28029,500 & 584683,248 \\ 1436,0 & 28029,500 & 584683,248 & 12732096,120 \\ 28029,5 & 584683,248 & 12732096,120 & 285644620,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211,0 \\ 3435,0 \\ 65614,0 \\ 1346752,5 \end{bmatrix}.$$

Sua resolução fornece a função

$$y = -0,005x^3 + 0,175x^2 + 0,652x + 6,927.$$

A seguir é apresentado o gráfico do crescimento do Painço 3.17 com a Linha de Tendência aplicada pelo Excel:

Figura 3.17: Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste polinomial de grau 3



Fonte: Próprio autor.

Já os coeficientes da **função aproximadora por regressão linear** para a semente 2 de Painço são obtidos pela solução do sistema:

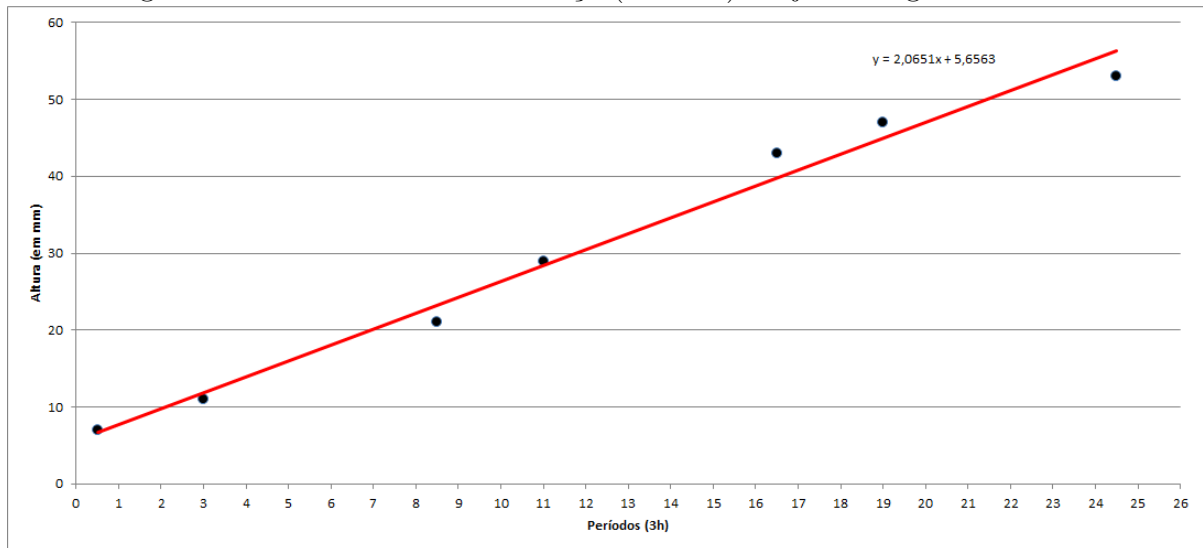
$$\begin{bmatrix} 7 & 83 \\ 83 & 1436 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211 \\ 3435 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Resolvendo o sistema encontramos a **função aproximadora linear**:

$$y = 2,065x + 5,656$$

Na sequência gráfico do crescimento do Painço 3.18 mostra a Linha de Tendência aplicada pelo Excel:

Figura 3.18: Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste Regressão Linear



Fonte: Próprio autor.

Em sala de aula, cabe observar que existe erro e que quanto melhor o ajuste menor o erro. Com essa análise inicial, podemos observar que o ajuste obtido pela função aproximadora polinomial de grau 3 é melhor do que o ajuste por regressão linear. Isso pode ser notado também quando se calcula o erro quadrático das funções.

Para determinar o erro quadrático vamos usar a tabela 3.11.

Tabela 3.11: Cálculos para o Erro Quadrático das Funções Aproximadoras-Painço

x	y (mm)	Polin. grau 3	$ y - \text{Pol} $	Linear	$ y - \text{Lin} $
0,5	7	7,296	0,296	6,688	0,312
3,0	11	10,323	0,677	11,851	0,851
8,5	21	22,042	1,042	23,208	2,208
11,0	29	28,619	0,381	28,371	0,629
16,5	43	42,868	0,132	39,728	3,272
19,0	47	48,195	1,195	44,891	2,109
24,5	53	54,414	1,414	56,248	3,248

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.9.

O erro quadrático para a função aproximadora polinomial de grau 3 é:

$$EQ(Polinomial) = \sqrt{\sum_{k=1}^n [y_k - \psi(x_k)]^2} = \sqrt{4,662} = 2,159 \quad (3.2)$$

O erro quadrático para a função aproximadora Linear é:

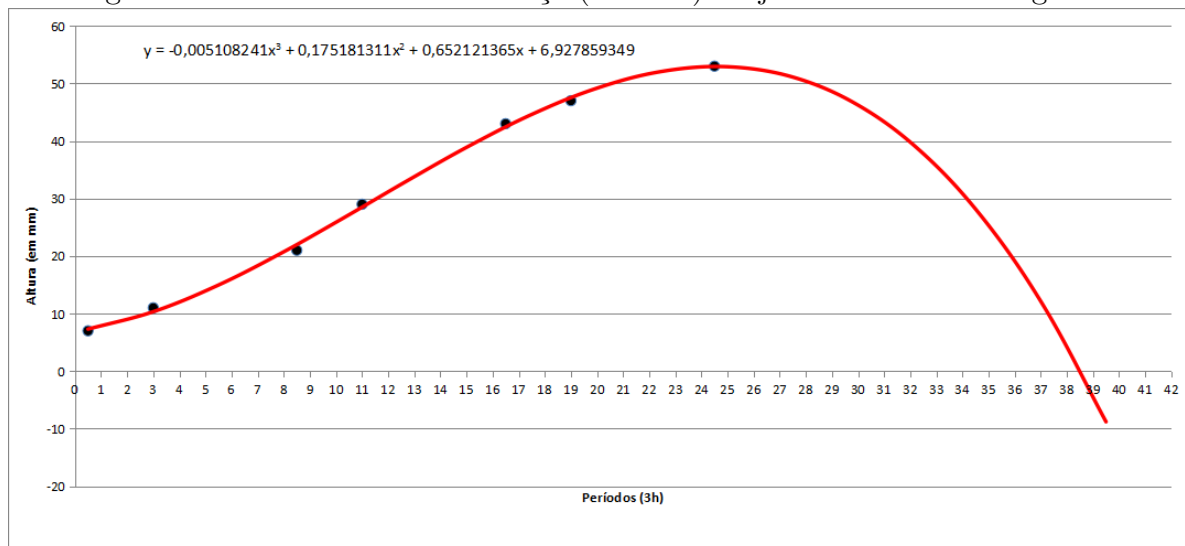
$$EQ(Linear) = \sqrt{\sum_{k=1}^n [y_k - \psi(x_k)]^2} = \sqrt{31,797} = 5,638 \quad (3.3)$$

O erro quadrático mostra que entre as duas funções aproximadoras calculadas, a função aproximadora polinomial de grau 3 é a que fornece um ajuste melhor para este caso.

2. A oitava medida foi tomada às 17h do dia 15/02 ($x = 27$). Utilizando a função aproximadora polinomial de grau 3, chegamos ao valor $y = 53,691mm$, sendo que a medida verificada na ocasião foi 55mm, valor próximo ao estimado pela função.

No entanto, se precisarmos de uma projeção um pouco maior a função deve ser repensada uma vez que ela tem um ponto de máximo local próximo a sétima observação, conforme podemos ver na Figura 3.19.

Figura 3.19: Crescimento do Painço (em mm) - Ajuste Polinomial de grau 3



Fonte: Próprio autor.

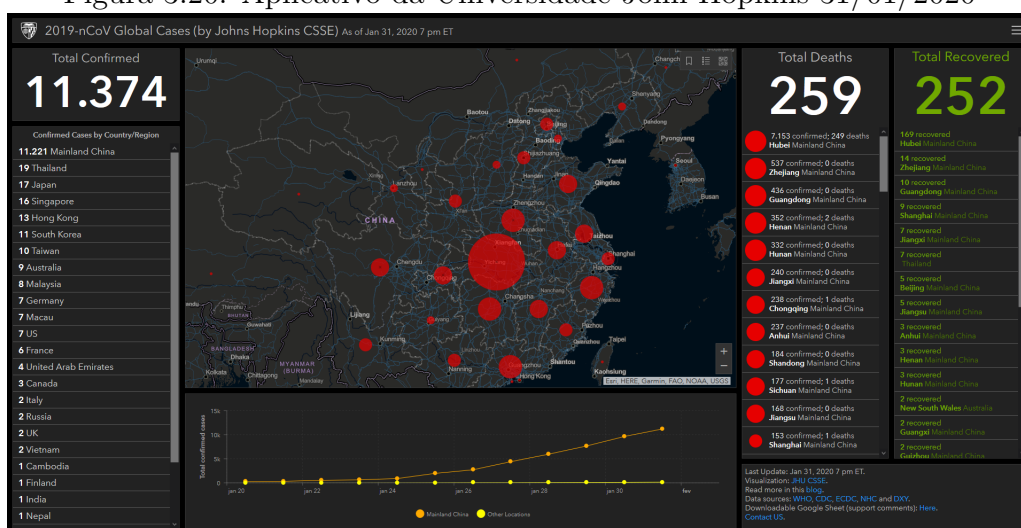
3.4 Aplicação 2: O Episódio do Coronavírus (vírus SARS-CoV-2)

3.4.1 Na China

As primeiras informações sobre o novo coronavírus chegaram no final de 2019 sem alarde. Seria uma forma de pneumonia ainda desconhecida sem grandes proporções. Com o passar do tempo e as novas informações, a doença tomou dimensões globais, com fechamento de cidades na China, impedindo a população de sair de suas residências. Não há dados precisos, mais diversos sites falam em 40 milhões de pessoas atingidas, inicialmente, por essas medidas. O feriado local de Ano Novo, normalmente de alguns dias, foi estendido inicialmente para uma quinzena e depois, em 03/02/2020 foi prorrogado para até 14/02/2020. Um hospital para 1400 pacientes foi erguido em prazo recorde: uma semana. Vários países fecharam suas fronteiras para os chineses e para os turistas e empresários que estiveram na China nos últimos 40 dias. O motivo de tudo isso? Os aumentos exponenciais de transmissão e mortes provocados pelo agente patológico. Talvez, nesse ponto, consigamos entender o isolamento das cidades e a urgência nas construções de hospitais e centros de acolhimento na China.

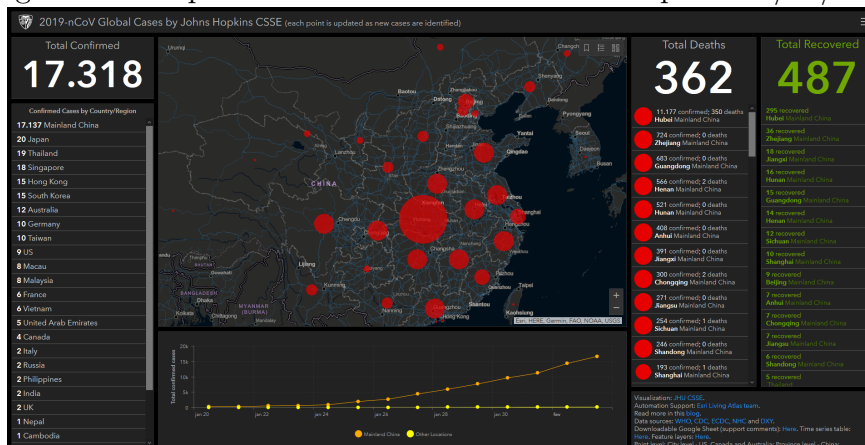
A partir de 20/01/2020, a Universidade Jhon Hopkins disponibilizou uma ferramenta para acompanhamento simultâneo da divulgação dos casos de contaminação e mortes provocados pelo SARS-CoV-2. Abaixo, as Figuras 3.20 e 3.21 são capturas de tela deste site.

Figura 3.20: Aplicativo da Universidade John Hopkins 31/01/2020



Fonte: Universidade John Hopkins

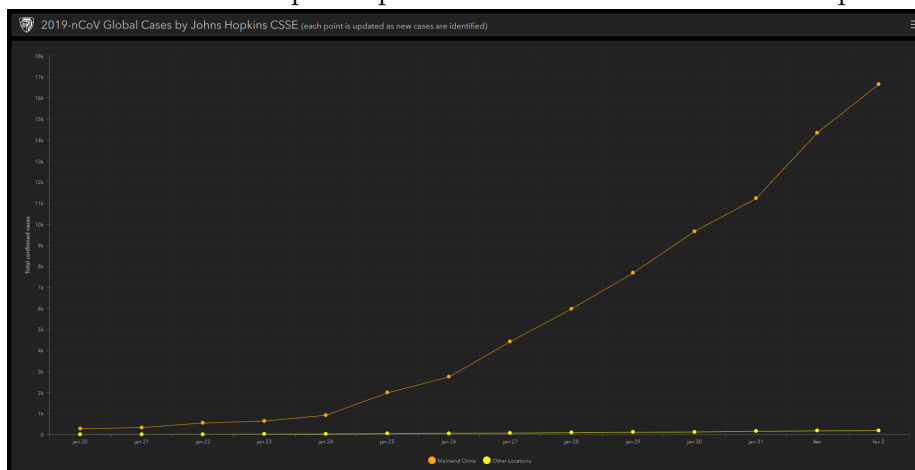
Figura 3.21: Aplicativo da Universidade John Hopkins 02/02/2020



Fonte: Universidade John Hopkins

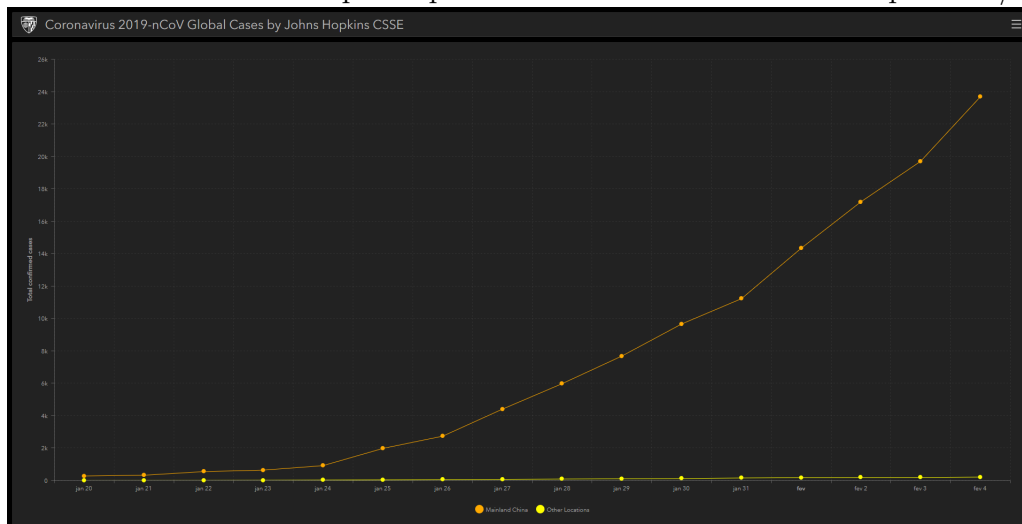
É fácil perceber a Curva Exponencial quando observamos o gráfico ampliado dos casos confirmados obtido do aplicativo (Figura 3.21, Figura 3.22 e Figura 3.23), onde são retratados os casos confirmados de contágio na China. Como os dados são computados nos Estados Unidos da América, existe uma discrepância nos horários e datas apontados nas figuras e nos gráficos e os dados coletados na internet devido ao fuso horário. Por exemplo, se todos os países fecharem o número de casos às 18h, então, quando a região de Guizhou, na China, fechar o número de casos hoje, às 18h, em Washington ainda serão 08h. E, quando Washington fechar o número de casos, já terão sido adicionados mais 12 horas de levantamentos na China, pois a atualização é instantânea. O levantamento para este trabalho começou em 31/01/2020, portanto foram utilizados Screenshots do aplicativo disponíveis na Web antes dessa data. A partir de 31 de janeiro, foram coletados dados em horários diferentes, às vezes às 18h, às vezes às 23h. A coleta de dados está disponível na Tabela 3.12 atualizada até o dia 10/02/2020, 23h55.

Figura 3.22: Gráfico Produzido pelo Aplicativo da Universidade John Hopkins 02/02/2020



Fonte: Universidade John Hopkins

Figura 3.23: Gráfico Produzido pelo Aplicativo da Universidade John Hopkins 05/02/2020



Fonte: Universidade John Hopkins

No dia 13 de fevereiro, a China mudou o modo como os diagnósticos eram feitos, passou de laboratorial para clínico. Houve uma explosão no número de casos. Foram notificados 15.100 novos casos nesse dia e 6.500 no dia seguinte.

3.4.2 Exercício

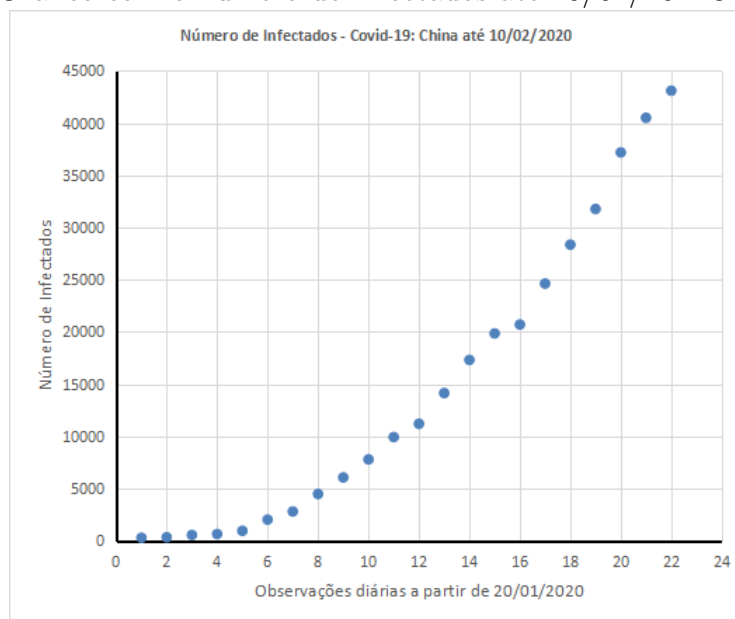
Observação 14. Vamos explorar neste trabalho os dados referentes aos números de infectados na China, durante o período que vai do dia 20/01/20 até 10/02/20. Primeiramente, gostaríamos de observar que uma análise visual do gráfico de dispersão (Figura 3.24) descarta, dentre os modelos que estamos abordando neste trabalho, os modelos lineares e logarítmicos e, por esse motivo, nos itens que seguiremos abordaremos somente os modelos exponencial e quadrático.

Tabela 3.12: Dados Oficiais Covid-19 - China

	dia	número de infectados
1:	20/jan	278
2:	21/jan	326
3:	22/jan	547
4:	23/jan	639
5:	24/jan	941
6:	25/jan	2019
7:	26/jan	2794
8:	27/jan	4474
9:	28/jan	6057
10:	29/jan	7783
11:	30/jan	9925
12:	31/jan	11200
13:	01/fev	14140
14:	02/fev	17318
15:	03/fev	19853
16:	04/fev	20704
17:	05/fev	24631
18:	06/fev	28359
19:	07/fev	31774
20:	08/fev	37198
21:	09/fev	40510
22:	10/fev	43106

Fonte: Universidade John Hopkins

Figura 3.24: Gráfico com o número de infectados até 10/02/20 - Covid-19: China



Fonte: Universidade John Hopkins

1. Com a intenção de verificar se a quantidade de dados influencia na projeção, use a Tabela 3.12 e faça três simulações para a função aproximadora exponencial e para

a polinomial de segundo grau:

- (a) Usando os dias 20/01, 22/01, 24/01, 26/01 e 28/01;
 - (b) Usando os 12 primeiros dias da tabela;
 - (c) Usando todos os dados.
2. Utilize a função mais adequada para os itens 1.(a) e 1.(b), quadrática ou exponencial, para fazer uma projeção do número de infectados para o dia 05/02/2020.
 3. Utilize a função aproximadora de melhor ajuste do item 1.(c), faça a projeção para o dia 11/02/20.

3.4.3 Resolução

- 1.a) usaremos 5 pontos, os dias 20/01, 22/01, 24/01, 26/01 e 28/01, para efetuar os cálculos da curva:

Tabela 3.13: Cálculos Preliminares das Funções Aproximadoras - Covid-19 - China

Número de Infectados pelo Coronavírus de 20/01/2020 à 28/02/2020.									
dia	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$\ln y$	$x \ln y$
20/jan	1	278	1	1	1	278	278	5,627	5,627
22/jan	2	547	4	8	16	1094	2188	6,304	12,608
24/jan	3	941	9	27	81	2823	8469	6,846	20,538
26/jan	4	2794	16	64	256	11176	44704	7,935	31,740
28/jan	5	6057	25	125	625	30285	151425	8,708	43,544
somas	15	10617	55	225	979	45656	207064	35,420	114,057

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.12.

Lembremos que, de acordo com o que vimos na Seção Método dos Mínimos Quadrados - Caso Exponencial, para a **aproximação exponencial** a curva é dada por $y = A \cdot e^{\alpha_2 \cdot x}$, com $A = e^{\alpha_1}$ e, portanto, a partir dos dados fornecidos pela Tabela 3.13 e a aplicação no sistema 2.18 obtemos o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,420 \\ 114,057 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Resolvendo o Sistema, chegamos a $\alpha_1 = 4,747$, $A = 115,237$ e $\alpha_2 = 0,779$ e a **função aproximadora exponencial** para os casos de infectados na China é escrita como:

$$y = 115,237 \cdot e^{0,779 x}.$$

A função aproximadora polinomial de segundo grau (quadrática) é dada pelo sistema

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n 1 & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k^2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10617 \\ 45656 \\ 207064 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o Sistema, chegamos a $\alpha_0 = 1705,4$, $\alpha_1 = -1811,07$ e $\alpha_2 = 531,9286$, assim, a **função aproximadora quadrática** para os casos de infectados na China é escrita como:

$$y = 531,93x^2 - 1811,07x + 1705,4.$$

Para decidir qual das duas funções aproximadores melhor se ajusta a estes dados, vamos calcular o erro quadrático em cada caso, a partir da Tabela 3.14 podemos determinar o erro quadrático para as funções aproximadoras, sendo que, para a função aproximadora quadrática este erro é dado por $EQ(Quadrática) = \sqrt{192446,6} = 438,687$ e para Exponencial é $EQ(Exponencial) = \sqrt{257963,4} = 507,901$. Note que, neste caso, o cálculo dos erros mostra que o ajuste quadrático é mais adequado que o ajuste exponencial.

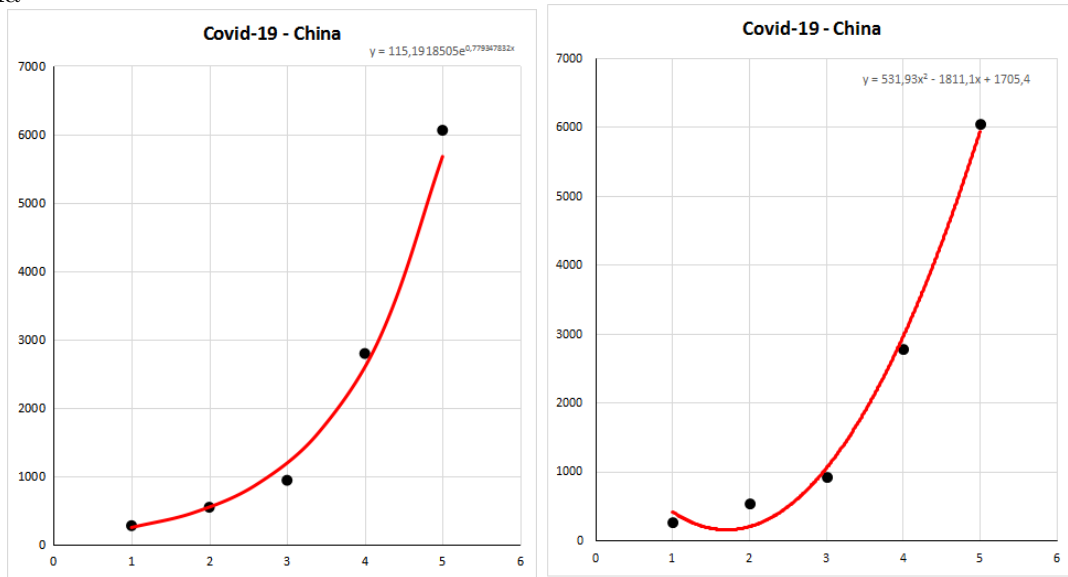
Tabela 3.14: Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 5 pontos

x	y	$\psi(exp)$	$\psi(quadr)$
1	278	251,11	426,26
2	547	547,20	210,98
3	941	1192,43	1059,56
4	2794	2598,44	2972,00
5	6057	5662,30	5948,30

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.12.

A Figura 3.25 mostra os gráficos da funções aproximadoras exponencial e quadrática para o estudo analisado, observe que a decisão do melhor ajuste baseado na análise visual fica bem difícil neste caso.

Figura 3.25: Gráfico da função aproximadora exponencial com 5 pontos - Covid-19 - China



Fonte: Próprio Autor

- 1.b) Neste caso, serão usados 12 pontos, desde o dia 20/01 até o dia 31/01, para encontrar as funções aproximadoras. Os somatórios, referentes a esses dias, obtidos de modo análogo ao processo anterior, são:

$$\begin{array}{cccc}
 \sum_{i=1}^{12} 1 = 12 & \sum_{i=1}^{12} x_i = 78 & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 650 & \sum_{i=1}^{12} x_i^3 = 6084 \\
 \sum_{i=1}^{12} x_i^4 = 60710 & \sum_{i=1}^{12} y_i = 46983 & \sum_{i=1}^{12} y_i x_i = 453214 & \sum_{i=1}^{12} y_i x_i^2 = 4618822 \\
 & \sum_{i=1}^{12} \ln y_i = 91,165 & \sum_{i=1}^{12} x_i (\ln y_i) = 645,691 &
 \end{array}$$

Logo, para a função aproximadora exponencial temos

$$\begin{bmatrix} 12 & 78 \\ 78 & 650 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91,165 \\ 645,691 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o novo Sistema, chegamos a $\alpha_1 = 5,185$, $A = 178,37$ e $\alpha_2 = 0,371$ e a **função aproximadora exponencial** para os casos de contágio na China é escrita como:

$$y = 178,037 e^{0,371 x}.$$

E, para a função aproximadora quadrática obtemos

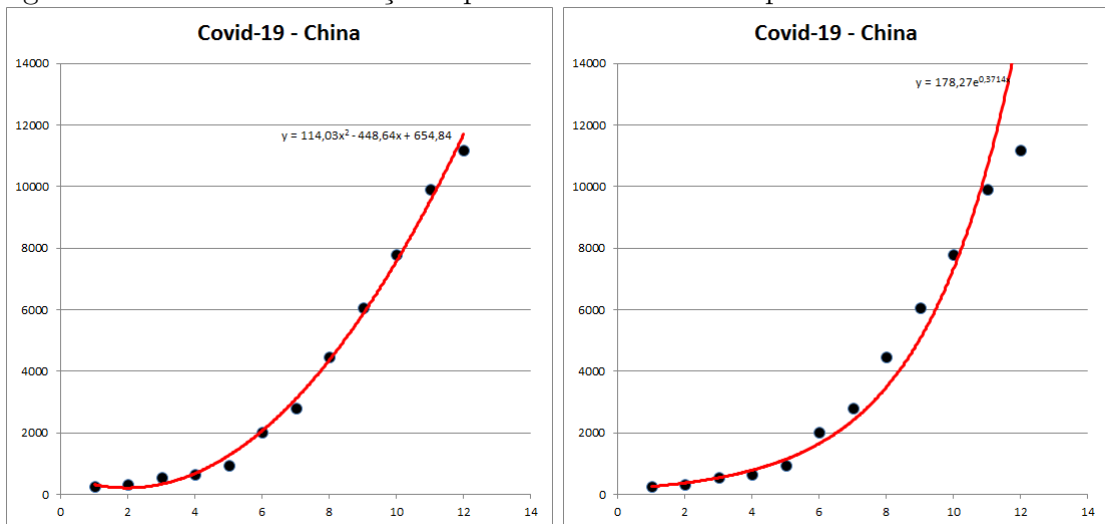
$$\begin{bmatrix} 12 & 78 & 650 \\ 78 & 650 & 6084 \\ 650 & 6084 & 60710 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46983 \\ 453214 \\ 4618822 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o Sistema, chegamos a $\alpha_0 = 114,029$, $\alpha_1 = -448,64$ e $\alpha_2 = 654,84$, assim, a **função aproximadora quadrática** para os casos de infectados na China é escrita como:

$$y = 114,03x^2 - 448,64x + 654,84.$$

A Figura 3.26 mostra o gráfico das funções aproximadoras exponencial e quadrática com 12 pontos. Neste caso, uma análise visual já sugere que o ajuste quadrático é mais adequado que o exponencial. Vejamos que informações nos fornece o cálculo dos erros quadráticos.

Figura 3.26: Gráfico das funções aproximadoras com 12 pontos - Covid-19 - China



Fonte: Próprio Autor

Tabela 3.15: Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 12 pontos

x	y	$\psi(exp)$	$\psi(quadr)$
1	278	257,99	320,23
2	326	373,87	213,68
3	547	541,78	335,19
4	639	785,12	684,76
5	941	1137,73	1262,39
6	2019	1648,73	2068,08
7	2794	2389,21	3101,83
8	4474	3462,28	4363,64
9	6057	5017,28	5853,51
10	7783	7270,69	7571,44
11	9925	10536,15	9517,43
12	11200	15268,23	11691,48

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.12.

A partir da Tabela 3.15 podemos determinar o erro quadrático para as funções aproximadoras, sendo que, para a função aproximadora Quadrática é $EQ(Quadrática) = \sqrt{767827,3} = 876,2576$ e para Exponencial é $EQ(Exponencial) = \sqrt{19654799,33} = 4433,3733$. De fato, os erros quadráticos calculados nos diz que, novamente, a função aproximadora quadrática é mais adequada e neste caso, a diferença entre os erros é bem maior do que no caso 1.a), quando visualmente não foi possível decidir pelo melhor ajuste.

- 1.c) Para o terceiro caso onde consideraremos todos os pontos temos:

Tabela 3.16: Cálculos a serem Utilizados nas Funções Aproximadoras

dia	x	y	x^2	$\ln y$	$x \ln y$
20/01	1	278	1	5,627	5,627
21/01	2	326	4	5,786	11,573
22/01	3	547	9	6,304	18,913
23/01	4	639	16	6,459	25,839
24/01	5	941	25	6,846	34,234
25/01	6	2019	36	7,610	45,662
26/01	7	2794	49	7,935	55,546
27/01	8	4474	64	8,406	67,248
28/01	9	6057	81	8,708	78,380
29/01	10	7783	100	8,959	89,596
30/01	11	9925	121	9,202	101,230
31/01	12	11200	144	9,323	111,884
01/02	13	14140	169	9,556	124,237
02/02	14	17318	196	9,579	136,633
03/02	15	19853	225	9,896	148,441
04/02	16	20704	256	9,938	159,009
05/02	17	24631	289	10,111	171,899
06/02	18	28359	324	10,252	184,548
07/02	19	31774	361	10,366	196,961
08/02	20	37198	400	10,524	210,480
09/02	21	40510	441	10,609	222,795
10/02	22	43106	484	10,671	234,771
somas	253	324576	3795	192,858	2435,517

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.12

Para obter a aproximadora exponencial substituímos os valores no sistema normal e obtemos:

$$\begin{bmatrix} 22 & 253 \\ 253 & 3795 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192,858 \\ 2435,517 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o novo sistema, chegamos a $\alpha_1 = 5,948$, $A = 382,750$ e $\alpha_2 = 0,245$ e a **função aproximadora exponencial** para os casos de contágio na China é escrita como:

$$y = 382,750 e^{0,245 x}.$$

Para a função aproximadora quadrática, além dos cálculos da tabela, temos que

$$\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^{22} 1 = 22 & \sum_{i=1}^{22} x_i = 253 & \sum_{i=1}^{22} x_i^2 = 3795 & \sum_{i=1}^{22} x_i^3 = 64009 \\ \sum_{i=1}^{22} x_i^4 = 1151403 & \sum_{i=1}^{22} y_i = 324576 & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i = 5584442 & \sum_{i=1}^{22} y_i x_i^2 = 101554462 \end{array}.$$

e obtemos o sistema normal

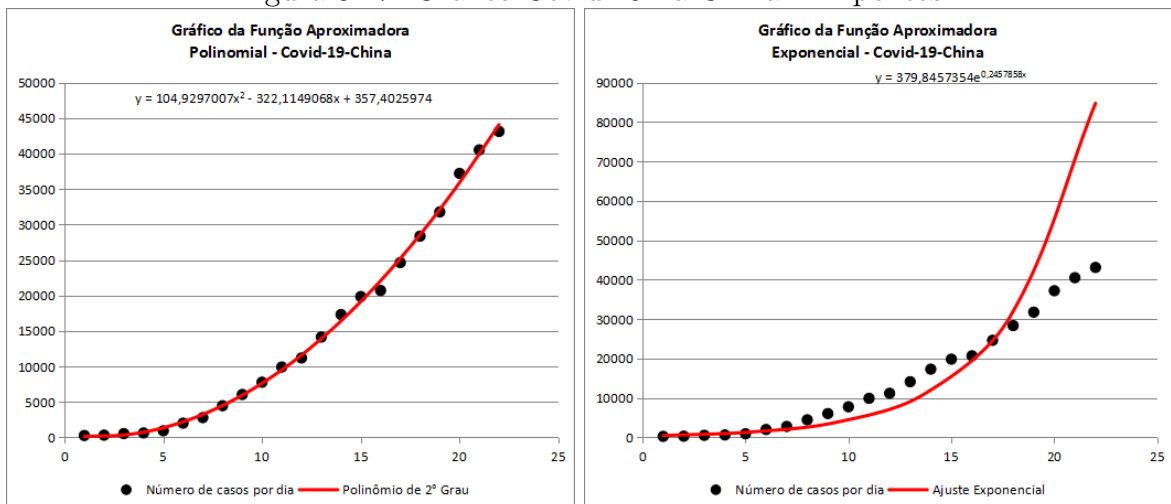
$$\begin{bmatrix} 22 & 253 & 3795 \\ 253 & 3795 & 64009 \\ 3795 & 64009 & 1151403 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324576 \\ 5584442 \\ 101554462 \end{bmatrix}.$$

que nos fornecerá a função aproximadora quadrática dada por

$$y = 104,929x^2 - 322,115x + 357,402.$$

Na sequência, a Figura 3.27 mostra os dois gráficos para as funções aproximadoras para 22 pontos.

Figura 3.27: Gráfico Covid-19 na China - 22 pontos



Fonte: Próprio Autor

Neste caso a análise visual já deixa claro que o ajuste quadrático é bem mais adequado e esperamos que a diferença entre os erros quadráticos seja bem maior do que no caso 1.b), sendo o erro quadrático para a função quadrática menor do que o erro para função exponencial.

Tabela 3.17: Cálculos para determinar erro nas funções aproximadoras - 22 pontos

x	y	$\psi(exp)$	$ \psi(exp) - y $	$\psi(quadr)$	$ \psi(quadr) - y $
1	278	488,99	210,99	140,21	137,78
2	326	624,73	298,73	132,89	193,11
3	547	798,15	251,15	335,42	211,57
4	639	1019,71	380,71	747,81	108,81
5	941	1302,77	361,77	1370,05	429,05
6	2019	1664,41	354,58	2202,16	183,16
7	2794	2126,43	667,56	3244,12	450,12
8	4474	2716,71	1757,28	4495,94	21,94
9	6057	3470,84	2586,15	5957,62	99,37
10	7783	4434,31	3348,68	7629,16	153,83
11	9925	5665,22	4259,77	9510,55	414,44
12	11200	7237,83	3962,16	11601,81	401,81
13	14140	9246,97	4893,02	13902,92	237,07
14	17318	11813,83	5504,16	16413,89	904,11
15	19853	15093,22	4759,77	19135,71	718,28
16	20704	19282,93	1421,06	22065,40	1361,40
17	24631	24635,65	4,65	25205,94	574,94
18	28359	31474,24	3115,24	28556,34	197,34
19	31774	40211,14	8437,14	32116,60	342,60
20	37198	51373,30	14175,30	35886,72	1311,27
21	40510	65633,96	25123,96	39866,69	643,30
22	43106	83853,22	40747,22	44056,53	950,53

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Tabela 3.12.

A partir da Tabela 3.17 podemos determinar o erro quadrático para as funções aproximadoras, sendo que, para a função aproximadora Quadrática é $EQ(Quadrática) = \sqrt{7667018} = 2768,93$ e para Exponencial é $EQ(Exponencial) = \sqrt{2708169834} = 52040,07$. No estudo deste caso, podemos observar que, para diferentes quantidades

de pontos considerados, o ajuste quadrático é sempre mais adequado que o exponencial, sendo que o modelo exponencial foi ficando cada vez menos adequado, a medida que a quantidade de pontos foi aumentando.

- 2. Para uma eventual projeção de casos, devemos verificar qual a posição do dia esperado em relação aos dias utilizados para os cálculos da função aproximadora. Na primeira função, o dia 05/02 seria considerado $x = 9$, devido a exclusão das posições pares da tabela. Entretanto, na segunda função o dia 05/02 corresponde a $x = 17$ uma vez que não foram excluídos valores da tabela. Os resultados encontrados são:
 - No primeiro ajuste, a função $y = 531,93x^2 - 1811,07x + 1705,4$ nos dá 28.492 infectados;
 - No segundo ajuste, $y = 114,03x^2 - 448,64x + 654,84$ nos forneceria 25.982 infectados;
 - O Governo Chinês divulgou 24.631 casos.

Podemos destacar:

1. que devemos pensar no melhor ajuste de uma forma geral e esta escolha deve se basear em instrumentos matemáticos, como por exemplo o erro quadrático, adotado neste trabalho;
 2. que a função é dinâmica e que deve ser atualizada constantemente para entender o seu comportamento, ou seja, quanto mais dados obtivermos a respeito do fato, melhor a construção da função aproximadora.
- 3. Na China, o número oficial de contaminados divulgado **no dia 11/02/2020 era 44.386**. Na função aproximadora do item 1.c), o dia 11/02/2020 corresponde a posição 23 e, assim, a estimativa para esse dia é de 48.456 casos para a função aproximadora quadrática, fornecendo esta última uma boa projeção do número divulgado.

A matemática, em especial a parte que estuda o comportamento de ajuste de curvas, nos dá um panorama do que acontecerá se nada intervir no processo ou nos diz que o modelo não corresponde a curva esperada. Nesse item, por exemplo, uma curva polinomial representa melhor os dados, embora existisse uma expectativa de que o ajuste exponencial fosse o mais adequado.

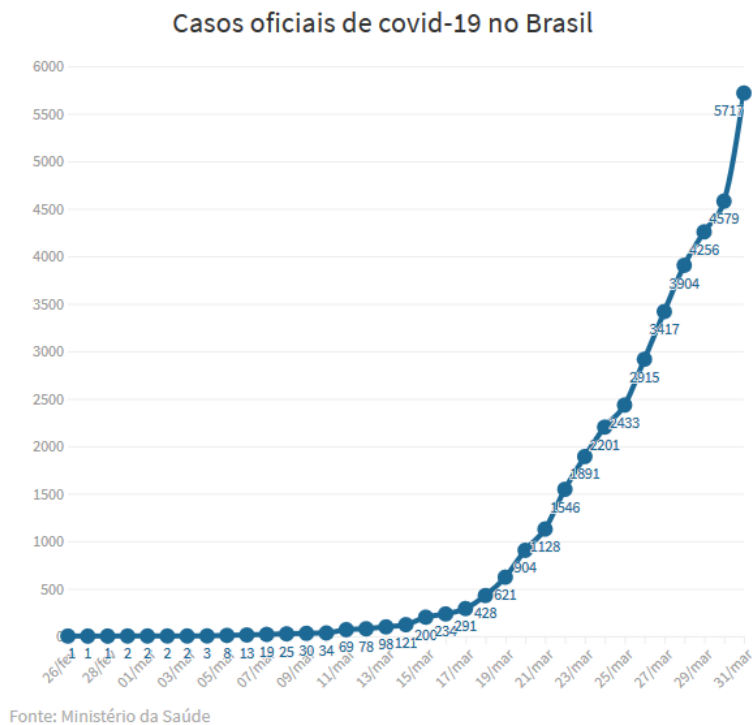
Com isso, podemos perceber a importância de abordar esse assunto do tratamento de informação com os estudantes e falar sobre as possibilidades que os softwares nos oferecem. Se formos efetuar esses cálculos, mesmo com auxílio de calculadoras, é um processo demorado, que requer confirmações.

3.4.4 Covid-19 no Brasil

Em março, a China diz ter conseguido controlar os casos de transmissão no país. Porém, na Europa os casos surgem como nos primeiros dias na China, impulsionados pela Itália, que parece não conseguir controlar o contágio. O vírus chega ao Brasil, de dezenas salta às centenas de pessoas contaminadas em poucos dias. A Europa cancela competições e alguns países proíbem aglomerações.

Apesar das mudanças no nome ou de suas mutações sofridas com o decorrer do tempo, quando a China começava a dar sinais de que estava pronta para se recuperar, Europa, Estados Unidos da América assombravam o mundo com o número de casos que apresentavam. Sem respeitar fronteiras ou nacionalidades, a curva de contágio, na visão da mídia, é praticamente a mesma em todo lugar, uma Exponencial. O “achatamento” da curva, ou seja, torná-la parecida com uma Função Logarítmica e, após, entrar num período em que ela se torna decrescente, passa a ser um objetivo comum.

Figura 3.28: Print do Gráfico com Casos Oficiais de Mortes em 31/03



Fonte: <https://noticias.uol.com.br/saude/ultimas-noticias/redacao/2020/03/31/coronavirus-brasil-casos-mortes-31-marco.htm>

A despeito da propagação, é quase certo que os dados disponibilizados contêm erros, propositais ou não, uma vez que observamos divergência no comportamento dos dados em cada região do Globo. Abaixo e ao final da seção, estão três gráficos com dados oficiais, utilizados pelo site Uol, para divulgar os casos registrados. Eles é que

nortearam o estudo aqui proposto.

Tabela 3.18: Cálculos para Funções Aproximadoras Covid-19-Brasil de 26/02/2020 à 31/03/2020

x	x^2	x^3	x^4	y (Mortes)	$\ln y$	$x \ln y$
1	1	1	1	1	0,000	0,000
2	4	8	16	1	0,000	0,000
3	9	27	81	1	0,000	0,000
4	16	64	256	2	0,693	2,772
5	25	125	625	2	0,693	3,465
6	36	216	1296	2	0,693	4,158
7	49	343	2401	2	0,693	4,852
8	64	512	4096	3	1,098	8,788
9	81	729	6561	8	2,079	18,714
10	100	1000	10000	13	2,564	25,649
11	121	1331	14641	19	2,944	32,388
12	144	1728	20736	25	3,218	38,626
13	169	2197	28561	30	3,401	44,215
14	196	2744	38416	34	3,526	49,369
15	225	3375	50625	69	4,234	63,511
16	256	4096	65536	78	4,356	69,707
17	289	4913	83521	98	4,584	77,944
18	324	5832	104976	121	4,795	86,324
19	361	6859	130321	200	5,298	100,668
20	400	8000	160000	234	5,455	109,106
21	441	9261	194481	291	5,673	119,139
22	484	10648	234256	428	6,059	133,300
23	529	12167	279841	621	6,431	147,920
24	576	13824	331776	904	6,806	163,363
25	625	15625	390625	1128	7,028	175,705
26	676	17576	456976	1546	7,343	190,929
27	729	19683	531441	1891	7,544	203,711
28	784	21592	614656	2201	7,696	215,506
29	841	24389	707281	2433	7,796	226,109
30	900	27000	810000	2915	7,977	239,328
31	961	29791	923521	3417	8,136	252,232
32	1024	32768	1048576	3904	8,269	264,632
33	1089	35937	1185921	4256	8,356	275,750
34	1156	39304	1336336	4579	8,429	286,594
35	1225	42875	1500625	5717	8,651	302,791
630	14910	396900	11268978	37174	162,532	3937,281

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Figura 3.28 (somadas efetuadas via planilha WPS)

3.4.5 Exercício

De modo análogo ao caso da Covid-19 na China e para efeitos de comparação, calcule a função aproximadora exponencial e a polinomial de 2º grau para os casos de mortes ocorridos no Brasil (Figura 3.28) considerando os dados fornecidos entre os dias 26/02 e 31/03/2020.

3.4.6 Resolução

A **aproximação exponencial**, será dada por $y = A e^{\alpha_2 x}$, com $A = e^{\alpha_1}$ e, portanto, com o auxílio da tabela 3.18 o sistema na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} 35 & 630 \\ 630 & 14910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162,532 \\ 3937,281 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o Sistema, chegamos a $\alpha_1 = -0,457$, $A = 0,633$ e $\alpha_2 = 0,283$ e a **função aproximadora exponencial** é escrita como:

$$y = 0,633e^{0,283x}$$

Para a **aproximação polinomial de grau 2**, além dos cálculos da tabela, temos que

$$\sum_{i=1}^{35} y_i x_i = 1133936 \quad \sum_{i=1}^{35} y_i x_i^2 = 35210292,$$

e assim, obtemos o sistema normal

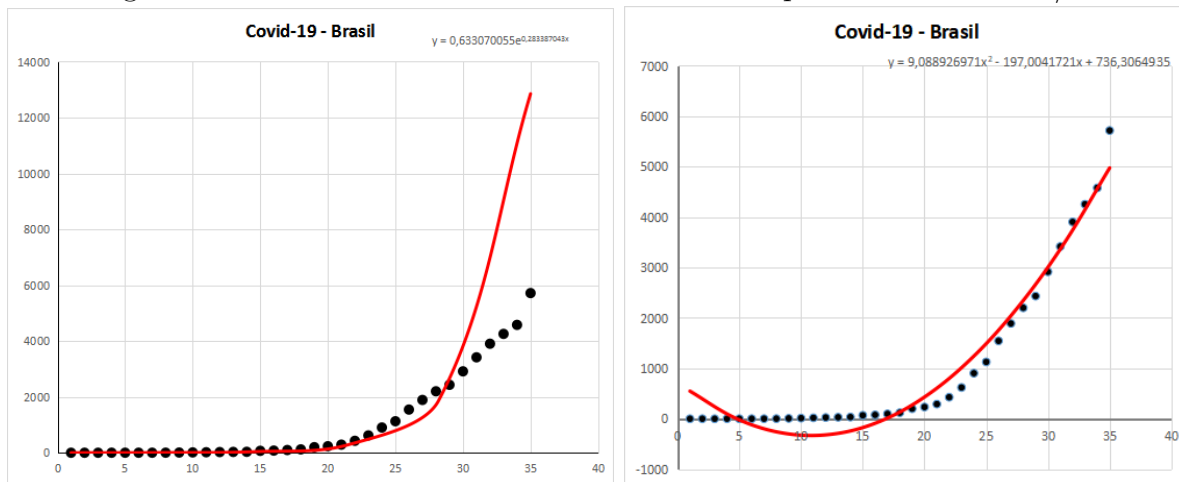
$$\begin{bmatrix} 35 & 630 & 14910 \\ 630 & 14910 & 396900 \\ 14910 & 396900 & 11268978 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37174 \\ 1133936 \\ 35210292 \end{bmatrix}.$$

que nos fornecerá a função aproximadora quadrática dada por

$$y = 9,088x^2 - 197,004x + 736,306.$$

Para determinar a melhor função aproximadora, calculamos o erro quadrático das funções aproximadoras quadrática e exponencial. Assim, o valor do erro quadrático é $EQ(Quadrática) = \sqrt{2780240} = 1667,405$ para a função aproximadora quadrática e para a exponencial é $EQ(Exponencial) = \sqrt{85512878} = 9247,317$. Podemos perceber, também, pela Figura 3.29, que a função quadrática foi a que melhor se ajustou aos dados fornecidos.

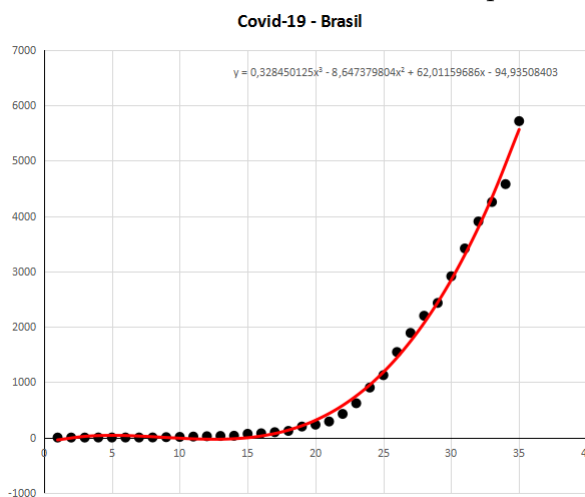
Figura 3.29: Gráfico dos Casos Oficiais de Mortes por Covid-19 até 31/03



Fonte: Próprio Autor

É claro que as funções aproximadoras são uma primeira análise de uma situação problema, no entanto, elas permitem vislumbrar um cenário inicial e fazer projeções. Quando comparamos esse resultado com o Gráfico fornecido pelo Software WPS (Figura 3.30), fica evidente a necessidade de que a escolha da função aproximadora passe pela análise da distribuição dos pontos sobre o plano cartesiano. Acreditamos ter respondido as perguntas iniciais desse Capítulo mostrando algumas aplicações para o Método dos Mínimos Quadrados.

Figura 3.30: Gráfico dos Casos Oficiais de Mortes por Covid-19 até 31/03



Fonte: Próprio Autor

Conclusão

Estamos vivenciando uma época em que a valorização do tempo está em alta. Ocupamos cada minuto com informação. Os aparelhos de comunicação cada vez mais ágeis nos proporcionam usar esse tempo de modo planejado ou aleatório dependendo do que colocamos como prioridade ou do que nos é exigido. Usamos um Smartphone para fotografar, para gravar vídeos, para nos comunicar, sem mesmo pensarmos no tempo gasto pela humanidade para chegar a esse equipamento. Algo semelhante acontece na matemática. O Método dos Mínimos Quadrados nas aplicações do Ensino Médio ou Superior, não passa de um processo de somas e multiplicações numa tabela que são transportados para uma fórmula pronta. Ao iniciarmos os primeiros passos nessa jornada também foi assim, coletamos dados, organizamos tabelas, procuramos por resultados e padrões. Mas, como observamos no primeiro capítulo, o embasamento teórico que dá força e forma ao Método dos Mínimos Quadrados é extenso. Por isso mesmo, podemos afirmar que ele está bem ancorado, que tem alicerces bons e bem definidos. Todo o conteúdo apresentado no primeiro capítulo pode ser trabalhado com os alunos do ensino médio, respeitando o objetivo de cada série. Em várias etapas do ensino médio temos que trabalhar Estatística e podemos apresentar aos alunos o método dos mínimos quadrados, resolvendo os sistemas normais, como alternativa a aplicação direta das fórmulas prontas de regressão linear. E, ainda, mostrar a eles que há mais que a regressão linear para se trabalhar. Acreditamos que é possível apresentar o conteúdo e desenvolver os exercícios com o auxílio dos softwares de que falamos no texto ou similares, uma vez que grande parte dos alunos dispõe de equipamentos que possibilitam o uso de softwares livres - como Linux, LibreOffice, Geogebra e outros. Esse uso pode ser compartilhado, possibilitando a interação entre os alunos e a troca de experiências. Aprendemos a trabalhar numa Pandemia esse ano, ela dificultou nossas aulas, nossas viagens, nossos sonhos, mas também criou novas perspectivas de encarar o mundo e a sala de aula e de superar desafios. Nossas aulas on-line, onde a câmera está desativada porque o tráfego de internet não da conta, fizeram o conteúdo chegar ao aluno mesmo sem sabermos se o aluno está realmente ali, presente, ou olhando pela janela, pensativo. Essas aulas foram baseadas na confiança mútua e na experiência que carregamos como seres humanos e precisamos rever nossos conceitos a respeito da tecnologia e aceitar de vez que elas estão presentes e temos que aprender a utilizá-las a favor

do aluno. No segundo capítulo o Método dos Mínimos Quadrados foi apresentado com suas nuances. As formas de se calcular e como são os processos para cada tipo de curva buscada. Querer enxergar uma curva exponencial, devido ao que vivemos nesse período de Pandemia, atrapalhou um pouco a execução dos experimentos no terceiro capítulo, pois, como vimos uma função aproximadora quadrática ou cúbica pode ser melhor. A plotagem dos pontos no plano cartesiano nos ajuda a identificar a curva, mesmo que não fique claro qual é, nos dá um norte a seguir e encontrar com mais precisão o que buscamos. No terceiro capítulo sofremos um revés nos dados sobre a Covid-19, primeiro porque a China mudou os métodos de cálculo de infectados, depois porque os municípios brasileiros não divulgavam os dados diariamente e, logo após, o Consórcio de Empresas de Comunicação que passou a divulgar os dados sobre a doença, uma vez que o Ministério da Saúde teve problemas para continuar essa divulgação, optou pela Média Móvel dos dados. Com isso, optamos por usar somente os primeiros dados divulgados, teoricamente sem problemas com essa divulgação. No entanto, obstante a esses problemas, no site da Johns Hopkins University é possível acompanhar a evolução da pandemia, diariamente, e obter os dados e gráficos disponibilizados ao público. Espero que o alcance desse trabalho seja o de ajudar professores interessados no assunto e em melhorar o ensino da Matemática. Ouvimos sempre que a prioridade dos políticos é com a Saúde e Educação e a esperança é de que se cumpram essas prioridades algum dia. Finalizamos esse trabalho esperando que o objetivo tenha sido alcançado e que nossa Educação seja valorizada como se deve.

Bibliografia

- [1] Apostol, T. M. *Calculus* Volume II. 2^a ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [2] Balbo, A.R. *Teoria sobre Interpolação: Método dos Quadrados Mínimos*. Disponível em <http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/interpolacao/teoria/4_Metodo_dos_quadrados_minimos.pdf>. Acesso em 25/02/2020.
- [3] Bastos, F. *Aula sobre Sistemas Lineares*. Disponível em: http://www.ufjf.br/flavia_bastos/files/2009/06/aula_lineares.pdf>. Acesso em: 14/02/2020.
- [4] Bem, C. M. de. *Modelos de Crescimento na Cultura de Crotalaria Juncea*, 2017. 102 f. Tese (Doutorado em Agronomia) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2017.
- [5] Bevilacqua, J.S. *Cálculo Numérico: Aula 10 - Método dos Mínimos Quadrados: Regressão Linear*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=zIIOWe-qfKM>>. Acesso em: 08/07/2018.
- [6] Bevilacqua, J.S. *Cálculo Numérico: Aula 11 - Método dos Mínimos Quadrados: Ajustes Polinomiais*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=kaL-j412a5A>>. Acesso em: 08/07/2018.
- [7] Boldrini, José Luís. *Álgebra Linear*, 3^a ed. São Paulo, SP: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [8] Bonjorno, J.R., Giovanni, J.R. *Matemática Completa*, Vol. 1, 2 e 3, 2^a ed. renovada. São Paulo, SP: FTD, 2005.
- [9] Bortolossi, Humberto José. *Cálculo Diferencial a várias variáveis: uma introdução à teoria de otimização*, 2^a ed. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2003.
- [10] Brandão, L.O. *Métodos Numéricos - Aula 17 - Interpolação*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=QJOqYGBSniM>>. Acesso em: 15/02/2020.

- [11] Brandão, L.O. *Métodos Numéricos - Aula 22 - Quadrados Mínimos*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=zcfurWjNnWI>>. Acesso em: 15/02/2020.
- [12] Brandão, L.O. *Métodos Numéricos - Aula 23 - Quadrados Mínimos*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=ts3PhGfLTXA>>. Acesso em: 15/02/2020.
- [13] Brandão, L.O. *Métodos Numéricos - Aula 24 - Quadrados Mínimos*. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=p27B2fszXIk>>. Acesso em: 15/02/2020.
- [14] Crespo, A.A. *Estatística Fácil*, 14^a ed. São Paulo, SP: Saraiva, 1996.
- [15] Goes, A. S. *Comparação entre Métodos de Aproximação/Interpolação Polinomial: Uma aplicação aos Histogramas de Imagens Digitais*, 2017. 106 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - FACET - UNEMAT, Sinop, 2017.
- [16] Grossinho, M. R. *Lições de Cálculo para Economia*. Lisboa: ISEG, 2009.
- [17] Hefez, A., Fernandez, C. S. *Introdução a Álgebra Linear*, 2^a ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.
- [18] Iezzi, G., Hazzan, S. *Fundamentos de Matemática Elementar*, Volume 4, 2^a ed. São Paulo, SP: Atual Editora Ltda, 1977.
- [19] Johns Hopkins University. *Coronavirus COVID-19 Global Cases by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU)*. Disponível em: <<https://gisanddata.maps.arcgis.com/apps/opsdashboard///index.html#/bda7594740fd40299423467b48e9ecf6>>. Acesso em: 02/02/2020.
- [20] Lima, E. L., et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volumes: 1, 2 e 3. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006.
- [21] Lipschutz, Seymour. *Álgebra Linear: teoria e problemas*; tradução Alfredo Alves de Faria com a colaboração de Eliana Farias e Soares; revisão técnica Antonio Pertence Junior. - 3^a ed. São Paulo, SP: Makron Books, 1994.
- [22] Martins, J. F. C. *Determinantes, propriedades e métodos de condensação*, 2015. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

- [23] Marcon, Diego. *Análise Matemática C*. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/dmarcon/analiseC2018-1/notas-indice.pdf> Acesso em 11/02/2021.
- [24] Muniz Neto, A.C. *Fundamentos de Cálculo*, 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (2^a impressão).
- [25] Oliveira, A.M.M., Aldrovande, D., Carniel, I.G. *Estatística e Pesquisa Imobiliária*. Maringá, PR: Cesumar, 2013.
- [26] Paiva, Manoel. *Matemática*. São Paulo, SP: Moderna, 2013.
- [27] Ruggiero, Márcia A. Gomes, Lopes, Vera Lúcia Da Rocha. *Cálculo Numérico - aspectos teóricos e computacionais*, 2^a ed. São Paulo, SP: Pearson Universidades, 2000.
- [28] Silva, K. F. *Um Emprego da Modelagem Matemática Sobre o Tempo de Exposição ao Sol com o Protetor Solar Fator 30*, 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Tocantins, Araraias, 2017.
- [29] Steinbruch, A., Winterle, P. *Álgebra Linear*, 2^a ed. - São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1987.
- [30] Zanardini, R.A.D. *Resolução de um Exercício Aplicado Envolvendo Mínimos Quadrados*. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=oq-BUWqEI378> >. Acesso em: 08/07/2018.