

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Paulo Cesar Fassini Barbosa

**DESBALANCEAMENTO DAS CAPACIDADES DE
PISTA DOS AERÓDROMOS: UM CÁLCULO PARA A
OBTENÇÃO MÁXIMA POR TIPO DE OPERAÇÃO**

Rio de Janeiro

2021



Paulo Cesar Fassini Barbosa

DESBALANCEAMENTO DAS CAPACIDADES DE PISTA DOS AERÓDROMOS: UM
CÁLCULO PARA A OBTENÇÃO MÁXIMA POR TIPO DE OPERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro

2021

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

B238 Barbosa, Paulo Cesar Fassini
Desbalanceamento das capacidades de pista dos
aeródromos: um cálculo para a obtenção máxima por tipo de
operação / Paulo Cesar Fassini Barbosa. - Rio de Janeiro, 2021.

99 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação,
Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equações diofantinas
lineares. 3. Capacidade de pista. I. Nicodemos, Diego de Souza.
II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Paulo Cesar Fassini Barbosa

DESBALANCEAMENTO DAS CAPACIDADES DE PISTA DOS AERÓDROMOS: UM
CÁLCULO PARA A OBTENÇÃO MÁXIMA POR TIPO DE OPERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____ / ____ / ____.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)
PROFMAT Colégio Pedro II

Prof.^a Dra. Mayara Condé Rocha Murça
ITA

Prof.^a Dra. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT Colégio Pedro II

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT Colégio Pedro II

Rio de Janeiro

2021

Dedico este trabalho a Deus, a minha esposa, a minha filha e aos meus familiares. Sempre estiveram ao meu lado dando suporte para minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter traçado este caminho para minha vida, abrindo novas portas, possibilitando tamanha alegria ao frequentar este curso e fazendo amizades verdadeiras.

Agradeço a minha esposa Fernanda pelo carinho, pelo apoio e por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a minha filha Sofia que nasceu durante este mestrado, motivo de muita felicidade e me deu forças para concluir o desafio.

Agradeço aos meus pais Paulo Cesar e Elizabeth e a minha avó Lisbeth que além do exemplo de vida, sempre participaram de minha educação.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação, especialmente ao meu amigo e orientador, professor Dr. Diego Nicodemos, que para mim é um exemplo a ser seguido.

Agradeço muito aos amigos do PROFMAT pelos inúmeros momentos de alegria e pelos estímulos dados nos momentos difíceis demonstrando exemplo de companheirismo.

Agradeço aos amigos do DECEA, do CGNA e do ITA, especialmente à Capitã Mayara, Suboficial Lourenço, 1º Sgt Godoy e 1º Sgt Barreto, pela motivação e conclusão dessa pesquisa.

Este trabalho só se tornou possível com a presença de todos esses citados.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar. Mas
o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

BARBOSA, P. C. F. **Desbalanceamento das Capacidades de Pista dos Aeródromos: um Cálculo para a Obtenção Máxima por Tipo de Operação**, 2021, 99 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

O Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pistas após ser modelado pode ser abordado e resolvido através das Equações Diofantinas Lineares e de Combinações Completas (ou Permutações com Repetição). O Objetivo deste trabalho é desenvolver uma solução matemática para o problema de estimação da capacidade de pista sob operação mista com mix variado de pousos e decolagens, e tem a pretensão de mostrar que podemos resolver grandes problemas atuais no campo da aviação através da Matemática Básica. A metodologia utilizada, neste trabalho, para o Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pistas mostrou-se inédita no campo aeronáutico, evidenciando a originalidade e relevância desta pesquisa. Além das contribuições concernentes ao setor aeronáutico, vislumbramos a aplicação deste problema no Ensino Básico com o propósito de despertar o interesse dos discentes para a relevância da Matemática no decorrer do processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Capacidade de Pista; Desbalanceamento; Equações Diofantinas Lineares; Combinação Completa; Permutação com Repetição.

ABSTRACT

BARBOSA, P. C. F. **Unbalance of Aerodrome Runway Capacities: a Calculation for Maximum Obtaining by Operation Type**, 2021. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

The Runway Capacities Unbalance Problem after being modeled can be approached and solved through Diophantine Linear Equations and Complete Combinations (or Permutations with Repetition). The objective of this work is to develop a mathematical solution to the problem of estimating runway capacity under mixed operation with a varied mix of landings and takeoffs, and aims to show that we can solve major current problems in the field of aviation through Basic Mathematics. The methodology used, in this work, for the Runway Capacities Unbalance Problem proved to be unprecedented in the aeronautical field, showing the originality and relevance of this research. In addition to the contributions concerning the aeronautical sector, we envision the application of this problem in Basic Education with the purpose of arousing the interest of students to the relevance of Mathematics during the teaching-learning process.

Keywords: Runway Capacity; Unbalance; Linear Diophantine Equations; Complete Combination; Repetition Permutation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Dimensão 22.....	19
Figura 2 - SIGMA: Sistema Integrado de Gestão de Movimentos Aéreos	22
Figura 3 - PDA referente ao Aeroporto Internacional de Belém (SBBE).....	24
Figura 4 - SBBE: Aeroporto Internacional de Belém-PA.....	25
Figura 5 - Trajetória do PMT2018	26
Figura 6 - Passagem de Navio nas Proximidades do SBRJ	27
Figura 7 - Exemplo de nomenclatura de pistas paralelas para o SBRJ	29
Figura 8 - Pista, Norte Magnético e Vento.....	30
Figura 9 - Aeroporto Internacional de Corumbá-MS (SBCR).....	33
Figura 10 - Aeroportos Vizinhos	34
Figura 11 - Envelope de Capacidade do SBRF	36
Figura 12 - Integrantes da 1ª Reunião do Grupo Ad Hoc Capacidade ATC	40
Figura 13 - SBRF: Aeroporto Internacional do Recife/Guararapes	41
Figura 14 - TOA em SBF1.....	43
Figura 15 - TOD em SBF1	43
Figura 16 - TOA e TOD em SBBR	44
Figura 17 - Capacidade de pista de alguns dos principais aeroportos americanos ..	73
Figura 18 - SBGL: Aeroporto Internacional Tom Jobim/Galeão.....	76
Figura 19 - KATL: Aeroporto Internacional de Atlanta	77
Figura 20 - Solução da Atividade 2	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Metodologias de Capacidade de Pista	38
Tabela 2 - MIX de SBGR	45
Tabela 3 - Relação entre Fator α , Separação Mínima em Milhas para Pouso e Número Máximo de Pousos	47
Tabela 4 - Soluções inteiras para a Equação $2x + 3y = 10$	52
Tabela 5 - Algoritmo de Euclides referente ao Exemplo 4.5	54
Tabela 6 - Algumas soluções do Exemplo 4.1.1	56
Tabela 7 - Soluções naturais do Exemplo 4.1.1	57
Tabela 8 - Cálculo do $\text{mdc}(2,3)$	58
Tabela 9 - Soluções do Exemplo 4.1.2	59
Tabela 10 - Soluções do Exemplo 5.1.1	61
Tabela 11 - Soluções Inteiras do Exemplo 5.6.2	67
Tabela 12 - Soluções Inteiras do Exemplo 5.6.3	69
Tabela 13 - Atividade 1	73
Tabela 14 - Valores da Tarifa de Embarque	79
Tabela 15 - Solução da Atividade 1	84
Tabela 16 - Algoritmo de Euclides referente a Atividade 4	88
Tabela 17 - Soluções da Atividade 4	89
Tabela 18 - Soluções Inteiras da Atividade 4	89
Tabela 19 - Soluções da Atividade 7	93
Tabela 20 - Soluções Inteiras da Atividade 7	93

LISTA DE SIGLAS

ARR	Arrival (Pouso)
ATC	Air Traffic Control (Controle de Tráfego Aéreo)
ATFM	Air Traffic Flow Management (Gerenciamento de Fluxo de Tráfego Aéreo)
ATM	Air Traffic Management (Gerenciamento de Tráfego Aéreo)
CDM	Collaborative Decision Making (Processo de Decisão Colaborativa)
CGNA	Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea
DECEA	Departamento de Controle do Espaço Aéreo
DEP	Departure (Decolagem)
FAA	Federal Aviation Administration (Administração Federal da Aviação)
GFTA	Gerentes de Fluxo de Tráfego Aéreo
ICA	Instrução do Comando da Aeronáutica
KATL	Aeroporto Internacional de Atlanta
LFPG	Aeroporto de Paris/Charles de Gaulle
MCA	Manual do Comando da Aeronáutica
NSCA	Norma do Sistema do Comando da Aeronáutica
PDA	Plano Diário ATFM
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBAR	Aeroporto Internacional de Aracaju
SBBE	Aeroporto Internacional de Belém
SBBR	Aeroporto Internacional de Brasília
SBCG	Aeroporto Internacional de Campo Grande
SBCR	Aeroporto Internacional de Corumbá
SBFI	Aeroporto Internacional de Foz do Iguaçu
SBGL	Aeroporto Internacional Tom Jobim/Galeão
SBGR	Aeroporto Internacional de São Paulo/Guarulhos
SBMQ	Aeroporto Internacional de Macapá
SBRF	Aeroporto Internacional do Recife/Guararapes
SBRJ	Aeroporto do Rio de Janeiro - Santos Dumont
SIGMA	Sistema Integrado de Gestão de Movimentos Aéreos
SISCEAB	Sistema de Controle do Espaço Aéreo Brasileiro

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 GERENCIAMENTO DE FLUXO DE TRÁFEGO AÉREO	18
3 CAPACIDADE DE PISTA E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO	28
3.1 Capacidade de Pista	28
3.2 Desbalanceamento ou Capacidade Dinâmica	39
4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES	49
4.1 Soluções Naturais de uma Equação Diofantina Linear	55
5 O DESBALANCEAMENTO PELA COMBINATÓRIA	60
5.1 Princípio Multiplicativo	60
5.2 Fatorial	62
5.3 Permutações Simples	62
5.4 Permutações com Repetição	63
5.5 Combinações Simples	63
5.6 Combinações Completas	64
6 ATIVIDADES PROPOSTAS	72
6.1 Atividade 1	73
6.2 Atividade 2	75
6.3 Atividade 3	75
6.4 Atividade 4	75
6.5 Atividade 5	75
6.6 Atividade 6	76
6.7 Atividade 7	76
6.8 Atividade 8	77
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DE ATIVIDADES PROPOSTAS	84
Sugestão de Solução da atividade 1	84
Sugestão de Solução da atividade 2.....	85

Sugestão de Solução da atividade 3.....	86
Sugestão de Solução da atividade 4.....	87
Sugestão de Solução da atividade 5.....	90
Sugestão de Solução da atividade 6.....	91
Sugestão de Solução da atividade 7.....	92
Sugestão de Solução da atividade 8.....	96
APÊNDICE B - ARTIGO 01 E ARTIGO 02	97
Artigo 01	97
Artigo 02	98

1. INTRODUÇÃO

Vale fazermos algumas considerações acerca do tema, sua justificativa de escolha e a sua relevância aos estudos da Matemática.

Em 2017, ao ser convidado a trabalhar no *Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea* (CGNA), conheci a Seção de Análise de Capacidade que estava à procura de uma nova metodologia para o cálculo das Capacidades de Pista. Por saberem da minha formação em Matemática e da recente aprovação no mestrado, apresentaram-me a maneira adotada, por este Centro, que está contida no *Manual do Comando da Aeronáutica* (MCA) 100-14 – Capacidade do Sistema de Pistas. Neste manual, calcula-se a capacidade da pista que corresponde a quantidade de movimentos (pousos e decolagens de aeronaves), no período de uma hora (60 minutos). Utilizando então a ideia do balanceamento para a distribuição desses movimentos, sendo 50% para o número de pousos e 50% para o de decolagens.

Um exemplo interessante ocorreu com a companhia aérea Air France quando tentava obter autorização de operação de um voo de Paris (aeroporto de Paris-Charles de Gaulle - LFPG¹) para o Rio de Janeiro (aeroporto Internacional Tom Jobim/Galeão - SBGL). A capacidade do SBGL era de 44 movimentos, ou seja, poderiam ser aprovados no máximo 22 pousos e 22 decolagens por hora. O voo seria o 23º a pousar naquele horário. Sendo assim, não foi autorizado. Esse método de balanceamento estava ficando inadequado, visto que naquele horário, havia menos de 22 decolagens. Devido a exemplos como este, o setor passou a refletir sobre essa regra, vislumbrando a possibilidade do desbalanceamento.

O termo técnico *Estimação da Capacidade de Pista com Operação Mista sob Mix Variado de Pousos e Decolagens*, será tratado de forma simplificada por *Desbalanceamento* ou *Capacidade Dinâmica*. Esta análise consiste em distribuir de forma desigual as operações (pousos e decolagens), otimizando e atendendo o crescimento da demanda, visto que em determinados horários, temos mais decolagens que pousos ou vice-versa.

As Administradoras Aeroportuárias investem no sistema de pistas de seus aeroportos com a finalidade de aumentar sua capacidade, gerando maior

¹ A OACI, Organização da Aviação Civil Internacional, visando padronizar e facilitar a identificação dos aeroportos dos países membros, criou um código de quatro letras exclusivo para cada aeroporto. Os códigos são chamados "Indicador de Localidade" e estão definidos no Documento 7910 da OACI. Veremos muitos desses indicativos nesse trabalho como LFPG, SBGR, SBRJ, dentre outros.

movimentação e lucro. Com isso, procuram o *Departamento de Controle do Espaço Aéreo* (DECEA) que é o órgão máximo do *Sistema de Controle do Espaço Aéreo Brasileiro* (SISCEAB) para a efetivação desse aumento. Por tudo isso, torna-se necessário o desenvolvimento de um método mais eficiente para o cálculo da capacidade.

A apresentação deste problema motivou o presente trabalho do *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT). Passei então a estudar e conhecer mais o Setor de Capacidade para contribuir com a nova *Metodologia para Obtenção Máxima de Capacidade por tipo de Operação*. O Setor de Capacidade é dividido em Capacidade de Pista e Capacidade de Setor ATC², cada um com sua metodologia própria. No segundo semestre de 2018, ao estudar as Equações Diofantinas e as Permutações com Repetição ou Combinação Completa, surgiu a ideia de unir esses setores da Capacidade através de uma equação.

Iniciamos os estudos de uma nova metodologia para este problema que além de contribuir para a comunidade aeronáutica, evidencia a importância da aplicação da Matemática nas relações interculturais que nela se desenvolvem. A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) destaca a investigação matemática aplicada a contextos diversos e outras áreas do conhecimento:

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471)

O Objetivo Geral deste trabalho é apresentar uma solução matemática para o Problema do Desbalanceamento da Capacidade de Pistas dos Aeroportos. Os Objetivos Específicos vão desde mostrar aos alunos como conteúdos de Matemática Básica podem ser úteis para solucionar grandes questões da vida real, como

² ATC significa Controle de Tráfego Aéreo. Capacidade de Setor ATC é o número de aeronaves sob responsabilidade simultânea de um Setor de Controle ATC.

também popularizar o estudo de conceitos matemáticos pouco explorados no Ensino Básico como as Equações Diofantinas Lineares e as Combinações Completas.

Para isto, dividimos o trabalho em 7 capítulos. No Capítulo 2, descrevemos o funcionamento do Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea (CGNA), cujo propósito central é o Gerenciamento de Fluxo de Tráfego (ATFM), as fases do ATFM e o processo de Tomada de Decisão Colaborativa (CDM). No Capítulo 3, abordamos a antiga Metodologia da Capacidade de Pistas, pesquisas relacionadas a este problema e a nova metodologia proposta e implementada por este trabalho. No Capítulo 4, investigamos as Equações Diofantinas Lineares, caracterizando a existência de seu conjunto solução. O Capítulo 5, aborda os conceitos de Permutação com Repetição e Combinação Completa. Propomos, no Capítulo 6, o *rol* de atividades concernentes ao Problema do Desbalanceamento para serem trabalhadas no Ensino Básico.

2. GERENCIAMENTO DE FLUXO DE TRÁFEGO AÉREO

Antes de falarmos sobre o CGNA³, devemos conhecer um pouco sobre o SISCEAB, Sistema de Controle do Espaço Aéreo Brasileiro, e o DECEA, Departamento de Controle do Espaço Aéreo.

O SISCEAB, é definido pela Norma do Sistema do Comando da Aeronáutica (NSCA) 351-1 (BRASIL, 2010, p. 9) como:

O Sistema que tem por finalidade prover os meios necessários para o gerenciamento e o controle do espaço aéreo e o serviço de navegação aérea, de modo seguro e eficiente, conforme estabelecido nas normas nacionais e nos acordos e tratados internacionais de que o Brasil seja parte. As atividades desenvolvidas no âmbito do SISCEAB são aquelas realizadas em prol do gerenciamento e do controle do espaço aéreo, de forma integrada, civil e militar, com vistas à vigilância, à segurança e à defesa do espaço aéreo sob a jurisdição do Estado Brasileiro.

Para termos uma noção da grandiosidade desse sistema, em 2017, a Força Aérea Brasileira lançou o conceito Dimensão 22, que sintetiza a responsabilidade de atuação da Instituição em sua missão de manter a soberania do espaço aéreo e integrar o território nacional, com vistas à defesa da Pátria, em uma área de 22 milhões de km², com as ações de Controlar, Defender e Integrar.

O DECEA é o órgão central do SISCEAB, responsável por “todos os serviços que demandam um alto grau de tecnologia, mão de obras, pesquisa e planejamento especializados, relacionados à gestão e ao gerenciamento de nosso espaço aéreo” (BRASIL, 2016, p. 14). Foi estabelecido para consolidar, formalmente, a integração dos meios civis e militares.

³ Sugerimos ao leitor que acesse o vídeo institucional do CGNA, <https://youtu.be/n-4pEoFL48>, afim de ter uma informação mais dinâmica do que é o CGNA e sua importância para a aviação.

Figura 1 - Dimensão 22



Total: 22 MILHÕES DE KM²

Fonte: Imagem retirada do site www.fab.mil.br/dimensao22 e editada pelo autor (2020).

O CGNA, Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea é o órgão operacional central do DECEA que foi ativado em 31 de agosto de 2007, tendo como missão:

a harmonização do gerenciamento de fluxo de tráfego aéreo e das demais atividades relacionadas com a navegação aérea, proporcionando a gestão operacional das ações correntes dos processos de Gerenciamento do Tráfego Aéreo (ATM) e de infraestrutura relacionada, visando à suficiência e à qualidade dos serviços prestados no âmbito do Sistema de Controle do Espaço Aéreo Brasileiro (SISCEAB). (BRASIL, 2017, não paginado)

O CGNA é responsável por manter o equilíbrio, o **balanceamento** entre a **capacidade** do Sistema e a **demand**a dos movimentos aéreos no País (incluindo as aeronaves militares) de forma a proporcionar um fluxo seguro, ordenado e eficiente. Devemos garantir que a capacidade do sistema seja utilizada na sua máxima extensão possível e que o volume de tráfego seja compatível com as capacidades declaradas pela autoridade competente.

A entrada em operação do CGNA modernizou o controle de tráfego aéreo nacional, facilitando o trabalho de pilotos e controladores de voo, proporcionando maior economia de combustível, sem perder de vista a segurança das operações aéreas.

Em suma, o SISCEAB é o conjunto de órgãos e instalações de auxílios à navegação aérea, radares de vigilância, torres de controle, estações de telecomunicações e recursos humanos, responsável pela execução operacional das atividades que materializam o cumprimento das metas e atribuições estabelecidas pelo DECEA, cabendo ao CGNA o serviço ATFM (Gerenciamento de Fluxo de Tráfego).

A base do ATFM é o balanceamento entre capacidade e demanda. O conhecimento e a determinação desses parâmetros são de fundamental importância para a prestação desse serviço. A busca pelo equilíbrio entre estes dois elementos não somente tem constituído um fim a ser alcançado, mas também tem fomentado o desenvolvimento de diversos estudos de **Cálculo de Capacidade**, com a finalidade de fazer com que o sistema operacionalize de forma otimizada e segura conforme as necessidades dos usuários.

O serviço ATFM é dividido em quatro etapas: Estratégica, Pré-Tática, Tática e Pós-operações. Essas etapas constituem um ciclo contínuo de planejamento, ação e revisão. É importante que os elos operacionais estejam completamente envolvidos em cada fase.

A Fase **Estratégica** corresponde às ações efetuadas com antecedência de mais de uma semana em relação ao dia de início do evento ou das operações. É a etapa onde ocorre a primeira avaliação de capacidade/demanda baseada na consulta dos planos de voo e no histórico de voos não regulares. Havendo maior demanda que capacidade, as principais providências a serem adotadas são: coordenar, com o órgão ATC⁴ pertinente, as ações necessárias para se prover a capacidade adequada nos períodos exigidos, planejar o redirecionamento de determinados fluxos de tráfego, reprogramar os voos como apropriado, identificar a

⁴ Órgãos ATC são os órgãos operacionais responsáveis pela prestação dos serviços de controle de tráfego aéreo. Basicamente, há três tipos de acordo com a fase do voo: TWR, APP e ACC.

TWR - abreviação do termo inglês Tower. Torre de Controle de Aeródromo.

APP - abreviação do termo inglês Approach. Controle de Aproximação.

ACC - abreviação do termo inglês Area Control Center. Centro de Controle de Área.

necessidade de ações táticas do ATFM. O principal resultado desta fase é a criação de um plano composto de uma lista de hipóteses e previsões de capacidades resultantes e medidas de contingência. De acordo com o DOC 9971 da OACI⁵ (Organização de Aviação Civil Internacional) o gerenciamento da demanda e capacidade na fase estratégica é uma das maneiras de se alcançar o objetivo do gerenciamento de fluxo de tráfego aéreo.

A Fase **Pré-Tática** corresponde às ações tomadas a partir de uma semana, inclusive, até um dia antes do evento. Como esta fase está mais próxima do evento, ocorre uma atualização do planejamento estratégico com o levantamento de dados meteorológicos, infraestrutura e eventos especiais. O resultado desta etapa é o Plano Diário ATFM (PDA).

A Fase **Tática** corresponde às ações efetuadas no dia da operação. Esta fase ocorre no Salão Operacional do CGNA, onde os Gerentes de Fluxo de Tráfego Aéreo (GFTA) em constante **Análise ATFM**, colocam em prática o previsto no PDA. Porém, situações adversas podem ocorrer e medidas são aplicadas para minimizar os efeitos. Dentre esses eventos podemos citar: meteorologia (evento mais comum), aeronave em emergência, inoperância de auxílios à navegação, animais na pista, aeronave com pneu furado, colisão com pássaros dentre muitos outros. Quanto à aplicação de medidas, exposta a situação, é realizado um CDM (Processo de Decisão Colaborativa) com os envolvidos para que a melhor solução seja tomada. No final do dia do evento, é confeccionado um relatório detalhado para futuras referências.

Em contato com o Suboficial C. Rocha, supervisor do Salão Operacional, consultor do Pós-Operação e doutorando em Letras pela USP-SP, fui apresentado a melhor definição de **Análise ATFM**: é o conjunto de procedimentos realizados pelo GFTA na prestação do Serviço ATFM; constitui-se de exame e monitoramento constantes dos cenários regionais e nacionais com vistas ao (re)planejamento de medidas ATFM que garantam o melhor aproveitamento das capacidades

⁵ A OACI é a agência especializada das Nações Unidas responsável pela promoção do desenvolvimento seguro e ordenado da aviação civil mundial, por meio do estabelecimento de normas e regulamentos necessários para a segurança, eficiência e regularidade aéreas, bem como para a proteção ambiental da aviação. Com sede em Montreal, Canadá, a OACI é a principal organização governamental de aviação civil. O Brasil é um Membro-Fundador e dispõe de uma Delegação Permanente junto ao Conselho da OACI. Fonte: anac.gov.br. Acesso em: 05 de dezembro de 2020.

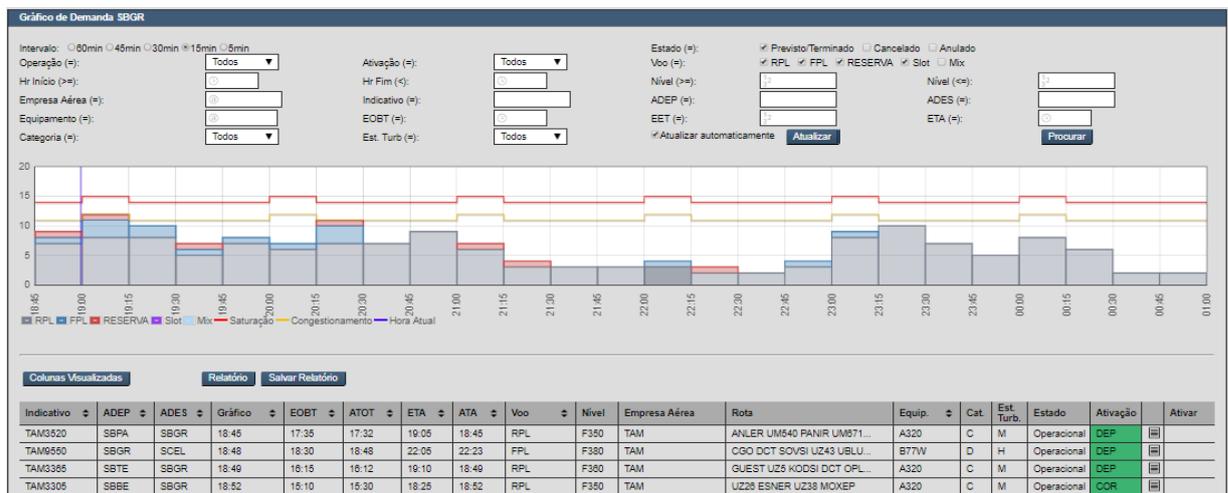
O DOC9971 é um Manual CDM (Processo de Decisão Colaborativa).

disponíveis, bem como uma recuperação rápida e eficiente do sistema ante situações de contingência ou redução abrupta de capacidade, seja nos aeródromos ou em setores do espaço aéreo.

A etapa **Pós-Operação** é a fase em que são gerados relatórios diários das atividades e avaliação de desempenho da operação do dia anterior, com o objetivo de buscar o constante melhoramento, visando a uma qualidade superior e contínua do processo ATFM, por meio das lições aprendidas.

A Figura 2 apresenta uma visualização do SIGMA (Sistema Integrado de Gestão de Movimentos Aéreos) que é a ferramenta mais importante do processo de análise ATFM. Esta figura exibe uma análise da demanda referente aos movimentos de SBGR. As barras verticais são os movimentos (pousos e decolagens), a linha amarela é a de congestionamento, a linha vermelha é a de saturação, a tabela abaixo do gráfico é referente aos dados de todas as aeronaves que serão movimentadas em Guarulhos no intervalo de tempo proposto. Estes parâmetros auxiliam os gerentes de tráfego aéreo na adoção das melhores técnicas em um processo de tomada de decisão colaborativa (CDM).

Figura 2 - SIGMA: Sistema Integrado de Gestão de Movimentos Aéreos



Fonte: SIGMA/CGNA (2020).

Segundo a ICA 100-22 (2018), CDM é o processo que permite que as decisões sejam tomadas combinando todas as fontes de informação pertinentes e verídicas, assegurando que os dados reflitam melhor a situação em si e garantindo

que todos os elos tenham a oportunidade de participar das decisões. Isso permite que as decisões sejam tomadas de acordo com as necessidades operacionais de todos os interessados.

Para ficar mais claro o processo de análise ATFM envolvendo as fases e processo CDM, vamos ilustrar através do Exemplo 2.1.

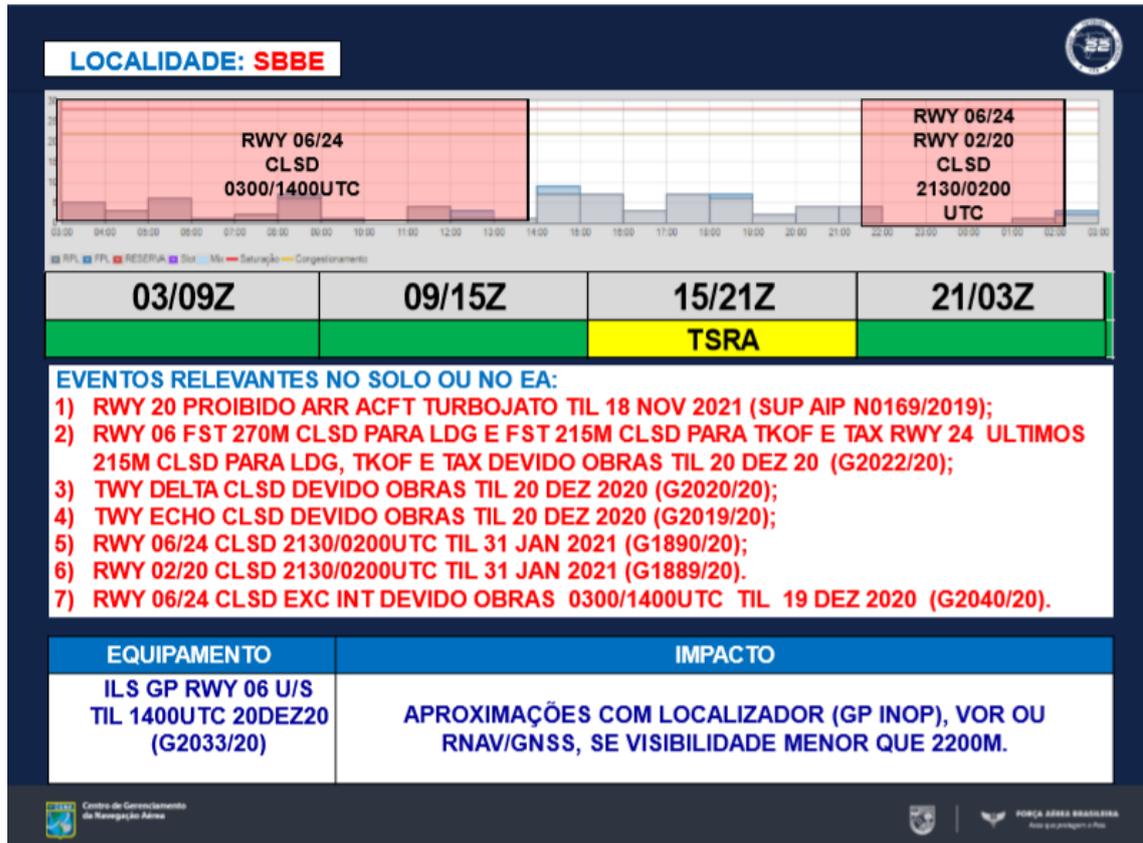
Exemplo 2.1

O CGNA recebeu a notificação do administrador aeroportuário de Belém sobre obras nas pistas e *taxiways* com as respectivas datas e horários. Começa então a fase Estratégica com avaliação de capacidade/demanda baseada na consulta dos planos de voo. Ajustes nos horários de voos impactados são realizados para que esses voos não sejam cancelados. A fase Pré-Tática analisa se há inoperâncias de auxílios à navegação, meteorologia, divulga o NOTAM⁶ sobre as obras e faz o PDA para a fase Tática.

A Figura 3 mostra o slide do PDA referente à análise feita sobre o aeroporto de Belém (SBBE). Este PDA está dividido em quatro partes. A primeira é um gráfico retirado do SIGMA com os voos previstos para o dia com duas faixas vermelhas mostrando os horários de interdição das pistas para obras. A segunda é um gráfico colorido mostrando a meteorologia (previsão do tempo) associada à quatro faixas horárias. As três faixas verdes significam tempo bom e a faixa amarela (das 15h00 às 21h00) indica TSRA (TS = *thunderstorm* = trovoadas, RA = *rain* = chuva). A terceira parte é composta pela relação de eventos relevantes no solo ou no espaço aéreo que serão descritos adiante. Na quarta parte, temos as inoperâncias de auxílios à navegação com o respectivo impacto.

⁶ NOTAM significa *Notice to Airman* (aviso aos aeronavegantes) e é uma mensagem que tem por finalidade divulgar alterações e restrições temporárias que possam ter impacto nas operações aéreas, como, por exemplo, a indisponibilidade de um determinado auxílio à navegação aérea, uma pista que esteja interditada, o fechamento de uma porção do espaço aéreo, etc. Fonte: DECEA.

Figura 3 - PDA referente ao Aeroporto Internacional de Belém (SBBE)



Fonte: CGNA (2020).

A fase Tática é iniciada no Salão Operacional. Antes da assunção do serviço, a equipe de GFTA participa de um briefing com todas as situações previstas e analisadas para aquele turno, incluindo o PDA acima. Dentre os óbices previstos para SBBE (eventos relevantes no solo ou no espaço aéreo) podemos relacionar:

- 1) Proibido pouso de aeronaves turbojato na RWY 20;
- 2) RWY 06: primeiros 270m fechados para pousos e primeiros 215m fechados para decolagens e taxi, RWY 24: últimos 215m fechados para pousos, decolagens e taxi; devido obras até 20DEZ2020;
- 3) Taxiway D fechada para obras;
- 4) Taxiway E fechada para obras;
- 5) RWY 06/24 fechada das 21h30 às 02h00;
- 6) RWY 02/20 fechada das 21h30 às 02h00;
- 7) RWY 06/24 fechada exceto interseção com RWY 02/20 das 03h00 às 14h00 devido obras.

Figura 4 - SBBE: Aeroporto Internacional de Belém



Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

Consideremos que a pista em uso em Belém fosse a 20 e a aeronave PMT2018 (PROFMAT2018) de SBBR para SBBE, que é um Boeing 737 (turbojato), estivesse estimando o pouso às 13h30. Neste horário, de acordo com o PDA, a RWY 06/24 estava fechada (Figura 4) devido a obras (item 7 acima), não podendo o turbojato pousar na RWY 20 (item 1 acima). Além disso, se não fosse a pancada de chuva com vento forte que ocorreu conforme previsto, a aeronave poderia pousar na RWY 02. Desta maneira, foi realizado um CDM no Salão Operacional com um representante das administradoras aeroportuárias que informou quais aeroportos estariam disponíveis para receber este tráfego, um representante da empresa PROFMAT de Aviação⁷ para ajudar na avaliação, um oficial previsor do tempo para avaliar as condições meteorológicas desses aeroportos e um GFTA responsável por conduzir o CDM e assim chegar a melhor opção que foi alternar o voo para SBMQ (Aeroporto Internacional de Macapá) como mostra a Figura 5.

⁷ Há representantes das grandes empresas aéreas no CGNA 24 horas por dia. Tanto a empresa PROFMAT de Aviação quanto sua aeronave PMT2018 são fictícias, criadas pelo autor para ilustrar o exemplo.

Figura 5 - Trajetória do PMT2018



Fonte: Imagem retirada do site www.flightradar24.com e editada pelo autor (2020).

O Exemplo 2.2 mostra que as situações mais diversas podem ocorrer e impactar a operação dos aeroportos. A Figura 6 é a parte do PDA referente ao SBRJ, ilustrando mais uma análise.

Exemplo 2.2

Um navio transatlântico vai passar no eixo da RWY 02/20 do SBRJ, suspendendo momentaneamente as operações por 20 minutos (exceto DEP da RWY 20 que ocorre do lado oposto à travessia). Este período é referente ao cruzamento do alinhamento da pista que compreende o trecho entre o início do canal e a entrada/saída do Pier Mauá. Esses navios podem chegar a uma altura de quase 80 metros, podendo comprometer a segurança. Os GFTA coordenam as medidas implementadas com os órgãos ATC envolvidos, afim de diminuir os possíveis atrasos à aviação.

Figura 6 - Passagem de navio nas proximidades do SBRJ



Fonte: CGNA (2020)

3. CAPACIDADE DE PISTA E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

Neste capítulo, abordamos a metodologia que era utilizada na medição da Capacidade, algumas considerações sobre pistas, pesquisas relacionadas a este trabalho, tipos de metodologias de obtenção da Capacidade e por fim, o Desbalanceamento ou Capacidade Dinâmica.

3.1 Capacidade de Pista

Antes de definir a Capacidade de Pista definimos pista e citamos uma curiosidade a seu respeito. De acordo com a ICA 100-12 – Regras do Ar. 2016, *Pista* ou *Sistema de Pistas* é uma área retangular definida, em um aeródromo terrestre, preparada para o pouso e decolagem de aeronaves. As extremidades das pistas são chamadas de *cabeceiras* e são identificadas por dois algarismos, que indicam o seu alinhamento em relação ao norte magnético. É comum encontrarmos em documentos aeronáuticos o termo RWY que é a abreviação do termo inglês *RUNWAY* que significa pista. Se uma cabeceira é identificada por 14 (RWY 14), significa que seu alinhamento está compreendido entre os rumos magnéticos 136° e 145°, enquanto a RWY 15 possui alinhamento compreendido entre os rumos 146° e 155°. Se uma cabeceira é identificada por 05, significa que seu alinhamento está compreendido entre os rumos 046° e 055°, assim como o intervalo dos rumos da RWY 06 é [056°, 065°]. Há aeroportos com pistas paralelas, ou seja, estão alinhadas ao mesmo rumo magnético. Nestes casos, utilizamos as letras L (*left*) para a da esquerda e R (*right*) para a da direita ao final da designação da pista. A Figura 7 mostra as pistas paralelas do SBRJ: RWY 20L e RWY20R.

Resumindo: o rumo magnético ao qual a pista está alinhada, possui três dígitos; o algarismo da unidade arredonda ou não o algarismo da dezena e, em seguida, é eliminado. Obviamente, a cabeceira oposta tem uma defasagem de 180°, ou seja, se uma cabeceira for a 14, a outra será 32; no caso da 05, a oposta será a 23. Além disso, por questões aerodinâmicas, as aeronaves devem pousar e decolar preferencialmente contra o vento.

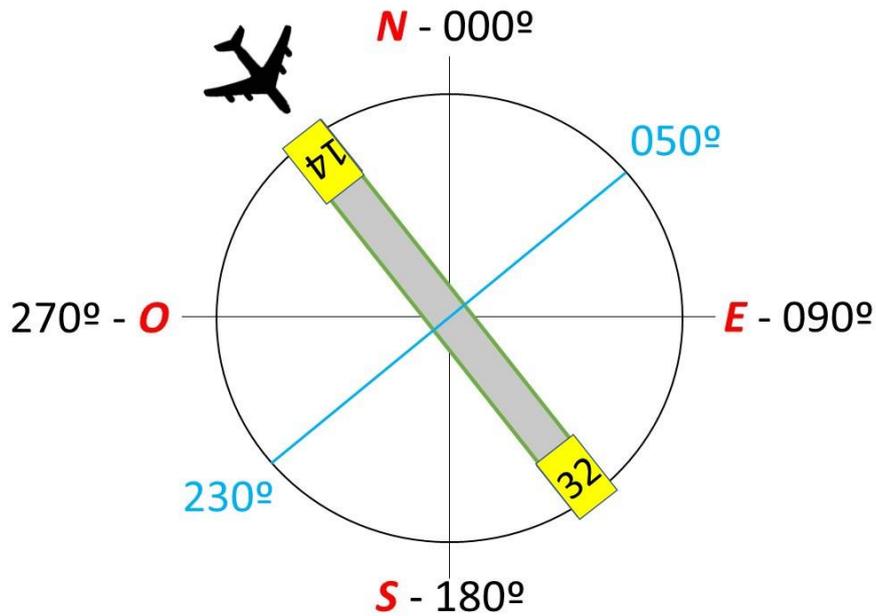
Figura 7 - Exemplo de nomenclatura de pistas paralelas para o SBRJ



Fonte: https://aeromagazine.uol.com.br/artigo/reforma-na-pista-principal-vai-limitar-operacao-no-aeroporto-santos-dumont_4376.html. Acesso em 13 de fevereiro de 2021.

A Figura 8 ilustra duas situações: a das cabeceiras em relação ao Norte Magnético e como o vento influencia na escolha da cabeceira a ser utilizada. Neste caso, o avião vai pousar na pista 14, ou seja, o avião está voando no rumo 140° , então, a origem da direção do vento está entre as magnéticas 050° ($140^\circ - 090^\circ$) e 230° ($140^\circ + 090^\circ$). Veremos que em um aeroporto, é possível termos capacidades diferentes de acordo com a escolha da cabeceira, por motivos diversos, dentre eles: a disposição das *taxiways* e a proximidade com outros aeroportos. Ainda sobre a Figura 8, naturalmente associamos a orientação da Rosa dos Ventos com a do Círculo Trigonométrico. No caso da Rosa dos Ventos, o ângulo 0° (Norte) está na parte superior do círculo e cresce no sentido horário, já na Trigonometria, o ângulo 0° está no ponto mais à direita do círculo e cresce no sentido anti-horário. Com isso, há 36 possibilidades para as cabeceiras de pistas. No Capítulo 6 retomamos esta questão a partir de problemas que visam didaticamente instruir o leitor.

Figura 8 - Pista, Norte Magnético e Vento



Fonte: O autor (2020).

Vamos definir a capacidade de pista, apresentar o passo a passo desse cálculo, apontar os parâmetros utilizados e algumas pesquisas relacionadas a este trabalho.

Capacidade Teórica de Pista, ou simplesmente *Capacidade de Pista* é definido pelo Manual do Comando da Aeronáutica (MCA) 100-14 – Capacidade do Sistema de Pistas, como:

É a capacidade do sistema de pistas de um aeródromo, calculada para um intervalo de sessenta minutos, em função do tempo médio de ocupação de pista, acrescido da separação regulamentar entre aeronaves, prevista em legislações, bem como das normas e procedimentos específicos aplicáveis às operações aéreas da localidade considerada. (BRASIL, 2015, p. 11)

Existem outras definições de capacidade como capacidade prática e capacidade declarada, mas este trabalho tem como foco a estimativa da capacidade máxima (teórica ou de saturação).

Para o cálculo da Capacidade da Pista a seguinte ordem de eventos deverá ser seguida:

1 - Serão utilizados os dados coletados no aeroporto referentes ao Tempo de Ocupação de Pista (decolagem e pouso), bem como os dados estatísticos

fornecidos pelas ferramentas de apoio como o MIX das Aeronaves⁸ (categorias de aeronaves orgânicas do aeroporto), o Tempo Médio de Ocupação de Pista e o Percentual de Utilização Anual de Pista (por cabeceira);

2 - Adicionalmente, deverão ser medidos os tempos médios de voo entre um Ponto de referência na aproximação final e a cabeceira da pista em estudo, considerando cada categoria de aeronave que opera no aeródromo, possibilitando o cálculo das médias dos tempos de voo na aproximação final para ambas as cabeceiras;

3 - Na sequência, para cada pista, a velocidade média entre o Ponto de referência na aproximação final e a cabeceira levando em conta cada categoria de aeronave; para o cálculo da capacidade de cada cabeceira, considerar a distância entre a cabeceira e uma aeronave em aproximação ao passar o Ponto de referência na aproximação final, a qual será utilizada como medida base para o cálculo da separação requerida; determinar, por categoria, a distância percorrida por uma aeronave, na aproximação final, durante o tempo utilizado por outra aeronave para liberar a RWY;

4 - Somar a distância obtida com o valor da separação regulamentar adotada, obtendo-se assim, a separação requerida entre dois pousos, considerando todas as categorias de aeronaves para se determinar a mais restritiva em função do tempo de ocupação de pista;

5 - Considerar o tempo de voo na aproximação final, observando a separação requerida por categoria de aeronave e multiplicar pelo respectivo MIX, desta forma, será obtido o Tempo Médio Ponderado para que a aeronave percorra a distância da separação mínima requerida;

6 - O resultado obtido, em segundos, será o divisor do número de segundos contidos em uma hora, apresentando como resultado, o número de pousos possíveis com a separação proposta, para a cabeceira em estudo;

7 - Considerando a separação requerida, e sendo possível intercalar uma decolagem entre dois pousos, ao subtrair uma unidade do total, será encontrado o número possível de decolagens;

⁸ Segundo a MCA 100-14, MIX de aeronaves é a distribuição percentual da frota de aeronaves em operação no aeródromo estudado, conforme as categorias de aeronaves. Categoria de aeronave - Classe de aeronaves subdivididas em cinco grupos (A, B, C, D e E), definida em função da velocidade de cruzamento da cabeceira.

8 - Somar o número de pousos e o número de decolagens obtido, no intervalo de sessenta minutos, para cada cabeceira, que resultará na capacidade teórica de operação para a respectiva cabeceira.

Os Parâmetros utilizados nos cálculos de capacidade do sistema de pistas de acordo com a MCA 100-14 (2015) são:

- a) Distribuição das operações segundo as condições meteorológicas;
- b) Configuração de pista;
- c) MIX de aeronaves;
- d) Velocidade de aproximação;
- e) Comprimento dos diversos segmentos de aproximação;
- f) Separação mínima regulamentar de aeronaves;
- g) Tempos médios de ocupação de pista;
- h) Geometria das pistas de pouso e táxi;
- i) Probabilidade de interferência com aeródromos vizinhos;
- j) Procedimentos de saída.

A Figura 9 é um exemplo dos parâmetros b) Configuração de pista, g) Tempos médios de ocupação de pista e h) Geometria das pistas de pouso e táxi. O SBCR só possui a *taxiway* A (letra A em vermelho) que liga a pista ao pátio. Devido a essa geometria simples o tempo de ocupação de pista fica muito elevado para a aeronave que pousa na RWY 27 (avião vermelho). A trajetória do pouso na RWY 27 é o tracejado vermelho: pousa na RWY 27, desacelera até a cabeceira oposta (RWY09) e retorna sobre a pista até livrá-la na *taxiway* A. O ideal é o pouso na RWY 09 como mostra o tracejado amarelo: desacelera até a cabeceira oposta (RWY 27) e livra a pista pela única *taxiway* que é a A. O raciocínio para a decolagem é análogo. Sendo assim, neste aeroporto, a cabeceira ideal para o pouso é a 09 e para decolagem é a 27.

Figura 9 - Aeroporto Internacional de Corumbá-MS (SBCR)



Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

A Figura 10 é um exemplo dos parâmetros b) Configuração de pista, i) Probabilidade de interferência com aeródromos vizinhos e j) Procedimentos de saída. Os Aeroportos do Galeão (SBGL) e do Santos Dumont (SBRJ) são vizinhos e muito próximos. A capacidade da RWY15 é muito superior em relação a RWY33 em SBGL porque o procedimento de aproximação para a RWY 33 (seta vermelha) é conflitante com procedimentos de pouso e decolagem de SBRJ (setas amarela e verde) não sendo permitidas essas operações simultâneas. A configuração ideal de pistas para o Galeão é a utilização da RWY 15 para pousos (seta laranja) e da RWY 10 para decolagens (seta azul).

Podemos observar que é um método complexo que reúne uma grande quantidade de dados estatísticos e leva um tempo considerável para chegar ao resultado. Na Seção 3.2, apresentamos a nova metodologia, pensada por nós, que deu nome a este trabalho: *Desbalanceamento das Capacidades de Pista dos Aeródromos: Um Cálculo para a Obtenção Máxima por Tipo de Operação*. Convém ressaltar que a nova metodologia estará presente na próxima atualização da MCA 100-14 uma vez que o método foi validado e vem sendo utilizado desde então.

Figura 10 - Aeroportos Vizinhos

Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

O estado da arte acerca da estimaco de capacidade de pista ou métodos que auxiliam para que essa capacidade seja otimizada, acenou para algumas literaturas. Em contato com a Capitã Engenheira Mayara Condé Rocha Mura, PhD pelo *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), atual chefe da Diviso de Engenharia Civil do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e coordenadora do Laboratório de Gerenciamento de Tráfego Aéreo (LABGETA), tive a oportunidade de conhecer quatro trabalhos: Gilbo (1993), Mura (2013), Almeida (2014) e Santos (2017); e dois trabalhos obtidos pelo CGNA: Vitor Filincowsky (2013) e do Tenente Especialista em Controle de Tráfego Aéreo James Gomes Lima (2019). Esses seis trabalhos contribuíram muito com a elaboraco desta dissertaco e sero especificados mais a diante.

O artigo de Eugene P. Gilbo (1993)  um dos principais trabalhos na área de estimaco de capacidade. Sugere a combinao de métodos analíticos e empíricos para a obteno de estimativas mais confiáveis e realistas da capacidade aeroportuária. O método empírico reúne dados estatísticos em um sistema cartesiano com o eixo horizontal representando o número de decolagens e o eixo vertical representando o número de pousos em um aeroporto no horário de pico. As coordenadas (X,Y) representam a movimentaco máxima em um intervalo de tempo.

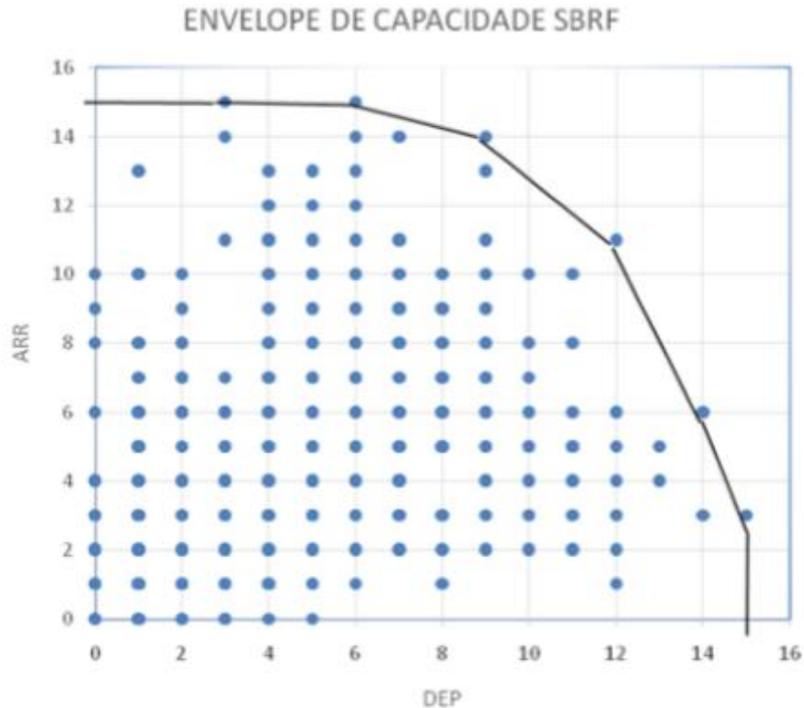
A reunião desses pares formava uma região conhecida como Curva de Capacidade, ou Envelope de Capacidade que é a aplicação da Eficiência ou Ótimo de Pareto, um conceito desenvolvido pelo italiano Vilfredo Pareto e nos fornece a ideia da capacidade máxima suportada no aeroporto.

A Figura 11 é um exemplo do Envelope de capacidade em SBRF (aeroporto internacional do Recife/Guararapes) com dados reais. Cada ponto azul se refere à quantidade de movimentos (decolagens, pousos) por hora. Podemos observar que os pontos sobre a curva, retratam os maiores valores obtidos. São eles: (03,15), (06,15), (09,14), (12,11), (14,06) e (15,03). Estes valores retratam os possíveis desbalanceamentos de acordo com a metodologia do Envelope de Capacidade. Discuti esses resultados com o então chefe do Setor de Capacidade, 1º Tenente James Gomes Lima, e apontei que esta técnica só serviria para aeroportos que trabalham sempre no limite da capacidade como é o caso de Guarulhos. No período de 2004 a 2012, pude perceber *in loco* que o aeroporto internacional de Foz do Iguaçu tinha uma média diária baixa. De acordo com o setor de Estatísticas do CGNA

(http://portal.cgna.gov.br/files/uploads/anuario_estatistico/anuario_estatistico_2019.pdf) o total de movimentos em Foz do Iguaçu em 2019 foi de 21.956, ou seja, aproximadamente 2,5 por hora. Por razões óbvias, essa técnica não era adequada para esse tipo de aeroporto. Essa discussão, levou às limitações técnicas apresentadas na tese de Mestrado de Lima, James Gomes (2019):

- Baseia-se em dados estatísticos do histórico de operação de um aeroporto, impedindo uma análise prospectiva, quando é conhecida a expectativa de demanda para determinado aeroporto;
- Esta técnica pode ser bem-sucedida em aeroportos cujo movimento está muito próximo ao limite da capacidade do sistema de pista; o que pode reduzir o número de possibilidades de aeroportos e frustrar a pretensão de tornar esta técnica unicamente aplicável na totalidade dos aeroportos brasileiros.

Figura 11 - Envelope de Capacidade do SBRF



Fonte: Lima, James Gomes 2019

Além do trabalho de Gilbo sobre Envelope de Capacidade, podemos destacar pesquisas que apesar de não tratarem diretamente sobre uma metodologia para o cálculo de capacidade do sistema de pistas, auxiliam para que essa capacidade seja otimizada. Segunda Murça (2013, p.1):

O aperfeiçoamento do ATFM vem se destacando como alternativa para amenizar o congestionamento, já que, muitas vezes, a solução trivial de expansão da infraestrutura aeroportuária não pode ser concretizada devido à ausência de espaço físico no entorno dos aeroportos. Nesse sentido, tem-se observado uma tendência de incorporação de técnicas de otimização no ordenamento do fluxo de aeronaves, a fim de viabilizar uma redução de atrasos e trazer benefícios.

Dentre essas pesquisas, podemos destacar:

- Murça (2013), do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Seu trabalho teve o objetivo de desenvolver um modelo de programação Matemática para o sequenciamento final (compõe o grupo dos tipos de ações de controle mais importantes para o ATFM) e a programação de aeronaves para pouso e aplicá-lo em SBGR, a fim de avaliar seu potencial de

redução de atrasos se incorporado a uma ferramenta de apoio a decisões táticas no controle de tráfego aéreo;

- Almeida (2014), do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Trata do uso mais eficiente de pistas paralelas e próximas (separação menor que 760 metros entre os eixos) para aumentar a capacidade de aeroportos congestionados como é o caso de Guarulhos. Para isso, analisa diversos cenários com operações regulamentadas e outras inovadoras em ambiente de simulação computacional. Além disso, compara os diferentes métodos de obtenção de capacidade;
- Santos (2017), do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Trata do aumento de capacidade por meio do uso eficiente da pista, construção de novas pistas e redução do tempo de ocupação por meio da ferramenta computacional TAAM⁹ (*Total Airspace and Airport Modeller*);
- Ribeiro, Vitor Filincowsky (2013), da Universidade de Brasília (UNB). Propõe através do conceito CDM (*Collaborative Decision Making - Tomada de Decisão Colaborativa*) a elaboração de um sistema computacional para o gerenciamento de partidas em aeroportos com a utilização da Teoria dos Jogos, uma vez que essa escolha é empírica, ou seja, baseada na experiência do controlados de voo da Torre;
- Lima, James Gomes (2019), da Universidade da Força Aérea (UNIFA). Trata a importância da capacidade do sistema de pistas; faz uma comparação entre os métodos empregados pelo CGNA, pela Organização Europeia para a Segurança da Navegação Aérea (EUROCONTROL¹⁰) e Administração Federal da Aviação (FAA¹¹), e

⁹ “O TAAM (Total Airspace and Airport Modeller) é o principal simulador em tempo rápido de operações aeroportuárias e do espaço aéreo comercialmente disponível. Esta sofisticada ferramenta de software simula modelos de espaço aéreo e aeroportos para facilitar o suporte à decisão, planejamento e análise”. Fonte: <https://taam.jepesen.com/index.php/taam-brochure/35-taam-general-information/taam-general/52-about-taam>. Acesso em 15 de fevereiro de 2021.

¹⁰ “O EUROCONTROL é uma organização internacional cujo principal objetivo é o desenvolvimento de um sistema pan-europeu de ATM (*Air Traffic Management - Gerenciamento de Tráfego Aéreo*)”. Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/eurocontrol. Acesso em 15 de fevereiro de 2021.

¹¹ “A FAA é a entidade governamental dos Estados Unidos, responsável pelos regulamentos e todos os aspectos da aviação civil nos Estados Unidos”. Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Administração_Federal_de_Aviação. Acesso em 15 de fevereiro de 2021.

sugere que busquemos um método simples de desbalanceamento afim de otimizar o uso das pistas.

Segundo Almeida (2014), de modo resumido, existem três métodos para o cálculo da capacidade de pista de aeroportos, os quais apresentam os diferentes níveis de simplificação de modelos. São eles o método empírico, analítico e de técnicas de simulação.

O DECEA, o EUROCONTROL e a FAA utilizam métodos analíticos. O CGNA possui a ferramenta computacional TAAM que dentre várias utilidades, nos permite ratificar os resultados obtidos nos cálculos de capacidade. Essa ferramenta tem um custo elevadíssimo, fator que impede sua utilização por alguns países. A Tabela 1 resume as metodologias europeia, americana e brasileira.

Tabela 1 - Metodologias de Capacidade de Pista

Metodologia	Órgão ATM	Órgão ATFM	Norma	Atraso reportável	Definição de Capacidade e Fases ATFM	Métodos de cálculo da Capacidade de Pista
Europeia	EUROCONTROL	NMOC	ACAM Manual	De 1 a 14 min	Capacidade Estrutural (Estratégica Macro); Capacidade Planejada (Estratégica) e Capacidade Operacional (Pré-Tática/Tática)	Dados históricos de performance; Modelos analíticos e planilhas; modelos baseados em simulação (Fronteira de Pareto)
Americana	FAA	ATCSCC	AC 150/5060-5	Superior a 15 min	Capacidade Ótima ou VMC; Capacidade Marginal e Capacidade IMC	Tabelas de Consulta; Métodos de cartas/mamógrafos; Modelos de simulação (SIMMOD, ADSIM e ACM)
Brasileira	DECEA	CGNA	MCA 100-14	Superior a 30 min	Capacidade Teórica de Pista (Estratégica, Pré-Tática e Tática)	Modelos analíticos e planilhas; modelos baseados em simulação (TAAM)

Fonte: Lima, James Gomes (2019)

Quando comparadas as duas metodologias (FAA e DECEA), a OACI recomendou que os Estados da região SAM usem a metodologia brasileira para calcular a capacidade de pista e do setor ATC aplicada no Brasil, devido a algumas das seguintes razões apontadas por Jaurena (2009, p.14), descritas no trabalho de Lima, James Gomes (2019):

- *treinamento padrão para especialistas dos Estados participantes no Projeto;*
- *uso de um modelo que seja aplicável à capacidade de pista e do setor ATC;*
- *metodologia de baixo custo que não requer nenhum software;*
- *não requer valores constantes derivados de bancos de dados que alguns Estados ainda não têm disponível.*

3.2 Desbalanceamento ou Capacidade Dinâmica

O *Manual do Comando da Aeronáutica (MCA) 100-14 – Capacidade do Sistema de Pistas*, está em vigor desde 15 de abril de 2015. A nova proposta de Desbalanceamento, tema deste trabalho, foi apresentada ao Grupo de Estudos sobre Planejamento do Espaço Aéreo (GEPEA) do DECEA, sob a coordenação do CGNA, no período de 18 a 22 de abril de 2019, no Instituto de Controle do Espaço Aéreo (ICEA). Foi a primeira reunião do Grupo *Ad Hoc*¹² Capacidade ATC. Foram realizadas visitas operacionais aos Aeroportos de Campo Grande (SBCG) e Aracaju (SBAR) com o objetivo de validar *in loco* a nova metodologia. Esse passo foi realizado de 20 de maio a 14 de junho de 2019. O estudo foi aprovado e desde então, a Metodologia do Desbalanceamento está sendo utilizada e será contemplada na próxima atualização da MCA 100-14.

A Figura 12 mostra os integrantes da primeira reunião do Grupo *Ad Hoc* Capacidade ATC. Dentre oficiais e graduados, todos especialistas em controle de tráfego aéreo, estavam presentes: Lobo Júnior, Faulhaber, Rômulo, Lourenço,

¹² Segundo a enciclopédia livre Wikipédia (pt.wikipedia.org/wiki/Ad_hoc), *Ad hoc* é uma expressão latina cuja tradução literal é "para isto" ou "para esta finalidade". No DECEA, o Grupo Ad Hoc é destinado a estudos direcionados, neste caso, às capacidades.

Fassini e Celso. Esta figura foi retirada da primeira matéria publicada no DECEA sobre o assunto. Há duas matérias na íntegra sobre esta nova metodologia na parte Apêndice B desta dissertação.

Figura 12 - Integrantes da 1ª Reunião do Grupo *Ad Hoc* Capacidade ATC



Fonte: www.decea.gov.br/?i=midia-e-informacao&p=pg_noticia&materia=gepea-da-inicio-aos-trabalhos-relacionados-com-a-capacidade-atc (2020).

Com a necessidade do Desbalanceamento, o CGNA buscou métodos e o encontrado foi o envelope de capacidade. Como apresentado na seção anterior, este método só atenderia a aeroportos que operam no limite de sua capacidade. Não faz sentido buscar dados estatísticos de aeroportos com baixa demanda visto que os valores obtidos estariam muito abaixo da capacidade máxima. A utilização do envelope de capacidade atenderia aos aeroportos de grande demanda e usaríamos a metodologia antiga para os demais. Essa seria a solução mais viável até então.

Estudando os recursos do SIGMA, a fim de entender essa problemática, entrei em contato com o esboço da Figura 11 sobre o envelope de capacidade do SBRF e observei uma relação de tempo entre pousos e entre decolagens em cada aeroporto. Voltando ao SIGMA observei que o intervalo entre as decolagens era de

2 minutos e entre os pousos era de 3 no SBRF. Então inferi a seguinte equação: $3A+2D = 60$. Esta equação representa a movimentação (pousos + decolagens) por hora no SBRF.

Figura 13 - SBRF: Aeroporto Internacional do Recife/Guararapes



Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2021).

Na aviação, utilizamos o termo ARR Aque é a abreviação do termo em inglês *arrival* que significa chegada, ou seja, pousos e utilizamos o termo DEP que é a abreviação do termo em inglês *departure* que significa saída, partida, ou seja, decolagens. O A da equação expressa o número de pousos (ARR) por hora e o D expressa a quantidade de decolagens (DEP) por hora.

Os pares ordenados (D,A), soluções da equação $3A + 2D = 60$, são as possibilidades do desbalanceamento das capacidades de pista do SBRF. Surgiu então o cálculo para a obtenção máxima por tipo de operação. As possíveis soluções inteiras não negativas para a equação $3A + 2D = 60$ são: (0,20), (3,18), (6,16), (9,14), (12,12), (15,10), (18,8), (21,6), (24,4), (27,2), (30,0).

Sobre a possibilidade de termos quantidades ímpares de pousos nesse caso, chega-se à equação $3A + 2D = 59$, cujas soluções inteiras não negativas são: (1,19), (4,17), (7,15), (10,13), (13,11), (16,9), (19,7), (22,5), (25,3), (28,1). Porém, neste caso, o período avaliado seria de 59 minutos e não de uma hora. Os pares ordenados utilizados nessa metodologia foram comparados aos do envelope de capacidade da Figura 11 que são: (3,15), (6,15), (9,14), (12,11), (14,6) e (15,3). No

caso de SBRF, podemos observar duas situações: ou o desbalanceamento apresentou valores superiores ou iguais aos do envelope.

A fórmula $A \cdot TOA + D \cdot TOD = 60$ foi apresentada ao Grupo *Ad Hoc* no ICEA. Os pares ordenados (D,A) são soluções inteiras não negativas para a equação que fornecem os valores máximos de capacidade por tipo de operação por pista, onde:

A → número de pousos em uma hora

D → número de decolagens em uma hora

TOA → tempo de ocupação de pista durante o pouso

TOD → tempo de ocupação de pista durante a decolagem

60 → período de uma hora em minutos

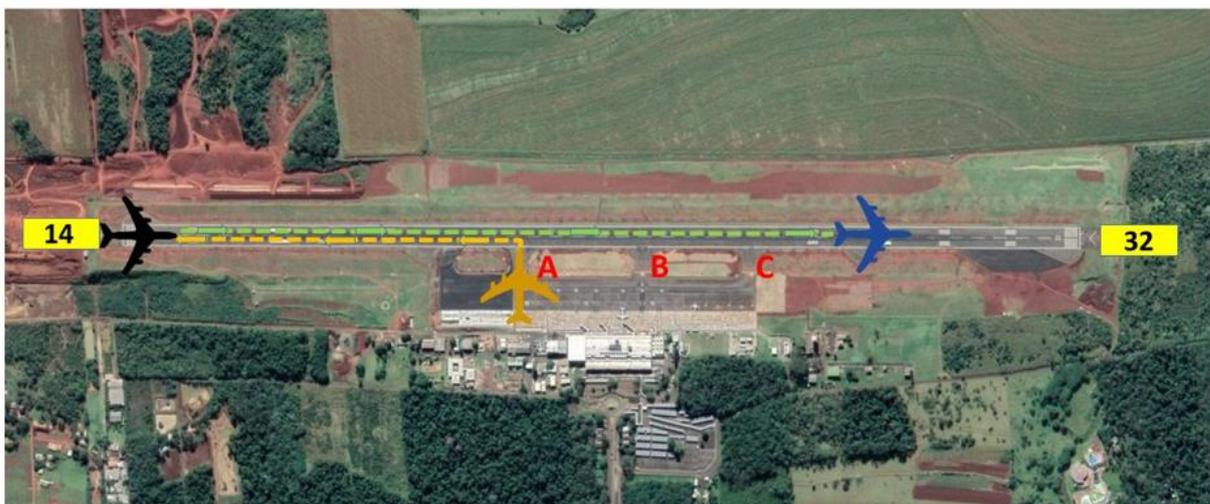
Segundo a MCA 100-14 (2015), tempo de ocupação física de pista durante o *pouso* é contado a partir do instante em que a aeronave cruza a cabeceira até o momento em que abandona a pista. Tempo de ocupação física de pista durante a *decolagem* é contado a partir do instante em que a aeronave deixa o ponto de espera até o momento em que cruza a cabeceira oposta. Esses valores são herança do método antigo: o TOA a ser utilizado, depende do tempo de ocupação de pista e da separação entre pousos na aproximação final, o que for menor entre os dois, cada aeroporto tem um MIX (distribuição percentual da frota de aeronaves em operação no aeródromo estudado, conforme as categorias de aeronaves), então é feita a média ponderada entre os tempos de ocupação de pista por categoria, levando-se em consideração esse MIX de aeronaves, assim como as separações de segurança (esteira de turbulência). Esses valores serão o TOA e o TOD a serem utilizados na fórmula e cada aeroporto tem o seu valor específico.

A Figura 14 ilustra o tempo de ocupação de pista durante o pouso. O tempo começa a ser computado no instante em que a aeronave cruza a cabeceira 14 (avião preto), segue conforme o tracejado verde até a cabeceira oposta (avião azul), segue o tracejado amarelo até livrar a pista na *taxiway C* (avião amarelo) encerrando a contagem.

Figura 14 - TOA em SBF1

Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

A Figura 15 ilustra o tempo de ocupação de pista durante a decolagem. O tempo começa a ser computado no instante em que a aeronave ingressa na pista pela *taxiway A* (avião amarelo), segue conforme o tracejado amarelo até a cabeceira (avião preto) e inicia a corrida para a decolagem conforme o tracejado verde (avião azul) cruzando a cabeceira oposta, encerrando a contagem.

Figura 15 - TOD em SBF1

Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

A Figura 16, assim como as Figuras 14 e 15, ilustra o tempo de ocupação de pista. Na parte superior da imagem temos o tempo do pouso na RWY11L (pista 11 da esquerda) e na parte inferior, o tempo da decolagem na RWY11R (pista 11 da direita). As Figuras 14 e 15 são de SBF1, o TOD e o TOA são bem superiores aos de SBGR (Figura 16) devido a configuração das pistas e distribuição das *taxiways*. Podemos concluir que quanto melhor a configuração da pista, menor o TOA e menor o TOD e conseqüentemente, maior capacidade.

Figura 16 - TOA e TOD em SBGR



Fonte: Imagem retirada do Google Earth e editada pelo autor (2020).

A Tabela 2 mostra um estudo recente sobre o MIX de aeronaves de SBGR. Na primeira coluna temos as categorias. Na segunda, a velocidade de cruzamento da cabeceira correspondente a cada categoria de acordo com classificação da OACI. Na terceira coluna, o percentual anual de cada categoria em SBGR. Temos aproximadamente 80% classe C e 20% classe D, ou seja, são mais velozes e livram a pista mais rápido. Podemos concluir que quanto maior a diversidade de categorias de aeronaves que operam no aeródromo, maior TOA e TOD e conseqüentemente, menor a capacidade de pista.

Tabela 2 - MIX de SBGR

CATEGORIA	VELOCIDADE	MIX
A	< 90	0,75%
B	91 - 120	4,23%
C	121 - 140	76,41%
D	141 - 165	18,61%
TOTAL	166 - 210	100%

Fonte: CGNA (2018).

Durante a apresentação no ICEA, fizemos duas modificações nesse estudo para simplificar a forma e os cálculos. A primeira foi substituir o termo TOA por α e o TOD por β a fim de simplifica-la, como segue:

$$\alpha A + \beta D = 60.$$

Para o controlador que trabalha no setor de aproximação final, em aeroportos de grande movimentação, é importante que se mantenha a separação mínima entre as aeronaves a todo o instante. Essa separação é uma distância em milha náutica (NM) estipulada no modelo operacional do órgão ATC a que pertence esse aeroporto. Esse número varia de acordo com o comprimento da pista, a disposição das *taxiways*, dentre outros fatores, conforme vimos nas Figuras 14, 15 e 16. Quanto melhor a estrutura, menor o α e o β , conseqüentemente, menor essa distância entre as aeronaves na final.

A capacidade de setor ATC é o número de aeronaves suportada por um setor em um determinado período de tempo, esse valor é calculado pelo CGNA. Pensamos em transformar, para o controlador, essa importante distância em um

tempo médio, considerando as diversas categorias de aeronaves. Essa foi a segunda modificação: associar o Tempo Médio de Ocupação de Pista nas operações de pouso, o fator α , com a distância mínima entre as aproximações do aeroporto, de acordo com as suas especificidades. No estudo de casos de SBGR com duas pistas, sendo uma dedicada para pouso e uma dedicada para decolagem, começamos pela operação mais restritiva, que é o pouso. Na pista dedicada ao pouso o número de decolagens será zero, aplicando na fórmula $\alpha A + \beta D = 60$, temos $\alpha A = 60$, em outras palavras, $A = \frac{60}{\alpha}$.

Considerando o modelo matemático acima, determinamos o Fator α a partir dos tempos médios nas aproximações levando em conta as particularidades dos aeródromos e o Mix de aeronaves associados a separação mínima prevista para o pouso, já que esta operação é a mais restritiva. Com isso, chegamos ao número máximo de pousos conforme a Tabela 3.

A partir dessas informações, pode-se definir uma quantidade máxima de pousos para determinada pista em uso, obtendo, inclusive, a possibilidade de definir o desbalanceamento máximo para aquela pista, de acordo com o modelo apresentado acima. Quanto menor a separação na final, menor será o α e conseqüentemente, maior será a capacidade.

A Tabela 3 otimizou o estudo ao considerarmos $\alpha = \beta$ ¹³, pois em um aeroporto com $\alpha = 3$, por exemplo, temos no máximo 20 aproximações no período de 60 minutos. O que nos garante 10 pousos e 10 decolagens (10,10). Ou seja, com a separação mínima adotada na final, temos a noção da capacidade máxima do aeroporto.

¹³ Foi observado que sempre ocorre $\alpha \geq \beta$. Ao considerarmos $\alpha = \beta$, temos uma resposta imediata sobre a capacidade sem riscos à segurança conforme a Tabela 3.

Tabela 3 - Relação entre Fator α , separação mínima em milhas para pouso e número Máximo de pousos

Nº de ARR	Sep. na Final para pouso	Fator α
A	3NM	α_1
	4NM	α_2
	5NM	α_3
	6NM	α_4
	7NM	α_5
	8NM	α_6
	9NM	α_7
	10NM	α_8

Fonte: CGNA (2019).

Os valores de α e β são específicos por aeroporto e após aplicados na equação $\alpha A + \beta D = 60$, temos apenas as variáveis A e D. A Tabela 3 servirá para facilitar os cálculos para o CGNA. Para o Ensino de Matemática, a proposta é a utilização de Equações Diofantinas Lineares e Combinações Completas (ou Permutações com Repetição) como resultados didáticos para explorar eficientemente o Problema das Capacidades de Pista dos Aeroportos.

Há diversas pesquisas sobre estimativa de capacidade de pista. Sendo a de Gilbo, 1993, uma das principais. O diferencial desta dissertação é a apresentação de uma modelagem simples usando Equações Diofantinas Lineares, uma forma inédita

de ver o problema de estimação da capacidade de pista sob operação mista com mix variado de pousos e decolagens. Vale enfatizar que o modelo proposto foi apresentado para um grupo de experientes especialistas em tráfego aéreo do DECEA em reunião coordenada pelo CGNA e validado, após verificado *in loco* em aeroportos com características próprias. Segundo Gilbo, (1993, p. 147, tradução nossa)

Deve-se enfatizar que nem os modelos empíricos nem analíticos podem fornecer curvas de capacidade que sejam completamente aceitáveis para uso em campo por gestores de tráfego praticantes. As estimativas fornecidas por qualquer método devem ser submetidas a avaliação especializada e corrigidas por gestores e controladores de tráfego, usando sua experiência e conhecimento das condições específicas dos aeroportos. Somente após tais correções, os valores de capacidade podem ser aplicados para resolver problemas reais de gerenciamento de tráfego aéreo.

4. EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Especula-se que Diofanto tenha vivido por volta de 250 em Alexandria. Ele é considerado por muitos historiadores o pai da álgebra devido às suas publicações e estudos sobretudo na Teoria Moderna dos Números. Segundo La Rocque e Pitombeira (RPM 19) (1991, p.47):

A principal obra de Diofanto é a Arithmetica, tratado originalmente em 13 livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram. (...) É um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho: quanto a isto, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com qualquer Matemática grega tradicional. Representa essencialmente um novo ramo e usa um método diferente. Devido à ênfase dada na Arithmetica, à solução de problemas indeterminados, o assunto, às vezes chamado análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise diofantina.

De acordo com Hefez (2016), as Equações Diofantinas Lineares com duas variáveis x e y são equações do tipo

$$ax + by = c, \text{ em que } a, b \text{ e } c \text{ são números inteiros.} \quad (4.1)$$

Uma solução para a Eq Diofantina (4.1) é um par ordenado (x_0, y_0) de valores inteiros que satisfaz $ax_0 + by_0 = c$. A existência de solução para uma Equação Diofantina é caracterizada a partir do máximo divisor comum, como é mostrado pela Proposição 4.1.

Proposição 4.1. (Hefez, 2016, p.100). Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. A equação $ax + by = c$ admite solução (inteira) se, e somente se, $\text{mdc}(a, b)$ divide c .

Demonstração.

(\rightarrow) Consideremos (x_0, y_0) solução da equação $ax + by = c$.

Então, $ax_0 + by_0 = c$.

Observe que o $\text{mdc}(a,b)$ divide a e divide b e, conseqüentemente, o $\text{mdc}(a,b)$ divide ax_0 e by_0 . Além disso, é possível garantir pelo Teorema de Bézout¹⁴ que o $\text{mdc}(a,b)$ divide $ax_0 + by_0$. Isto pode, na prática, ser estabelecido pelo Algoritmo de Euclides para o cálculo do $\text{mdc}(a,b)$.

Segue que $\text{mdc}(a,b)$ divide $c = ax_0 + by_0$.

(←) Reciprocamente considere que o $\text{mdc}(a,b)$ divide c . Portanto, existe um inteiro d tal que

$$c = d \cdot \text{mdc}(a,b). \quad (4.2)$$

Além disso, existem inteiros m e n que satisfazem

$$am + bn = \text{mdc}(a,b). \quad (4.3)$$

Multiplicando a equação (4.3) por d , temos

$$amd + bnd = d \cdot \text{mdc}(a,b).$$

Igualando as Equações (4.2) e (4.3), segue que

$$\begin{aligned} amd + bnd &= c \\ a(md) + b(nd) &= c. \end{aligned}$$

Com uma substituição adequada de (md) por x e (nd) por y , concluímos que

$$ax + by = c.$$

□

Mostramos que existe solução inteira para a Equação Diofantina $ax + by = c$, se e somente se, o $\text{mdc}(a,b)$ divide c , o que é logicamente equivalente a $\text{mdc}(a,b)$ não divide c , então não existe solução inteira. Para deixar isso mais claro, vamos

¹⁴ O Teorema de Bézout estabelece que é possível escrever o mdc entre a e b como combinação linear de a e b . Para maiores detalhes sugerimos:
https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/bezout_e_outros_bizus.pdf.

utilizar alguns exemplos com a finalidade de identificar se a Equação Diofantina Linear possui ou não solução.

Exemplo 4.1. Seja a Equação Diofantina $3x + 6y = 78$.

Temos $a = 3$, $b = 6$ e $c = 78$.

Como $\text{mdc}(3,6) = 3$ divide 78, segue que a Equação $3x + 6y = 78$ possui solução inteira.

Exemplo 4.2. Seja a Equação Diofantina $4x + 8y = 11$.

Temos $a = 4$, $b = 8$ e $c = 11$

Como $\text{mdc}(4,8) = 4$ não divide 78, segue que a Equação $4x + 8y = 11$ não possui solução inteira.

Exemplo 4.3. Seja a Equação Diofantina $5x + 7y = 495$.

Temos $a = 5$, $b = 7$ e $c = 495$.

Como $\text{mdc}(5,7) = 1$ divide 495, segue que a Equação $5x + 7y = 495$ possui solução inteira.

Vale observar que no Exemplo 4.3, como 5 e 7 são números primos entre si, o $\text{mdc}(5,7)$ vale 1, que por sua vez, divide qualquer inteiro c . Ou seja, quando os coeficientes das variáveis são números primos entre si a Equação Diofantina sempre admitirá solução inteira.

Discutimos a existência de solução inteira para uma Equação Diofantina Linear. Agora vamos mostrar como é possível acessar esta solução e a daí determinar todas as demais soluções inteiras para esta equação.

Exemplo 4.4. Seja a Equação Diofantina $4x + 6y = 20$.

Temos $a = 4$, $b = 6$ e $c = 20$. Como o $\text{mdc}(4,6)$ é 2 e esse resultado divide 20, a equação $4x + 6y = 20$ possui solução inteira. Simplificando a equação, dividindo

por $2 = \text{mdc}(4,6)$, chegamos em $2x + 3y = 10$ que é a forma mais simples, mais reduzida da equação original. Obtemos a equação

$$a'x + b'y = c' \quad (4.4)$$

com $a' = 2$, $b' = 3$ e $c' = 10$.

Podemos facilmente atribuir valores para x e y de modo a encontrar soluções inteiras como é mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 - Soluções inteiras para a Equação $2x + 3y = 10$

x	-4	-1	2	5	8
y	6	4	2	0	-2

Fonte: O autor (2020).

Apesar de listarmos 5 soluções, $(-4,6)$, $(-1,4)$, $(2,2)$, $(5,0)$, $(8,-2)$, é fácil observar que existem infinitas. Observe que a partir da solução particular $(-4,6)$ a medida em que o valor de x aumenta 3 unidades (3 é o coeficiente de y), o valor de y diminui 2 unidades (2 é o coeficiente de x).

Isto acena para os formatos que são candidatos a solução geral para a Equação Diofantina $a'x + b'y = c'$ a partir da solução particular (x_0, y_0) :

$$x = x_0 + b't \text{ e } y = y_0 - a't, \quad (4.5)$$

Para provar isto, basta substituir (4.5) em (4.4):

$$\begin{aligned} a'(x_0 + b't) + b'(y_0 - a't) &= c' \\ a'x_0 + a'b't + b'y_0 - a'b't &= c' \\ a'x_0 + b'y_0 &= c'. \end{aligned}$$

Acabamos de provar que o formato $x = x_0 + b't$ e $y = y_0 - a't$ são soluções da Equação Diofantina Linear $ax + by = c$. Vamos verificar que todas as soluções inteiras da Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ possuem este formato.

Admitindo (x_0, y_0) como solução da equação $ax + by = c$ com coeficientes a e b primos entre si, segue que

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Caso exista uma outra solução para a mesma equação, a representaremos por (x_1, y_1) , satisfazendo $ax_1 + by_1 = c$.

Como as duas equações acima representam o mesmo valor c , vamos igualar as equações:

$$ax_1 + by_1 = ax_0 + by_0$$

$$ax_1 - ax_0 = by_0 - by_1$$

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1).$$

Como o $\text{mdc}(a, b) = 1$, segue que:

$$a \mid (y_0 - y_1) \Rightarrow y_0 - y_1 = a't, t \in Z \Rightarrow y_1 = y_0 - a't.$$

$$b \mid (x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 - x_0 = b's, s \in Z \Rightarrow x_1 = x_0 + b's.$$

Substituindo os resultados obtidos acima em $ax + by = c$, temos:

$$a(x_0 + b's) + b(y_0 - a't) = c$$

$$ax_0 + a'b's + by_0 - a'b't = c$$

$$ax_0 + by_0 + a'b's - a'b't = c$$

$$c + a'b's - a'b't = c$$

$$a'b's = a'b't$$

$$s = t,$$

Portanto, $x = x_0 + b't$ e $y = y_0 - a't$.

Com isso, concluímos a demonstração da seguinte Proposição:

Proposição 4.2. (Hefez, 2016, p. 101). Seja (x_0, y_0) uma solução inteira da equação $ax + by = c$. Se o $\text{mdc}(a, b) = 1$, então as soluções inteiras (x, y) da equação $ax + by = c$ são dadas por:

$$x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Convém ressaltar que em alguns problemas é fácil identificar um par de solução para a Equação Diofantina Linear dada, contudo, existem situações em que esta solução de partida não é nem um pouco trivial. Nestes casos, em que a solução particular não decorre de imediato, faremos uso do Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum.

Exemplo 4.5. Determinar as soluções inteiras da equação: $90X + 28Y = 22$.

Como o $\text{mdc}(90, 28) = 2$ divide 22, segue que a equação possui solução.

Vamos simplificar ao máximo a Equação Diofantina Linear dividindo-a pelo $\text{mdc}(90, 28) = 2$. Obtemos a equivalente equação $45X + 14Y = 11$.

Aplicamos o Algoritmo de Euclides para o cálculo do $\text{mdc}(45, 14)$, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 - Algoritmo de Euclides referente ao Exemplo 4.5.

QUOCIENTE →	3	4	1	2
45	14	3	2	1
RESTO →	3	2	1	0

Fonte: O autor (2020).

$$\begin{aligned}
 45 &= 3 \cdot 14 + 3 & \Rightarrow & \quad 45 - 3 \cdot 14 = 3 & \quad (I) \\
 14 &= 4 \cdot 3 + 2 & \Rightarrow & \quad 14 - 4 \cdot 3 = 2 & \quad (II) \\
 3 &= 1 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow & \quad 3 - 1 \cdot 2 = 1 & \quad (III)
 \end{aligned}$$

Substituindo (II) em (III):

$$3 - 1(14 - 4 \cdot 3) = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \cdot 14 + 5 \cdot 3 = 1 \quad (IV)$$

Substituindo (I) em (IV):

$$-1 \cdot 14 + 5 \cdot (45 - 3 \cdot 14) = 1 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 45 - 16 \cdot 14 = 1$$

Multiplicando por 11:

$$45 \cdot (55) + 14 \cdot (-176) = 11$$

Comparando com a equação $45X + 14Y = 11$, observamos que uma solução particular é dada pelo par $(55, -176)$. A solução geral é:

$$x = 55 + 14t \quad \text{e} \quad y = -176 - 45t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4.1 Soluções Naturais de uma Equação Diofantina Linear

Existe uma fórmula pronta para a obtenção das soluções naturais de uma Equação Diofantina Linear, no entanto, a demonstração desta solução passa por cálculos muito áridos tornando-se, sob nosso ponto de vista, até antídóticos.

O estudo das Equações Diofantinas Lineares e de suas soluções inteiras não negativas serão necessários para o desenvolvimento do Método do Desbalanceamento de Capacidade de Pista.

Discutiremos a partir de agora, uma técnica para obter as soluções inteiras não negativas ou naturais de uma Equação Diofantina Linear a partir de uma solução particular. O Exemplo 4.1.1 inaugura esta discussão.

Exemplo 4.1.1. Dispondo de R\$ 100,00, quantos selos de R\$ 5,00 e quantos selos de R\$ 7,00 podemos comprar? (exemplo inspirado nas aulas do Programa de Iniciação Científica – PIC, disponíveis em: <https://www.youtube.com/watch?v=HAX0whUteAw>)

Modelando esse problema, temos a Diofantina Linear $5x + 7y = 100$ em que x representa a quantidade de selos de R\$ 5,00 e y a quantidade de selos de R\$ 7,00. Como 100 é múltiplo de 5, facilmente deduzimos a solução particular $x_0 = 20$ e $y_0 = 0$. Então, as demais soluções são do tipo:

$$x = 20 + 7t, \quad y = 0 - 5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Vejam na Tabela 6, algumas soluções.

Tabela 6 - Algumas soluções do Exemplo 4.1.1

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-1	6	13	20	27	34	41
y	15	10	5	0	-5	-10	-15

Fonte: O autor (2020).

Apesar dos pares (x,y) : $(-1,15)$, $(27, -5)$, $(34, -10)$, $(41, -15)$ serem soluções da equação, não servem como solução para o problema, pois a natureza da questão requer que as quantidades de selos sejam inteiras não negativas, ou naturais. As três soluções naturais são: $(6,10)$, $(13,5)$ e $(20,0)$. Portanto, podemos comprar 6 selos de R\$ 5,00 e 10 selos de R\$ 7, ou comprar 13 selos de R\$ 5,00 e 5 selos de R\$ 7,00 ou comprar 20 selos de R\$ 5,00 e nenhum selo de R\$ 7,00.

Assim como neste exemplo, existem muitos outros envolvendo Equações Diofantinas Lineares que necessitam que suas soluções pertençam ao Conjunto dos

Números Naturais. O Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pista é um deles já que a quantidade de movimentos, pousos e decolagens, são números naturais. A seguir, discutimos como obter tais soluções.

Da Proposição 4.2 temos que a solução geral da Equação Diofantina Linear $ax + by = c$, com $\text{mdc}(a,b) = 1$ é dada por

$$x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Buscamos as soluções naturais, ou seja, inteiras não negativas, logo $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Segue que

$$x_0 + tb \geq 0 \quad \text{e} \quad y_0 - ta \geq 0.$$

Ou simplesmente,

$$\frac{y_0}{a} \leq t \leq \frac{-x_0}{b}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Vamos retomar o Exemplo 4.1.1, resolvendo-o através da técnica que acabamos de discutir. A Equação Diofantina Linear proposta era dada por $5x + 7y = 100$. Obtivemos como solução geral o par ordenado (x,y) , em que $x = 20 - 7t$ e $y = 5t$, com t parâmetro inteiro. Como desejamos apenas as soluções naturais, devemos impor $x \geq 0$ e $y \geq 0$, ou seja,

$$20 - t \geq 0 \quad \text{e} \quad 5t \geq 0.$$

Finalmente, concluímos que $0 \leq t \leq 20/7$, com t parâmetro inteiro.

A Tabela 7 exhibe as possíveis soluções factíveis para o Exemplo 4.1.1.

Tabela 7 - Soluções naturais do Exemplo 4.1.1

t	0	1	2
x	20	13	6
y	0	5	10

As três soluções naturais são: (20,0), (13,5) e (6,10).

Ao iniciar este trabalho, o primeiro aeroporto estudado foi SBRF, visto que Lima, James Gomes (2019) já havia me apresentado um esboço da Figura 11 e logo encontrei os intervalos de tempo entre pousos ($\alpha = 3$) e decolagens ($\beta = 2$) no SIGMA e cheguei a equação

$$3A + 2D = 60,$$

como apresentado na Seção 3.2. Para consolidar a Proposição 4.2 e a técnica de obtenção das soluções naturais de uma Equação Diofantina Linear, resultados centrais para esta pesquisa, propomos encontrar as possíveis maneiras de desbalancear SBRF através do Exemplo 4.1.2.

Exemplo 4.1.2. Encontrar as formas de desbalanceamento de SBRF dados $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Dada a Equação da Capacidade Dinâmica: $\alpha A + \beta D = 60$, com $\alpha = 3$ e $\beta = 2$, modelamos a Diofantina $3A + 2D = 60$.

O $\text{mdc}(2,3) = 1$ divide 60. Logo, a equação possui solução. Aplicando o Algoritmo de Euclides para o cálculo do $\text{mdc}(2,3)$, obtemos a Tabela 8.

Tabela 8 - Cálculo do $\text{mdc}(2,3)$

QUOCIENTE →	1	2
3	2	1
RESTO →	1	0

Fonte: O autor (2020).

$$3 = 1.2 + 1$$

$$3.1 - 2.1 = 1.$$

Multiplicando por 60:

$$3.(60) + 2.(-60) = 60.$$

Comparando com a equação $3A + 2D = 60$, observamos que a solução particular é $A_0 = 60$ e $D_0 = -60$. Segundo a Proposição 4.2, a solução geral é:

$$A = 60 + 2t \text{ e } D = -60 - 3t, t \in \mathbb{Z}.$$

Como procuramos apenas soluções naturais, aplicamos a técnica que discutimos no início desta seção e chegamos a

$$60 + 2t \geq 0 \text{ e } -60 - 3t \geq 0$$

$$-30 \leq t \leq -20, t \in \mathbb{Z}.$$

Tabela 9 - Soluções do Exemplo 4.1.2

t	-30	-29	-28	-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20
D	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
A	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Fonte: O autor (2020).

Condensando os dados da Tabela 9, temos os seguintes pares ordenados (D,A) que são soluções da Equação Diofantina e possíveis formas de desbalancear SBRF: $(0,20)$, $(3,18)$, $(6,16)$, $(9,14)$, $(12,12)$, $(15,10)$, $(18,8)$, $(21,6)$, $(24,4)$, $(27,2)$, $(30,0)$.

5. O DESBALANCEAMENTO PELA COMBINATÓRIA

Além das Equações Diofantinas Lineares para modelar e desenvolver o Problema da Capacidade Dinâmica das Pistas, o clássico Problema das Bolinhas e Tracinhos (apresentado na Seção 5.6) é também uma opção didática para entender e incrementar o Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pista, tratando as soluções factíveis através das Combinações Completas ou das Permutações com Repetição (Seção 5.4). Apresentamos uma breve discussão de aspectos primitivos de Matemática Combinatória, como o Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo), o fatorial de um número natural, as permutações e combinações simples, para finalmente discutirmos os conceitos de Combinações Completas e Permutações com Repetição.

5.1 Princípio Multiplicativo

Muitos alunos e professores consideram a Análise Combinatória como a parte mais difícil da Matemática de todo o Ensino Básico. Há um conjunto de métodos de contagem como Combinações, Arranjos e Permutações que propõem "facilitar" a resolução de questões, mas, dependendo da forma abordada, se torna complicada, desprovidas de significado. É comum nos depararmos com alunos e professores indecisos em qual método de contagem aplicar. Neste caso, acreditamos que o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem* deve ser sempre intensamente explorado, incentivado e evidenciado nas aulas de Análise Combinatória.

Segundo Bachx (1975, p.3), o Princípio Multiplicativo pode ser enunciado da seguinte forma: se um acontecimento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e se, para cada uma das m maneiras possíveis de ocorrências de A, um segundo acontecimento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento A seguido do acontecimento B é $m.n$.

A aplicação do Princípio Multiplicativo é motivada pelo Exemplo 5.1.1.

Exemplo 5.1.1. Três *taxiways* A, B e C conduzem a aeronave do pátio à pista. Quando pronto para decolar, o piloto detectou pane elétrica e precisou voltar ao pátio. De quantos modos diferentes esta aeronave pode ingressar na pista e sair dela utilizando as *taxiways* A, B e C? (Exemplo inspirado em Bachx, 1975, p.2).

Se a aeronave ingressar na pista pela *taxiway* A, ela pode voltar por A, B ou C, ou seja, três maneiras diferentes de entrar e sair da pista. Podemos indicar essas possibilidades por (A,A), (A,B), (A,C).

Se a aeronave ingressar pela *taxiway* B, teremos mais três maneiras, indicadas por (B,A), (B,B), (B,C).

Analogamente por C: (C,A), (C,B), (C,C).

Totalizando nove maneiras de ingressar e sair da pista: (A,A), (A,B), (A,C), (B,A), (B,B), (B,C), (C,A), (C,B), (C,C).

A Tabela 10 é uma forma intuitiva de verificar o Princípio Multiplicativo onde temos três maneiras de ocorrer o acontecimento A (entrar na pista) e três maneiras de ocorrer o acontecimento B (sair da pista). Ou seja, usando a notação apresentada, temos $m = 3$ e $n = 3$, $m.n = 9$ maneiras de ocorrer o acontecimento A seguido do acontecimento B.

Tabela 10 - Soluções do Exemplo 5.1.1

Entrar Sair	A	B	C
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)

Fonte: O autor (2020).

5.2 Fatorial

Apesar do Princípio Multiplicativo ser uma ferramenta suficiente para resolver todas as questões de Análise Combinatória, algumas técnicas foram concebidas para tornar os cálculos mais abreviados. Por sua vez, a operação *Fatorial* contribui bastante com esta proposta.

Seja n um número natural. O Fatorial de n , representado por $n!$, é também um número natural definido por:

$$0! = 1 \text{ e}$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \text{ para } n \geq 1.$$

5.3 Permutações Simples

A *Permutação Simples* de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos. Para três objetos A, B e C, temos as ordenações ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, totalizando 6 permutações simples. Pelo Princípio Multiplicativo, temos 3 objetos para serem alocados em 3 posições: 3 possibilidades para ocupar a posição um, restando 2 objetos possíveis para ocupar a posição dois e 1 para a última posição, totalizando $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades ou ordenações ou agrupamentos.

De maneira similar, utilizando o Princípio Multiplicativo e a definição de Fatorial de um número natural, procedemos para n objetos distintos e chegamos a uma expressão para a quantidade total de Permutações Simples de n objetos distintos:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

Um Permutação é Simples quando os objetos a serem permutados forem todos distintos. Observe que a expressão para a Permutação de n objetos distintos corresponde a aplicação direta do Princípio Multiplicativo, seguido do uso da operação Fatorial.

A quantidade de anagramas de uma palavra indica o total de permutações que é possível obter com todas as letras da palavra. O total de anagramas da palavra PISTA é dado por $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = P_5$.

5.4 Permutações com Repetição

A *Permutação com Repetição* caracteriza-se quando nem todos os elementos a serem agrupados ou permutados são distintos. Vamos pensar no número de anagramas da palavra CAPACIDADE. Apesar de possuir 10 letras, a quantidade de anagramas será inferior a P_{10} visto que, como a letra A aparece três vezes, contamos cada anagrama $3!$ vezes, como a letra C aparece duas vezes, contamos cada anagrama $2!$ vezes, como a letra D aparece duas vezes, contamos cada anagrama $2!$ vezes, já as letras E, I e P aparecem uma vez cada, então contamos cada anagrama $1!$ vezes. Sendo assim, o número de anagramas da palavra CAPACIDADE é representada por

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200.$$

Repare que as quantidades de objetos repetidos foram descontadas através da divisão (veja o denominador da expressão acima).

Generalizadamente, temos que se $n = \alpha + \beta + \dots + k + \lambda$, então

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\lambda!}.$$

(Exemplo inspirado em Morgado, 2016, p.42)

5.5 Combinações Simples

O termo *Combinação Simples* corresponde a quantidade de maneiras que podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos. Uma combinação desses n objetos p a p é uma escolha, não ordenada, de p dos n objetos dados. Vamos considerar cada letra da sigla CGNA um objeto. As combinações desses quatro objetos, tomados dois a dois é: AC, AG, AN, CG, CN, GN.

Representamos a quantidade de combinações por C_n^p .

Analisando o exemplo acima, os quatro objetos foram tomados dois a dois. Temos quatro opções para ocupar a primeira posição e três para a segunda. Sendo

assim, teríamos 12 combinações. Porém, AC e CA, NG e GN, dentre outros pares, são idênticas nesse caso e contamos duas vezes ($P_2 = 2! = 2$). Portanto, a resposta é $12/2 = 6$.

Generalizando,

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}, \quad 0 < p \leq n \text{ e } C_n^0 = 1.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$, obtemos:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

5.6 Combinações Completas

A toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$, nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , chamamos de *Equação Linear*. Os coeficientes, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, assim como o termo independente da equação, b , são todos números reais.

O Clássico Problemas das Bolinhas e dos Tracinhos serve para representar as soluções inteiras não negativas das equações lineares de coeficientes unitários, facilitando o entendimento. Vejamos o exemplo abaixo.

EXEMPLO 5.6.1. De quantos modos podemos ter pousos, decolagens e arremetidas no período de cinco minutos, considerando que cada operação dura um minuto?

Consideremos X a quantidade de pousos, Y a quantidade de decolagens e Z a quantidade de arremetidas. Já que cada operação dura um minuto, o somatório $X+Y+Z$ vale 5. Vamos utilizar o artifício abaixo com as bolinhas e tracinhos para apresentar algumas soluções e facilitar o entendimento.

X	+	Y	+	Z	=	5
○○○○○	/		/			(5,0,0)
○○○○	/	○	/			(4,1,0)
	/	○○○	/	○○		(0,3,2)
	/	○○	/	○○○		(0,2,3)
○	/	○○	/	○○		(1,2,2)

Separamos as quantidades X, Y e Z por tracinhos (/) e utilizaremos as bolinhas (○) para representar a quantidade que ocorreu cada operação (pouso, decolagem ou arremetida). Condensando as 5 soluções apresentadas, temos

○○○○○//
 ○○○○/○/
 /○○○/○○
 /○○/○○○
 ○/○○/○○

Como mostra o artifício, ○○○○○// representa a solução (5,0,0), ou seja, nesse caso tivemos 5 pousos, 0 decolagens e 0 arremetidas. Observando as outras soluções, é fácil perceber que são Permutações com Repetições de bolinhas e tracinhos, uma vez que temos sempre 5 bolinhas e 2 tracinhos.

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

Podemos concluir que são 21 modos de ter pousos, decolagens e arremetidas no período de 5 minutos.

Poderíamos pensar em combinar 5 elementos 3 a 3 efetuando a Combinação Simples $C_5^3 = 10$ no Exemplo 5.6.1. Porém, C_5^3 representaria o número de modos de alocar 3 períodos diferentes de 1 minuto (pousos, decolagens e arremetidas) entre os 5 minutos disponíveis. Sendo assim, não haveria mais de um pouso ou mais de uma decolagem ou mais de uma arremetida. Para resolvermos este caso e tornar

possível a escolha de objetos diferentes ou não utilizamos a Combinação Completa ou Combinação com Repetição que é representada por CR_n^p .

Segundo Morgado (2016), **podemos interpretar CR_n^p de dois modos:**

- a) CR_n^p é o número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados.**
- b) CR_n^p é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ em inteiros não negativos.**

No caso do Exemplo 5.6.1 têm-se $CR_3^5 = P_7^{5,2}$. De modo geral, para calcular CR_n^p , isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ teríamos p bolinhas e $n - 1$ tracinhos. Logo:

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,n-1}.$$

O Clássico Problema das Bolinhas e dos Tracinhos motivou didaticamente as soluções do Problema do Desbalanceamento via Permutações com Repetição ou Combinação Completa como veremos a seguir.

EXEMPLO 5.6.2. Calcular a Capacidade Dinâmica do SBBR considerando um intervalo de tempo de 4 minutos¹⁵, $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

$$2A + B = 4.$$

Consideremos $2A = C$, logo: $C + B = 4$, que é a nossa equação linear de coeficientes unitários. Queremos encontrar as soluções inteiras não negativas, ou seja, naturais. Vamos representar as soluções com bolinhas e tracinhos.

¹⁵ Embora a Fórmula do Desbalanceamento seja $\alpha A + \beta D = 60$, ou seja, o intervalo analisado seja de 60 minutos, utilizamos 4 minutos nesse exemplo para oferecer melhor didática, focando no método.

$$\begin{array}{rclcl}
 C & + & B & = & 4 \\
 \circ \circ \circ \circ & / & & & (4,0) \\
 \circ \circ \circ & / & \circ & & (3,1) \\
 \circ \circ & / & \circ \circ & & (2,2) \\
 \circ & / & \circ \circ \circ & & (1,3) \\
 & / & \circ \circ \circ \circ & & (0,4)
 \end{array}$$

$$CR_2^4 = P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

Porém, dentre as 5 soluções, 2 não satisfarão A por apresentarem valores fracionários. Como buscamos inteiros não negativos, esses dados não são factíveis e estão destacados em vermelho como mostra a Tabela 11.

Tabela 11 - Soluções Inteiras do Exemplo 5.6.2

A	2A	C	B	2A + B
2	4	4	0	4
-	3	3	1	4
1	2	2	2	4
-	1	1	3	4
0	0	0	4	4

Fonte: O autor (2020).

Vale observar que na adaptação da equação $2A + B = 4$ para $C + B = 4$, houve uma perda de 2 soluções. O Teorema [Fassini, Nicodemos, Costa] descreve a

quantidade de soluções inteiras não negativas de uma Equação Diofantina Linear de duas variáveis.

Teorema 5.6.1 [Fassini, Nicodemos, Costa]. Seja a Equação Diofantina Linear $\alpha x + \beta y = c$, com $\text{mdc}(\alpha, \beta)$ divisor de c .

i) Se α e β dividem c , então # Soluções = n é:

$$n = \left\lfloor \frac{(P_{c+1}^{c,1})}{\text{mmc}(\alpha, \beta)} \right\rfloor$$

ii) Se ou α ou β dividem c , então # Soluções = n é:

$$n = \left\lfloor \frac{(P_{c+1}^{c,1}) - 1}{\text{mmc}(\alpha, \beta)} \right\rfloor$$

iii) Se α e β não dividem c , então # Soluções = n é:

$$\left\lfloor \frac{(P_{c+1}^{c,1}) - 2}{\text{mmc}(\alpha, \beta)} \right\rfloor \leq n \leq \left\lceil \frac{(P_{c+1}^{c,1}) - 2}{\text{mmc}(\alpha, \beta)} \right\rceil$$

É fácil notar que a Permutação com Repetição $(P_{c+1}^{c,1})$ fornece o número de linhas da tabela e o $\text{mmc}(\alpha, \beta)$ fornece o espaçamento entre as soluções inteiras. Sendo assim, o Exemplo 5.6.2 possui $(P_5^{4,1}) = 5$ linhas (5 possíveis soluções). O $\text{mmc}(2,1) = 2$ fornece o espaçamento entre as soluções. Neste exemplo, tanto α quanto β dividem $c = 4$, sendo assim, a primeira e a última linha são soluções inteiras factíveis. A partir da primeira linha que é solução, a próxima será a segunda linha ($\text{mmc}(2,1) = 2$). Portanto, o número de soluções inteiras da equação $2A + B = 4$ é dada por $\left\lfloor \frac{(P_5^{4,1})}{\text{mmc}(2,1)} \right\rfloor = 3$ que é o caso i) do Teorema 5.6.1.

No caso ii), onde ou α ou β dividem c , ou a primeira linha ou a última será solução inteira factível, por isso, diminui-se uma unidade de $(P_{c+1}^{c,1})$.

No caso iii), onde α e β não dividem c , nem a primeira linha e nem a última será solução inteira factível, por isso, diminui-se duas unidades de $(P_{c+1}^{c,1})$. Utilizamos o supremo e o ínfimo nesses casos degenerados.

Para encontrar os pares ordenados (D,A) , basta criar uma lista como a Tabela 11 por exemplo. A partir desse ponto, o intervalo de tempo aplicado será sempre

sessenta. Podemos então, utilizar a fórmula $P_{61}^{60,1} = CR_2^{60} = 61$ devidamente associada a um dos 3 possíveis casos do Teorema 5.6.1 para obter a quantidade de soluções inteiras do Desbalanceamento.

Assim como no capítulo de Equações Diofantinas, vamos retomar o exemplo do SBRF para consolidar este método.

EXEMPLO 5.6.3. Determinar quantas e quais são as formas de desbalanceamento do SBRF dados $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Dada a Equação da Capacidade Dinâmica: $\alpha A + \beta D = 60$, com $\alpha = 3$ e $\beta = 2$, temos: $3A + 2D = 60$.

Consideremos $3A = X$ e $2D = Y$, logo: $X + Y = 60$.

$$P_{61}^{60,1} = \frac{61!}{60!1!} = 61.$$

Encontraremos 61 soluções para $X + Y = 60$. Mas, para $3A + 2D = 60$, encontraremos 11 soluções. 50 não satisfarão A ou B como mostra a Tabela 12.

$$\left\lfloor \frac{(P_{61}^{60,1})}{mmc(2,3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(CR_2^{60})}{mmc(2,3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{61}{mmc(2,3)} \right\rfloor = 11.$$

Tabela 12 - Soluções Inteiras do Exemplo 5.6.3

A	3A	D	2D	3A+2D
20	60	0	0	60
-	59	-	1	60
-	58	1	2	60
19	57	-	3	60
-	56	2	4	60
-	55	-	5	60
18	54	3	6	60
-	53	-	7	60
-	52	4	8	60

17	51	-	9	60
-	50	5	10	60
-	49	-	11	60
16	48	6	12	60
-	47	-	13	60
-	46	7	14	60
15	45	-	15	60
-	44	8	16	60
-	43	-	17	60
14	42	9	18	60
-	41	-	19	60
-	40	10	20	60
13	39	-	21	60
-	38	11	22	60
-	37	-	23	60
12	36	12	24	60
-	35	-	25	60
-	34	13	26	60
11	33	-	27	60
-	32	14	28	60
-	31	-	29	60
10	30	15	30	60
-	29	-	31	60
-	28	16	32	60
9	27	-	33	60
-	26	17	34	60
-	25	-	35	60
8	24	18	36	60
-	23	-	37	60
-	22	19	38	60
7	21	-	39	60
-	20	20	40	60
-	19	-	41	60

6	18	21	42	60
-	17	-	43	60
-	16	22	44	60
5	15	-	45	60
-	14	23	46	60
-	13	-	47	60
4	12	24	48	60
-	11	-	49	60
-	10	25	50	60
3	9	-	51	60
-	8	26	52	60
-	7	-	53	60
2	6	27	54	60
-	5	-	55	60
-	4	28	56	60
1	3	-	57	60
-	2	29	58	60
-	1	-	59	60
0	0	30	60	60

Fonte: O autor (2020).

Assim como na Tabela 11, os valores não factíveis estão destacados em vermelho na Tabela 12. Portanto, temos 11 possibilidades: (0,20), (3,18), (6,16), (9,14), (12,12), (15,10), (18,8), (21,6), (24,4), (27,2), (30,0).

Gostaríamos de ressaltar que investigamos o Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pista dos Aeródromos sob dois pontos de vista: um, através das Equações Diofantinas Lineares em que é possível prever a existência de soluções inteiras e a expressão geral para estas soluções para, a partir daí, determinar as soluções naturais que nos interessam e outro, através da Matemática Combinatória em que viabilizamos a previsão da quantidade de soluções possíveis para este problema, propondo um método tabelado e simples para acessar tais soluções, caso existam.

6. ATIVIDADES PROPOSTAS

Os dois métodos apresentados nos Capítulos 4 e 5, nos fornecem as possíveis configurações de *Trade-off*¹⁶ oriundos do desbalanceamento.

A proposta era apresentar atividades aos jovens do Ensino Básico e *Workshop* para a comunidade aeronáutica. Quanto aos jovens, a intenção era levar grupos de alunos ao CGNA e ao SBRJ. Acredito que o cenário aliado às simples soluções do Problema do Desbalanceamento de Pistas, utilizando Matemática Básica, serviriam como excelente motivação para o estudo dessa disciplina. Quanto ao *Workshop*, tive a oportunidade de apresentar no ICEA conforme exposto no Capítulo 3 e em outras duas oportunidades no CGNA em 2020 por videoconferência. Infelizmente, a Pandemia de COVID-19 impossibilitou as dinâmicas com os alunos.

As atividades apresentam cenários muito próximos aos estudados pelo CGNA, exceto as Atividades 1 e 2. Em todas as questões, foram utilizados valores não oficiais para o α e para o β . A Atividade 8 contempla o aeroporto mais movimentado do mundo, o aeroporto internacional de Atlanta nos Estados Unidos da América. Embora esta última atividade não seja de um aeroporto brasileiro, achamos interessante fazer o cálculo em uma estrutura tão complexa. Curiosamente, os resultados obtidos na Atividade 8 estão muito próximos aos valores apresentados pela FAA, conforme ilustra a Figura 17, a seguir. Nela são apresentados valores de capacidade para três condições diferentes de meteorologia: visual, marginal e instrumentos. O CGNA considera a visual como melhor situação.

¹⁶ “*Trade-off* é um termo em inglês muito utilizado na economia e que define as situações em que existem conflitos de escolha. Este conceito aborda o resultado de uma escolha comparando o que foi selecionado em detrimento daquilo que se abriu mão.” Fonte: www.dicionariofinanceiro.com/trade-off/ acesso em: 18 de janeiro de 2021.

No caso do Desbalanceamento, *Trade-off* se refere a priorizar pousos em detrimento das decolagens ou vice-versa.

Figura 17 - Capacidade de pista de alguns dos principais aeroportos americanos

Airport Identifier and Name		Aircraft Operations (Arrivals and Departures) per Hour		
		Visual	Marginal	Instrument
ATL	Hartsfield-Jackson Atlanta International	216-226 (AP) 219-222 (DP)	201-208 (AP) 206 (DP)	175-190 (AP) 183-186 (DP) 168-169 (LIMC - AP) 168-179 (LIMC - DP)
BOS	Boston Logan International	116-125	109-112	84-86
BWI	Baltimore-Washington Thurgood Marshall International	68-80	64-80	62-64
CLT	Charlotte/Douglas International	176-182	161-162	138-147
DCA	Ronald Reagan Washington National	69-72	69-72	54-64
DEN	Denver International	262-266 (AP) 266-298 (DP)	224-279	224-243
DFW	Dallas/Fort Worth International	226-264	194-245	170
DTW	Detroit Metropolitan Wayne County	178-184	163-164	136
EWR	Newark Liberty International	94-99 (AP) 94-100 (DP)	76-84	68-70
FLL	Fort Lauderdale-Hollywood International	74-82	66-72	56-66
HNL	Honolulu International	117-120	91-105	60-77
IAD	Washington Dulles International	150-159 (AP) 156-164 (DP)	112-120 (AP) 136-145 (DP)	108-111 (AP) 125-132 (DP)
IAH	Houston George Bush Intercontinental	172-199	152-180	144-151
JFK	New York John F. Kennedy International	84-87 (AP) 90-93 (DP)	85-86	74-84

Fonte: FAA (2014), retirado de James Gomes (2019).

6.1 Atividade 1

A tabela abaixo correlaciona o intervalo do Rumo Magnético com a RWY correspondente. Complete as lacunas.

Tabela 13 - Atividade 1

RWY	Rumo Magnético
01	[006, 015]
	[016, 025]
03	
04	[036, 045]
	[046, 055]
06	

07	[066, 075]
	[076, 085]
09	[086, 095]
10	
	[106, 115]
12	[116, 125]
	[126, 135]
14	
15	[146, 155]
	[156, 165]
17	
18	
19	[186, 195]
	[196, 205]
	[206, 215]
22	[216, 225]
	[226, 235]
24	
25	
26	[256, 265]
27	[266, 275]
	[276, 285]
29	[286, 295]
30	
31	[306, 315]
32	
	[326, 335]
34	
	[346, 355]
36	[356, 005]

Fonte: O autor (2020).

6.2 Atividade 2

Se uma pista está alinhada ao rumo magnético 197° , quais as cabeceiras dessa pista? Qual é a pista (cabeceira) em uso se o vento se origina do Nordeste (NE)?

6.3 Atividade 3

Devido a um importante evento artístico em Macapá, tinha-se a previsão do pouso de 12 aeronaves das 15h00 às 16h00 no SBMQ. Considerando $\alpha = 4$ e $\beta = 3$, qual a quantidade máxima de decolagens nesse período?

6.4 Atividade 4

Foz do Iguaçu é uma cidade do Oeste do Paraná que faz fronteira com o Paraguai e a Argentina. É conhecida internacionalmente pelas Cataratas do Iguaçu, uma das 7 Maravilhas da Natureza e a Usina Hidrelétrica de Itaipu, a segunda maior do mundo em tamanho e primeira em geração de energia, que em 1996 foi considerada uma das 7 Maravilhas do Mundo Moderno pela *Sociedade Americana de Engenheiros Civis*. Por tantos atrativos, foi apontada pelo *Guia Travel Hacker 2020* como a mais buscada no mundo para viagens turísticas em família. O Aeroporto Internacional de Foz do Iguaçu (SBFI) é o portal de entrada mais importante para a tríplice fronteira. A pista 15¹⁷ é a que oferece maior capacidade com $\alpha = 5$ e $\beta = 3$. Com isso, quantas e quais as possibilidades de desbalanceamento que podemos oferecer?

6.5 Atividade 5

O Aeroporto Internacional Tom Jobim (SBGL) também conhecido como Aeroporto do Galeão é o segundo maior do país em movimento internacional. A circulação aérea que mais favorece sua capacidade é o chamado 10/15, ou seja, as aeronaves pousam apenas na pista 15 e decolam da pista 10. Sabendo-se que o intervalo de tempo médio entre dois pousos seguidos é de 3 minutos e entre

¹⁷ Durante esta pesquisa, utilizei exemplos de Foz do Iguaçu com cabeceiras 14 e 32, baseados no período em que trabalhei lá (2004 a 2011). Porém, em 10 de fevereiro de 2020, as cabeceiras mudaram para 15 e 33. Isso não interfere em nada os cálculos apresentados.

decolagens é de 2 minutos, qual a capacidade máxima que podemos obter com esse sistema de pistas?

Figura 18 - SBGL: Aeroporto Internacional Tom Jobim/Galeão



Fonte: CGNA.

6.6 Atividade 6

O Aeroporto Internacional de São Paulo/Guarulhos (SBGR), é o maior da América Latina e o mais movimentado do país. Possui um par de pistas paralelas que são próximas, sendo permitida a operação segregada (uma pista somente para pousos e outra somente para decolagens) sob condições visuais. Considerando $\alpha = 1,5$ e $\beta = 1,2$. Qual é o número máximo de pousos por hora? E o máximo de decolagens no mesmo intervalo de tempo?

6.7 Atividade 7

O Aeroporto Internacional de Brasília (SBBR), localizado na região central do país, é um importante *hub* nacional que liga a região Norte/Nordeste ao Sul/Sudeste. É o que possui a maior capacidade de pista no Brasil e o terceiro mais movimentado do país. Possui um par de pistas paralelas e devidamente espaçadas, permitindo

operações simultâneas. Além disso, possuem as mesmas dimensões e configurações parecidas de *taxiways* (representadas por letras maiúsculas na Figura 16), com isso, cada uma possui $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Quantas e quais as possíveis configurações de trade-off por pista?

6.8 Atividade 8

O Aeroporto Internacional de Atlanta (KATL) é considerado o mais movimentado do mundo segundo um levantamento anual do *Airports Council International* (ACI). Possui um complexo sistema de pistas constituído por 5 paralelas, sendo que a RWY08L/26R opera de forma segregada com a RWY08R/26L, assim como a RWY09L/27R opera com a RWY09R/27L. A RWY10/28 opera pousos e decolagens. Ou seja, dois pares de pistas paralelas, mais uma paralela e independente. Admitindo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, qual seria a capacidade horária máxima desse aeroporto considerando para RWY10/28 o mesmo número de pousos e decolagens?

Figura 19 - KATL: Aeroporto Internacional de Atlanta



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Aeroporto_Internacional_de_Atlanta_Hartsfield-Jackson.
Acesso em: 07 de janeiro de 2020.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Analizamos o Problema do Desbalanceamento das Capacidades de Pista dos Aeródromos através das Equações Diofantinas Lineares e da Matemática Combinatória. No primeiro método, vimos que é possível prever a existência de soluções inteiras, a expressão geral para estas soluções e a determinação das soluções naturais que nos interessam. No segundo método, viabilizamos a previsão da quantidade de soluções possíveis, propondo um método tabelado e simples para acessar tais soluções, caso existam.

As soluções apresentadas pertencem ao Conjunto dos Números Naturais. Porém, a busca pelo aumento de capacidade não para. O aeroporto de Guarulhos por exemplo, é o maior da América Latina e está sempre buscando aperfeiçoamento. Conforme concluímos, para aumentar a capacidade, devemos diminuir o intervalo de tempo entre as operações de pouso e decolagem, ou seja, os coeficientes α e β .

Para aeroportos desse porte, que já operam com os coeficientes muito baixos, essa ampliação dependerá de coeficientes fracionários. Para deixar mais claro, vamos pensar em uma situação hipotética. Digamos que em um determinado aeroporto, utilizamos uma pista somente para decolagens, $\alpha = 0$, e que o intervalo β entre essas operações seja de 3 minutos. Aplicando na fórmula $A\alpha + D\beta = 60$, chegaremos a um total de 20 decolagens por hora. Se o intervalo β fosse de 2 minutos, teríamos 30 decolagens, o que representa um aumento de 50%. Uma redução de 3 minutos para 2 minutos pode ser inviável para o aeroporto, mas uma redução para 2,5 minutos pode ser viável e teríamos um total de 24 decolagens, ou seja, um aumento de 20%. Para esse setor um aumento de uma aeronave por hora faz uma diferença absurda.

Para termos uma noção sobre a receita aeroportuária com o embarque (movimento de uma aeronave/hora), que inclui: tarifa de embarque, tarifa média comercial e percentual de combustível, vamos utilizar o exemplo mencionado na introdução sobre o voo da Air France que não obteve a autorização de operação no aeroporto Tom Jobim. Esta empresa, opera com o Boeing 787-900 que tem capacidade para 280 passageiros. De acordo com a ANAC (Agência Nacional de Aviação Civil), a tabela abaixo mostra o valor atual da tarifa de embarque de alguns aeroportos.

Tabela 14 - Valores da Tarifa de Embarque

Teto da Tarifa de Embarque (R\$)	Doméstico	Internacional
SBGR Aeroporto Internacional de São Paulo - Guarulhos	31,69	127,11
SBKP Aeroporto Internacional de Viracopos - Campinas	30,38	124,79
SBBR Aeroporto Internacional de Brasília - Brasília	30,67	125,30
SBGL Aeroporto Internacional Tom Jobim - Rio de Janeiro	32,84	129,18
SBCF Aeroporto Internacional de Belo Horizonte - Confins	32,62	128,79

Fonte: <https://anac.gov.br/noticias/2020/tarifas-aeroportuarias-de-confins-e-galeao-sao-atualizadas>.

Tabela adaptada pelo autor. Acesso em: 24 de agosto de 2020)

Somente com a taxa de embarque internacional de SBGL de R\$ 129,18 vezes 280 passageiros, a concessionária teria uma arrecadação de R\$ 36.170,40 com esse voo por dia. Considerando anualmente, passaria a R\$ 36.170,40 x 30 (dias) x 12 (meses) = R\$ 13.021.344,00. Sem mencionar os efeitos positivos que causam a terceiros, tais como: setores hoteleiros, serviços de transportes, setor de alimentos, entre outros.

A possibilidade de soluções fracionárias para o Problema do Desbalanceamento da Capacidade de Pista amplia as possibilidades também no

contexto dos Conceitos Matemáticos e das Aplicações no Ensino. Repare que os conceitos estudados através das Equações Diofantinas Lineares podem ser explorados já no Ensino Fundamental. A parte Combinatória desta pesquisa requer um pouco mais de maturidade dos alunos, sendo sugerida que seja trabalhada com alunos do Ensino Médio. Porém as potenciais soluções contidas em Q – Z abrem espaço para um mundo de possibilidades no âmbito da Educação Matemática e da própria Matemática, isto é, pensamos que esta nova problematização pode vir a ser possível trabalhar com esta questão e níveis mais aprofundados, como por exemplo em cursos de especialização de professores.

A Modelagem é uma projeção reduzida da realidade, havendo limitações no processo. Sendo assim, a proposta para trabalhos futuros é o aprofundamento do estudo analítico dos coeficientes alpha e beta em função do mix de aeronaves, tempo de ocupação de pista, separações de segurança e geometria das pistas de pouso e táxi. Explorar valores fracionários para o alpha e o beta de modo a determinar valores naturais para o número de pousos e decolagens, A e D respectivamente, utilizando os conceitos aqui apresentados e buscando diferentes métodos, quer seja no âmbito da Educação Matemática, quer seja no âmbito da Força Aérea.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Rafael de Araújo. **Aumento da capacidade de pistas paralelas e próximas: um estudo de caso do aeroporto internacional de Guarulhos**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Infraestrutura Aeronáutica e área de Transporte Aéreo e Aeroportos) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2014.

BACHX, Arago de C; POPPE, Luiz M. B; TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Ed. Nacional, 1975.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea. **Missão do CGNA**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <http://www2.fab.mil.br/cgna/index.php/missao-visao-e-valores>. Acesso em: 15 de julho de 2020.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **ICA 100-12 – Regras do Ar**. Rio de Janeiro, 2016.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **ICA 100-22 – Serviço de Gerenciamento de Fluxo de Tráfego Aéreo**. Rio de Janeiro, 2018.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **MCA 100-14 – Capacidade do Sistema de Pistas**. Rio de Janeiro, 2015.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **MCA 100-17 – Capacidade de Setor ATC**. Rio de Janeiro, 2014.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **NSCA 351-1 – Sistema de Controle do Espaço Aéreo Brasileiro**. Rio de Janeiro, 2010.

BRASIL. Comando da Aeronáutica. Departamento de Controle do Espaço Aéreo. **O Guardião**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://issuu.com/aeroespaco/docs/livro_o_guardiao_decea_21x28cm_port. Acesso em: 10 de setembro de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **BNCC - Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em 13 de fevereiro de 2021.

GILBO, Eugene P. Airport Capacity: Representation, Estimation, Optimization. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Cambridge (United States), vol I, no. 3, p.144-154, september 1993.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT; 08).

JAURENA, R. A. **Guide for the application of a common methodology to estimate airport and ATC sector capacity for the SAM region**. Lima, Peru, ICAO RLA/06/901, 2009.

LA ROCQUE; PITOMBEIRA. **Uma Equação Diofantina e suas Resoluções**. Revista do Professor de Matemática, v.19, (**RPM19**), p.39-47, 1991. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm>. Acesso em 14 de fevereiro de 2021.

LIMA, James Gomes. **Capacidade de pista dinâmica: um novo conceito no uso eficiente da infraestrutura espacial**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ciências Aeroespaciais) - Universidade da Força Aérea, Rio de Janeiro, 2019.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática; 2).

MURÇA, Mayara Condé Rocha. **O Problema do sequenciamento de aeronaves para pouso: análise para o caso do aeroporto internacional de São Paulo/Guarulhos**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2013.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Teorema de Bézout**. 2017. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/bezout_e_outros_bizus.pdf. Acesso em: 12 de fevereiro de 2021.

ORGANIZAÇÃO DA AVIAÇÃO CIVIL INTERNACIONAL. **Manual on Location Indicators**. Doc. 7910. 105° Edition. Montreal, 2002.

ORGANIZAÇÃO DA AVIAÇÃO CIVIL INTERNACIONAL. **Manual on Collaborative Air Traffic Flow Management**. Doc. 9971. Third Edition. Montreal 2018.

PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Aritmética - Aula 28 - Equações Diofantinas: Quando existe solução. Professor: Fábio Henrique Teixeira de Souza. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Zgd2DbZcPEE>. Acesso em: 16 de junho de 2020.

PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Aritmética - Aula 29 - Equações Diofantinas: Como são as soluções? Professor: Fábio Henrique Teixeira de Souza. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=71p6a5YeGUQ>. Acesso em: 16 de junho de 2020.

PIC - Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Aritmética - Aula 30 - Equações Diofantinas: alguns exemplos. Professor: Fábio Henrique Teixeira de Souza. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HAX0whUteAw>. Acesso em: 16 de junho de 2020.

RIBEIRO, Vitor Filincowsky. **Decisão colaborativa com utilização de Teoria dos Jogos para o sequenciamento de partidas em aeroportos**. 2013. Tese (Mestrado em Informática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

SANTOS, Pâmela Martins. **Análise e alternativas para redução de tempo de ocupação de pista.** 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Infraestrutura Aeronáutica, Área de Transporte Aéreo e Aeroportos) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2017.

APÊNDICE A - RESOLUÇÃO DE ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 1

A tabela abaixo correlaciona o intervalo do Rumo Magnético com a RWY correspondente. Complete as lacunas.

Sugestão de Solução da Atividade 1

Tabela 15 - Solução da Atividade 1

RWY	Rumo Magnético
01	[006, 015]
02	[016, 025]
03	[026, 035]
04	[036, 045]
05	[046, 055]
06	[056, 065]
07	[066, 075]
08	[076, 085]
09	[086, 095]
10	[096, 105]
11	[106, 115]
12	[116, 125]
13	[126, 135]
14	[136, 145]
15	[146, 155]
16	[156, 165]
17	[166, 175]
18	[176, 185]
19	[186, 195]
20	[196, 205]
21	[206, 215]

22	[216, 225]
23	[226, 235]
24	[236, 245]
25	[246, 255]
26	[256, 265]
27	[266, 275]
28	[276, 285]
29	[286, 295]
30	[296, 305]
31	[306, 315]
32	[316, 325]
33	[326, 335]
34	[336, 345]
35	[346, 355]
36	[356, 005]

Fonte: O autor (2020).

Atividade 2

Se uma pista está alinhada ao rumo magnético 197° , quais as cabeceiras dessa pista? Qual é a pista (cabeceira) em uso se o vento se origina do Nordeste (NE)?

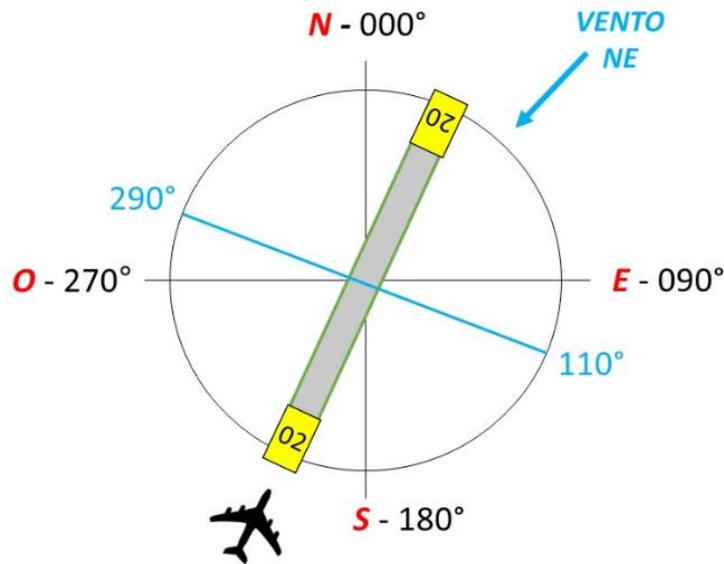
Sugestão de Solução da Atividade 2

A pista está alinhada ao rumo magnético 197. A unidade 7 serve para efetuar o arredondamento.

Arredondando 197 → resulta em 200

Obtemos o rumo 200. Excluindo a unidade, temos 20. Então, uma das cabeceiras é a 20 (RWY20). Como elas diferem 180° , a outra cabeceira é a 02 (RWY 02), valor obtido da diferença entre 200 e 180 resultando 020 e excluindo a unidade. As cabeceiras são 02 e 20.

Figura 20 - Solução da Atividade 2



Fonte: O autor (2020).

Tomando a RWY 20, ou seja, rumo 200°, somamos 090° resultando 290° e diminuímos 090° de 200°, obtendo 110°. Para o vento proveniente entre os rumos 290° e 110° (sentido horário), usaremos a RWY 02. Para o vento proveniente entre os rumos 110° e 290° (sentido horário), usaremos a RWY 20. Como o vento é NE (045°) e o avião pousa ou decola contra o vento, utilizaremos a RWY 02 conforme a Figura 20.

Atividade 3

Devido a um importante evento artístico em Macapá, tinha-se a previsão do pouso de 12 aeronaves das 15h00 às 16h00 no SBMQ. Considerando $\alpha = 4$ e $\beta = 3$, qual a quantidade máxima de decolagens nesse período?

Sugestão de Solução da Atividade 3

$$\alpha A + \beta D = 60$$

Como $\alpha = 4$, $\beta = 3$ e $A = 12$, substituindo na equação acima, temos:

$$4.12 + 3D = 60$$

$$48 + 3D = 60$$

$$3D = 60 - 48$$

$$3D = 12$$

$$D = 4.$$

$$(4,12)$$

Portanto, é possível 4 decolagens.

Atividade 4

Foz do Iguaçu é uma cidade do Oeste do Paraná que faz fronteira com o Paraguai e a Argentina. É conhecida internacionalmente pelas Cataratas do Iguaçu, uma das 7 Maravilhas da Natureza e a Usina Hidrelétrica de Itaipu, a segunda maior do mundo em tamanho e primeira em geração de energia, que em 1996 foi considerada uma das 7 Maravilhas do Mundo Moderno pela *Sociedade Americana de Engenheiros Civis*. Por tantos atrativos, foi apontada pelo *Guia Travel Hacker 2020* como a mais buscada no mundo para viagens turísticas em família. O Aeroporto Internacional de Foz do Iguaçu (SBFI) é o portal de entrada mais importante para a tríplice fronteira. A pista 15¹⁸ é a que oferece maior capacidade com $\alpha = 5$ e $\beta = 3$. Com isso, quantas e quais as possibilidades de desbalanceamento que podemos oferecer?

Sugestão de Solução da Atividade 4

1 - DIOFANTINAS

$$5A + 3D = 60$$

O mdc $(5,3) = 1$, que divide 60. Logo, a equação possui solução.

18 Durante esta pesquisa, utilizei exemplos de Foz do Iguaçu com cabeceiras 14 e 32, baseados no período em que trabalhei lá (2004 a 2011). Porém, em 10 de fevereiro de 2020, as cabeceiras mudaram para 15 e 33. Isso não interfere em nada os cálculos apresentados.

Tabela 16 - Algoritmo de Euclides referente a Atividade 4

QUOCIENTE →	1	1	2
5	3	2	1
RESTO →	2	1	0

Fonte: O autor (2020).

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \quad \Rightarrow \quad 5 - 3 \cdot 1 = 2 \quad (I)$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 3 - 1 \cdot 2 = 1 \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$3 - (5 - 3 \cdot 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 5(-1) + 3(2) = 1 \quad (III)$$

Multiplicando por 60:

$$5 \cdot (-60) + 3 \cdot (120) = 60$$

Comparando com a equação $5A + 3D = 60$, observamos que a solução particular é $A_0 = -60$ e $D_0 = 120$. Segundo a Proposição 4.2, a solução geral é:

$$A = -60 + 3t \quad \text{e} \quad D = 120 - 5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como procuramos apenas soluções naturais, $A \geq 0$ e $B \geq 0$.

$$-60 + 3t \geq 0 \quad \text{e} \quad 120 - 5t \geq 0$$

$$20 \leq t \leq 24, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Tabela 17 - Soluções da Atividade 4

t	20	21	22	23	24
D	20	15	10	5	0
A	0	3	6	9	12

Fonte: O autor (2020).

De acordo com a Tabela 17, as possibilidades de desbalanceamento são: (20,0), (15,3), (10,6), (5,9), (0,12). Totalizando 5 possibilidades.

2 - COMBINAÇÃO COMPLETA OU COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

$$5A + 3D = 60$$

$$n = \left[\frac{61}{\text{mmc}(5,3)} \right] = 5 \text{ possibilidades}$$

Tabela 18 - Soluções Inteiras da Atividade 4

A	5A	D	3D	5A+3D
12	60	0	0	60
9	45	5	15	60
6	30	10	30	60
3	15	15	45	60
0	0	20	60	60

Fonte: O autor (2020).

De acordo com a Tabela 18, as possibilidades de desbalanceamento são: (20,0), (15,3), (10,6), (5,9), (0,12).

Atividade 5

O Aeroporto Internacional Tom Jobim (SBGL) também conhecido como Aeroporto do Galeão é o segundo maior do país em movimento internacional. A circulação aérea que mais favorece sua capacidade é o chamado 10/15, ou seja, as aeronaves pousam apenas na pista 15 e decolam da pista 10. Sabendo-se que o intervalo de tempo médio entre dois pousos seguidos é de 3 minutos e entre decolagens é de 2 minutos, qual a capacidade máxima que podemos obter com esse sistema de pistas?

Figura 18 - SBGL: Aeroporto Internacional Tom Jobim/Galeão



Fonte: CGNA.

Sugestão de Solução da Atividade 5

1 - DIOFANTINAS

Como só utilizaremos a pista 15 para pousos, temos $\alpha = 3$ e $\beta = 0$. Logo:

$$3A + 0D = 60$$

$$3A = 60$$

$$A = 20$$

Como só utilizaremos a pista 10 para decolagens, temos $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Logo:

$$0A + 2D = 60$$

$$2D = 60$$

$$D = 30$$

$$(20,30)$$

Ou seja, podemos no máximo, pousar 20 aeronaves e decolar 30. Totalizando 50 movimentos por hora.

Atividade 6

O Aeroporto Internacional de São Paulo/Guarulhos (SBGR), é o maior da América Latina e o mais movimentado do país. Possui um par de pistas paralelas que são próximas, sendo permitida a operação segregada (uma pista somente para pousos e outra somente para decolagens) sob condições visuais. Considerando $\alpha = 1,5$ e $\beta = 1,2$. Qual é o número máximo de pousos por hora? E o máximo de decolagens no mesmo intervalo de tempo?

Sugestão de Solução da Atividade 6

1 - DIOFANTINAS

Como utilizaremos uma pista apenas pousos, temos $\alpha = 1,5$ e $\beta = 0$. Logo:

$$1,5A + 0D = 60$$

$$1,5A = 60$$

$$A = 40$$

Como utilizaremos uma pista apenas para decolagens, temos $\alpha = 0$ e $\beta = 1,2$.

Logo:

$$0A + 1,2D = 60$$

$$1,2D = 60$$

$$D = 50$$

Portanto, por hora, temos no máximo 40 pousos e 50 decolagens. (40,50).

Atividade 7

O Aeroporto Internacional de Brasília (SBBR), localizado na região central do país, é um importante *hub* nacional que liga a região Norte/Nordeste ao Sul/Sudeste. É o que possui a maior capacidade de pista no Brasil e o terceiro mais movimentado do país. Possui um par de pistas paralelas e devidamente espaçadas, permitindo operações simultâneas. Além disso, possuem as mesmas dimensões e configurações parecidas de *taxiways* (representadas por letras maiúsculas na Figura 16), com isso, cada uma possui $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Quantas e quais as possíveis configurações de trade-off por pista?

Sugestão de Solução da Atividade 7

SOLUÇÃO 1 - DIOFANTINAS

$$2A + 1D = 60$$

O mdc $(2,1) = 1$, que divide 60. Logo, a equação possui solução.

$$2 \cdot (1) + 1 \cdot (-1) = 1$$

Multiplicando por 60:

$$2 \cdot (60) + (-60) = 60$$

Comparando com a equação $2A + 1D = 60$, observamos que a solução particular é $A_0 = 60$ e $D_0 = -60$. Segundo a Proposição 2.2, a solução geral é:

$$A = 60 + t \text{ e } D = -60 - 2t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como procuramos apenas soluções naturais, $A \geq 0$ e $B \geq 0$.

$$60 + t \geq 0 \text{ e } -60 - 2t \geq 0$$

$$-60 \leq t \leq -30, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

De acordo com a Tabela 19, as possíveis configurações de trade-off por pista são: (0,30), (2,29), (4,28), (6,27), (8,26), (10,25), (12,24), (14,23), (16,22), (18,21), (20,20), (22,19), (24,18), (26,17), (28,16), (30,15), (32,14), (34,13), (36,12), (38,11),

(40,10), (42,9), (44,8), (46,7), (48,6), (50,5), (52,4), (54,3), (56,2), (58,1), (60,0).
Totalizando 31 possibilidades.

Tabela 19 - Soluções da Atividade 7

t	- 60	- 59	- 58	- 57	- 56	- 55	- 54	- 53	- 52	- 51	- 50
D	60	58	56	54	52	50	48	46	44	42	40
A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

t	- 49	- 48	- 47	- 46	- 45	- 44	- 43	- 42	- 41	- 40
D	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20
A	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

t	- 39	- 38	- 37	- 36	- 35	- 34	- 33	- 32	- 31	- 30
D	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0
A	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Fonte: O autor (2020).

2 - COMBINAÇÃO COMPLETA OU COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

$$2A + 1D = 60$$

$$n = \left[\frac{61}{\text{mmc}(2,1)} \right] = 31 \text{ possibilidades}$$

Tabela 20 - Soluções Inteiras da Atividade 7

A	2A	D	2A+D
30	60	0	60
29	58	2	60

28	56	4	60
27	54	6	60
26	52	8	60
25	50	10	60
24	48	12	60
23	46	14	60
22	44	16	60
21	42	18	60
20	40	20	60
19	38	22	60
18	36	24	60
17	34	26	60
16	32	28	60
15	30	30	60
14	28	32	60
13	26	34	60
12	24	36	60
11	22	38	60
10	20	40	60
9	18	42	60
8	16	44	60
7	14	46	60
6	12	48	60
5	10	50	60
4	8	52	60
3	6	54	60
2	4	56	60
1	2	58	60
0	0	60	60

Fonte: O autor (2020).

De acordo com a Tabela 20, as possíveis configurações de trade-off por pista são: (0,30), (2,29), (4,28), (6,27), (8,26), (10,25), (12,24), (14,23), (16,22), (18,21), (20,20), (22,19), (24,18), (26,17), (28,16), (30,15), (32,14), (34,13), (36,12), (38,11), (40,10), (42,9), (44,8), (46,7), (48,6), (50,5), (52,4), (54,3), (56,2), (58,1), (60,0).

Atividade 8

O Aeroporto Internacional de Atlanta (KATL) é considerado o mais movimentado do mundo segundo um levantamento anual do *Airports Council International* (ACI). Possui um complexo sistema de pistas constituído por 5 paralelas, sendo que a RWY08L/26R opera de forma segregada com a RWY08R/26L, assim como a RWY09L/27R opera com a RWY09R/27L. A RWY10/28 opera pousos e decolagens. Ou seja, dois pares de pistas paralelas, mais uma paralela e independente. Admitindo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, qual seria a capacidade horária máxima desse aeroporto considerando para RWY10/28 o mesmo número de pousos e decolagens?

Figura 19 - KATL: Aeroporto Internacional de Atlanta



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Aeroporto_Internacional_de_Atlanta_Hartsfield-Jackson. Acesso em: 07 de janeiro de 2020.

Sugestão de Solução da Atividade 8

SOLUÇÃO 1 - DIOFANTINAS

Para cada par de pista paralela, temos:

Pista dedicada a chegadas:

$$2A + 0D = 60$$

$$2A = 60$$

$$A = 30$$

Pista dedicada a partidas:

$$0A + 1D = 60$$

$$1D = 60$$

$$D = 60$$

Ou seja, configuração máxima de (30,60) por par de pistas paralelas. Totalizando 90 movimentos/hora.

Para a pista independente, RWY10/28, temos:

$$2A + 1D = 60$$

As possíveis configurações de trade-off são: (30,0), (29,2), (28,4), (27,6), (26,8), (25,10), (24,12), (23,14), (22,16), (21,18), (20,20), (19,22), (18,24), (17,26), (16,28), (15,30), (14,32), (13,34), (12,36), (11,38), (10,40), (9,42), (8,44), (7,46), (6,48), (5,50), (4,52), (3,54), (2,56), (1,58), (0,60).

Dentre as configurações acima, a que possui o mesmo número de pousos e decolagens é (20,20). Totalizando 40 movimentos/hora.

Conclusão:

$$90 + 90 + 40 = 220 \text{ movimentos/hora.}$$

APÊNDICE B - ARTIGO 01 E ARTIGO 02

ARTIGO 01

GEPEA DÁ INÍCIO AOS TRABALHOS RELACIONADOS COM A CAPACIDADE ATC

O Grupo de Estudos sobre Planejamento do Espaço Aéreo (GEPEA), sob a coordenação do Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea (CGNA), realizou no período de 18 a 22 de abril, no Instituto de Controle do Espaço Aéreo (ICEA), a primeira reunião do Grupo *Ad Hoc* Capacidade ATC (controle de tráfego aéreo) - (GADHOC CAPACIDADE ATC/1), subordinado ao Subgrupo 1.

A programação da reunião constou dos seguintes assuntos: revisão da metodologia de cálculo de capacidade ATC; desenvolvimento de capacitação em cálculo de capacidade de setor e de pista; análise de viabilidade de implementação de setorização vertical; dentre outros temas.

De acordo com o relator do GADHOC CAPACIDADE ATC e chefe da Seção de Capacidade ATC do CGNA, Tenente Especialista em Controle de Tráfego Aéreo Joaquim Tavares Lobo Júnior, por se tratar da primeira reunião, para muitos dos assuntos foram definidas as estratégias necessárias ao desenvolvimento dos produtos. “Com relação ao assunto 1, o principal produto foi o desenvolvimento de uma metodologia para obtenção máxima de capacidade por tipo de operação, considerando a necessidade de uma parametrização para estabelecimento de regras de partição nos aeródromos com o objetivo de atender a demanda do Comitê de Infraestrutura Aeroportuária relacionada com a aprovação da capacidade aeroportuária a cada temporada”, afirmou o Tenente Lobo.

As regras de partição são uma prática comum em outros países e permite, de maneira científica, definir os desbalanceamentos das capacidades de pista dos aeródromos de maneira a atender às necessidades de priorização das operações, sejam de pousos ou decolagens.

Assessoria de Comunicação Social do DECEA

Texto e Foto: CGNA

Edição: Denise Fontes – Jornalista

Publicado em 03/04/2019

Fonte:

www.decea.gov.br/?i=midia-e-informacao&p=pg_noticia&materia=gepea-da-inicio-aos-trabalhos-relacionados-com-a-capacidade-atc

ARTIGO 02

CONCLUÍDO PROCESSO DE DECLARAÇÃO DE CAPACIDADE OPERACIONAL DOS AEROPORTOS PARA A TEMPORADA WINTER 19

O Departamento de Controle do Espaço Aéreo (DECEA), por meio do Centro de Gerenciamento da Navegação Aérea (CGNA), concluiu o processo de declaração de capacidade operacional dos aeroportos para a temporada Winter 19 (inverno 2019).

O processo de declaração de capacidade operacional dos aeroportos ocorre duas vezes ao ano, sendo etapa do processo de registro dos serviços de transporte aéreo, estabelecido pela Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), por meio da Resolução nº 440, de 9 de agosto de 2017. O objetivo principal é permitir a análise das propostas dos aeroportos por parte do provedor de serviços de navegação aérea, que é o DECEA, acerca do uso da infraestrutura aeroportuária e aeronáutica exigido para o período planejado.

Nesse contexto, o CGNA coordenou a reunião do Comitê Técnico de Capacidade, no período de 1º a 3 de abril, com a participação da ANAC e das concessionárias Viracopos, Inframérica, Fraport, Vinci Airports, BH Airports, Floripa Airports, RIOgaleão, Infraero e GRU Airports. No evento foram avaliados os valores de capacidade propostos, de acordo com as metas estabelecidas pelo Comitê de Infraestrutura Aeroportuária, para cada aeroporto por temporada.

A análise conjunta contemplou as capacidades de pátio, pista e setores do espaço aéreo, tendo sido definidos os novos valores de capacidade operacional a serem declarados pelo aeroporto à ANAC e praticados no período de 27 de outubro de 2019 e 28 de março de 2020.

Segundo o chefe da Seção de Capacidade ATC (controle de tráfego aéreo), o 1º Tenente Especialista em Controle de Tráfego Aéreo Joaquim Tavares Lobo Junior, todas as solicitações dos aeroportos foram atendidas. "A novidade para essa temporada foi a utilização de uma nova metodologia desenvolvida pelo CGNA, por intermédio do Grupo *Ad Hoc* Capacidade ATC do Grupo de Estudos sobre Planejamento do Espaço Aéreo (GEPEA), para análise do desbalanceamento de pousos e decolagens permitido dentro de intervalos de 60 minutos, 15 minutos e 5 minutos" - divulgou o Tenente Lobo Jr.

Fonte: CGNA

Editado por Daisy Meireles

Publicado em 15/05/2019

Fonte:

https://www.decea.gov.br/?i=midia-e-informacao&p=pg_noticia&materia=concluido-processo-de-declaracao-de-capacidade-operacional-dos-aeroportos-para-a-temporada-winter-19