COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jocilene Espínola da Silva

EXPLORANDO DIDATICAMENTE O PROBLEMA DE COBERTURA DE TABULEIROS DE DIMENSÃO N

Rio de Janeiro
2021

Jocilene Espínola da Silva

EXPLORANDO DIDATICAMENTE O PROBLEMA DE COBERTURA DE TABULEIROS DE DIMENSÃO *N*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos

Rio de Janeiro
2021

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Jocilene Espínola da

Explorando didaticamente o problema de cobertura de tabuleiros de dimensão N / Jocilene Espínola da Silva. - Rio de Janeiro, 2021.

95 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Diego de Souza Nicodemos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aritmética. 3. Equações diofantinas não lineares. I. Nicodemos, Diego de Souza. II. Colégio Pedro II. III Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Jocilene Espínola da Silva

EXPLORANDO DIDATICAMENTE O PROBLEMA DE COBERTURA DE TABULEIROS DE DIMENSÃO *N*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos (Orientador)
Colégio Pedro II – Profmat CPII

____

Profa. Dra. Marilis Bahr Karan Venceslau
Colégio Pedro II – Profmat CPII

____

Prof. Dr. Fábio Ferreira Araújo
IFRJ- Paracambi

____

Prof. Dr. José Wilson Coura Pinto
FAETERJ-RJ

Rio de Janeiro
2021

Dedico este trabalho à Deus, ao meu esposo e meus familiares, pela base e ajuda recebida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por me ajudar, me acalentar e fortalecer para que fosse possível concluir essa dissertação em meio à essa pandemia que nos causou tanta instabilidade emocional.

Ao meu esposo que em todo tempo esteve ao meu lado me fortalecendo com tanta paciência e amor.

À minha família, pois sem todo o ensinamento que tive, certamente não seria possível chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Diego de Souza Nicodemos, que se superou em compreensão, sempre me apoiando e me orientando com carinho, mesmo diante das minhas limitações e dificuldades.

E aos meus amigos de curso que me ajudaram a superar todas as barreiras encontradas durante essa nossa aventura no PROFMAT.

Instrua o homem sábio, e ele será ainda mais sábio; ensine o homem justo, e ele aumentará o seu saber.

Provérbios 9:9

RESUMO

DA SILVA, J. E. **Explorando Didaticamente o problema de Cobertura de Tabuleiros de Dimensão N**. 2021. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

Neste trabalho, foi proposto o estudo do Problema de Cobertura de Tabuleiros de Dimensão n. Inicialmente, convém informar que um tabuleiro de dimensão n é um grid quadrangular contendo n^2 casas. Uma cobertura para um tabuleiro corresponde a um preenchimento destas casas a partir de peças (poliminós) de modo que não haja sobreposição de peças tampouco buracos. Para a abordagem didática deste problema serão utilizamos conceitos Matemáticos pouco explorados no Ensino Básico, como as Equações Diofantinas Lineares e a Coloração Xadrez. Será desenvolvido um estudo aprofundado das Equações Diofantinas Lineares, caracterizando a presença e a expressão de soluções inteiras, além da aplicação de um método eficiente e preciso para a obtenção de suas soluções naturais, lançando mão do conhecimento de critérios de divisibilidade e do Algoritmo de Euclides. Acrescentamos o estudo da Coloração Xadrez que colabora na detecção da viabilidade de obter uma cobertura para tabuleiros a partir de conceitos elementares como paridade e sistema linear. Parte deste trabalho é dedicado a um conjunto de atividades sobre o Problema de Cobertura de Tabuleiros para o Ensino Básico, tendo diversos desdobramentos didáticos baseados e previstos através das habilidades e competências presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Cobertura de Tabuleiros; Equações Diofantinas Lineares; Coloração Xadrez; Ensino Básico; Aritmética.

ABSTRACT

DA SILVA, J. E. **Didactically Exploring the Tray Covering Problem of the Dimension N**. 2021. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2021.

In this work, it was proposed to study the Problem of Covering Trays of Dimension n. Initially, it should be noted that a board of dimension n is a square grid containing n^2 houses. A cover for a board corresponds to the filling of these squares from pieces (poliminós) so that there is no overlapping of pieces or holes. For the didactic approach of this problem we will use Mathematical concepts little explored in Basic Education, such as Linear Diophantine Equations and Chess Coloring. An in-depth study of Linear Diophantine Equations will be developed, characterizing the presence and expression of whole solutions, in addition to the application of an efficient and precise method for obtaining their natural solutions, making use of the knowledge of divisibility criteria and the Euclidean Algorithm. We add the study of the Coloring Chess that collaborates in detecting the feasibility of obtaining a cover for boards from elementary concepts such as parity and linear system. Part of this work is dedicated to a set of activities on the Board Covering Problem for Basic Education, with several didactic developments based and predicted through the skills and competencies present in the Common National Curricular Base (BNCC).

Keywords: Tray Covering Problem; Linear Diophantine Equations; Chess Coloring; Basic Education; Arithmetic

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Considerando que o mundo necessita de pessoas cada vez mais capacitadas para tomar decisões e apresentar soluções sobre os mais variados temas que se apresentam, notabiliza-se a importância em desenvolver nos jovens já no Ensino Básico as habilidades que possam elevar seus conhecimentos e sua criatividade, papel genuíno e central da Matemática e do Raciocínio Lógico.

O ser humano ao longo da sua vida se depara com diversas situações em que é exigido o raciocínio lógico, e que muitas vezes as respostas não estão prontas ou onde a solução não é acessível através de uma simples aplicação de fórmula.

Com a finalidade de desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico, é tratado ao longo desta dissertação, como os estudantes do Ensino Básico podem refletir e resolver situações inerentes ao Problema de Cobrimento de Tabuleiros, tendo como auxílio a Teoria de Equações Diofantinas e a Teoria da Coloração Xadrez para malhas retangulares. Formalmente falando, o Problema da Cobertura de Tabuleiros baseia-se em determinar se é possível, utilizando peças planas chamadas de poliminós, realizar o preenchimento completo de um tabuleiro, isto é, preenchê-lo sem buracos e sem que haja peças sobrepostas.

Acredita-se que o desenvolvimento das atividades propostas nesta dissertação possa contribuir para que os alunos efetivamente utilizem conhecimentos básicos de Matemática, como, por exemplo, os conceitos de múltiplos e divisores, de paridade, de máximo divisor comum e de sistemas lineares. Desta forma, busca-se estimular não somente o conhecimento técnico-teórico, mas também o raciocínio lógico e criativo. De acordo com a Matriz do Pisa (BRASIL, 2012, p. 18)

> letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Esta pesquisa acena para o estímulo do processo investigativo preconizado pelo Ensino da Matemática que é uma ciência hipotético-dedutiva, segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017). Vale ainda observar que as demonstrações contidas na Matemática se fundamentam em axiomas e postulados, sendo de vital importância o aspecto heurístico das experimentações em todo o processo de aprendizagem.

Reitera-se que a motivação para a consolidação deste trabalho está em abordar temas que não são tratados no Ensino Básico a partir de conceitos elementares presentes no Ensino Básico, mostrando que existe a possibilidade de contextualizar e aplicar conceitos usualmente teóricos de maneira prática, ampliando o interesse dos estudantes por áreas que têm a Matemática como intersecção. A busca por este resultado também é encorajada pela BNCC (BRASIL, 2017, p. 268), como destaca-se a seguir:

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.

Magalhães, Rocha e Varizo (2016) acreditam que o ensino de Matemática deve ser significativo e não executado de maneira canônica, sem sentido, desprovido de significado. Ao mesmo tempo defendem que é imprescindível dispor aos alunos a percepção do fazer Matemática, sendo esta uma característica central desta disciplina, que apesar de ser uma ciência pura e carregada de formalismo pode contribuir valiosamente para o desenvolvimento do raciocínio lógico e também para o desenvolvimento de outras ciências.

Ainda nesta esfera relativa ao uso da Matemática como instrumento para acessar situações que sugerem o uso da investigação, da pesquisa, da conjectura e da dedução pode-se destacar no livro organizado por Ponte (2014) que investigar não significa propriamente tentar resolver problemas tanto da fronteira do conhecimento quanto de uma complexidade extrema e, sim, trabalhar com o que interessa aos alunos e professores, que, num primeiro momento, pode se apresentar de maneira turva, confusa ou difícil, entretanto, é possível entendê-lo por meio de um estudo organizado.

Convém observar que esta é uma pesquisa qualitativa, pois o investigar, o pensar e o construir são mais significativos do que a obtenção da resposta final, isto é, as atividades postas sugerem que o processo de construção de significado é mais relevante do que a mera aquisição de uma resposta final, definitiva, engessada que muitas vezes pode vir acompanhada de falta de reflexão. Além disso, esta pesquisa a priori intencionava ser aplicada com alunos do Ensino Básico, contudo, a pandemia impediu a realização desta etapa metodológica.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 2, discute-se conceitos elementares e primitivos previstos nos currículos de Ensino Básico. Tais conceitos são necessários e suficientes para a compreensão e o estudo das Equações Diofantinas Lineares e para aplicação consciente da Técnica da Coloração Xadrez, contidas no Capítulo 3. Neste capítulo, aborda-se também o Problema de Cobertura de Tabuleiros detalhando os objetos a serem pensados, refletidos e discutidos como as peças candidatas a cobrir o tabuleiro, o próprio tabuleiro que se propõe cobrir e o problema em si. No Capítulo 4, disserta-se sobre o ambiente em que melhor se adequa cada atividade. Nele apresentam-se preâmbulos para cada problema, discutindo desde aspectos ferramentais para a aplicação da atividade até as habilidades e competências previstas pela BNCC. Convém destacar que no Apêndice A deste trabalho, encontram-se sugestões de solução para cada atividade proposta, minuciosamente detalhadas e pensadas.

O objetivo geral deste trabalho é viabilizar o processo ensino-aprendizagem de forma mais lúdica, cooperativa e participativa. Os objetivos específicos vão desde discutir conceitos elementares presentes nos Ensinos Fundamental e Médio de uma maneira investigativa até viabilizar o estudo de conceitos não previstos no Ensino Básico, como as Equações Diofantinas e a Coloração Xadrez. Todos estes conceitos emergem da discussão do Problema de Cobertura de Tabuleiros que é um problema de simples compreensão, mas muitas vezes de complexo desenvolvimento.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

Serão abordados neste capítulo alguns objetos matemáticos que servirão para consolidar o estudo das Equações Diofantinas Lineares e da Coloração Xadrez, conceitos estes que serão investigados no Capítulo 3. Para maiores detalhes acerca destes conteúdos preliminares, o leitor é convidado a consultar Gonçalves (2017).

É oportuno destacar que segundo Lima *et al* (2016, p. 7):

> As definições matemáticas consistem em atribuir nomes a objetos que gozam de certas propriedades particularmente interessantes. Elas contribuem para a clareza do discurso e a economia do pensamento.

O conceito inicial proposto certamente estará presente em, senão todas, quase todas as discussões teóricas contidas nesta dissertação. Este é o conceito de múltiplo. Este conceito, muitas vezes empiricamente empregada pelos alunos, é uma das primeiras ideias matemáticas que os alunos adquirem e passam a lançar mão. Apesar de estar intrinsecamente ligado ao cotidiano de todas as pessoas, presume-se que o conceito de múltiplo requer uma definição precisa e cuidadosa, para que possa ser utilizado em toda a sua integralidade.

Define-se a múltiplo da seguinte maneira: sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números inteiros. Diz-se que um número inteiro a é *múltiplo* de b quando é possível escrever $a = bk$, para algum número inteiro k. Neste caso, deduz-se também que b *divide* a ou ainda que b é um *divisor* de a. Nestas circunstâncias escreve-se abreviadamente $b|a$.

O Teorema a seguir estabelece as condições para que seja viável que se efetue a divisão de dois números naturais e, consequentemente, possibilita inferir de uma maneira prática quando um número natural é múltiplo de outro. Além disso, é possível, sem maiores problemas, estender a validade deste resultado para o Conjunto dos Números Inteiros.

2.1. Divisão Euclidiana

De acordo com Hefez (2016, p.46), tem-se o Teorema da Divisão Euclidiana:

Sejam a e b dois inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = b.q + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração.

Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\})$$

Existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, tem-se que S possui um menor elemento r. Supondo então que $r = a - bq$. Sabe-se que $r \geq 0$. Será mostrado que $r < |b|$. Supondo por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $s < r$.

Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, tem-se que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$. Isto encerra a demonstração.

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de b por a. Além disso, sobre a divisão euclidiana, o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, b divide a.

Outro conceito essencial para este trabalho é o conceito de *combinação linear*. A *combinação linear* de a e b é uma expressão numérica obtida pela soma de múltiplos (inteiros) de a e de b. Como o Conjunto dos Números Inteiros é fechado para a soma e para a multiplicação, tem-se que a combinação linear de a e b, ambos números inteiros, permanece sendo um número inteiro. Escrevendo as combinações lineares de 10 e 6 para obter o número 36:

$$36 = 10.3 + 6.1 = 10.0 + 6.6.$$

O próximo Corolário, apresentado por Hefez (2016, p. 42) diz que se um número divide cada parcela de uma combinação linear, então este número divide a própria combinação linear.

Corolário

Sejam x, y e z números inteiros. Se x é um divisor de y e x é um divisor de z, então x divide qualquer múltiplo de y e divide qualquer múltiplo de z. Além disso, x divide qualquer combinação linear entre y e z.

Demonstração.

Por hipótese, $x|y$ e $x|z$. Isto implica que existem $f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $y = fx$ e $z = gx$. Segue que $yb + zc = b(fx) + c(gx) = (bf + cg)x$. Isto encerra a demonstração.

2.1.1 Critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade entram neste trabalho como uma ferramenta que facilitará na resolução de questões como um todo. Conhecer e empregar corretamente os critérios de divisibilidade visa cometer menos erros e ainda ajuda a acelerar a resolução de questões propostas.

Existem inúmeros critérios de divisibilidade a serem estudados. A fim de não sobrecarregar o leitor com uma lista extensa e desnecessária de critérios acompanhados de regras e minuciosos detalhes vazios, foram selecionados os critérios de divisibilidade mais convenientes para este trabalho.

Para auxiliar na compreensão dos critérios de divisibilidade, em conformidade com as demonstrações que serão expostas a seguir, deve-se sublinhar que todo número inteiro pode ser escrito, no sistema posicional decimal, da seguinte maneira:

$$x = a_n\, 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 \quad \textbf{(1)}$$

É possível reescrever o número x em (1) da seguinte maneira:

$$x = a_n\, 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \quad \textbf{(2)}$$

Pois em (2) tem-se que $10^0 = 1$, ou seja, $a_0 10^0 = a_0 . 1 = a_0$.

Para fins didáticos, observe os exemplos a seguir:

- $245 = 2.10^2 + 4.10^1 + 5$
- $1978 = 1.10^3 + 9.10^2 + 7.10^1 + 8$

As identidades (1) e (2) servirão como base para as demonstrações dos critérios enunciados a seguir.

Divisibilidade por 2

Tem-se que:

$$x = a_n\ 10^n\ + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3}+\ldots+a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Colocando o 10 em evidência, segue que:

$$x = 10(a_n\ 10^{n-1}\ + a_{n-1}10^{n-2} + a_{n-2}10^{n-3} + a_{n-3}10^{n-4}+\ldots+a_2 10^1 + a_1 10^0) + a_0$$

Observe que 10 é divisível por 2, desta forma basta que a_0 também seja divisível por 2 para assegurar que x é múltiplo de 2.

Portanto, os possíveis valores de a_0 são 0, 2, 4, 6 e 8.

Conclui-se então que um número é divisível por 2 quando terminar com 0, 2, 4, 6 ou 8.

Divisibilidade por 3

Tomando novamente a base:

$$x = a_n\ 10^n\ + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3}+\ldots+a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Será feito da seguinte maneira: considerando 10^k como $9999\ldots9$ (o nove se repetindo k vezes) mais 1, ou seja, 10^k=$9999\ldots99\ +\ 1$.

Reescrevendo as potências de 10 da forma acima, tem-se:

$x = a_n\ (999999\ldots9\ +\ 1) +\ a_{n-1}\ (99999\ldots9\ +\ 1) +\ \ a_{n-2}\ (9999\ldots9\ +\ 1) +$
$a_{n-3}\ (999\ldots9 +\ 1)\ +$+...+ $a_2\ (99\ +\ 1)$+ $a_1\ (9\ +\ 1)$+ a_0 **(3)**

Aplicando a propriedade distributiva em (3)

$x = a_n\ 999999\ldots9\ + a_n\ +\ a_{n-1}\ 99999\ldots9\ + a_{n-1} +\ \ a_{n-2}\ 9999\ldots9\ +\ a_{n-2} +$
$a_{n-3}\ 999\ldots9 +\ a_{n-3}$ +...+ $a_2\ 99\ + a_2$ + $a_1\ 9\ +\ a_1$+ a_0 **(4)**

É possível compreender que em (4) qualquer número composto apenas por algarismos 9 é divisível por 3, desta forma o que falta ser múltiplo de 3 é a soma

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \quad \textbf{(5)}$$

Por fim, observando (5) conclui-se que um número só é divisível por 3 se a soma dos algarismos que o compõe é um múltiplo de 3.

Observe os exemplos:

1) 342, é divisível por 3, pois $3 + 4 + 2 = 9$ e $3|9$. Resolvendo $342 \div 3 = 114$.
2) 534, é divisível por 3, pois $5 + 3 + 4 = 12$ e $3|12$. Resolvendo $534 \div 3 = 178$.
3) 1458, é divisível por 3, pois $1 + 4 + 5 + 8 = 18$ e $3|18$. Resolvendo $1458 \div 3 = 486$.

Divisibilidade por 4

$$x = a_n\,10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Sabe-se que 100 é divisível por 4, colocando-o em evidência

$$x = 100(a_n\,10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + a_{n-2}10^{n-4} + a_{n-3}10^{n-5} + \ldots + a_2 10^0) + a_1 10^1 + a_0$$

Logo, a parcela cujo 100 está em evidência é divisível por 4, porém para que x seja divisível por 4 é necessário que $a_1 10^1 + a_0$ também seja divisível, isto é, o número formado pelos dois últimos algarismos do número x seja divisível por 4.

Exemplificando:

1) 1356, é divisível por 4, pois 56 é divisível por 4. Resolvendo 1356 ÷ 4 = 339.
2) 54716, é divisível por 4, pois 16 é divisível por 4. Resolvendo 54716 ÷ 4 = 13679.
3) 27380, é divisível por 4, pois 56 é divisível por 4. Resolvendo 27380 ÷ 4 = 6845.

Divisibilidade por 5

$$x = a_n\,10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

Seguindo o mesmo raciocínio das demonstrações anteriores, sabe-se 10 é divisível por 5, colocando-o em evidência

$$x = 10(a_n\, 10^{n-1} \ + a_{n-1}10^{n-2} + a_{n-2}10^{n-3} + a_{n-3}10^{n-4} + \ldots + a_2 10^1 + a_1 10^0) + a_0$$

Como a primeira parcela é divisível por 5, agora basta que a_0 também seja divisível. Logo, os únicos valores que a_0 pode assumir são 0 ou 5. Ou seja, um número só é divisível por 5, se ele terminar em 0 ou 5.

Divisibilidade por 6

A divisibilidade por 6 depende dos dois outros casos citados acima, um número só é divisível por 6 se ele for divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo. Ou seja, o somatório dos algarismos que compõem esse número precisa ser múltiplo de 3 e o último algarismo precisa ser par.

Divisibilidade por 7

Para o critério de divisibilidade por 7 será utilizada a base anterior

$$x = 10(a_n\, 10^{n-1} \ + a_{n-1}10^{n-2} + a_{n-2}10^{n-3} + a_{n-3}10^{n-4} + \ldots + a_2 10^1 + a_1 10^0) + a_0$$

Porém, o termo

$(a_n\, 10^{n-1} \ + a_{n-1}10^{n-2} + a_{n-2}10^{n-3} + a_{n-3}10^{n-4} + \ldots + a_2 10^1 + a_1 10^0)$

será chamado de b e o termo a_0 de c.

Assim, qualquer número decimal pode ser escrito na forma $10b + c$.

O critério diz o seguinte

$10b + c$ é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ $b - 2c$ é divisível por 7

Demonstração

($\Leftarrow$) $b - 2c = 7k$

$$10b - 20c = 7k'$$

$$10b - 20c + 21c = 7k' + 21c$$

$$10b + c = 7k"$$

$(\Rightarrow) 10b + c = 7k$

$$10b + 21c - 20c = 7k$$
$$10b - 20c = 7k - 21c$$
$$10(b - 2c) = 7k'$$

Observe que como 10 e 7 são primos entre si, logo

$$b - 2c = 7k"$$

Apesar de se valer de conceitos que envolvem múltiplo, a obtenção do *máximo divisor comum*, simplesmente chamado de *mdc*, entre números exige uma habilidade mais ampla por parte dos alunos. Define-se o *mdc* de dois inteiros positivos a e b, não simultaneamente nulos, como sendo o maior inteiro positivo que divide concomitantemente a e b, representado por $mdc(a, b)$ ou (a, b).

Existem alguns métodos para a obtenção do *mdc*. Optou-se pelo *Algoritmo de Euclides*, apresentado por Anjos (2015, p. 35), para o cômputo prático do *mdc*, detalhado a seguir.

2.1.2. Algoritmo de Euclides

Sejam a e b números naturais, com $b \neq 0$. Se o Algoritmo de Euclides for aplicado sucessivamente, então o último resto não nulo r_n, satisfaz a seguinte igualdade $(a, b) = r_n$.

Demonstração:

Dados a e b números naturais, pode-se supor que $a \leq b$. Se $a = 1$ ou $a = b$, ou ainda se $a|b$, tem-se que $(a, b) = a$.

Supondo, então, que $1 < a < b$ e que $a \nmid b$. Logo, pelo Algoritmo de Euclides, é possível escrever $b = aq_1 + r_1$ com $0 < r_1 < a$. Deste modo existem duas possibilidades:

a) Se $r_1|a$, então, $r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1.a) = (a, b)$ e termina o algoritmo, ou

b) Se $r_1 \nmid a$, então, pode-se efetuar a divisão de a por r_1, obtendo $a = r_1q_2 + r_2$ com $0 < r_2 < r_1$.

Novamente existem duas possibilidades:

A1) Se $r_2|r_1$, logo segue que:

$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - r_1.q_2) = (r_1, a) = (b - q_1.a, a) = (b, a) = (a, b)$.

B1) Se $r_1 \nmid a$, então efetuando a divisão de r_1 por r_2, obtém-se $r_1 = r_2.q_3 + r_3$ com $0 < r_3 < r_2$.

Esse processo não pode continuar indefinidamente, pois ocorreria uma sequência $a > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$, que não possui um menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordenação. Logo, para algum n, temos que $r_n | r_{n-1}$ o que implica $(a, b) = r_n$.

De um modo mais prático, é possível utilizar o seguinte dispositivo no emprego do Algoritmo de Euclides para encontrar o (a, b).

Passo 1. Efetuar a divisão de a por b, obtendo $a = bq_1 + r_1$, para alguns q_1e $r_1$inteiros. Este passo é resumido pelo diagrama abaixo.

	q_1	
a	b	
r_1		

Passo 2. Se $r_1 \neq 0$, dividir b pelo resto r_1, obtendo $b = r_1q_2 + r_2$, em que q_2e r_2 são inteiros. Acrescentando este dado ao diagrama a seguir, temos:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Reiterando as sucessivas divisões, até chegar ao resto zero. Obtendo o seguinte diagrama:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n	0	

Cabe ressaltar que cada q_ie r_i são números inteiros, para todo $i \in \{1,2, \dots, \text{n}\}$. Além disso, em cada diagrama os quocientes das divisões efetuadas ficam na primeira linha. Já na segunda linha do diagrama, temos os dividendos e divisores das divisões, enquanto na terceira linha encontram-se os restos das divisões. Desta forma, percebe-se pelo diagrama que o $mdc(a,b)$ é o último resto não nulo do processo das divisões sucessivas.

Foi ilustrado o Algoritmo de Euclides através do cálculo do $mdc(320,14)$.

	22	1	6
320	14	12	2
12	2	0	

Portanto, $mdc(320,14) = 2$.

Calculando o $mdc(144,81)$ via Algoritmo de Euclides, temos o diagrama,

	1	1	3	2
144	81	63	18	9
63	18	9	0	

e, finalmente, $mdc(144,81) = 9$.

É importante ressaltar que o *máximo divisor comum* entre a e b pode sempre ser escrito como uma *combinação linear* entre a e b, a partir do Algoritmo de Euclides. Este importante resultado será tratado com maiores detalhes pelo Teorema de Bézout.

O Teorema de Bézout, estabelece que o *mdc* entre dois números pode ser escrito como combinação linear entre eles. Para maiores detalhes sugere-se a leitura de Lima (2019) e Silva Neto (2016). Antes do Teorema de Bézout, é necessário enunciar um princípio que será útil na demonstração do referido teorema. Este é o *Princípio da Boa Ordenação,* que garante que todo subconjunto não vazio do Conjunto dos Números Naturais $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $n_0 \in X$ que é menor do que todos os demais elementos de X. Será omitida a demonstração do Princípio da Boa Ordenação, pois esta possui uma abordagem que diverge do objetivo desta dissertação. Para maiores detalhes, o leitor é convidado à leitura de Lima (2019).

2.2 Teorema de Bézout

Outro conceito que será utilizado para compreensão das atividades é o Teorema de Bézout, que segundo Corcho e Oliveira, diz:

Se $mdc(a,b) = d$, então existem números inteiros x_0 e y_0 tais que $d = mdc(a,b) = ax_0 + by_0$.

Demonstração.

Considere a combinação linear de a e b, $ax + by$, onde x e y percorrem todos os inteiros. Este conjunto de inteiros, denotado por $C_{a,b} = \{ax + by;\ x, y \in Z\}$ inclui valores positivos e negativos. Além disso, escolhendo $x = y = 0$, nota-se que $C_{a,b}$ também contém o zero.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, escolhe-se x_0 e y_0 tais que $\lambda = ax_0 + by_0$ seja o menor número inteiro positivo contido no conjunto $C_{a,b}$.

Será demonstrado que $\lambda|a$. A prova de que $\lambda|b$ é inteiramente análoga. Usando a prova por absurdo, isto é, supondo que λ não divide a e chegando a uma contradição.

Através da divisão euclidiana, de λ não dividindo a segue que existem inteiros q e r tais que $a = \lambda q + r$ com $0 < r < \lambda$. Portanto, $r = a - \lambda q = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$, e assim, r pertence ao conjunto $C_{a,b}$, o que contradiz a hipótese de λ ser o menor elemento positivo contido em $C_{a,b}$. Portanto, λ divide a e b.

Por fim, será mostrado que

$$\lambda = d.$$

Sabe-se que $d = (a,b)$, então a e b são múltiplos de d, o que nos garante que $a = da_1$, $b = db_1$, para alguns a_1 e b_1 inteiros, e $\lambda = ax_0 + by_0 = da_1x_0 + db_1y_0 = d(a_1x_0 + b_1y_0)$.

Isto diz que λ é múltiplo de d, ou seja, $d|\lambda$.

E ainda, se $d|\lambda$ então $d \leq \lambda$, como $d < \lambda$ não é possível, pois $\mathrm{d} = \mathrm{mdc}\,(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, e, portanto, $d = \lambda = ax_0 + by_0$. Isto encerra a demonstração.

Com o intuito de familiarizar-se melhor com o Teorema de Bézout, serão escritos o $\mathrm{mdc}(320,14)$ e o $\mathrm{mdc}(144,81)$ como combinação linear de suas entradas. Procedendo neste cômputo balizados pelo Teorema de Bézout e fazendo uso do Algoritmo de Euclides para efetivar esta busca.

Agora escrevendo o $\mathrm{mdc}(320,14)$ como combinação linear de 320 e 14. Para isto, realiza-se o cálculo do $\mathrm{mdc}(320,14)$ através do Algoritmo de Euclides.

	22	1	6
320	14	12	2
12	2	0	

O passo seguinte é entender que o *mdc* é obtido a partir do último resto não nulo através do Algoritmo de Euclides, assim pelo Algoritmo da Divisão temos que o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto ($D = d.q + r$). Neste momento, isolando o resto, a equação ficará da seguinte maneira: $r = D - dq$. Aplicando ao resultado do $\mathrm{mdc}(320{,}14)$, tem-se que: $2 = 14 - 12.1$.

A intenção é escrever o $\mathrm{mdc}(320{,}14)$ como combinação linear de 320 e 14, o que não foi alcançado, ainda. Assim, deve-se continuar com o mesmo dispositivo a partir de um shift à esquerda, ou seja, utilizando o resto anterior e a parcela à sua esquerda.

Prosseguindo, note que $12 = 320 - 14.22$.

Veja que não existem mais restos para escrever como combinação linear e que os valores de 320 e 14 já aparecem. Agora, para determinar o valor do $\mathrm{mdc}(320{,}14)$ como combinação linear de 320 e 14, substituindo $12 = 320 - 14.22$ em $2 = 14 - 12.1$.

Segue que,

$$2 = 14 - 12.1$$
$$2 = 14 - (320 - 14.22).1$$
$$2 = 14 - 320 + 14.22$$
$$2 = 320(-1) + 14.23.$$

Desta forma, finalmente, é possível escrever o $mdc(320{,}14) = 2 = 320(-1) + 14.23$.

Assim como no exemplo anterior, será feito o passo a passo dos procedimentos para a obtenção do $mdc(144{,}81)$ como combinação linear de 144 e 81, através do Algoritmo de Euclides.

	1	1	3	2
144	81	63	18	9
63	18	9	0	

Obtém-se o $mdc(144{,}81) = 9$, pelo Algoritmo de Euclides. Lembre-se que o próximo passo é entender que o *mdc* é o último resto não nulo do Algoritmo de Euclides. O procedimento é análogo ao do exemplo anterior, com a ressalva que cálculo de $mdc(144{,}81)$ é um pouco mais extenso.

Realizando o primeiro cálculo, tem-se: $9 = 63 - 18.3$.

Como o objetivo é escrever o $mdc(144{,}81)$ como combinação linear de 144 e 81, e já é sabido que todos os restos diferentes de zero serão utilizados, deve-se continuar a realizar o procedimento utilizando o resto anterior ao resto que é resultado do $mdc(144{,}81)$.

Portanto, $18 = 81 - 63\,.\,1$.

Mais uma vez ainda não foram encontrados os valores de 144 e 81 para escrever o $mdc(144{,}81)$ como combinação linear deles, então prosseguindo: $63 = 144 - 81\,.\,1$.

Veja que não existem mais restos para serem escritos como combinação linear e que os valores de 144 e 81 já aparecem. Para se determinar o valor do $mdc(144{,}81)$ como combinação linear de 144 e 81, será utilizado o método da substituição.

Sabe-se que $9 = 63 - 18\,.\,3$, a primeira substituição que será feita é colocar no lugar de 18 o valor de $81 - 63\,.\,1$:

$$9 = 63 - 18.3$$

$$9 = 63 - (81 - 63.1).3,$$

aplicando a operação distributiva:

$$9 = 63 - 81.3 + 63.3$$

$$9 = 63.4 - 81.3.$$

Por fim, substituindo na igualdade $9 = 63.4 - 81.3$, o valor de 63 que é $144 - 81.1$.

$$9 = (144 - 81.1).4 - 81.3$$

$$9 = 144.4 - 81.7$$

$$9 = 144.4 + 81.(-7).$$

Finalmente, obtém-se o $mdc(144{,}81) = 9 = 144.4 + 81.(-7)$.

O próximo teorema é uma importante aplicação do Teorema de Bézout, apresentada por Silva (2015, p. 18). A partir dele obtêm-se dois corolários cruciais para este trabalho.

2.3 Aplicação do Teorema de Bézout

Sejam a, b e c números inteiros. Se a divide o produto bc e o $mdc(a, b)$ é igual a 1, então a divide c.

Demonstração.

Por hipótese, $a|bc$. Portanto, existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $ae = bc$.

Além disso, como o *mdc(a,b)*=1, isto é, os números a e b são primos entre si, existem, pelo Teorema de Bézout, x e y inteiros tais que $1 = ax + by$.

Multiplicando a equação $1 = ax + by$ por c, obtém-se $c = acx + bcy$. Como a divide o termo acx e $ae = bc$, substituindo na equação $c = acx + aey$ e colocando a em evidência, tem-se que $c = a(cx + ey)$. Consequentemente, a divide c. Isto encerra a prova.

Para elucidar questionamentos futuros, serão apresentados os próximos Corolários, apresentados por Hefez (2016), que servirão como uma importante ferramenta para a resolução de Equações Diofantinas Lineares.

Corolário 1

Quaisquer que sejam a e b pertencente a $\mathbb{Z}$, ambos não nulos, e n inteiro positivo, tem-se que

$$mdc(na, nb) = n.mdc(a, b).$$

Demonstração.

A prova decorre facilmente do Teorema de Bézout. Existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$mdc(na, nb) = (na)x + (nb)y = n(ax) + n(by) = n(ax + by) = n.mdc(a, b).$$

Corolário 2

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, não nulos tem-se que $mdc(\frac{a}{mdc(a,b)}, \frac{b}{mdc(a,b)}) = 1$.

Demonstração.

Pelo Corolário 1, dispõe-se que

$$mdc(a, b).mdc\left(\frac{a}{mdc(a, b)}, \frac{b}{mdc(a, b)}\right) =$$

$$= mdc(mdc(a, b).\frac{a}{mdc(a,b)}, mdc(a, b)\frac{b}{mdc(a,b)}) = mdc(a, b).$$

Portanto, $mdc(\frac{a}{mdc(a,b)}, \frac{b}{mdc(a,b)}) = 1$.

2.4 Introdução a Lógica

Os próximos conceitos discutidos neste capítulo visam tornar a linguagem das atividades propostas no Capítulo 4 mais precisas.

A Lógica se apropria da capacidade que os seres humanos têm em argumentar, se voltando mais para a forma com que os argumentos são dispostos do que com o conteúdo. Na Língua portuguesa existem muitos tipos de sentenças que estabelecem um canal de comunicação entre as pessoas. Pode-se citar as sentenças afirmativas, interrogativas e imperativas, por exemplo. No entanto, a Lógica Matemática apropria-se apenas das *sentenças afirmativas*, pois são aquelas em que é possível estabelecer um valor lógico: verdadeiro (v) ou falso (f).

Proposições que não possuem conectivos são ditas *proposições simples* ou *átomos*. O *Princípio do Terceiro Excluído* garante que toda proposição simples ou é verdadeira ou a sua negação é verdadeira. Em outras palavras, diz-se que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa. A *negação* de uma proposição é representada neste trabalho pelo símbolo $\sim$, desta forma se p indica a proposição de entrada, então $\sim p$ indica a sua negação. Os conectivos *ou* (disjunção), *e* (conjunção), *se então* (condicional) e *se e somente se* (bicondicional) associados às proposições simples geram as *proposições compostas*.

Atribuir um valor lógico às proposições compostas muitas vezes é tarefa não trivial. Para este cálculo, chamado por alguns autores de *cálculo proposicional*, utiliza-se o *Princípio da Funcionalidade*, que afirma que o valor lógico de uma proposição composta pode ser obtido pela análise de seus átomos. Este princípio pode ser resumido e abreviadamente estudado em um quadro chamado de *Tabela-Verdade*. A Tabela 1 descreve a Tabela-Verdade da proposição condicional se p então q, representada por $p \to q$.

TABELA 1 – Tabela-Verdade da proposição condicional se p então q

P	**q**	**p→q**
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Fonte: A autora, 2021.

De acordo com Lima *et al* (2016) o símbolo → não significa "então", mas sim "implica". Também é incorreto empregar o símbolo → com o significado conclusivo da palavra "portanto". O símbolo adequado para esta palavra é $\therefore$ e não →.

É conveniente observar que dada a *proposição condicional* $p \to q$ a proposição $\sim q \to (\sim p)$ é chamada de *proposição contrapositiva* de $p \to q$. Estas proposições são *proposições* *equivalentes*, isto é, são proposições em que cada interpretação da Tabela-Verdade é *compatível*, como é mostrado na Tabela 2.

TABELA 2 - Tabela-Verdade contrapositiva

P	**~p**	**q**	**~q**	**p→q**	**~q→(~p)**
v	f	v	f	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v
f	v	f	v	v	v

Fonte: A autora, 2021.

Veja alguns exemplos de proposições condicionais e suas respectivas proposições contrapositivas.

Exemplo 1.

Penso, logo existo. (Condicional)

Não existo, logo não penso. (Contrapositiva)

Exemplo 2.

Se o polígono é um triângulo, então a soma de seus ângulos internos é igual a 2 retos. (Condicional)

Se a soma dos ângulos internos de um polígono não é igual a 2 retos, então ele não é um triângulo. (Contrapositiva)

Exemplo 3.

Se um conjunto de peças cobre um tabuleiro, então a correspondente Equação Diofantina possui solução. (Condicional)

Se a Equação Diofantina que modela um determinado problema de cobertura de tabuleiro não possui solução, então o conjunto de peças dado não cobre o tabuleiro. (Contrapositiva)

3. O PROBLEMA DE COBERTURA DE TABULEIROS: EQUAÇÕES DIOFANTINAS E COLORAÇÃO XADREZ

Neste capítulo, será definido e estudado o *Problema de Cobertura de Tabuleiros*, que é o tema central deste trabalho. Vale ressaltar que este tema é amplamente trabalhado em Educação Matemática, pois seu estudo atrela o lúdico a conteúdos que podem ser altamente complexos.

O foco principal é explorar didaticamente o *Problema de Cobertura de Tabuleiros* utilizando o estudo de Equações Diofantinas Lineares e Coloração Xadrez como modelagem para se saber, principalmente, a impossibilidade de alguma cobertura. Porém, cabe destacar que as Equações Diofantinas Lineares permitem inferir também a quantidade de peças que fará com que, hipoteticamente, ocorra o cobrimento.

O Problema da Cobertura de Tabuleiros é um assunto recorrente em Olimpíadas de Matemática, e apresenta algumas soluções triviais e outras mais sofisticadas. Sugere-se a leitura de artigos interessantes que tratam sobre o mesmo tema, a saber: Barbosa Filho (2012) e Santos (2016)

Ainda dentro deste assunto, serão exploradas instâncias mais acessíveis deste problema com o objetivo de alcançar o público que não tem tanta familiaridade com o tema proposto, fazendo uso de recursos matemáticos estudados no Capítulo 2 e subsequentemente neste.

Para as Atividades propostas no Capítulo 4, serão utilizados tabuleiros com o formato quadricular de dimensão nxn. Para o cobrimento destes tabuleiros serão empregadas peças chamadas de *poliminós*, que são figuras geométricas conexas formadas por quadrados unitários conectados entre si por arestas comuns. Para maiores informações acerca de poliminós indicamos as leituras de Santos (2016) e Almeida, Guimarães e Beserra (2005)

Segundo os autores citados acima, o termo poliminó surgiu em 1954 por meio do artigo *Tabuleiros de Xadrez e poliminós*, foi nomeado por Solomon W. Golomb, matemático e chefe do Laboratório de Jato Propulsão do Instituto de Tecnologia da Califórnia. O termo poliminó foi definido por Golomb como *um conjunto de quadrados em ligação simples*.

Os tipos e nomes de poliminós são definidos pelo conjunto de quadrados que os compõem, sendo assim podem ser infinitos, dado que ao acrescentar mais um quadrado ao conjunto surge um novo tipo de poliminó. Para o desenvolvimento deste estudo foram restringidas as peças (poliminós) para um conjunto de até cinco quadrados. Abaixo serão destacados os tipos de poliminós que serão explorados neste trabalho, além de suas disposições.

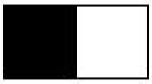
a) Monominó é composto por um quadrado unitário, e por consequência, tem um único formato;

Figura 1: Monominó

Fonte: A autora, 2021.

b) Dominó é um poliminó composto por dois quadrados unitários. Assim como o monominó só tem uma forma de disposição;

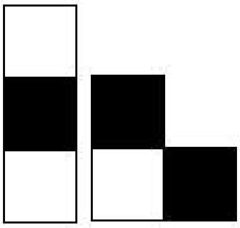
Figura 2: Dominó



Fonte: A autora, 2021.

c) Triminó, formado por três quadrados unitários. Possui duas formas de disposição distintas;

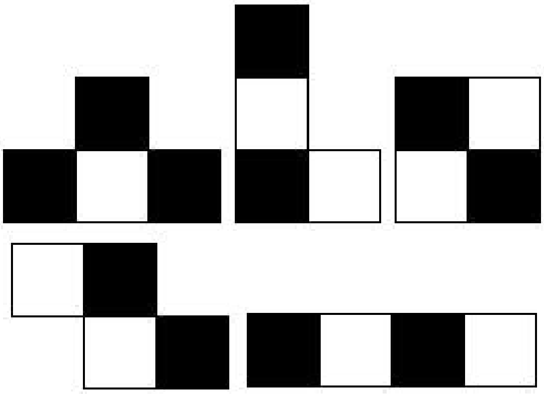
Figura 3: Triminó



Fonte: A autora, 2021.

d) Tetraminó, formado por quatro quadrados unitários, possui cinco formas de disposição;

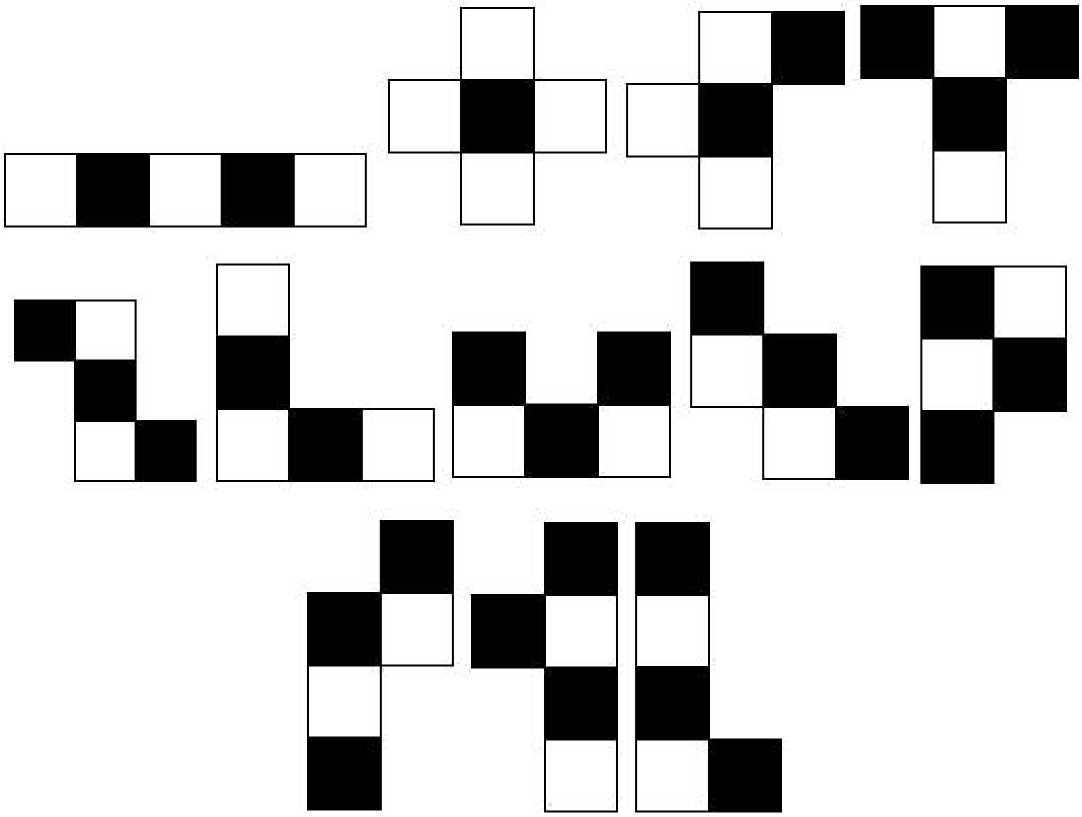
Figura 4:Tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

e) Pentaminó, é composto por cinco quadrados unitários. Possui doze formatos diferentes.

Figura 5: Pentaminó



Fonte: A autora, 2021.

Tendo em vista as definições de tabuleiros e de poliminós define-se o *Problema de Cobertura de Tabuleiros* da seguinte maneira: sejam dados um tabuleiro de dimensão n e um conjunto S de peças (poliminós). O objetivo consiste em determinar se existe a possibilidade de realizar a cobertura completa, sem buracos, e sem que haja peças sobrepostas.

No Capítulo 4, serão abordadas atividades envolvendo Problemas de Cobertura de Tabuleiros cuidadosamente elaboradas para alunos dos Ensinos Fundamental II e Médio, enfatizando saberes que estão descritos e relacionados na BNCC.

A seguir, será abordado com certa profundidade o estudo das Equações Diofantinas, a qual possui uma farta literatura que trata das Equações Diofantinas Lineares e também das Equações Diofantinas Não Lineares, aqui serão tratadas apenas as Equações Diofantinas Lineares.

Ressalta-se que os conceitos trabalhados em todo o Capítulo 2, sobretudo o de Máximo Divisor Comum (*mdc*), serão de grande valia para que se possa determinar a existência ou não de solução de uma Equação Diofantina Linear, e, posteriormente, caso exista solução, para propiciar a solução geral.

Alguns exemplos de conteúdo didático serão exibidos com o objetivo de que o leitor consiga compreender e familiarizar-se com o conceito e resolução das Equações Diofantinas Lineares, chamadas neste trabalho simplesmente de Equações Diofantinas.

As atividades apresentadas no próximo capítulo foram inspiradas nos trabalhos realizados por Campos (2013), Savóis (2014), Silva Neto (2016), Anjos (2015) e Lima (2017), com o intuito de dar a nossa contribuição para a expansão dos estudos das Equações Diofantinas no ensino básico.

Ainda neste capítulo será tratada a Coloração Xadrez que juntamente com as Equações Diofantinas Lineares servirão como base para verificar se o cobrimento de um determinado tabuleiro é possível.

A Coloração Xadrez é uma forma de colorir o tabuleiro e as peças poliminós com apenas duas cores, em que as cores iguais não sejam adjacentes. Ao se colorir o tabuleiro e também as peças com tal coloração, é viável montar um sistema de equações utilizando a quantidade de quadrados unitários coloridos, podendo afirmar quando não é possível o cobrimento do tabuleiro, sempre que o sistema for impossível ou contradisser o que é pedido no problema.

Segundo Barbosa Filho (2012), a coloração xadrez auxilia na análise de possibilidade, ou não, de cobertura de um tabuleiro com as peças previamente dispostas. Segundo o mesmo autor, apesar de seu uso anterior, a coloração xadrez ajuda a cobrir tabuleiros pré-determinados onde podemos colocar alguns tipos bem específicos, em sua maioria limitados, de peças.

Nas Seções 3.1 e 3.2 trataremos das Equações Diofantinas Lineares de 2 e 3 variáveis, caracterizando quando é possível obtermos soluções inteiras, além de exibir soluções gerais para cada caso. A Seção 3.3 investiga o uso da Coloração Xadrez nos Problemas de Cobertura de Tabuleiros de Xadrez.

3.1. Equações Diofantinas Lineares de 2 variáveis

A forma geral de uma Equação Diofantina Linear em n variáveis caracteriza-se da seguinte maneira:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Sendo que cada a_i é um número inteiro para $1 \leq i \leq n$. Convém ressaltar que nesta definição os coeficientes a_i não são todos nulos.

Uma solução da Equação Diofantina Linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é a n-upla $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, satisfazendo $a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots + a_nx_n^0 = b$, em que cada $x_i^0 \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq i \leq n$.

Designa-se por Equação Diofantina Linear de duas variáveis, equações com o formato $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros, não concomitantemente nulos. Salienta-se que x e y também deverão ser inteiros, e, ao se determinar tais valores, encontramos a solução da equação.

Lembrando que os conceitos apresentados até o momento, neste trabalho, têm como objetivo servir como base teórica matemática para os assuntos abordados desde agora em diante, isto é, serão revisitados conceitos e resultados necessários para uma plena compreensão sobre a caracterização da existência de solução para as Equações Diofantinas.

O Teorema a seguir trata da condição de existência de solução para uma Equação Diofantina de duas variáveis. Vale destacar novamente que buscamos resultados/soluções contidos no Conjunto dos Números Inteiros.

3.1.1 Teorema: Existência de Solução da Equação Diofantina de 2 variáveis

A Equação Diofantina Linear de duas variáveis $ax + by = n$ admite solução inteira se, e somente se, $(a, b)|n$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que a equação $ax + by = n$ admite uma solução (x_0, y_0), isto é, $ax_0 + by_0 = n$. Como (a, b) divide a e divide b segue que o *mdc* entre a e b divide qualquer combinação linear de a e b, em particular divide $ax_0 + by_0 = n$.

($\Leftarrow$) Suponha que $(a, b)|n$. Então existe um inteiro t tal que $n = t(a, b)$. Como existem inteiros m_0 e n_0 tais que $m_0a + n_0b = (a, b)$, segue que $n = t(a, b) = (tm_0)a + (tn_0)b$. Logo os inteiros $x_0 = tm_0$ e $y_0 = tn_0$ são uma solução da equação $ax + by = n$. Isto encerra a demonstração do teorema.

A viabilidade de solução de uma Equação Diofantina Linear de duas variáveis foi identificada a partir do teorema anterior. Dando prosseguimento ao objetivo de determinar a "cara" da solução de uma Equação Diofantina Linear de duas variáveis, deve-se passar para a etapa de caracterizar a sua solução (caso exista) em $\mathbb{Z}$ (Conjunto dos Números Inteiros).

3.1.2. Solução da Equação Diofantina Linear de 2 variáveis

Teorema:

Seja (x_0, y_0) uma solução particular da Equação Diofantina Linear de 2 Variáveis $ax + by = n$. Tem-se que (x, y) é uma solução da equação $ax + by = n$ se, e somente se, $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Sejam $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Substituindo x e y em $ax + by = n$, temos que $ax_0 + a.b.t + by_0 - a.b.t = ax_0 + by_0 = n$, pois por hipótese (x_0, y_0) é uma solução particular da Equação Diofantina Linear de 2 Variáveis $ax + by = n$. Isto revela que todas as expressões do tipo $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$, são soluções da Equação Diofantina $ax + by = n$, quando (x_0, y_0) for uma solução particular.

($\Rightarrow$) Resta mostrar que toda solução da Equação Diofantina Linear $ax + by = n$ com (x_0, y_0) solução particular é do tipo $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$.

Se $a = 0$ ou $b = 0$, é claro que toda solução de $ax + by = n$ é do tipo $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Suponha que $a.b \neq 0$ e (x, y) é uma solução da equação $ax + by = n$, então $n = ax + by = ax_0 + by_0$.

Segue daí que $a.(x - x_0) = b.(y_0 - y)$, **(1)**

portanto, $\frac{a}{(a,b)}.(x - x_0) = \frac{b}{(a,b)}.(y_0 - y)$, pois o *mdc* entre a e b divide ambos a e b.

Como$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$, segue que $\frac{a}{(a,b)} | (y_0 - y)$ e $\frac{b}{(a,b)} | (x - x_0)$. Portanto existem inteiros m e t tais que $y_0 - y = t.\frac{a}{(a,b)}$ e $x - x_0 = m.\frac{b}{(a,b)}$. Substituindo estes valores em (1), obtém-se $m = t$, logo $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$. Isto encerra a demonstração.

Segue do Teorema, Solução da Equação Diofantina Linear de duas variáveis, que se a Equação Diofantina Linear de duas variáveis admite uma solução, então ela admitirá uma infinidade de soluções. Qualquer uma dessas soluções determina todas as demais.

Convém observar que para determinar uma solução particular da equação $ax + by = n$, quando a e b são números pequenos, procede-se por inspeção. Se não for possível por este método achar uma solução, o método enunciado a seguir é eficiente:

i) determine através do algoritmo de Euclides inteiros m_0 e n_0 tais que $m_0.a + n_0.b = (a, b)$;

ii) multiplique ambos os lados desta igualdade por $\frac{n}{(a,b)}$, obtendo $\frac{n}{(a,b)}.m_0.a + \frac{n}{(a,b)}.n_0.b = n$.

iii) observe que $x_0 = \frac{n}{(a,b)}.m_0$ e $y_0 = \frac{n}{(a,b)}.n_0$ é uma solução particular da Equação Diofantina $ax + by = n$.

Para o leitor familiarizar-se com toda a teoria que foi apresentada até o momento, sugere-se o estudo dos problemas apresentados na sequência.

Problema 1: Silvia trabalha numa pequena empresa como engenheira de produção. Em certo dia ela fez compras de alicates e trenas, totalizando um gasto de 310 reais. Cada alicate custava R$15 e cada trena custava R$10. Quais seriam as possíveis combinações de quantidades de alicate e trena que Silvia poderia ter adquirido?

Sugestão 1 de solução.

Sejam x a quantidade de alicates e y a quantidade de trenas compradas por Silvia. Modelando a situação descrita obtém-se a Equação Diofantina Linear $15x + 10y = 310$.

Verificando a viabilidade de solução desta equação, de acordo com o Teorema 3.1.1, deve-se calcular o *mdc* entre os coeficientes 15 e 10 a fim de descobrir se este *mdc* divide o resultado 310. Para o cálculo do *mdc* utiliza-se o Algoritmo de Euclides, descrito na Seção 2.1.3.

	1	2
15	10	5
5	0	

Finalmente, é possível concluir que o *mdc* entre 15 e 10 é igual a 5, e consequentemente, 5|310. Isto assegura que o problema possui solução inteira.

Simplificando a equação, todos os seus elementos serão divididos por 5.

$15x + 10y = 310$ (÷ 5) implica em $3x + 2y = 62$. Observe que o Conjunto Solução de ambas as equações é o mesmo, portanto podemos trabalhar com a equação simplificada de modo a termos contas reduzidas.

A partir desta equação simplificada pode-se, de forma intuitiva, determinar os valores de x e y que a tornam válida. É importante observar que, tendo em vista o contexto do exemplo, somente serão admitidos valores positivos, por se tratar de quantidade de alicates e trenas.

Para determinar os valores de x e y na equação, será utilizado o conhecimento adquirido na seção 2.5 que trata dos critérios de divisibilidade. Observando a Equação Diofantina é $3x + 2y = 62$, pelos critérios de divisibilidade, sabe-se que 2 divide 62. Assim, a partir daí a Tabela 3 foi constituída.

TABELA 3 – Valores que satisfazem a equação $3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 62$

x	y
0	31
2	28
4	25
6	22
8	19
10	16
12	13
14	10
16	7
18	4
20	1

Fonte: A autora, 2021.

Conclui-se, então, que Silvia poderá comprar as quantidades de alicates e trenas, conforme os pares ordenados registrados na tabela acima.

A solução apresentada na Sugestão 1 é obtida a partir de valores conhecidos para as variáveis x e y. Em seguida observa-se que na primeira coluna os valores foram acrescidos de 2 em 2 unidades, enquanto na segunda coluna os valores foram subtraídos de 3 em 3 unidades.

Sugestão 2 de solução.

É possível obter a solução para este problema utilizando um entendimento amplo sobre os Teoremas 3.1.1. e 3.1.2. Convém observar que a solução obtida por este método não faz um refinamento para valores não negativos de x e de y, ou seja, é possível obter valores negativos para as variáveis.

Passo 1. Verificar se existe solução para a Equação Diofantina. Isso é verificado quando se determina o *mdc* entre os coeficientes da equação $15x + 10y = 310$ e, se ele dividir o resultado da equação, então existirá solução. Como o *mdc* entre 15 e 10 é igual a 5 e 5 divide 310, portanto existe solução para a Equação Diofantina (Teorema 3.1.1).

Passo 2. Sabendo que o $(15{,}10) = 5$, e que existe solução para a Equação Diofantina $15x + 10y = 310$, a equação será simplificada, dividindo-a por 5. Resultando em $3x + 2y = 62$. Agora o *mdc* entre os coeficientes é 1. A partir desta segunda equação será escrito o mdc como combinação linear, através do algoritmo de Euclides.

Como $3 = 2.1 + 1$, chegamos em $1 = 3 - 2.1$.

Como a equação simplificada possuía como resultado 62, deve-se multiplicar toda a equação por 62, para que retorne ao resultado 62.

$$1.62 = 3.62 - 2.62$$

$$62 = 3.62 + 2.(-62)$$

Veja que os valores iniciais são $x_0 = 62$ e $y_0 = -62$. Pelo Teorema 3.1.2, a equação terá solução descrita por $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - at$, ou seja, $x = 62 + 2.t$ e $y = -62 - 3t$, com t pertencendo ao conjunto dos inteiros.

Para a resolução do problema proposto tanto x quanto y devem ser números inteiros maiores ou iguais a zero. Então para determinar quais valores de t satisfazem o problema, serão resolvidas as duas inequações a seguir: $62 + 2t \geq 0$ $(\mathbf{1})$ e $-62 - 3t \geq 0$ $(\mathbf{2})$

Resolvendo (1)	Resolvendo (2)
$62 + 2t \geq 0$	$-62 - 3t \geq 0$
$2t \geq 0 - 62$	$-3t \geq 0 + 62$
$t \geq -62/2$	$-3t \geq 62\,(-1)$
$t \geq -31$	$3t \leq -62$
	$t \leq -62/3$
	$t \leq -20{,}6$

Portanto, por meio das resoluções vê-se que t pertence ao conjunto $\{-31, -30, -29, -28, -27, -26, -25, -24, -23, -22, -21\}$. Substituindo tais valores em t, é possível obter exatamente os pares encontrados pela Sugestão 1.

Problema 2: Numa escola da zona sul do Rio de Janeiro uma criança querendo mostrar que tinha bastante dinheiro, disse que gastou 39 reais numa borracha e 105 reais numa lapiseira. Considerando que uma lapiseira comum custa R$6 reais e uma borracha custa 5 reais. Qual a maior quantidade, somando-se lapiseiras e borrachas, que ele poderia ter comprado os itens a preços populares?

Sugestão 1 de solução.

Sejam x a quantidade de lapiseiras e y a quantidade de borrachas compradas. Modelando a situação descrita obtém-se a Equação Diofantina $6x + 5y = 144$.

Para se resolver esta equação, o primeiro procedimento a executar é determinar o *mdc* entre os coeficientes 6 e 5, através do Algoritmo de Euclides, para saber se o *mdc* divide o resultado, e, consequentemente, se existe solução em $\mathbb{Z}$ para a Equação Diofantina.

	1	1
6	5	1
1	0	

Acima vê-se que o *mdc* entre 6 e 5 é 1, e, portanto, existe solução para a equação $6x + 5y = 144$, pois $1|144$.

Nessa primeira forma de resolução, é necessário determinar quais são os valores x_0e y_0 que satisfazem a equação, para, a partir destes valores iniciais, dar prosseguimento à resolução.

A recomendação inicial é que observe os coeficientes e veja se algum deles é divisor do resultado, utilizando o conhecimento adquirido através do estudo sobre critérios de divisibilidade.

Analisando a equação $6x + 5y = 144$, veja que $6|144$, desta forma o pontapé inicial será dado pelo resultado da divisão, observe a Tabela 4:

TABELA 4 – Valores que satisfazem a equação $6x + 5y == 144$

x	y
24	0
19	6
14	12
9	18
4	24

Fonte: A autora, 2021.

O interessante da resolução é perceber a existência de um padrão sobre a forma com que os pares vão surgindo. Observe que na coluna da esquerda os valores vão diminuindo cinco unidades, e os valores da direita vão aumentando em seis unidades, e esses valores são exatamente os coeficientes. E ainda que, sempre que se encontra um resultado inicial, os demais resultados são traçados observando os coeficientes, frisando que um deles será utilizado com sinal trocado.

Assim, a maior quantidade de itens que poderiam ser comprados é 28, com 4 lapiseiras e 24 borrachas.

Sugestão 2 de solução.

A forma acima é intuitiva e simplificada, agora serão utilizados os conhecimentos adquiridos nos teoremas 3.1.1 e 3.1.2.

Passo 1. Verificar se existe solução para a equação Diofantina. Isso é verificado quando se determina o *mmc* entre os coeficientes da equação $6x + 5y = 144$ e, se ele dividir o resultado da equação, então existirá solução.

	1	5
6	5	1
1	0	

Como $1|144$, portanto existe solução para a Equação Diofantina.

Passo 2. Sabendo que $(6,5) = 1$, e que existe solução para a Equação Diofantina $6x + 5y = 144$.

É necessário escrever o *mdc* como combinação linear, através do algoritmo de Euclides

$6 = 5.1 + 1$, então $1 = 6 - 5.1$.

Como na Equação Diofantina o resultado é 144, multiplica-se toda a igualdade por 144, para que retorne ao resultado inicial.

$$1.144 = 6.144 - 5.144$$
$$144 = 6.144 + 5.(-144).$$

Observe então que o $x_0 = 144$ e o $y_0 = -144$. Pelo teorema 3.1.2, a equação terá solução obedecendo os parâmetros $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - at$, ou seja, $x = 144 + 5.t$ e $y = -144 - 6t$, com t pertencendo a $\mathbb{Z}$.

Para a resolução do problema proposto, tanto x quanto y são números maiores ou iguais a zero. Então para determinar quais valores de t satisfazem o problema, resolvendo as duas inequações: $144 + 5t \geq 0$ $(\mathbf{1})$ e $-144 - 6t \geq 0$ $(\mathbf{2})$

Resolvendo (1)

$$144 + 5t \geq 0$$
$$5t \geq 0 - 144$$
$$t \geq -144/5$$
$$t \geq -28{,}8$$

Resolvendo (2)

$$-144 - 6t \geq 0$$
$$-6t \geq 0 + 144$$
$$-6t \geq 144\ (-1)$$
$$6t \leq -144$$
$$t \leq -144/6$$
$$t \leq -24$$

Então t pertence ao conjunto $\{-28, -27, -26, -25, -24\}$.

Substituindo tais valores em t, é possível obter exatamente os pares encontrados pela resolução simplificada.

Problema 3. Cristina ama crianças, resolveu então doar bonequinhas para um orfanato. Ela dispunha de 60 reais, e as bonecas tinham dois valores distintos, conforme seus tamanhos. A boneca maior custava R$5,00 e a menor R$3,00. De quantas maneiras Cristina pode comprar as bonecas de R$5,00 e de R$3,00 de modo a gastar, ao todo, R$60,00?

Sugestão de solução.

Para este problema, será apresentada apenas a resolução mais simplificada, através da tabela, isto porque, busca-se apenas valores positivos.

Serão utilizados os critérios de divisibilidade para se determinar o primeiro par ordenado que satisfaz a Equação Diofantina.

Chamando de x o número de bonecas maiores e de y o número de bonecas menores.

Modelando o problema, temos que $5x + 3y = 60$.

Observe na equação x e y representam a quantidade de bonecas, sendo assim, neste caso, não podem assumir valores negativos.

Por meio do conhecimento dos critérios de divisibilidade vê-se que tanto 5 quanto 3 dividem 60, escolhendo iniciar dividindo por 3, tem-se os seguintes valores para x e y na Tabela 5:

TABELA 5 – Valores que satisfazem a equação $5x + 6y = 60$

x	y
0	20
3	15
6	10
9	5
12	0

Fonte: A autora, 2021.

A explicação da tabela é a seguinte: Considerando $x = 0$, como 60 é múltiplo de 3, viu-se que y assumiria o valor de 20, este foi o pontapé inicial. Sabendo que tanto x quanto y não poderiam assumir valores negativos, aumentou-se o valor de x e observando qual valor se adequava em y para que a equação fosse satisfeita, lembrando que a Equação Diofantina Linear de duas Variáveis segue a regra de que os aumentos ou decréscimos dos valores iniciais têm relação com os coeficientes, daí os valores foram determinados.

Enfatiza-se que a partir da tabela é possível perceber que em x os valores foram aumentando em 3 unidades, e em y os valores foram diminuindo em 5 unidades.

Portanto, a resposta do problema é que Cristina tem 5 maneiras de gastar os R$60,00 comprando as bonecas.

Problema.4: Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 30 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível? (Questão adaptada de Hefez, 2016, p.107).

Sugestão de solução.

A resolução deste problema será dada pelo método mais simples. O motivo para empregar tal método é que são buscados apenas valores positivos, que poderão ser tabelados facilmente.

Seja x o número de coelhos e y o número de galinhas. Modelando o problema, tem-se: $4x + 2y = 30$.

Para saber se o problema tem solução, deve-se determinar o *mdc* entre 4 e 2, e, através do algoritmo de Euclides é fácil verificar que o resultado é 2. Como o resultado do *mdc* é 2 e $2|30$, existe solução.

Simplificando a equação, dividindo pelo valor do *mdc*, obtém-se

$$2x + y = 15.$$

A entrada será zerando o valor de x, assim $y = 15$. Observe a Tabela 6.

TABELA 6 – Valores que satisfazem a equação $2x + y = 15$

x	y	$\|x - y\|$

0	15	$\|0-15\|=15$
1	13	$\|1-13\|=12$
2	11	$\|2-11\|=9$
3	9	$\|3-9\|=6$
4	7	$\|4-7\|=3$
5	5	$\|5-5\|=0$
6	3	$\|6-3\|=3$
7	1	$\|7-1\|=6$

Fonte: A autora, 2021.

Importante ressaltar mais uma vez que, como a questão se tratava da quantidade de coelhos e de galinhas, não é preciso admitir valores negativos.

Sobre a tabela, houve a necessidade de se criar uma terceira coluna, porque além das possíveis quantidades de coelhos e galinhas que satisfizessem a equação, havia a restrição de que era pedida a menor diferença entre as quantidades de animais.

Logo, a resposta ao problema é que a quantidade tanto de coelhos quanto de galinhas é 5.

Problema 5. Determine os múltiplos naturais de 11 e 9 cuja soma é igual a 79.

Sugestão de solução.

Seja $11x$ múltiplos de 11 e $9y$ múltiplos de 9. Modelando a questão, temos: $11x + 9y = 79$ Observe que a questão pede múltiplos naturais, porém é necessário que ela seja resolvida através dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, pois 79 não é múltiplo de 11 e nem de 9, portanto não se pode aplicar os critérios de divisibilidade.

Para dar continuidade a resolução é necessário saber se existe solução, aplicando o Teorema 3.1.1. Desta forma, é basilar fazer o *mdc* entre os coeficientes 9 e 11, porém, como 11 é número primo e 9 não é múltiplo de 11, então sabemos que $mdc(11,9) = 1$. E como 1|79, logo existe solução em $\mathbb{Z}$.

Agora o objetivo é estabelecer os valores iniciais x_0 e y_0, para isso, será utilizado o Algoritmo de Euclides para se determinar a combinação linear entre os coeficientes 11 e 9 que fornecerá o resultado esperado.

	1	4	2
11	9	2	1
2	1	0	

Busca-se escrever o valor do *mdc* como combinação linear dos coeficientes 11 e 9.

Para tal, deve-se iniciar escrevendo o último resto, não nulo, como combinação linear pelo algoritmo da divisão, assim: $1 = 9 - 4\,.\,2$.

Perceba que ainda não é possível obter o *mdc* como combinação linear de 11 e 9, portanto deve-se escrever o resto anterior como combinação linear pelo algoritmo da divisão.

$$2 = 11 - 9.$$

Perceba que os coeficientes 11 e 9 já aparecem, porém para se determinar o *mdc* como combinação linear é necessário substituir o valor de 2, na igualdade $1 = 9 - 4.2$.

Assim sendo,

$1 = 9 - 4.2$, como $2 = 11 - 9$, então

$$1 = 9 - 4.(11 - 9)$$

$$1 = 9 - 4.11 + 4.9$$

$$1 = 5.9 - 4.11.$$

A partir da combinação linear encontrada, multiplica-se toda a igualdade por 79, que é o resultado da nossa Equação Diofantina para determinar os valores de x_0 e y_0.

$$79.1 = (5.79).9 - (4.79).11$$

$$79 = 395.9 - 316.11.$$

Para facilitar a visualização dos elementos x_0 e y_0, os termos serão reorganizados conforme a Equação Diofantina inicial, logo $11.(-316) + 9.395 = 79$.

Assim, $x_0 = -316$ e $y_0 = 395$.

Agora, é sabido que pelos teoremas estudados acima tem-se:

$$x = x_0 + b.t \text{ e } y = y_0 - a.t$$

$$x = -316 + 9t \text{ e } y = 395 - 11t.$$

Veja que para quaisquer valores de t inteiro, é obtido x múltiplo de 11 e y múltiplo de 9. Porém a questão pede os múltiplos naturais de 11 e 9 cuja soma resulte em 79, então é fundamental encontrar valores maiores ou iguais a zero de x e y.

Assim, $-316 + 9t \geq 0$ $(\mathbf{1})$ e $395 - 11t \geq 0$ $(\mathbf{2})$

Resolvendo (1)	Resolvendo (2)
$-316 + 9t \geq 0$	$395 - 11t \geq 0$
$-316 \geq -9t$	$395 \geq 11t$
$-316 \geq -9t \quad .(-1)$	$395/11 \geq t$
$+316 \leq 9t$	$35{,}91 \geq t$
$+316/9 \leq t$	$+35{,}11 \leq t$

Como o intervalo para t inteiro é vazio, logo, não existem múltiplos naturais de 11 e 9 cuja soma dê 79.

3.2 Equações Diofantinas Lineares de 3 Variáveis

Nesta seção são abordadas as Equações Diofantinas Lineares de 3 variáveis, como garantir a existência de solução para este caso peculiar de equações, além de propor uma técnica para determinar o seu Conjunto Solução, caso exista. Para uma leitura complementar sugere-se as consultas de Campos (2013) e Lima (2017).

Como foi enfatizado no início deste capítulo, as Equações Diofantinas Lineares serão chamadas simplesmente de Equações Diofantinas. Diz-se que a equação $ax + by + cz = k$ é uma Equação Diofantina nas variáveis x, y e z sendo a, b e c os seus coeficientes, números inteiros não nulos. Uma *solução* para a Equação Diofantina $ax + by + cz = k$ é um terno ordenado $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$tal que $ax_0 + by_0 + cz_0 = k$.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de solução de uma Equação Diofantina de 3 Variáveis é o seu termo independente ser divisível pelo máximo divisor comum entre os coeficientes a, b e c. Esta caracterização da existência de solução para estas Equações Diofantinas é tratada pelo Teorema a seguir.

3.2.1 Teorema da Existência de Solução Equação Diofantina de 3 Variáveis

A Equação Diofantina $ax + by + cz = k$ com a, b e c números inteiros não nulos e k um inteiro qualquer admite solução se, e somente se, $mdc(a, b, c)|k$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Por hipótese, a equação $ax + by + cz = k$ admite uma solução (x_0, y_0, z_0), isto é, $ax_0 + by_0 + cz_0 = k$. Como (a, b, c) divide a, divide b e divide c, segue que o *mdc* entre a,b e c divide $ax_0 + by_0 = n$.

($\Leftarrow$) Seja $mdc(a, b, c) = d$. Então, pelo teorema de Bézout, existem t_1, t_2, t_3 inteiros tais que $d = at_1 + bt_2 + ct_3$. Por hipótese, $mdc(a, b, c) = d$ divide k, logo existe um número inteiro q tal que $k = dq$. Multiplicando a equação $d = at_1 + bt_2 + ct_3$ por q, temos $dq = aqt_1 + bqt_2 + cqt_3$. Repare que o produto dq é igual a k, portanto o terno ordenado (qt_1, qt_2, qt_3) é uma solução para a Equação Diofantina $ax + by + cz = k$. Isto encerra a demonstração.

Dando continuidade, caso exista solução, será acessada a expressão da solução de uma Equação Diofantina de 3 Variáveis. A ideia empregada para determinar estas soluções parte em reduzir a Equação Diofantina de 3 variáveis para uma de 2 variáveis. O Teorema 3.2.2 se encarrega desta tarefa. Convém observar que, caso exista uma solução particular para uma Equação Diofantina, então existirão infinitas soluções acessadas através desta solução inicial.

3.2.2 Teorema: Seja (x_0, y_0, z_0) uma solução particular da Equação Diofantina $ax + by + cz = k$, com $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$. A equação $ax + by + cz = k$ admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é dado por

$$S = \left\{ \left(x_0(\, l_0 - cs) + \frac{b}{mdc(a,b)}t, y_0(l_0 - cs) - \frac{a}{mdc(a,b)}t, mdc(a,b).s + r \right) \right| \; l_0, s, t \; \in \; \mathbb{Z}\}.$$

O caminho considerado mais semântico para se resolver a Equação Diofantina $ax + by + cz = k$, caso esta equação possua solução, inicia-se tomando $p = ax + by$, em seguida deve-se determinar a solução da equação reduzida $p + cz = k$, isto é, calcular o valor de $z = z_0 - t$ e o valor de $p = p_0 + ct$, com (z_0, p_0) solução particular de $p + cz = k$ e t um número inteiro. Na sequência restaria acessar a solução da Equação Diofantina de 2 Variáveis $ax + by = p_0 + ct$, obtendo os respectivos valores para as variáveis x e y.

Os problemas a seguir têm o caráter didático, servindo para que o leitor possa ter um entendimento amplo e pleno dos teoremas que tratam da existência e da solução de Equações Diofantinas de 3 Variáveis. Tais problemas podem ser resolvidos de duas maneiras distintas, tanto pelo método formal, através dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2, quanto pela condensação de três variáveis em duas. Optou-se por resolver os problemas propostos a seguir utilizando o Teorema 3.2.1 que trata da existência de solução e, em seguida, usa-se o método que transforma a Equação Diofantina de 3 Variáveis em duas outras de 2 Variáveis.

Problema 6. Bruna é dona de uma doceria e faz compras periodicamente de leite condensado, barra de chocolate e cacau em pó. Neste mês ocorreu uma promoção no supermercado, porém ela tinha apenas 300 reais para gastar. Observando o encarte do supermercado, viu que o leite condensado estava custando 10 reais, a barra de chocolate estava custando 15 reais e o preço do cacau em pó era de 25 reais. Aponte uma maneira que Bruna poderá gastar seu dinheiro com os itens listados acima, considerando que ela quer ter os três itens em sua compra?

Sugestão de Solução.

Considere como x a quantidade de leite condensado, y a quantidade de barra de chocolate e z a quantidade de cacau em pó.

Modelando o problema tem-se:

$$10x + 15y + 25z = 300$$

A *priori* deve-se verificar se há solução para este problema. Para isso aplica-se o Teorema 3.2.1. Assim, é necessário determinar o valor do $mdc(10,15,25)$, para a posteriori saber se tal valor divide o resultado da equação.

$$d_1 = mdc(10,15) = 5$$

	1	2
15	10	5
5	0	

$$d = mdc(5,25) = 5$$

	5	
25	5	
0		

Após a determinação do $mdc(10,15,25) = 5$, é preciso saber se ele divide o resultado. Assim, $5|300$, portanto, existe solução para a Equação Diofantina Linear de três Variáveis.

Para se encontrar a solução da Equação Diofantina utiliza-se o método de condensação das três variáveis em duas. Mas, antes, deve-se dividir a equação $10x + 15y + 25z = 300$ por 5, obtendo $2x + 3y + 5z = 60$.

Dada a equação $2x + 3y + 5z = 60$, seja $p = 2x + 3y$, substituindo:

$p + 5z = 60$, esta equação possui solução pois $mdc(1,5) = 1$, e $1|60$.

Como, tanto 1 quanto 5 são divisores de 60, sabendo disso, não será utilizado o Teorema 3.1.2. O início se dará zerando p, logo $z = 12$, dando continuidade à resolução, veja a Tabela 7:

TABELA 7 – Valores que satisfazem a equação $p + 5z = 60$

p	z
0	12
5	11
10	10
15	9
20	8
25	7
30	6
35	5
40	4
45	3
50	2
55	1
60	0

Fonte: A autora, 2021.

Como no problema é pedido que se aponte uma maneira de Bruna comprar os itens da lista e que todos os três precisam constar, então já se pode descartar os extremos da tabela, pois zeram pelo menos um item. Sabendo disso, escolhendo quaisquer dos outros pares a solução será encontrada.

Tomando $p = 35$ e $z = 5$, já é sabido que nas compras de Bruna terão 5 embalagens de cacau em pó. E, substituindo o valor de $p = 35$, na equação $p = 2x + 3y$, tem-se a seguinte Equação Diofantina: $2x + 3y = 35$.

Para saber se existe solução é fundamental, conforme o Teorema 3.1.1., verificar se $mdc(2,3)$ divide 35. De fato, facilmente comprova-se que $mdc(2,3) = 1$, e $1|35$. Através do conhecimento sobre os critérios de divisibilidade é sabido que nem 2 e nem 3 são divisores de 35. Desta forma, é indispensável o uso do Teorema 3.1.2.

Assim, escrevendo o $mdc(2,3)$ como combinação linear de 2 e 3, resulta em: $1 = 3 - 2.1$.

Como o resultado é 35, deve-se multiplicar toda a igualdade por 35.

$$1.35 = 3.35 + 2.(-35)$$

$$2.(-35) + 3.(35) = 35$$

$$x_0 = -35 \text{ e } y_0 = 35.$$

Assim, $x = -35 + 3t$ e $y = 35 - 2t$. Portanto a solução geral é $\{(-35 + 3t\,, y = 35 - 2t)/\, t \in \mathbb{Z}\}$.

Como x e y representam quantidades, logo o problema requer que os dois sejam maiores ou iguais a zero. Para isso, as inequações abaixo serão resolvidas para determinar em que intervalo t se encontra para satisfazer as equações.

Resolvendo as inequações $-35 + 3t \geq 0$ **(1)** e $35 - 2t \geq 0$ **(2)**:

Resolvendo (1)

$$-35 + 3t \geq 0$$

$$-35 + 3t + 35 \geq 0 + 35$$

$$+3t \geq 35$$

$$t \geq \frac{35}{3}$$

$$t \geq 11{,}6$$

Resolvendo (2)

$$35 - 2t \geq 0$$

$$35 - 2t - 35 \geq 0 - 35$$

$$-2t \geq -35$$

$$-2t.(-1) \leq -35.(-1)$$

$$2t \leq 35$$

$$t \leq \frac{35}{2}$$

$$t \leq 12{,}5$$

O único valor inteiro que t pode assumir é 12. Desta forma para se estabelecer os valores de x e y, basta substituir o valor de t nas equações $x = -35 + 3t$ **(1)** e $y = 35 - 2t$ **(2)**. Substituindo:

Resolvendo (1)

Resolvendo (2)

$$x = -35 + 3.12 \qquad\qquad y = 35 - 2.12$$

$$x = -35 + 36 = 1 \qquad\qquad y = 35 - 24 = 11.$$

Portanto, uma resposta ao problema é que Bruna pode gastar seu dinheiro comprando uma lata de leite condensado, 11 barras de chocolate e 5 embalagens de cacau em pó.

Problema 7 Após o término da pandemia do covid-19, a coordenação do Profmat do CPII resolveu promover uma festa de boas-vindas a seus alunos. Assim, foi realizada uma pesquisa de preços de salgadinho, cachorro-quente e docinho. Onde o preço unitário do salgadinho era de 4 reais, do cachorro-quente 6 reais e do docinho 3 reais. Sabendo que o valor despendido para esta parte da festa é de 40 reais, quais são as possíveis combinações de quantidade de cada um desses elementos para a festa?

Sejam x a quantidade de salgadinho, y a quantidade de cachorro-quente e z a quantidade de docinho.

Modelando matematicamente o problema resulta em: $4x + 6y + 3z = 40$

Observe que será resolvida uma Equação Diofantina Linear de três Variáveis.

O pontapé inicial é saber se existe solução para a equação. Para isso, será realizado o *mdc* entre os coeficientes (4,6,3), para saber se ele divide o resultado da equação.

$$d = mdc(4,6) = 2$$

	1	2
6	4	2
2	0	

$$d = mdc\ (2,3) = 1$$

	1	2
3	2	1
1	0	

Descobriu-se, então, que o *mdc* entre os três coeficientes é 1. E, como $1|40$, então existe solução para a equação.

Para determinar a solução geral, já que se trata de uma Equação Diofantina com três Variáveis, será utilizado o método da substituição para reduzi-la a uma Equação Diofantina de duas Variáveis.

Dada a equação $4x + 6y + 3z = 40$, através da substituição se transformará numa Equação Diofantina de duas Variáveis ao substituir $4x + 6y$ por p, assim tem-se a equação $p + 3z = 40$, que possui solução, pois $mdc(1,3) = 1$ e $1|40$.

Escrevendo $mdc(1,3)$ como combinação linear de 1 e 3, segue-se em $1.(-2) + 3.(1) = 1$. Como o resultado da equação é 40, multiplica-se toda a igualdade por 40, obtendo:

$$1.(-80) + 3.(40) = 40$$

Portanto, uma solução particular seria, $p_0 = -80$ e $z_0 = 40$. Determinando a solução geral, sabemos pelo Teorema 3.1.1. que a solução geral para obter p é $p = p_0 + zt$ e para obter z é $z = z_0 - t$. Sendo assim, $p = -80 + 3t$ e $z = 40 - t$.

Portanto a solução geral para a equação $p + 3z = 40$ é $\{(-80 + 3t\ ,40 - t)/\ t\ \in \mathbb{Z}\}$.

Como o problema trata de quantidades, é fato que p e z são valores maiores ou iguais a zero. Logo, é preciso determinar em qual intervalo t está para satisfazer as duas equações. Para isso, serão resolvidas as inequações $p = -80 + 3t\ \geq 0$ **(1)** e $z = 40 - t \geq 0$. **(2)**

Resolvendo (1)

$$-80 + 3t\ \geq\ 0$$

$$-80 + 3t + 80\ \geq\ 0 + 80$$

$$3t\ \geq +80$$

$$t\ \geq\ \frac{+80}{3}$$

$$t\ \geq 26{,}6.$$

Resolvendo (2)

$$40 - t\ \geq\ 0$$

$$40 - t - 40 \geq 0 - 40$$

$$-t\ \geq -40\,.(-1)$$

$$t\ \leq\ 40$$

Assim, $t\ \in \{27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40\}$.

A partir dos valores de t obtidos acima, todos os resultados de p e z tabelados:

TABELA 8 – Valores que satisfazem as equações $p = -80 + 3t$ e $z = 40 - t$

t	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

p	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
z	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Fonte: A autora, 2021.

A primeira etapa foi concluída, mas o objetivo é responder ao problema, desta forma, falta ainda conhecer x e y. Observando a equação $4x + 6y = p$, sabe-se que só existe solução se $mdc(2,4)$ dividir p, como $mdc(2,4) = 2$, para dar continuidade à resolução do problema é preciso fazer uso conhecimento dos Critérios de divisibilidade para determinar os valores que tornam possível a solução da equação. Logo, p pode assumir os valores pertencentes ao conjunto $\{4,10,16,22,28,34,40\}$. Tomando $p = 34$, tem-se:

$$4x + 6y = 34.$$

Sabe-se que $mdc(2,4) = 2$ e $2|34$, portanto existe solução.

Para gerar a solução da Equação Diofantina $4x + 6y = 34$, é necessário simplificar toda a equação dividindo seus termos por 2, e aplicando o Teorema 3.1.2.

Assim,

$$4x + 6y = 34, \text{ dividindo por 2}$$

$$2x + 3y = 17.$$

Sabe-se que $mdc(3,2) = 1$, escrevendo o *mdc* como combinação linear de 2 e 3, obtém-se

$$1 = 2.(-1) + 3.$$

Para a determinação dos valores iniciais de x e y, multiplica-se a combinação acima pelo resultado da Equação Diofantina. Assim,

$$1.17 = 2.(-1).17 + 3.17$$

$$17 = 2.(-17) + 3.17.$$

Logo, $x_0 = -17$ e $y_0 = 17$.

Pelo Teorema 3.1.2., $x = x_0 + bt_1$ e $y = y_0 - at_1$, substituindo

$$x = -17 + 3t_1 \text{ e } y = 17 - 2t_1.$$

A solução geral para a equação $4x + 6y = 34$ é $\{(-17 + 3t_1\,, 17 - 2t_1)/\ t_1\ \in \mathbb{Z}\}$.

A solução do problema precisa tanto de x quanto de y sejam naturais, desta forma, há a necessidade de encontrar o intervalo em que t está inserido, lembrando que t é um número inteiro. Para isso, serão resolvidas as duas inequações: $-17 + 3t_1 \geq 0$ **(1)** e $17 - 2t_1 \geq 0$ **(2)**:

Resolvendo (1)

$$-17 + 3t_1 \geq 0$$
$$-17 + 3t_1 + 17 \geq 0 + 17$$
$$+3t_1 \geq 17$$
$$t_1 \geq \frac{17}{3}$$
$$t_1 \geq 5{,}6$$

Resolvendo (2)

$$17 - 2t_1 \geq 0$$
$$17 - 2t_1 - 17 \geq 0 - 17$$
$$-2t_1 \geq -17$$
$$-2t_1 \geq -17 \quad .(-1)$$
$$2t_1 \leq 17$$
$$t_1 \leq \frac{17}{2}$$
$$t_1 \leq 8{,}5.$$

Assim, vê-se que $t_1 \in \{6{,}7{,}8\}$. Para encontrar os valores de x e y, basta escolher um valor de t_1 para ser substituir nas equações. Tomando $t_1 = 8$,

$$x = -17 + 3.8$$
$$x = -17 + 24$$
$$x = 7$$

$$y = 17 - 2.8$$
$$y = 17 - 16$$
$$y = 1$$

Portanto, uma solução para o problema é comprar 7 salgadinhos, 1 cachorro-quente e 2 docinhos.

Abaixo, serão exibidos dois problemas em que a forma de solução será diferenciada dos demais realizados anteriormente. O objetivo é que seja conhecida outra forma de resolução.

Problema 8 Como encontrar uma solução particular de $66x + 18y + 20z = 8$?

Inicia-se averiguando se existe solução para a Equação Diofantina $66x + 18y + 20z = 8$. Utilizando o Algoritmo de Euclides é possível verificar que $mdc(66{,}18{,}20) = 2$, e como $2|8$ existe solução para a equação. Neste momento, simplificando a equação, ou seja, dividindo todos os termos por dois, surge a equação equivalente $33x + 9y + 10z = 4$.

Para a determinação de uma solução particular serão escritos como combinação linear o *mdc* entre os termos da Equação Diofantina preservando a sequência em que aparecem.

Utilizando o Algoritmo de Euclides para o cálculo do $mdc(33{,}9)$, tem-se:

	3	1	2
33	9	6	3
6	3	0	

Escrevendo o resultado do *mdc* como combinação linear de 33 e 9,

$$3 = 9 - 6.1 \quad (1)$$

$$6 = 33 - 3.9 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$3 = 9 - (33 - 3.9).1$$

$$3 = 9 - 33 + 3.9$$

$$3 = 33.(-1) + 9.(4).$$

Agora aplicando o Algoritmo de Euclides para o cálculo do $mdc(10,9)$

	1	9
10	9	1
1	0	

Escrevendo como combinação linear: $1 = 10 - 9.1$.

Neste momento, busca-se aplicar $3 = 33.(-1) + 9.(4)$ em $1 = 10 - 9.1$, para isso deve-se multiplicar toda a igualdade $3 = 33.(-1) + 9.(4)$ por 3, resultando em $9 = 33.(-3) + 9.(12)$. Assim,

$$1 = 10 - 9.1$$

$$1 = 10 - (33.(-3) + 9.(12)).1$$

$$1 = 10 + 33.(+3) + 9.(-12)$$

$$1 = 33.(+3) + 9.(-12) + 10(1)$$

Veja que o objetivo é determinar a solução particular de $33x + 9y + 10z = 4$, assim é preciso multiplicar por 4 a igualdade $1 = 33.(+3) + 9.(-12) + 10(1)$, resultando em:

$$4 = 33.(+12) + 9.(-48) + 10(4)$$

Portanto, uma solução particular para a Equação Diofantina $66x + 18y + 20z = 8$ é $x_0 = 12$, $y_0 = -48$ e $z_0 = 4$.

Problema 9 Dada a equação acima, $66x + 18y + 20z = 8$, determine sua solução geral.

Como foi visto acima, a equação possui solução. Assim, para se alcançar a solução geral, será utilizada a equação equivalente $33x + 9y + 10z = 4$. O primeiro passo é reduzir a

Equação Diofantina Linear considerando $p = 33x + 9y$, agora é necessário que se resolva a Equação Diofantina Linear de 2 Variáveis: $p + 10z = 4$.

Primeiro passo para resolver essa equação $p + 10z = 4$ é saber se essa equação possui solução. De fato, como o $mdc(1,10) = 1$ e $1|4$ existe solução para a equação.

Escrevendo o resultado do *mdc* como combinação linear, obtém-se:

$$1 = 1.(-9) + 10.1.$$

Como o resultado da equação é 4, multiplica-se toda a igualdade acima por 4. Resultando em, $4 = 1.(-36) + 10.4$.

Portanto, $p_0 = -36$ e $z_0 = 4$, escrevendo a solução geral, temos:

$$p = -36 + 10t_1 \text{ e } z = 4 - t_1,$$

A solução geral encontrada é $\{(-36 + 10t_1\,, 4 - t_1)/t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Para encontrar a solução geral da equação $33x + 9y + 10z = 4$, demanda-se auferir os valores de x e y, que serão obtidos determinando a solução geral de $33x + 9y = p = -36 + 10t_1$. Pelo Teorema 3.1.1, para que essa equação $33x + 9y = -36 + 10t_1$ tenha solução é necessário que 3 que é o $\mathrm{mdc}(33{,}9)$ divida $-36 + 10t_1$.

Sendo a condição de existência satisfeita. Será dada a continuidade de resolução para se conhecer a solução geral.

Aplicando o Algoritmo de Euclides para o mdc, vem

	3	1	2
33	9	6	3
6	3	0	

Escrevendo $\mathrm{mdc}(33{,}9)$ como combinação linear de 33 e 9,

$$3 = 9 - 6.1 \quad \textbf{(1)}$$

$$6 = 33 - 9.3 \; \textbf{(2)}$$

Substituindo (2) em (1):

$$3 = 9 - (33 - 9.3).1$$

$$3 = 9 - 33 + 9.3$$

$$3 = 33(-1) + 9.4.$$

Como o resultado da equação é $-36 + 10t_1$, a igualdade $3 = 33(-1) + 9.4$ será multiplicada por $\frac{-36+10t_1}{3}$. Assim,

$$3 = 33(-1) + 9.4 \quad .(\frac{-36+10t_1}{3})$$

$$3.(\frac{-36 + 10t_1}{3}) = 33(-1.\frac{-36 + 10t_1}{3}) + 9.(4.\frac{-36 + 10t_1}{3})$$

$$-36 + 10t_1 = 33(\frac{+36-10t_1}{3}) + 9.(\frac{-144+40t_1}{3}).$$

Então $x_0 = \frac{+36-10t_1}{3}$ e $y_0 = \frac{-144+40t_1}{3}$, a solução geral é

$$x = \frac{+36-10t_1}{3} + 3t_2 \text{ e } y = \frac{-144+40t_1}{3} - 11t_2$$

$$\left\{\left(\frac{+36-10t_1}{3} + 3t_2, \frac{-144+40t_1}{3} - 11t_2\right) / \ t_1 \ e \ t_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Assim, conclui-se que a solução geral para a Equação Diofantina de três variáveis $66x + 18y + 20z = 8$, é:

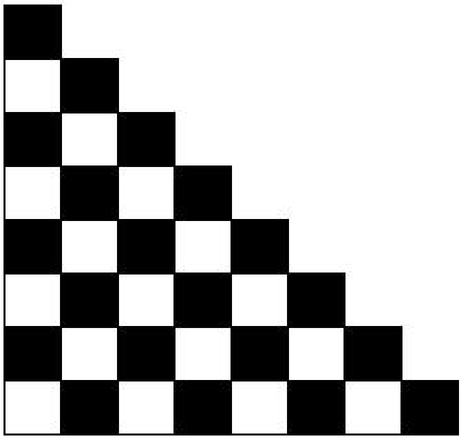
$$\left\{\left(\frac{+36 - 10t_1}{3} + 3t_2, \frac{-144 + 40t_1}{3} - 11t_2, 4 - t_1\right) / \ t_1 \ e \ t_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.3 Coloração Xadrez

Este trabalho tem como foco estabelecer se existe ou não a possibilidade de cobertura de um tabuleiro por poliminós, onde um dos recursos é o conhecimento sobre Equações Diofantinas que dirá se não é viável realizar a cobertura e, caso não possa afirmar a impossibilidade de cobertura, ao menos indica quais as potenciais combinações que aparecerão no cobrimento. Porém, além deste estudo baseado nas Equações Diofantinas, existem outros que servirão como recurso, principalmente, afirmando a não viabilidade de cobertura, como as colorações.

Existem alguns tipos de colorações no tabuleiro de xadrez que são utilizados como recurso para provar a não cobertura, neste trabalho será discutido especificamente a Coloração Xadrez. Ela consiste em estabelecer que na diagonal somente existam quadrículas de mesma cor ou que quadrículas adjacentes não poderão ter a mesma cor. Observe a figura

Figura 6: Diagonal inferior Tabuleiro xadrez



Fonte: A autora, 2021.

Para se trabalhar com a coloração xadrez deve-se enfatizar que ela não dará a certeza de cobertura, apenas a certeza de não cobertura.

Algumas generalizações são importantes para fazer uso do estudo da Coloração Xadrez, a primeira a ser discutida refere-se ao número de quadrados brancos e pretos num tabuleiro.

Para algumas análises será estabelecido que as entradas do tabuleiro, linhas e colunas, serão denotadas por i e j, respectivamente. Assim, dar-se-á o estudo das possibilidades de entradas e a consequência em relação aos quadrados.

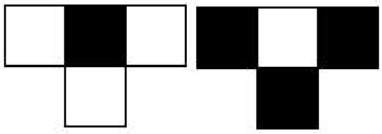
Importante ressaltar que caso i e/ou j sejam pares, sabe-se que o número de quadrados pretos e brancos será igual, e, caso i e j sejam ímpares, o número de quadrados referente a cada cor será diferente, sempre um a mais de branco ou preto.

Para a melhor compreensão, observe o seguinte exemplo:

Utilizando a coloração xadrez, determine se existe a possibilidade de cobertura de um tabuleiro $7x7$, por peças T-tetraminó e dominó.

O primeiro ponto a ser analisado é a forma de Coloração Xadrez das peças T-tetraminó e dominó, importante ressaltar que as peças podem ser rotacionadas.

Figura 7: Coloração xadrez T-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

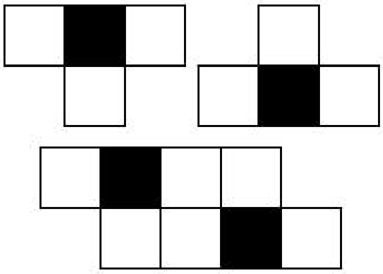
Figura 8: Coloração xadrez dominó

Fonte: A autora, 2021.

Observe que nas peças T-tetraminós mostradas acima, quando se utiliza a coloração xadrez a quantidade de quadrados brancos e pretos variam de duas maneiras, assim, a análise para saber se existe a possibilidade de cobrir o tabuleiro deve levar em consideração as duas formas de coloração da peça, pois em um dado momento, caso uma peça T-tetraminó seja colocada junto de uma outra T-tetraminó, as colorações delas precisarão ser diferentes, para que se continue com o padrão da coloração xadrez.

Por exemplo, ao se encaixar as peças T-tetraminós abaixo, caso fosse utilizado apenas uma forma de colorir a peça, descaracterizaria o padrão da coloração xadrez.

Figura 9: União T-tetraminós (preto central)



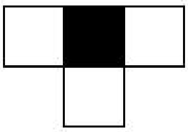
Fonte: A autora, 2021.

Ao observar a peça dominó, não existe variação na quantidade de quadrados brancos ou pretos. A partir das informações extraídas e estudadas acima, será analisado se é factível a cobertura.

A primeira análise a ser feita é verificar qual é a quantidade de quadrados brancos e pretos num tabuleiro $7x7$. Em tabuleiro nxn, com n ímpar, a quantidade de quadrados de uma cor será exatamente uma unidade a mais que a quantidade de quadrados da outra cor. Considerando a quantidade de quadrados pretos maior, tem-se que para descobrir a quantidade de quadrados pretos resolve-se a seguinte conta $\left(\frac{7^2+1}{2}\right)$ e já a quantidade de quadrados brancos será determinada por $\left(\frac{7^2-1}{2}\right)$.

A segunda parte do problema é estabelecer a forma como será denotada a quantidade de cada peça. Assim, estabelecendo a nomenclatura da seguinte maneira: A quantidade de T-tetraminós, Figura 10, com três quadrados brancos e um preto será denotada por x.

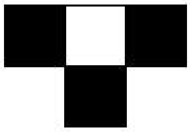
Figura 10: T-tetraminós (preto central)



Fonte: A autora, 2021.

A quantidade de T-tetraminós, Figura 11, com três quadrados pretos e um branco será denotada por y.

Figura 11: T-tetraminós (branco central)



Fonte: A autora, 2021.

A quantidade de dominós, Figura 12, será denotada por z.

Figura 12: Dominó

Fonte: A autora, 2021.

Modelando o problema é possível encontrar um sistema de equações, conforme o exposto abaixo.

Observando apenas a quantidade de quadrados brancos dentro de cada peça relacionada ao total de quadrados brancos do tabuleiro, chegamos à equação:

$$3x + 1y + 1z = 24$$

Raciocinando da mesma maneira para a quantidade de quadrados pretos, temos:

$$1x + 3y + 1z = 25$$

Montando o sistema de equações:

$$3x + 1y + 1z = 24$$

$$1x + 3y + 1z = 25$$

Subtraindo a segunda equação da primeira: $-2x + 2y = 1$, colocando 2 em evidência

$$2(-x + y) = 1$$

$$-x + y = \frac{1}{2}$$

O que é impossível, pois a quantidade de cada tipo de poliminó é um número inteiro, e como o conjunto dos inteiros é anel fechado para soma, o resultado esperado precisava ser também um número inteiro.

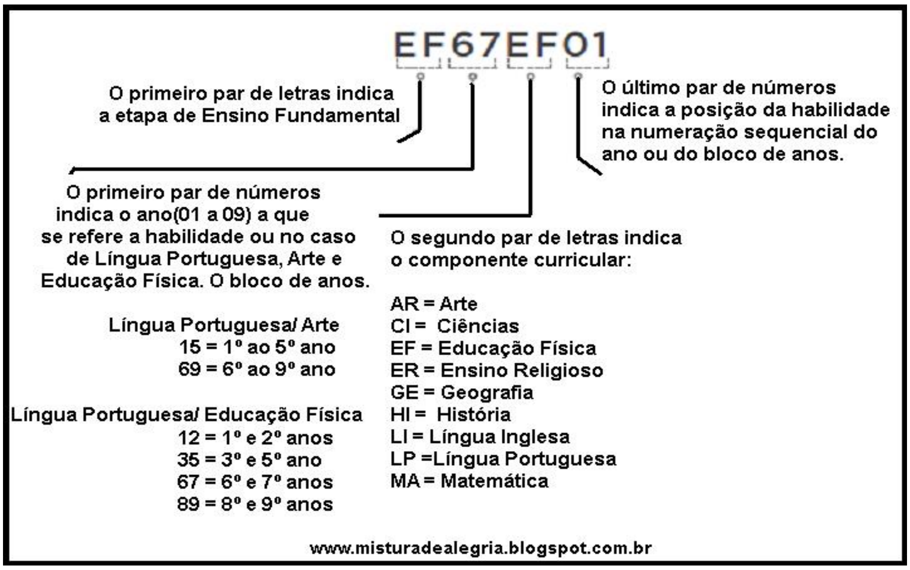
4. ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O ENSINO BÁSICO

A proposta de trabalhar o Problema da Cobertura de Tabuleiros, relacionando-o ao ensino das Equações Diofantinas e fazendo uso da Coloração Xadrez para a Educação Básica, se dá por conta das inúmeras habilidades e do tipo de raciocínio que este estudo poderá proporcionar aos alunos. É claro que a complexidade das atividades propostas deverá ser dosada conforme o nível de escolaridade em que serão aplicadas. Sugere-se, nas atividades, os anos escolares para se aplicar cada problema, porém cabe ao professor regente deliberar sobre como fará uso da metodologia. Em cada atividade destacam-se as competências e as habilidades existentes na BNCC, citadas no preâmbulo, objetivando corroborar com a relevância do tema desta pesquisa.

A BNCC pressupõe que a aprendizagem matemática está relacionada com a compreensão, sendo entendida como a aquisição dos significados de objetos matemáticos, comtemplando suas aplicações. Tais objetos são atribuídos a significados, que são resultados de diversas conexões do meio em que o aluno se encontra. Desse modo sugere-se no ensino da matemática o uso de: “recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas”. (BRASIL, 2017, p. 276)

A Figura 13 foi retirada da BNCC e selecionada para facilitar a compreensão dos códigos alfanuméricos de habilidades que serão vinculadas a cada atividade proposta.

Figura 13: Código Alfanumérico identificando as Habilidades de cada ano



Fonte: (BRASIL, 2017, p. 30)

Atividade 1

Para a atividade 1 a proposta é introduzir o assunto de poliminós aos alunos, assim sugere-se que solicite aos alunos a construção de 6 quadrados de mesma área, que serão úteis para a melhor visualização e consolidação da atividade. Vale ressaltar que papéis mais densos são mais adequados para estas construções.

A importância desta atividade é familiarizar os alunos com os poliminós para, posteriormente, serem utilizados para a cobertura de tabuleiros. Veja que a escolha de hexaminós se dá por conta dos 35 tipos existentes que, apesar de não ter sido exposta a imagem contendo hexaminós neste trabalho, possui uma construção é imensamente tranquila, além da gama de possibilidades que poderão ser exploradas pelos alunos.

Os alunos devem, em dupla, experimentar as diversas formas de se unir as arestas dos 6 quadrados, e, a cada diferente disposição, anotar em uma folha separada o hexaminó que surgiu, tendo que descobrir, pelo menos, 10 hexaminós distintos.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 267), as habilidades e competências contribuem para que os alunos possam:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Duração da Atividade 1: 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

Habilidade prevista na BNCC:

- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

Enunciado da Atividade 1. (6° ano E.F em diante).

Poliminós são figuras geométricas planas formadas por quadrados de mesmo lado, interligados de forma que pelo menos uma aresta de cada quadrado coincida com uma aresta de outro quadrado. Sabendo que um hexaminó é um poliminó composto por 6 quadrados unitários, prepare uma tabela contendo 10 hexaminós distintos.

Atividade 2

Na *atividade 2*, aconselha-se a utilização de tabuleiros, como descritos no Capítulo 3, confeccionados pelos próprios alunos, usando cartolina ou qualquer outro papel um pouco mais denso. As peças também podem ser confeccionadas com o mesmo material do tabuleiro. Recomenda-se o uso de cores distintas para peças de diferentes formatos e para o tabuleiro, e que os quadrados unitários que compõem os tabuleiros e as peças tenham a mesma dimensão.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2017, p. 265),

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético- -dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

Além disso, a BNCC enfatiza ainda que a Matemática tem papel de destaque no desenvolvimento do raciocínio lógico, no espírito de investigação e na capacidade de produzir argumentos.

O objetivo desta atividade é explorar as inúmeras formas possíveis de se cobrir um tabuleiro $4x4$ utilizando tetraminós. Sugestiona-se que o professor permita que os alunos experimentem diversas possibilidades de cobertura do tabuleiro antes de inseri-los nas atividades descritas mais adiante.

Duração da Atividade 2: 2 tempos de aula de aproximadamente 50 minutos cada.

Habilidades previstas BNCC:

- (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

Enunciado da Atividade 2. (6° ano E.F. em diante).

1ª etapa. Confeccionar um tabuleiro $4x4$ e as peças tetraminós (4 peças de cada tipo de tetraminó);

2ª etapa. Disponibilizar algum tempo para que os alunos experimentem cobrir o tabuleiro, testando as mais variadas formas possíveis de cobri-lo. Orientando que usem, a priori, um mesmo formato de tetraminó e, em seguida, combinem tetraminós diferentes;

3º etapa. Preencher o questionário:

a) Utilizando as quatro peças de um único tipo de tetraminó por vez foi possível cobrir o tabuleiro com todos os tipos? Exprima as coberturas alcançadas.
b) Caso a resposta anterior tenha sido negativa, aponte um motivo para não cobertura.
c) Ao tentar cobrir o tabuleiro $4x4$ com tetraminós de diferentes formas (pelo menos dois tipos distintos de tetraminós) obteve êxito? Em caso afirmativo dê dois exemplos de cobertura.

Atividade 3

Para a execução da *atividade 3* é necessário que o professor tenha trabalhado os conceitos de *poliminós* e de *Equações Diofantinas Lineares* que, apesar de não constarem no Currículo do Ensino Básico ou na BNCC, podem ser inseridos já nas séries iniciais do Ensino Fundamental II, tendo como pré-requisitos os conceitos de *mdc* e de *Equações*. Esta atividade, pensada para alunos do Ensino Médio, tem como objetivo explorar o raciocínio lógico e o conhecimento de Equações Diofantinas Lineares. Para a sua execução aconselha-se que os alunos estejam divididos em grupos de 3 a 4 pessoas.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 519),

> para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.

Duração da Atividade 3: 2 tempos de aula de aproximadamente 50 minutos cada.

Habilidades previstas da BNCC:

- (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

Enunciado da Atividade 3. (1º ano do E.M. em diante).

Distribuir para cada grupo de alunos um tabuleiro $6x6$, dez L-triminós e dez T-tetraminós, todos os objetos previamente confeccionados com materiais densos para facilitar o manuseio.

Com as peças em mãos os alunos devem responder às seguintes questões:

a) Qual é a equação que modela o problema das quantidades de L-triminós e T-tetraminós que viabilizariam a cobertura o tabuleiro $6x6$? (lembrando que a quantidade de peças dadas pelo professor é irrelevante neste momento);

b) Resolvendo a equação determinada no item a) é possível garantir que existe cobertura para o tabuleiro $6x6$?

c) Se possível, exibir uma configuração utilizando L-triminós e T-tetraminós que cubra o tabuleiro $6x6$.

Convém observar que a atividade 3 propõe modelar por uma equação as quantidades necessárias de peças para cobrir o tabuleiro $6x6$. Em seguida, se os alunos resolvem a equação encontrada (que corresponde a uma Equação Diofantina), então isto não significa que há solução para o Problema de Cobertura do Tabuleiro $6x6$. Por fim os alunos são estimulados a determinar efetivamente uma cobertura para o tabuleiro utilizando as peças sugeridas. A expectativa que se tem com esta atividade é que os alunos reconheçam que o fato da Equação Diofantina que modela o referido problema apresentar solução não é suficiente para garantir que o Problema da Cobertura proposto seja factível. Esta reflexão deve ser intensamente trabalhada em atividades similares a esta para que fique mais latente que condições necessárias não são, inevitavelmente, condições suficientes.

Atividade 4

Na *atividade 4*, a intenção é estimular o pensamento investigativo dos alunos, desenvolvendo o raciocínio lógico dedutivo, além de mostrá-los a importância em justificar uma afirmação matemática.

Dentre as competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, segundo a BNCC, segue: “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo”. (BRASIL, 2017, p. 267)

Duração da Atividade 4: Sugere-se 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

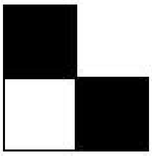
Habilidades previstas na BNCC:

- (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.
- (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Enunciado da Atividade 4. (1° ano E.M.)

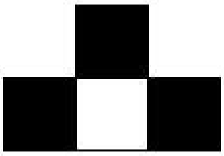
Determinar se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas exibindo uma cobertura como contra-exemplo ou utilizando os conceitos estudados sobre as Equações Diofantinas e Coloração Xadrez. As peças referidas são o L-triminó, o T-tetraminó e o dominó.

Figura 14: L-triminó



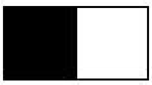
Fonte: A autora, 2021.

Figura 15: T-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 16: Dominó



Fonte: A autora, 2021.

a) É possível cobrir um tabuleiro de dimensões $7x7$com dominós e T-tetraminós. (   )
b) Não é possível cobrir um tabuleiro $6x6$ com dominós, L-triminós e T-tetraminós. (   )
c) É possível cobrir um tabuleiro $10x10$ com dominós e L-triminós. (   )

Atividade 5

A *atividade 5* busca aguçar no aluno o raciocínio lógico-dedutivo, fazendo uso de uma série de conhecimentos matemáticos passando pela Equação Diofantina, critérios de divisibilidade, Algoritmo de Euclides para obtenção de *mdc*, entre outros temas, chegando à análise de sentenças lógicas.

Pretende-se, assim como em atividades desenvolvidas anteriormente, conforme a BNCC, "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo". (BRASIL, 2017, p. 267)

Duração da Atividade 5: 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

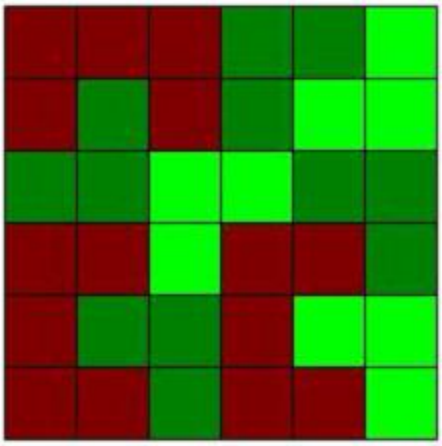
Habilidades prevista na BNCC:

- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Enunciado da Atividade 5 (9° ano E.F.)

Observe a cobertura de um tabuleiro $6x6$, composta apenas por um tipo de pentaminós (peças em grená) e por L-triminós (peças em verde).

Figura 17: Cobertura



Fonte: A autora, 2021.

a) Qual Equação Diofantina modela o Problema de Cobertura de um Tabuleiro $6x6$ utilizando pentaminós e triminós? Exiba, se possível, as soluções naturais para esta equação e confronte-as com a cobertura exibida.

b) É possível que os tipos de poliminós interfiram na viabilidade de cobertura de um tabuleiro. Apresente uma tentativa *frustrada* de cobertura de um tabuleiro de mesma dimensão (tabuleiro $6x6$) por um outro tipo de pentaminó, mas mantendo a peça L-triminó.

c) Com base nas respostas dos itens anteriores e utilizando os seus conhecimentos de lógica, classifique as sentenças em verdadeiras ou falsas:

Afirmação I. Se a cobertura do tabuleiro (Figura 17) foi efetuada com sucesso, então a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ possui solução inteira.

Afirmação II. Se a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ que modela um problema de cobertura de tabuleiro possui solução, então o conjunto de peças dado cobre o tabuleiro.

Atividade 6:

A *atividade 6* tem como característica principal fazer com que o aluno reflita sobre a importância de se justificar suas afirmações, buscando com afinco o melhor método que irá ser aplicado com o intuito de corroborar para o êxito de sua resposta. Para a execução da atividade é necessário utilizar conhecimentos sobre área de quadriláteros, critérios de divisibilidade e algoritmo da divisão.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2017, pág. 272),

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança.

Duração da Atividade 6: 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

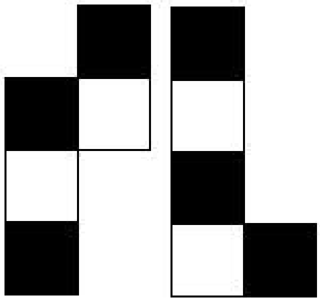
Habilidades previstas na BNCC:

- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Enunciado da Atividade 6. (8º ano E.F)

É possível realizar a cobertura de um tabuleiro $20x20$ com os dois tipos de pentaminós abaixo? Justifique sua resposta.

Figura 18: Pentaminós



Fonte: A autora, 2021.

Atividade 7

Para a *atividade 7* é necessário que o professor já tenha abordado sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. A atividade foi elaborada com o intuito de fazer com que o aluno coloque em prática conhecimentos adquiridos em anos anteriores e conhecimentos recentes, abordando tópicos como área quadriláteros, raciocínio lógico e sistemas de equações.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 273),

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais.

Duração da Atividade 7: 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

Habilidades previstas na BNCC:

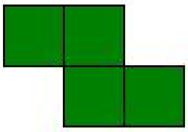
- (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Enunciado da Atividade 7. (8º ano E.F)

Cátia, professora de matemática, enunciou aos alunos o seguinte problema:

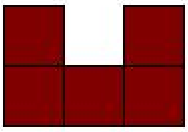
Um artista foi contratado para fazer um mosaico numa parede de dimensão $2x2$metros numa sala. O contratante solicitou que no mosaico tivessem apenas tetraminós e pentaminós, conforme a figura. Vale destacar que cada quadrado que compõe os poliminós possui 10 cm de lado. Utilizando os conceitos de Equações Diofantinas e Coloração Xadrez é possível concluir algo sobre a construção deste mosaico pelo artista? Justifique sua resposta.

Figura 19: Z-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 20: U-pentaminó



Fonte: A autora, 2021.

Atividade 8

O objetivo da *atividade 8* é fornecer as peças e o tabuleiro aos alunos e pedir que façam o experimento de tentar cobrir o tabuleiro com as peças dadas. Em seguida, os alunos são orientados a responder o questionário de modo que percebam a importância da utilização da matemática para que não se perca tempo com tarefas impossíveis.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2017, p. 519),

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar-se ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.

Duração da Atividade 8: 2 tempos de aula de aproximadamente 50 minutos.

Habilidades previstas na BNCC:

- (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

Enunciado da Atividade 8. (1º ano E.M)

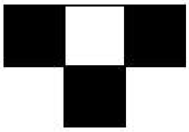
1ª etapa: Separar os alunos em trios.

2ª etapa: Distribuir aos alunos um tabuleiro 7x7, além de entregar-lhes dominós, T-tetraminós e hexaminós, conforme as figuras abaixo. Peça para que os alunos tentem cobrir o tabuleiro, não esquecendo que os três tipos de peça precisam estar na configuração da cobertura.

Figura 21: Dominó

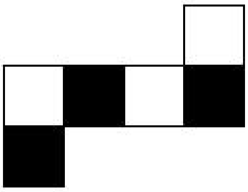
Fonte: A autora, 2021.

Figura 22: T-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 23: Z-hexaminó



Fonte: A autora, 2021.

Após esse período de experimentação, com pelo menos três tentativas de cobertura, os alunos devem anotar quantas peças de poliminós foram utilizadas em cada tentativa, tabelando a quantidade utilizada, e anotando a quantidade de casas do tabuleiro 7x7 que ficaram descobertas. Posteriormente o grupo deverá expor aos colegas suas conclusões sobre o porquê de não conseguir cobrir completamente o tabuleiro.

TABELA 9 – Anotação das tentativas

	Dominó	Quadriminó	Hexaminó	Total de peças	Espaços vazios
Tentativa 1					
Tentativa 2					
Tentativa 3					

Fonte: A autora, 2021.

Atividade 9

A *atividade 9* requer do aluno raciocínio lógico para determinar o recurso matemático que prove a afirmação realizada na situação problema. É uma atividade para alunos do sétimo ano em diante, podendo lançar mão de conhecimentos mais básicos como área de quadriláteros e divisão euclidiana, porém também é possível trazer a resolução do problema para as Equações Diofantinas.

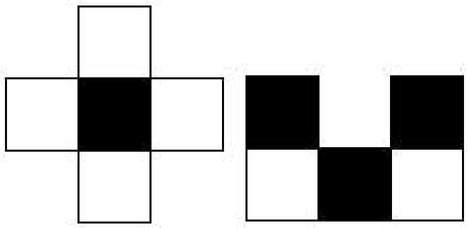
Habilidades previstas na BNCC:

- (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
- (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas

Atividade 9 (7º ano E.F)

A professora de João o desafiou a cobrir um tabuleiro $8x8$ com as peças listadas abaixo. Ela afirmou que existe cobertura.

Figura 24: Pentaminós



Fonte: A Autora, 2021.

Porém, após refletir bastante, João descobriu que a professora estava errada.

Como João pode demonstrar que a professora errou na afirmação?

Atividade 10

A proposta da *atividade 10* é fazer com que os alunos coloquem em prática os conhecimentos adquiridos sobre a condição de existência e solução de uma Equação Diofantina, além de utilizar a Coloração Xadrez para se poder afirmar se não é possível cobrir um tabuleiro com as peças dadas, enfatizando que é necessário atentar para os detalhes com o intuito de evitar erros.

Para a execução desta atividade é necessário que o professor regente já tenha introduzido o assunto de Equações Diofantinas e Coloração Xadrez, relembrando matérias do Ensino Fundamental extremamente importantes para a consolidação da aprendizagem, tais como sistemas de equações, algoritmo da divisão, Algoritmo de Euclides, entre outros.

Duração da Atividade 10: Sugere-se 1 tempo de aula de aproximadamente 50 minutos.

Habilidades previstas na BNCC:

- (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

Atividade 10 (1º ano E.M.)

Numa aula foi apresentado o seguinte problema:

É possível afirmar, com o uso da Equação Diofantina e Coloração Xadrez, que existe ou não cobertura para um tabuleiro $8x8$ por poliminós do tipo dominó e L-triminó?

O aluno Heitor, muito inteligente, rapidamente se pôs a fazer o problema.

Assim, considerou que x representa a quantidade de dominós e y representa a quantidade de L-triminós para cobrir o tabuleiro $8x8$. Modelando o problema obteve a seguinte Equação Diofantina: $2x + 3y = 64$.

Verificou, então, que o $mdc(2,3) = 1$, e que $1|64$. Porém, lembrou que existindo solução para a equação, nada se pode afirmar sobre a cobertura.

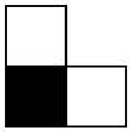
Após essa tentativa frustrada, recorreu à Coloração Xadrez.

Heitor coloriu as peças da seguinte maneira:

Figura 25: Dominó

Fonte: A autora, 2021.

Figura 26: L-triminó



Fonte: A autora, 2021.

Antes de montar o sistema, seguindo a mesma nomenclatura utilizada para a Equação Diofantina, verificou que como o tabuleiro é quadrado com 64 quadradinhos, a quantidade de quadradinhos brancos e pretos era igual a 32, isto é, o tabuleiro teria 32 casas pretas e 32 casas brancas. Desta forma, montou o sistema a seguir:

Equação I(quantidade de quadradinhos brancos): $x + 2y = 32$.

Equação II(quantidade de quadradinhos pretos): $x + y = 32$.

Fazendo $I - II$: $y = 0$

Heitor concluiu que como y é igual a zero, a única possibilidade de cobertura seria se não utilizasse L-triminós, o que contraria o que pede o problema, pois as duas peças deveriam ser utilizadas. Afirmando que não há cobertura para o tabuleiro $8x8$.

Infelizmente Heitor errou em sua afirmação. Aponte o erro e corrija-o.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A exploração didática de coberturas do plano de xadrez, exposta neste trabalho, proporcionou o desenvolvimento de atividades lúdicas que podem colaborar para a evolução do indivíduo na sociedade.

Foi possível perceber que conceitos teóricos podem ser mais facilmente introduzidos e manipulados a partir de problemas práticos. Buscando proporcionar aos alunos o estudo da Matemática mais atrativo e prazeroso.

Apesar desta pesquisa não ter sido aplicada com alunos, implicando na não obtenção de resultados quantitativos de rendimentos, estima-se que ocorram resultados qualitativos significativos. Isto se deve ao fato de a revisão de tópicos da disciplina de Matemática ser utilizada a partir dos modelos desenvolvidos, assim como a teoria proposta ter se adequado às atividades escolhidas para compor este trabalho.

Sugere-se que os métodos aplicados possam ser avaliados dentro do ambiente da sala de aula, confrontando a evolução dos resultados das resoluções das Equações Diofantinas a partir da aplicação do método proposto em comparação com conhecimentos apenas teóricos.

A perspectiva de trabalhos futuros pode ser a introdução de outros tipos de Coloração para auxiliar no Problema da Cobertura de Tabuleiros, além do uso generalizado das Equações Diofantinas Lineares para coberturas a partir de um número maior de tipos de poliminós.

A partir do que foi exposto até este momento, acredita-se que a cobertura de tabuleiros tem grande importância para a matemática por tudo o que pode ser explorado e inferido a partir dela. Futuramente prevê-se também a construção de um aplicativo no formato de um jogo em que nele é viável experimentar de maneira lúdica as possibilidades de cobrimento de uma gama de tabuleiros a partir de um conjunto de poliminós pré-determinados.

Vale ressaltar que existem inúmeros jogos que fazem uso de poliminós e cobertura de tabuleiros como, por exemplo, o Tetris, jogo mundialmente conhecido. Porém, nesses jogos não há a devida atenção sobre os motivos de conseguir ou não determinada cobertura, além de usar poliminós de formatos aleatórios, excluindo a chance de se estabelecer um padrão.

Assim, surgiu a ideia de criar um aplicativo que trabalhasse com a cobertura de tabuleiros por poliminós e que tivesse o recurso de mostrar conceitos Matemáticos embutidos na perspectiva de cobertura.

A seguir é apresentado um croqui de como o jogo funcionaria.

Dados do aplicativo: o aplicativo consiste em um jogo que busca a cobertura de tabuleiros por poliminós que contará apenas com tabuleiros quadrados, com até, no máximo, 64 casas.

1) Para iniciar o jogo a pessoa deverá escolher duas peças entre monominó, dominó, triminó, tetraminó e pentaminó;
2) As duas peças escolhidas precisam ser usadas, ou seja, não é válida a cobertura total do tabuleiro apenas por uma peça;
3) Escolhendo as peças triminó, tetraminó ou pentaminó, deverá ser escolhido também o tipo de triminó, tipo de tetraminó e tipo de pentaminó (teremos pelo menos dois tipos de cada);
4) Após a escolha do tabuleiro e peças, o usuário deverá preencher o tabuleiro, podendo girar as peças conforme a necessidade e as peças serão arrastadas para a posição escolhida no tabuleiro;
5) O usuário terá o tempo de 10 minutos para conseguir preencher o tabuleiro e também três chances para conseguir fazê-lo;
6) Caso não tenha conseguido encontrar a solução, o usuário terá a opção de pedir a solução. Neste momento o aplicativo apresenta uma solução (podendo também mostrar a base matemática para tal solução) ou uma justificativa matemática para que não seja possível a cobertura.

Em suma, o tema abordado neste trabalho é muito amplo e profícuo, permitindo diversas formas de abordagens. É oportuno destacar que nunca foi pretensão deste trabalho encerrar o assunto ou explorar todo o potencial didático do tema. O objetivo é contribuir para o desenvolvimento da didática relacionado ao Problema de Cobertura de Tabuleiro de Dimensão n.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vera Lia M. Criscuolo de; GUIMARÃES, Diego Dias Machado; SOUSA BESERRA, Vagner de. **Pentaminós como uma ferramenta didática**. São Paulo: UNESP, 2005. Disponível em: <https://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/capitulo%2010/pentaminos.pdf>. Acesso em 15 set. 2020

ANJOS, Antonieu Abreu dos. **Equações diofantinas:** Sequência Didática e o método da descida infinita de fermat. 2015. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) - Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, Ceará, 2015.

BARBOSA FILHO, José Armando. **Como cobrir tabuleiros**. OBM, 2012.

BRASIL**.** Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Brasília: MEC/CNE, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>. Acesso em: 15 jan. 2021.

BRASIL**. Relatório Nacional PISA 2012:** Resultados brasileiros. São Paulo: Fundação Santillana, 2012. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2021.

CORCHO, Adán J.; OLIVEIRA, Krerley. **Iniciação à Matemática**. Unidade II: Capítulos III e IV. PROFMAT, 2010. Disponível em: <http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA21/OLD/unidade2.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2021.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

HEFEZ, Abramo. **Curso de álgebra volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

HEFEZ, Abramo. **Elementos da Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

HEXAMINÓS. **Blogmatematic**. Disponível em: <http://blogmatematic.blogspot.com/2011/09/hexaminos.html>. Acesso em: 15 jan. 2021.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Ricardo Vieira. **Equações Diofantinas**, 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Coordenadoria de Matemática, Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2017.

LOPES, Davi. **Bézout e Outros Bizus**. Olimpíada Brasileira de Matemática - 18ª Semana Olímpica, São José do Rio Preto, São Paulo, 2015. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/bezout_e_outros_bizus.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2020.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S.; ROCHA, Luciana Parente; VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. A investigação matemática como estratégia de ensino e Aprendizagem da matemática. **ENEM**: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2020

PONTE, João Pedro da. **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** Lisboa/Portugal: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

SANTOS, Newton Luís. **Poliminós e seu curioso universo**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SAVÓIS, Josias Neubert. **Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais.** 2014. 95 f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2014.

SILVA, Luis Henrique Pereira da. **Uma aplicação da congruência na determinação de critérios de divisibilidade**, 2015. 52 f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) - Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2015.

SILVA NETO, Altino da. **Convite às Equações Diofantinas**: Uma abordagem para a educação básica. Boa Vista, 2016. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) – Universidade Federal de Roraima, Roraima, 2016.

SOPPELSA, Janete Jacinta Carrer. Divisão Euclidiana: um olhar para o resto. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EBRAPEM), 20., 2016, Curitiba/PR. **Anais** [...].Curitiba/PR: Universidade Federal do Rio Grade do Sul, 2016. p. 4. Disponível em: <http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_Janete_Soppelsa.pdf >. Acesso em: 12 jun. 2020.

APÊNDICE A – SUGESTÕES DE SOLUÇÕES

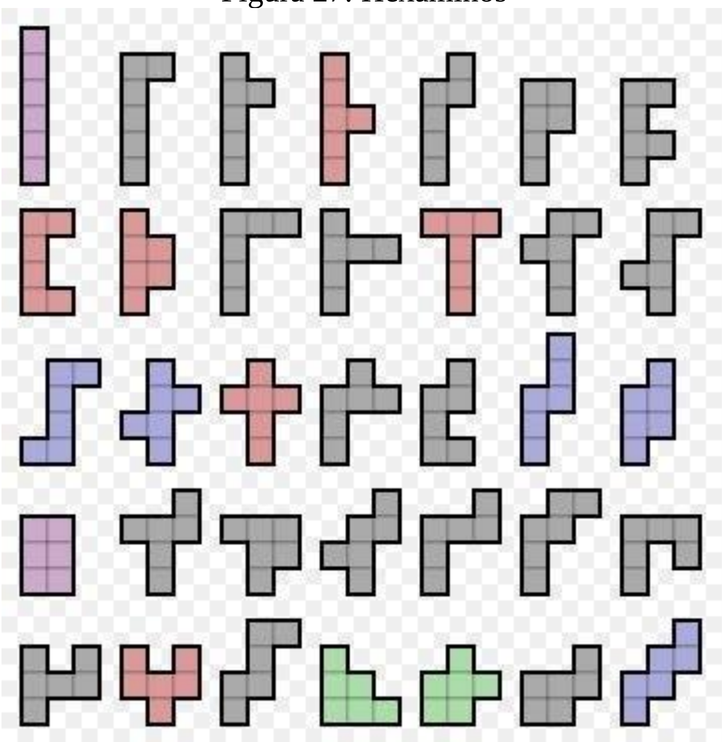
A seguir propusemos sugestões de soluções para as Atividades propostas no Capítulo 4.

Enunciado da Atividade 1. (6° ano E.F em diante).

Poliminós são figuras geométricas planas formadas por quadrados de mesmo lado, interligados de forma que pelo menos uma aresta de cada quadrado coincida com uma aresta de outro quadrado. Sabendo que um hexaminó é um poliminó composto por 6 quadrados unitários, prepare uma tabela contendo 10 hexaminós distintos.

Sugestão de solução (atividade 2). Atividade é criativa, sendo de livre execução, portanto exibimos, a menos de um movimento rígido, todos os 35 hexaminós existentes (Figura XX).

Figura 27: Hexaminós



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/28058608

Enunciado da Atividade 2. (6° ano E.F. em diante).

1ª etapa. Confeccionar um tabuleiro $4x4$ e as peças tetraminós (4 peças de cada tipo de tetraminó);

2ª etapa. Disponibilizar algum tempo para que os alunos experimentem cobrir o tabuleiro, testando as mais variadas formas possíveis de cobri-lo. Orientando que usem, a priori, um mesmo formato de tetraminó e, em seguida, combinem tetraminós diferentes;

3º etapa. Preencher o questionário:

a) Utilizando as quatro peças de um único tipo de tetraminó por vez foi possível cobrir o tabuleiro com todos os tipos? Exprima as coberturas alcançadas.

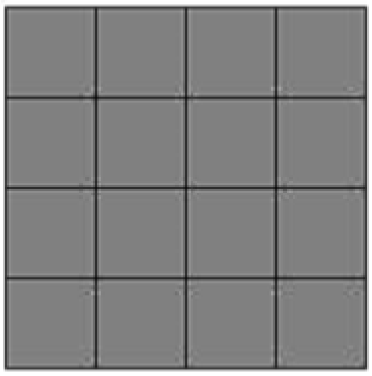
b) Caso a resposta anterior tenha sido negativa, aponte um motivo para não cobertura.

c) Ao tentar cobrir o tabuleiro $4x4$ com tetraminós de diferentes formas (pelo menos dois tipos distintos de tetraminós) obteve êxito? Em caso afirmativo dê dois exemplos de cobertura.

Sugestão de solução (atividade 2).

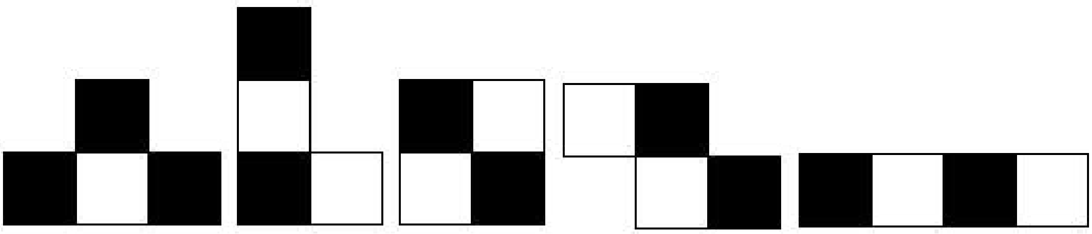
A primeira etapa consiste em produzir o tabuleiro e os tetraminós que serão utilizados para preenchê-lo. Nas Figuras 28 e 29 apresentamos um exemplo de tabuleiro $4x4$ e os tipos de tetraminós que deverão ser fisicamente confeccionados. Destacamos que serão necessárias 4 peças de cada tipo de tetraminó. É possível, neste momento, enfatizar o que são as linhas e as colunas do tabuleiro, e revisitar as propriedades dos quadrados, como por exemplo o conceito de área.

Figura 28: Tabuleiro $4x4$



Fonte: A autora, 2021.

Figura 29: Tetraminós



Fonte: A autora, 2021.

Na segunda etapa, os alunos devem ser incentivados a experimentar as inúmeras maneiras possíveis de cobertura do tabuleiro $4x4$.

A terceira etapa é a consolidação e formalização do que foi explorado na etapa anterior. Neste momento os alunos responderão o questionário proposto. As respostas sugeridas são as seguintes:

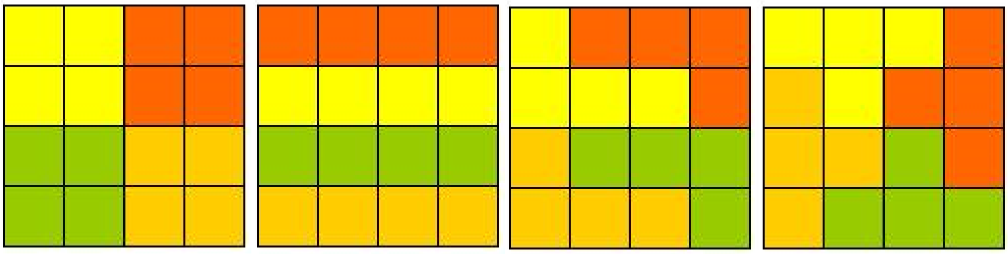
a) Foi possível cobrir um tabuleiro 4x4 com peças tetraminós?

Sim, foi possível cobrir o tabuleiro.

b) Disserte sobre o porquê de ter sido possível cobrir o tabuleiro com tetraminós;

Como um tabuleiro 4x4 possui área 16 e um tetraminó possui área 4, segue que observando as áreas existe a possibilidade de cobertura, tendo em vista que 16 é múltiplo de 4. Porém, vale ressaltar que nem todos os tipos de tetraminós cobriram o tabuleiro, pois é necessário atentar para o formato do tetraminó. Abaixo, exibimos as coberturas viáveis.

Figura 30: Cobertura de tabuleiros

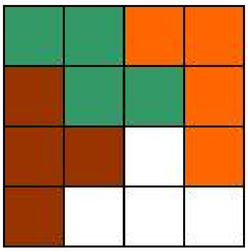


Fonte: A autora, 2021.

c) Ao tentar cobrir o tabuleiro 4x4 com tetraminós de diferentes formas (pelo menos dois tipos distintos de tetraminós) obteve êxito? Aponte um fator impeditivo, caso isto tenha ocorrido.

Algumas combinações de dois ou mais tipos distintos de tetraminós não foram possíveis devido ao formato da peça. Abaixo, veja uma cobertura do tabuleiro 4x4 por tetraminós de três formatos distintos.

Figura 31: Cobertura 3 tetraminós



Fonte: A autora, 2021.

Enunciado da Atividade 3. (1º ano do E.M. em diante).

Distribuir para cada grupo de alunos um tabuleiro $6x6$, dez L-triminós e dez T-tetraminós, todos os objetos previamente confeccionados com materiais densos para facilitar o manuseio.

Com as peças em mãos os alunos devem responder às seguintes questões:

a) Qual é a equação que modela o problema das quantidades de L-triminós e T-tetraminós que viabilizariam a cobertura o tabuleiro $6x6$? (lembrando que a quantidade de peças dadas pelo professor é irrelevante neste momento);

b) Resolvendo a equação determinada no item a) é possível garantir que existe cobertura para o tabuleiro $6x6$?

c) Se possível, exibir uma configuração utilizando L-triminós e T-tetraminós que cubra o tabuleiro $6x6$.

Sugestão de solução (atividade 3).

a) Qual é a equação que modela o problema das quantidades de L-triminós e T-tetraminós que viabilizariam a cobertura o tabuleiro $6x6$? (lembrando que a quantidade de peças dadas pelo professor é irrelevante neste momento);

Neste primeiro item, o objetivo é que os alunos exprimam seus conhecimentos matemáticos, percebendo que a questão pode ser modelada em uma Equação Diofantina Linear. Sendo x a quantidade de L-triminós e y a quantidade de T-tetraminós, obtém-se:

$$3x + 4y = 36.$$

b) Resolvendo a equação determinada no item a) é possível garantir que existe cobertura para o tabuleiro $6x6$?

Para que se possa responder este item o estudante deverá saber se a Equação Diofantina $3x + 4y = 36$ possui solução inteira, ou seja, é necessário que calcule o $mdc(3,4)$. Utilizando o método do Algoritmo de Euclides, tem-se:

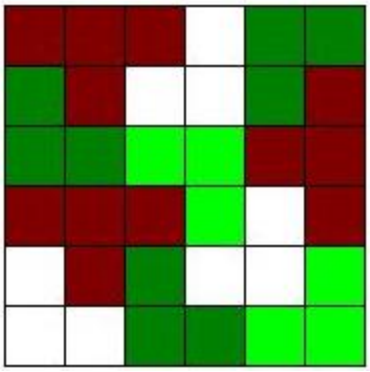
	1	3
4	3	1
1	0	

O $mdc(3,4) = 1$ e $1|36$, logo, a Equação Diofantina $3x + 4y = 36$ possui solução inteira. Com essa informação nada pode ser concluído sobre a cobertura.

c) Se possível, exibir uma configuração utilizando L-triminós e T-tetraminós que cubra o tabuleiro $6x6$.

Abaixo é apresentada uma forma de cobertura do tabuleiro $6x6$.

Figura 32:Cobertura tetraminós e triminós

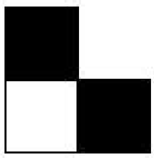


Fonte: A autora, 2021.

Enunciado da Atividade 4. (1° ano E.M.)

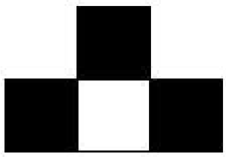
Determinar se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas exibindo uma cobertura como contra exemplo ou utilizando os conceitos estudados sobre as Equações Diofantinas e Coloração Xadrez. As peças referidas são o L-triminó, o T-tetraminó e o dominó.

Figura 33: L-triminó



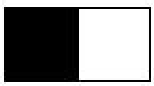
Fonte: A autora, 2021.

Figura 34: T-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 35: Dominó



Fonte: A autora, 2021.

a. É possível cobrir um tabuleiro de dimensões $7x7$com dominós e T-tetraminós. ( )
b. Não é possível cobrir um tabuleiro $6x6$ com dominós, L-triminós e T-tetraminós. ( )
c. É possível cobrir um tabuleiro $10x10$ com dominós e L-triminós. ( )

Sugestão de solução (atividade 4).

Letra a, falsa.

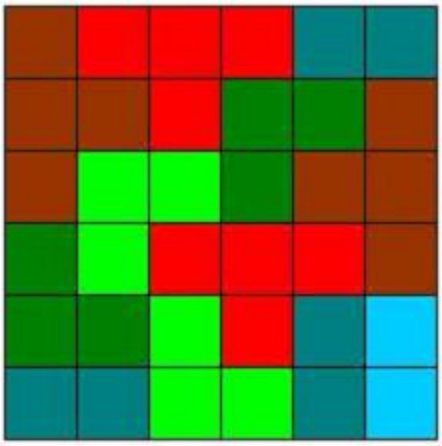
Na letra a, se o estudante montar a Equação Diofantina, poderá avaliar se ela possui solução. Chamando de x a quantidade de dominós e y a quantidade de T-tetraminós utilizados para cobrir o tabuleiro, temos que: $2x + 4y = 49$.

Para saber se a Equação Diofantina possui solução, devemos determinar o *mdc* entre os coeficientes, logo $mdc(4,2) = 2$. Porém, 2 não é divisor de 49, portanto não existe solução inteira e, consequentemente, não é possível cobrir o tabuleiro. Observe que aqui usa-se a ideia da equivalência entre uma proposição de entrada e sua contrapositiva, como discutido no Exemplo 3 do Capítulo 2.

Letra b, falsa.

A Equação Diofantina $2x + 3y + 4z = 36$ modela o problema proposto, no entanto o $mdc(2,3,4) = 1$ e 1 divide 36. Portanto, a Equação Diofantina $2x + 3y + 4z = 36$ possui solução, porém não é possível tirar nenhuma conclusão sobre a viabilidade ou não da referida cobertura para o tabuleiro $6x6$. Desta maneira, resta-nos utilizar o que estudamos sobre Coloração Xadrez ou tentar exibir um contra exemplo para afirmação. Segue o contra exemplo, isto é, uma cobertura para o tabuleiro contendo dominós, L-triminós e T-tetraminós.

Figura 36: Cobertura $6x6$



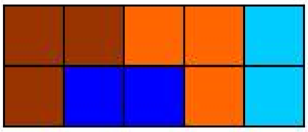
Fonte: A autora, 2021.

Repare que utilizamos 4 T-tetraminós, 4 L-triminós e 4 dominós.

Letra c, verdadeira.

O estudante poderá confirmar que a afirmação é verdadeira combinando os dominós e os L-triminós da seguinte maneira:

Figura 37: Cobertura $2x5$



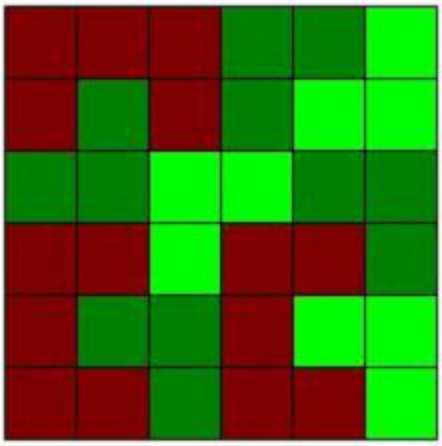
Fonte: A autora, 2021.

Observe que o retângulo dimensão $2x5$ acima tem em suas dimensões divisores de 10. Assim, replicando o tabuleiro é possível cobrir completamente o tabuleiro$10x10$, o que prova que a cobertura é viável.

Enunciado da Atividade 5 (9° ano E.F.)

Observe a cobertura de um tabuleiro $6x6$, composta apenas por um tipo de pentaminós (peças em grená) e por L-triminós (peças em verde).

Figura 38: Cobertura $6x6$ (U-pentaminós e L-triminós)



Fonte: A autora, 2021.

a) Qual Equação Diofantina modela o Problema de Cobertura de um Tabuleiro $6x6$ utilizando pentaminós e triminós? Exiba, se possível, as soluções naturais para esta equação e confronte-as com a cobertura exibida.

b) É possível que os tipos de poliminós interfiram na viabilidade de cobertura de um tabuleiro. Apresente uma tentativa *frustrada* de cobertura de um tabuleiro de mesma dimensão (tabuleiro $6x6$) por um outro tipo de pentaminó, mas mantendo a peça L-triminó.

c) Com base nas respostas dos itens anteriores e utilizando os seus conhecimentos de lógica, classifique as sentenças em verdadeiras ou falsas:

Afirmação I. Se a cobertura do tabuleiro (Figura 38) foi efetuada com sucesso, então a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ possui solução inteira.

Afirmação II. Se a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ que modela um problema de cobertura de tabuleiro possui solução, então o conjunto de peças dado cobre o tabuleiro.

Sugestão de solução (atividade 5).

a) Qual Equação Diofantina modela o Problema de Cobertura de um Tabuleiro $6x6$ utilizando pentaminós e triminós? Exiba, se possível, as soluções naturais para esta equação e confronte-as com a cobertura exibida.

Será chamada de x a quantidade de triminós e será chamada de y a quantidade de pentaminós. Modelando o problema é encontrada a Equação Diofantina: $3x + 5y = 36$.

Para se determinar os valores naturais que satisfazem a Equação Diofantina, utiliza-se o método menos rebuscado, lançando mão dos Critérios de Divisibilidade, já que $3|36$. Partindo da informação descoberta anteriormente, será confeccionada a tabela abaixo:

TABELA 10 – Valores que satisfazem a equação

x	y
12	0
7	3
2	6

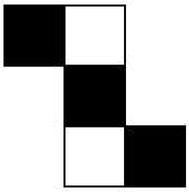
Fonte: A autora, 2021.

Veja que no tabuleiro apresentado acima, sua configuração foi exatamente de 7 L-triminós e 3 U-pentaminós.

b) É possível que os tipos de poliminós interfiram na viabilidade de cobertura de um tabuleiro. Apresente uma tentativa *frustrada* de cobertura de um tabuleiro de mesma dimensão (tabuleiro $6x6$) por um outro tipo de pentaminó, mas mantendo a peça L-triminó.

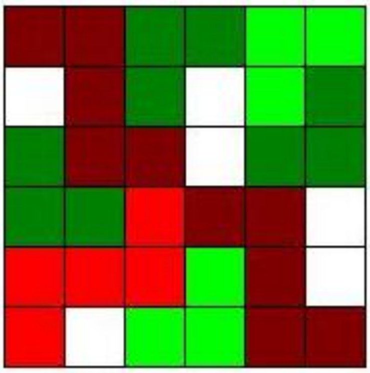
Utilizando o pentaminó abaixo (Figura39), verifica-se que é impossível efetuar a cobertura do tabuleiro (Figura 40)

Figura 39: Z-pentaminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 40: Cobertura frustrada



Fonte: A autora, 2021.

Observe que na figura 40, as lacunas no tabuleiro estão em branco. A tentativa de organizar de diversas maneiras para cobrir complemente o tabuleiro $6x6$ foi frustrada, devido a configuração da peça pentaminó.

c) Com base nas respostas dos itens anteriores e utilizando os seus conhecimentos de lógica, classifique as sentenças em verdadeiras ou falsas:

Afirmação I. Se a cobertura do tabuleiro, Figura 40, foi efetuada com sucesso, então a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ possui solução inteira. (verdade)

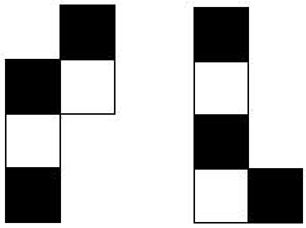
Afirmação II. Se a Equação Diofantina $3x + 5y = 36$ que modela um problema de cobertura de tabuleiro possui solução, então o conjunto de peças dado cobre o tabuleiro. (falso)

Sobre a segunda afirmação, uma prova de que nem sempre a Equação Diofantina que possui solução afirma a cobertura de um tabuleiro é vista na Letra B, quando se modifica o formato da peça e a cobertura torna-se inviável.

Enunciado da Atividade 6. (8º ano E.F)

É possível realizar a cobertura de um tabuleiro $20x20$ com os dois tipos de pentaminós abaixo? Justifique sua resposta.

Figura 41: Pentaminós



Fonte: A autora, 2021.

Sugestão de solução (atividade 6).

Neste tipo de questão, onde as duas peças têm a mesma área, o primeiro passo a ser dado é, através do algoritmo da divisão, conferir se a divisão da área do tabuleiro pela área da peça possui o resto diferente de zero. Veja que se, ao se efetuar a divisão, não obter o resto zero, já será comprovado que não existe a possibilidade de cobertura, isto porque não poderíamos secionar uma peça para cobrir o tabuleiro.

Assim, o tabuleiro tem dimensões $20x20$, portanto, sua área é 400. Como as peças têm área 5, efetuando a seguinte divisão, tem-se:

$$\frac{400}{5} = 80$$

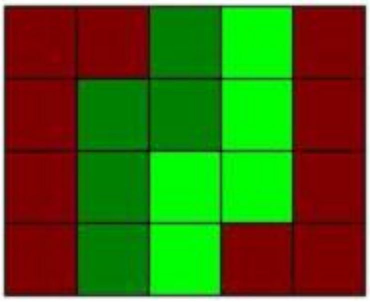
Como a divisão é exata, nada se pode concluir sobre a cobertura.

Perceba que o raciocínio utilizado acima é basicamente o aplicável à Equação Diofantina quando os coeficientes são iguais. Pois, ao se modelar o problema, obtém-se a seguinte equação:

$5x + 5y = 400$, $\text{mdc}(5{,}5) = 5$. Como $5|400$, a Equação Diofantina possui solução, sendo assim, não admite nenhuma afirmação sobre a cobertura.

Resta, então, tentar agrupar as peças com o objetivo de encontrar um retângulo que seja replicado a ponto de cobrir totalmente o tabuleiro $20x20$. Assim, sugere-se a configuração a seguir:

Figura 42: Cobertura $4x5$ (pentaminós)



Fonte: A autora, 2021.

Veja que ao se encaixar as peças surgiu a cobertura de um tabuleiro $4x5$, e, como $4|20$ e $5|20$ é possível cobrir um tabuleiro $20x20$ com as peças dadas.

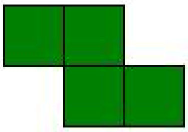
Enunciado da Atividade 7. (8º ano E.F)

Cátia, professora de matemática, enunciou aos alunos o seguinte problema:

Um artista foi contratado para fazer um mosaico numa parede de dimensão $2x2$metros numa sala. O contratante solicitou que no mosaico tivessem apenas tetraminós e pentaminós, conforme a figura. Vale destacar que cada quadrado que compõe os poliminós possui 10 cm de lado.

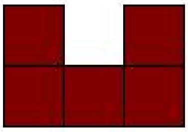
Utilizando os conceitos de Equações Diofantinas e Coloração Xadrez é possível concluir algo sobre a construção deste mosaico pelo artista? Justifique sua resposta.

Figura 43: Z-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 44: U-pentaminó



Fonte: A autora, 2021.

Sugestão de solução (atividade 7).

O primeiro passo é atentar para a questão de as unidades de medidas estarem diferentes e estabelecer a unidade que será trabalhada. Assim, escolhendo o centímetro como unidade de medida, deve-se converter as dimensões do tabuleiro em centímetros, obtém-se que $2m = 200cm$, logo, a área do tabuleiro será $200cm.200cm = 40000cm^2$. A área de cada quadradinho que compõe as peças poderá ser calculada automaticamente, pois já está na unidade de medida desejada, desta forma, teremos $10cm.10cm = 100cm^2$.

Após as devidas conversões, para esta atividade, sugerimos o uso da Coloração Xadrez.

Para fazer o uso correto da Coloração Xadrez, dividindo a parede (tabuleiro) em quadradinhos de área $100cm^2$, é possível ver que a parede terá 400 quadradinhos, pois $\frac{40000}{100} = 400$.

Utilizando o estudo das Equações Diofantinas, sendo x o número de peças Z-tetraminó e y o número de peças U-pentaminó, o problema pode ser modelado da seguinte maneira:

$$4x + 5y = 400$$

Neste momento é necessário saber se a Equação Diofantina possui solução. Para isso, deve-se fazer o $mdc(4{,}5)$, observe

	1	4
5	4	1
1	0	

Como o $mdc(4{,}5) = 1$ e $1|400$, então a Equação Diofantina possui solução, sendo assim, nada se pode afirmar sobre a cobertura.

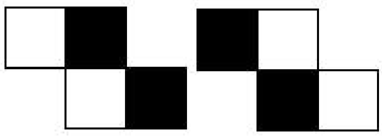
Já que o uso da Equação Diofantina não resultou em nenhuma afirmação, será realizado o estudo da Coloração Xadrez.

A partida é analisar que o tabuleiro é nxn, com n par, assim o número de quadradinhos brancos e pretos será igual. A partir do que foi calculado anteriormente, constata-se que são 200 quadradinhos de cada cor.

Agora, neste momento, é necessário pintar as peças com a coloração xadrez.

A Coloração Xadrez dos Z-tetraminós será:

Figura 45: Z-tetraminó (colorações)

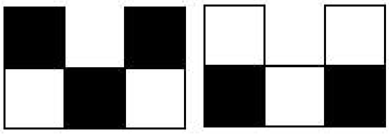


Fonte: A autora, 2021.

Observe que, mesmo variando a forma de colorir, a quantidade de quadradinhos brancos e pretos é a mesma.

A coloração xadrez dos U-pentaminós será:

Figura 46: U-pentaminó (colorações)



Fonte: A autora, 2021.

Os pentaminós apresentam uma diferença na quantidade de quadradinhos, conforme a forma de coloração.

Considerando as peças pintadas com a coloração acima (Figura 45), perceba que no tetraminó o número de quadradinhos brancos e pretos é dois, e no pentaminó (Figura 46) temos dois tipos, um com três quadradinhos pretos e dois brancos e outro com dois quadradinhos pretos e três brancos.

Sejam, x a quantidade de tetraminós, y a quantidade de pentaminós com mais quadradinhos pretos e z a quantidade de pentaminós com mais quadradinhos brancos. Note que não será feita distinção sobre os tetraminós porque a quantidade de quadradinhos pretos e brancos é igual a 2.

Relacionando a quantidade de quadradinhos brancos nas peças ao seu somatório no tabuleiro, temos:

$2x + 2y + 3z = 200$ (I)

Repetindo o procedimento para as pretas, temos:

$2x + 3y + 2z = 200.$ (II)

Assim, $I - II$:

$$-y + z = 0$$

Logo, $z = y$. Substituindo em I:

$$2x + 2y + 3y = 200$$

$$2x + 5y = 200$$

Após a substituição surge uma nova Equação Diofantina que possui solução, assim nada se pode afirmar utilizando a Coloração Xadrez.

Veja que foram utilizados os estudos das Equações Diofantinas e Coloração Xadrez, porém com essas ferramentas não é possível extrair qualquer conclusão sobre a possibilidade ou não da construção do mosaico na parede por peças Z-tetraminó e U-pentaminó. Todavia é importante enfatizar que através das Equações Diofantinas é possível conhecer a quantidade de cada peça candidata a realizar a cobertura.

Assim, esta questão fomenta a necessidade de buscar conceitos e conteúdos, tais como outros tipos de colorações, que vão alicerçar e aprofundar o estudo sobre a cobertura de tabuleiros.

Enunciado da Atividade 8. (1º ano E.M)

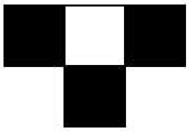
1ª etapa: Separar os alunos em trios.

2ª etapa: Distribuir aos alunos um tabuleiro 7x7, além de entregar-lhes dominós, T-tetraminós e hexaminós, conforme as figuras abaixo. Peça para que os alunos tentem cobrir o tabuleiro, não esquecendo que os três tipos de peça precisam estar na configuração da cobertura.

Figura 47: Dominó

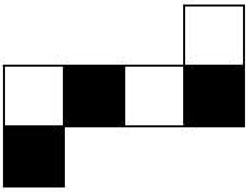
Fonte: A autora, 2021.

Figura 48: T-tetraminó



Fonte: A autora, 2021.

Figura 49: Z-hexaminó



Fonte: A autora, 2021.

Após esse período de experimentação, com pelo menos três tentativas de cobertura, os alunos devem anotar quantas peças de poliminós foram utilizadas em cada tentativa, anotando a quantidade utilizada na Tabela 9, e anotando a quantidade de casas do tabuleiro 7x7 que ficaram descobertas. Posteriormente o grupo deverá expor aos colegas suas conclusões sobre o porquê de não conseguir cobrir completamente o tabuleiro.

TABELA 9 – Anotação das tentativas

	Dominó	Quadriminó	Hexaminó	Total de peças	Espaços vazios
Tentativa 1					
Tentativa 2					
Tentativa 3					

Fonte: A autora, 2021.

Sugestão de solução (atividade 8).

Decorrido esse período de tentativa e erro, o professor deverá mostrar aos alunos que, através da matemática, utilizando o conhecimento sobre Equações Diofantinas, era possível perceber que a cobertura não seria viável. Pois, modelando o problema tem-se:

$2x + 4y + 6z = 49$, onde x, y e z são a quantidade de peças dominó, tetraminó e hexaminó, respectivamente.

O estudo de Equações Diofantinas em prol do Problema de Cobertura de Tabuleiros nos garante a não possibilidade de cobertura, isto porque a não existência de solução da Equação Diofantina implica em não ser possível obter tal cobrimento.

Os alunos deveriam, após modelar a Equação Diofantina, saber se essa equação tem solução, ou seja, determinar o *mdc* entre os coeficientes (2,4,6) e, em seguida, verificar se esse valor divide o total de casas.

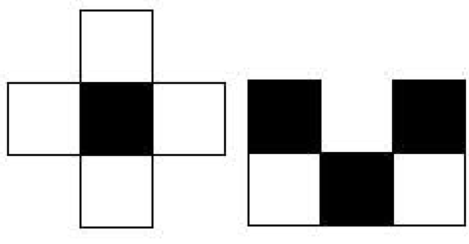
Resolvendo, verificaria que $mdc(2,4,6) = 2$, e que $2 \nmid 49$.

A conclusão desta atividade deve levar o aluno ao entendimento de que o emprego da Matemática é importantíssimo para diminuir esforços desnecessários.

Atividade 9 (7º ano E.F)

A professora de João o desafiou a cobrir um tabuleiro $8x8$ com as peças listadas abaixo. Ela afirmou que existe cobertura.

Figura 50: Pentaminós



Fonte: A autora, 2021.

Porém, após refletir bastante, João descobriu que a professora estava errada.

Como João pode demonstrar que a professora errou na afirmação?

Sugestão de solução (atividade 9).

Observe que as peças são pentaminós e que o tabuleiro tem dimensão 8x8 . Calculando a área do pentaminó, cada quadrado unitário possui área 1un, portanto a área do pentaminó é

5un. Utilizando o mesmo raciocínio, sabendo que o tabuleiro é um quadrado, sua área é dada por $A = l^2$, assim constata-se que o tabuleiro possui área igual a 64un.

Dividindo a área do tabuleiro pela área das peças, tem-se:

$$\frac{64}{5} = 12{,}8$$

Ao dividir a área do tabuleiro pela área das peças não obtemos um número inteiro, portanto não é possível cobrir o tabuleiro com as peças dadas.

Outra forma de resolver a questão seria modelar o problema como Equação Diofantina, veja que chamando de x o pentaminó em formato de cruz e y o pentaminó em formato de U, chega-se a seguinte equação:

$5x + 5y = 64$, calculando $mdc(5{,}5) = 5$, como $5 \nmid 64$, logo a Equação Diofantina não possui solução e, consequentemente, não é possível cobrir o tabuleiro com as peças dadas.

Atividade 10 (1º ano E.M.)

Numa aula foi apresentado o seguinte problema:

É possível afirmar, com o uso da Equação Diofantina e Coloração Xadrez, que existe ou não cobertura para um tabuleiro $8x8$ por poliminós do tipo dominó e L-triminó?

O aluno Heitor, muito inteligente, rapidamente se pôs a fazer o problema.

Assim, considerou que x representa a quantidade de dominós e y representa a quantidade de L-triminós para cobrir o tabuleiro $8x8$. Modelando o problema obteve a seguinte Equação Diofantina: $2x + 3y = 64$.

Verificou, então, que o $mdc(2{,}3) = 1$, e que $1|64$. Porém, lembrou que existindo solução para a equação, nada se pode afirmar sobre a cobertura.

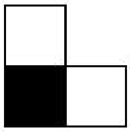
Após essa tentativa frustrada, recorreu à Coloração Xadrez.

Heitor coloriu as peças da seguinte maneira:

Figura 51: Dominó

Fonte: A autora, 2021.

Figura 52: L-triminó



Fonte: A autora, 2021.

Antes de montar o sistema, seguindo a mesma nomenclatura utilizada para a Equação Diofantina, verificou que como o tabuleiro é quadrado com 64 quadradinhos, a quantidade de quadradinhos brancos e pretos era igual a 32, isto é, o tabuleiro teria 32 casas pretas e 32 casas brancas. Desta forma, montou o sistema a seguir:

Equação I(quantidade de quadradinhos brancos): $x + 2y = 32$.

Equação II(quantidade de quadradinhos pretos): $x + y = 32$.

Fazendo $I - II$: $y = 0$

Heitor concluiu que como y é igual a zero, a única possibilidade de cobertura seria se não utilizasse L-triminós, o que contraria o que pede o problema, pois as duas peças deveriam ser utilizadas. Afirmando que não há cobertura para o tabuleiro $8x8$.

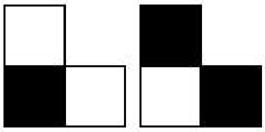
Infelizmente Heitor errou em sua afirmação. Aponte o erro e corrija-o.

Sugestão de solução (atividade 10).

Heitor errou quando foi fazer uso da Coloração Xadrez, pois considerou apenas uma forma de coloração para a peça L-triminó. Abaixo será apresentado o procedimento correto.

As colorações possíveis para as peças são:

Figura 53: L-triminó



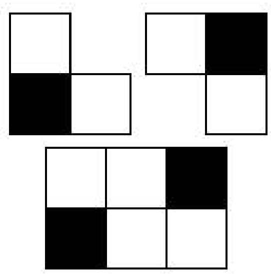
Fonte: A autora, 2021.

Figura 54: Dominó

Fonte: A autora, 2021.

Perceba que a peça L-triminó tem duas formas de colorir, e as duas formas são necessárias para que ocorra a Coloração Xadrez, pois ao encaixarmos as duas peças L-triminós, caso só considerássemos uma forma de colorir, acabaria ocorrendo o caso abaixo,

Figura 55: Encaixe L-triminó (preto central)



Fonte: A autora, 2021.

Veja que essa configuração fere a Coloração Xadrez. Por isso, Heitor precisava dos dois tipos de coloração da peça L-triminó.

Sendo x a quantidade de peças dominós (não há diferenciação, pois somente possui um quadradinho de cada cor), y a quantidade de peças L-triminó com dois quadradinhos brancos e um preto e z a quantidade de peças L-triminó com dois quadradinhos pretos e um branco. Assim, tem-se:

(I) quantidade de quadradinhos brancos: $x + 2y + z = 32$

(II) quantidade de quadradinhos pretos: $x + y + 2z = 32$

Subtraindo,

$y - z = 0$, logo $y = z$. Observe que isto não gera absurdo algum e ainda nos diz que os L-trimiminós devem ocorrer aos pares nesta suposta solução.

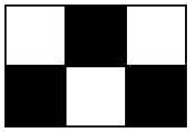
Porém, continuando a questão,

Substituindo a informação que $y = z$ em (I): $x + 2y + y = 32$, resulta em $x + 3y = 32$ (Equação Diofantina que possui solução).

Como resultou numa Equação Diofantina que possui solução, nada se pode afirmar sobre a cobertura. Logo, Heitor poderia parar por aqui dizendo que não há como afirmar nada sobre a cobertura utilizando-se Equações Diofantinas e Coloração Xadrez.

Porém, observando a Equação Diofantina $x + 3y = 32$, verifica-se que o $mdc(1,3) = 1$ e como $1|32$, possui solução. Uma solução viável, tendo em vista que $y = z$, é dada pelo par $(26,2)$. Com 2 L-triminós podemos cobrir 6 casas do tabuleiro da seguinte maneira:

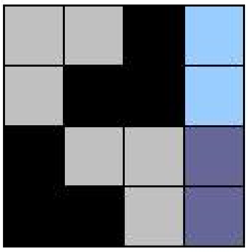
Figura 56: Encaixe L-triminós (colorações diferentes)



Fonte: A autora, 2021.

Ao se adicionar dominós à figura acima, é possível obter a seguinte cobertura:

Figura 57: Cobertura $4x4$ (L-triminós e dominós)



Fonte: A autora, 2021.

Houve a necessidade de pintar as peças com uma coloração diferente da Coloração Xadrez para que fosse possível identificá-las (Figura 57). Veja que a figura acima apresenta a cobertura de um tabuleiro $4x4$, como o problema tratava de um tabuleiro $8x8$, é possível replicar o tabuleiro $4x4$ até se chegar à cobertura completa do tabuleiro $8x8$.