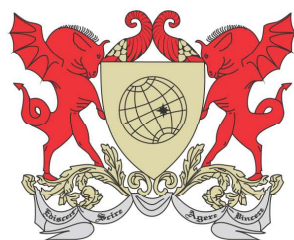


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



ANDRÉIA MARIA DE OLIVEIRA SILVA

GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2017

ANDRÉIA MARIA DE OLIVEIRA SILVA

**GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES NO ENSINO
DA MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2017

ANDRÉIA MARIA DE OLIVEIRA SILVA

GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES NO ENSINO
DA MATEMÁTICA

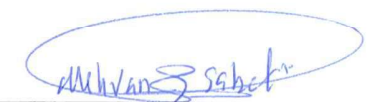
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de fevereiro de 2017.


Luís Felipe Gonçalves Fonseca


Mariana Garabini Cornelissen Hoyos


Luis Alberto D'Afonseca
(Coorientador)


Mehran Sabeti (Orientador)

Dedicatória

A minha mãe Miriam de Oliveira Silva (*in memoriam*). Sei que você gostaria de ter participado comigo desta conquista. A meu pai José Paulo da Silva Filho (*in memoriam*) que esteve comigo no início desta jornada, mas que infelizmente me deixou antes da reta final. Obrigada por terem feito parte da minha história neste plano espiritual e por tudo que fizeram por mim ao longo da vida. Um parte de mim se perdeu quando vocês se foram. Dedido a vocês meu eterno amor.

Agradecimentos

A Deus, razão da minha existência.

Ao Guilherme Boscarino Maciel, pelo amor, pela amizade, pela compreensão e por sempre estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis e tristes.

Aos meus irmãos de sangue Anderson e Alisson. Quem tem irmãos tem tudo, mas quem tem os meus tem os melhores do mundo.

Ao meu irmão espiritual e de coração Dárcio Costa Nogueira Júnior, que escolheu estar ao meu lado nesta jornada. Sem você eu não conseguiria. *Abençoado o irmão que Deus nos permitiu escolher.*

Aos amigos Paulo Costa, Élica, Guilherme e Antônia pela amizade.

Ao professor Mehran Sabeti, meu orientador, pela empenho e iniciativa de nos proporcionar esta oportunidade.

Ao professor Luiz Felipe pela paciência, amizade, carinho e ilimitada dedicação.

Ao professor Luis D'Afonseca pelo sacrifício e incansável esforço para estar ao nosso lado.

A todos os professores do Promat-Florestal/MG pelos ensinamentos durante estes dois anos que se passaram.

Aos amigos Ana Paula, Daniel, Camila, Eliane, Júlio Carvalho, Lívia, Gracielle e Paulo Vieira. Vocês foram uma grata surpresa.

Aos alunos do CMBH pela amizade e apoio.

A CAPES pelo incentivo e apoio.

E aqueles, que de uma maneira ou de outra, me ajudaram na hora em que mais precisei.

A559gg De Oliveira Silva, Andréia Maria

Geometria Fractal e Aplicações no Ensino da Matemática
/ Andréia Maria De Oliveira Silva. - Brasília: Escola
Superior do Ministério Público da União, 2017.

102F.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - UFV-Florestal) - Escola Superior do
Ministério Público da União: Brasília, 2017.

Orientador(a): Dr. Mehran Sabeti
Coorientador(a): Dr. Luis Alberto D'Afonseca

1. Geometria Fractal. 2. Ensino da Matemática. I.
Titulo.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente, com
os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Árvore fractal. [3] | 1 |
| 2.1 | Galileu Galilei. [6] | 5 |
| 2.2 | Johannes Kepler. [6] | 5 |
| 2.3 | Issac Newton. [6] | 6 |
| 2.4 | Gottfried Wilhelm Leibniz. [17] | 7 |
| 2.5 | Karl Weierstrass e a Curva de Weierstrass . [17] | 7 |
| 2.6 | Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.[17] | 8 |
| 2.7 | Jules Henri Poincaré.[17] | 9 |
| 2.8 | Giusepe Peano e os quatro primeiros níveis da Curva de Peano. [17] | 9 |
| 2.9 | Niels Fabian Helge von Koch. [17] | 10 |
| 2.10 | Wacław Sierpiński. [23] | 10 |
| 2.11 | Gaston Júlia e Pierre Fatou. [17] | 11 |
| 2.12 | Benoit Mandelbrot. [23] | 11 |
| 2.13 | Linhas Litorâneas: Fractal na Natureza. | 12 |
| 2.14 | Edward Norton Lorenz. [2] | 15 |
| 3.1 | Auto-similaridade da Árvore Fractal. | 18 |
| 3.2 | Auto-similaridade estrita do Triângulo de Sierpinski. | 19 |
| 3.3 | Auto-afinidade do Brócolis Romanesco. | 19 |
| 3.4 | Iterações 0 a 4 da Curva de Koch. | 21 |
| 3.5 | Faixa do plano ocupada pela Curva de Koch. | 22 |
| 3.6 | Estrutura fractal da vasculatura da retina. [20] | 26 |
| 3.7 | (a) Imagem de célula normal com dimensão fractal de 1,7. // (b) Imagem de célula cancerosa com dimensão fractal de 1,87. [20] | 27 |
| 3.8 | A Grande Onda de Hokusai. [7] | 28 |
| 3.9 | Circle Limit I de Escher. [16] | 28 |
| 3.10 | Imagem criada por Gregory Sams. [5] | 29 |
| 3.11 | Etapas da criação da montanha fractal.[3] | 30 |
| 3.12 | Filme “Jornada nas Estrelas II - A Ira de Kan”, da Lucasfilm. | 30 |
| 3.13 | Filme “Dr. Estranho”, da Marvel. | 31 |
| 3.14 | Celular da motorola e a primeira antena fractal. [1] | 31 |
| 3.15 | Célula solar com estrutura de árvore fractal. [9] | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.16 | Conjunto de Cantor. | 33 |
| 3.17 | Curva Floco de Neve de Koch. | 36 |
| 3.18 | Tabela das iterações da Curva Floco de Neve de Koch. | 36 |
| 3.19 | Iterações do triângulo de Sierpinski. | 38 |
| 3.20 | Fractal de Mandelbrot. | 45 |
| | | |
| 4.1 | Apresentação de slides sobre a atividade 1. | 53 |
| 4.2 | Niels Fabian Helge Von Koch. [17] | 54 |
| 4.3 | Tabela atividade 2. | 55 |
| 4.4 | Tabela preenchida pelo aluno Dani. | 55 |
| 4.5 | Tabela de excel construída pelos alunos. | 56 |
| 4.6 | Construção da Curva de Koch com régua. | 57 |
| 4.7 | Curva de Koch construída com uso de régua e compasso. | 57 |
| 4.8 | Atividade 3: Iterações da Curva Floco de Neve de Koch. | 58 |
| 4.9 | Tabela atividade 3. | 58 |
| 4.10 | Resolução item 13. | 59 |
| 4.11 | Resolução item 13. | 59 |
| 4.12 | Resolução item 14. | 60 |
| 4.13 | Wacław Sierpiński. | 61 |
| 4.14 | Triângulo de Sierpiński. | 61 |
| 4.15 | Tabela atividade 4. | 62 |
| 4.16 | Tabela atividade 4 preenchida. | 63 |
| 4.17 | Revisão de pré-requisitos para aula de Triângulo de Sierpinski. | 64 |
| 4.18 | Aluna pesquisando sobre o Triângulo de Sierpinski. | 64 |
| 4.19 | Etapas de construção do cartão fractal degrau. [14] | 67 |
| 4.20 | Etapas de construção do cartão fractal degrau. [14] | 67 |
| 4.21 | Cartão degrau construído pelos alunos. | 68 |
| 4.22 | Cartão triângulo de Sierpinski construído pelos alunos construído pelos alunos. | 68 |
| 4.23 | Cartão pirâmide construído pelos alunos. | 69 |
| 4.24 | Cartão paralelepípedos construído pelos alunos. | 69 |
| 4.25 | Cartão elipse construído pelos alunos. | 69 |
| 4.26 | Molde para construção da pirâmide de Sierpinski. | 71 |
| 4.27 | Construção da pirâmide de Sierpinski - etapa inicial. | 71 |
| 4.28 | Molde para construção da pirâmide de Sierpinski - etapa final. | 71 |

Resumo

SILVA, Andréia Maria de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Geometria Fractal e Aplicações no Ensino da Matemática** . Orientador: Mehran Sabeti. Coorientador: Luis Alberto D'Afonseca.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta de abordagem introdutória da Geometria Fractal no ensino fundamental. Esta nova geometria, umas das Geometrias Não-euclidianas, vem se desenvolvendo desde a década de 1970, quando da sua descoberta por Benoit Mandelbrot, e possui aplicações nos campos da medicina, arte, tecnologia, arquitetura, cinema, etc. Neste trabalho, em primeiro lugar, foi feita uma abordagem cronológica através da citação de grandes matemáticos que contribuíram para o progresso das ciências exatas que levaram ao desenvolvimento da geometria fractal. Em seguida foram abordados aspectos relativos a caracterização e propriedades dos fractais. Aplicações de grande importância para o desenvolvimento da humanidade foram enumeradas e de uma forma sucinta foram abordados alguns monstros matemáticos do século XIX, posteriormente incluídos na categoria dos fractais. Uma sugestão de plano de sequência didática para introdução do assunto na grade curricular do 9º ano do ensino fundamental, uma sequência de atividades pedagógicas e propostas de atividades para introdução do estudo da geometria fractal em sala de aula finalizam a presente pesquisa.

Abstract

SILVA, Andréia Maria de Oliveira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **Fractal Geometry and Applications in Mathematics Teaching.** Adviser: Mehran Sabeti. Co-adviser: Luis Alberto D'Afonseca.

This work has the main objective to present an introductory approach to Fractal Geometry in elementary school. This new geometry, one of the Non-Euclidean Geometries, has been developing since the 1970s, when it was discovered by Benoit Mandelbrot. It and presents many applications in medicine, arts, architecture, cinema, and others. This work presents first a chronological approach made through citation of great mathematicians who contributed to the progress of exact sciences that led to development of fractal geometry. Next, aspects related to the characterization and properties of fractals were discussed. Applications of great importance for the development of mankind have been enumerated and succinctly addressed, some mathematical monsters of the nineteenth century, later included in the category of fractals. We present a suggestion for a didactic sequence plan to introduce the subject in 9th grade curriculum and a sequence of pedagogical activities and proposed activities to introduce the study of fractal geometry in classroom concludes the present research.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | A história dos Fractais | 4 |
| 2.1 | Cronologia | 4 |
| 2.2 | A Ideia por Trás dos Fractais | 14 |
| 2.3 | A Geometria Fractal e as Geometrias Não-euclidianas | 14 |
| 2.4 | O Caos e a Geometria Fractal | 15 |
| 3 | A Geometria Fractal | 17 |
| 3.1 | O que é um fractal? | 17 |
| 3.2 | Características dos Fractais | 18 |
| 3.2.1 | Auto-semelhança | 18 |
| 3.2.2 | Complexidade Infinita | 20 |
| 3.2.3 | Dimensão Fractal | 20 |
| 3.3 | Aplicações da Geometria Fractal | 25 |
| 3.3.1 | Uso da Geometria Fractal na Medicina. | 26 |
| 3.3.2 | A Arte nos Fractais | 27 |
| 3.3.3 | Fractais nas Telas dos Cinemas | 28 |
| 3.3.4 | A Tecnologia e os Fractais | 30 |
| 3.4 | Alguns Fractais da História | 33 |
| 3.4.1 | O Conjunto de Cantor | 33 |
| 3.4.2 | A Curva de Koch | 34 |
| 3.4.3 | A Curva Floco de Neve de Koch | 35 |
| 3.4.4 | O Triângulo de Sierpinski | 38 |
| 3.5 | O Fractal de Benoit Mandelbrot | 41 |
| 3.5.1 | Sistemas Dinâmicos Discretos | 42 |
| 3.5.2 | O Conjunto de Mandelbrot | 43 |
| 4 | Fractais no Currículo do Ensino Fundamental | 46 |
| 4.1 | A História do Ensino da Geometria no Brasil | 46 |
| 4.2 | Os Fractais e o Currículo Escolar | 47 |
| 4.2.1 | Plano de Sequência Didática e Plano de Execução Didática | 48 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3 | Os Fractais na Sala de Aula | 50 |
| 4.3.1 | Descrição da aula 01: | 51 |
| 4.3.2 | Descrição da aula 02: | 53 |
| 4.3.3 | Descrição da aula 03: | 56 |
| 4.3.4 | Descrição da aula 04: | 60 |
| 4.4 | Fractais na Prática | 65 |
| 4.4.1 | Descrição da aula 05 e 06: | 65 |
| 4.4.2 | Descrição da aula de 07 a 09 : | 68 |
| 5 | Considerações Finais | 73 |
| | Bibliografia | 75 |
| A | Primeiro Apêndice | 77 |
| A.0.1 | Uma ferramenta aplicada em vários campos | 80 |
| B | Segundo Apêndice | 83 |

Introdução

Observado desde o ar ... parece uma árvore tombada, com um tronco curto e grosso, constituído pelo núcleo central de sepulturas, de donde arrancam quatro poderosas ramas, contíguas no seu nascimento, mas que depois, em bifurcações sucessivas, se estendem até perder-se de vista, formando ... uma frondosa copa em que a vida e a morte se confundem. (José Saramago, 2009) [8]

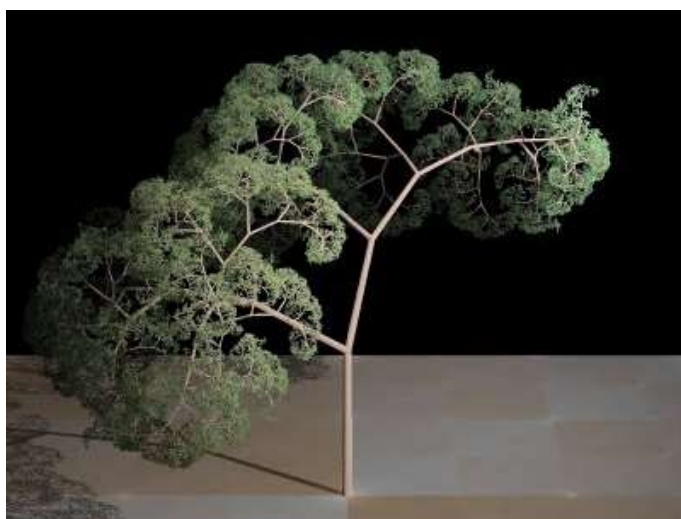


Figura 1.1: Árvore fractal. [3]

A Matemática é uma das mais antigas disciplinas escolares e, ao longo do tempo tem ocupado um papel cada vez mais importante no currículo. Ela é uma ciência que trata não somente com objetos e relações abstratas, é acima de tudo uma linguagem que viabiliza a conexão do mundo, natural ou social, com outras ciências. As atividades pré-históricas de contar e medir se tornaram insuficientes com o desenvolvimento da humanidade e a matemática passou a dominar o mundo através do estudo dos números, das operações, das formas geométricas, das estruturas e das regularidades, das variações, do acaso e das incertezas. Tornou-se um instrumento que

permite elaborar uma representação do mundo propiciando formas de agir sobre ele com o fim de compreender, prever e resolver problemas, e ainda controlar resultados de ações do homem e efeitos da natureza.

Hoje, a matemática está presente em todos os ramos da ciência, nas tecnologias, nas artes, em muitas profissões e em diversas atividades do dia a dia. Por isso, hoje, mais do que nunca, se exige das escolas um currículo acessível a todos os alunos e que propicie uma formação sólida.

Como o ensino da matemática requer capacidades cognitivas diversas como o raciocínio, a imaginação e a intuição as atividades didáticas devem ultrapassar o objetivo de transmissão de informação e desenvolver nos alunos a confiança nas suas capacidades individuais. Assim, a disciplina de Matemática no ensino fundamental deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária para prosseguimento dos estudos — em outras áreas e na própria Matemática.

A geometria fractal chega como mais uma alternativa de integração de temas da matemática com outras áreas desde as ciências da natureza até as ciências ligadas as tecnologias. Se a teoria dos fractais for incluída e bem trabalhada no ensino fundamental pode estimular a curiosidade, desperta nos alunos o espírito investigativo e dar sentido aos conteúdos matemáticos a ela relacionados.

A presente pesquisa tem com objetivo contribuir para o processo de ensino-aprendizagem inserindo um tema que permite enxergar a natureza com outros olhos e estabelecer conexões com ensino da matemática, através da análise de padrões geométricos e, ao mesmo tempo, inserir novos conceitos como o de auto-similaridade e dimensão fractal.

Para iniciar o trabalho um apanhado histórico de renomados matemáticos e seus feitos que influenciaram o desenvolvimento da geometria fractal foi realizado, visto que a contextualização histórica dá significado as descobertas científicas do passado e do presente. Destaque para a história de Gaston Júlia e Pierre Fatou cujos trabalhos foram aperfeiçoados por Benoit Mandelbrot, pai da geometria fractal.

Conceitos relativos a sistemas dinâmicos e a teoria do caos foram descritos e, em seguida, uma definição de fractais foi elaborada as vistas do objeto desta pesquisa, seguida pela enumeração de suas características. Ponto alto deste trabalho foi a descrição de aplicações da geometria fractal na medicina, nas artes, no cinema e nas tecnologias.

Complementando a cronologia vários “monstros” matemáticos foram citados, dentre eles o Conjunto de Cantor, tão importante para o desenvolvimento da teoria dos conjuntos e a Curva de Koch associada por Benoit Mandelbrot ao formato das linhas costeiras.

Ponto final da pesquisa foi a apresentação de uma proposta de plano de sequência didática e plano de execução didática para possível inserção do estudo introdutório da geometria fractal no currículo do 9º ano do ensino fundamental das escolas do Estado de Minas Gerais, seguida de um projeto de atividades a ela relacionadas.

Tanto atividade de construção de cartões fractais quanto a atividade de construção da pirâmide de Sierpinski contém em si o apelo visual e estético que favorece a captura

da atenção dos alunos e auxilia no entendimento de conceitos da geometria fractal como as ideias de auto-similaridade, dimensão, infinitude das fases da criação de um fractal e escala.

A história dos Fractais

O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos. (Galileu Galilei)

A matemática está impregnada na história da humanidade, visto que surgiu justamente para suprir as necessidades de contar e medir das primeiras civilizações da antiguidade. É fundamental que o professor tenha consciência da importância do papel que a história da matemática desempenha na construção do conhecimento dos alunos. Discutir seus conceitos e relações através da história mostra aos discentes a real magnitude da matemática. Sendo assim, para dar maior consistência a presente pesquisa, cujo objetivo é avaliar a possível introdução da geometria fractal no currículo do ensino fundamental das escolas da rede estadual do estado de Minas Gerais, será apresentado neste capítulo um resumo histórico acerca de personalidades e dos fatos que contribuíram para sua evolução.

2.1 Cronologia

O homem sempre teve um fascínio pela natureza e seus mistérios. Desde a antiguidade, filósofos, cientistas e estudiosos dos mais variados ramos das ciências humanas, biológicas, exatas ou aplicadas tentam desvendar os fenômenos e as transformações da natureza. Alguns descreveram leis do mundo físico e natural, e outros ao aplicá-las construíram edifícios, pontes, máquinas mecânicas e eletrônicas, mas todos, de uma forma ou de outra, colaboraram para o desenvolvimento das ciências e, conseqüentemente, do mundo que nos cerca. Vários matemáticos contribuíram para essa evolução interpretando os fenômenos regulares, estáveis e periódicos. No entanto, poucos atreveram-se a pesquisar o incerto, o irregular, o caos presente em

objetos naturais e não naturais. A cronologia a seguir pretende evocar algumas personalidades do mundo científico que tiveram sua parcela de contribuição para o estudo da ciência do caos e o desenvolvimento da geometria fractal.

Galileu Galilei (1564-1642), físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano. É considerado o pai da ciência moderna. Deve-se a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiência e teoria. Descobriu a lei dos corpos, enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial. Melhorou significativamente o telescópio refrator e com ele descobriu as manchas solares, as montanhas da Lua, as fases de Vênus, os quatro satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as estrelas da Via Láctea. Aqui, interessa informar que Galileu fez colocações sobre a ideia da equipotência de conjuntos infinitos, ponto fundamental para a teoria dos conjuntos de Cantor no século XIX.[17]

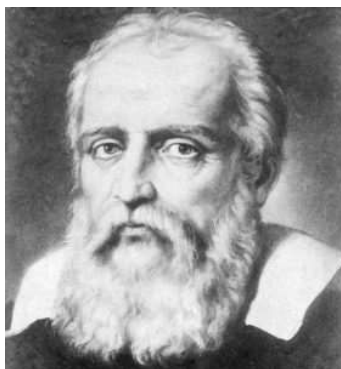


Figura 2.1: Galileu Galilei. [6]

Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo e matemático alemão. Formulou as *Três Leis do Movimento Planetário*, marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Foi um dos precursores do cálculo integral, descobriu dois dos poliedros estrelados regulares e publicou um pequeno folheto intitulado *Strena Seu de Nive Sexangula* (Um Presente de Ano Novo de Neve Hexagonal) sobre a descrição da simetria hexagonal dos flocos de neve. Na opinião de Benoit Mandelbrot, [24]



Figura 2.2: Johannes Kepler. [6]

“...Kepler foi o primeiro que realizou algo extraordinário: partir de um brinquedo e obter uma ferramenta. O brinquedo era a elipse, uma forma matemática com que os gregos haviam jogado na antiguidade sem nenhum objetivo concreto. Porém esse brinquedo se converteu em uma ferramenta para criar a ciência da astronomia, para explicar o movimento dos planetas, e descrever tudo em termos matemáticos.”

Isaac Newton (1642-1727), físico, matemático, astrônomo, alquimista, filósofo e teólogo inglês. São inúmeras as suas realizações, que foram expressas por Alexandre Pope nos versos:

*A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite;
Deus disse, “Faça-se Newton”, e a luz se fez.*

Newton, publicou o *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* que descreve sua lei da gravitação e descreveu a consistência entre seu sistema e as leis de Kepler sobre o movimentos dos planetas. Foi o primeiro a demonstrar que os movimentos de objetos, tanto na Terra quanto em outros corpos celestes, são governados pelo mesmo conjunto de leis naturais. Defendia que a investigação racional pode revelar o funcionamento da natureza. Na área da matemática, realizou estudos sobre o cálculo infinitesimal, séries de potências, generalizou o teorema binomial para expoentes não inteiros, e desenvolveu o método de Newton para a aproximação das raízes de uma função. [17]



Figura 2.3: Isaac Newton. [6]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão. Contemporâneo e rival de Newton na invenção do cálculo, mas primeiro a fazer publicações sobre o assunto. Desenvolveu uma nova teoria sobre a dinâmica do movimento baseada na energia cinética e energia potencial e se antecipou as ideias de Albert Einstein, argumentando que o espaço, tempo e movimento são relativos, não absolutos. Na matemática, trabalhou com a ideia de infinitude, principalmente relacionado a construção dos números reais. [17]



Figura 2.4: Gottfried Wilhelm Leibniz. [17]

Por um longo tempo após Newton e Leibniz os fundamentos do cálculo ficaram obscuros e despercebidos. Somente a partir do século XIX, a comunidade matemática se viu as voltas com estruturas que desafiavam, na época, a noção comum de infinito. Para essas estruturas não existia explicação objetiva e por essa razão foram consideradas “patológicas” ou ainda “monstros matemáticos”. Foi Weierstrass um dos primeiros matemáticos a se deparar com uma função dita “patológica”.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), matemático alemão. Encontrou uma função contínua em toda a reta real que não possui derivada em nenhum ponto do domínio, um “monstro matemático”. Na linguagem informal, podemos dizer que a função de Weierstrass tem bicos em todos os pontos do seu domínio, algo que não é fácil de visualizar. Foi a primeira função a ser publicada e que apresentava tal patologia.

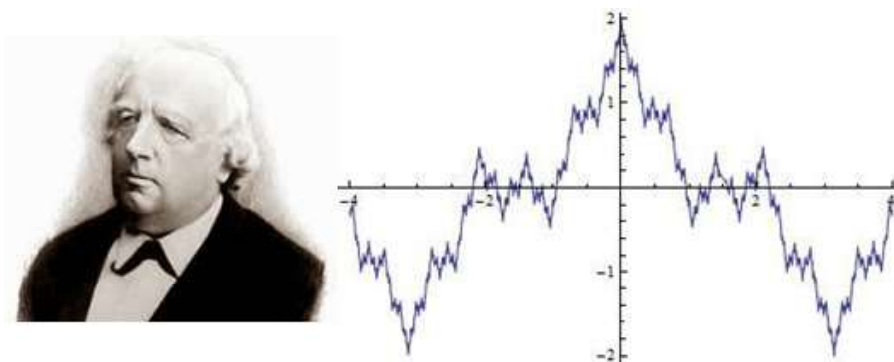


Figura 2.5: Karl Weierstrass e a Curva de Weierstrass . [17]

Apenas a título de curiosidade a função de Weierstrass é definida pela seguinte série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

onde $a \in (0, 1)$ e b é um inteiro positivo ímpar, tal que,

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Weierstrass permitia que alunos e colegas matemáticos trabalhassem com suas descobertas a fim de aprimorá-las. Foi então que em 1861, ele discutiu seu exemplo de função contínua não-diferenciável com Paul David Gustav du Bois-**Reymond** (1831-1889). Em 1874, Reymond fez uma publicação acerca desta função de Weierstrass. Apesar de Bernard Placidus Johann Nepomuk **Bolzano** (1781-1848) ter descoberto uma função, não publicada, com essas características em 1843, a curva de Weierstrass é historicamente o primeiro fractal conhecido. [17]

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matemático russo, duas décadas após a publicação da curva de Weierstrass publicou um trabalho sobre outro “monstro matemático”, chamado hoje de **Conjunto de Cantor** (ou **Poeira de Cantor**) no qual transforma um segmento reta numa poeira de pontos. Cantor desenvolveu uma teoria dos conjuntos e trabalhou com a ideia de infinito que influenciou fortemente os fundamentos da matemática.[17] O Conjunto de Cantor também é um fractal, que será abordado com pormenores na seção 3.4.1.

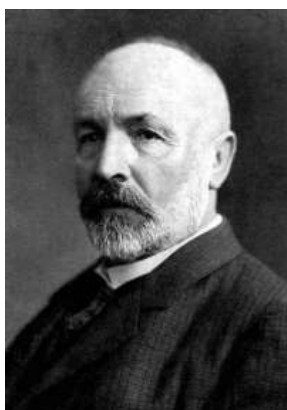


Figura 2.6: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.[17]

Jules Henri Poincaré (1854-1912), matemático e engenheiro francês. Como matemático trabalhou equações diferenciais, interessou-se pelas geometrias não-euclidianas e fez grandes contribuições para a teoria das probabilidades. Teve sua parcela de contribuição para a teoria do caos quando concluiu que:

Uma causa muito pequena que escapa à nossa atenção provoca um efeito considerável que não podemos deixar de observar, e dizemos então que o efeito se deve ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da Natureza, e a situação do Universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente qual a situação desse mesmo Universo num instante posterior. Mas mesmo se acontecesse que as leis naturais deixassem de ter segredos para nós, poderíamos, mesmo então conhecer a situação, apenas de modo aproximado. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, o que é tudo o que precisamos, diriam que

o fenômeno tinha sido previsto, que é controlado pelas leis conhecidas. Mas isto não ocorre sempre: pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais dêem origem a outras muito grandes nos fenômenos finais. Um erro pequeno no anterior, irá provocar um enorme erro no posterior. A previsão torna-se impossível, e temos assim, o fenômeno aleatório. [4]



Figura 2.7: Jules Henri Poincaré. [17]

Giuseppe Peano (1858-1932), matemático italiano, autor de mais de 200 livros e artigos. Em 1890, ao trabalhar com o aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, descreveu outro caso patológico conhecido como **Curva de Peano**, um famoso fractal que possui diferentes variações. A proposta de Peano era cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular. [17]

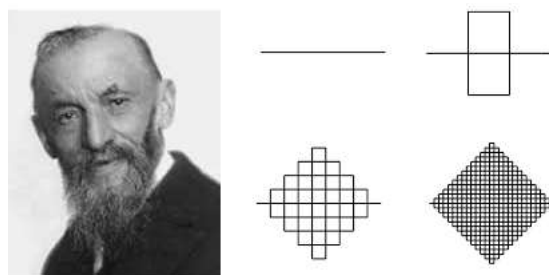


Figura 2.8: Giuseppe Peano e os quatro primeiros níveis da Curva de Peano. [17]

Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924), matemático sueco, introduziu em 1906 através de sua obra “*Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*” a curva que posteriormente recebeu seu nome. Este famoso fractal descreve uma curva de comprimento infinito que delimita uma área finita. É uma curva que não possui tangente em nenhum de seus pontos e que deve ter influenciado os estudos de Benoit Mandelbrot por possui características semelhantes a uma linha costeira. Um estudo mais cuidadoso e apurado sobre essa curva será apresentado na seção 3.4.2. [17]



Figura 2.9: Niels Fabian Helge von Koch. [17]

Wacław **Sierpiński** (1882-1969), matemático polonês. Em 1916 apresentou um famoso “monstro matemático”, o Triângulo de Sierpiński. Vários outros objetos fractais também receberam seu nome: a Pirâmide de Sierpiński (versão tridimensional do Triângulo de Sierpiński) o Tapete de Sierpiński e a Esponja de Menger (versão tridimensional do Tapete de Sierpiński). O Triângulo de Sierpiński e sua versão tridimensional serão trabalhados na seção 3.4.3.



Figura 2.10: Wacław Sierpiński. [23]

Gaston Júlia (1893-1978) e **Pierre Fatou** (1878-1929), matemáticos franceses. Embora fossem contemporâneos e desenvolveram seus trabalhos quase simultaneamente, não tinham o conhecimento um do outro.

Eles estudaram sistemas dinâmicos complexos[10], ou melhor, estudaram o que acontece com a imagem no plano complexo quando se aplica iteradamente a transformação $f(z) = z^2 + c$, para um $z_n = x + iy$ complexo inicial (x e y reais), c complexo constante e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Este trabalho é conhecido por Conjunto Júlia-Fatou ou simplesmente Conjunto de Júlia e foi através do estudo da função $f(z) = z^2 + c$ que Benoit Mandelbrot inciou a formalização da geometria fractal. [10] [21]

Benoit Mandelbrot (1924-2010), considerado pai da geometria fractal, nasceu em Varsóvia, capital da Polônia em 20 de novembro de 1924. Sua Família era judaica da Lituânia e o pai trabalhava como fabricante de roupas.

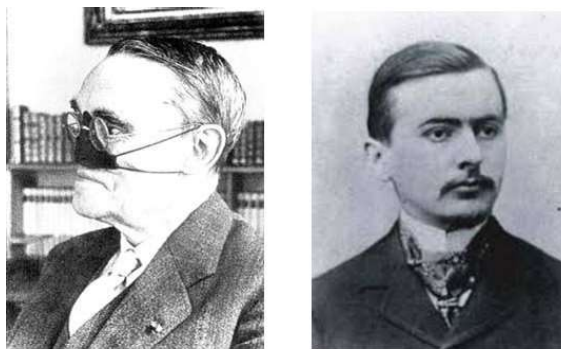


Figura 2.11: Gaston Júlia e Pierre Fatou. [17]



Figura 2.12: Benoit Mandelbrot. [23]

Em 1936, quando os alemães ameaçavam a Europa, a família de Mandelbrot, na época com 12 anos, mudou-se para Paris onde seu tio Szolem Mandelbrot era um matemático muito conhecido e se dedicava a pesquisa na área de análise avançada. Szolem foi um dos fundadores do Movimento Bourbaki que defendia um maior rigor matemático nos livros de Cálculo e Análise. Mandelbrot cresceu ouvindo falar de matemática e tornou-se interessado pela disciplina. Seu tio Szolem que acreditava que não era possível haver mais avanços significativos na geometria e a seu contra gosto Mandelbrot, desde cedo, apresentou maior inclinação para o estudo da geometria.

Como várias regiões da França eram constantemente ocupadas pelos alemães nazistas, a família de Mandelbrot era forçada a mudar de residência com frequência, fato que o impediu de frequentar normalmente uma escola. Ele, então, passou a estudar sozinho, o que lhe rendeu uma porção de independência e autoconfiança.

Em 1944, com o fim da ocupação nazista, Mandelbrot fez exames para a Universidade da França onde chegou a tirar o título de doutor. Percebeu, ainda na faculdade, que sua familiaridade com a Geometria poderia ajudá-lo a explicar problemas em outras áreas da matemática.

Em 1958, Benoit Mandelbrot afastou-se do mundo acadêmico ao deixar a França e mudar-se para os EUA, onde aceitou o convite para fazer parte do grupo de

pesquisadores do Centro de Pesquisas Thomas J. Watson, da International Business Machines (IBM). Nesta época, seus estudos foram fortemente influenciados pelos trabalhos de outros matemáticos, como Georg Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Waclaw Sierpinski, Gaston Julia, Pierre Fatou e Helge Von Koch.

No início de sua carreira na IBM foi lhe passado a incumbência de estudar sobre a variação de preços das mercadorias, foi quando se deparou com resultados não muito comuns. Ao passar os dados do estudo para o computador verificou que os números que causavam aberrações na curva de distribuição normal, era simétricos em relação a escala. Concluiu, então, que não era possível prever a variação de preços, mas observou que a sequência das variações independia da escala, ou seja, as curvas aparentavam uma certa semelhança quando ele variava a escala de mensal para diária.

Mais tarde ele estudou problemas causados pelos ruídos das linha telefônicas usadas para transmitir informações de computador para computador. Os ruídos provocavam erros nos dados transmitidos. Ele descobriu que não era possível prever os ruídos, mas apesar de aleatórios existia uma certa regularidade nos efeitos causados por eles. Como os engenheiros da IBM não entendiam a linguagem matemática de Mandelbrot, para ser compreendido por eles, ele construiu um modelo baseado no Conjunto de Cantor associando-o a representação da frequência de erros. Começava sua percepção de que era possível encontrar uma certa ordem diante do caos.

A seguir ele se debruçou sobre as rugosidades e irregularidades das linhas litorâneas. Ele percebeu que, independente da escala de observação, o grau de irregularidades permanecia constante e a extensão medida da costa tornava-se cada vez maior, e associou o estudo das linhas costeiras a Curva de Koch.

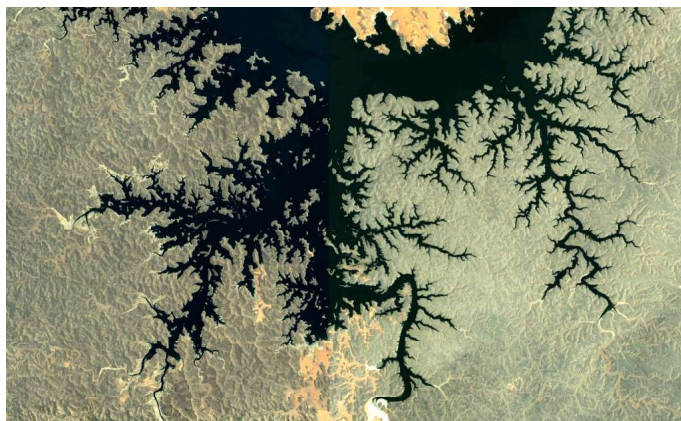


Figura 2.13: Linhas Litorâneas: Fractal na Natureza.

Nos anos que se seguiram, Mandelbrot prosseguiu com as pesquisas da IBM simultaneamente a pesquisas de interesse pessoal, foi quando ele começou a garimpar os famosos “monstros matemáticos” da história relacionados a regularidade e aos caos, como ele mesmo descreve:

Até então, a ciência havia se ocupado de todos os problemas em que as estruturas eram principalmente suaves e regulares. E eu queria estu-

dar fenômenos estranhos que ninguém estava estudando, assim que por necessidade me encontrei com os remanescentes do que os meus colegas e antecessores haviam escolhido como temas. Porque o científico não estuda a natureza como é, sendo que deve escolher, selecionar alguns problemas. E tudo relacionado com a suavidade estava coberto. Porém, com a rugosidade, eu estava sozinho.[24]

Verificou que as medidas euclidianas de extensão, profundidade e comprimento, não supriam a essências das formas irregulares e voltou-se para a ideia de dimensão. Percebeu que todos os padrões encontrados por ele tinham uma característica comum, a auto-semelhança, a simetria por meio de escalas, ou seja, um padrão dentro de um padrão.

Em 1960, Benoit começou a construir um modelo para aplicar suas ideia, ao qual passou a associar toda vez que o reconhecia, principalmente na análise da geometria associada a natureza. A este modelo ele deu o nome de Geometria Fractal e afirmou que as estruturas fractais, inexplicadas no contexto da Geometria Euclidiana, podem ser descritas com simplicidade em sua geometria com apenas algumas explicações.

Ademais os variados acontecimentos que se sucederam na vida de Benoit o mais significativo parece ser o exato momento em que ele concebe o termo fractal. Entretanto, tantas são as lendas a esse respeito que o ideal é o próprio Benoit Mandelbrot fazer os esclarecimentos:

*Por motivos eminentemente práticos, um dos acontecimentos mais importantes da minha vida aconteceu em 1973, quando me convidaram para dar uma conferência no Collège de France, em Paris. Eu fiz o doutorado em Paris e um tio meu era um matemático muito conhecido que trabalhava como professor no Collège de France. Meu tio tinha muito medo do nepotismo, assim que, enquanto exercia o papel de professor nunca permitiu que seus colegas me convidassem. Porém quando morreu, seus colegas me convidaram para dar uma conferência. E eu estava submetido a uma pressão extraordinária, porque eu tinha somente uma hora para explicar o que eu havia feito durante os vinte anos que haviam passado desde que havia abandonado a França. Trabalhei muito duro, e creio que não o fiz tão mal - na verdade minha conferência apareceu no jornal, revisada por um homem muito famoso na época - e logo escrevi um livro sobre isso. E eu precisava de um título. Eu havia feito um trabalho que eu poderia descrever e explicar, mas que não tinha título. E um livro sem título não funciona. Assim que eu me pus a procurar uma palavra bonita de origem latina para designá-lo e peguei um dicionário de latim do meu filho que havia em casa e me pus a buscar *fratrura*, *fração*, etc; e percebi que todas essas palavras procedem do adjetivo latino *fractus*, *fracta*, *fratum* que faziam referência à aquele que se transforma em uma pedra ao lançá-la: peças irregulares. Eureka! Aí estava o termo que eu necessitava. Além disso, é uma palavra que funcionava muito bem em francês e em inglês. E assim foi como o livro que carecia de título passou*

a se chamar *Les objects fractals*, e mais tarde foi traduzido para muitos idiomas. E o termo *fractal* se encaixou muito bem. Várias das palavras que eu havia proposto não foram aceitas, porém *fractal*, sem dúvida. [24]

2.2 A Ideia por Trás dos Fractais

A ideia intuitiva no entendimento do termo Fractal, nos leva aos estudos de um dos pioneiros da filosofia do século VI a. C. Anaxágoras (500 a 428 a.C.) pensou a natureza como *unidade e multiplicidade*. Para ele a natureza é constituída por infinitas partículas divisíveis ao infinito, que se juntam para formar os diversos corpos. A essas partículas ele deu o nome de *homeomerias* que significa a semente das coisas.

Para Anaxágoras *nada nasce nem morre, mas a partir daquilo que existe, criam-se infinitas combinações e separações de todos os elementos, explicando-se assim a pluralidade das coisas*[?]. Ele entendia que qualquer coisa do mundo material contém necessariamente todas as múltiplas qualidades que se encontram no resto do universo físico, contudo cada coisa se distingue das outras por uma qualidade hegemônica. Assim, em cada coisa existe uma porção de cada coisa ou, sucintamente, parte de tudo em tudo e cada coisa se distingue das outras pelo predomínio de uma qualidade. Esta particularidade presente nas homeomerias de Anaxágoras no século IV a.C. é a característica que define os fractais de Benoit Mandelbrot do século XX.

2.3 A Geometria Fractal e as Geometrias Não-euclidianas

Há evidências de que Euclides enfrentou dificuldades a respeito da validade do quinto postulado enunciado por ele em sua obra *Os Elementos*. Usando um substituto equivalente e mais moderno ao enunciado por Euclides, o quinto postulado diz que: *Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela*[11]. O alegado por muitos matemáticos, aqui nos interessa somente os do século XIX para frente, é que este postulado está longe de ser auto-evidente e que, por esta razão, pudesse ser somente mais uma proposição. Outra alegação é de que o próprio Euclides retardou ao máximo o uso do quinto postulado e fez uso dele pela primeira vez somente para demonstrar a proposição *I – 29*. Assim, parece natural que até hoje existam questionamentos envolvendo a validade do quinto postulado.

Foi no início do século XIX, que essas as tentativas de demonstrar o quinto postulado deram frutos valiosos. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) criaram geometrias

alternativas, chamadas Geometrias Não-Euclidianas. Eles consideraram que o quinto postulado era independente dos demais postulados, ou seja, o modificaram e assim criaram as geometrias elíptica e hiperbólica: na primeira não existe nenhuma reta paralela a reta dada; e na segunda existem infinitas retas paralelas. Mais tarde, Benoit Mandelbrot criou mais uma geometria dita não-euclidiana, a geometria da natureza, chamada Geometria Fractal.

2.4 O Caos e a Geometria Fractal

A noção primitiva de caos remonta aos estudos de Karl Weierstrass que influenciou as conclusões de Henry Poincaré sobre sistemas dinâmicos.

A teoria do caos trabalha com sistemas de comportamento caóticos. Eles estão presentes em vários ramos das ciências e ao serem estudados podem ser encontrados padrões que apresentam uma determinada regularidade. A principal característica de sistema caóticos é que são extremamente sensível as condições iniciais. Qualquer interferência nos dados iniciais de um sistema desse tipo, não importando quão pequenas elas são, levará a uma grande diferença no estado final fazendo com que as previsões futuras sejam muito difíceis de serem determinadas.

Foi Edward Norton **Lorenz** (1917-2008), meteorologista, matemático e filósofo estadunidense quem, em 1960, realizou os primeiros estudos que levaram a teoria do caos. Ele construiu um modelo matemático para prever fenômenos meteorológicos futuros. Seu modelo era composto de uma equação linear de recorrência que gerava dados futuros sobre o tempo em função dos dados presentes.

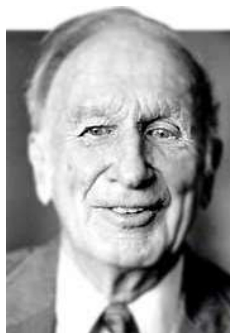


Figura 2.14: Edward Norton Lorenz. [2]

Para testar o comportamento numérico de seu modelo matemático ele lançou no computador o valor inicial para a componente tangencial da velocidade do vento na cidade de Boston. Após três horas de cálculo o computador deu como resultado a componente tangencial do vento, no mesmo local, para uma semana após. Ao tentar confirmar esse número ele lançou um valor de bem próximo do anterior - diferença na sexta casa decimal, acreditando que essa aproximação não implicaria em grandes alterações no valor previsto. Contudo, na nova previsão ele encontrou um valor para

a componente tangencial da velocidade do vento com uma diferença muito grande em relação a primeira. Ele concluiu que em seu sistema pequenas alterações nos valores iniciais provocavam enormes discrepâncias finais e escreveu: *é como se o simples e elegante voo de uma borboleta influenciasse a meteorologia dias depois*[25].

A geometria fractal está relacionada com a teoria do caos de Lorenz na medida em que seu objetivo é buscar padrões de comportamento em sistemas presumidamente aleatórios e caóticos. Elementos geométricos e imagens que não conseguiam ser justificadas pela geometria euclidiana são facilmente descritos pela geometria fractal bastando, para isso, encontrar um padrão de regularidade, mesmo que esse seja aproximado.

A Geometria Fractal

3.1 O que é um fractal?

Como bem o disse Benoit Mandelbrot o termo fractal veio para ficar, contudo até hoje não há consenso sobre sua definição formal. Ele próprio ao “dar a luz” ao verbete o definiu como um conjunto cuja dimensão de Hausdorff (conhecida como dimensão fractal) é superior a dimensão topológica. No entanto, esta definição “não vingou”. Varias outras definições foram propostas por matemáticos e pesquisadores da geometria fractal, mas nenhuma mostrou ser completa a ponto de incluir todos os tipos de fractais. Cumpre então estabelecer uma definição que atenda as peculiaridades desta pesquisa.

Definição 3.1: **Fractais** são formas geométricas presentes na natureza (ou criadas pelo homem) passíveis de serem parcionadas e cujas partes carregam a característica da auto-similaridade estrita (ou da auto-afinidade), em relação ao todo, independentemente da escala em que é observada.

Decorre desta definição que o essencial para se identificar um fractal é a manifestação regular de um padrão que se repete indefinidamente e, mesmo sendo natural, aparenta ter sido criado por um processo recorrente ou iterativo.

As formas estranhas e caóticas estão presentes em alguns fenômenos naturais como os sismos, o desenvolvimento das árvores, as redes hidrográficas, a estrutura da casca de uma árvore, a forma de algumas raízes, a linha de costa marítima, as nuvens. Tais formas que no século passado eram vistas como anomalias para a matemáticas, hoje apresentam um papel fundamental na interpretação da realidade e deram origem a mais um ramo da matemática, a geometria fractal, responsável pelo estudo das propriedades e do comportamento dos fractais.

Através dela, o homem vem conseguindo obter respostas onde a geometria clássica, a euclidiana, não conseguiu. Essa nova geometria nasceu fadada a conquistar o mundo e possui aplicações em várias áreas como na Arte, nas Tecnologias, na Astronomia, no Cinema, na Economia, na Medicina, na Geologia, na Meteorologia, e até na

interpretação dos fatos da história.

3.2 Características dos Fractais

Tecnicamente, podemos dizer que um objeto fractal apresenta invariância estrita (ou aproximada) na sua forma à medida em que a escala, na qual é observado, é alterada.

Apesar da falta de uma definição “universal” vigente, os fractais possuem características únicas inerentes a sua existência. São elas:

- Auto-semelhança;
- Complexidade infinita; e
- Dimensão.

3.2.1 Auto-semelhança

A característica da auto-semelhança dos fractais significa que parte do objeto se assemelha ao objeto visto como um todo. Uma árvore é um tipo de fractal encontrado na natureza e que possui essa característica. Ao observá-la se um galho for retirado conforme se vê na Figura 3.1, este galho é semelhante a árvore inteira. Se este processo for repetido sucessivamente para todos os galhos, todos eles serão cópias da árvore inteira, só que em menor escala. Esta característica não está presente nos objetos euclidianos. Por exemplo: um tronco de pirâmide não é semelhante a pirâmide inteira.

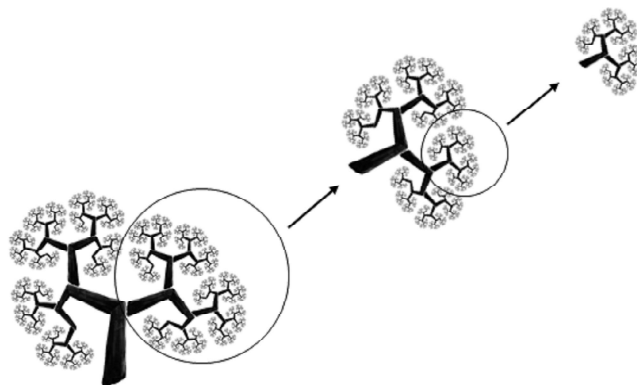


Figura 3.1: Auto-similaridade da Árvore Fractal.

Todavia há de se considerar dois tipos de auto-semelhança: a auto-similaridade estrita (ou exata) e a auto-afinidade.

A **auto-similaridade estrita** ocorre quando o objeto é composto por cópias idênticas de si mesmo. Geralmente são gerados por processos matemáticos e computacionais de transformações iterativas como é o caso do triângulo de Sierpinski da Figura 3.2. A iteratividade dos processos significa que todas as fases da construção do fractal estarão sujeitas as mesmas regras que se repetem consecutiva e indefinidamente, isso leva, em cada nível de construção, a configurações idênticas à inicial.

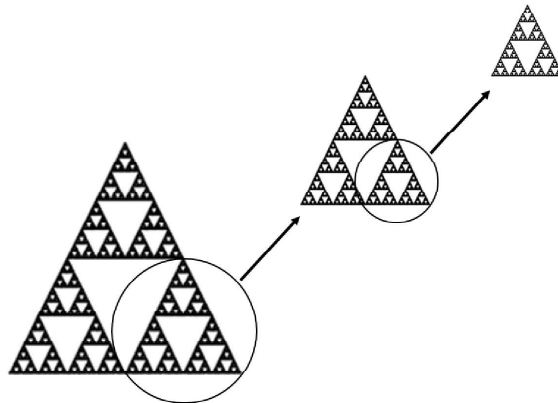


Figura 3.2: Auto-similaridade estrita do Triângulo de Sierpinski.

A **auto-afinidade** ocorre quando o objeto é formado por réplicas menores, mas com uma pequena variação em relação ao todo. É o caso do que ocorre com fractais encontrados na natureza como o Brócolis Romanesco da Figura 3.3. Esses fractais são igualmente formados por mini-cópias, mas essas são anisotrópicas, ou seja, ao se passar de uma escala para outra o tamanho das cópias não varia uniformemente em todas as direções do espaço.

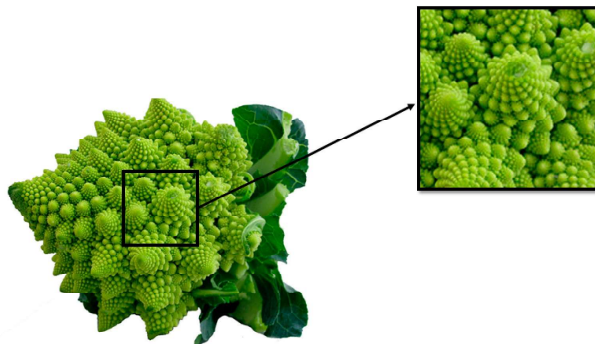


Figura 3.3: Auto-afinidade do Brócolis Romanesco.

3.2.2 Complexidade Infinita

A complexidade infinita dos fractais significa que ele nunca poderá ser representado por inteiro, pois a sua constituição é formada por uma quantidade infinita de detalhes, reentrâncias e saliências cada vez menores.[12] Está relacionada aos processos recursivos, ou seja, o processo de geração de uma figura é repetido sucessiva e infinitamente. Assim, quando se executa um determinado procedimento temos um sub-procedimento que é o próprio procedimento executado. É importante esclarecer que no caso de um fractal construído recursivamente através de transformações matemáticas e com a ajuda de um computador, é possível dispor de um número infinito de iterações que geram estruturas infinitamente complexas, mesmo que a infinitude não seja visível. Isto não ocorre no caso dos fractais naturais, neles a própria natureza se incumbem de interromper o processo.

3.2.3 Dimensão Fractal

A dimensão euclidiana refere-se a cada uma das direções em que é possível realizar medidas no espaço. Esta noção vincula a dimensão de uma figura (corpo ou objeto) ao número de coordenadas necessárias para descrevê-lo. Assim, parece natural que a maioria dos alunos no ensino fundamental e médio aprendam: que um ponto seja adimensional; que uma reta seja unidimensional, pois basta uma coordenada para descrevê-la; que uma figura no plano, como por exemplo uma circunferência, seja bidimensional, pois são necessárias duas coordenadas para descrevê-la; e, que uma figura no espaço, como por exemplo um cubo, seja tridimensional, pois são necessárias três coordenadas para descrevê-lo. Por indução, pode-se estender o raciocínio até a n -ésima dimensão, mesmo que não seja possível enxergar além da terceira dimensão.

Fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas pela dimensão euclidiana. Surge, então, a dimensão fractal como uma alternativa para estimar o grau de complexidade das estruturas fractais.

É importante ressaltar que as dimensões euclidianas são expressas por números inteiros. O mesmo não ocorre na geometria fractal, pois fractais são formas complexas e mesmo tendo dimensão euclidiana bem definida apresentam peculiaridades que a tornam insuficiente na descrição de algumas de suas características. Explicar, por exemplo, que o triângulo de Sierpinski está contido em um plano (dimensão 2) e que tem dimensão fractal aproximada de 1,584, não aparenta ser tão óbvio. Para demonstrar esta afirmação com o rigor que o assunto requer é necessário um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos relativamente sofisticados e fora do alcance de alunos do ensino fundamental e médio. Entretanto, é relevante para o estudo da geometria fractal, em qualquer nível de ensino, que se tenha ao menos uma ideia do que se trata e como será determinada a dimensão de um fractal. Para alcançar este objetivo parece razoável iniciar a discussão analisando a Curva de Koch.

O que caracteriza a curva de Koch como um fractal é o fato dela possuir infinitas

dobras que ao serem ampliadas continuam aparecendo indefinidamente. Sua construção se dá a partir de um segmento de reta de comprimento unitário (iteração 0). O processo iterativo infinito consiste em dividir cada segmento do nível anterior em três iguais e substituir o terço médio por um triângulo equilátero sem a base.

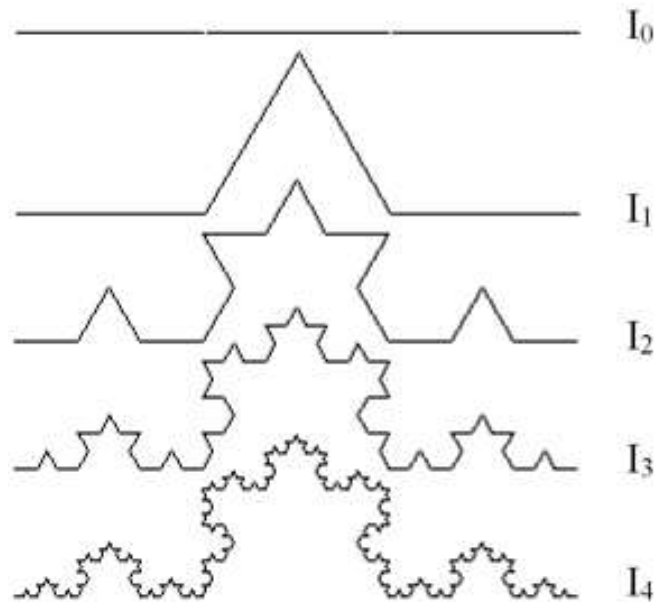


Figura 3.4: Iterações 0 a 4 da Curva de Koch.

A Figura 3.4 apresenta as iterações de 0 a 4 e:

- na iteração I_0 , obtem-se $Q_0 = 1$ segmentos de comprimento $C_0 = 1$, com curva de comprimento total $S_0 = 1$;
 - na iteração I_1 , obtem-se $Q_1 = 4$ segmentos de comprimento $C_1 = \frac{1}{3}$, com curva de comprimento total $S_1 = \frac{4}{3}$;
 - na iteração I_2 , obtem-se $Q_2 = 4^2$ segmentos de comprimento $C_2 = (\frac{1}{3})^2$, com curva de comprimento total $S_2 = (\frac{4}{3})^2$;
 - na iteração I_3 , obtem-se $Q_3 = 4^3$ segmentos de comprimento $C_3 = (\frac{1}{3})^3$, com curva de comprimento total $S_3 = (\frac{4}{3})^3$;
 - na iteração I_4 , obtem-se $Q_4 = 4^4$ segmentos de comprimento $C_4 = (\frac{1}{3})^4$, com curva de comprimento total $S_4 = (\frac{4}{3})^4$;
- ⋮
- na iteração I_n , obtem-se $Q_n = 4^n$ segmentos de comprimento $C_n = (\frac{1}{3})^n$, com curva de comprimento total $S_n = (\frac{4}{3})^n$.

Observe que quando n tende a infinito a quantidade de segmentos $Q_n = 4^n$ é infinita, o comprimento de cada segmento $C_n = (\frac{1}{3})^n$ tende a zero e o comprimento total da curva $S_n = (\frac{4}{3})^n$ é infinito.

Voltando ao questionamento sobre a dimensão da Curva de Koch, nota-se que essa curva ocupa mais espaço que uma reta, pois seu comprimento é infinito. Logo sua dimensão deve ser maior que 1. Por outro lado, verifica-se que ela não ocupa completamente uma faixa do plano que a contém, como se vê na Figura 3.5. Assim, espera-se que sua dimensão seja menor do que 2. A conclusão lógica, é que a dimensão da curva de Koch, D_k , é tal que $1 < D_k < 2$.

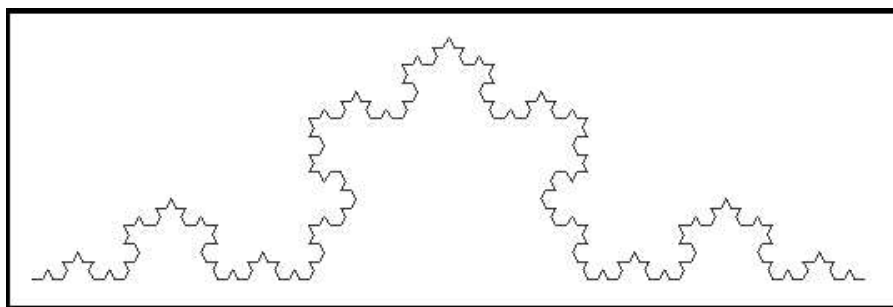


Figura 3.5: Faixa do plano ocupada pela Curva de Koch.

Vários devem ter sido os questionamentos que atormentaram Mandelbrot. Seria possível dentro da dimensão euclidiana afirmar que a curva de Koch é unidimensional, como o é para um segmento de reta, sabendo que a distância entre quaisquer dois de seus pontos é infinita? Seria, então, bidimensional, mesmo tendo conhecimento que ela não é grande o suficiente para preencher uma parcela do plano? É possível que a curva de Koch tenha dimensão entre um e dois? Pode-se concluir que na geometria fractal o conceito de dimensão em primeiro lugar está associado ao espaço que uma estrutura ocupa no espaço métrico em que está inserida, e em segundo lugar ao formato da estrutura, o grau de irregularidade em diferentes escalas, aspereza e fragmentação. Isso explica a possibilidade da dimensão de um fractal ser um número não inteiro e a denominação de que são estruturas imperfeitas a luz da geometria euclidiana.

Entre os vários métodos desenvolvidos para se determinar a dimensão dos fractais será abordado o processo de Felix Hausdorff (1868-1942)[26], matemático alemão considerado um dos fundadores da topologia moderna.

A Dimensão de Hausdorff

Para se determinar a dimensão Hausdorff vamos iniciar tomando uma reta de comprimento L , a qual é dividida em N partes iguais, com $N = 1, 2, 3, \dots$. Sendo $U = \frac{L}{N}$ o comprimento de cada segmento obtido pela divisão, então $N = \frac{L}{U}$ é a quantidade de segmento auto-similares ao segmento de comprimento L , ou seja,

precisamos de $N = \left(\frac{L}{U}\right)^D$ segmentos para obter a reta de comprimento L , onde D é sua dimensão. Aplicando-se o logaritmo na última identidade é possível verificar que a reta é unidimensional:

$$\log N = \log \left(\frac{L}{U}\right)^D$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{L}{U}\right)}$$

$$D = 1$$

Estendendo o mesmo processo para o quadrado de lado L , ao dividi-lo em N quadrados o valor de $\frac{L^2}{N}$ será a área de cada um dos quadrados menores e auto-similares ao quadrado original. Assim, o lado de cada um deles será $U = \frac{L}{\sqrt{N}}$ e $N = \left(\frac{L}{U}\right)^2$ a quantidade de quadrados auto-similares. Logo, para se obter o quadrado original de lado L precisamos de $N = \left(\frac{L}{U}\right)^D$, onde D é sua dimensão. Aplicando-se o logaritmo na última identidade é possível verificar que o quadrado é bidimensional:

$$\log N = \log \left(\frac{L}{U}\right)^D$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{L}{U}\right)}$$

$$D = \frac{\log \left(\frac{L}{U}\right)^2}{\log \left(\frac{L}{U}\right)}$$

$$D = \frac{2 \cdot \log \left(\frac{L}{U}\right)}{\log \left(\frac{L}{U}\right)}$$

$$D = 2$$

Para o cubo de lado L , ao dividi-lo em N cubos o valor de $\frac{L^3}{N}$ será o volume de cada um dos cubos menores e auto-similares ao cubo original. Assim, o lado de cada um deles será $U = \frac{L}{\sqrt[3]{N}}$ e $N = \left(\frac{L}{U}\right)^3$. Logo, para se obter o cubo original de lado L precisamos de $N = \left(\frac{L}{U}\right)^D$, onde D é a sua dimensão. Aplicando-se o logaritmo na última identidade é possível verificar que o cubo é tridimensional:

$$\log N = \log \left(\frac{L}{U} \right)^D$$

$$D = \frac{\log N}{\log(\frac{L}{U})}$$

$$D = \frac{\log(\frac{L}{U})^3}{\log(\frac{L}{U})}$$

$$D = \frac{3 \cdot \log(\frac{L}{U})}{\log(\frac{L}{U})}$$

$$D = 3$$

Logo, se aumentando a resolução de um fator $\frac{L}{U}$, o que equivale a dizer que a escala de medida é dividida por esse fator, passarem a ser observadas N objetos auto-similares ao original, então dimensão de auto-similaridade (ou dimensão de Hausdorff) será determinada pela relação

$$D = \frac{\lg N}{\lg(\frac{L}{U})}$$

E, ainda, $N = (\frac{L}{U})^D$ é sua equivalência sob a forma de lei de potência, onde:

- N é a quantidade de objetos auto-similares a estrutura original;
- $\frac{L}{U}$ é o fator de ampliação para se chegar a estrutura original;
- D é a dimensão de Hausdorff.

Cálculo da Dimensão Fractal

Reiterando o acima exposto, o método de Hausdorff foi concebido para calcular a dimensão de estruturas que exibem a auto-similaridade exata, assim os fractais que possuem essa característica estarão sujeitos a lei de potência $N = (\frac{L}{u})^D$ e a expressão $D = \frac{\lg N}{\lg(\frac{L}{U})}$ poderá ser usada para o cálculo de sua dimensão.

Assim, voltando a discussão sobre a dimensão da Curva de Koch, observamos que cada segmento dará origem a 4 outros segmentos cada um de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ do segmento de origem, então $N = 4$ e $\frac{L}{U} = \frac{1}{3}$ e sua dimensão de Hausdorff, D_K , e tal que $D_K = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$. Isso significa que a Curva de Koch, por ser mais “enrugada” que o segmento de reta, ocupa mais espaço do que uma simples linha reta (dimensão 1) e menos espaço do que superfície plana (dimensão 2).

Para o triângulo de Sierpinski, considerando-se o método da remoção de triângulos, o número de triângulo restantes após a primeira iteração será $N = 3$, com $\frac{L}{U} = \frac{1}{2} = 2$ e $D_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849$.

A dimensão 1 significaria a suavidade total, como por exemplo a linha reta, a dimensão 2 significaria a possibilidade de se preencher todo o plano e a dimensão 3 a possibilidade de se preencher todo o espaço. Assim, a complexidade de um fractal “no plano” aumenta a medida em que sua dimensão aumenta e tende a 2, e a complexidade de um fractal “no espaço” aumenta a medida em que sua dimensão fractal aumenta e tende a 3.

Cumprir discutir a situação para os fractais que não possuem a auto-similaridade estrita, como os fractais naturais, para os quais não é aconselhável utilizar o mesmo método utilizado para o cálculo da dimensão da Curva de Koch. Percebe-se que nos fractais naturais existe uma auto-similaridade estatística, que segue também uma lei de potência. Vários métodos foram desenvolvidos para se determinar a dimensão desses fractais, dentre eles o método da dimensão de capacidade que é muito próximo do cálculo da dimensão de Hausdorff e será abordado a seguir.

A ideia é cobrir com o número mínimo de esferas de raio r , $N(r)$, todos os pontos do objeto fractal. A medida em que o raio r diminui $\frac{1}{r}$ aumenta e maior será o número $N(r)$ de esferas necessários para cobrir o objeto. A dimensão de capacidade será definida através da expressão:

$$D_{\text{capacidade}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lg N}{\lg \left(\frac{1}{r}\right)}$$

Nesta pesquisa, cujo objetivo é atender alunos de ensino fundamental, o cálculo da dimensão estará restrito ao método de Hausdorff.

3.3 Aplicações da Geometria Fractal

Na geometria fractal estão inseridas construções diversas, tanto nas formas abstratas quanto nas formas inerentes a natureza. Os fractais resultantes das infinitas iterações de funções matemáticas, dão origem a imagens e sons de singular beleza. Já os fractais construídos pelos inexplicáveis processos originários da natureza, uma vez pesquisados, podem colaborar para a preservação da vida em nosso planeta e o evolução da humanidade. O desenvolvimento da geometria fractal tem proporcionado progressos em diversas áreas como a biologia, geologia, arquitetura, medicina, arte, etc. Sua aplicação vai da sua utilização na indústria cinematográfica até a medicina, como por exemplo as pesquisas relativas ao crescimento das células de cancro. Essa diversidade de aplicações dos fractais tem atraído cada vez mais adeptos a seu estudo, captando investimentos de empresas multinacionais para o desenvolvimentos de recursos tecnológicos e disseminando seu conhecimento fora da sociedade científica.

Desta forma, é significativo apresentar neste capítulo alguns avanços atrelados a geometria fractal.

3.3.1 Uso da Geometria Fractal na Medicina.

Hoje a teoria do caos associada a geometria fractal é vista como uma importante ferramenta para o progresso da área médica. O que na medicina pode ser aparentemente caracterizado como confuso, caótico e desordenado, se analisado sob a ótica dos sistemas dinâmicos pode exibir harmonia, ordem e regularidade. O homem, como parte da natureza, possui em seu corpo sistemas biológicos visivelmente complexos e uma abordagem reducionista desses sistemas resultaria em uma falsa realidade. Já é consenso dentre alguns médicos-pesquisadores que ainda não foram empreendidos esforços suficientes, mas que no futuro o diagnóstico e a prevenção de várias patologias estarão relacionadas as teorias do caos e dos fractais.

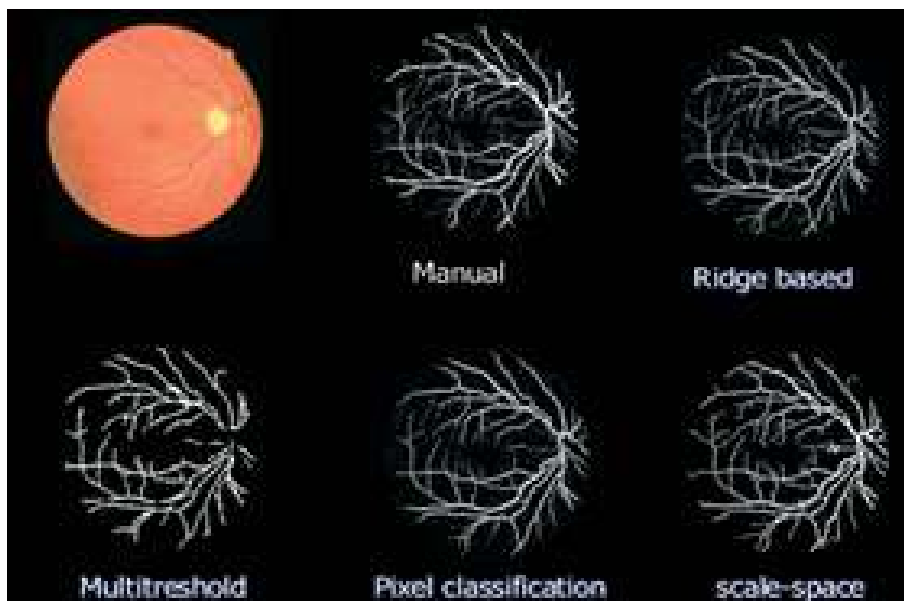


Figura 3.6: Estrutura fractal da vasculatura da retina. [20]

Recentemente foi realizada uma pesquisa sobre a árvore de vasculatura da retina. Foram utilizados vários métodos para o cálculo da dimensão e, ao final, ficou evidenciado que a sua estrutura pode ser classificada como um fractal, conforme se vê pela figura 3.6, e que *esforço deve ser levado a cabo com a perspectiva de que a Geometria Fractal, pode descrever as leis morfogênicas de estruturas complexas, possa vir a ser utilizada na modelagem matemática da vasogênese e na criação de métodos de diagnóstico automatizado das doenças retínicas, metas que, alcançadas, teriam grande impacto no campo da prevenção da cegueira.*[20]

Em busca da melhora dos diagnósticos através de imagens biomédicas diversos métodos de filtragem de imagens foram desenvolvidos para facilitar a detecção de

padrões estruturais associados a evolução das células de cancro. Neste contexto, foram observadas propriedades que descrevem um comportamento fractal nos diferentes padrões de ocupação das células nos tecidos e parâmetros fractais diferenciados nas células cancerosas. As imagens de tumores sugerem que as células de de cancro indicam um padrão de heterogeneidade maior em relação as células normais, ou seja, células de tumores cancerígenos têm dimensão fractal superior à células de tecidos normais. [20]

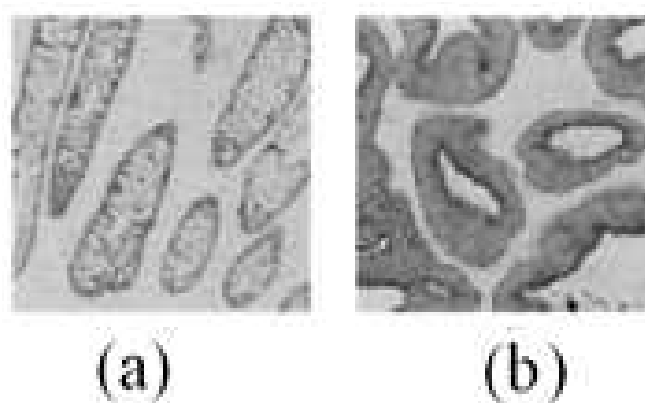


Figura 3.7: (a) Imagem de célula normal com dimensão fractal de 1,7. // (b) Imagem de célula cancerosa com dimensão fractal de 1,87. [20]

3.3.2 A Arte nos Fractais

As imagens fractais bidimensionais talvez sejam as melhores representantes da conexão existente entre a matemática e a arte. A articulação entre essas duas áreas propicia o uso de saberes matemáticos no contexto artístico e fornece uma nova linguagem geométrica que vem inspirando artistas. Imagens fractais criadas por computadores são belíssimas e são consideradas verdadeiras obras de arte. Contudo, formas fractais foram detectadas em obras de arte bem antes dos avanços tecnológicos. Katsushika Hokusai (1760-1849), Maurits Cornelis Escher (1898-1972) artistas notáveis que utilizaram em suas obras traços da geometria fractal.

Conhecido por suas gravuras retratando o monte Fuji, Hokusai retratou fractais naturais nas nuvens e nas ondas do mar construídas minuciosamente através de cuidadosas repetições que sugerem composições fractais. Uma de suas obras mais conhecidas é chamada de A grande onda como se vê na Figura 3.8

As obras de Escher demonstram mais claramente a auto-similaridade estrita e a tentativa de alcançar o infinito, características inerentes aos fractais, veja Figura 3.9.

Em Londres, o artista plástico Gregory Sams, é um representante ativo no uso de imagens fractais, Figura 3.10. Na década de 1990, ele criou a loja Strange Attractions, loja dedicada a teoria do caos. Após dezenas de horas em seu computador pesquisando



Figura 3.8: A Grande Onda de Hokusai. [7]



Figura 3.9: Circle Limit I de Escher. [16]

sobre a teoria do caos, ele passou a produzir e licenciar imagens fractais que eram utilizadas em cartazes, cartões, camisetas, etc.

3.3.3 Fractais nas Telas dos Cinemas

O uso da teoria dos fractais na indústria cinematográfica é muito comum nos dias de hoje. A criação de paisagens e objetos de grande beleza, de diferentes texturas e extrema realidade só se tornaram possíveis a partir de sua utilização. Em 1978, Loren Carpenter trabalhava na Boeing Aircraft, em Seattle. Ele ajudava aos engenheiros que projetavam os aviões buscando visualizar como estes se comportavam em vôo utilizando computação gráfica na elaboração de paisagens em 3D. Mas, o resultado obtido não era satisfatório. Foi quando ele encontrou o livro *Objetos fractais, formas,*



Figura 3.10: Imagem criada por Gregory Sams. [5]

acazos e dimensão do matemático Benoit Mandelbrot. Carpenter resolveu aplicar as idéias do livro a computação gráfica e, em 3 dias, utilizando-se da repetição infinita, ele já construiu imagens de montanhas. Carpenter foi trabalhar na *Lucasfilm* e hoje é um dos diretores de animação da *Pixar Animation Studios*. Sua primeira criação utilizando computação gráfica e a teoria fractal foi um planeta para o filme *Jornada nas estrelas II – A ira de Khan*, marco inaugural de uma nova era para indústria cinematográfica, conforme imagem de divulgação Figura 3.12 .[3]

Desde então, a geometria fractal é usada em computação gráfica para a criação de texturas, superfícies e paisagens com aparência extremamente realista. Uma ideia é a criação da superfície de uma montanha que pode ser modelada num computador usando a teoria fractal como se vê na Figura 3.14. Inicia-se com um triângulo no espaço 3D, encontra-se os pontos centrais dos lados do triângulo e traçam-se as três bases médias, determinando quatro novos triângulos. A seguir deslocam-se de aleatoriamente esses pontos centrais para cima ou para baixo dentro de uma gama de valores estabelecidos. Vai-se repetindo o mesmo procedimento a cada interação. Essa técnica é chamada de recursão, ou seja, um procedimento é fragmentado numa sequência de repetições de si mesmo.

Concluí-se que a geometria fractal aliada a computação gráfica revolucionou a indústria do cinema. Em vários outros filmes já lançados foram utilizada essa nova tecnologia, contudo o filme *Dr. Estranho*, imagem de divulgação na Figura 3.13, lançado em 2016 pela Marvel, surpreende pela grande quantidade e pela beleza da imagens fractais utilizadas como efeitos especiais.

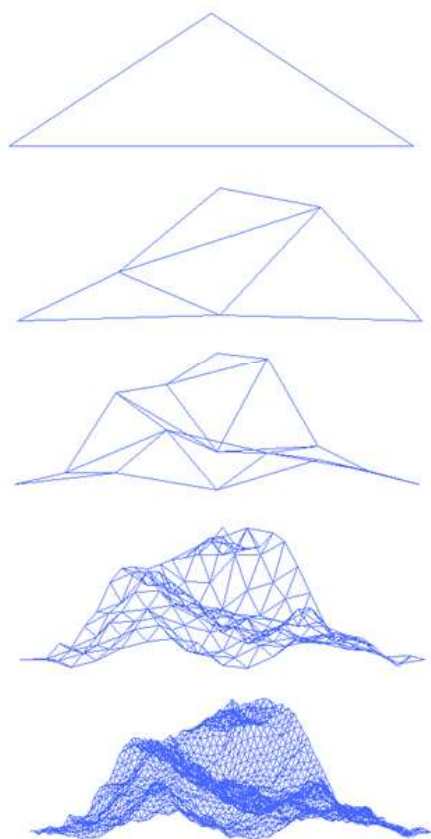


Figura 3.11: Etapas da criação da montanha fractal.[3]



Figura 3.12: Filme “Jornada nas Estrelas II - A Ira de Kan”, da Lucasfilm.

3.3.4 A Tecnologia e os Fractais

A expansão do setor de telecomunicações trouxe como consequência novos desafios tecnológicos. A demanda por dispositivos leves, compactos e portáteis tem aumentado o interesse dos pesquisadores e da indústria mundial. Um dos objetivos é reduzir as dimensões desses dispositivos sem perda de performance. As antenas fractais



Figura 3.13: Filme “Dr. Estranho”, da Marvel.

vieram para substituir as antigas antenas externas dos aparelhos de telefonia móvel. A primeira antena fractal foi desenvolvida pela Motorola. Baseada na Curva de Koch, conforme se vê na Figura 3.14, revolucionou o mercado de celulares, pois conseguem funcionar, de forma satisfatória, simultaneamente em várias frequências, pois usam das características de um fractal para maximizar a superfície do material que recebe e transmite as ondas eletromagnética. Já as antenas comuns costumam operar bem apenas na faixa de frequências para a qual foram projetadas.



Figura 3.14: Celular da motorola e a primeira antena fractal. [1]

A estrutura das “árvores fractais” está sendo usada como base para o desenvolvimento de um novo tipo de célula solar. Esta célula é formada por galhos minúsculos de uma árvore fractal de prata. Por exemplo: são necessários 50 galhos da árvore fractal para cobrir o diâmetro de um fio de cabelo humano. Árvores deste tipo são cultivadas

pela redução eletroquímica de nitrato de prata sobre um filme de estanho dopado com flúor. Como é de se esperar, cada galho é formado por ramificações que, por sua vez, são formadas por ramificações menores e assim por diante. Logo esses galhos chegam a dimensões microscópicas, o que dá a árvores uma área superficial gigantesca possibilitando a coleta de um número muito superior de fótons, em comparação com a célula solar plana convencional. A árvore fractal de prata, Figura 3.15, é revestida com polímeros que absorvem a luz e quando os fótons atingem o revestimento de polímero, eles produzem elétrons e lacunas. As lacunas, positivamente carregadas, são coletadas através dos ramos da árvore, enquanto os elétrons, que são negativos carregados, movem-se para um contra-eletrodo, criando uma corrente elétrica. É o mesmo sistema utilizado por uma árvore real, que utiliza sua estrutura fractal, através de seus galhos, ramos e folhas, para aumentar a superfície da sua copa e, assim, otimizar a coleta de luz solar. Da mesma forma, as nano-árvores possuem uma grande área superficial, o que ajuda a coletar mais fótons.

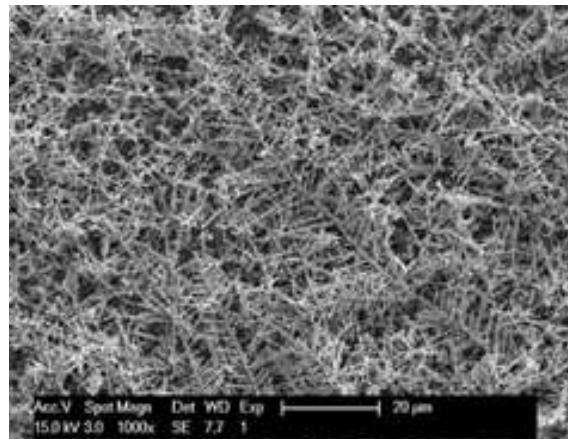


Figura 3.15: Célula solar com estrutura de árvore fractal. [9]

Os fractais também foram utilizados para resolver o problema de aquecimento desigual dos alimentos nos fornos de micro-ondas. A solução para esse problema se chama meta-fractal que é a união de metamateriais e fractais. Os metamateriais são materiais artificiais modificados de tal forma que adquirem propriedades não existentes de forma natural. No caso dos fornos de micro-ondas, os meta-fractais funcionam como um cobertor elétrico de alimentos. Construído na forma de uma folha de plástico ou bandeja, o meta-fractal se parece com um filme plástico normalmente usado na cozinha e poderá ser incorporado na própria embalagem dos alimentos congelados. Ele distribui melhor o calor, diminui o tempo de cozimento, reduzindo o consumo de energia do forno de micro-ondas.

3.4 Alguns Fractais da História

3.4.1 O Conjunto de Cantor

Em 1883, Georg Cantor apresentou um de seus mais famosos trabalhos denominado **Conjunto de Cantor** que foi um dos resultados encontrados quando trabalhava na demonstração de que muitos conjuntos infinitos, em particular o conjunto dos números reais entre 0 e 1, tem mais elementos que o conjunto dos números naturais.

Apesar de não apresentar um apelo visual como a maioria dos fractais, o Conjunto de Cantor é fundamental para o desenvolvimento dos estudos sobre fractais. Benoit Mandenbrot o usou como modelo para explicar a distribuição das frequências de erros causados pelos ruídos nas linhas de transmissão de informações de computador para computador.

Para construir o Conjunto de Cantor considere como figura inicial um intervalo da reta real fechado $I_0 = [0,1]$ de comprimento $C_0 = 1$, isto ocorrerá na iteração 0.

Dividimos este intervalo em três partes iguais, descartando a parte central obteremos dois intervalo fechados restantes $I_{11} = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_{12} = [\frac{2}{3}, 1]$ de comprimento $C_1 = \frac{1}{3}$, isto ocorrerá na iteração 1.

Novamente, dividimos cada um dos dois intervalo da iteração anterior em três partes iguais, descartando a parte central de cada um deles e obtendo quatro intervalo fechados restantes $I_{21} = [0, \frac{1}{9}]$, $I_{22} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $I_{23} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ e $I_{24} = [\frac{8}{9}, 1]$, cada um de comprimento igual a $C_2 = \frac{1}{3^2}$, veja Figura 3.16.

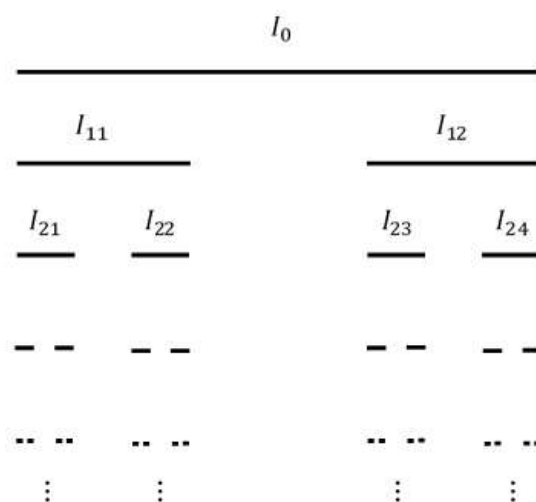


Figura 3.16: Conjunto de Cantor.

Continuando o processo indefinidamente, na iteração i -ésima teremos 2^i intervalos

fechados $I_{i,k}$ com $k = 1, 2, \dots, 2^i$ cada um deles de comprimento $C_i = \frac{1}{3^i}$, onde $i = 0, 1, 2, \dots$.

Podemos considerar a soma dos comprimentos dos segmentos obtidos em cada iteração i , $S_i = 2^i \cdot \frac{1}{3^i} = \left(\frac{2}{3}\right)^i$ e observar que quando $i \rightarrow \infty$ cada segmentos terá comprimento $C_i \rightarrow 0$ e conseqüentemente a sua soma $S_i \rightarrow 0$. Assim o somatório dos segmentos restantes de todas as iterações será

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = 1 + 3 = 4$$

Por outro lado, analisando os segmentos descartados em cada iteração $i \geq 1$ (na iteração $i = 0$ não haverá segmento descartado) observamos que serão retirados 2^{i-1} segmentos, cada um deles de comprimento igual a $C_i = \frac{1}{3^i}$. Assim, em cada iteração $i \geq 1$ a soma dos segmentos descartados sera $D_i = 2^{i-1} \cdot \frac{1}{3^i}$.

O total removido será, então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \cdot \frac{1}{3^i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento total removido é igual a 1, resultado um pouco curioso, pois significa que retiramos todos os pontos do intervalo inicial $I_0 = [0,1]$. Mas a conclusão não é bem esta, e tal demanda levará o presente estudo a discussão sobre a infinitude do conjunto dos números reais que é um tópico para uma pesquisa futura.

3.4.2 A Curva de Koch

Niels Fabian Helge von **Koch**, apresentou 1906 a seu curioso fractal, mesmo que na época ele não fosse classificado desta forma. A **Curva de Koch** é uma curva continua em todo seu domínio e que não apresentava nenhuma tangente. Através dela pode-se trabalhar conceitos da geometria euclidiana como comprimento de segmento e área. Sua construção resulta de um processo iterativo fazendo cópias de cópias de si mesma e, por essa razão, carrega com sigio a característica de auto-similaridade estrita (ou absoluta) onde o fator de redução em relação a curva original será dado por uma potência da fração $\frac{1}{3}$.

Sua construção baseia-se no processo recursivo e foi descrita na seção 3.2.3, contudo é importante recordar alguns aspectos deste fractal já discutidos. Então, após realizadas n iterações (n inteiro e $n \geq 0$):

- o número de segmento é expresso por $Q_n = 4^n$ e para n muito grande tendendo a infinito, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty$$

Isto significa que com o processo iterativo o número de segmentos cresce na proporção de 1 : 4 e tende a ser infinito. Isto reafirma a característica de infinitude presente nos fractais auto-similares.

- o comprimento de cada segmento é expresso por $C_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e para n muito grande tendendo a infinito, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Isto significa que com o processo iterativo o comprimento de cada segmento se reduz na proporção de 1 : 3 e fica cada vez menor, tendendo a zero.

- o comprimento total da curva $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ e para n muito grande tendendo a infinito, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Isto significa que com o processo iterativo o comprimento da curva aumenta, tendendo ao infinito. Curioso, pois a pesar do comprimento de cada segmento tender a zero o comprimento da curva torna-se infinitamente grande.

Assim, o processo de construção da Curva de Koch é razoavelmente simples e em cada iteração é possível determinar quatro segmentos a partir de cada segmento da iteração anterior. E, como um fractal, não importa o fator de ampliação, a quantidade de detalhes observado continua sendo muito grande.

3.4.3 A Curva Floco de Neve de Koch

A **Curva Floco de Neve de Koch**, Figura 3.17, tem como ponto de partida um triângulo equilátero (aqui de lado unitário como na Curva de Koch trabalhada anteriormente) e cada lado do triângulo funciona como uma Curva de Koch. A seguir serão discutidos aspectos referentes ao comprimento desta curva e da área delimitada por ela.

Como cada lado do triângulo equilátero dará início a uma Curva de Koch espera-se que, em cada iteração, o comprimento total desta curva seja o triplo da Curva de Koch correspondente, então sua expressão será dada por $S_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, após infinitas iterações é obvio que o comprimento da Curva Floco de Neve de Koch tenderá ao infinito, ou seja,

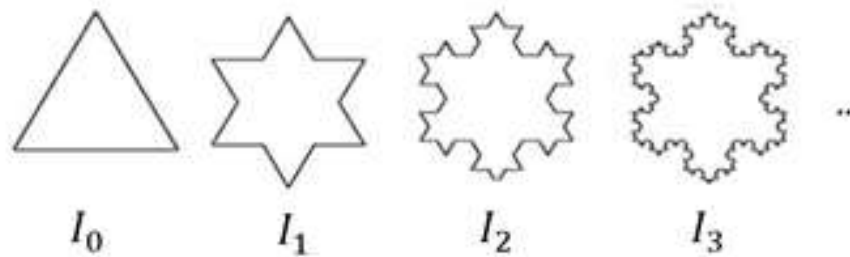


Figura 3.17: Curva Floco de Neve de Koch.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

O objetivo final será o de determinar a área delimitada pela Curva Floco de Neve de Koch. Na Figura 3.18 é apresentada a uma tabela indispensável para se determinar esta área, partindo do triângulo equilátero inicial (lado unitário), etapa a qual denominaremos iteração I_0 , observamos que:

| Iteração | I_1 | I_2 | I_3 | I_4 | ... | I_n |
|--|-------|-------------|---------------|---------------|-----|-------------------|
| Número de triângulos em uma curva de Koch | 1 | 4 | 4^2 | 4^3 | ... | 4^{n-1} |
| Número de triângulos inscritos na Curva do Floco de Neve de Koch | 3 | $3 \cdot 4$ | $3 \cdot 4^2$ | $3 \cdot 4^3$ | ... | $3 \cdot 4^{n-1}$ |

Figura 3.18: Tabela das iterações da Curva Floco de Neve de Koch.

- na iteração I_0 , existe apenas o triângulo equilátero de lado unitário, então a área total da figura será $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$
- na iteração I_1 , o número de triângulos em uma Curva de Koch (lado do triângulo) será $N_1 = 1$ e na Curva Floco de Neve de Koch o número de triângulos inscritos será $NT_1 = 3$ cada um com área $A_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- na iteração I_2 , o número de triângulos em uma Curva de Koch (lado do triângulo) será $N_2 = 4$ e na Curva Floco de Neve de Koch o número de triângulos inscritos será $NT_2 = 3 \cdot 4$ cada um com área $A_2 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

- na iteração I_3 , o número de triângulos em uma Curva de Koch (lado do triângulo) será $N_3 = 4^2$ e na Curva Floco de Neve de Koch o número de triângulos inscritos será $NT_3 = 3 \cdot 4^2$ cada um com área $A_3 = \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

⋮

- na iteração I_n , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, o número de triângulos em uma Curva de Koch (lado do triângulo) será $N_n = 4^{n-1}$ e na Curva Floco de Neve de Koch o número de triângulos inscritos será $NT_n = 3 \cdot 4^n$ cada um com área $A_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Observe que no nível n são inscritos $3 \cdot 4^{n-1}$ novos triângulos, cada um deles com lado medindo $\frac{1}{3^n}$ e área $A_n = \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3^{2n}} \frac{\sqrt{3}}{4}$. Assim, a área total delimitada pela Curva Floco de Neve de Koch é dada por:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} A_n$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \frac{1}{3^{2n}} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right), \quad \text{mas} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5}\right)$$

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{8}{5}$$

$$A_T = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Comparando a área do triângulo inicial $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ e a área delimitada pela Curva Floco de Neve de Koch $A_T = \frac{2\sqrt{3}}{5}$, teremos:

$$\frac{A_T}{A_0} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\frac{A_T}{A_0} = \frac{8}{5}$$

$$A_T = \frac{8}{5} A_0$$

Logo, a área delimitada pela Curva Floco de Neve de Koch A_T é $\frac{8}{5}$ da área do triângulo inicial A_0 , ou seja, a área final é finita e maior que a área inicial. Então, a

Curva Floco de Neve de Koch tem uma característica especial: é uma curva infinita que delimita uma área finita.

3.4.4 O Triângulo de Sierpinski

Sua construção se dá a partir de um triângulo sólido qualquer (para facilitar o desenrolar dos cálculos necessários para chegar aos resultados finais será considerado um triângulo equilátero de lado unitário) está será a iteração I_0 . A partir deste triângulo passa-se a construção de suas três bases médias cujo resultado, já conhecido da geometria euclidiana plana, determina quatro triângulos congruentes cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo original e perímetro igual a $\frac{1}{2}$ do perímetro do triângulo original. A iteração I_1 é concluída após a eliminação do triângulo central. O processo iterativo infinito consiste construir as bases médias dos triângulos restantes e eliminar sempre o triângulo central.



Figura 3.19: Iterações do triângulo de Sierpinski.

Logo, teremos na:

- iteração I_0 o número de triângulos será $N_0 = 1$, de lado medindo $L_0 = 1$, área total $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro total $P_0 = 3$.
- iteração I_1 o número de triângulos restantes será $N_1 = 3$, cada um de lado medindo $L_1 = \frac{1}{2}$, área $A_1 = (\frac{1}{2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro $p_1 = 3 \cdot \frac{1}{2}$, sendo área total da figura $S_1 = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro total $P_1 = 3 \cdot \frac{3}{2}$.
- iteração I_2 o número de triângulos restantes será $N_2 = 3^2$, cada um de lado medindo $L_2 = \frac{1}{2^2}$, área $A_2 = (\frac{1}{2^2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro $p_1 = 3 \cdot \frac{1}{2^2}$, sendo área total da figura $S_1 = 3^2 \cdot (\frac{1}{2^2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro total $P_1 = 3^2 \cdot \frac{3}{2^2}$.
- iteração I_3 o número de triângulos restantes será $N_3 = 3^3$, cada um de lado medindo $L_3 = \frac{1}{2^3}$, área $A_3 = (\frac{1}{2^3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro $p_1 = 3 \cdot \frac{1}{2^3}$, sendo área total da figura $S_1 = 3^3 \cdot (\frac{1}{2^3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro total $P_1 = 3^3 \cdot \frac{3}{2^3}$.

⋮

- iteração I_n , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, o número de triângulos restantes será $N_n = 3^n$, cada um de lado medindo $L_n = \frac{1}{2^n}$, área $A_n = (\frac{1}{2^n})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro $p_n = 3 \cdot \frac{1}{2^n}$, sendo área total da figura $S_n = 3^n \cdot (\frac{1}{2^n})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ e perímetro total $P_n = 3^n \cdot \frac{3}{2^n}$.

⋮

Cumpra analisar o que ocorre quando o valor de n torna-se muito grande, tendendo ao infinito:

- número total de triângulos restantes será:

$$N_T = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n$$

·

$$N_T = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$$

·

- a medida do lado de cada triângulo restante será:

$$L_T = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$$

·

$$L_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

·

- a área de cada triângulo restante será:

$$A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

·

$$A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

·

- o perímetro de cada triângulo restante será:

$$p_T = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

·

$$p_T = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{2^n} = 0$$

·

- a área total da figura será:

$$S_T = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$S_T = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

- o perímetro total da figura será:

$$P_T = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

$$P_T = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \frac{3}{2^n}$$

$$P_T = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Assim como a Curva Floco de Neve de Koch, quando o número de iterações e muito grande (tendendo a infinito) o triângulos de Sierpinski nos leva a uma conclusão no mínimo interessante: a figura gerada tem perímetro infinito, porém sua área total tende a zero.

Também é interessante discutir a respeito da soma das áreas dos triângulos eliminados em cada iteração. Observe que só haverá eliminação a partir da iteração I_1 . Veja que na:

- iteração I_1 o número de triângulos eliminados será $N'_1 = 1$, de lado $L'_1 = \frac{1}{2}$ e área total igual a $S'_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

- iteração I_2 o número de triângulos eliminados será $N'_2 = 3$, cada um de lado $L'_2 = \frac{1}{2^2}$ e área $A'_2 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, com área total eliminada na iteração igual a $S'_2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

- iteração I_3 o número de triângulos eliminados será $N'_3 = 3^3$, cada um de lado $L'_3 = \frac{1}{2^3}$ e área $A'_3 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, com área total eliminada na iteração igual a $S'_3 = 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

⋮

- iteração I_n , com $n = 1, 2, 3, \dots$ o número de triângulos eliminados será $N'_n = 3^n$, cada um de lado $L'_n = \frac{1}{2^n}$ e área $A'_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, com área total eliminada na iteração igual a $S'_n = 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

⋮

Assim, a soma total das áreas eliminadas em cada iteração será:

$$\begin{aligned}
 S'_T &= S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_3 + \dots \\
 S'_T &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots \\
 S'_T &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot [3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^1 \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots + 3^{n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2] \\
 S'_T &= \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right], \\
 \text{mas } \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n &= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3 \\
 \text{logo, } S'_T &= \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 3 \\
 S'_T &= \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

A conclusão após a iteração I_n , com n muito grande tendendo ao infinito é que a área eliminada é igual a área do triângulo inicial.

3.5 O Fractal de Benoit Mandelbrot

A imagem gerada pelo conjunto fractal de Mandelbrot estabelece um fascínio particularmente interessante que conquista a todos pela sua beleza. Tão linda, rica e complexa de detalhes é que para encontrá-la não é preciso garimpar muito, hoje ela é encontrada em posters, camisetas, cartões postais, capas de CD, etc. Se Mandelbrot tivesse conhecimento do sucesso das imagens de sua função iterativa talvez a tivesse usado com fins financeiros.

O fim principal desta pesquisa é avaliar a possibilidade de aplicação da geometria fractal no ensino fundamental, isto posto, para descrever a função de Mandelbrot não serão apresentados esclarecimentos baseados em excessivos cálculos matemáticos e programas computacionais que geram sua imagem. Será feita uma abordagem mais didática, intuitiva e com informações que permitam a compreensão de um curioso não pertencente ao mundo acadêmico. Entretanto, para um melhor entendimento dos conceitos utilizados na explicação cumpre esclarecer ideias por trás dos sistemas dinâmicos discretos, das iterações e órbitas.

3.5.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

A área de sistemas dinâmicos estuda processos cuja evolução é dada por uma lei matemática e seu objetivo é construir uma teoria que permita compreender e prever suas situações futuras.

A palavra sistema, no sentido matemático, se refere a um conjunto de elementos (variáveis) interconectados e que se relacionam entre si através de uma transformação (função) como um fenômeno de causa e efeito. Já a palavra dinâmica refere-se a evolução no tempo de um sistema em relação as causas que provocam as alterações.

Então, a grosso modo, um sistema dinâmico discreto é um modelo matemático que determina um conjunto de valores através de uma transformação (função) aplicada repetida e sucessivamente para obter valores de certa variável, ou seja, um valor é encontrado em termos do(s) valor(es) anterior(es). A palavra discreto está relacionada a intervalos inteiros.

Na natureza encontramos vários exemplos de sistemas dinâmicos cuja evolução (equivalente as iterações) são dependentes do tempo (intervalos): evolução de planetas, reações químicas, crescimento do sistema biológicos, etc...

Iterações

Para maior clareza, a explicação sobre as iterações serão realizadas tomando como exemplo funções reais de variáveis reais.

Dada uma função $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ as iterações de f para um valor $x \in \mathfrak{R}$ são os valores da sequência de composição de f , tais que $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$ em que $f^n(x) = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$ e $f^0(x) = x$ com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Aqui a transformação que define cada iteração será expressa por $x_{n+1} = f(x_n)$ com $n \geq 0$ para x_0 .

Assim, para a função real de variável real $f(x) = x^2$, as iterações de $x_0 = 2$ é a sequência de valores $x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 16, x_3 = 256, \dots$

Órbitas

O conjunto composto pelos valores $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ determinados pela transformação $x_{n+1} = f(x_n)$ é chamado de órbita de x_0 e pode ser indicado por $O(x_0, f)$. Órbitas finitas são formadas por um número finito de elementos e órbitas infinitas são formadas por um número infinito de elementos.

Dada uma função, f se existe um x_0 em seu domínio tal que $f^n(x_0) = x_0$, esse x_0 é chamado ponto fixo e sua órbita será o conjunto formado pela sequência x_0, x_0, x_0, \dots . E um ponto x_0 no domínio de f é dito periódico se $f^n(x_0) = x_0$, n será o período de x_0 e sua órbita será dita órbita periódica.

Então, para a função $f(x) = x^2 - 1$:

- Se $x_0 = -1$ tem-se $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = -1, x_5 = 0, \dots$. Neste caso a órbita de $x_0 = -1$ é periódica de período 2 e os pontos $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ são pontos da órbita $O(x_0 = -1, f(x) = x^2 - 1)$.
- Se $x_0 = 1$ tem-se $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = -1, \dots$. Neste caso a órbita de $x_0 = 1$ não é periódica, mas possui pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = -1$ que são periódicos, então diz-se que a órbita de $x_0 = 1$ é eventualmente periódica.

Para a função linear $f(x) = ax + b$ a dinâmica dependerá dos valores das constantes reais a e b :

Caso 1: A constante $a = 1$, então:

- se $b = 0$ a função terá a forma $f(x) = x$ e todos os pontos de valor x reais serão pontos fixos e suas órbitas são óbvias;
- se $b \neq 0$ a função terá a forma $f(x) = x + b$ e $x_0, x_1 = x_0 + b, x_2 = x_0 + 2b, x_3 = x_0 + 3b, \dots, x_n = x_0 + nb, \dots$ são os valores pertencentes ao conjunto da órbita de x_0 . Com $b > 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$ e com $b < 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$ e isto significa que as órbitas de x_0 tendem para o infinito

Caso 2: A constante $a \neq 1$. Neste caso os pontos fixos devem obedecer a equação $ax + b = x$ cuja única solução é $x_0 = \frac{b}{1-a}$

- se $|z| < 1$, tem-se $\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{b}{1-a}$.
- se $|z| > 1$, tem-se $\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$.

Em ambos os casos existe um único ponto fixo e, ou todas as órbitas convergem para $\frac{b}{1-a}$ ou todas as órbitas, exceto para os pontos fixos, divergem (vão para o infinito).

Caso 2: A constante $a = -1$. Neste caso o ponto fixo será $x_0 = \frac{b}{2}$. Para os outros valores tem-se que $f^2(x) = f(-x + b) = -(-x + b) + b = x$, ou seja, as órbitas serão periódicas de período 2, pois: $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = x$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{2n+1}(x) = f(x)$.

3.5.2 O Conjunto de Mandelbrot

Sabe-se que conjunto de Julia é um sistema dinâmico discreto que fornece de pontos do plano complexos obtidos quando se aplica iteradamente a transformação $z_{n+1} = z_n^2 + c$, sendo z_n uma variável inicial complexa e c uma constante complexa. Mandelbrot analisou a mesma função sistema e, ao contrário de Júlia e Fatou, considerou $z_0 = 0$ constante e c como uma variável complexa.

Verifique que iterando a função para cada ponto c do plano complexo, encontra-se uma determinada sequência de iterações. Então,

- para $c = 0$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, \dots$

- para $c = -1$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = -1, \dots$
- para $c = i$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = i, z_2 = i - 1, z_3 = -i, z_4 = i - 1, z_5 = -i, \dots$

Verifica-se que para $c = 0$ todos os termos da sequência infinita convergem para zero, ou seja, $z_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e por esta razão é limitada. Neste caso teremos um ponto fixo. Agora, para $c = -1$ e $c = i$ as sequências geradas são periódicas e também limitadas, pois todos os pontos se mantêm dentro de um círculo limite a uma certa distância da origem. Para esses valores de c as órbitas de $z_0 = 0$ são limitadas.

Verificando o que ocorre para outros valores de c , tem-se que:

- para $c = 1$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 5, z_4 = 26, z_5 = 677, \dots$
- para $c = 2$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = 2, z_2 = 6, z_3 = 38, z_4 = 1446, \dots$
- para $c = 1 + i$, as iterações fornecem a sequência de iterações: $z_0 = 0, z_1 = 1 + i, z_2 = 1 + 3i, z_3 = -8 + 7i, z_4 = 16 + 111i, \dots$

Verifica-se que $c = 1, c = 2$ e $c = 1 + i$ geram sequências ilimitadas que vão para o infinito. Logo, para esses casos as órbitas de $z_0 = 0$ são divergentes.

Para compreender o sistema de Mandelbrot é interessante ter a ideia do que ocorre na construção da curva. Considerando um círculo de raio 2 cumpre determinar a sequência de pontos gerada pela transformação $z_{n+1} = z_n^2 + c$, para $z_0 = 0$ e c variável complexa. Tome um valor para c e faça n iterações (considere n razoavelmente grande). Se os pontos das órbitas pertencerem ao círculo de raio 2 este ponto será retido, caso contrário o ponto será desprezado (diz-se que o ponto escapa, vai para infinito ou diverge). À medida de o número de iterações aumenta, mais pontos escapam para o infinito. Então, o fractal de Mandelbrot é a figura formada pelos pontos retidos após n iterações. A figura 3.20 representa a curva de Mandelbrot, onde todos os pontos retidos receberam a cor preta. Na curva de Mandelbrot colorida, as cores dever estar relacionadas com o número de iterações que o ponto pertencer a órbita leva ir para o infinito.

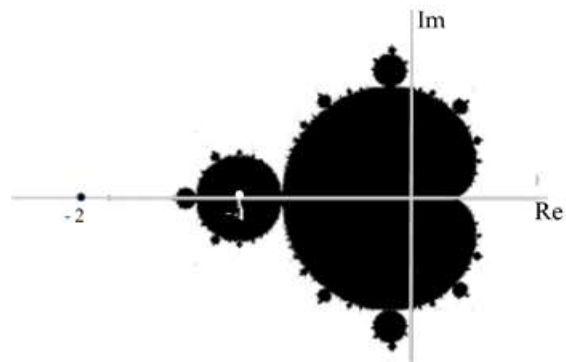


Figura 3.20: Fractal de Mandelbrot.

Fractais no Currículo do Ensino Fundamental

Quando um aluno aprende, não é o aluno que temos diante de nós, no dado momento em que aprende, mas, sim, um aluno que reatualiza toda sua complexidade de vivências, de aprendizagens, de frustrações e de afetos já vividos, e que se tornam presentes em cada novo ato de aprendizagem. Como se se tratasse de um fractal vivente. (Antoni J. Colom, 2004) [13]

4.1 A História do Ensino da Geometria no Brasil

Existe hoje e já existia no passado uma grande preocupação sobre a relevância do ensino da geometria. Desde a década de 1990 profissionais e estudiosos da educação matemática têm empreendido esforços com o propósito de tornar seu ensino mais acessível e prazeroso aos alunos. Para uma melhor compreensão das propostas atuais é valoroso ter o conhecimento da trajetória e dos fatos que influenciaram o ensino da matemática no Brasil, em especial da geometria.

Até o final da década de 1920, a matemática ensinada na maioria das escolas brasileiras era baseada em traduções e compilações de livros franceses. O primeiro livro de matemática brasileiro propriamente dito, Curso de Mathématique Elementar, foi lançado em 1929, por Euclides Roxo, com uma proposta de reestruturação da sequência a ser ensinada - nela havia a fusão dos conteúdos de aritmética, álgebra e geometria.

Em 1931, com a Reforma Francisco Campos o ensino da matemática em todo o país passa a ter um caráter nacional. Com o fracasso da proposta de Euclides Roxo, em 1942, foi promulgada a Reforma Gustavo Capanema, nela a aritmética, álgebra e

geometria passaram a ser estudadas em separado - os conteúdos de geometria eram ensinados de forma dedutiva desde o curso fundamental até o Universitário.

No final da década de 1950, chega no Brasil o Movimento da Matemática Moderna que priorizava o ensino da teoria dos conjuntos e da álgebra, o ensino de geometria foi deixado em segundo plano. Este movimento começa a ser repensado a partir da década de 1970.

Em 1980, o National Council of Teacher of Mathematic, órgão dos EUA, recomenda que no ensino da matemática seja dado destaque para a resolução de problemas, adverte sobre a importância do papel do aluno na construção do conhecimento e propõe o uso das novas tecnologias na sala de aula.

A partir da décadas 1990, sob a influência das novas concepções a respeito da construção do conhecimento, surgem discussões acerca da importância do conhecimento geométrico. É o início do resgate da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática.[27]

Em 1998, foram criados pelo MEC os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de 5ª a 8ª séries. Neles há uma recomendação de que o ensino de geometria deve ser associado a outros conteúdos e que o aluno deve ser levado ao uso da matemática como: *... instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.*[15]

4.2 Os Fractais e o Currículo Escolar

Até a década de 1980 os conteúdos de matemática eram abordados de forma desconectada das outras áreas do conhecimento e sem a preocupação de dar significado práticos a seus conteúdos. Somente nos anos de 1990 é que iniciou-se a preocupação de que o ensino matemática deveria ser abordada em sala de aula com a perspectiva de que ela está presente em diversas áreas e caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo através de uma interpretação peculiar da natureza, das relações sociais e econômicas. A geometria, uma importante área da matemática também passou a ser vista de uma forma diferente, pois é através de seu estudo que são criados modelos de pesquisa, novas formas de compreender e atuar no mundo.

A geometria fractal tem uma capacidade inerente de integrar as diferentes áreas do conhecimento e propiciar o trabalho interdisciplinar na sala de aula. Também possibilita o uso de computadores na criação do que podemos chamar de arte-fractal e arte associada a matemática viabiliza a representação da realidade, fazendo a transição no imaginário do aluno do concreto para o abstrato.

Neste sentido, é necessário mostrar que a natureza pode ser observada e por meio dessas observações criar discussões sobre o meio em que se vive, inquirir sobre os traços irregulares, imperfeitos e caóticos das formas da natureza que fogem dos conceitos da geometria euclidiana, mas que podem ser abordados através das

geometrias não-euclidianas, dentre elas a geometria fractal como bem descreve os PCN's: *O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos teorias matemáticas evidenciou, ... , que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso, a Estatística e a probabilidade, e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais.*[22]

Percebe-se que os PCN's vêm com bons olhos a inserção das geometrias fractal no currículo base dos ensinos fundamental e médio. Entretanto, a Proposta Curricular de Matemática do Ensino Fundamental do 6º ao 9º Ano do Estado de Minas Gerais não faz nenhuma referência a nenhuma das geometrias não-euclidianas. [19]

Tendo em vista o objetivo desta pesquisa, a seguir é apresentada uma sugestão de plano de sequência didática e plano de execução didática para o 9º ano do ensino fundamental incluindo o estudo de conceitos básicos da geometria fractal e suas aplicações. Posteriormente, para a comprovação da viabilidade desta proposta, são apresentadas uma série de atividades que possibilitam o trabalho com a geometria fractal nesse ano de ensino.

4.2.1 Plano de Sequência Didática e Plano de Execução Didática

O Plano de Sequência Didática (PSD) é um elemento norteador para todo o processo de construção da aprendizagem. Nele encontra-se a matriz de referência (lista de competências e habilidades) relacionadas com os objetos de conhecimento (conteúdos).

O PSD proposto foi elaborado tendo como referencial o ensino por competências que é uma abordagem construtivista. Nela o sujeito (aluno) ocupa a posição central no processo ensino-aprendizagem, é ele quem deve produzir seu próprio conhecimento.

O Plano de Execução Didática (PED) é um documento que apresenta as sequências didáticas elaboradas pelos docentes que vão lecionar determinada disciplina num determinado ano escolar e será a base para o desenvolvimento dos processos avaliativos, sejam eles mensurados ou não. O PED deve relacionar as sequências didáticas com as habilidades e competências a serem trabalhadas com discentes.

A competência na área da educação é uma característica que deve ser desenvolvida no alunos no sentido de potencializar sua capacidade de resolver problemas. Não problemas matemáticos, mas problemas relacionados a situações cotidianas em casa, na escola e futuramente no trabalho. Já a habilidade deve ser trabalhada com o aluno e é uma aplicação prática de uma determinada competência - é o aluno saber fazer.

A seguir será apresentado um recorte do PSD e do PDE visando exclusivamente apresentar a proposta de inclusão da geometria fractal.

PLANO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Ensino Fundamental

Eixo Temático: Espaço e Forma.

Competência - C_1 : Utilizar e analisar a natureza, a função e o impacto das novas tecnologias na construção do conhecimento, associando-o aos conhecimentos científicos e as situações-problema que se propõem solucionar.

Habilidades Matemáticas:

- HM_1 - Distinguir, em contextos variados, figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações e utilizando de nomenclatura própria.
- HM_2 - Compor e decompor figuras geométricas e calcular seu perímetro e área.
- HM_3 - Desenvolver a noção de figuras geométricas semelhantes.
- HM_4 - Aplicar as propriedades e relações métricas de figuras geométricas.
- HM_5 - Relacionar as novas tecnologias ao desenvolvimento das sociedades e ao conhecimento que elas produzem.

PLANO DE EXECUÇÃO DIDÁTICA

9o Ano do Ensino Fundamental

Competência - C_1 : Utilizar e analisar a natureza, a função e o impacto das novas tecnologias na construção do conhecimento, associando-o aos conhecimentos científicos e as situações-problema que se propõem solucionar.

Descritores:

- D_1 : Introduzir conceitos da geometria fractal utilizando elementos geométricos da natureza e elementos geométricos construídos pelo homem. (HM_1)

- D_2 : Calcular perímetros e áreas de figuras geométricas fractais. (HM_2)
- D_3 : Relacionar a semelhança de figuras geométricas fractais. (HM_3)
- D_4 : Construir relações métricas de figuras geométricas fractais. (HM_4)
- D_5 : Utilizar recursos computacionais para trabalhar com figuras geométricas fractais. (HM_5)
- D_6 : Trabalhar com variados recursos didáticos manuais para construir figuras geométricas fractais. (HM_1)

4.3 Os Fractais na Sala de Aula

A introdução da geometria fractal amplia o conhecimento geométrico dos alunos, viabiliza uma nova forma de enxergar a natureza e mostra que as imagens geradas pela matemática vão além dos gráficos e que podem estar carregadas de beleza estética. É possível através da análise de processos iterativos determinar expressões gerais para áreas e perímetros e a partir delas tirar conclusões curiosas que aguçam a curiosidade e o interesse dos alunos.

Neste capítulo serão apresentadas as atividades realizadas durante a oficina *Estudo e Construção de Fractais para o 9o Ano do Ensino Fundamental* aplicadas no do Colégio Militar de Belo Horizonte no período de 24 de outubro a 03 de novembro de 2016.

As atividades tiveram como objetivo principal avaliar a possibilidade de introdução da Geometria Fractal na base curricular do ensino básico, bem como introduzir conceitos iniciais, características, tipos e aplicações dos fractais; e como objetivos secundários trabalhar com a internet e rever conceitos matemáticos de perímetro e área de figuras planas.

Descrição do estabelecimento de ensino:

O Colégio Militar de Belo Horizonte, situado na cidade de Belo Horizonte, completa ano de 2017, 62 anos desde sua criação. O ensino da instituição orienta-se pela legislação federal relativa aos ensinos fundamental e médio, tendo suas peculiaridades e características exclusivas pois faz parte, com suas 12 unidades, da estrutura do Exército Brasileiro.

É subordinado diretamente à Diretoria de Ensino Preparatório e Assistencial, órgão do Exército Brasileiro, a quem cabe supervisionar, controlar, orientar e coordenar as atividades didático-pedagógicas.

Seu ensino compreende os ensinos fundamental e médio completos, sendo todo o processo educacional baseado nos valores, costumes e tradições do Exército Brasileiro. Em sua proposta pedagógica o Colégio Militar de Belo Horizonte tem como um dos seus objetivos gerais, tornar a aprendizagem significativa como fator decisivo para o desenvolvimento dos alunos; e como um de seus fundamentos educacionais, utilizar procedimentos didáticos e técnicas metodológicas que conduzam o aluno a construir, com a mediação do professor, o próprio conhecimento.

Descrição dos alunos e da série de ensino envolvidos na pesquisa:

A pesquisa foi desenvolvida com os 73 alunos das três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Militar de Belo Horizonte, cuja característica predominante relativa aos pré-requisitos matemáticos é a heterogeneidade. A carga horária destinada a disciplina de matemática é de 5 horas-aula semanais (3 horas-aulas para o conteúdo de álgebra e 2 horas-aulas para o conteúdo de geometria) mais 2 horas-aulas semanais de desenho geométrico. Para o desenvolvimento do trabalho das três áreas de estudo da matemática a série conta com três professores licenciados em matemática.

4.3.1 Descrição da aula 01:

- **Local da atividade:** sala de informática.
- **Duração da atividade:** 45 min.
- **Objetivo específico:** introduzir o conceito de fractal.
- **Habilidade matemática a ser trabalhada:** HM_1
- **Competência a ser trabalhada:** C_1
- **Descritor matemático a ser trabalhado:** D_1

ATIVIDADE 1: Definindo Fractais.

Pesquise sobre os Fractais na internet e responda os itens a seguir.

Item 1: O que é um Fractal?

Resposta do aluno Souza: *Objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Em termos simples, é um con-*

junto geométrico ou objeto natural cujas partes têm a mesma estrutura (irregular e fragmentada) que o todo, mas em escalas diferentes.

Item 2: Cite as principais características de um fractal.

Resposta do aluno Souza: *Estrutura fina em qualquer escala (detalhamento infinito), não pode ser descrita de maneira simples por uma função analítica ou linguagem geométrica tradicional, possui auto-similaridade e dimensão fractal.*

Item 3: Quem melhor representa a natureza: a Geometria Euclidiana ou a Geometria Fractal?

Resposta do aluno Souza: *Geometria Fractal.*

Item 4: Quem foi o criador da Geometria fractal?

Resposta aluno do Souza: *Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia, 20/11/1924 - Cambridge, 14/10/2010).*

Item 5: A Geometria Fractal pode ser aplicada a outras áreas de estudo distintas da Matemática? Cite ao menos uma aplicação.

Resposta aluno Souza: *antena fractal (tecnologia das telecomunicações) e computação gráfica.*

Item 6: Procure na internet alguns tipos de fractais e gif's animados de fractais.

Mediação do professor: Além do auxílio prestado durante toda a aula, nos dez minutos finais o professor exibiu uma sequência de slides com um resumo do conteúdo trabalhado no dia.

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 1 os alunos foram direcionados para o laboratório de informática e fizeram uma pesquisas individual (cada aluno em um computador) para responder as perguntas pré-selecionadas. Nesta atividade a estratégia de ensino utilizada foi o “ensino com pesquisa” que visa

desenvolver a autonomia e a concentração do aluno.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos foram atingidos, quais sejam o de aguçar o interesse dos alunos. Isto ficou evidenciado no momento em que fizeram uma procura na internet de gif's animados. Acharam as imagens interessantes e muito bonitas. Outro momento de grande interesse foi no final da aula quando o professor fez um resumo baseado no questionário e apresentou as várias aplicações da geometria fractal.

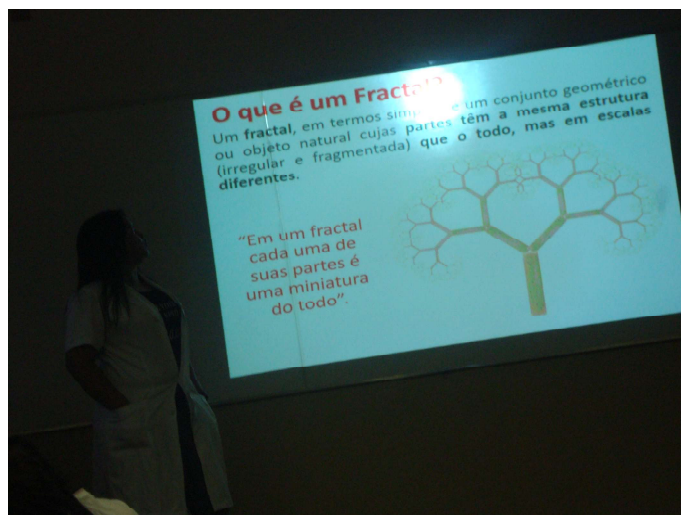


Figura 4.1: Apresentação de slides sobre a atividade 1.

4.3.2 Descrição da aula 02:

- **Local da atividade:** sala de informática.
- **Duração da atividade:** 45 min.
- **Objetivo específico:** introduzir a Curva de Koch.
- **Habilidade matemática a ser trabalhada:** HM_3 e HM_5
- **Competência a ser trabalhada:** C_1
- **Descritor matemático a ser trabalhado:** D_3 e D_5

ATIVIDADE 2: A Curva de Koch

Niels Fabian Helge Von Koch, nasceu em Estocolmo em 25 de janeiro de 1870, foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como Curva de Koch que aparece em seu trabalho *Une Méthode Géométrique Élémentaire Pour L'étude de Certaines Questions de la Théorie des Courbes Plane* publicado em 1906 e que une métodos de geometria elementar com a teoria das curvas. Uma variação deste fractal é a Curva do Floco de Neve de Koch, construída a partir de três curvas de Koch, cada uma tendo como ponto de partida os lados de um triângulo equilátero de lado unitário. O trabalho de Koch consiste principalmente em provar que sua curva é contínua e que não possui tangente.



Figura 4.2: Niels Fabian Helge Von Koch. [17]

(Para responder aos itens de 9 a 11 será feita análise de dados obtidos com a ajuda de uma planilha do Excel construída pelo alunos no laboratório de informática).

Item 7: Construa a Curva de Koch seguindo os passos a seguir.

• **1º. Passo**

Iteração 0: Inicie com um segmento de reta de comprimento unitário;

• **2º. Passo**

Iteração 1: Substitua o terço-médio do segmento (iteração 0) por um triângulo equilátero sem a base.

• **3º. Passo**

Iteração 2: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração 1) por um triângulo equilátero sem base.

⋮

• **nº. Passo**

Iteração k : Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração $k - 1$) por um triângulo equilátero sem a base.

| | | | | | | | |
|-------------------------|---|---|---|---|---|-----|-----|
| Iteração | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | k |
| Número de segmentos | | | | | | ... | |
| Medida de cada segmento | | | | | | ... | |
| Comprimento da curva | | | | | | ... | |

Figura 4.3: Tabela atividade 2.

Item 8: Faça uma análise da Curva de Koch e preencha a tabela a seguir.
Resposta do aluno Dani:

| | | | | | | | |
|--|---|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-------------------|
| Item 8: Faça uma análise da curva de Koch e preencha a tabela a seguir. | | | | | | | |
| Iteração | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | k |
| Número de segmentos | 1 | 4 | 4^2 | 4^3 | 4^4 | ... | 4^k |
| Medida de cada segmento | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3^2}$ | $\frac{1}{3^3}$ | $\frac{1}{3^4}$ | ... | $\frac{1}{3^k}$ |
| Comprimento da curva | 1 | $\frac{4}{3}$ | $(\frac{4}{3})^2$ | $(\frac{4}{3})^3$ | $(\frac{4}{3})^4$ | ... | $(\frac{4}{3})^k$ |

Figura 4.4: Tabela preenchida pelo aluno Dani.

Item 9: No nível k qual a quantidade de segmentos da curva, considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Resposta do aluno Dani: *A medida que o valor de k aumenta a quantidade de segmentos aumenta cada vez mais, tendendo ao infinito.*

Item 10: No nível k qual o comprimento de cada segmento da curva, considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

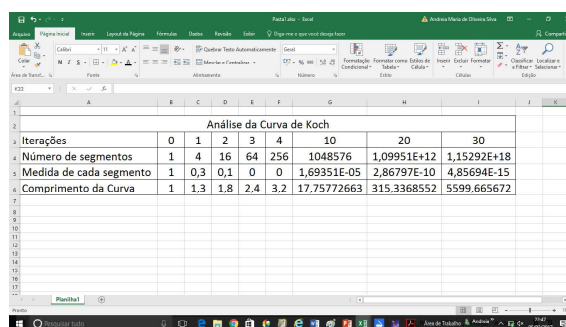
Resposta do aluno Dani: *A medida que o valor de k aumenta a medida do segmento vai ficando cada vez menor, tendendo a zero.*

Item 11: No nível k qual o comprimento total da curva, considerando k é um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Resposta do aluno Dani: *A medida que o valor de k aumenta o comprimento da*

curva aumenta cada vez mais, tendendo a infinito.

Mediação do professor: Para a resolução dos itens de 9 a 11 o professor dirigiu uma discussão acerca dos comprimentos dos segmentos e da curva em cada nível. Foi feita uma análise dos resultados obtidos quando o valor da variável k aumenta usando uma tabela de excel, conforme se vê na figura 4.5.



| Análise da Curva de Koch | | | | | | | | |
|--------------------------|---|-----|-----|-----|-----|-------------|-------------|-------------|
| Iterações | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 20 | 30 |
| Número de segmentos | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1048576 | 1,09951E+12 | 1,15292E+18 |
| Medida de cada segmento | 1 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0 | 1,69351E-05 | 2,86797E-10 | 4,85694E-15 |
| Comprimento da Curva | 1 | 1,3 | 1,8 | 2,4 | 3,2 | 17,75772663 | 315,3368552 | 5599,665672 |

Figura 4.5: Tabela de excel construída pelos alunos.

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 2 os alunos foram direcionados para o laboratório de informática e realizaram o trabalho com a ajuda do computador (cada aluno em um computador). Nesta atividade as estratégias de ensino utilizadas foram “estudo dirigido com aula orientada” que permite ao aluno compreender e interpretar os problemas propostos e ao mesmo tempo sanar dificuldades de entendimento.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos foram atingidos, quais sejam o de perceber a infinitude do fractal estudado e as relações matemáticas. As generalizações para a iteração k foram óbvias para a maioria dos alunos e para responder aos itens considerando o número de iterações infinito ele usaram conhecimentos adquiridos nas aulas de informática. O auge da atividade foi a construção manual da curva de Koch, alguns alunos escolheram utilizar régua e compasso fazendo uso dos conhecimentos adquiridos nas aulas de desenho geométrico - figura 2.9 e figura 4.6

4.3.3 Descrição da aula 03:

- **Local da atividade:** sala de informática do Colégio Militar de Belo Horizonte.
- **Duração da atividade:** 45 min.
- **Objetivo específico:** introduzir a curva Floco de Neve de Koch.

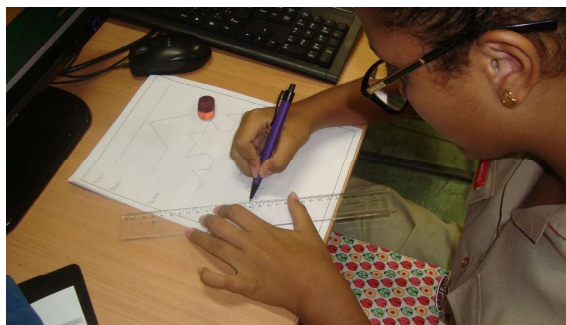


Figura 4.6: Construção da Curva de Koch com régua.

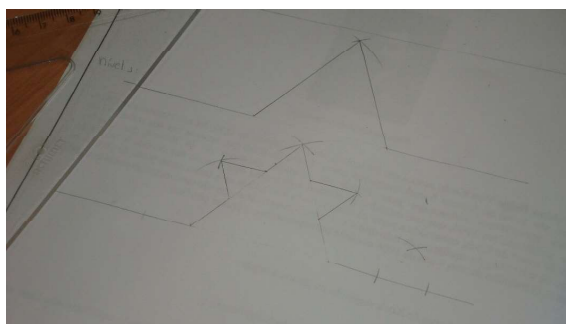


Figura 4.7: Curva de Koch construída com uso de régua e compasso.

- **Habilidade matemática a ser trabalhada:** HM_2 e HM_4 .
- **Competência a ser trabalhada:** C_1 .
- **Descritor matemático a ser trabalhado:** D_2 e D_4 .

ATIVIDADE 3: A Curva Floco de Neve de Koch

A curva Floco de Neve de Koch é formada por três curvas de Koch, cada uma das quais construída nos lados de um triângulo equilátero de lado unitário.

Construção da Curva Floco de Neve de Koch:

- **1º. Passo**

Iteração 0: Inicie com um triângulo equilátero de lado unitário;

- **2º. Passo**

Iteração 1: Substitua o terço-médio de cada lado do triângulo equilátero do (iteração 0) por um triângulo equilátero sem base.

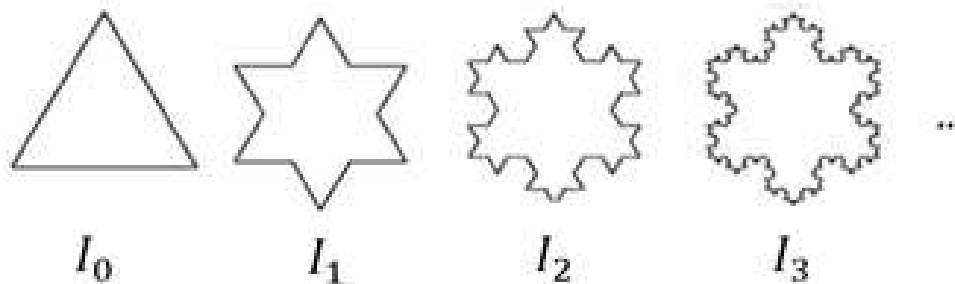


Figura 4.8: Atividade 3: Iterações da Curva Floco de Neve de Koch.

• 3º. Passo

Iteração 2: Substitua o terço-médio de cada segmento determinado (iteração 1) por um triângulo equilátero sem base.

⋮

• nº. Passo

Iteração K: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração $K - 1$) por um triângulo equilátero sem a base e, assim, sucessiva e indefinidamente.

Item 12: Faça uma análise dos níveis 0, 1 e 2 e preencha a tabela a seguir.

| Iteração | 1 | 2 | 3 |
|---|---|----|----|
| Número de triângulos da em uma Curva de Kock | 3 | 4 | 12 |
| Número de triângulos inseridos na Curva Floco de Neve de Kock | 3 | 34 | 37 |

Figura 4.9: Tabela atividade 3.

Resposta do aluno Souza:

Item 13: Após calcular o perímetro da curva Floco de Neve de Kock nos níveis 1, 2 e 3 o que ocorrerá com o perímetro da curva no nível K, considerando k um

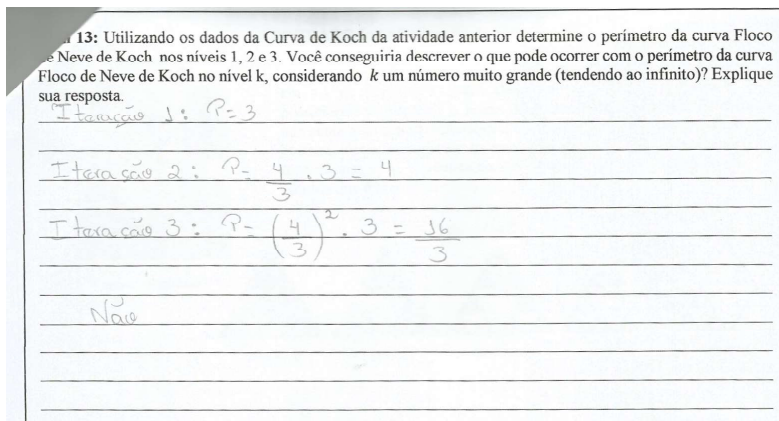


Figura 4.10: Resolução item 13.

número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Resposta do aluno Souza:

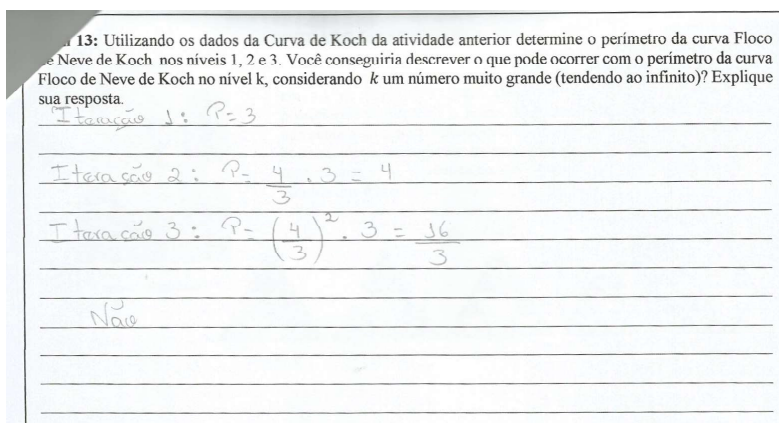


Figura 4.11: Resolução item 13.

Item 14: Após calcular a área da curva Floco de Neve de Kock nos níveis 1, 2 e 3 o que ocorrerá com a área da curva no nível K , considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Resposta do aluno Souza:

Item 15: Agora responda a pergunta:

Qual a curva de comprimento infinito que delimita uma área finita?

Item 14: Utilizando os dados da Curva de Koch da atividade anterior determine a área da curva Floco de Neve de Koch nos níveis 1, 2 e 3. Você conseguiria descrever o que pode ocorrer com o perímetro da curva Floco de Neve de Koch no nível k , considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Iteração 1: $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Iteração 2: $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + 12 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$

Iteração 3: $A_3 = \frac{10\sqrt{3}}{27} + 48 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{4\sqrt{3}}{243} = \frac{94\sqrt{3}}{243}$

Não

Figura 4.12: Resolução item 14.

Resposta do aluno Souza: *A curva floco de neve de Koch.*

Mediação do professor: Para a resolução dos itens de 12 a 14 o professor entrevistou para prestar esclarecimentos sobre a resolução dos itens envolvendo os cálculos de perímetro e área.

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 3 os alunos foram direcionados para o laboratório de informática e realizaram o trabalho com a ajuda do computador (cada aluno em um computador). Nesta atividade as estratégias de ensino utilizadas foram “estudo dirigido com aula orientada” que permite ao aluno compreender e interpretar os problemas propostos e ao mesmo tempo sanar dificuldades de entendimento.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos foram parcialmente atingidos. No primeiro momento os alunos foram instruídos a procurar na internet gif’s animados demonstrando as etapas de construção da curva, logo em seguida passaram ao preenchimento da tabela sendo que até este momento não foram constatadas maiores dificuldades. Com relação aos itens de 13 a 15 ficou evidenciado que a resolução tais itens não foi satisfatória e, por esta razão, conclui-se que a atividade não estava adequada. Os cálculos foram realizados em conjunto com o professor que fez uso do quadro.

4.3.4 Descrição da aula 04:

- **Local da atividade:** sala de informática do Colégio Militar de Belo Horizonte.
- **Duração da atividade:** 45 min.

- **Objetivo específico:** introduzir o triângulo Sierpiński.
- **Habilidade matemática a ser trabalhada:** HM_2 e HM_3 .
- **Competência a ser trabalhada:** C_1 .
- **Descritor matemático a ser trabalhado:** D_2 e D_3 .

ATIVIDADE 4: O Triângulo de Sierpiński



Figura 4.13: Waław Sierpiński.

Waław Sierpiński, matemático polonês, nasceu em Varsóvia na Polônia em 14 de março de 1882. Descreveu, em 1915, o fractal que posteriormente recebeu o nome de Fractal de Sierpiński. Este fractal apresenta algumas características, tais como: ser auto-semelhante em todos os seus níveis, ter área total igual a zero e não perder a sua definição inicial.



Figura 4.14: Triângulo de Sierpiński.

Item 16: Descreva a construção do triângulo de Sierpińsk pelo método de remoção de triângulos. (Use a figura acima e faça uma pesquisa internet)

Resposta da aluno Dani: *O triângulo de Sierpinski é um fractal criado a partir de um triângulo equilátero da seguinte maneira: divide-se cada lado do triângulo ao meio, unem-se esses pontos médios e forma-se um novo triângulo equilátero, a seguir, retira-se o triângulo central. Em seguida, repete-se esse mesmo procedimento em cada um dos triângulos restantes indefinidamente.*

Item 17: Preencha a tabela a seguir, considere que o triângulo equilátero do nível 0 tem lado unitário.






| Nível | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--|---|---|---|---|---|
| Figura associada |  |  |  |  |  |
| Comprimento do lado de cada triângulo restante | 1 | | | | |
| Área de cada um dos triângulos restante | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | | | |
| Área da figura | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | | | |

Figura 4.15: Tabela atividade 4.

Resposta da aluno Dani:

Item 18: Preencha a terceira coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no nível 1? Em relação ao nível anterior a área aumenta ou diminui?

Resposta da aluno Dani: *O valor da área da figura obtida no nível 1 é $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. Em relação ao nível anterior a área diminui.*

Item 19: Preencha a quarta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da






| Iteração | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|--|---|
| Figura associada |  |  |  |  |  |
| Número de triângulos | 1 | 3 | 3^2 | 3^3 | 3^4 |
| Comprimento do lado de cada triângulo | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ |
| Área de cada um dos triângulos restante | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4^2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4^3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4^4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4^5}$ |
| Área total da figura | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $3\frac{\sqrt{3}}{4^2}$ | $3^2\frac{\sqrt{3}}{4^3}$ | $3^3\frac{\sqrt{3}}{4^4}$ | $3^4\frac{\sqrt{3}}{4^5}$ |

Figura 4.16: Tabela atividade 4 preenchida.

figura obtida no nível 2? Em relação ao nível anterior a área aumenta ou diminui?

Resposta da aluno Dani: *O valor da área da figura obtida no nível 2 é $\frac{9\sqrt{3}}{64}$. Em relação ao nível anterior a área diminui.*

Item 20: Preencha a quinta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no nível 3? Em relação ao nível anterior a área aumenta ou diminui?

Resposta da aluno Dani: *O valor da área da figura obtida no nível 3 é $\frac{27\sqrt{3}}{256}$. Em relação ao nível anterior a área diminui.*

Item 21: Preencha a sexta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no nível 4? Em relação ao nível anterior a área aumenta ou diminui?

Resposta da aluno Dani: *O valor é $\frac{81\sqrt{3}}{1024}$. Em relação ao nível anterior a área diminui.*

Item 22: É possível calcular a área da figura obtida no nível k , onde k é um número muito grande tendendo ao infinito? Qual o valor dessa áreas, ou melhor, essa área se aproxima de qual valor

Resposta da aluno Dani: *Sim. Essa área se aproxima do valor zero.*

Mediação do professor: Para a resolução do itens de 16 a 17 o professor entrevistou

para prestar esclarecimentos sobre pré-requisitos como base média do triângulo e fórmula da área do triângulo equilátero veja figura 4.17. No momento da resolução do item 22 também foi necessária a intervenção.

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 3 os alunos foram direcionados para o laboratório de informática e realizaram o trabalho com a ajuda do computador (cada aluno em um computador). Nesta atividade as estratégias de ensino utilizadas foram “estudo dirigido com aula orientada” que permite ao aluno compreender e interpretar os problemas propostos e ao mesmo tempo sanar dificuldades de entendimento.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos atingidos. No que se refere ao preenchimento da tabelas e a resolução dos itens de 18 a 21 os alunos não apresentaram dificuldades. Contudo, com relação ao item 22 eles tiveram dificuldade no que se refere ao fato de trabalhar com números irracionais e relacioná-los a infinitas iterações. O auge da aula foi a apresentação de gif's animados das iterações do triângulo de Sierpinski.

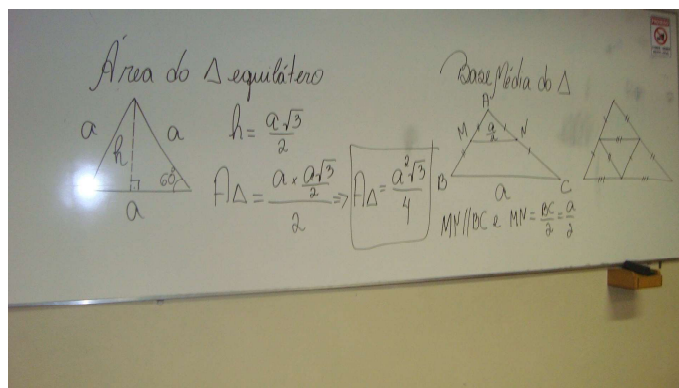


Figura 4.17: Revisão de pré-requisitos para aula de Triângulo de Sierpinski.

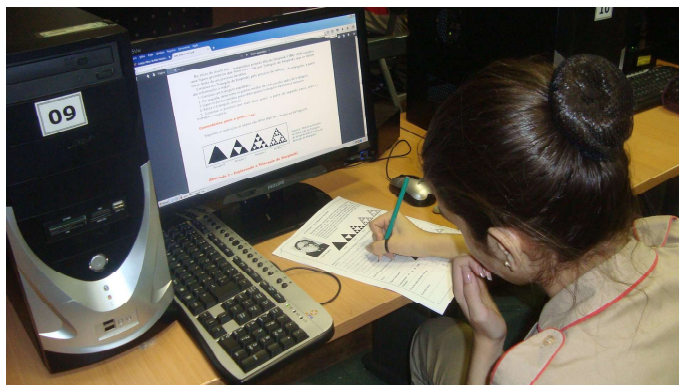


Figura 4.18: Aluna pesquisando sobre o Triângulo de Sierpinski.

4.4 Fractais na Prática

A atividades que se seguem foram elaboradas visando reforçar a ideia de que a Matemática vai além da resolução exaustiva de problemas. Ela pode ser experimental, criativa e tornar-se interessante mesmo para os alunos que tem uma aversão a seu estudo.

Usando de artifícios como atividades manuais e lúdicas os alunos são capazes de transcender do abstrato para o concreto, estabelecer relações e aplicar o raciocínio lógico buscando soluções para problemas a partir de hipóteses e não apenas pela observação indireta da realidade.

Essa nova perspectiva , a construção física de modelos, motiva a investigação e possibilita exploração de tópicos da matemática de uma forma mais suave.

4.4.1 Descrição da aula 05 e 06:

- **Local da atividade:** sala de apoio do Colégio Militar de Belo Horizonte.
- **Duração da atividade:** 2 aulas de 45 min.
- **Objetivo específico:** Construir cartões fractais.
- **Habilidade matemática a ser trabalhada:** HM_1 .
- **Competência a ser trabalhada:** C_1 .
- **Descritor matemático a ser trabalhado:** D_1 .

ATIVIDADE 5: A Construção de Cartões Fractais

Cartão Escada

Material utilizado:

- Folhas de papel multiuso coloridas tamanho A4;
- Folhas de papel multiuso coloridas tamanho 235mm x 325mm;
- Régua;
- Tesoura;
- Estilete;

Procedimento: Ver figura ??

1. Dobre a folha de papel multiuso colorido A4 ao meio;
2. Faça dois cortes como na figura;
3. A linha tracejada representa onde será feita uma dobra;
4. Dobre conforme a figura;
5. Esta é a primeira iteração do fractal. Se quiser pode-se abrir o cartão para verificar o efeito obtido.
6. Retorne a dobra do último passo do procedimento anterior;
7. Faça novamente dois corte como na figura;
8. Marca da dobra;
9. Está é a segunda iteração do fractal;
10. Repita o procedimento de cortar e dobrar até que seja possível.

Após o procedimento 10 reforce as dobras e abra o cartão escada. Para uma melhor visualização e um efeito tridimensional dobre ao meio a folha de papel multiuso colorida tamanho 235mm x 325mm e em seguida cole o cartão escada. Conforme observamos na figura 4.19 as formas geométricas resultantes das dobras e dos cortes são paralelepípedos. Também é fácil verificar que observando os degraus em ordem decrescente de tamanho teremos sempre figuras auto-similares a figura toda, mas em escala menor. Está é uma característica que permite a forma geométrica resultante ser denominada uma representação tridimensional de um fractal. Vale ressaltar que a infinitude do fractal somente seria visível se fosse possível efetuar os procedimentos de cortar e dobrar sucessiva e infinitamente.

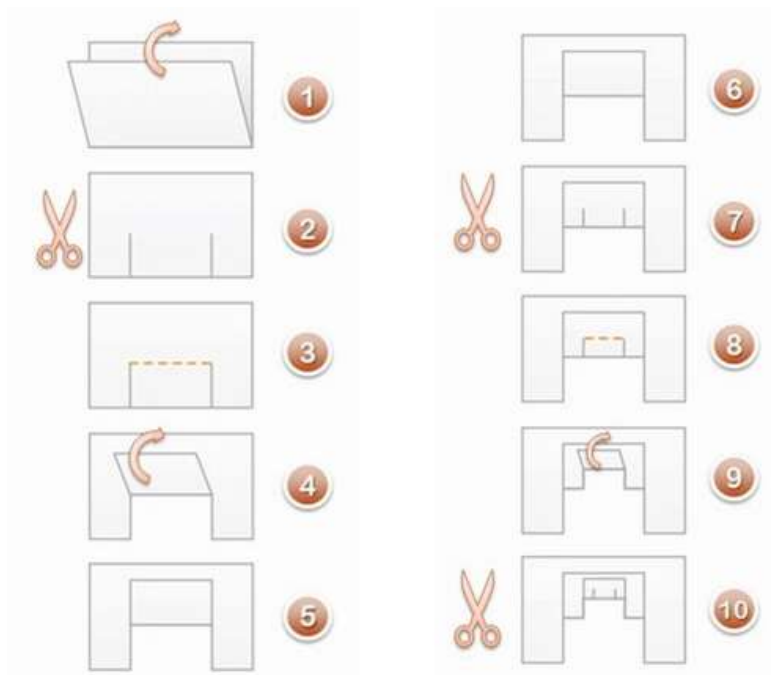


Figura 4.19: Etapas de construção do cartão fractal degrau. [14]

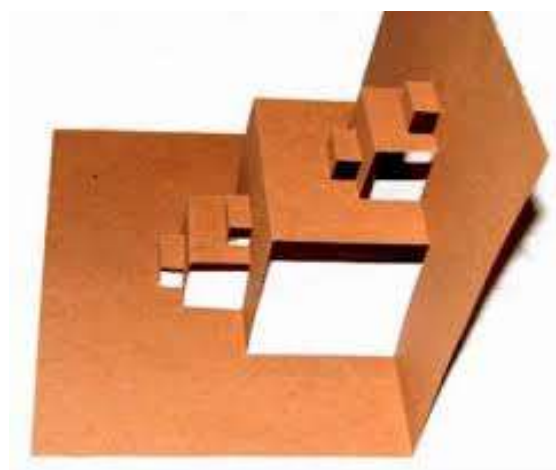


Figura 4.20: Etapas de construção do cartão fractal degrau. [14]

Mediação do professor: Durante as aulas 5 e 6 a mediação do professor foi no sentido de passar os procedimentos para a construção dos cartões fractais figura figura 4.17. No momento da resolução do item 22 também foi necessária a intervenção.

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 3 os alunos foram direcionados para sala de apoio. A estratégia utilizada foi a de “laboratório”, nela o aluno é levado a construir modelos, sob orientação, para aprofundamento de um tema.

Foi passado aos alunos os procedimentos para a confecção do cartão degrau. Já no início do procedimento os alunos questionaram sobre a quantidade de degraus produzidos a cada procedimento, a discussão seguiu livremente com o apoio do

professor.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos foram atingidos. Este tipo de abordagem mostrou-se apropriada para a exploração de conceitos da geometria fractal e aproximou a teoria da prática.

Importante esclarecer que foram confeccionados os cartões fractais cujos procedimentos de confecção não foram descritos, veja da figura 4.21 até figura 4.25.

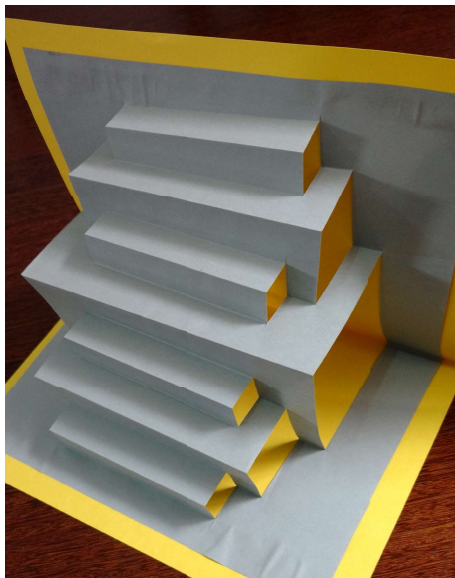


Figura 4.21: Cartão degrau construído pelos alunos.

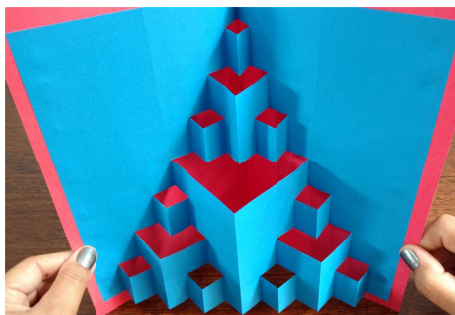


Figura 4.22: Cartão triângulo de Sierpinski construído pelos alunos construído pelos alunos.

4.4.2 Descrição da aula de 07 a 09 :

- **Local da atividade:** sala de apoio.
- **Duração da atividade:** 3 aulas 45 min.
- **Objetivo específico:** Construir a pirâmide de Sierpińsk.



Figura 4.23: Cartão pirâmide construído pelos alunos.

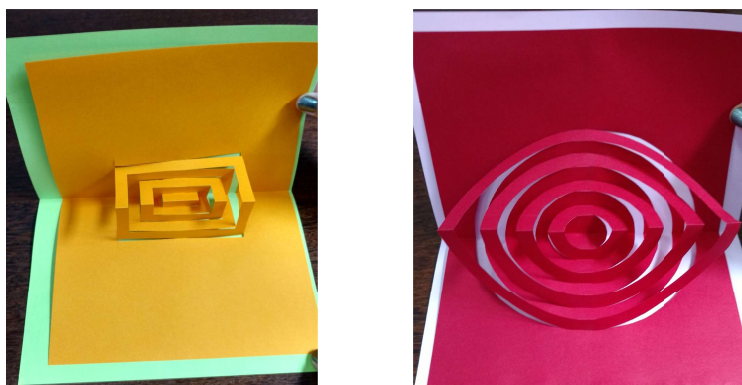


Figura 4.24: Cartão paralelepípedos construído pelos alunos.



Figura 4.25: Cartão elipse construído pelos alunos.

- Habilidade matemática a ser trabalhada: HM_1 .
- Competência a ser trabalhada: C_1 .
- Descritor matemático a ser trabalhado: D_1 .

ATIVIDADE 6: A Pirâmide de Sierpinski

Material utilizado:

- Molde impresso em folhas de papel cartão coloridas tamanho A4;
- Cola;
- Tesoura;

Procedimento:

A pirâmide de Sierpinski é a versão tridimensional do triângulo de Sierpinski. Para sua construção serão utilizados vários tetraedros idênticos formados a partir do molde da figura 4.26. A primeira fase corresponde a construção de um tetraedro a partir do molde. A segunda fase consiste de um tetraedro vazado construído a partir de quatro outros tetraedros da primeira fase. A partir daí o processo é a repetição das fases anteriores, sempre construindo tetraedros a partir dos anteriores - ver figura 4.27 e figura 4.28. Observa-se este processo sucessivo de construção também pode ser infinito visto que não há limite para o tamanho da pirâmide final.

Mediação do professor: Durante as aulas de 7 e 9 a mediação do professor se restringiu a coordenação das atividades, ou seja, o procedimento foi repassado aos alunos e eles prosseguiram com a atividade independentemente

Percepção de resultados: Para a realização da atividade 3 os alunos foram direcionados para sala de apoio. A estratégia utilizada foi a de “laboratório”, nela o aluno é levado a construir modelos, sob orientação, para aprofundamento de um tema.

Com relação a percepção de resultados obtidos verificou-se que os objetivos foram atingidos. Este tipo de abordagem mostrou-se apropriada para a exploração de conceitos da geometria fractal e aproximou a teoria da prática além de trabalhar valores como o companheirismo, respeito aos colegas, espírito de cooperação e a divisão de tarefas.

Tanto atividade de construção de cartões fractais quanto a atividade de construção da pirâmide de Sierpinski contém em si o apelo visual e estético que favorece a captura da atenção dos alunos e auxilia no entendimento de conceitos da geometria fractal

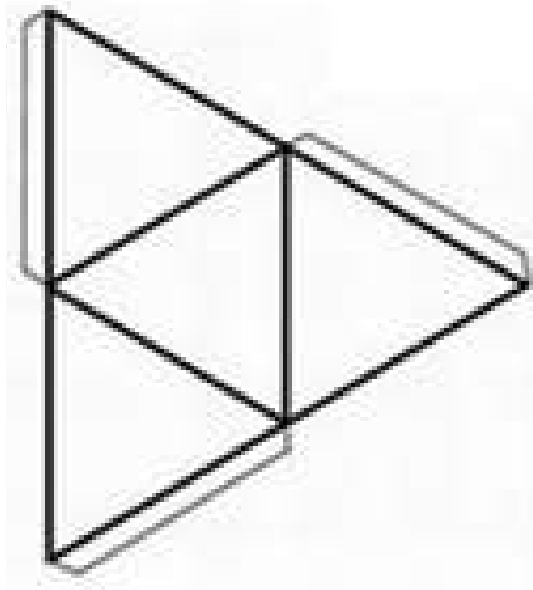


Figura 4.26: Molde para construção da pirâmide de Sierpinski.



Figura 4.27: Construção da pirâmide de Sierpinski - etapa inicial.



Figura 4.28: Molde para construção da pirâmide de Sierpinski - etapa final.

como as ideias de auto-similaridade, dimensão, infinitude das fases da criação de um fractal e escala.

Considerações Finais

Apesar da geometria fractal ter sido criada em meados da década de 1970 ela ainda pode ser considerada uma área relativamente nova e em evolução. Como ferramenta de investigação científica ela vem contribuindo para o desenvolvimento de diversas áreas das ciências, como a engenharia, medicina, computação gráfica, entre outros. O estudo das características fractais de elementos como as células de cancro, da do cinema demonstram que seu estudo ainda tem muito a contribuir para a evolução da humanidade.

No primeiro momento desta pesquisa foi realizado um estudo histórico das principais personalidade do mundo científico que tiveram sua parcela de contribuição para o estudo dos sistemas dinâmicos, da teoria do caos e finalmente da geometria fractal. Dentre essas personalidades foi dado maior destaque a história de Benoit Mandelbrot pai da geometria fractal e quem soube inovar ao considerar novas condições para o Conjunto de Júlia.

Posteriormente foram apresentadas as principais características dos fractais com destaque para a auto-similaridade estrita encontrada nos fractais gerados a partir de iterações de transformações matemáticas e a auto-afinidade presentes nos fractais naturais, como por exemplo o brócolis romanesco.

Seguiu-se o estudo de alguns monstros matemáticos, hoje classificados como fractais pioneiros. Destaque a apresentação da Curva de Mandelbrot cuja abordagem foi feita de forma didática e direcionada a leigos no assunto.

Finalmente, para atender ao objetivo principal da pesquisa, foi elaborada uma proposta de plano de sequência didática e de plano de execução didática visando a inclusão do estudo introdutório da geometria fractal no 9º ano do ensino fundamental.

Para fechamento desta proposta uma relação de atividades foi apresentada e aplicada de forma experimental nessa série de ensino do Colégio Militar de Belo Horizonte. Essas atividades seguiram as orientações de Ruy Madsen [10] e despertou o interesse dos alunos, inicialmente pela beleza das animações de fractais pesquisadas com o uso da internet. Nesta oportunidade ficou evidente para os alunos a ideia de que fractais são formas geométricas construídas a partir de cópias de si mesmo. No

transcorrer das outras atividades o estudo geometria plana (cálculo de perímetros e áreas) foi vinculado ao estudo introdutório de alguns fractais pioneiros como a Curva de Koch e, ainda, o trabalho realizado para se chegar a relações matemáticas usando recursos indutivos, mas sem muito rigor no que se refere a demonstrações. O auge das atividades de sala de aula e que aguçaram mais o interesse dos alunos foi a construção de cartões fractais e da pirâmide de Sierpinski, o que demonstra que as aulas de matemáticas podem envolver atividades práticas.

Fica evidenciado que apesar das dificuldades que o educador-matemático encontra no ambiente escolar é possível colocar o aluno na posição central do processo educacional ao incluir atividades que levam os alunos a integração dos conteúdos da matemática com a realidade do mundo físico. Como bem disse Maria Beatriz Luce [18]:

A evolução (ou revolução?!) do conhecimento sobre aprendizagem permite-nos, agora, compreender melhor como nossos alunos aprendem e, em decorrência, se a maneira como ensinamos permite ou facilita que aprendam. Mas, apesar do muito que se tem progredido na pesquisa sobre aprendizagem, ainda não é fácil traduzir este complexo conhecimento em implicações práticas para o ensino. A aprendizagem tem a ver com como percebemos e entendemos o mundo, com construção de significados; tem a ver com o tipo e a forma como nos relacionamos com informações fatuais ou princípios abstratos, com métodos e técnicas de trabalho, com idéias e raciocínios, com comportamentos considerados adequados para certas situações. Como lidamos com alunos que são sempre indivíduos muito diferentes uns dos outros e sempre mutantes, que tiveram cada qual diferentes experiências de vida e diferentes conhecimentos adquiridos, e têm diferentes expectativas sobre o que e como aprender, é óbvio que nem todos aprendem da mesma maneira, ou com a mesma prontidão ou o mesmo significado em cada material e situação de ensino. A disciplina e o nível de estudos também têm influência na aprendizagem. Logo, não há resposta simples e conclusiva sobre como se aprende e, muito menos, sobre como nós, professores, podemos propiciar maior ou melhor aprendizagem. É possível, no entanto, nos apropriarmos do estado atual do conhecimento sobre aprendizagem e traçarmos nosso plano de investigação sobre nossos próprios alunos, os conhecimentos e habilidades que consideramos importantes e adequados a seu nível de estudos, bem como sobre nossas estratégias e recursos de ensino. Este é, no meu entendimento, o atual e maior desafio na faceta do ensino, na complexidade da prática acadêmica.

Neste cenário de um trabalho já concretizado, a aplicação da geometria fractal em sala de aula, outra perspectiva de reflexão e novas práticas poderão ser elaboradas. Entretanto, os roteiros de atividades aqui apresentados não devem ser seguidos fielmente por outros professores, ao contrário devem desencadear novos projetos em que atividades semelhantes possam ser ponto de partida o estudo da geometria fractal.

Bibliografia

- [1] <http://www.antenna-theory.com/antennas/fractal.php>. Acessado em 21/01/17.
- [2] *Busca Biografias*. <http://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/9640/Edward%20Lorenz>. Acessado em 19/01/17.
- [3] *Fractais e Bonsai*. <https://aidobonsai.com/2011/10/18/fractais-e-o-bonsai/>. Acessado em 13/01/17.
- [4] *Fractais: A linguagem do Caos*. <https://teoriadacomplexidade.com.br/old/textos/fractais/Fractais-A-LinguagemDoCaos.pdf>. Acessado em 15/12/17.
- [5] *Gregory's Story "Its been full and fun"*. <http://www.gregorysams.com/index.html>. Acessado em 14/01/17.
- [6] *History Channel - Episódios completos*. <http://seuhistory.com/etiquetas/biografia>. Acessado em 13/01/17.
- [7] *History Channel - Episódios completos*. <http://www.photowall.co.uk/photo-wallpaper/hokusai-katsushika-great-wave#lightbox>. Acessado em 20/01/17.
- [8] *Outros Cadernos de Saramago*. <http://caderno.josesaramago.org/33361.html>. Acessado em 12/12/16.
- [9] *Árvores fractais criam novo tipo de célula solar*. <http://www.inovacaotecnologica.com.br/>. Acessado em 15/01/17.
- [10] Barbosa, Ruy Madsen: *Descobrimo a Geometria Fractal-para a sala de aula*. Autêntica, 2016.
- [11] Bicudo, Irineu: *Os Elementos/Euclides*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [12] Cardoso, Marleide Coan: *A formalização como ponto de intersecção histórica da lingüística e da matemática*. Linguagem em (Dis) curso, 1(1), 2010.
- [13] Colom, Antoni J e Jussara Haubert Rodrigues: *A (des) construção do conhecimento pedagógico: novas perspectivas para a educação*. Artmed, 2004.
- [14] Dahlke, Marsoé Cristina: *A Geometria dos Fractais no Ensino: Uma nova forma de Visualizar o Mundo*. XVI Semirário de educação no Mercosul, 1(1).
- [15] Educação Fundamental, Brazil. Secretaria de: *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*, volume 3. DP & A, 2000.
- [16] Escher, Maurits C, Marco Bussagli e Federico Giudiceandrea: *Escher*. Skira, 2014.
- [17] Eves, Howard Whitley e Hygino Hugueros Domingues: *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 2004.
- [18] Luce, Maria Beatriz: *Prática acadêmica: metologias e tecnologias de ensino em questão*. 2001.
- [19] Mario Jorge Dias Carneiro, Michel Spira, Jorge Sabatucci: *Proposta Curricular de Matemática do Ensino Fundamental - 6o e 9 Ano*. 1a. edição edição.

- [20] Mendonça, Marcelo Bezerra de Melo de, Carlos Alexandre de Amorim Garcia, Romildo de Albuquerque Nogueira, Marcelo Andrade Filgueira Gomes, Marcelo Morais Valença e Fernando Oréfice: *Análise fractal da vasculatura retínica: métodos de segmentação e de cálculo dimensional*. Arq. bras. oftalmol, 70(3):413–22, 2007.
- [21] Miranda, Aldicio J: *Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot*. Sigmae, 1(1):110–118, 2012.
- [22] Nacionais, Parâmetros Curriculares: *matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [23] Paulo Urban, Homero Pimentel e: *Fractais da Historia:A Humanidade no Caleidoscópio*. 1a. edição edição.
- [24] Punset, Eduardo: *No todo es liso en la vida*. <https://www.eduardpunset.es/425/charlas-con/no-todo-es-liso-en-la-vida>. Acessado em 09/01/17.
- [25] Ricieri, Aguinaldo Prandini: *Fractais e Caos: a matemática de hoje*. Prandiano, 1990.
- [26] Silva, Míriem Martins da e Wallysonn Alves de Souza: *Dimensão Fractal*. Rev. Eletrôn. Mat., 2, 2010.
- [27] Silva Lobo, Joice da e Arno Bayer: *O Ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Volume 6-Número 1-jan./jun. 2004, 6(1):19, 2004.

Primeiro Apêndice

Entrevista: Mandelbrot e a Beleza do Caos

Entrevistador: Eduardo Punset

Entrevistado: Benoit Mandelbrot

Data da entrevista: 22 de fevereiro de 2007

Lugar da entrevista: Universidade de Yale

Encontrado em: www.eduardpunset.es

Tradução de: Andréia Maria de Oliveira Silva

Benoit Mandelbrot, matemático, pai da geometria fractal, a quem poderia acontecer projetar uma teoria das rugosidades e das fragmentações e, além disso, o aplicar a determinados campos como o estoque para decifrar a variabilidade do valor das ações? A primeira coisa que viram os nossos antepassados foram as rugosidades. Eles viam poucas coisas suaves como a lua ou os olhos. A ciência entrou em cheio no suave e todo mundo se esqueceu das rugosidades e das fragmentações... todo mundo menos uma pessoa: Mandelbrot.

Se você acha que entende, você nunca avançará, entrevista de Benoit Mandelbrot no Diário de Mallorca. Mandelbrot y La belleza Del caos entrevista de Benoit Mandelbrot a BBC em Mundo: como Benoit Mandelbrot saltou para a fama matemática quando descobriu as propriedades dos fractais. Graças ao auge dos computadores, soube transformar um brinquedo procedente da matemática pura em uma ferramenta de compreensão e desenvolvimento.

Eduard Punset: Quando eu era jovem, Maurice Thorez, secretario geral do Partido Comunista Francês, disse: “Tem que se colocar diante das massas, porém não tão a frente, ou se arriscará a acabar sozinho e gesticulando.” E, embora você seja muito diferente de Maurice Thorez, tenho a sensação de que, talvez, ao longo da sua vida você tenha se encontrado algumas vezes sozinho e gesticulando antes de todos.

Benoit Mandelbrot: Sem dúvida. Às vezes eu estive a frente um ano, cinco anos, dez anos, quarenta anos! E muita gente havia perdido o interesse, porém eu persisti.

Eduard Punset: Persistiu porque tinha esta estranha obsessão, se me permite que a chame assim. Todo mundo se interessava pela suavidade, a geometria clássica. Mas, desde o princípio, você investigou a rugosidade e a fragmentação e tentou explicar qual é a teoria que se esconde por trás da rugosidade. Isso era estranho. Como isso aconteceu?

Benoit Mandelbrot: Na verdade, demorei muito tempo para me dar conta do que estava fazendo. A maioria das pessoas começam com um objetivo muito claro em sua vida, o validam e continuam, aprendem e desenvolvem. Eu comecei combinando duas ideias muito perigosas: em primeiro lugar, quando eu era jovem, a geometria me fascinava totalmente, a forma das coisas, em uma época em que as matemáticas estavam se transformando em algo muito abstrato e algébrico. Em segundo lugar, eu tinha uma paixão, uma obsessão com Kepler. E por que Kepler? Kepler não foi um cientista tão importante como Newton, porém Kepler foi o primeiro que percebeu algo extraordinário: partiu de um brinquedo e obteve uma ferramenta. O brinquedo era a elipse, uma forma matemática com que os gregos haviam jogado na antiguidade sem nenhum objetivo concreto. Porém esse brinquedo se converteu em uma ferramenta para criar a ciência da astronomia, para explicar o movimento dos planetas, e descrever tudo em termos matemáticos. Isso me fascinou desde o princípio. E eu fui certamente temerário, comecei sem uma ideia clara de onde queria chegar. No primeiro momento, não fiz nada sensacional assim que comecei com pequenas coisas que me interessavam e, quase que arrastado, me vi condenado ao estudo da rugosidade. Na realidade, a descrição completa deste objetivo não veio até mais tarde, quando eu era mais velho. Tinha mais de setenta anos!

Eduard Punset: Ah, sim?

Benoit Mandelbrot: Durante muito tempo, eu dei ao meu trabalho somente nomes parciais, aplicáveis a uma parte ou outra do meu trabalho. De algum modo, descobri o meu cargo do objetivo, exatamente o contrario de um líder político que deve ter um objetivo claro para começar, e logo o cumprir.

A origem da palavra “fractal”

Eduard Punset: É certo. E como veio o nome “fractal”?

Benoit Mandelbrot: Por motivos eminentemente práticos. Um dos acontecimentos mais importantes da minha vida aconteceu em 1973, quando me convidaram para dar uma conferência no Collège de France, em Paris. Eu fiz o doutorado em Paris e um tio meu era um matemático muito conhecido que trabalhava como professor no Collège de France. Meu tio tinha muito medo do nepotismo, assim que, enquanto exercia o papel de professor nunca permitiu que seus colegas me convidassem. Porém quando morreu, seus colegas me convidaram para dar uma conferência. E eu estava submetido a uma pressão extraordinária, porque eu tinha somente uma hora para explicar o que eu havia feito durante os vinte anos que haviam passado desde que havia abandonado a França. Trabalhei muito duro, e creio que não o fiz tão mal (na verdade minha conferência apareceu no jornal, revisada por um homem muito famoso na época) e logo escrevi um livro sobre isso. E eu precisava de um título. Eu havia feito um trabalho que eu poderia descrever e explicar, mas que não tinha título. E um livro sem título não funciona.

Eduard Punset: Não, não vende.

Benoit Mandelbrot: Assim que eu me pus a procurar uma palavra bonita de origem latina para designa-lo e peguei um dicionário de latim do meu filho que havia em casa e me pus a buscar “fratrura”, “fração”, etc; e percebi que todas essas palavras procedem do adjetivo latino “fractus, fracta, fratum” que faziam referência à aquele que se transforma em uma pedra ao lançá-la: peças irregulares. Eureka! Aí estava o termo que eu necessitava. Além disso, é uma palavra que funcionava muito bem em francês e em inglês. E assim foi como o livro que carecia de título passou a se chamar *Les objects fractals*, e mais tarde foi traduzido para muitos idiomas. E o termo “fractal” se encaixou muito bem. Várias das palavras que eu havia proposto não foram aceitas, porém “fractal” foi, sem dúvida.

Eduard Punset: Seria correto definir a ciência que constitui o objeto de sua investigação como uma tentativa de buscar os princípios rigorosos subjacentes à rugosidade e as fraturas?

Benoit Mandelbrot: Sim, isso aconteceu porque eu estava indo livre: analisava temas que ninguém mais estava estudando. Até então, a ciência havia se ocupado de todos os problemas em que as estruturas eram principalmente suaves e regulares. E eu queria estudar fenômenos estranhos que ninguém estava estudando, assim que por necessidade me encontrei com os remanescentes do que os meus colegas e antecessores haviam escolhido como temas. Porque o cientista não estuda a natureza como é, sendo que deve escolher, selecionar alguns problemas. E tudo relacionado com a suavidade estava coberto. Porém, com a rugosidade, eu estava sozinho.

Os artistas já trabalham a fractalidade

Eduard Punset: Sozinho, sim; com exceção dos artistas, que já haviam pensado nisso. Nunca haviam explicado, mas haviam abordado, não?

Benoit Mandelbrot: Sem dúvida. Essa é uma das maravilhas da história hipotética. Assim que nos remetemos muito atrás na história hipotética: imaginemos um homem ou uma mulher primitivos. Quantas formas suaves eles viam? Poucas: a lua cheia, o olho, a pupila, a Iris, alguns alimentos esféricos. Porém poucas, muito poucas formas eram assim. Todo o resto era rugoso. E o que fizeram as matemáticas? Começaram pelas formas simples e desenvolveram uma geometria e posteriormente uma ciência detalhada. E o que aconteceu com as rugosidades? Pois ficaram nas mãos dos artistas.

Eduard Punset É certo...

Benoit Mandelbrot: Alguns artistas tinham uma forte sensibilidade com o rugoso e fragmentado, porém no princípio eu não sabia disso, ninguém sabia! Somente depois de desenvolver a geometria fractal que percebi que Hokusai, o genial pintor japonês do período Edo, tinha uma visão extremamente geométrica. Nos seus desenhos, sempre aparece alguma forma clássica (o monte Fuji, que é muito suave e quase um cone) várias coisas simples, e todo o resto é muito abrupto. Sem saber, simplesmente por motivos estéticos, Hokusai pintava fractais. Delacroix também era consciente disso, porém não nos seus quadros. Uma vez, quando aconselhava um jovem pintor que havia perguntado como se desenhava uma árvore, Delacroix disse:

“Uma árvore se compõe de árvores pequenas.”

Eduard Punset: De árvores pequenas...

Benoit Mandelbrot: Além disso, se analisarmos a arte de qualquer civilização, encontraremos muitos aspectos fractais, inclusive na arte de civilizações sem escritura. Me parece que a fractalidade tenha sido algo extremamente natural e que não se pode falar do “pai dos fractais” porque tudo isso aconteceu há muito tempo. Eu me considero, talvez, o pai da geometria fractal, porque fui quem descobriu que as mesmas estruturas que os artistas e, às vezes, os filósofos haviam utilizado durante milênios de um modo inconsciente podiam de converter em ferramentas para a compreensão da ciência. E também em ferramentas para desfrutar. Porque os desenhos de fractais são bonitos.

A.0.1 Uma ferramenta aplicada em vários campos

Eduard Punset: Você também havia dito que o brócolis é o fractal mais emblemático. Por quê?

Benoit Mandelbrot: Se trata de um caso que compreendemos bem porque a natureza é econômica. Seria muito difícil imaginar que a natureza incluísse no ADN distintos códigos para cada ramo de um brócolis. No momento em que temos um sistema com ramos, o ADN ordena criar um ramo, um novo ramo e logo, depois de um certo número de fases, se detém. O mesmo acontece com o pulmão humano. Inclui ramificações, más ramificações, muitas vezes e logo o código diz: “agora é hora de parar e fazer diferente” durante algumas fases. Assim que não somente no exterior, com objetos como o brócolis, assim que também no interior do nosso corpo estão repletos de fractais. E é uma perspectiva muito útil, porque meus colegas que se especializam em anatomia cooperam com os físicos e desenvolveram conjuntamente uma visão do pulmão que explica muitos problemas pulmonares de uma maneira que supõe uma promessa de progresso no futuro.

Eduard Punset: Agora, várias teorias procedentes de disciplinas diferentes retomaram a teoria da geometria fractal e aplicaram em vários campos. Isso nos permitiu construir, por exemplo, a complexidade da teoria do caos. É assim?

Benoit Mandelbrot: É uma ferramenta muito importante na teoria do caos, sim.

Eduard Punset: Por quê?

Benoit Mandelbrot: De novo, é um caso que compreendemos bem porque a teoria do caos consiste em operações repetitivas, estuda fenômenos em que a mesma regra se aplica uma e outra vez. Em certas condições, as estruturas que se geram são fractais. Porém essas estruturas não são objetos reais e sim objetos mentais. Por exemplo, a trajetória da Terra ao redor do sol não é um objeto real, não há nenhum arame ao redor do sol que delimite essa trajetória. As aplicações dos fractais à teoria do caos são deste tipo. Quer dizer, se utiliza nesse campo porque tanto nessas equações como no crescimento das árvores existe uma repetição da mesma ordem de um modo que podemos analisar.

Eduard Punset: Com a geometria fractal, agora podemos medir a rugosidade das coisas.

Benoit Mandelbrot: Sim, e também podemos medir a rugosidade em outros contextos. Por exemplo, em um tema em que trabalhei em várias ocasiões: os preços dos mercados financeiros. Existe uma relação muito estreita entre a rugosidade e os preços de ações. Os preços nos mercados competitivos às vezes se movem lentamente, mas de vez em quando produzem uma grande explosão e logo se movem lentamente de novo. Todos os especialistas em economia e finanças devem medi-lo, porém as medições que se utilizavam eram incorretas. Eu propus uma maneira diferente de medir a rugosidade dos preços. É uma característica que é muito interessante nesta nova maneira de medi-lo é muito similar à maneira de medir a rugosidade meteorológica. Por quê? Porque o clima é intermitente, na maior parte das vezes.

82 anos repletos de vitalidade

Eduard Punset: Ao princípio, o ser humano via a rugosidade por todas as partes, como você comentava antes. Porém logo, com a ciência, provavelmente nos esquecemos um pouco da rugosidade, e agora estamos voltando à ela, à fragmentação, para estudá-lo de um modo científico. É incrível. Pode nos ajudar a prever coisas, por exemplo?

Benoit Mandelbrot: O futuro o dirá. As teorias que agora se embaralham sobre os preços ou sobre o clima não nos permitem fazer previsões. Em muitos casos, estudei teorias que não permitem prever e sim entender as diferenças entre a realidade e a teoria. Em um sentido mais imediato, no caso dos preços, o que o meu trabalho permite é avaliar os riscos.

Eduard Punset: Professor Mandelbrot, como é que, aos seus 82 anos, segue trabalhando tão duro e pensando em coisas tão profundas? Você é consciente de que as coisas requerem seu tempo, porém segue obcecado com as novas invenções, as novas idéias...

Benoit Mandelbrot: Pois não sei por que. Isto exigiria uma auto análise das personalidades da minha mãe, da minha esposa, dos meus filhos e todo mundo que me rodeia e também da história da minha vida, muito complicada. Primeiro vivi na Polônia, logo na França e agora nos Estados Unidos. Quando era criança, a Europa do Este estava em um estado tão desesperado que as pessoas da minha idade que nasceram na Hungria ou Polônia estavam preparadas para trabalhar muito mais duro que as pessoas da França ou da Grã Bretanha, por exemplo.

Eduard Punset: Para sobreviver.

Benoit Mandelbrot: E logo, estive na França durante a guerra, que não foi precisamente o melhor momento para estar na Europa. Por outro lado, pude me beneficiar de uma educação francesa extraordinária. Porém, a França nunca poderia ter me dado as oportunidades para o tipo de trabalho que queria, assim que fui aos Estados Unidos para passar o verão e decidi ficar. Não foi algo planejado, nem uma fuga forçada ou uma emigração. Porém nós ficamos e eu tive muita sorte durante trinta e cinco anos porque IBM tinha um laboratório em que se realizava uma grande variedade de atividades, foi um dos laboratórios mais importantes da história. E era único em uma coisa, e é que permitia que algumas poucas pessoas fizessem exatamente o que queriam e tive a sorte de contar-me entre eles. Assim que aqui estou... minha saúde me permite continuar, isto é o que eu mais gosto, e continuarei

a fazê-lo enquanto posso.

B

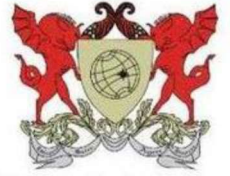
Segundo Apêndice



COLÉGIO MILITAR
DE BELO HORIZONTE

**Oficina: Estudo e Construção de Fractais para o 9º.
Ano do Ensino Fundamental do Colégio Militar de
Belo Horizonte**

Mestranda: Andréia M de Oliveira Silva; **Orientador:** Mehran Sabeti;
Co-orientador: Luiz D'Afonseca



Universidade Federal
de Viçosa

ATIVIDADE 1

Pesquise sobre os Fractais na internet e responda os itens a seguir. (Atividade realizada no laboratório de informática).

Item 1: O que é um Fractal?

Item 2: Cite as principais características de um fractal.

Item 3: Quem melhor representa a natureza: a Geometria Euclidiana ou a Geometria Fractal?

Item 4: Quem foi o criador da Geometria fractal?

Item 5: A Geometria Fractal pode ser aplicada a outras áreas de estudo distintas da Matemática? Cite ao menos uma aplicação.

Item 6: Procure na internet gif's animados de fractais.

ATIVIDADE 2: A Curva de Koch



Niels Fabian Helge Von Koch

Niels Fabian Helge Von Koch, nasceu em Estocolmo em 25 de janeiro de 1870, foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como Curva de Koch que aparece em seu trabalho *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane* publicado em 1906, que une métodos de geometria elementar com a teoria das curvas. Uma variação deste fractal é a "Curva do Floco de Neve de Koch", construída a partir de três curvas de Koch, cada uma tendo como ponto de partida os lados de um triângulo equilátero de lado unitário. O trabalho de Koch consiste principalmente em provar que sua curva é contínua e que não possui tangente.

(Pré-atividade: Apresentação de slides sobre a construção da curva de Koch.)

Item 7: Construa a Curva de Koch seguindo os passos a seguir.

➤ **1º. Passo**

Iteração 0: Inicie com um segmento de reta de comprimento 1;

➤ **2º. Passo**

Iteração 1: Substitua o terço-médio do segmento (iteração 0) por um triângulo equilátero sem base.

➤ **3º. Passo:**

Iteração 2: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração 1) por um triângulo equilátero sem base.

⋮

➤ **N-éssimo Passo**

Iteração k: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração k-1) por um triângulo equilátero sem a base e, assim, sucessiva e infinitamente.

Item 8: Faça uma análise da curva de Koch e preencha a tabela a seguir.

| Iteração | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | k |
|-------------------------|---|---|---|---|---|-----|-----|
| Número de segmentos | | | | | | ... | |
| Medida de cada segmento | | | | | | ... | |
| Comprimento da curva | | | | | | ... | |

(A análise realizada para responder aos itens de 9 a 11 será feita após análise de dados obtidos com a ajuda de uma planilha do Excel construída pelo alunos no laboratório de informática).

Item 9: Na iteração k qual a quantidade de segmentos da curva, considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Item 10: Na iteração k qual o comprimento de cada segmento da curva, considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

Item 11: Na iteração k qual o comprimento total da curva, considerando k um número muito grande (tendendo ao infinito)? Explique sua resposta.

ATIVIDADE 3: A Curva Floco de Neve de Koch

A curva **Floco de Neve de Koch** é formada por três curvas de Koch, cada uma das quais construída a partir dos lados de um triângulo equilátero de lado unitário.

(Pré-atividade: Apresentação de slides e gif's animados sobre a construção da Curva Floco de Neve de Koch.)

Construção da Curva Floco de Neve de Koch:

➤ **1º. Passo**

Iteração 0: Inicie com um triângulo equilátero de lado unitário;

➤ **2º. Passo**

Iteração 1: Substitua o terço-médio de cada lado do triângulo equilátero (iteração 0) por um triângulo equilátero sem base.

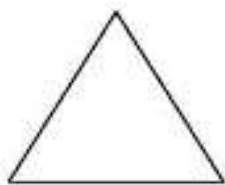
➤ **3º. Passo:**

Iteração 2: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração 1) por um triângulo equilátero sem base.

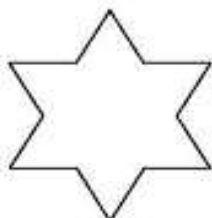
⋮

➤ **N-éssimo Passo**

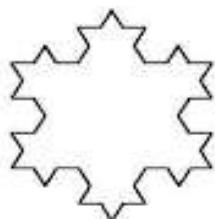
Nível k: Substitua o terço-médio de cada segmento (iteração k-1) por um triângulo equilátero sem a base e, assim, sucessiva e infinitamente.



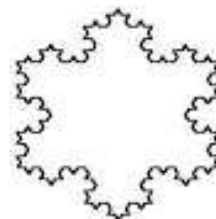
Iteração 0



Iteração 1



Iteração 2



Iteração 3

...

Item 12: Faça uma análise da curva de Koch e preencha a tabela a seguir.

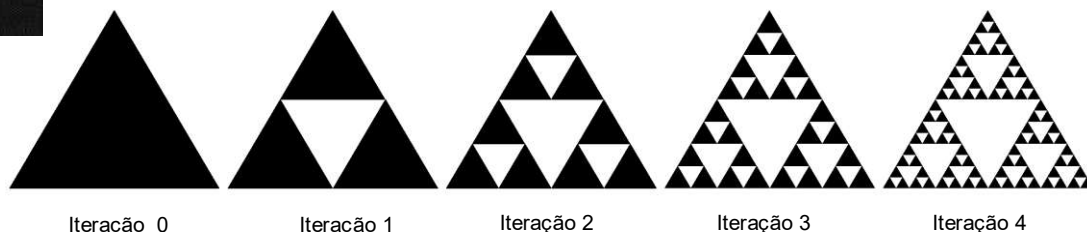
| Iteração | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Número de triângulos em uma Curva de Kock | | | |
| Número de triângulos inseridos na Curva Floco de Neve de Kock | | | |

ATIVIDADE 4: O Triângulo de Sierpinski



Waclaw Sierpiński

Waclaw Sierpiński, matemático polonês, nasceu em Varsóvia na Polônia em 14 de março de 1882. Descreveu, em 1915, o fractal que posteriormente recebeu o nome de **Fractal de Sierpinski**. Este fractal apresenta algumas características, tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais; ter área igual a zero; ser auto-semelhante (cada uma de suas parte é idêntica ao todo); não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.



(Pré-atividade: Apresentação de slides e gif's animados sobre a construção do Triângulo de Sierpinski.)

Item 16: Descreva a construção do triângulo de Sierpiński pelo método de remoção de triângulos. (Use a figura acima e a ajuda da internet.)

Item 17: Preencha a tabela a seguir (considere o triângulo equilátero da **Iteração 0** com lado unitário).

| Iteração | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|----------------------|---|---|---|---|
| Figura associada | | | | | |
| Número de triângulos | 1 | | | | |
| Comprimento do lado de cada triângulo | 1 | | | | |
| Área de cada um dos triângulos restante | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | | | |
| Área total da figura | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | | | |

Item 18: Preencha a terceira coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no Iteração 1? Em relação a iteração anterior a área aumenta ou diminui?

Item 19: Preencha a quarta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no Iteração 2? Em relação a iteração anterior a área aumenta ou diminui?

Item 20: Preencha a quinta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no Iteração 3? Em relação a iteração anterior a área aumenta ou diminui?

Item 21: Preencha a sexta coluna da tabela anterior. Qual o valor da área da figura obtida no Iteração 4? Em relação a iteração anterior a área aumenta ou diminui?

Item 22: É possível calcular a área da figura obtida na iteração k , onde k é um número muito grande tendendo ao infinito? Qual a fórmula que determina essa área? O valor da área na iteração k , onde k é um número muito grande tendendo ao infinito, se aproxima de qual valor?
