UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

André Macedo Costa

Frações contínuas: Abordagem histórica, aplicações e proposta didática no Ensino Básico.

Campina Grande - PB
02/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

André Macedo Costa

Frações contínuas: Abordagem histórica, aplicações e proposta didática no Ensino Básico.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
02/2023

C837d Costa, André Macedo.

Frações contínuas: abordagem histórica, aplicações e proposta didática no ensino básico / André Macedo Costa. – Campina Grande, 2023.

74 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira".

Referências.

1. Frações Contínuas. 2. Representação de Números Reais. 3. Matemática – Estudo e Ensino. 4. Convergentes. 5. Melhores Aproximações. 6. Frações – Proposta Didática. I. Ferreira, Marcelo Carvalho. II. Título.

CDU 517.524(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

André Macedo Costa

Frações contínuas: Abordagem histórica, aplicações e proposta didática no Ensino Básico.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 10 de Fevereiro de 2023:

Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Orientador

Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Examinador externo

Dr. José de Arimatéia Fernandes
Examinador interno

Campina Grande - PB
02/2023

Este trabalho é dedicado a meus pais: Sandra e Edmilson, pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais Edmilson e Sandra e a meus irmãos Ailton, Evandro e Vanessa pelo apoio incondicional. Aos familiares e amigos, por todas contribuições, em especial aos colegas de turma por termos caminhado lado a lado durante esses dois anos de curso. Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Ferreira, por toda paciência, ensinamentos e contribuições na orientação desta dissertação. Aos professores José de Arimateia Fernandes e Gelson Conceição Gonçalves dos Santos por participarem da banca e pelas contribuições que certamente melhoraram a qualidade deste trabalho. Aos meus colegas de trabalho Jeanne e Eudes, pelo auxílio com as normas gramaticais e escrita do abstract. Aos demais professores do PROFMAT-UFCG e a todas pessoas que contribuíram direta ou indiretamente na construção dessa dissertação e na realização desse sonho, que é a conclusão do mestrado PROFMAT.

"Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar."

(Paulo Freire)

Resumo

As frações contínuas são utilizadas para representação de números reais, admitindo representação finita para números racionais e infinita para irracionais. Além disso, as frações contínuas estão intimamente associadas a conceitos de melhores aproximações racionais de números reais. O objetivo desta dissertação é a apresentação de um apanhado histórico do tema, de suas principais definições e resultados, e a elaboração de uma proposta didática para Educação Básica. Nesse contexto, serão expostos os aspectos históricos que originaram as frações contínuas, desde seu uso e desabrochar teórico, passando pelas principais contribuições feitas, a exemplo de Euler e Lagrange no século XVIII, encerrando com os campos do conhecimento nos quais o tema é abordado atualmente. Serão expostas também definições e resultados sobre frações contínuas envolvendo noções de melhor aproximação racional de um número real, exibindo o fato de todas as melhores aproximações de um irracional derivarem da noção de convergente, sendo ainda possível majorar o erro cometido na aproximação. Adicionalmente, são apresentadas aplicações do tema na resolução de equações diofantinas e na aproximação de zeros de funções reais. Por fim, duas sequências didáticas são introduzidas: uma para o Ensino Fundamental e outra para o Ensino Médio, relacionando o tema com outros campos da matemática e utilizando o software Geogebra como ferramenta didática, corroborando que as frações contínuas possuem possibilidades didáticas e podem contribuir com o desenvolvimento de estudantes da educação básica.

Palavras-chave: Frações contínuas. Representação de números reais. Convergentes. Melhores aproximações. Proposta didática.

Abstract

Continued fractions are used to represent real numbers, admitting finite representation for rational numbers and infinite for irrational ones. Furthermore, continued fractions are closely associated with concepts of best rational approximations of real numbers. The aim of this dissertation is to present a historical overview of the topic, its main definitions and results, and the elaboration of a didactic proposal for basic education. In this context, it will be exposed the historical aspects that originated the continued fractions, from their use and theoretical development, passing through the main contributions made, such as Euler and Lagrange in the 18th century, ending with the fields of knowledge where the topic is currently addressed. Definitions and results on continued fractions involving notions of best rational approximation of a real number, will be exposed, presenting the fact that all the best approximations of an irrational number derive from the notion of convergent, being still possible to magnify the error committed in approximation. Additionally, applications of the theme are presented in the resolution of Diophantine equations and in the approximation of zeros of real functions. Finally, two didactic sequences are oriented: one for Elementary School and other for High School, relating the theme to different fields of mathematics and using GeoGebra software as a didactic tool, showing that continued fractions have didactic possibilities and can contribute to the development of students in basic education.

Keywords: Continued fractions. Real numbers representation. Convergent. Best approximations. Didactic Proposal.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

As frações contínuas são uma forma de representação de números reais distinta da representação decimal. Essa representação apresenta algumas vantagens em comparação com a decimal, por exemplo, números racionais são aqueles cuja representação é finita, já irracionais quadráticos são caracterizados por representações infinitas e periódicas. A grosso modo, podemos entender uma fração contínua como uma "fração de frações". A ideia é de que, dado um número real x, escrevemos

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, ...] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

no qual os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ são ditos *coeficientes* ou *quocientes parciais* da representação. A título de exemplo, o número π possui a seguinte representação em frações contínuas

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, ...] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Por sua vez, o número racional $5,014014... = [5; 7, 14]$, enquanto para o número de ouro $\phi = 1,61803...$, tem-se a representação $\phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, ...]$.

Outro aspecto fundamental das frações contínuas está relacionado à aproximação de um número real por um racional. Nesse contexto, é possível obter "frações parciais" que são chamadas *convergentes*. Estas são frações que aproximam o número real, obtidas a partir da consideração de uma quantidade finita de coeficientes da sua representação por frações contínuas. A título de exemplo, as convergentes de ordem 1 e ordem 3 do número π são

$$\frac{p_1}{q_1} = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \text{ e } \frac{p_3}{q_3} = [3; 7, 15, 1] = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}.$$

Historicamente, essas convergentes foram utilizadas para aproximação do número π. A convergente 22/7 foi utilizada por Arquimedes (287 - 212 a. C.) em suas obras, não se sabendo ao certo se Arquimedes possuía conhecimento sobre frações contínuas. As convergentes de ordem 2 e ordem 3 do número π também foram utilizadas como aproximação do mesmo ao longo da história, em especial na matemática chinesa e na indiana (BREZINSKI, 1991). Além disso, muitos matemáticos ao longo da história, como Christiaan Huygens (1629 - 1695) e John Wallis (1616 - 1703), estudaram o tema interessados na utilização das convergentes como aproximações para números irracionais.

Em (KHINCHIN, 1964) foram introduzidas duas definições, atualmente consagradas na literatura e que ajudam a expor a importância das frações contínuas no sentido das aproximações. A primeiras delas é: Dado um número $x \in \mathbb{R}$, denominamos *uma melhor aproximação (do primeiro tipo) para* x, um $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b > 0$, tal que

$$\forall\ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q},\ \text{com}\ \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\ \text{e}\ 0 < d \leq b,\ \text{tem-se}\ \left| x - \frac{c}{d} \right| > \left| x - \frac{a}{b} \right|.$$

Embora comumente utilizada, a aproximação $3,14 = \frac{314}{100}$ não se encaixa como uma melhor aproximação de π no sentido acima, uma vez que $\frac{22}{7} \neq \frac{314}{100}$, $7 < 100$ e

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \left| \pi - \frac{314}{100} \right|.$$

A segunda definição é: Para $x \in \mathbb{R}$, uma *melhor aproximação do segundo tipo* é um $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b > 0$, tal que

$$\forall\ \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\ \text{com}\ 0 < d \leq b\ \text{tem-se}\ |dx - c| > |bx - a|.$$

Mostra-se que toda convergente é uma melhor aproximação do segundo tipo, e que toda melhor aproximação do segundo tipo, também é do primeiro tipo. Em particular, $\dfrac{22}{7}$, a aproximação usada por Arquimedes para π é do segundo tipo. Entretanto, observe que a fração $\dfrac{311}{99}$ satisfaz, para c e $d \in \mathbb{Z}$ com $0 < d \leq 99$,

$$\left| \pi - \frac{c}{d} \right| > \left| \pi - \frac{311}{99} \right|,$$

mas, ocorre que

$$|7\pi - 22| < |99\pi - 311|.$$

Nesse caso, $\dfrac{311}{99}$ é uma melhor aproximação do primeiro tipo, mas não é do segundo tipo, sendo as frações com esta característica denominadas *frações intermediárias*.

Dada uma convergente qualquer p/q de um número irracional x, é possível estimar o erro na aproximação de x por essa convergente. Em geral, o erro é sempre menor que o inverso do quadrado do denominador, ou seja,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

A título de comparação, observe que $|\pi - 314/100| \not< 1/100^2$. Ainda mais, o Teorema de Hurwitz-Markov, (vide Teorema 3.13), estabelece a melhor estimativa para o erro, válida para uma quantidade infinita de convergentes de qualquer irracional. Mais precisamente, o Teorema garante que para qualquer número irracional x, o erro na aproximação satisfaz

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

para pelo menos uma em cada três convergentes consecutivas de x.

As frações contínuas possuem forte relação com conceitos expostos nas grades curriculares da Educação Básica, tanto do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio. Levando em consideração a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), foi proposta uma sequência didática sobre as frações contínuas no Ensino Fundamental que, além de apresentar uma forte relação entre elementos algébricos e geométricos a partir do uso de tecnologias, contempla as seguintes habilidades presentes em (BRASIL, 2018) e descritas na Seção 4.1, que são: (EF06MA22), (EF07MA04), (EF07MA05), (EF07MA06), (EF07MA07), (EF07MA11), (EF07MA12), (EF08MA15), (EF09MA01), (EF09MA02) e (EF09MA16). No mesmo âmbito foi apresentado uma proposta didática para o Ensino Médio, discutindo as noções de aproximação e convergência, além da resolução de equações diofantinas que se originam de problemas cotidianos. Dessa forma, das cinco competências propostas por (BRASIL, 2018) para o Ensino Médio, duas delas são contempladas na sequência didática.

As frações contínuas ainda possuem diversas aplicações, a exemplo da equação de Pell (veja a equação 2.1) e dos aproximantes de Padé, dentre outras aplicações, tanto na matemática quanto em outros campos do conhecimento. Podem-se destacar as aplicações presentes na dissertação, que são a resolução de equações diofantinas, apresentando um método alternativo ao comumente difundido, o qual inclusive está presente na proposta de inserção na Educação Básica, e a aproximação de zeros de funções reais, que foi proposta por Lagrange e que comparativamente aos métodos de aproximação difundidos atualmente, tem em alguns casos uma convergência mais rápida.

1.1 Objetivos

O objetivo geral consiste na apresentação das frações contínuas em seus aspectos históricos, teóricos e suas aplicações, além de possibilidades didáticas de abordagem do tema na educação básica.

- Resgatar os episódios da história que remetem à descoberta, estudo e avanços da teoria das frações contínuas.
- Apresentar definições e resultados acerca do estudo das frações contínuas, em especial, as melhores aproximações do primeiro e segundo tipo e suas consequências.

- Elaborar uma proposta didático-pedagógica para inserção das frações contínuas na educação básica, alinhada com as competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

1.2 Organização

O trabalho está organizado em cinco capítulos. No segundo capítulo , apresentamos um apanhado histórico das frações contínuas, dividido em três seções: A primeira seção discorre sobre a origem do tema, que está relacionado a alguns algoritmos e estudos sobre melhores aproximações, e ainda sobre o início do estudo teórico das frações contínuas, devido especialmente ao italiano Rafael Bombelli (1526-1572) (BREZINSKI, 1991). A segunda seção é intitulada *A era de ouro* e recebe esse nome por contemplar os mais significativos avanços na teoria das frações contínuas, incluindo as obras de grandes matemáticos, tais como Euler, Lagrange e Lambert sobre o tema. A última seção discorre sobre os avanços da teoria das frações contínuas após o século XVIII e expõe suas utilizações em diversas áreas.

O terceiro capítulo trata dos principais resultados sobre frações contínuas. A primeira seção deste capítulo expõe as definições e principais resultados sobre frações contínuas e convergentes, encerrando com a demonstração do Teorema de Hurwitz-Markov, que impõe a melhor estimativa para o erro na aproximação de um irracional qualquer por suas convergentes, válida para uma infinidade delas. A seção seguinte trata de teoremas de aproximação, utilizando as definições de melhor aproximação do primeiro e do segundo tipo, finalizando com o fato que todo irracional quadrático é representado por uma fração contínua periódica. Na última seção do capítulo, são apresentadas duas aplicações das frações contínuas, a primeira é um método para determinação de soluções de equações diofantinas e a seguinte consiste em um método de aproximação de zeros de funções reais, proposto por Lagrange, e sua comparação com os métodos de aproximação conhecidos atualmente.

O quarto capítulo trata da proposta de utilização das frações contínuas na Educação Básica, e está dividido em 3 seções. Na primeira são apresentados, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências e habilidades que a proposta didática contempla, além das metodologias e outros aspectos que justificam a utilização da proposta. Na segunda seção, é detalhada a proposta didática para o Ensino Fundamental, que consiste em apresentar a escrita das frações contínuas como decorrência do algoritmo de Euclides, com auxílio da interpretação geométrica, e a representação como uma forma de determinar a irracionalidade de um número qualquer. Na terceira seção, é descrita a proposta do Ensino Médio, que se inicia com a escrita da fração contínua de números irracionais, em seguida é apresentada a noção de convergentes e busca-se uma comparação de aproximações com as normalmente utilizadas na Educação Básica. Por fim, são expostos problemas que envolvem equações diofantinas, e as frações contínuas são discutidas como uma possibilidade para sua resolução.

2 História das frações contínuas

2.1 Abordagens iniciais do conceito

De acordo com (BREZINSKI, 1991), existiram diversos algoritmos equivalentes às frações contínuas muitos séculos antes de sua descoberta e estudo. Conforme ressaltam (RECALDE; VARGAS, 2011), o algoritmo de Euclides, apresentado no livro VII dos Elementos, e alguns métodos de aproximação de raízes podem ser considerados como ancestrais das frações contínuas, sendo inclusive o Algoritmo de Euclides utilizado em algumas abordagens do tema atualmente, no Ensino Superior e na Educação Básica.

Um método decorrente da aplicação sucessiva do algoritmo de Euclides, é apresentado no livro X dos Elementos, sendo equivalente ao processo de obtenção de frações contínuas em abordagens atuais, como é possível observar na tradução dos Elementos

> Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis. (BICUDO, 2009, p. 355)

O algoritmo remete a um processo infinito, que ocorre com números irracionais, e quando essa proporção entre os segmentos é periódica, a exemplo da $\sqrt{2}$ e a unidade, o processo recebe o nome de Antifairese.

Nas obras de grandes matemáticos ao longo da história existem evidências de um possível conhecimento sobre convergentes, conforme afirmam (BREZINSKI, 1991) e (STILLWELL, 2020). Aristarco de Samus (310 a 280 a.C.) utiliza a fração $\frac{430}{37}$ como aproximação para $\frac{71755875}{6173500}$, que é uma das convergentes obtidas no processo das frações contínuas. Igualmente existem registros de frações aproximando o número π: o famoso matemático Arquimedes (287 - 212 a.C.) utilizou a fração $\frac{22}{7}$. Outras aproximações como $\frac{333}{106}$ e $\frac{355}{113}$ aparecem na história, em especial na matemática chinesa. O que essas frações tem em comum é que são a 2ª, 3ª e 4ª convergentes da fração contínua de π respectivamente (BREZINSKI, 1991).

De acordo com (BREZINSKI, 1991) e (RECALDE; VARGAS, 2011), métodos de aproximação de soluções de equações também contribuíram para o estudo das frações contínuas, podendo-se destacar as soluções das equações diofantinas, estudadas por Diofanto[1], que podem ser solucionadas por um método que usa frações contínuas, conforme podemos observar na obra de (OLDS, 1963).

[1] Não se sabe ao certo seu ano de nascimento e morte, sabe-se apenas que Diofanto viveu no século III depois de Cristo, na cidade de Alexandria.

Leonardo de Pisa (1170 - 1250), mais conhecido com Fibonacci, foi o primeiro matemático a tentar definir as frações contínuas. Em sua obra "Liber abaci", que foi publicada postumamente somente em 1857, Fibonacci introduz uma espécie de fração contínua (BREZINSKI, 1991) com a seguinte notação:

$$\frac{a+\frac{c+\frac{e}{f}}{d}}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{e}{bdf} = \frac{adf + cf + e}{bdf}$$

Conforme podemos observar na tradução do "Liber abaci" por (SIGLER, 2003), essas frações eram utilizadas em especial na divisão de números, como por exemplo na divisão de 749 por 75, em que ele escreve como resultado

$$9 + \frac{4 + \frac{4+\frac{2}{3}}{5}}{5}.$$

Conforme afirmam (BREZINSKI, 1991), (RECALDE; VARGAS, 2011) e (CRETNEY, 2014), o nascimento das frações contínuas no sentido que conhecemos atualmente se deve a Bombelli (1526-1572). Na sua obra sobre números complexos "L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri", publicada em 1572, expõe um método de aproximação de raízes, que consiste em encontrar aproximações por valores maiores e menores, alternadamente. Utilizando frações contínuas, ainda que escritas em notações distintas, encontramos o equivalente na notação atual a

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}.$$

O método publicado por Bombelli, que admite ter se baseado no trabalho do matemático Al-khwarizmi (780 - 850), também aparece na obra "Quadra delli numeri"de Cataldi (1522 - 1626) publicada em 1613. A diferença é que Cataldi utiliza uma notação distinta, notação essa que mais se assemelha a atual notação de frações contínuas, sendo escrita da seguinte maneira sua aproximação para $\sqrt{18}$:

$$4\&\frac{2}{8}\&\frac{2}{8}\&\frac{2}{8}...$$

O britânico John Wallis (1616 - 1703) no seu trabalho "Arithmetica infinitorum", publicado em 1656, apresenta um método para determinar a seguinte expressão,

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots},$$

que se origina da razão entre um quadrado e um círculo circunscrito a este. O seu contemporâneo e amigo William Brouncker (1620 - 1684), que possuía conhecimentos sobre frações contínuas, inclusive o método recursivo para encontrar convergentes

(CRETNEY, 2014), reescreveu a expressão acima da seguinte forma:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{\ddots}}}.$$

Não se sabe ao certo qual método Brouncker utilizou, e mais tarde Wallis tentou replicá-lo, resultando em uma primeira aproximação por frações contínuas de um irracional transcendente (RECALDE; VARGAS, 2011).

O matemático e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695) deu diversas contribuições para o estudo das frações contínuas, inclusive utilizando-as na construção de seu planetário, conforme apresentado em seu livro "Descriptio automati planetarii". Ao construir o planetário com as órbitas de todos os planetas, Hugyens se utilizava de engrenagens para simular com precisão os movimentos de todos os planetas e as construía com base na razão de ângulos cobertos em um ano terrestre. Ao analisar a órbita de Saturno, Hugyens se depara com a razão 77708431/2640858. Como seria muito complexo construir engrenagens com a quantidade de encaixes acima, utilizando o algoritmo de Euclides, ele consegue escrever 77708431/2640858 como a seguinte fração contínua

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

sendo então o quarto convergente, equivalente a fração 206/7, que está presente em seu planetário (BREZINSKI, 1991). Conforme afirma (CRETNEY, 2014), Hugyens, assim como Wallis, observou que o truncamento das frações contínuas geram as melhores aproximações racionais de números irracionais, entretanto ele não direcionou estudos às frações contínuas, uma vez que, assim como Cataldi, ele estava interessado somente nas aproximações para desenvolver seus estudos em outro campo da matemática.

2.2 A era de ouro

As frações contínuas tiveram como era mais produtiva o século XVIII, marcado por obras de três grandes matemáticos, Euler (1707 - 1783), Lambert (1728 - 1777) e Lagrange(1736 - 1813), todos pertencentes à Academia das Ciências de Berlim (BREZINSKI, 1991), sendo Euler aquele quem deu mais contribuições sobre o tema.

Embora Leonhard Euler houvesse utilizado anteriormente as frações contínuas para resolução da equação diferencial de Ricati, só as apresentou formalmente pela primeira vez em sua obra "Defractioninus continuis dissertatio", na Academia das Ciências de São Petesburgo em 1737. Esta obra só foi publicada tempos depois, pela revista Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae (CRETNEY, 2014) e (BRE-

ZINSKI, 1991). Na obra "Defractioninus continuis dissertatio", Euler apresenta alguns teoremas sobre o assunto, dentre eles, o fato que todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita e que um irracional pode ser representado por uma fração contínua infinita. Além disso, Euler provou que toda fração contínua periódica representa um irracional quadrático[2], resultado este que teve sua recíproca demonstrada por Lagrange em 1778. Ainda em sua obra, Euler analisa diferentes formas de representar números irracionais e transcendentes, expondo as seguintes expressões:

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6}...,$$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + ...,$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14}...,$$

Nesse ponto, Euler usa esses resultados para provar a irracionalidade de e e e^2. Além disso, conclui que todo número irracional é o limite de uma sequência de números racionais. Os termos dessa sequência são aproximações desse irracional, obtidas pelo truncamento da representação em frações contínuas, sendo suas melhores aproximações racionais.

Em outra obra "Introduction in analysin infinitorum", publicada em 1748, Euler escreve funções como séries baseado nas frações contínuas e utiliza essa abordagem para desenvolver estudos sobre a resolução de equações diferenciais. Nessa obra, pode-se observar uma construção implícita do corpo dos reais, a partir das frações contínuas (RECALDE; VARGAS, 2011).

Por volta de 1765, Euler também estudou a famosa *equação de Pell*

$$x^2 = Dy^2 + 1, \text{ com } x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } D \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

utilizando frações contínuas. A solução para essa equação em alguns casos foi dada por Lagrange em 1770. Euler ainda utilizou as frações contínuas em outros campos, como para minimização de soluções de equações do tipo $p = mx^2 - ny^2$, com p, m e n inteiros.

O alemão Johann Heinrich Lambert, conhecido por demonstrar a irracionalidade do número π com frações contínuas, utilizou a seguinte expressão

$$\tan x = \frac{1|}{|1/x} + \frac{1|}{|3/x} + \frac{1|}{|5/x} + \frac{1|}{|7/x}...,$$

[2] Um irracional quadrático é um número irracional que é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros.

que já era conhecida por Euler e Lagrange, entretanto Lambert a justificou de forma rigorosa e provou que se x é racional, então a expressão de $\tan x$ é irracional e, usando o fato que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, concluiu que π é irracional. Lambert também fez observações com base nas frações contínuas para as funções exponencial e logarítmica, concluindo que $\exp x$ e $\log x$ são irracionais, quando x é racional.

Outro famoso matemático, Joseph Louis Lagrange, fez diversas descobertas no campo das frações contínuas. Em 1776, deu a primeira justificativa de que a equação de Pell $x^2 = Dy^2 + 1$ possui solução geral para $y \neq 0$, se D não for um quadrado perfeito. Em sua obra "Mémoire sur la résolution des équations numériques" publicada em 1767, Lagrange apresenta um método de aproximação de zeros de funções reais baseado em frações contínuas (BREZINSKI, 1991). Por exemplo, considere para aplicação do método, a equação

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

É fácil verificar que a equação possui um zero entre 1 e $3/2$. Considerando a substituição $x = 1 + \frac{1}{y}$, e reescrevendo a equação, obtemos

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

É possível verificar que a equação obtida acima possui um zero entre 1 e 2. Podemos fazer a substituição $y = 1 + \frac{1}{z}$ e deduzir que

$$z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0.$$

Essa equação possui um zero entre 2 e 3. Repetindo o processo, podemos escrever $z = 2 + \frac{1}{u}$ e, deste modo, por equivalência de equações, a raiz da equação é

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Diferente de alguns outros métodos da época para aproximar zeros de funções, esse sempre determina um resultado. Por isso, o método proposto por Lagrange, logo se tornou clássico, sendo rapidamente difundido (BREZINSKI, 1991).

Lagrange também foi o responsável por demonstrar a recíproca de um teorema proposto por Euler, a saber, que todo irracional quadrático é representado por uma fração contínua periódica. Além disso, foi o responsável por estender o método de resolução de equações diofantinas do tipo $py - qx = r$ usando frações contínuas. Lagrange ainda publicou artigos com investigações sobre equações do segundo grau e a equação de Pell, além de um estudo sobre frações contínuas no cálculo diferencial.

Outros diversos matemáticos e pesquisadores contemporâneos deram suas contribuições para as frações contínuas, dentre eles pode-se citar Jean Le Rond D'alembert

(1717 - 1783), Abraham de Moivre (1667 - 1754) e Daniel Bernoulli (1700 - 1782), além de muitos outros que pesquisavam sobre raízes de polinômios e aproximações de números irracionais. Dentre os problemas resolvidos por esses matemáticos, estão problemas que envolvem identidades das frações contínuas, provas de racionalidade e irracionalidade de números reais e, principalmente, a relação das frações contínuas com o cálculo diferencial, em especial, com o estudo de séries e aproximações de funções, desenvolvendo assim aporte teórico para o estudo dos aproximantes de Padé, que ocorreu quase um século depois e tem como objetivo aproximar funções por frações racionais.

2.3 A era moderna

Consideraremos como a era moderna, as contribuições dadas a partir do século XIX. De acordo com (BREZINSKI, 1991), as frações contínuas foram objeto de estudo em algumas áreas da matemática. Na teoria dos números por exemplo, o tema foi abordado em estudos dos números transcendentes, da equação de Pell e das generalizações das frações contínuas introduzidas por Jacobi (1804 - 1851), Perron (1880 - 1975) e Hermite (1822 - 1901). Com relação aos números transcendentes, destacam-se estudos envolvendo os números de Liouville. Já com relação a equação de Pell, surgiram generalizações e investigações das soluções periódicas e sobre a relação do seu período com os coeficientes da equação, a exemplo de Egen (1793 - 1849), que em 1819 determinou que a equação, $x^2 = Dy^2 + 1$ possui solução inteira se $\sqrt{D}$ for periódica, com um período ímpar de termos na sua fração contínua.

Alguns matemáticos, a exemplo de Perron se dedicaram às generalizações das frações contínuas, como na representação de irracionais que são raízes de equações cúbicas ou ainda, na representação simultânea de vários números por frações com mesmos denominadores. Outros diversos matemáticos, como Jacobi, estudaram o tema e estabeleceram resultados sobre equações e funções, utilizando por exemplo equações de quinto e sexto grau, ou ainda equações diofantinas. Destaca-se o famoso matemático indiano Ramanujan (1827 - 1920), que estudou matemática praticamente sozinho pelo livro de George Shoobridge (1837 - 1914), o qual consiste em uma sinopse de resultados matemáticos sem suas demonstrações. Esse livro contém 7 páginas sobre frações contínuas, envolvendo fórmulas de convergentes, conversão de uma série em frações contínuas, dentre outros resultados (BREZINSKI, 1991).

Ramanujan determinou muitas expressões para identidades numéricas e para funções envolvendo frações contínuas, tais como as identidades

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|2} + \frac{2^2|}{|2} + ...,$$

$$\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/5} = \frac{|1}{1|} + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{|1} + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{|1} + ...,$$

sendo algumas delas demonstradas por outros matemáticos. Algumas das identidades apresentadas por Ramanujan eram casos particulares do seu trabalho sobre frações contínuas.

Nesta era moderna, as frações contínuas tem contribuído com avanços na teoria das probabilidades, em estudos sobre convergência e teoria analítica de funções, além de serem a base dos chamados aproximantes de Padé, que caracterizam séries de funções utilizadas para aproximar funções reais com determinadas condições.

3 Principais teoremas sobre frações contínuas

Será apresentado a seguir definições e resultados sobre frações contínuas. As definições e teoremas foram obtidos de (MOREIRA, 2011) e (KHINCHIN, 1964).

Dado um número $x \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ a sua parte inteira e por $\{x\}$ sua parte decimal ou fracionária.

3.1 Primeiros resultados

É possível encontrar na literatura definições diversas de frações contínuas. Nesta dissertação será usada a definição a seguir, que restringe todos os numeradores das frações a serem iguais a 1.

Definição 3.1. *Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, ponha $\alpha_1 = \frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x-a_0}$. Observe que*

$$x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Seja $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Se $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ tome $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1}$ e observe que

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

Continuando assim o processo, para $n \in \mathbb{N}$, considera-se $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ e, se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, define-se $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$. Há dois casos possíveis:

i. Para algum $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\alpha_n = a_n$ e chega-se à:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} := \left[a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n\right].$$

ii. Caso contrário, $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq a_n$ e chega-se à:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}}}}} := \left[a_0; a_1, ..., a_n, ...\right].$$

Qualquer uma das expressões acima é denominada uma representação em fração contínua do número x. Os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ são seus coeficientes ou quocientes parciais. A representação diz-se finita no primeiro caso e infinita no segundo.

Posteriormente neste capítulo, demonstrar-se-á que a fração contínua obtida no segundo caso converge em certo sentido ao número x, assim

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

Exemplo 1. *Determine a fração contínua de $3,32$.*

Com o auxilio de uma calculadora, efetuamos os seguintes passos que decorrem da definição:

$$3,32 = 3 + 0,32 = 3 + \frac{1}{\frac{1}{0,32}} \implies 3,32 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{1}{0,125}}} \implies 3,32 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8}} = [3; 3, 8].$$

Exemplo 2. *Vamos determinar a fração contínua do número π com o auxílio de uma calculadora. Observe o processo:*

$$\pi = \lfloor \pi \rfloor + \{\pi\} = 3 + 0,14159... = 3 + \frac{1}{\frac{1}{0,14159...}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{1}{0,06251...}}}.$$

Continuando o processo

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\frac{1}{0,99659...}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{0,003417..}}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{\frac{1}{0,634591...}}}}}}.$$

Podemos então escrever π da seguinte forma:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, ...] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{\ddots}}}}}.$$

Teorema 3.1. *Todo número racional pode ser representado como uma fração contínua finita.*

Demonstração. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Do algoritmo de Euclides, pode-se escrever $p = a_0 q + r_0$ com $a_0, r_0 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_0 < q$. Assim,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}.$$

Novamente, do algoritmo de Euclides, é possível escrever $q = a_1 r_0 + r_1$, com $a_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1 < r_0$. Logo,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}.$$

Analogamente, $\frac{r_0}{r_1} > 1$ e pode-se repetir o processo utilizado acima, obtendo quociente a_2 e resto r_2 inteiros, com $0 \leq r_2 < r_1$. Prosseguindo desse modo, é possível determinar $r_3, r_4, r_5, ...$, de modo que obtêm-se uma sequência decrescente (r_n) de números naturais. Assim, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n = 0$ e, portanto, tem-se

$$x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n].$$

$\blacksquare$

Teorema 3.2. *Um número real que pode ser representado por uma fração contínua finita é racional.*

Demonstração. Suponha que $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$ tem fração contínua finita, ou seja, pode-se escrever

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}.$$

Como $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ e na expressão acima constam apenas as operações de adição e inversão, as propriedades de fechamento satisfeitas no conjunto dos racionais garantem que $x \in \mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Teorema 3.3. *Um número é irracional se, e só se, sua fração contínua é infinita.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.2 que $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ possui representação em fração contínua infinita, e reciprocamente. $\blacksquare$

Em vista dos teoremas acima, obtemos uma forma diferente de verificar a racionalidade ou irracionalidade de números reais. No que segue, tomamos por base (MOREIRA, 2011).

Teorema 3.4. *Dada uma sequência $(t_0, t_1, ...)$ de números reais tal que $t_k > 0$, $\forall k \geq 1$, definimos sequências (x_m) e (y_m) por*

$$x_0 = t_0;\ x_1 = t_0 t_1 + 1,\ e\ x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m$$

$$y_0 = 1;\ y_1 = t_1,\ e\ y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m.$$

Então, para $[t_0, t_1, ..., t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{t_{n-1} + \frac{1}{t_n}}}}}$, *temos*

$$[t_0; t_1, t_2, ..., t_n] = \frac{x_n}{y_n}, \forall n \geq 0.$$

Além disso,

$$x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Será usada indução sobre n. Defina

$$p(n) : [t_0; t_1, ..., t_n] = \frac{x_n}{y_n}, n \geq 0.$$

Então, $p(0)$ é válida, pois

$$[t_0] = t_0 = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Suponha que para um $n \geq 0$ inteiro $p(n)$ seja válida, ou seja, para todos $t_0, t_1, ..., t_n > 0$ dados, se tenha

$$[t_0; t_1, ..., t_n] = \frac{x_n}{y_n}.$$

Considere $[t_0; t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}]$, onde $t_i > 0, \forall i = 1, 2, ..., n+1$. Pode-se escrever essa última expressão como

$$\left[t_0; t_1, t_2, ..., t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right].$$

Tomando $t'_0 = t_0, t'_1 = t_1, ..., t'_n = t_n + \frac{1}{t_{n+1}}$, obtemos da hipótese de indução

$$\begin{aligned} [t_0; t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}] &= [t'_0; t'_1, ..., t'_n] \\ &= \frac{t'_n x_{n-1} + x_{n-2}}{t'_n y_{n-1} + y_{n-2}}, \end{aligned}$$

em que $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1 t_0 + 1$, $y_0 = 1$, $y_1 = t_1$ e

$$\begin{cases} x_k = & t_k x_{k-1} + x_{k-2} \\ y_k = & t_k y_{k-1} + y_{k-2} \end{cases}, \ \forall k \geq 2.$$

Com isso

$$\begin{aligned} [t_0; t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}] &= \frac{\left(t_n + \dfrac{1}{t_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \dfrac{1}{t_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1} t_n x_{n-1} + x_{n-1} + t_{n+1} x_{n-2}}{t_{n+1} t_n y_{n-1} + y_{n-1} + t_{n+1} y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1}\left(t_n x_{n-1} + x_{n-2}\right) + x_{n-1}}{t_{n+1}\left(t_n y_{n-1} + x_{n-2}\right) + y_{n-1}} \\ &= \frac{t_{n+1} x_n + x_{n+1}}{t_{n+1} y_n + y_{n+1}} \\ &= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Logo, $p(n+1)$ é valida e, portanto, pelo princípio da indução finita $p(n)$ é valida para todo n natural. Isto é,

$$[t_0; t_1, ..., t_n] = \frac{x_n}{y_n}, \forall n \geq 0.$$

Analogamente, usaremos indução para mostrar a segunda afirmação feita. Observe que, para $n = 0$, temos

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0 .$$

Supondo a validade para um n natural qualquer, tem-se

$$x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_{n+2} y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+2} &= (t_{n+2} x_{n+1} + x_n) y_{n+1} - (t_{n+2} y_{n+1} + y_n) x_{n+1} \\ &= -(x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Definição 3.2. *Dado $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$, para cada $n \geq 0$ inteiro, sejam $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}$ tais que $(p_n, q_n) = 1$ e*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n].$$

A fração irredutível $\frac{p_n}{q_n}$ acima é denominada a n-ésima reduzida ou convergente da fração contínua de x.

Observe a seguir exemplos de convergentes do número π:

$$\frac{p_0}{q_0} = [3] = \frac{3}{1},$$

$$\frac{p_1}{q_1} = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = [3; 7, 15] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = [3; 7, 15, 1] = \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}.$$

É bem comum que seja utilizada a aproximação para π como $3,14 = \frac{314}{100}$, entretanto, ao se considerar a primeira convergente do número π que é $\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}$ já obtêm-se uma aproximação melhor que $3,14$, conforme podemos observar a seguir:

$$\left|\pi - \frac{314}{100}\right| = 1,5926... \cdot 10^{-3} > \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 1,2644... \cdot 10^{-3}.$$

Além disso, é possível notar uma grande diferença entre os denominadores das frações.

Corolário 3.5. *Dado* $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ *e a sequência de suas convergentes* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, *as sequências* (p_n) *e* (q_n) *satisfazem as recorrências*

$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n, \forall n \geq 0, \\ p_0 = a_0, p_1 = a_1 a_0 + 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{cases} q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n, \forall n \geq 0, \\ q_0 = 1, q_1 = a_1, \end{cases} \tag{3.2}$$

respectivamente. Além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Sejam (p_n) e (q_n) as sequências definidas pelas recorrências 3.1 e 3.2. Do Teorema 3.4, com $(t_n) = (a_n)$, segue-se que

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}, \forall n \geq 0$$

e

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Mas então

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n],$$

com

$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = 1 \text{ ou } q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = 1,$$

isto é,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n] \text{ com } (p_n, q_n) = 1,$$

mostrando ser $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ a n-ésima convergente de x. ∎

Observação 3.1. *Como* $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ *e*

$$q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n, \forall n \geq 0,$$

segue-se, por indução finita, que

$$q_n > 0, \forall n \geq 0.$$

O corolário a seguir, determina uma expressão para x, conhecendo α_n e utilizando as sequências (p_n) e (q_n).

Corolário 3.6. *Dado* $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ *real, temos para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \text{ e } \alpha_n = \frac{p_{n-2} - x q_{n-2}}{x q_{n-1} - p_{n-1}}.$$

Demonstração. Pode-se escrever $x = [a_0; a_1, a_2, ...a_{n-1}, \alpha_n]$, ou seja,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}}.$$

Logo, do Teorema 3.4, $x = \dfrac{x_n}{y_n}$, onde

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}$$

e

$$y_n = \alpha_n y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Mas, para $k = 1, ..., n-1$, $x_k = p_k$ e $y_k = q_k$. Assim

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

da qual segue

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \implies \alpha_n (x q_{n-1} - p_{n-1}) = p_{n-2} - x q_{n-2} \implies \alpha_n = \frac{p_{n-2} - x q_{n-2}}{x q_{n-1} - p_{n-1}}.$$

■

Proposição 3.7. *Dado $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$, tem-se*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}){q_n}^2}, \forall n \geq 1,$$

na qual

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n}, \forall n \geq 1;$$

Além disso, $\beta_{n+1} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1]$ e

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2){q_n}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}){q_n}^2} < \frac{1}{\alpha_{n+1}{q_n}^2} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.6, obtêm-se

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n}.$$

Reescrevendo $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}$ como $-(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$, segue do Teorema 3.4 que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}){q_n}^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}){q_n}^2}.$$

Em consequência,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}){q_n}^2}.$$

Como $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ e $0 < \beta_{n+1} < 1$, uma vez que (q_n) é crescente, segue então que

$$a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 1 + 1 = a_{n+1} + 2,$$

da qual decorre

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n{}^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n{}^2}.$$

A fração contínua $[0; a_n, ..., a_1]$ de β_{n+1} segue de que

$$\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \implies \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \dfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}}} = \frac{1}{a_n + \beta_n}.$$

■

Tomando como exemplo o número π e utilizando a sua convergente de ordem 1, é possível estimar quão próxima ela está de π a partir do resultado acima. Observe que

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{7^2}.$$

Porém, ainda mais

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{15 \cdot 7^2} = \frac{1}{735} < \frac{1}{700}.$$

Teorema 3.8. *Sejam $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ sua sequência de convergentes, então*

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}.$$

Demonstração. Como (q_n) é estritamente crescente, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0.$$

Utilizando a desigualdade

$$0 \leq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

demonstrada na Proposição 3.7, conclui-se do Teorema do Confronto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

■

Observação 3.2. *O Teorema 3.8 dá sentido para à igualdade $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ quando a fração contínua é infinita, ou seja, quando x é um valor irracional.*

A Proposição 3.7 implica que, dado ϕ irracional, a desigualdade,

$$\left|\phi - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^2}$$

tem infinitas soluções racionais r/s. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Dirichlet*. Por outro lado, se $\phi \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\phi = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então tomando $r/s \in \mathbb{Q}$, $r/s \neq m/n$, a desigualdade

$$\left|\phi - \frac{r}{s}\right| = \left|\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^2} \implies |ms - nr| < \frac{n}{s} \implies s < n,$$

tendo assim uma quantidade finita de soluções.

Observemos como ocorrem algumas aproximações por convergentes com o número π:

$$\pi - \frac{p_0}{q_0} = \pi - \frac{3}{1} = 0,1415926...$$
$$\pi - \frac{p_1}{q_1} = \pi - \frac{22}{7} = -0,0012644...$$
$$\pi - \frac{p_2}{q_2} = \pi - \frac{333}{106} = 0,0000832...$$
$$\pi - \frac{p_3}{q_3} = \pi - \frac{355}{113} = -0,0000002...$$

O teorema a seguir, estabelece a maneira com que as aproximações por convergentes convergem a um número real.

Teorema 3.9. *As convergentes de ordem par formam uma sequência crescente e as convergentes de ordem ímpar uma sequência decrescente. Além disso, toda convergente de ordem ímpar é maior que qualquer convergente de ordem par.*

Demonstração. O resultado acima é equivalente a demonstrarmos a desigualdade a seguir

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \forall k \geq 0.$$

Sabemos que $\forall n \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}p_{n+1}q_n + p_nq_n - a_{n+2}p_nq_{n+1} - p_nq_n}{(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_{n+2}q_n} = \frac{a_{n+2}(-1)^n}{q_{n+2}q_n}. \end{aligned}$$

A expressão acima é positiva para n par e negativa para n ímpar. Logo,

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \text{ e } \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \forall k \geq 0.$$

Por outro lado, $\forall n \geq 0$,

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$$

é positivo se n par e negativo se n ímpar, de onde concluímos, para qualquer $k \geq 0$,

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \forall k \geq 0.$$

■

Proposição 3.10. *Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$ inteiros com $a_k > 0$, para $1 \leq k \leq n$, e seja $(p_k/q_k)_{k \geq 0}$ a sequência de convergentes da fração contínua de $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Então o conjunto dos números reais cuja representação por frações contínuas começa com $a_0, a_1, ..., a_n$ é o intervalo*

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0; a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right), & \textit{se } n \textit{ é par} \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right], & \textit{se } n \textit{ é ímpar} . \end{cases}$$

Além disso, a função

$$G : (1, +\infty) \to I(a_0, a_1, ..., a_n)$$

dada por $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha]$ é monótona, sendo crescente para n ímpar e decrescente para n par.

Demonstração. É escólio ds demonstrações do Corolário 3.6 e da Proposição 3.7 que

$$\begin{aligned} G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha] &= \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(\alpha q_n + q_{n-1})q_n}. \end{aligned}$$

Portanto, G é crescente quando n ímpar e decrescente quando n par, uma vez que a sequência (q_n) é crescente, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $G(1) := \lim_{\alpha \to 1^+} G(\alpha) = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ e $\lim_{\alpha \to +\infty} G(\alpha) = \frac{p_n}{q_n}$, obtêm-se

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right), & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right), & \text{se } n \text{ é ímpar} . \end{cases}$$

Dessa forma,

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\} =$$

$$\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right), & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right], & \text{se } n \text{ é ímpar} . \end{cases}$$

■

Proposição 3.11. *Dados inteiros $a_0, a_1, a_2, ...,$ com $a_k > 0$, $\forall k \geq 1$, existe um único número real x (que é irracional) cuja representação por frações contínuas é $[a_0; a_1, a_2, ...]$.*

Demonstração. Considere as sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências do Corolário 3.5. Pelo Teorema 3.9, segue que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \forall k \geq 0.$$

Considere como I_k o intervalo $I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right]$. Da desigualdade acima segue-se que $I_{k+1} \subset I_k, \forall k \geq 0$. Além disso, tem-se

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{q_{2k}p_{2k+1} - q_{2k+1}p_{2k}}{q_{2k+1}q_{2k}}.$$

Pelo Corolário 3.5, $q_{2k}p_{2k+1} - q_{2k+1}p_{2k} = (-1)^{2k} = 1$. Logo, $|I_k| = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}$ e como (q_k) é crescente e positiva tem-se $|I_k| \to 0$ se $k \to \infty$. Então, pelo Teorema dos intervalos encaixados, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bigcap_{k \geq 0} I_k = \{x\}.$$

Assim,

$$[a_0; a_1, ..., a_{2k}] = \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq x \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [a_0; a_1, ..., a_{2k}, a_{2k+1}], \forall k \geq 0.$$

Da Proposição 3.10, obtêm-se que $[a_0; a_1, ..., a_{2k}]$ e $[a_0; a_1, ..., a_{2k}, a_{2k+1}]$ pertencem ao intervalo $I(a_0; a_1, ..., a_{2k})$. Assim, $x \in I(a_0; a_1, ..., a_{2k})$ e, portanto, a fração contínua de x começa com $a_0; a_1, ..., a_{2k}, \forall k \geq 0$, ou seja, sua representação por frações contínuas é $(a_0; a_1, ..., a_{2k}, ...)$. ∎

Teorema 3.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Além disso,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \text{ ou } \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Demonstração. O número x pertence ao segmento de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Suponha que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \text{ e } \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Então,

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{q_n^2 + q_{n+1}^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2} \implies 1 \geq \frac{q_n^2 + q_{n+1}^2}{2q_n q_{n+1}} \implies 0 \geq (q_n - q_{n+1})^2,$$

o que é um absurdo, pois (q_n) é estritamente crescente. ■

Teorema 3.13. *(Hurwitz-Markov) Para todo x irracional e todo inteiro $n \geq 1$, temos*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

satisfeita para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\}.$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração. Suponha que a tese seja falsa. Então, existe x irracional e $n \geq 1$ inteiro tais que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \text{ para } k \in \{n-1, n, n+1\}.$$

Portanto, pela Proposição 3.7, segue-se que

$$\frac{1}{(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1})q_k^2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \text{ para } k \in \{n-1, n, n+1\}.$$

Assim,

$$\alpha_k + \beta_k \leq \sqrt{5}, \text{ para } k \in \{n, n+1, n+2\}.$$

Afirmação: $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.
De fato, observe que

$$a_k \leq 2, \text{ para } k \in \{n, n+1, n+2\},$$

pois sendo $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$, tem-se

$$a_k > 2 \implies a_k \geq 3 \implies \alpha_k \geq 3 > \sqrt{5},$$

o que é um absurdo. Assim,

$$a_k = 1 \text{ ou } a_k = 2, \text{ para } k \in \{n, n+1, n+2\}.$$

Ora,

$$a_{n+1} = 2 \implies \sqrt{5} \geq \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \geq 2 + \beta_{n+1}.$$

Mas

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{a_n + \beta_n},$$

como visto na Proposição 3.7. Desse modo,

$$a_n + \beta_n \leq 2 + 1 = 3 \implies \beta_{n+1} \geq \frac{1}{3} \implies \sqrt{5} \geq 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5},$$

o que é um absurdo. Logo $a_{n+1} = 1$. Analogamente, demonstra-se que $a_{n+2} = 1$ e obtêm-se a afirmação.

Observe agora que por definição

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - a_{n+1}}.$$

Como $a_{n+1} = 1$, segue-se que

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}.$$

Sejam $X = \dfrac{1}{\alpha_{n+2}}$ e $Y = \beta_{n+1}$. Então

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}} = \frac{1}{1+Y}.$$

Logo,

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{1+Y} = \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5},$$

$$1 + X + Y = 1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}} + \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5},$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+X} + \frac{1}{Y} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{n+2}}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \\
&= \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\beta_{n+1}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n - a_n}} + \frac{1}{\frac{1}{a_n + \beta_n}} = \alpha_n - a_n + a_n + \beta_n \\
&= \alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Temos então as seguintes desigualdades

$$\frac{1}{1+X} + \frac{1}{Y} \leq \sqrt{5} \tag{3.3}$$

$$1 + X + Y \leq \sqrt{5} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{1+Y} \leq \sqrt{5}. \tag{3.5}$$

A partir da desigualdade 3.4 obtêm-se $1 + X \leq \sqrt{5} - Y$, logo

$$\frac{1}{1+X} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1}.$$

Adicionando $\frac{1}{Y}$ em ambos os membros, tem-se

$$\frac{1}{1+X} + \frac{1}{Y} \geq \frac{1}{Y} + \frac{1}{\sqrt{5}-Y} = \frac{\sqrt{5}}{Y(\sqrt{5}-Y)}.$$

Usando a 3.3 na desigualdade acima, deduzimos que

$$\sqrt{5} \geq \frac{\sqrt{5}}{Y(\sqrt{5}-Y)} \implies Y(\sqrt{5}-Y) \geq 1 \implies \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{3.6}$$

Por outro lado, por 3.4, obtemos $X \leq \sqrt{5} - 1 - Y$. Invertendo a desigualdade e adicionando $\frac{1}{Y+1}$ em ambos os lados, obtêm-se

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y+1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-Y} + \frac{1}{Y+1} = \frac{\sqrt{5}}{(1+Y)(\sqrt{5}-1-Y)}.$$

Usando 3.5 na desigualdade acima, concluímos que

$$\sqrt{5} \geq \frac{\sqrt{5}}{(1+Y)(\sqrt{5}-1-Y)} \implies (1+Y)(\sqrt{5}-1-Y) \geq 1 \implies \frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq Y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{3.7}$$

Pelas desigualdades 3.6 e 3.7 tem-se $Y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que é um número irracional. Uma contradição, pois

$$Y = \beta_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{q_n} \in \mathbb{Q}.$$

■

Demonstrou-se que a desigualdade

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

tem infinitas soluções racionais $\dfrac{p}{q}$ para todo x irracional. O número $\sqrt{5}$ nessa desigualdade é a maior constante com essa propriedade. Considerando, por exemplo, um dado $\epsilon > 0$, tomando o irracional $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, é possível mostrar que a desigualdade

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2}$$

possui somente um número finito de soluções racionais $\frac{p}{q}$.

3.2 Noções de melhor aproximação racional de um número

Nesta seção, utilizando as definições de melhor aproximação introduzidas em (KHINCHIN, 1964), apresentam-se alguns resultados.

Definição 3.3. *Dadas duas frações a/b e c/d com denominadores positivos, a fração intermédia entre elas é a fração*

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Lema 3.14. *A intermédia de duas frações sempre está entre elas em valor.*

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade, que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Portanto,

$$bc - ad \geq 0$$

e, consequentemente,

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0, \; \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ab-bc}{b(b+d)} \leq 0,$$

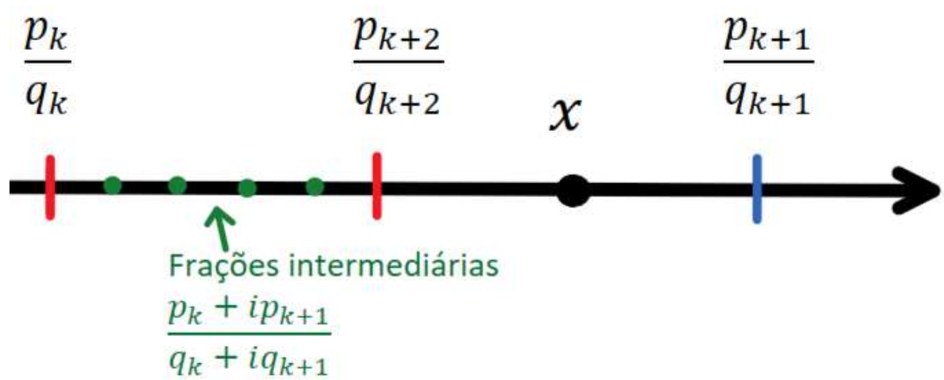
o que demonstra o lema.

■

Definição 3.4. *Seja $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Supondo $k \geq 0$, denominam-se semiconvergentes de frações intermediárias entre as convergentes $\frac{p_k}{q_k}$ e $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$ de x, às frações:*

$$\frac{p_k + ip_{k+1}}{q_k + iq_{k+1}} \text{ com } i \in \{1, 2, ..., a_k - 1\}.$$

Figura 1 – Posição das frações intermediárias na reta numérica



Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

É possível observar que as frações intermediárias podem ser obtidas de maneira sucessiva, utilizando a fração intermédia. Inicialmente, tem-se a intermédia entre $\frac{p_k}{q_k}$ e $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, resultando em

$$\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}.$$

Determinando então a intermédia dessa fração com $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, obtém-se a próxima fração intermediária e assim sucessivamente. Portanto, cada fração intermediária está mais próxima de x que a anterior.

Usando o fato que uma fração intermediária $\frac{p_k + ip_{k+1}}{q_k + iq_{k+1}}$ está contida no intervalo entre duas convergentes de ordem k e $k+2$, determinamos o seguinte resultado.

Teorema 3.15. *Dado um número $x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, seja $\frac{p_k}{q_k}$ uma convergente qualquer de x. Para todo $k \geq 0$, tem-se*

$$|q_k x - p_k| > \frac{1}{q_{k+1} + q_k}.$$

Demonstração. Considere a fração intermediária $\frac{p_k + ip_{k+1}}{q_k + iq_{k+1}}$ para $i = 1$. Como tal fração intermediária está entre $\frac{p_k}{q_k}$ e x, tem-se

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{|p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k|}{|q_k(q_{k+1} + q_k)|}.$$

Como $|p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k| = |(-1)^k| = 1$, observa-se que

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $q_k > 0$, obtêm-se

$$|q_k x - p_k| > \frac{1}{q_{k+1} + q_k}.$$

■

A quantidade de intermediárias que existem entre duas convergentes $\frac{p_k}{q_k}$ e $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$, depende de a_k. Por exemplo, usando as convergentes $\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}$ e $\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}$ de π, temos nesse caso $a_2 = 15$ e, portanto, existem 14 intermediárias distintas entre $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$. Definiremos agora as denominadas melhores aproximações do primeiro tipo.

Definição 3.5. *Dado um número $x \in \mathbb{R}$, denominamos uma melhor aproximação para x ou uma melhor aproximação do primeiro tipo para x, um $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b > 0$, tal que $\forall \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ e $0 < d \leq b$, é válido*

$$\left|x - \frac{c}{d}\right| > \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Em outras palavras, se $\dfrac{a}{b}$ é uma melhor aproximação do primeiro tipo para x, então $\dfrac{a}{b}$ é a fração que está mais próxima de x dentre todas que possuem denominador positivo menor ou igual a b.

No resultado a seguir, convencionaremos as convergentes de ordem -1 como

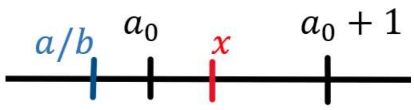
$$p_{-1} = 1 \text{ e } q_{-1} = 0$$

.

Teorema 3.16. *Uma melhor aproximação do primeiro tipo para um número* $x = [a_0; a_1, a_2, ...] \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *é uma convergente da fração contínua de* x *ou uma fração intermediária entre duas convergentes.*

Demonstração. Suponha que a/b é uma melhor aproximação do primeiro tipo para x. Segue então que $a/b \geq a_0$, pois do contrário teríamos $a/b < a_0$, e assim a fração $a_0/1$ seria uma melhor aproximação para x com denominador menor ou igual a b.

Figura 2 – Caso a/b menor que a_0



Fonte: Próprio autor.

Analogamente, podemos afirmar que

$$\frac{a}{b} \leq a_0 + 1.$$

Assim, obtemos $a_0 < \dfrac{a}{b} < a_0 + 1$. Os casos ($a/b = a_0$ e $a/b = a_0 + 1$ resultam em uma convergente ou intermediária. No primeiro caso, $a_0 = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$ é uma convergente e, no segundo caso, $a_0 + 1 = \dfrac{a_0 + 1}{1} = \dfrac{p_0 + p_{-1}}{q_0 + q_{-1}}$ é uma fração intermediaria de x). Se a fração a/b não coincidir com nenhuma convergente ou intermediária da fração contínua de x, então existem duas frações intermediárias, para certos k e r, tais que a/b está entre

$$\frac{p_{k-1} + rp_k}{q_{k-1} + rq_k} \quad \text{e} \quad \frac{p_{k-1} + (r+1)p_k}{q_{k-1} + (r+1)q_k}.$$

Assim, obtêm-se

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_{k-1} + (r+1)p_k}{q_{k-1} + (r+1)q_k} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| = \frac{1}{[q_k(r+1) + q_{k-1}] \cdot [q_k r + q_{k-1}]}.$$

Por outro lado, como as frações não coincidem, $a(q_k r + q_{k-1}) - b(p_k r + p_{k-1}) \neq 0$, logo existe $m \geq 1$, tal que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| = \left|\frac{a(q_k r + q_{k-1}) - b(p_k r + p_{k-1})}{b \cdot (q_k r + q_{k-1})}\right| = \frac{m}{b \cdot (q_k r + q_{k-1})}.$$

Segue-se então que

$$\frac{1}{b(q_k r + q_{k-1})} < \frac{1}{[q_k(r+1) + q_{k-1}] \cdot [q_k r + q_{k-1}]},$$

donde,

$$q_{k-1} + (r+1)q_k < b.$$

A fração $\dfrac{p_{k-1} + (r+1)p_k}{q_{k-1} + (r+1)q_k}$ tem denominador menor do que b, e está mais próximo de x que a fração a/b, o que contradiz a suposição de a/b ser uma melhor aproximação do primeiro tipo para x, concluindo o resultado. ■

Nem todas as frações intermediárias são melhores aproximações do primeiro tipo. Por exemplo, entre as convergentes $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{3}{1}$ e $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{333}{106}$ de π, existem 14 intermediárias, sendo possível verificar que somente uma delas satisfaz a definição de melhor aproximação, a saber,

$$\frac{3 + 14 \cdot 22}{1 + 14 \cdot 7} = \frac{311}{99}.$$

Para as outras intermediárias $\dfrac{p}{q}$ com $q \leq 99$, ocorre

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \left|\pi - \frac{22}{7}\right|.$$

A seguir, consideraremos as denominadas melhores aproximações do segundo tipo. Neste caso podemos garantir que cada uma das melhores aproximações deste tipo serão convergentes.

Definição 3.6. *Dado $x \in \mathbb{R}$ uma melhor aproximação do segundo tipo para x é um $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b > 0$, tal que $\forall \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{c}{d}$ e $0 < d \leq b$, tem-se*

$$|dx - c| > |bx - a|.$$

Toda aproximação do segundo tipo para x também é do primeiro tipo. Seja $\dfrac{a}{b}$ uma melhor aproximação do segundo tipo para $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $\forall \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, com $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a}{b}$ e $0 < d \leq b$, tem-se

$$|dx - c| > |bx - a|.$$

Por outro lado,

$$\left|x - \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{1}{d}(dx - c)\right| = \frac{1}{d}\left|dx - c\right|.$$

Como $b \geq d \implies \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{d}$, utilizando o fato que $|dx - c| > |bx - a|$, conclui-se que

$$\left|x - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{1}{b}|dx - c| > \frac{1}{b}|bx - a| > \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Portanto, a fração $\dfrac{a}{b}$ é uma melhor aproximação do primeiro tipo para x.

A recíproca, no entanto, não é verdadeira. Por exemplo, $\frac{311}{99}$ é uma melhor aproximação do primeiro tipo para π, contudo não é do segundo tipo, pois

$$|7 \cdot \pi - 22| < |99 \cdot \pi - 311|.$$

Enquanto a definição de melhor aproximação do primeiro tipo para x leva em conta somente a distância ao x, as do segundo tipo consideram uma desigualdade com maior influência dos denominadores, excluindo algumas melhores aproximações do primeiro tipo, que assim o eram, apenas pelo "tamanho" dos seus denominadores.

Teorema 3.17. *Toda melhor aproximação do segundo tipo para x é uma de suas convergentes.*

Demonstração. Suponha a/b uma melhor aproximação do segundo tipo para o número

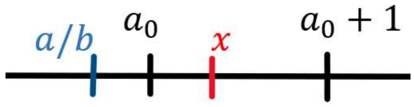
$$x = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

Se $\dfrac{a}{b} < a_0 = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$, obtêm-se

$$|1 \cdot x - a_0| < \left|x - \frac{a}{b}\right| \leq b \cdot \left|x - \frac{a}{b}\right| = |b \cdot x - a|, \text{ pois } b \geq 1,$$

e, assim, $\dfrac{a}{b}$ não seria uma melhor aproximação do segundo tipo para x.

Figura 3 – Caso a/b menor que a_0



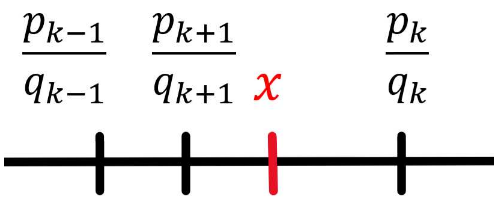
Fonte: Próprio autor.

Se a fração a/b não coincidir com uma convergente, podem ocorrer dois casos: a/b estará entre duas convergentes $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ e $\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ ou é maior que $\dfrac{p_1}{q_1}$.

No primeiro caso, ocorre

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{|aq_{k-1} - bp_{k-1}|}{bq_{k-1}} \geq \frac{1}{bq_{k-1}}. \tag{3.8}$$

Figura 4 – Convergentes com paridades distintas



Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

Como $k-1$ e k têm paridades distintas podemos garantir que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}}. \tag{3.9}$$

Concluímos então das desigualdades 3.8 e 3.9 que

$$b > q_k.$$

Ora, como $\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ está mais próximo de $\dfrac{a}{b}$ do que de x, obtêm-se

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_{k+1}},$$

e assim

$$|bx - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, como k e $k+1$ têm paridades distintas, segue que

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

e, assim, multiplicando a desigualdade acima por q_k em ambos os lados, chega-se a

$$|q_k x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}. \tag{3.11}$$

Portanto, das desigualdades 3.10 e 3.11

$$|q_k x - p_k| \leq |bx - a|,$$

o que contradiz a hipótese que a/b é uma melhor aproximação do segundo tipo, haja vista ser $q_k < b$.

O segundo caso é se $\dfrac{a}{b} > \dfrac{p_1}{q_1}$. Do fato de que $p_1/q_1 > x$, segue-se

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{p_1}{q_1}\right| \geq \frac{1}{bq_1}.$$

Assim,
$$|bx - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$
Por outro lado,
$$|1x - a_0| = \left| a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}} - a_0 \right| < \frac{1}{a_1}.$$
Portanto,
$$|bx - a| > |1x - a_0|,$$
o que é um absurdo.

Logo, $\frac{a}{b}$ é uma convergente. ∎

O Teorema acima possui uma recíproca quase que completa, com exceção do caso em que
$$x = a_0 + \frac{1}{2} \text{ e } \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$
Nesse caso, a definição de melhor aproximação do segundo tipo não é satisfeita, uma vez que
$$|1 \cdot x - (a_0 + 1)| = |1 \cdot x - a_0|.$$

Observação 3.3. *Dado um número racional x, sem perda de generalidade, podemos considerar sua fração contínua $x = [a_0; a_1, ..., a_n]$ com $a_n \geq 2$. Caso $a_n = 1$, teríamos*
$$x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, 1] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{1}}}}} = [a_0; a_1, ..., a_{n-1} + 1].$$
com $a_{n-1} + 1 \geq 2$.

Teorema 3.18. *Dado $x = [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$, toda convergente da fração contínua de x é uma melhor aproximação do segundo tipo para x, sendo a única exceção o caso trivial de*
$$x = a_0 + \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Demonstração. Fixando a ordem k do convergente, considere a expressão abaixo com $r \in \{1, 2, ..., q_k\}$ e s inteiro:
$$|rx - s|. \tag{3.12}$$
Denotaremos por r^* o valor de r para o qual 3.12 tem valor mínimo após escolha adequada de s. Se o mínimo for assumido para vários valores de r, seja r^* o menor deles, de modo que r^* é único e bem definido. O respectivo valor de s que minimiza
$$|r^*x - s| \tag{3.13}$$

será denotado por s^*.

Afirmação 1: s^* é único.

Suponha que exista $s' \neq s^*$, tal que s' também minimiza a equação 3.13. Assim,

$$|r^*x - s^*| = |r^*x - s'| \implies \left|x - \frac{s^*}{r^*}\right| = \left|x - \frac{s'}{r^*}\right| \implies x = \frac{s^* + s'}{2r^*}.$$

Tem-se então dois casos a se considerar:

Caso 1: Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Neste caso, obtemos uma contradição haja vista ser $x = \dfrac{s^* + s'}{2r^*} \in \mathbb{Q}$.

Caso 2: Se $x \in \mathbb{Q}$.
Neste caso, em primeiro lugar mostramos que $x = \dfrac{s^* + s'}{2r^*}$ é irredutível, em caso contrário, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ e $l \geq 2$ inteiro tais que

$$s^* + s' = lp \text{ e } 2r^* = lq.$$

Observe que

$$l > 2 \implies 2r^* > 2q \implies r^* > q.$$

Além disso,

$$x = \frac{lp}{lq} = \frac{p}{q} \implies qx - p = 0 \implies |qx - p| = 0.$$

Como $q < r^*$, chegamos a uma contradição com a minimalidade de r^*. Então $l = 2$. Mas

$$l = 2 \implies 2r^* = 2q \implies r^* = q.$$

Então,

$$0 = |qx - p| = |r^*x - p| < |r^*x - s^*|,$$

contradição com a minimalidade de s^*. Desse modo, em qualquer das situações, $l > 2$ ou $l = 2$, obtemos um absurdo. Assim,

$$x = \frac{s^* + s'}{2r^*}$$

é irredutível. Conforme queríamos demonstrar. Seja então $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x = \frac{p_n}{q_n}.$$

Desse modo,

$$s^* + s = p_n \text{ e } q_n = 2r^* = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

com $a_n \geq 2$ pela Observação 3.3. Note que

$$a_n > 2 \text{ e } n \geq 1 \implies 2r^* > 2q_{n-1} \implies r^* > q_{n-1}$$

$$a_n = 2 \text{ e } n > 1 \implies 2r^* > 2q_{n-1} \implies r^* > q_{n-1}$$

Porém, de

$$|q_{n-1}x - p_{n-1}| = \left|q_{n-1}\frac{p_n}{q_n} - p_{n-1}\right| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2r^*} \leq \frac{1}{2},$$

obtêm-se, se $s' \neq s^*$,

$$\begin{aligned} |q_{n-1}x - p_{n-1}| \leq \frac{1}{2} &\leq \frac{|s' - s^*|}{2} \\ &= r^* \left|\frac{s^* + s'}{2r^*} - \frac{2s^*}{2r^*}\right| \\ &= r^* \left|x - \frac{s^*}{r^*}\right| = |r^*x - s^*|, \end{aligned}$$

com

$$q_{n-1} < r^*,$$

contradizendo a minimalidade de r^*. Assim, $a_n = 2$ e $n = 1$, mas

$$a_n = 2 \text{ e } n = 1 \implies x = \frac{p_1}{q_1} = \frac{2a_0 + 1}{2} = a_0 + \frac{1}{2} \text{ e } r^* = 1,$$

que é o caso excepcional.

Desse modo, da análise dos Casos 1 e 2, concluímos que s^* é único como afirmado.

Observe agora que pelas hipóteses em r^* e s^*, segue-se que $\frac{s^*}{r^*}$ é uma melhor aproximação do segundo tipo para x. Pelo Teorema 3.17,

$$\frac{s^*}{r^*}$$

é uma convergente da fração contínua de x, ou seja,

$$\frac{s^*}{r^*} = \frac{p_i}{q_i}, \text{ para algum } i \in \{1, 2, 3, ..., k\}.$$

Afirmação 2: $i = k$

De fato,

$$\begin{aligned} i < k &\implies i + 1 < k + 1 \\ &\implies q_{i+1} \leq q_{k+1} \\ &\implies \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{q_{i+1}}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.15, tem-se

$$|q_i x - p_i| > \frac{1}{q_{i+1} + q_i}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.12,

$$|q_k x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Se $s^* = p_i$ e $r^* = q_i$, segue-se que

$$|q_i x - p_i| < |q_k x - p_k|.$$

Mas então,

$$\frac{1}{q_{i-1} + q_i} < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{q_{i+1}},$$

e, assim,

$$q_{i+1} < q_i + q_{i-1},$$

o que não é possível, haja vista

$$q_{i+1} = a_{i+1} q_i + q_{i-1} \geq q_i + q_{i-1}.$$

Portanto,

$$\frac{s^*}{r^*} = \frac{p_k}{q_k}$$

e $\dfrac{p_k}{q_k}$ é uma melhor aproximação do segundo tipo para x.

■

É possível então estabelecer um teorema, cujo resultado pode ser interpretado como uma recíproca parcial do Teorema 3.12.

Teorema 3.19. *Toda fração racional irredutível a/b que satisfaz a desigualdade*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

é uma convergente de x.

Demonstração. Tomando como base o Teorema 3.17, é suficiente mostrar que a/b é uma melhor aproximação do segundo tipo para x. Suponha por absurdo que a/b não é uma melhor aproximação do segundo tipo para x, assim temos

$$|dx - c| \leq |bx - a|, \text{ para algum } \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b} \text{ e } 0 < d \leq b.$$

Logo

$$|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2} \implies |dx - c| \leq |bx - a| < \frac{1}{2b}.$$

Assim,

$$\left| x - \frac{c}{d} \right| < \frac{1}{2bd}. \tag{3.14}$$

Podemos escrever
$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right| = \left|-\left(x-\frac{c}{d}\right)+x-\frac{a}{b}\right|.$$
Assim, usando a hipótese, a desigualdade triangular e a desigualdade 3.14, obtêm-se
$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd}+\frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2d}. \tag{3.15}$$
Por outro lado, como $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a}{b}$
$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bd},$$
usando a desigualdade 3.15, tem-se
$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d} \implies 2b < b+d \implies b < d$$
o que é um absurdo pois $b \geq d$. Portanto a/b é uma melhor aproximação do segundo tipo para x e, consequentemente, uma convergente de x.

■

Em geral, os coeficientes de uma fração contínua podem ser quaisquer números naturais, quão maiores, mais rapidamente suas convergentes se aproximam do número irracional x. Desse modo, as frações contínuas com coeficientes limitados, ou seja, $\exists M > 0$ tal que
$$a_k \leq M, \forall k \in \mathbb{N},$$
representam números que possuem então as piores aproximações por convergentes, com o erro da aproximação diminuindo de forma mais lenta a cada termo da sequência dos convergentes quando em comparação com os números representados por frações contínuas com coeficientes ilimitados. Por exemplo,
$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 1, 2, ...],$$
ou ainda
$$\phi = [1; 1, 1, 1, 1, ...],$$
que dentre todos os números é o que possui a pior aproximação por convergentes.

De um modo geral, o teorema a seguir mostra que irracionais com sequências de coeficientes limitadas não possuem uma ordem de aproximação muito melhor que $1/q^2$. Já irracionais com sequências de coeficientes ilimitadas possuem uma ordem de aproximação mais alta do que $1/q^2$.

Teorema 3.20. *Para todo número irracional x cujos coeficientes da sua fração contínua são limitados, existe $c > 0$ suficientemente pequeno, tal que a desigualdade*
$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{3.16}$$

não possui nenhuma solução em inteiros p e q com $q > 0$. Por outro lado, para cada número x com uma sequência ilimitada de coeficientes e $c > 0$ arbitrário, a desigualdade 3.16 tem um conjunto infinito de tais soluções.

Demonstração. Se a sequência de coeficientes da fração contínua de x não for limitada, então, dado $c > 0$ qualquer, existe um conjunto infinito de inteiros k tais que

$$a_{k+1} > \frac{1}{c}.$$

Por outro lado, da Proposição 3.7, tem-se

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}},$$

e consequentemente existem infinitos inteiros $k \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{c}{q_k^2}$$

o que demonstra a segunda afirmação do teorema.

Por outro lado, se a sequência dos coeficientes da fração contínua de x for limitada, $\exists\ M > 0$ tal que

$$a_k \leq M \ (k = 1, 2, ...).$$

Com base na Proposição 3.7, tem-se para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{(a_{k+1} + 2)q_k^2} > \frac{1}{(M + 2)q_k^2}.$$

Agora sejam p e q inteiros com $q > 0$, e seja $k \geq 1$ inteiro determinado pelas desigualdades

$$q_{k-1} < q \leq q_k.$$

Como todas as convergentes são aproximações do primeiro tipo, decorre que

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| &> \frac{1}{q_k^2(M + 2)} = \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q}{q_k} \right)^2 \\
&> \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q_{k-1}}{q_k} \right)^2 = \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{1}{a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}} \right)^2 \\
&> \frac{1}{q^2(M + 2)} \frac{1}{(a_k + 1)^2} > \frac{1}{(M + 2)(M + 1)^2 q^2}.
\end{aligned}$$

Assim, ao escolher $c < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2}$, a desigualdade 3.16 não pode ser satisfeita para nenhum par de inteiros p e q com $q > 0$, o que mostra a primeira afirmação do teorema, completando a demonstração do resultado. ∎

Será apresentado a seguir um teorema que é devido aos grandes matemáticos Euler e Lagrange. Essa Proposição classifica todos os números irracionais com fração contínua periódica como irracionais quadráticos.

Se um número $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ possui fração contínua infinita, essa fração é *periódica* se existir inteiros positivos n_0 e k tais que para qualquer

$$a_{n+k} = a_n, \forall n \geq n_0.$$

De modo análogo à escrita de representações decimais periódicas, indicamos as frações contínuas periódicas com a seguinte notação:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0-1}, \overline{a_{n_0}, a_{n_0+1}, ..., a_{n_0+k-1}}].$$

Definição 3.7. *Um número irracional x é dito irracional quadrático quando é raiz de um polinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.*

Teorema 3.21. *Um número irracional x possui representação por fração contínua periódica se, e somente se, é um irracional quadrático.*

Demonstração. Se um irracional x possui uma representação periódica por frações contínuas, então $\exists n_0, k \geq 1$ inteiros tais que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $\forall n \geq n_0$, haja vista ser $\alpha = [a_n; a_{n-1}, ...]$. Segue do Teorema 3.6 que:

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}}.$$

Multiplicando e agrupando as potências de x, obtêm-se que x satisfaz

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

em que

$$A = q_{n-1}q_{n+k-2} + q_{n-2}q_{n+k-1}$$

$$B = p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-2} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}$$

$$C = p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}.$$

Observe que $A \neq 0$. De fato, $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é irredutível, uma vez que $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}p_{n-1} = (-1)^n$. Analogamente $\dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ é irredutível. Como $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, tem-se

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}} \implies q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0.$$

Portanto, x é um irracional quadrático.

Suponha agora que x seja um irracional quadrático, dessa forma x satisfaz uma equação

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

com a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. E também $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. Por outro lado, como $x = \dfrac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$, é possível escrever:

$$a\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right) + c = 0$$

ou seja,

$$A_n \alpha_n^2 + B_n \alpha_n + C_n = 0$$

em que

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2$$

$$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}$$

$$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2.$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Será demonstrado que existe $M > 0$ tal que

$$0 < |A_n| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$0 < |C_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, pode-se reescrever a expressão de A_n da seguinte forma:

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = q_{n-1}^2\left(a\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + c\right) \Longrightarrow$$

$$A_n = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

sendo x e $\overline{x}$ as raízes de $aX^2 + bX + c = 0$. Como x e $\overline{x}$ são raízes da equação em α_n, ambos são irracionais, logo

$$\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \neq 0 \text{ e } \left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \neq 0$$

e como $aq_{n-1}^2 \neq 0$, segue que $A_n \neq 0, \forall n > 0$.

Ora, do Teorema 3.12, temos $\left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \dfrac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1$, assim obtêm-se

$$\begin{aligned} |A_n| &= aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq a\left(|x - \overline{x}| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \\ &\leq a(|x - \overline{x}| + 1). \end{aligned}$$

Definimos então $M = a(|x - \overline{x}| + 1)$. Observe agora que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a equação $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$ possui raízes reais, pois

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac.$$

Portanto,

$$B_n^2 = 4A_nC_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac \implies B_n \leq \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}.$$

Defina então $M' = \sqrt{4M^2b^2 - 4ac}$. Conclui-se que as sequências (A_n), (B_n) e (C_n) são limitadas. Portanto, como A_n, B_n e $C_n \in \mathbb{Z}\forall n$, existe somente um número finito de equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$. Ou seja, existem finitos valores possíveis para os α_n's. Portanto, para alguma escolha de $n_0, k \in \mathbb{N}$, tem-se $\alpha_{n_0+k} = \alpha_{n_0}$. Logo,

$$a_{n+k} = a_n \forall n \geq n_0,$$

mostrando que x possui fração contínua periódica. ■

Exemplo 3. *Sabe-se que $\sqrt{2}$ é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$. Portanto, é representada por uma fração contínua infinita e periódica. Pode-se deduzir sua expressão da equação abaixo:*

$$x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 1 \implies (x+1)(x-1) = 1 \implies x = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

Realizando as substituições, obtêm-se

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, ...].$$

Para alguns irracionais quadráticos específicos, é possível determinar o padrão e periodicidade da fração contínua. Observemos as proposições a seguintes:

Proposição 3.22. *Todo número da forma $x = \sqrt{a^2+1}$, com $a \in \mathbb{N}$, tem fração contínua*

$$x = [a; \overline{2a}].$$

Demonstração. Observe que

$$x = \sqrt{a^2+1} \implies x^2 - a^2 = 1 \implies (x-a)(x+a) = 1 \implies x = a + \frac{1}{a+x}.$$

Substituindo o valor de x na expressão acima, repetidas vezes, obtêm-se

$$x = a + \cfrac{1}{a + a + \cfrac{1}{a+a+\cfrac{1}{a+\ddots}}} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\ddots}}} = [a; \overline{2a}].$$

■

Proposição 3.23. *Todo número da forma $x = \sqrt{a^2 - 1}$, com $a > 1$, tem fração contínua*

$$x = [a - 1; \overline{1, 2(a - 1)}].$$

Demonstração. Observe que

$$x = \sqrt{a^2 - 1} \implies x^2 = a^2 - 1 = (a - 1)^2 + 2(a - 1) \implies$$

$$[x - (a - 1)][x + (a - 1)] = 2(a - 1) \implies x = (a - 1) + \frac{2(a - 1)}{x + (a - 1)}.$$

Substituindo a expressão de x no lado direito da igualdade, tem-se

$$x = (a - 1) + \frac{2(a - 1)}{(a - 1) + \frac{2(a-1)}{x+(a-1)} + (a - 1)} = (a - 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+(a-1)}}$$

$$= (a - 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{2(a-1) + \frac{2(a-1)}{x+(a-1)}}}.$$

Pode-se observar que nesse ponto, a expressão do último quociente da fração contínua de x retorna a expressão inicial, o que garante que repetindo o processo, chega-se à

$$x = [a - 1; \overline{1, 2(a - 1)}].$$

■

3.3 Aplicações

3.3.1 Equações diofantinas

As equações diofantinas recebem esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria. Estas equações surgem em diversos problemas e possuem aplicações na aritmética e outros campos do conhecimento (HEFEZ, 2014).

Definição 3.8. *Uma equação diofantina é uma equação do tipo $aX + bY = c$ com a, b e $c \in \mathbb{Z}$.*

Em geral, estamos interessados nas soluções inteiras de uma equação diofantina. Assim, a proposição a seguir determina um critério para que elas existam.

Proposição 3.24. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ e $c \in \mathbb{Z}$. A equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a, b) | c$.*

Demonstração. Se a equação admite solução inteira, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax_0 + by_0 = c$$

Como $(a, b)|ax_0 + by_0$, portanto $(a, b)|c$.

Reciprocamente, se $(a, b)|c$ então $c = (a, b) \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, existem inteiros m e n tais que

$$(a, b) = ma + nb$$

Daí,

$$c = (a, b) \cdot k = a(m \cdot k) + b(n \cdot k).$$

Portanto, a equação $aX + bY = c$ admite solução inteira. ■

Proposição 3.25. *Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ uma solução particular da equação $aX + bY = c$, em que $(a, b) = 1$. Então, as soluções (x, y) em $\mathbb{Z}^2$ da equação são dadas por*

$$x = x_0 + tb, \;\; y = y_0 - ta; \;\; t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ uma solução qualquer da equação $aX+bY = c$. Então,

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$$

Reorganizando a expressão, obtemos

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y). \tag{3.17}$$

Como $(a, b) = 1$, segue que $b|(x - x_0)$. Logo,

$$x - x_0 = tb, t \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo a expressão de $x - x_0$ na equação 3.17, obtêm-se

$$y - y_0 = ta,$$

e, portanto, as soluções da equação são do tipo exibido no enunciado.

Por outro lado, as expressões x, y do enunciado sempre descrevem uma solução para equação diofantina, pois

$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 + abt - abt = c.$$

■

Considere então uma equação diofantina $aX + bY = c$, tal que a, b e $c \in \mathbb{Z}$, com a e b diferentes de zero e $(a, b) = 1$. Sabemos então que $\frac{a}{b}$ é um número racional, portanto, pelo Teorema 3.2, $\exists n \geq 0$ inteiro, $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, ..., a_n > 0$ inteiros, tais que

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Observe que p_n/q_n é irredutível, e portanto

$$p_n = a \textbf{ e } q_n = b.$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.5, p_n e q_n, satisfazem à identidade:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n.$$

Supondo n par, podemos escrever

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1 \implies a(q_{n-1}c) - b(p_{n-1}c) = c.$$

Logo

$$x = q_{n-1}c \text{ e } y = -p_{n-1}c$$

é uma solução particular da equação diofantina $aX + bY = c$. Quando n é ímpar, a solução particular da equação diofantina é dada por

$$x = -q_{n-1}c \text{ e } y = p_{n-1}c.$$

Exemplo 4. *Determine a solução geral da equação diofantina a seguir* $12X + 7Y = 9$.

Sabemos que

$$\frac{12}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = [1; 1, 2, 2].$$

Como nesse caso $\frac{12}{7} = \frac{p_3}{q_3}$, calcula-se

$$\frac{p_2}{q_2} = [1; 1, 2] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3},$$

sendo então a solução particular da equação diofantina dada por

$$x = -3 \cdot 9 = -27 \text{ e } y = 5 \cdot 9 = 45.$$

Portanto, sua solução geral é dada por

$$x = -27 + 7t, \;\; y = 45 - 12t; \;\; t \in \mathbb{Z}.$$

3.3.2 Aproximação de zeros de funções reais

De acordo com (BREZINSKI, 1991), um método de aproximação de zeros de funções reais foi proposto por Lagrange por volta de 1767 e bastante difundido na época.

Para isso, seja uma função $f : [a, a+1] \to [c, d]$ contínua com $f(a)f(a+1) < 0$. Suponha que no intervalo $(a, a+1)$ exista uma única solução da equação $f(x) = 0$, isto é, um único zero de f. Se $a \in \mathbb{Z}$, então seja $a_0 = a$. Considere a substituição

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Dessa forma, teremos

$$f_1(x_1) = f\left(a_0 + \frac{1}{x_1}\right) = 0.$$

Agora determinaremos o menor inteiro $a_1 > 0$ tal que a solução x_1 esteja no intervalo $[a_1, a_1 + 1)$. Considere então a substituição $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$. Assim, temos

$$f_2(x_2) = f\left(a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}\right) = 0.$$

Continuando o processo obtemos, $a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$ inteiros positivos, e tem-se a seguinte expressão

$$f\left(a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}\right) = 0.$$

Como a fração contínua sempre converge ao número x, então nesse caso determina a raiz da equação no intervalo.

Se $a \notin \mathbb{Z}$ ou $b \notin \mathbb{Z}$, considere então a função $g : [0, 1] \to [a, b]$ tal que

$$g(x) = (b - a)x + a.$$

A função g assim construída é contínua e bijetiva. Dessa forma, definimos a função $h : [0, 1] \to [c, d]$ por

$$h(x) = f \circ g(x).$$

Observe que

$$h(0) = f(g(0)) = f(a) \text{ e } h(1) = f(g(1)) = f(b),$$

assim, $h(0)h(1) = f(a)f(b) < 0$ e, por construção, a função h possui único zero no intervalo $[0, 1]$.

Observe que, a função h tem todas as hipóteses para aproximação do seu zero pelo método de Lagrange. Seja x' a aproximação do zero de h no intervalo $[0, 1]$ com a precisão necessária. Dessa forma, o zero procurado para $f(x)$ é dado por $g(x')$, uma vez que $h(x') = f(g(x'))$. Além disso, é possível estimar o erro na aproximação do zero a partir do Teorema 3.12. A cada passo também pode-se calcular a próxima expressão de x com auxílio da identidade do Corolário 3.6.

Apesar de ser um método que exige muitos procedimentos algébricos, observemos a seguir o quão rápida é sua convergência comparados a métodos difundidos atualmente. Vamos então aplicar o método de Lagrange ao polinômio

$$p(x) = x^3 - x - 1$$

para determinar seu zero no intervalo $(1, 2)$. Temos $a_0 = 1$, e vamos considerar a substituição

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

obtendo a seguinte identidade

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^3 - \left(1 + \frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \implies y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0.$$

Determinamos então por inspeção que $a_1 = 3$. Logo, podemos considerar a substituição

$$y = 3 + \frac{1}{u},$$

da qual decorre a equação abaixo

$$\left(3 + \frac{1}{u}\right)^3 - 2\left(3 + \frac{1}{u}\right)^2 - 3\left(3 + \frac{1}{u}\right) - 1 = 0 \implies u^3 + 12u^2 - 7u - 1 = 0,$$

e, obtemos então $a_2 = 12$. A essa altura a raiz x já pode ser escrita como $x \approx 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{12}}$.

Repetindo o processo, determinamos $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$, $a_6 = 2$ e $a_7 = 3$. Obtemos nesse ponto

$$x \approx 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}}}} = \frac{2819}{2128} = 1,324718\ldots.$$

Nesse caso, o erro obtido na aproximação é estimado pelo Teorema 3.12 da seguinte forma

$$\left|x - \frac{2819}{2128}\right| < \frac{1}{2128^2} = 0,2208293 \cdot 10^{-6}.$$

No livro de Ruggiero e Lopes (1996, p. 79), comparam-se os métodos mais comuns para aproximação do zero de $f(x) = x^3 - x - 1$ no intervalo $(1, 2)$ para erros de aproximação menores que 10^{-6}. Os métodos utilizados por (RUGGIERO; LOPES, 1996) são o método da Bissecção, o método da falsa posição, o método do ponto fixo usando a função $\phi(x) = (x + 1)^{1/3}$, o método de Newton e o método da Secante.

Comparado aos métodos citados acima, o método de Lagrange é o que necessita de menos iterações para convergir a um erro menor que 10^{-6}, a saber são necessárias 7 iterações. Além disso, o próximo método com convergência mais rápida é o do ponto fixo, com 9 iterações.

Diferente de outros métodos, o proposto por Lagrange independe das condições iniciais para ter uma convergência rápida ou lenta, pois se baseia somente na parte inteira do zero da função considerada.

4 Proposta de abordagem do tema na educação básica

4.1 Justificativa da proposta didática

Tomando por base os conceitos apresentados a estudantes no Ensino Fundamental e Médio, a proposta consiste em duas sequências didáticas distintas que se adequam aos respectivos níveis.

Atendendo aos objetivos da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a apresentação de frações contínuas a nível fundamental atende e auxilia ao desenvolvimento das seguintes habilidades (BRASIL, 2018):

- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
- (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
- (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
- (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Nesse contexto, a habilidade (EF09MA02) que consiste no reconhecimento de um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica, está relacionada com a proposta, de modo que os estudantes terão uma nova possibilidade para reconhecimento e representação de um número irracional.

Em geral, a apresentação do tema no Ensino Fundamental tem como objetivo evidenciar a relação direta entre álgebra, geometria e aritmética, além de reforçar e significar o estudo de frações. Por outro lado, a exposição do tema auxilia alunos em preparação para olimpíadas de matemática, tanto com conteúdos, quanto com a familiaridade com a definição de uma operação distinta das usuais, o que é bem comum em provas de olimpíadas, nas quais o aluno deve compreendê-la e aplicá-la.

Já na proposta para o Ensino Médio, são contempladas as seguintes habilidades presentes na BNCC:

- (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Apesar de contemplar menos habilidades específicas que a proposta do Ensino Fundamental, esta sequência didática engloba os objetivos de duas das cinco competências propostas para o Ensino Médio:

- **Competência 4** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

- **Competência 5** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Além desses pontos, a exposição do tema no Ensino Médio contribui aos estudantes nos seguintes âmbitos: na utilização do software geogebra, remetendo ao uso de novas tecnologias; em um primeiro contato com as noções de convergência e aproximações; no estudo e interpretação de números racionais e irracionais.

Nesse contexto, propõe-se também a inserção do conceito de equações diofantinas e sua resolução a partir de frações contínuas no currículo do Ensino Médio, contribuindo para inserção de conceitos da aritmética nessa etapa de ensino, sendo possível explorar problemas cotidianos que remetem a estes conceitos.

4.2 Abordagem de frações contínuas no Ensino Fundamental

A tabela a seguir apresenta os principais tópicos da proposta de ensino.

Público alvo:	Alunos do ensino fundamental 9° ano
Pré requisitos:	Operações com números inteiros; Operações com frações;
Objetivos:	Compreender o algoritmo de Euclides; Determinar e reconhecer a escrita de frações contínuas e suas propriedades; Utilizar software Geogebra de forma adequada a resolução de problemas.
Etapas de aplicação:	Etapa 01 - Algoritmo de Euclides. Etapa 02 - Interpretação geométrica do algoritmo e segmentos comensuráveis. Etapa 03 - Frações contínuas. Etapa 04 - Números irracionais (segmentos incomensuráveis).
Metodologia:	Aula expositiva e dialogada; Uso de tecnologias; Resolução de problemas.
Recursos utilizados	Data show; Software Geogebra; Régua.
Avaliação:	A partir do desempenho dos alunos na resolução de problemas propostos.
Referências:	(PAIXÃO, 2011); (MOREIRA, 2011); (BRASIL, 2018).

A seguir serão detalhadas cada uma das etapas de aplicação.

Etapa 01 - Algoritmo de Euclides

Inicialmente, será introduzido o algoritmo de Euclides, partindo de divisões simples com resto, por exemplo, $9 \div 2 = 4$ e deixa resto 1. Nesse ponto, usaremos a ideia de representação em segmentos, com auxílio de folhas, réguas, linhas de cores distintas e cola. Os estudantes realizarão o processo a partir da comparação de unidades com os tamanhos descritos em centímetros, associando neste ponto a ideia que o 2 cabe 4 vezes no 9, sobrando ainda 1 unidade.

Discutida a noção de divisibilidade a partir da exploração de problemas, os alunos receberão os seguintes questionamentos: Qual é o maior número que cabe uma quantidade inteira de vezes nos números 12 e 18? E nos números 17 e 30? E nos números 1,2 e 3,5? Nesse ponto, serão exigidas respostas geométricas e algébricas das perguntas.

Após uma discussão das respostas obtidas, busca-se um resgate do conceito de Máximo divisor comum (MDC). A pergunta será se o algoritmo usualmente conhecido é capaz de solucionar o caso entre 1,2 e 3,5. Nesse ponto, será revisitado o algoritmo de Euclides, inicialmente pelos exemplos a seguir, utilizando o material concreto.

Exemplo 5. *Use o algoritmo de Euclides nos números 12 e 18.*
12 cabe 1 vez em 18 e sobra 6.
6 cabe 2 vezes em 12 e sobra 0.
Portanto, MDC(12, 18) = 6.

Use o algoritmo de Euclides nos números 13 e 42.
13 cabe 3 vezes em 42 e sobra 3.
3 cabe 4 vezes em 13 e sobra 1.
1 cabe 3 vezes em 3 e sobra 0.
Portanto, MDC(13, 42)=1.

Após a compreensão do processo, iremos escrever o processo do algoritmo de forma algébrica. Assim, ao aplicar nos números 12 e 18, teremos $18 = 12 \cdot 1 + 6$ e $12 = 6 \cdot 2 + 0$ e portanto, $MDC(18, 12) = 6$. Utilizamos então números que não são inteiros, porém racionais, e verificamos com ou sem auxílio de uma calculadora, o significado dos valores obtidos.

Exemplo 6. *Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 1,2 e 3,5.*
Escrevemos $3,5 = 2 \cdot 1,2 + 1,1$. *Seguindo o processo tem-se* $1,2 = 1 \cdot 1,1 + 0,1$ *e por fim* $1,1 = 11 \cdot 0,1 + 0$.

Nesse ponto, será proposto aos estudantes que, utilizando a interpretação de segmentos, repitam o processo descrito com 1,2 e 3,5, que seriam os seguintes passos:
1,2 cabe 2 vezes em 3,5 e sobra 1,1.
1,1 cabe 1 vez em 1,2 e sobra 0,1.
0,1 cabe 11 vezes em 1,1 e sobra 0.
Nesse caso, não podemos falar de MDC entre 1,2 e 3,5. Então nessa situação, dizemos

que 0,1 é a maior unidade de medida que cabe um número inteiro de vezes em 1,2 e 3,5 simultaneamente.

Em seguida, serão propostos aos estudantes alguns exercícios e problemas que envolvem o tema e, em especial, o questionamento se existem 2 números, em que não é possível encontrar uma unidade que cabe um número inteiro de vezes em ambos os números.

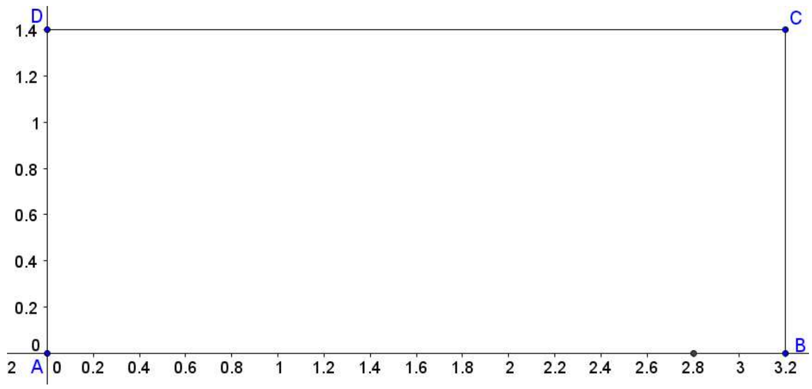
Etapa 02 - Interpretação geométrica do algoritmo e segmentos comensuráveis

Nessa etapa, com auxílio do software geogebra, apresentaremos uma interpretação geométrica do processo do Algoritmo de Euclides, e discutiremos sobre os chamados segmentos comensuráveis.

Com o auxílio do software Geogebra, será determinado a partir dos quadrados máximos (PAIXÃO, 2011), os quocientes que tem origem no Algoritmo de Euclides. Observemos o exemplo a seguir com os números 3,2 e 1,4.

1° Passo: Abra o software Geogebra, e insira os pontos $(0, 0)$; $(3.2, 0)$; $(0, 1.4)$; $(3.2, 1.4)$. Vale salientar que nos comandos de entrada do software, números decimais são separados por ponto e a vírgula separa as coordenadas. Por outro lado, é interessante também marcar a maior medida na horizontal (eixo x) para ter uma melhor visualização da tela.

Figura 5 – Passo 01 - Inserindo os pontos no Geogebra

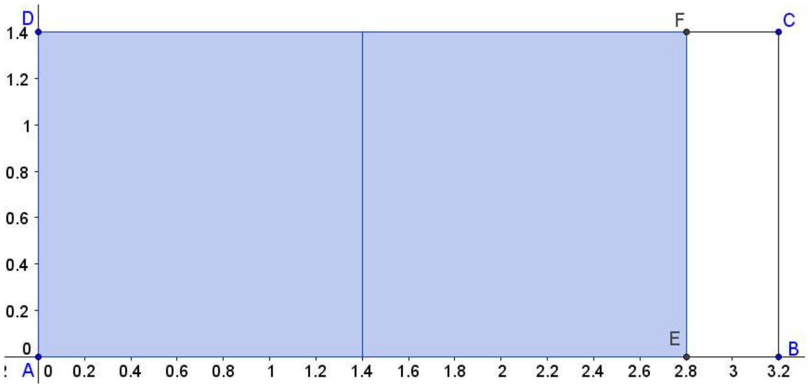


Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

A seguir selecione a opção polígono, depois escolha os 4 pontos dados anteriormente formando um retângulo de lados 3,2 e 1,4.

2° Passo: Escolha a opção polígono regular e selecione dois vértices do retângulo cuja distância seja o lado menor. No exemplo, são os pontos D e A. Em sequência, escolha a opção 4 lados, será então gerado um quadrado de lado $\overline{DA} = 1,4$ no interior do retângulo, ou seja, um quadrado de lado máximo. Nesse caso é possível repetir o processo gerando dois quadrados de lado 1,4 dentro do retângulo, conforme observamos na imagem a seguir:

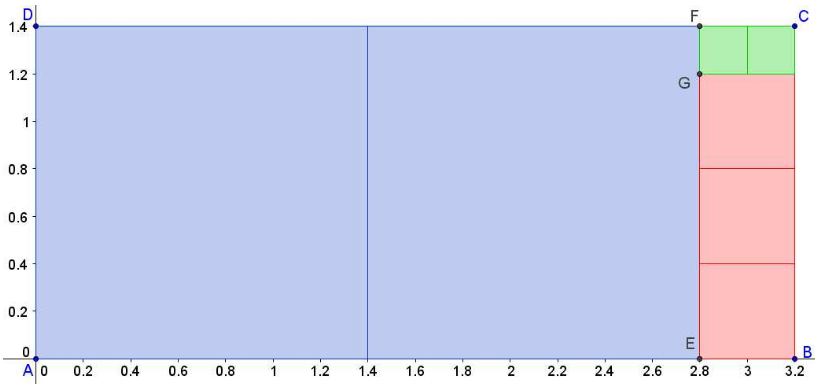
Figura 6 – Passo 02 - Criando os quadrados máximos



Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

3° Passo: Observe que "sobra"um retângulo de lados $\overline{EB}$ e $\overline{BC}$. Usando a mesma função gere quantos quadrados de lado $\overline{EB}$ quanto couberem no retângulo.

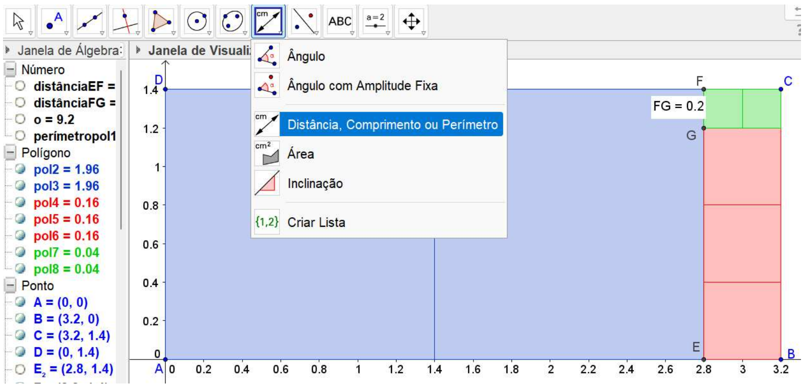
Figura 7 – Passo 03 - Quadrados máximos com lados menores



Repita o processo descrito nos passos 2 e 3 quantas vezes forem necessárias, até o retângulo ser completamente coberto por quadrados.

4° Passo: Agora que o retângulo foi completamente coberto, clique na função distância e selecione dois vértices consecutivos do menor quadrado presente. Nesse caso, teremos a maior unidade que cabe uma quantidade inteira de vezes em 3,2 e 1,4.

Figura 8 – Passo 04 - Determinando a maior unidade que mede 3,2 e 1,4



Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

Vemos então que a resposta procurada é 0,2.

O objetivo é que os alunos entendam como realizar o processo do Algoritmo de Euclides geometricamente e se acostumem com os comandos do Geogebra. Supõe-se também que os estudantes já tenham tido algum contato com o software, do contrário uma introdução sobre o mesmo se faz necessário.

Após alguns exercícios e resoluções de problemas, os alunos estão aptos a conhecer a definição de fração contínua e a determina-las em alguns contextos.

Etapa 03 - Frações contínuas

Ao utilizar o algoritmo de Euclides, obtemos uma sequência de quocientes que são números inteiros, sendo esses justamente a quantidade de quadrados máximos obtidos em cada etapa da interpretação geométrica do algoritmo. Por exemplo, usando o caso de 1,2 e 3,5, foram obtidos 2, 1 e 11 quadrados máximos em cada etapa. Podemos então escrever:

$$\frac{3,5}{1,2} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{11}} = \frac{35}{12}.$$

A expressão $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{11}}$ é uma fração contínua, que é mais geralmente definida como uma expressão do tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, ..., a_n, ... \in \mathbb{N}$. Existe uma fração contínua associada a cada número real, sendo ela finita quando o número é racional e infinita quando é irracional. Para determinar a fração contínua de um número racional na forma p/q basta aplicar o algoritmo de Euclides com os números p e q. Caso o número esteja escrito em sua forma decimal, a exemplo de 3,15, basta aplicar o algoritmo com 3,15 e 1.

Exemplo 7. *Use o algoritmo de Euclides nos números 1 e 3,15.*
Temos que $3,15 = 3 \cdot 1 + 0,15$. *Por sua vez,* $1 = 6 \cdot 0,15 + 0,10$. *Repetindo o processo* $0,15 = 1 \cdot 0,10 + 0,05$ *e* $0,10 = 2 \cdot 0,05$. *Portanto, obtemos* $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 1, a_3 = 2$, *assim, 3,15 tem a seguinte fração contínua:*

$$3,15 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = 3 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Nesse ponto, será proposto aos estudantes a determinação de frações contínuas, de números racionais, representados em sua forma fracionária ou decimal. E nos casos de números na representação decimal, obter sua fração ordinária com numerador e denominador inteiros.

Dada a fração contínua de um número qualquer, é possível reduzi-la a uma única fração, simplesmente usando as operações aritméticas usuais de frações, obtendo por fim uma fração irredutível. Observe o exemplo:

$$\begin{aligned} 3 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} &= 3 + \cfrac{1}{6 + \frac{2}{3}} \\ &= 3 + \frac{3}{20} \\ &= \frac{63}{20}. \end{aligned}$$

Exemplo 8. *Determine uma fração irredutível com numerador e denominador inteiros, equivalente ao número racional* $3,81 \div 0,2$.

Solução: Do algoritmo de Euclides temos $3,81 = 19 \cdot 0,2 + 0,01$ e $0,2 = 20 \cdot 0,01$. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{3,81}{0,02} = 19 + \frac{1}{20} = \frac{381}{20}.$$

Alguns questionamentos serão propostos aos estudantes nessa etapa, a exemplo de:

- Construa um fluxograma para obter a fração contínua de um número racional.
- Escreva um fluxograma para reduzir uma fração contínua a uma fração ordinária.
- (OBMEP 2018) Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7} = a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c}}.$$

Solução: Utilizando o algoritmo de Euclides podemos escrever

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3$$

Portanto,

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}},$$

ou seja, $a = 1, b = 2$ e $c = 3$.

- (CMRJ 2018) A fração $\frac{37}{13}$ pode ser escrita sob a forma $2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$, onde (x, y, z) é igual a?

  Solução: Do algoritmo de Euclides, temos

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2$$

Portanto,

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}},$$

ou seja, $(x, y, z) = (1, 5, 2)$.

Etapa 04 - Números irracionais (segmentos incomensuráveis)

Após o questionamento sobre a possibilidade de construção de um segmento com medida irracional qualquer, aplicaremos a interpretação geométrica do algoritmo de Euclides aos números 1 e $\sqrt{2}$ ou 1 e outro irracional. A ideia é que os estudantes sugiram que o processo geométrico será infinito e, a seguir vamos expor o fato que números irracionais têm frações contínuas infinitas.

A utilização do software Geogebra é imprescindível, pois consegue evitar erros de precisão nas construções, o que poderia levar a uma interpretação errônea sobre a incomensurabilidade de números irracionais com a unidade. Tendo assim uma justificativa ao critério de que uma fração contínua infinita representa um irracional. Será exposto o número de ouro $\phi = 1.61803399...$, relacionado a sequência de Fibonacci. Os estudantes deverão realizar a construção para este número e inferir sobre sua fração contínua.

Por fim, utilizando a propriedade de que ϕ é raiz da equação $x^2 = x + 1$, podemos escrever:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Observe que o processo se repete indefinidamente, sendo assim justifica-se aos estudantes que o número $\phi = 1.61803399...$ é irracional. Nesse ponto, dado $b \in \mathbb{N}$, será proposto aos estudantes que determinem a expressão da fração contínua de x, sabendo que x é raiz da equação $x^2 - bx = 1$. Após isso, a partir de valores para b discutir se as raízes obtidas são racionais ou irracionais.

4.3 Abordagem de frações contínuas no Ensino Médio

A tabela a seguir, apresenta os principais dados relativos à proposta do tema no ensino médio.

Público alvo:	Alunos do ensino médio 2° e 3° anos
Pré requisitos:	Operações com frações; Conjunto dos números reais;
Objetivos:	Interpretar e escrever frações contínuas; Compreender o conceito de melhores aproximações; Modelar problemas cotidianos a partir de equações diofantinas; Solucionar equações diofantinas com auxílio das frações contínuas.
Etapas de aplicação:	Aula 01 - Escrita de frações contínuas de racionais e irracionais e conjectura de padrões. Aula 02 - Convergentes e melhores aproximações de números irracionais. Aula 03 - Equações diofantinas: Resolução por frações contínuas.
Metodologia:	Aula expositiva e dialogada; Uso de tecnologias; Resolução de problemas
Recursos utilizados	Data show; Geogebra; Calculadora científica
Avaliação:	A partir do desempenho dos alunos na resolução de problemas propostos.
Referências:	(PAIXÃO, 2011); (MOREIRA, 2011); (BRASIL, 2018); (COUTO, 2017).

Admitindo que os estudantes tenham tido contato com a proposta do Ensino Fundamental, no Ensino Médio temos a seguinte ordem.

Etapa 01 - Algoritmo de Euclides e escrita das frações contínuas

Introduzido o problema das engrenagens do planetário de Hugyens, o Algoritmo de Euclides será utilizado para escrita de frações contínuas de números racionais. Em seguida, com auxílio de uma calculadora, utilizando o comando de inversão, os estudantes começarão a escrever as frações contínuas de números irracionais, conjecturando padrões de repetição, a exemplo da representação $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, ...]$. Nesse ponto divididos em grupos ou duplas, cada um deve trabalhar com um número irracional diferente.

Em seguida, será introduzida a construção no Geogebra com retângulos e quadrados máximos. Os estudantes irão comparar as escritas dos números e as propriedades presentes em ambos algoritmos para escrita. Nesse ponto, alguns dos números irracionais utilizados que forem raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, terão sua irracionalidade justificada de forma teórica.

Busca-se então uma discussão do porquê de alguns números como π e e não serem raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, e quais características as frações contínuas dos números que são raízes têm em comum. Por fim, encerramos esta etapa com o problema presente em uma prova de concurso no ano de 2019.

Exemplo 9. *(CONCURSO SEMEC 2019 - NUCEPE) Frações contínuas são uma forma importante de representar números reais. Essa representação realmente fornece todas as aproximações de maneira natural e conceitualmente simples. Já a modelagem matemática ajuda a interpretar e resolver situações-problema de natureza científica e socioeconômica, usando como ferramentas a geometria, a álgebra e a lógica. Desse modo, observe a igualdade abaixo:*

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Usando como ferramenta a modelagem matemática, qual é a equação quadrática cuja raiz está representada pela fração contínua indicada na igualdade acima?

Solução: Dada a expressão, pode-se escrever

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

usando a identidade acima, obtêm-se

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + x - 1}} \implies (x-1)(2x+5) = x + 2.$$

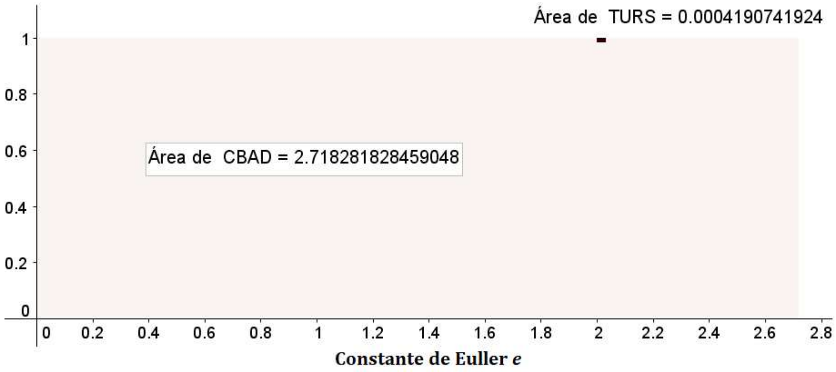
Realizando algumas manipulações, tem-se a equação

$$2x^2 - 2x - 7 = 0.$$

Etapa 02 - Aproximações de números irracionais

Utilizando as construções realizadas no Geogebra na etapa 01, os estudantes avaliarão o erro, utilizando o cálculo de áreas com comandos do software. Observe o exemplo

Figura 9 – Aproximação de e por frações contínuas



Fonte: Próprio autor com software Geogebra.

a seguir, a cada passo do algoritmo, os estudantes podem determinar o erro e anotá-lo em uma tabela.

Nesse ponto, dada a representação de um número em frações contínuas serão definidos os convergentes, dados essencialmente por $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Os estudantes então calcularão as convergentes do número irracional utilizado, e avaliarão o erro em cada etapa com o uso de uma calculadora sem utilizar módulo. Espera-se que os estudantes conjecturem o fato de que a cada convergente tenhamos uma aproximação cada vez melhor e que as convergentes de ordem par são menores que o irracional, e as convergentes de ordem ímpar são maiores. A seguir, será introduzida uma discussão acerca do significado do arredondamento, tomando então as aproximações na escrita decimal, sendo elas para o número e: $2 = \frac{2}{10^0}$, $2,7 = \frac{27}{10^1}$, $2,71 = \frac{271}{10^2}$ e assim sucessivamente. Os estudantes determinarão o erro de aproximação a cada caso. A intenção é que os estudantes comparem os erros obtidos, tomando como base o exemplo com a constante de Euler, e possam repetir o processo com outros números. A partir da representação $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4]$,

$$e \approx 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}} = \frac{87}{32},$$

o que fornece uma aproximação com erro na ordem 10^{-4}. Essa aproximação só é superada por uma aproximação decimal em fração de base 10 (arredondamento), ao utilizar a fração $\frac{27182}{10000}$ que traz um erro na ordem 10^{-5}.

Será introduzida uma discussão sobre o que seriam melhores aproximações de um número irracional, em especial observando as características das frações. A seguir, os estudantes receberão os desafios de aproximar números irracionais por frações com denominadores limitados, visando introduzir a necessidade da definição de boas aproximações e expor sua relação com as convergentes.

Exemplo 10. *Determine aproximação de* $\sqrt{3}$ *nas seguintes condições:*
Denominador positivo ≤ 5;
Denominador positivo ≤ 10;
Denominador positivo ≤ 20.

Solução: Para aproximar $\sqrt{3} = 1,732050807...$ com denominador menor ou igual a 5, os estudantes podem ter denominadores, 1, 2, 3, 4 e 5. Tem-se então as frações que mais se aproximam de $\sqrt{3}$ para cada denominador, que são:

$$\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{4}; \frac{8}{5};$$

Dentre estás, a fração $\dfrac{7}{4}$ que é uma das convergentes de $\sqrt{3}$, é a que proporciona uma melhor aproximação com denominador menor ou igual a 5. Para os outros casos se resolve de modo análogo.

Espera-se que a maioria dos estudantes tenham como soluções convergentes. Sendo assim apresenta-se a definição de melhores aproximações do primeiro tipo e expõe-se o teorema que garante que toda melhor aproximação do primeiro tipo é uma convergente ou intermediária. Podendo ainda, a depender do interesse da turma, entrar na discussão sobre melhores aproximações do segundo tipo. Para realizar as anotações e comparações de aproximações a cada passo, os alunos receberão uma tabela.

Etapa 03 - Estudo de equações diofantinas e resolução por frações contínuas

Muitos trabalhos atualmente, a exemplo de (SOUZA, 2020) e (SILVA, 2019), defendem a inserção das equações diofantinas no currículo da educação básica, inclusive propondo sequências didáticas para tal inserção, que se utilizam de metodologias distintas e em alguns pontos utilizando também o software geogebra.

Inicialmente serão propostos problemas cuja modelagem e discussão recaiam em equações diofantinas obtidos de (SAVOIS, 2014)

- Em um pedágio, cada carro paga R$ 7,00 e cada motocicleta paga R$4,00. Sabendo que foi arrecadado em um certo período de tempo R$ 142,00, calcule o maior número de carros e o maior número de motos possíveis que tenham passado neste pedágio.

- Uma loja está fazendo uma promoção de CD-s e DVD-s. Cada CD custa R$ 8,00 e cada DVD custa R$ 12,00. Com R$ 80,00, quais as possíveis quantidades de CDs e de DVD-s que posso comprar, sabendo que vou comprar no mínimo 2 CD-s e 3 DVD-s?

- Para entrar em uma festa cada homem paga R$ 18,00 e cada mulher paga R$ 12,00. Sabendo que foram arrecadados R$ 2652,00, calcule a quantidade de homens e mulheres, sabendo que teve mais homens do que mulheres.

Após a apresentação dos problemas, iremos expor a definição de equações diofantinas, a expressão da solução geral e, além disso, o teorema decorrente que fornece condição necessária e suficiente usando MDC para determinar se a equação diofantina possui ou não soluções inteiras. Será então apresentado e exemplificado o método de resolução das equações diofantinas a partir das frações contínuas, como no exemplo a seguir.

Exemplo 11. *Resolva a equação* $31X + 11Y = 2$

Como $MDC(11, 31) = 1$ divide 2, a equação admite solução inteira. Determine a fração contínua de $31/11$. Observe que

$$\frac{31}{11} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2}}} \implies \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{11}$$

Assim,

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \implies \frac{p_3}{q_3} = \frac{14}{5} \implies p_3 = 14 \text{ e } q_3 = 5.$$

Dessa forma, $x_0 = 2 \cdot 5 = 10$ e $y_0 = 2 \cdot (-14) = -28$ determina uma solução particular de $31X + 11Y = 2$ e a solução geral é dada por

$$x = 10 + 11t \text{ e } y = -28 - 31t, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Após a resolução de alguns exercícios, os estudantes estão aptos a solucionar os problemas propostos inicialmente. Observe uma possível solução para um dos problemas propostos.

Problema: Em um pedágio, cada carro paga R$ 7,00 e cada motocicleta paga R$4,00. Sabendo que foi arrecadado em um certo período de tempo R$ 142,00, calcule o maior número de carros e o maior número de motos possíveis que tenham passado neste pedágio.

Solução: Seja x a quantidade de carros e y a quantidade de motos que passaram no pedágio no período determinado, tem-se então a equação:

$$7x + 4y = 142$$

Em frações contínuas podemos escrever

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}.0$$

Obtemos que $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{7}{4}$ e $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{2}{1}$, assim, tem-se

$$7 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -142 \implies 7 \cdot (-142) + 4 \cdot (284) = 142.$$

Com a solução particular $(-142, 284)$ determinamos sua solução geral, dada por

$$\begin{cases} x = -142 + 4t \\ y = 284 - 7t \end{cases}$$

Como x e y devem ser maiores ou iguais a zero no contexto do problema, segue que $36 \leq t \leq 40$. A quantidade máxima de carros é obtida quando $t = 40$, em que a solução é 18 carros e 4 motos. Já a quantidade máxima de motos é obtida quando $t = 36$ e resulta na solução com 2 carros e 32 motos.

5 Conclusões

A partir dos resultados expostos, é possível entender as frações contínuas como uma forma de representar números racionais e irracionais, mas, principalmente como uma teoria capaz de determinar melhores aproximações racionais de um número irracional, sendo assim, utilizá-las em pesquisas de algumas áreas da matemática.

De um modo geral, acredita-se que os objetivos do trabalho foram atingidos, fornecendo uma abordagem do tema que resgata a parte histórica, expõe as principais definições e resultados, além de apresentar uma proposta didática do tema na educação básica.

Nesse contexto, o trabalho também pode servir como uma ferramenta de consulta a professores da educação básica que queiram conhecer o tema e observar uma alternativa didática com o uso de novas tecnologias e desenvolvimento de diferentes habilidades.

As ideias sobre aproximações de funções por séries que se baseiam em frações contínuas, a implementação de um código do método de aproximação de Lagrange para zeros de funções reais, ou ainda, a aplicação das propostas de ensino apresentadas podem ser objetivos de futuras pesquisas acerca do tema.

Referências

BICUDO, I. *Os elementos*. Unesp, 2009. ISBN 9788571399358. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=um94A66MDxkC>. Citado na página 15.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Mínistério da Educação, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 12, 57, 59 e 66.

BREZINSKI, C. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1991. (Springer Series in Computational Mathematics). ISBN 3540152865. Citado 9 vezes nas páginas 10, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 54.

COUTO, A. G. *Frações Contínuas e Números Reais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do PROFMAT, Dourados - MS, 2017. Citado na página 66.

CRETNEY, R. The origins of euler's early work on continued fractions. *Historia Mathematica*, v. 41, n. 2, p. 139–156, 2014. ISSN 0315-0860. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086014000044>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

HEFEZ, A. *Aritmética*. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2014. Citado na página 51.

KHINCHIN, A. Y. *Continued Fractions*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1964. (Phoenix Science). Citado 3 vezes nas páginas 11, 22 e 36.

MOREIRA, C. G. T. d. A. *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*. [S.l.]: IMPA, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 59 e 66.

OLDS, C. *Continued Fractions*. Mathematical Association of America, 1963. (Anneli Lax New Mathematical Library, v. 9). ISBN 9780883856093. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=A-PXAAAAMAAJ>. Citado na página 15.

PAIXÃO, J. C. *Fracções contínuas no ensino pré-universitário*. Dissertação (Mestrado), 2011. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 66.

RECALDE, L. C.; VARGAS, V. Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. *U. d. Valle, Ed*, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 17 e 18.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books, 1996. ISBN 9788534602044. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kuRDAAAACAAJ>. Citado na página 55.

SAVOIS, J. N. *Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do PROFMAT, Rio Grande - RS, 2014. Citado na página 69.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer New York, 2003. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). ISBN 9780387407371. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=PilhoGJeKBUC>. Citado na página 16.

SILVA, A. L. A. D. *Equações diofantinas lineares com n variáveis e aplicação em sala de aula utilizando o geogebra*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do PROFMAT, Feira de Santana - BA, 2019. Citado na página 69.

SOUZA, P. J. de. *Uma introdução ao estudo de equaçãoes diofantinas lineares para o ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semiárido, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do PROFMAT, Mossoró - MS, 2020. Citado na página 69.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History: A Concise Edition*. Springer International Publishing, 2020. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 9783030551933. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=DY8HEAAAQBAJ>. Citado na página 15.