UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GLEISON SILVA PEREIRA

O ENSINO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM O USO DO APLICATIVO GEOGEBRA

São Luís – MA
2023

GLEISON SILVA PEREIRA

O ENSINO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM O USO DO APLICATIVO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual do Maranhão-UEMA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

São Luís – MA
2023

Pereira, Gleison Silva.

O ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra / Gleison Silva Pereira. – São Luís, 2023.

101 f

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Maranhão, 2023.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto.

1.Funções logarítmicas. 2.GeoGebra. 3.Ensino de matemática. I.Título.

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

GLEISON SILVA PEREIRA

O ENSINO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS COM O USO DO APLICATIVO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 24 de fevereiro de 2023_

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto (Presidente)
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dra. Lélia de Oliveira Cruz
Universidade Estadual do Maranhão

Renata de Farias Limeira Carvalho

Prof. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho
Universidade Federal do Maranhão

DEDICATÓRIA

A meu pai (in memoriam), Agenor Assunção Pereira, por todos os ensinamentos, incentivos, por acreditar mais em mim do que qualquer outra pessoa poderia acreditar, pelas mudanças de horários no trabalho para não atrapalhar nos meus estudos, pelos livros que não tinha condições de comprar, mas comprou, por sempre contar para todo mundo cada pequena conquista minha, por acolher minha esposa como se fosse uma filha, por nos acolher nos momentos mais difíceis, por tudo. Faltam palavras para descrever.
Pai, nos teus passos você foi mais eu.

A meu amigo (in memoriam) Paulo Afonso Vieira Monção, pela insustentável leveza do ser.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, e permitir que pessoas excepcionais aparecessem e fizesse parte dela.

À minha mãe, Maria do Socorro, por tudo que sou e por toda certeza que tenho. Por quem sempre escolhi ficar, ou voltar.

À minha esposa Patrícia pelo apoio, paciência e quem sempre esteve ao meu lado acreditando em tudo o que poderíamos conquistar.

Aos meus filhos, Bruna Eduarda e Heitor Hazard, as pessoas que mais amo e maior incentivo para seguir nas nossas conquistas.

Aos meus irmãos, em especial a Anália, por incentivar a seguir o caminho da docência, à Francisca das Chagas Marcelo.

À minha sogra Maria da Conceição, aos meus compadres Narrisson, Alexsandro e André, às minhas comadres Narria, Eliane, Esmeralda.

Ao amigo Eduardo Oliveira Silva e ao amigo Leonel, por toda ajuda e apoio.

Aos amigos de que acreditaram no sucesso dessa caminhada, Uaglyson, Antunes, Diego, Danilo, Donizete, Wandin, Jardel, Pedrosa.

Aos amigos do mestrado, Márcia, Luana, Priscila, Marlos, Paulo Franca, Mateus, Paulo Loreço e Fernando pelos momentos de estudo e companheirismo de cada um nessa jornada.

À minha orientadora prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto, a quem tenho imensa admiração e respeito.

Aos professores e todos que fazem parte do PROFMAT/UEMA.

À Débora de Cássia, pelas contribuições magnificentes neste trabalho, e por ser sempre “insuficiente”.

Aos gestores, professores, monitores e alunos da Escola Militar Tiradentes IV que contribuíram para esta pesquisa.

À professora Dra. Lélia de Oliveira Cruz por suas contribuições e participação na banca.

À professora Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho por suas contribuições e participação na banca.

“Como se fosse uma gota d’água descobrindo que é o mar azul”.

Fábio Júnior.

RESUMO

O presente trabalho versa sobre o ensino das funções logarítmicas com o auxílio do aplicativo GeoGebra. Essa pesquisa possibilitou conhecer o impacto do auxílio das tecnologias com o uso do GeoGebra numa turma do 1º Ano do Ensino Médio da Escola Militar Tiradentes IV na cidade de Caxias – MA, por meio da realização de uma oficina de intervenção com 20 alunos. O objetivo geral da pesquisa foi compreender o ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra. Com uma metodologia de pesquisa-ação e método de caráter quanti-qualitativo, os dados foram coletados e analisados. Entre os resultados quantitativos apresentados, 60% dos sujeitos conheciam alguma ferramenta tecnológica que auxilia no estudo de matemática, 35% consideraram necessário o auxílio da tecnologia, mas 85% não conheciam o aplicativo GeoGebra. Quanto aos dados qualitativos os resultados apresentaram as dificuldades enfrentadas pelos alunos, como aulas tradicionais e difícil compreensão quanto à linguagem matemática. A partir da intervenção, balizada na construção do conhecimento junto com os alunos e aliada ao uso do aplicativo GeoGebra, realizada na oficina, concluiu-se que associar o ensino das funções logarítmicas ao uso do aplicativo GeoGebra é algo tangível ao se promoverem aulas mais próximas da realidade dos alunos, contextualizadas e com caráter interdisciplinar nas quais o aluno seja partícipe na construção do conhecimento.

Palavras-chave: Funções logarítmicas; GeoGebra; ensino de matemática.

ABSTRACT

This Essay deals with the teaching of logarithmic functions with the help of the GeoGebra application. This research made it possible to know the impact of the aid of technologies with the use of GeoGebra in a classroom of the 1st year of High School at Escola Militar Tiradentes IV in the city of Caxias - MA, through the realization of an intervention workshop with 20 students. The general objective of the research was to understand the teaching of logarithmic functions using the GeoGebra application. With an action-research methodology and a quantitative-qualitative method, data were collected and analyzed. Among the quantitative results presented, 60% of the students knew some technological tool that helps in the study of mathematics, 35% considered the help of technology necessary, but 85% did not know the GeoGebra application. As for the qualitative data, the results showed the difficulties faced by the students, such as traditional classes and the difficulty in understanding of the mathematical language. From the intervention, based on building knowledge together with the students and combined with the use of the GeoGebra application, carried out in the workshop, it was concluded that associating the teaching of logarithmic functions with the use of the GeoGebra application is something tangible when promoting closer classes of the students' reality, contextualized and with an interdisciplinary character in which the student is a participant in the construction of knowledge.

Keywords: Logarithmic functions; GeoGebra; mathematics teaching.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CNE	- Conselho Nacional de Educação
DCTMA	- Documento Curricular do Território Maranhense
ENEM	- Exame Nacional do Ensino Médio
FGV	- Fundação Getúlio Vargas
IBGE	- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
LDB	- Lei de Diretrizes e Bases da Educação
PA	- Progressão Aritmética
PCNs	- Parâmetro Curricular Nacional
PCNEM	- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PG	- Progressão Geométrica
PH	- Potencial Hidrogeniônico
PNE	- Plano Nacional de Educação
PNLO	- Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PROFMAT	- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	- Sistema de Avaliação da Educação Básica
TDAH	- Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade
TICs	- Tecnologia da Informação e Comunicação
UEMA	- Universidade Estadual do Maranhão

LISTA DE SÍMBOLOS

$<$	menor que
$>$	maior que
$\Leftrightarrow$	Equivalente
$=$	Igualdade
$\Longrightarrow$	Implica que
α	alfa
f	função
$\forall$	Quantificador Universal (para todo)
$\exists\vert$	Existe um único
$\subset$	Está contido

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Aconteceu, em 1971, na Nicarágua, uma homenagem às dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo, com o lançamento de uma série de selos postais. Cada selo estampava uma fórmula particular, acompanhada de uma ilustração que trazia um comentário breve sobre a importância da fórmula. Um desses selos é dedicado aos logaritmos de Napier (BOYER, 2004, p.215). A invenção dos logaritmos mudou os rumos da humanidade, pois colaborou para os avanços tecnológicos, permitindo que laboriosos cálculos fossem simplificados, contribuindo com navegadores e astrônomos para o desenvolvimento das Grandes Navegações.

Sempre que uma tecnologia surge, os trabalhos manuais são superados, desembocando inevitavelmente em evolução. Usar e difundir essas tecnologias contribui para o ganho da qualidade de vida, para o trabalho e avanços das ciências. Com a educação não é diferente, vários avanços serviram de base para ela, como a invenção da escrita, a imprensa, o ábaco, os logaritmos, as calculadoras e nas últimas décadas, as tecnologias da informação e comunicação (como os computadores), a internet, os *Smartphones* e os aplicativos voltados para a educação, a exemplo do GeoGebra, que contribuíram e contribuem para o seu avanço. À medida que acontecem os avanços tecnológicos, sociais e culturais, surge a necessidade eminente de mudanças na escola (MARANHÃO, 2022, p.46).

O ensino das funções logarítmicas com, ou sem o auxílio das tecnologias digitais, é cerne de discussão quando se fala do aperfeiçoamento do ensino de matemática. Isso acontece por ser uma área do ensino de matemática no Currículo do primeiro ano do Ensino Médio, considerada elementar para o avanço sistemático, interdisciplinar e contextualizado que pode ser relacionada facilmente com o uso de tecnologias digitais como a exemplo o aplicativo GeoGebra.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2000, p.43).

As funções logarítmicas contemplam o que trazem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), pois possuem várias aplicações no cotidiano e nas demais áreas do conhecimento, como Química, Física e Geografia.

O ensino de matemática, segundo avaliação do Sistema Brasileiro de Educação Básica (SAEB) que avalia o nível de proficiência nesta área, mostra que os estudantes não absorvem o que é ministrado em sala de aula, pois os índices evidenciam que a proficiência em Matemática no Ensino Médio no Brasil é insuficiente. Tal fato decorre de problemas como falta de qualificação profissional, a persistência de um ensino tradicional, falta de vontade dos próprios alunos e professores (REIS, 2016, p.05). Para melhorar o ensino de matemática é preciso mudar as práticas em sala de aula no sentido de tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, menos abstrato, e escutar dos alunos o que precisa ser modificado para que eles tenham mais interesse no ensino de matemática.

Na realização do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na linha de pesquisa Ensino de Matemática Básica, e na prática de sala de aula, como professor de Matemática, surgiu o interesse por desenvolver a pesquisa sobre o ensino das funções logarítmicas com o auxílio do aplicativo GeoGebra. O interesse de trazer essa discussão à tona partiu deste fato: enquanto professor atuante na sala de aula na disciplina de Matemática, foi aferido que os alunos tinham dificuldade em compreender o ensino de funções logarítmicas quando o conteúdo era ministrado de forma tradicional, direcionado para a hipótese de que o ensino das funções auxiliado pelo aplicativo GeoGebra conseguiria superar tais dificuldades.

A pesquisa começou a ser desenvolvida motivada pela problemática: Como o ensino das funções logarítmicas pode ser facilitado com o uso do aplicativo GeoGebra? Para alcançar as respostas a essa problemática foram traçados os seguintes objetivos:

Objetivo geral: Compreender o ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra e como este contribui para o aperfeiçoamento do ensino de matemática.

Objetivos específicos: definir funções; entender a definição e as aplicações das funções logarítmicas; associar a resolução de problemas com funções logarítmicas, utilizando o aplicativo GeoGebra; aplicar o GeoGebra como tecnologia auxiliar para o ensino das funções logarítmicas; intervir na prática do ensino de funções logarítmicas para o aperfeiçoamento do ensino de matemática.

A metodologia aplicada neste trabalho teve uma abordagem quanti-qualitativa, de natureza aplicada e caráter de pesquisa-ação. Um projeto de intervenção foi, então, desenvolvido com a aplicação de uma oficina didática intitulada “O ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra”. A coleta de dados foi realizada por meio da aplicação de dois questionários *on-line* pela plataforma *Google Forms*. A análise dos dados foi realizada de modo a discutir as respostas dos participantes com a literatura pertinente acerca dos assuntos discutidos.

Os estudos de logaritmos passam invariavelmente pelo estudo da História da Matemática, aqui embasados nos estudos de Howard Eves (2011). Sobre logaritmos, os estudos desenvolvidos por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami no livro Fundamentos de Matemática Elementar, volume 02 (2004), contribuíram para a análise dessa temática dentro do desenvolvimento do trabalho. O ensino das funções logarítmicas se valeu das discussões realizadas por Elon Lages Lima no livro Logaritmos (2016).

As demais categorias que estruturaram esta pesquisa como o uso das tecnologias digitais e o aplicativo GeoGebra utilizado para auxiliar o ensino de matemática, orientados pelos trabalhos de Ricardo Batista Rodrigues (2016), e Paulo Ricardo Pereira (2021) respectivamente, as discussões acerca do ensino de matemática foram amparadas nos ditames de documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (2000), a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017) e o Documento Curricular do Território Maranhense – DCTMA (2022).

O trabalho está estruturado em seis capítulos, a Introdução, o primeiro, no qual se apresenta um panorama do desenvolvimento da pesquisa. O segundo capítulo apresenta um breve histórico sobre a História da Matemática quanto à criação dos logaritmos e versa ainda sobre questões técnicas acerca de conceitos e definições de elementos como logaritmos, funções e funções logarítmicas no Ensino Médio.

O terceiro capítulo discute as arestas do ensino de matemática frente às suas crises e dificuldades, no que tange à qualificação do professor de Matemática, às dificuldades dos alunos e à prática de ensino, especialmente do Ensino de funções logarítmicas organizado nos documentos legais.

No quarto capítulo é apresentado o percurso metodológico trilhado no desenvolvimento da pesquisa, desde a seleção da literatura sobre a temática do ensino das funções logarítmicas, estruturação dos questionários para a coleta de dados, os critérios de escolha do universo da pesquisa e dos sujeitos participantes da pesquisa, a realização da oficina e a análise dos dados.

O quinto capítulo traz o processo de observação, escuta, diagnóstico, intervenção e avaliação junto à turma do 1º Ano D do Colégio Militar Tiradentes IV por meio da realização da oficina didática. Nele são apresentados os planejamentos que estruturaram didaticamente a realização da oficina, a aplicação dos questionários diagnósticos e avaliativos que coletaram os dados que foram posteriormente analisados, gerando os resultados acerca do ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra.

O sexto capítulo apresenta as considerações finais sobre o desenvolvimento da pesquisa e os resultados alcançados após a análise dos dados. Neste capítulo, chega-se a ilações de que o ensino das funções logarítmicas apresenta similitudes de dificuldades de outros temas relacionados ao ensino de matemática. Garantir o ensino de operações básicas, a compreensão da teoria e o entendimento da prática permitiu aos alunos, quando auxiliados pelo aplicativo GeoGebra, sanar algumas das arestas de dificuldades.

2 UM HISTÓRICO DOS LOGARITMOS

No final do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Segundo o grau de dificuldade, as operações aritméticas podem ser classificadas em três grupos: adição e subtração formam as operações de primeira espécie; multiplicação e divisão são da segunda espécie, enquanto potenciação e radiciação constituem as operações da terceira espécie (LIMA, 2016, p.1).

Os logaritmos foram criados como instrumentos facilitadores de cálculos, pois transformavam operações complexas em operações mais simples, convertendo operações de terceira espécie em operações de segunda espécie, e as últimas em operações de primeira espécie. Os responsáveis pelo desenvolvimento dessa tecnologia, elaborada independentemente, foram o escocês John Napier (1550-1617), que publicou seus primeiros estudos sobre logaritmos em 1614, seguido pelo suíço Jost Burgi (1552-1632), que publicou seus trabalhos em 1620 (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004, p.55). O inglês Henry Briggs associou-se a Napier para o desenvolvimento de estudos posteriores de logaritmos, publicando uma nova tábua de mais fácil utilização, que continha os logaritmos de base decimal.

John Napier foi um inventor escocês com ideias à frente do seu tempo. Segundo Eves, Napier previu:

> “que no futuro desenvolver-se-ia uma peça de artilharia que poderia eliminar de um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura”, que se produziriam dispositivos para navegar “debaixo d’água” e que se criaria um acarro de guerra com a boca que se acenderia para “espalhar a destruição por todas as partes”. A metralhadora, o submarino e o tanque de guerra, respectivamente, vieram concretizar esses vaticínios na Primeira Guerra Mundial (EVES, 2011, p.342).

Como se pode observar, Napier era um visionário e de uma mente brilhante. Com isso, não se surpreendeu quando, diante da sua genialidade, criou um instrumento que facilitou cálculos, como o engenhoso dispositivo mnemônico conhecido como regra das partes circulares, as barras, ou ossos de Napier, usados para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números, e a invenção que modificou os rumos dos cálculos matemáticos: os logaritmos.

Napier pretendia transformar as operações de segunda espécie em operações de primeira espécie, escrevendo qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo.

> Então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes e além disso, elevar um número a enésima potência seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, ou seja, multiplicá-lo por n e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas, ou seja, a divisão por n e assim as multiplicações ficariam reduzidas à somas; as divisões à subtrações; as potências à multiplicações e as raízes à divisões, facilitando muito as computações numéricas (RAMOS, 2015, p.18).

Na figura abaixo pode ser observado como essas operações eram realizadas:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Figura 01. Fonte: RAMOS (2015, p.18).

Para calcular, por exemplo, 256 por 16, deve-se procurar na Figura 01 o expoente relacionado ao número 256 que é o 8 e o expoente correspondente ao 16 que é o 4, e então somar esses expoentes. Assim teríamos: $8 + 4 = 12$, após encontrar o expoente correspondente, procura-se seu valor correspondente na Figura 01, 4096.

Napier destinou mais de 20 anos da sua vida a estudar os logaritmos, e publicou seus estudos em 1614, intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), “uma tábua de logaritmo que consiste essencialmente em duas colunas de números, a cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo” (LIMA, 2016, p. 2).

John Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jost Bürgi (1552-1632), mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seriam seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém, Bürgi publicou seus resultados apenas em 1620, seis anos depois de Napier publicar sua obra, (BOYER, 2004, p. 216).

As diferenças entre as obras dos dois estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos que usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos. Em vez de partir de um número um pouco menor que um (como Napier que usava $(1 - 10^{-7})$, Bürgi escolheu um número um pouco maior que um: o número $1 + 10^{-4}$; e em vez de multiplicar as potências desse número por 10^7, Bürgi multiplicava por 10^8. Havia ainda outra pequena diferença: em sua tabulação Bürgi, multiplicava todos os seus expoentes de potência por dez. Isto é, se $N = 10^8(1 + 10^{-4})^L$. Bürgi chamava $10L$ o número *"vermelho"* correspondente ao número *"preto"* N. Se, nesse esquema, dividimos todos os números pretos por 10^8 e todos os *vermelhos* por 10^5, teremos virtualmente um sistema de logaritmos naturais (BOYER, 2004, p.216).

Com o sucesso da publicação do sistema de logaritmos em 1614 por Napier, o número de admiradores e entusiastas cresceu consideravelmente. Entre os ilustres, estava o primeiro "*Savilian professor"* de geometria em Oxford, Henry Briggs (1561-1630), que visitou Napier em 1615. Na oportunidade, os dois discutiram possíveis modificações nos métodos dos logaritmos. Ambos concordaram que o logaritmo de 1 deveria ser 0 e que o logaritmo de 10 deveria ser 1. (EVES, 2011, p.344)

Com a morte de Napier em 1617, recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou briggsianos. Em vez de tomar as potências de um número próximo de dez, como fizera Napier, Briggs começou com o $\log 10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas (BOYER, 2004, p.215).

No ano de 1617 Briggs publicou seu *Logarithimorum chilias prima* – isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um calculado com quatorze casas. Contudo em 1624, em *Arithmetica logarithmica*, Brigss ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com quatorze casa. O trabalho com logaritmos podia, a partir daí, ser realizado exatamente como hoje, pois, para as tabelas de Briggs, todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam (RAMOS, 2015, p.23-24).

Todos esses estudiosos, matemáticos e cientistas contribuíram com suas pesquisas para o desenvolvimento e posterior aperfeiçoamento dos logaritmos, o que desembocou em avanços na ciência Matemática e em outras áreas do saber científico, como na Astronomia e nas viagens marítimas. Contemporaneamente, esses avanços prosseguem auxiliando as diversas áreas das ciências e servindo de base para elas, como será visto no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Logaritmos

Nesta seção, serão apresentadas as definições e as consequências das definições de logaritmos, com suas respectivas justificativas, conforme traz o livro Matemática Contexto e Aplicações do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do autor Luiz Roberto Dante (2010).

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Em símbolos: se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Notação: $\log_a b = x$, dizemos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

C1) $\log_a a = 1$

Justificativa indicando por x o logaritmo de $\log_a a$, temos:

$\log_a a = x$, aplicando a definição de logaritmo, encontramos $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a$, logo $x = 1$.

C2) $\log_a 1 = 0$

De fato, indicando por x o logaritmo de $\log_a 1$, temos:

$\log_a 1 = x$. Aplicando a definição de logaritmo, obtém-se $a^x = 1$, portanto $x = 0$.

C3) $\log_a a^x = x$, para qualquer número real x.

De fato, segue da definição de logaritmo que $\log_a a^x = x \Leftrightarrow a^x = a^x$, para todo $a > 0$, $a \neq 1$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.

C4) $a^{\log_a x} = x$, com $x > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: segue diretamente da definição de logaritmo.

C5) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0, y > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: Se

$$\log_a x = r \text{ (I)}$$

$$\log_a y = s \text{ (II)}$$

Então aplicando a definição de logaritmos, encontramos respectivamente $a^r = x$ e $a^s = y$.

Se $x = y$, substituindo em (I) e (II) tem-se $a^r = a^s$ e pelas propriedades de potência encontramos $r = s$, logo $\log_a x = \log_a y$.

Como $\log_a x = \log_a y \Rightarrow r = s$, pelas propriedades de potências tem-se $a^r = a^s \Rightarrow x = y$.

Portanto $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0, y > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.

2.1.1 Propriedades operatórias

No livro Fundamentos de Matemática Elementar volume 2 de Iezzi, Dolce e Murakami (2004), apresentam-se as propriedades dos logaritmos listadas abaixo, com suas respectivas demonstrações:

1º) Propriedade: Logaritmo do produto.

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Isto é,

$$Se\ 0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0, então\ \log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c.$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x, \log_a c = y\ e\ \log_a(b.c) = z$, provemos que $z = x + y$.

De fato, aplicando a definição de logaritmos tem-se

$$\text{(I) } \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

$$\text{(II) } \log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c,$$

$$\text{(III) } \log_a(b.c) = z \Leftrightarrow a^z = b.c.$$

Substituindo (I) e (II) em (III), tem-se: $a^z = a^x.a^y$ e aplicando as propriedades das potências obtém-se $a^z = a^x.a^y \Rightarrow a^z = a^{y+z} \Rightarrow z = y + z$.

2º) Propriedade: Logaritmo do quociente.

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor. Em notação tem-se:

$$Se\ 0 < a \neq 1, b > 0\ e\ c > 0, então\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x, \log_a c = y\ e\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$, provemos que $z = x - y$.

De fato, aplicando a definição de logaritmos tem-se:

$$\text{(I) } \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\text{(II) } \log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$$

$$\text{(III) } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c}.$$

Substituindo (I) e (II) em (III), tem-se $a^z = \frac{a^x}{a^y}$ e aplicando as propriedades das potências obtém-se $a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{y-z} \Rightarrow z = y - z$.

3º) Propriedade: Logaritmo da potência.

Em qualquer base $a\,(0 < a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Em notação tem-se:

$$Se\ 0 < a \neq 1, b > 0\ e\ \alpha \in\ \mathbb{R}, então\ \log_a b^\alpha = \alpha. \log_a b.$$

Demonstração: Fazendo $\log_a b = x\ e \log_a b^\alpha = y$, provemos que $y = \alpha. x$.

Como $\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b\ e\ \log_a b^\alpha = y \Longrightarrow a^y = b^\alpha$, temos que

$a^y = (a^x)^\alpha \Longrightarrow a^y = a^{\alpha.x} \Longrightarrow y = \alpha. x.$

2.2 Funções logarítmicas

Antes de falarmos de funções logarítmicas, abordaremos conceitos de função. As definições de funções listadas abaixo foram retiradas do livro Fundamentos de Matemática Elementar volume 01 de Iezzi e Murakami (2004).

Na referência acima, vemos a seguinte definição: Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B, recebe o nome de $aplicação$ de $A\,em\,B$ ou $função\ definida\ em\ A\ com\ imagens\ em\ B$ se, e somente se, para todo $x \in A$, existir um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Em notação: f é aplicação de A em $B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists|\ y\ \in B|\ (x, y) \in f)$.

Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados. Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y)| x \in A, y \in B\ e\ y = f(x)\}$. Isso significa que dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Considerando que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um domínio e uma imagem. Chamamos de domínio o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções: $domínio = conjunto\ de\ partida$, isto é, $D = A$.

Chamamos de imagem o conjunto de Im dos elementos $y \in B$ para os quais $x \in A$, tal que $(x, y) \in f$; portanto, $imagem$ é $subconjunto\ do\ contradomínnio$, isto é, $Im \subset B$.

Notemos, que feita a representação cartesiana da função f, temos:

Domínio(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas $verticais$ conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, ou seja, é o conjunto formado por todas as abscissas do gráfico de f.

Imagem (Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas $horizontais$ conduzidas por esses pontos intercepta o gráfico de f, ou seja, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f.

Outra definição importante para este trabalho é a de função inversa, que veremos adiante:

Seja $f: A \longrightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

A partir deste ponto, usaremos o livro Números e funções da Coleção PROFMAT (2013), e o livro Logaritmos (2016), ambos do autor Elon Lages Lima para as definições e propriedades a respeito das funções logarítmicas. Inicialmente vamos definir função exponencial conforme o mesmo autor.

Para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional: $f(x+y) = f(x).f(y)$. Segue que a função exponencial possui uma inversa de base a chamada de função logarítmica.

Definição: seja $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função monótona injetiva, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe um $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Abaixo apresentaremos algumas propriedades da função logarítmica. Trataremos somente as demonstrações no caso $a > 1$, ou seja, quando as funções são crescentes. A prova no caso $0 < a < 1$ é análoga. Para simplificação, chamaremos $\log_a x = L(x)$, para $a > 1$.

Propriedades:

P1) Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos de mesma base diferentes.

Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$.

No primeiro caso, resulta do fato da função logarítmica ser, por definição, biunívoca, logo: $L(x) < L(y)$.

No segundo caso, tem-se $L(y) < L(x)$.

Em qualquer hipótese de $x \neq y$, conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

P2) O logaritmo de 1 é zero.

Com efeito, fazendo $L(1) = L(1.1)$, pela definição de logaritmos temos:

$L(1.1) = L(1) + L(1)$, subtraindo $L(1)$, em ambos os membros, tem-se:

$L(1) - L(1) = L(1) + L(1) - L(1)$

$0 = L(1)$

P3) Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Com efeito, sendo L crescente de $0 < x < 1 < y$ resultando $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$.

P4) Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

Com efeito, fazendo $x.\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, aplicando a definição de logaritmos, temos:

$L\left(x.\left(\frac{1}{x}\right)\right) = L(1) \Longrightarrow L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

P5) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale: $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$

Com efeito, fazendo $L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x.\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, aplicando a definição de logaritmos, tem-se:

$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) \Longrightarrow L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) + L(1) - L(y) \Longrightarrow L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

P6) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se $L(x^r) = r.L(x)$

Com efeito, a propriedade $L(x_1.x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ estende-se para o produto de um número qualquer de fatores, assim:

$L(x_1.x_2.x_3) = L(x_1.x_2) + L(x_3) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3)$. E assim segue.

$L(x_1.x_2.\ldots.x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \cdots + L(x_n)$.

Segue abaixo a prova por indução:

Veja que para dois termos tem-se $L(x_1.x_2) = L(x_1) + L(x_2)$;

Para três termos tem-se $L(x_1.x_2.x_3) = L(x_1.x_2) + L(x_3) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3)$.

Agora considerando a propriedade válida para uma certa quantidade k de fatores, isto é:

$L(x_1.x_2.x_3.\ldots.x_k) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + \cdots + L(x_k)$.

Vejamos o que ocorre para $k + 1$ termos.

Observe que:

$L(x_1.x_2.x_3.\dots.x_k.x_{k+1}) = L(x_1.x_2.x_3.\dots.x_k) + L(x_{k+1}) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + \cdots + L(x_k) + L(x_{k+1})$, em que na última igualdade usamos a hipótese da indução.

Logo pelo princípio da indução finita, temos que a propriedade é válida para uma quantidade finita de termos.

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ então:

$L(x^n) = L(x.x.\dots.x) = L(x) + L(x) + \cdots + L(x) = n.L(x)$.

Logo a propriedade P6 vale quando $r = n$ é um número natural.

Ela também é válida quando $r = 0$ pois para todo número $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x)$.

Considerando agora o caso em que $r = -n, n \in \mathbb{N}$, isto é, onde r é um inteiro negativo. Assim, para todo $x > 0$ temos $x^n.x^{-n} = 1$. Logo:

$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0$, e daí $L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n.L(x)$.

Por fim, o caso geral, em que $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos:

$(x^r)^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$.

Assim $q.L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p.L(x)$, em virtude do que já foi provado.

Da igualdade $q.L(x^r) = p.L(x)$ resulta que $L(x^r) = \left(\frac{p}{q}\right).L(x)$, ou seja, que:

$L(x^r) = (r).L(x)$.

2.3 A interdisciplinaridade das aplicações das funções logarítmicas

O estudo de funções possui inúmeras aplicações no cotidiano, desde a escolha de uma promoção de companhia de telefone móvel, até no imposto de renda em função do rendimento (PINHEIRO; MAGALHÃES; DA SILVA, 2020). E a função logarítmica, em especial, possui aplicações na matemática com o cálculo de juros compostos; na química, no estudo do Potencial Hidrogeniônico (pH); na física usada nas leis de resfriamento dos corpos e em outras áreas da ciência, comprovando sua importância e necessidade de um estudo para reflexão do ensino das funções logarítmicas como instrumento que viabilize a interdisciplinaridade no ensino aprendizagem (LIMA et al., 2016, p.212).

Quando aplicados à Matemática Financeira, os logaritmos são usados nos problemas de juros compostos, para calcular o tempo (n) necessário para que um capital (C) aplicado a uma taxa (i) atinja um montante (M), por meio da fórmula $M = C.(1+i)^n$. Aparecem como solução de uma equação exponencial, uma das abordagens possíveis de suas definições, que devem ser amplamente difundidas entre os alunos para o ensino das funções logarítmicas (SILVA, 2020, p.28).

Na Química, a aplicação dos logaritmos está presente nos cálculos do Potencial Hidrogeniônico pH que é a quantidade de prótons H^+ livres em uma solução aquosa, que indica a acidez, neutralidade, ou alcalinidade da solução. Em uma escala que varia de 0 a 14, o valor de pH é 7; considera-se a solução como neutra. Um valor de pH menor do que 7 significa que a solução tem caráter ácido e quanto menor o valor de pH, mais ácida é a solução aquosa. Valores de pH entre 7 e 14 indicam soluções alcalinas (OLIVEIRA et al., 2017, p.5). A equação que determina o pH de uma solução é a seguinte: $pH = -\log H^+$, onde H^+é a concentração de íons H^+ na solução.

Ainda ligados à interdisciplinaridade, os logaritmos apresentam aplicações também na Física, quando usados na Lei de Resfriamento dos Corpos, de Isaac Newton, que aponta que a diferença de temperatura D entre o objeto e meio que o contém decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Esta lei se traduz matematicamente assim: chamando D_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$, a diferença num instante t qualquer, tem-se $D(t) = D_0 . e^{-\alpha t}$ em que a constante α depende do material de que é constituída a superfície do objeto (LIMA, 2016, p.102).

As funções logarítmicas servem para aplicação em diversas áreas nas ciências, reafirmando a importância da abordagem desse conteúdo dentro do ensino de matemática, uma vez que, o processo interdisciplinar corrobore com uma aprendizagem passível de ser aplicada do cotidiano dos alunos. Aliado à diversidade das aplicações das funções logarítmicas, o auxílio das tecnologias, a exemplo do aplicativo GeoGebra, contribui para despertar no aluno interesse, curiosidade e identificação da matemática com sua realidade.

3 O ENSINO DE MATEMÁTICA SEGUNDO OS DITAMES LEGAIS

Entre os marcos legais que embasam a educação no Brasil e que ajudaram a moldar o ensino e foram sofrendo modificações ao longo dos anos, podemos citar a Constituição Federal (1988), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996), a Base Nacional Comum Curricular (2017) e, em âmbito estadual, o Documento Curricular do Território Maranhense (2022). A Constituição Federal em seu Artigo 205 preconiza que:

> A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988).

A garantia desses direitos na Carta Constitucional assegura que a educação, direito de todos, seja realizada em consonância entre três esferas: família, Estado e sociedade, para atender as necessidades do cidadão. Outro documento que norteou a organização educacional foi a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a LDB, que, no seu Artigo 26º, afirma que:

> Os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996).

Esses documentos trouxeram noções fundamentais para a construção da BNCC como a relação do que é comum e básico e do que seja diverso na idealização dos currículos nacionais. As competências, as diretrizes comuns e os currículos são diversos pela necessidade de orientar as especificidades dos grupos sociais aos quais atendem.

A BNCC é um documento que normatiza a integralização dos currículos de ensino de todo o país na esfera púbica e privada, valorizando conhecimentos elementares, assim como competências e habilidades pertinentes a cada etapa de ensino da educação básica por meio de uma referência comum obrigatória em território nacional com o intuito de melhorar a qualidade de ensino assegurando seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, consoante o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017, p. 7).

A Lei nº 13.415/2017 estabeleceu mudanças estruturais no Ensino Médio quando alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, ampliando de 800 horas para 1000 horas anuais, até 2022, o tempo mínimo do estudante na escola. Definindo, a partir de então, pela Base Nacional Comum Curricular, uma proposta de ensino mais flexível voltada para uma formação técnica e profissional.

O Novo Ensino Médio propõe uma remodelagem no currículo para a Formação Geral Básica, balizada pela BNCC e os Itinerários Formativos que especificam as habilidades e competências necessárias para a Formação Geral Básica, bem como, a consolidação da formação do estudante de acordo com seus diferentes projetos de vida. Ele foi aprovado ainda no ano de 2017 e promulgado na Resolução nº 03, de 21 de novembro de 2018 pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) que, em seu Art. 5º, determina:

> O ensino médio em todas as suas modalidades de ensino e as suas formas de organização e oferta, além dos princípios gerais estabelecidos para a educação nacional no art. 206 da Constituição Federal e no art. 3º da LDB, será orientado pelos seguintes princípios específicos:
>
> I - formação integral do estudante, expressa por valores, aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais;
> II - projeto de vida como estratégia de reflexão sobre trajetória escolar na construção das dimensões pessoal, cidadã e profissional do estudante;
> III - pesquisa como prática pedagógica para inovação, criação e construção de novos conhecimentos;
> IV - respeito aos direitos humanos como direito universal;
> V - compreensão da diversidade e realidade dos sujeitos, das formas de produção e de
> trabalho e das culturas;
> VI - sustentabilidade ambiental;
> VII - diversificação da oferta de forma a possibilitar múltiplas trajetórias por parte dos
> estudantes e a articulação dos saberes com o contexto histórico, econômico, social, científico,
> ambiental, cultural local e do mundo do trabalho;
> VIII - indissociabilidade entre educação e prática social, considerando-se a historicidade dos conhecimentos e dos protagonistas do processo educativo;
> IX - indissociabilidade entre teoria e prática no processo de ensino-aprendizagem (BRASIL, 2018, p. 2).

O Novo Ensino Médio entrou em vigor somente em 2022 e tem se apresentado como algo novo e desafiador tanto para os professores quanto para os alunos, por conta da ampliação do currículo, da inserção dos Itinerários Formativos, do protagonismo dos alunos e da perspectiva de uma formação geral básica. Em seu Art. 11, que delineia sobre a organização curricular a Resolução 03 do CNE (2018), a formação geral básica é composta por competências e habilidades previstas na BNCC e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social, e deverá ser organizada por áreas de conhecimento: “I - Linguagens e suas tecnologias; II - Matemática e suas tecnologias; III - Ciências da natureza e suas tecnologias; IV - Ciências humanas e sociais aplicadas” (BRASIL, 2018, p. 5-6).

Das áreas do conhecimento pensadas para o Novo Ensino Médio, Linguagens e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias são obrigatórias nos três anos do Ensino Médio, como traz o § 7º "A critério dos sistemas de ensino, a formação geral básica pode ser contemplada em todos, ou em parte dos anos do curso do ensino médio, com exceção dos estudos de língua portuguesa e da matemática que devem ser incluídos em todos os anos escolares" (BRASIL, 2018, p.6).

Corroborando com as normas dos documentos nacionais acerca da organização da educação, o Estado do Maranhão desenvolveu um documento para atender as necessidades do seu território, objetivando orientar as equipes escolares no desenvolvimento de suas práticas pedagógicas no âmbito das escolas. O DCTM, ao reconhecer os desafios do novo formato do Ensino Médio aplicado nas redes públicas de ensino do país, planeja ações que buscam, se não conseguir eliminar, pelo menos minimizar os entraves para a oferta de uma educação pública de qualidade no Estado (MARANHÃO, 2022, p.62).

Nessa nova modelagem do Ensino Médio, a área da Matemática e suas Tecnologias deve aproveitar o conhecimento acumulado durante todo o Ensino Fundamental e os conhecimentos empíricos, a fim de promover ações que estimulem e provoquem reflexões críticas e de "abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum" (BRASIL, 2017, p. 518).

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é proporcionar aos estudantes uma visão da matemática para além de um conjunto de regras e técnicas, dando a essa uma visão imbricada a nossa cultura e a nossa história. Tendo as habilidades adquiridas ao longo do Ensino Fundamental, os estudantes terão ferramentas para compreender e realizar ações de intervenção para esta etapa de ensino, fazendo com que as habilidades previstas para o Ensino Médio se façam fundamentais para que o letramento matemático se torne ainda mais denso e eficiente (BRASIL, 2017, p.522).

3.1 Competências e habilidades para o ensino das funções logarítmicas segundo a BNCC

A BNCC organiza o ensino de matemática de forma sistemática, pautado em cinco competências específicas, e para cada uma dessas competências há um conjunto de habilidades que devem ser alcançadas nessa etapa do Ensino. Entre as cinco competências para o ensino de matemática no Ensino Médio, serão destacadas neste trabalho as competências 01, 03, 04 e 05, por se alinharem com a discussão do objeto desta pesquisa sobre o ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra. Essas competências são as que trazem as habilidades para a construção do conhecimento de conceitos de funções logarítmicas para o primeiro ano do Ensino Médio.

Já na competência 01, a BNCC orienta:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas, ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral (BRASL, 2017, p.523).

Como orientado na competência 01 acima citada, os alunos precisam desenvolver, dentro dessa competência, condições de letramento matemático e leitura crítica de mundo. Eles devem conseguir aplicar os conceitos e procedimentos matemáticos apresentados pelo professor na sala de aula, nas diversas áreas do conhecimento e em situações cotidianas, como a interpretação de informações em gráficos e tabelas, porcentagens presentes em ofertas de lojas, a densidade demográfica de uma cidade, ou estado, o pH de uma substância, a análise de probabilidades de eventos e o aproveitamento da facilidade e da inevitabilidade da presença da tecnologia entre os jovens. Tudo isso dando sentido ao saber científico, condições estas, necessárias para sua formação geral.

Dentro dessa competência, a BNCC destaca que o estudante desenvolva a habilidade que visa (EM13MAT101) interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com, ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p.525). Essa habilidade trata da interpretação matemática diante das situações do dia a dia, usando para isso a leitura e análise dos gráficos, seja na área de Matemática, seja nas demais áreas do conhecimento.

A competência 03 designa para o ensino de matemática

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2017, p.527).

Para essa competência o aluno deve ser capaz de modelar problemas, resolvê-los usando conceitos e habilidades adquiridas no Ensino Fundamental, e que consiga estabelecer uma simbiose entre o problema, os meios para resolvê-lo e os resultados obtidos, enxergando esse processo de modo holístico. Os estudantes devem conseguir relacionar problemas do cotidiano e o conhecimento matemático, e para resolver tais problemas, precisam identificar os conceitos e métodos necessários para serem usados na modelagem do problema.

Esta competência traz nas suas habilidades maiores especificidades para o ensino das funções logarítmicas. Entre as habilidades relacionadas à competência 03, estão as apontadas a seguir, respectivamente,

> (EM13MAT303) - Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
> (EM13MAT304) - Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
> (EM13MAT305) - Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros (BRASIL, 2017, p.528).

Em tais habilidades, a BNCC traz os descritores para o ensino das funções logarítmicas, relacionando-as com diversas situações do cotidiano, que podem ir além do ambiente escolar. Como exemplo, temos as funções exponenciais aplicadas na Matemática Financeira para resolução de problemas com juros compostos, na interpretação das variações de grandezas, crescimento e decrescimento de dados, fenômenos, aplicações em outras áreas do conhecimento como Ciências da Natureza, enfatizando a resolução de problemas e aplicações no cotidiano, possibilitando a interdisciplinaridade diante da ampla aplicação das funções logarítmicas.

Outra competência pertinente para discussão neste trabalho é a competência 04:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, 2017, p.523).

A competência 04 enfatiza a necessidade de o estudante apreender e usar os conhecimentos algébricos, geométricos, mesmo que de forma intuitiva, para a construção do raciocínio matemático, para resolver situações-problema do cotidiano, tornando o processo de aprendizagem dinâmico e intuitivo.

Quanto às habilidades da competência 04, destacam-se a 03 e a 05:

> (EM13MAT403) - Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.
> (EM13MAT405) - Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento (BRASIL, 2017, p.531).

Acerca dessas habilidades, deve-se ressaltar que o estudante precisa conhecer a representação gráfica das funções no plano cartesiano, identificando as características inerentes às funções logarítmicas, os elementos que compõem as funções, domínio, imagem, contradomínio, além de crescimento e decrescimento com, ou sem, o uso da tecnologia.

A competência seguinte a ser trazida à luz da discussão é a competência 05, que, em suas proposições, orienta haver, dentro do ensino de matemática, a demonstração, cada vez mais formal, dos conhecimentos construídos a partir dos conceitos básicos da Matemática:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p.523).

A competência acima propõe que o aluno desenvolva o entendimento e a capacidade de realizar investigação científica através de observações de padrões matemáticos, esse entendimento e capacidade podem ser alcançados por meio da resolução de problemas cotidianos, e, a partir daí, construir com o professor, as definições e propriedades matemáticas demonstrando-as, e usando, quando necessário e possível, as tecnologias digitais para que algumas dificuldades decorrentes das abstrações matemáticas sejam superadas. É relevante frisar que esses conhecimentos precisam ser adquiridos com, ou sem, o uso das tecnologias.

As habilidades relacionadas à competência 05, usadas no desenvolvimento da pesquisa, foram:

> (EM13MAT507) - identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> (EM13MAT508) - identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2017, p.533).

A seleção dessas habilidades relaciona-se à importância do contexto histórico para a criação dos logaritmos, utilizando a ideia da relação entre P.A e P.G para a construção deste importante instrumento de cálculo, fazendo com que os alunos entendam, que há uma relação entre a necessidade de solucionar um problema e, a partir de conhecimentos prévios, desenvolver novos conhecimentos, para que consigam solucionar a demanda existente.

Essas competências e habilidades que organizam o Ensino Médio para o ensino de matemática, mais especificadamente, nesta pesquisa, para o ensino das funções logarítmicas, trazem o aluno para o centro da construção do conhecimento, partindo dos conhecimentos prévios, passando por uma discussão contextualizada e interdisciplinar capaz de fomentar os conhecimentos matemáticos necessários para vivências teóricas e práticas dentro e fora de sala de aula.

3.2 O ensino de Matemática e o uso das tecnologias

Há no Brasil uma deficiência no processo de ensino-aprendizagem de matemática, conforme evidenciam os relatórios de proficiência apresentados a cada dois anos pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica SAEB. No último relatório, o do ano de 2021, o Ensino Médio apresentou uma queda nos índices de aproveitamento das avaliações de Matemática, saindo de 277 pontos, para 270 pontos em 2021, em resultados que variam de 0 a 500. Isso apontou uma regressão no aproveitamento do ensino de matemática no país (BRASIL, 2022).

As razões para esse baixo nível de proficiência se devem, entre outros fatores, ao desinteresse por parte dos alunos, as aulas tradicionais e monótonas, falta de estrutura física adequada, ao uso de material didático defasado, a falta de professores qualificados. Em muitos casos, os docentes são desmotivados, mal remunerados, e, por vezes, não têm formação acadêmica na área de matemática, mas atuam na sala de aula como professores de tal disciplina. De acordo com Reis (2016, p.05), “de outro lado, há que se constatar que a já conhecida falta de professores de matemática nas escolas indica que o problema quantitativo não é menos sério que o qualitativo”.

O fato de os alunos terem dificuldades em conceitos básicos sobre funções, como domínio, contradomínio, imagem e gráfico faz com que, ao estudarem funções específicas, como as funções logarítmicas, o processo do ensino de tais funções torne-se desafiador para alunos e professores. Para minimizar essas dificuldades, os professores devem buscar estratégias para que o ensino de funções seja eficiente e interessante para o aluno. Diante disso, o professor pode se fazer valer das ferramentas que estão presentes no dia a dia da comunidade escolar: as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs).

Rodrigues (2016) traz a definição do que seriam as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs). Segundo ele, as TICs são "como o conjunto total de tecnologias que permitem a produção, o acesso e a propagação de informações". As TICs, presentes no cotidiano da sociedade, são usadas de diversas maneiras e por diferentes áreas, como na indústria, no comércio, no setor de investimentos e na educação.

Nesse último, vale ressaltar que as TICs não podem substituir os conhecimentos e as habilidades necessárias para determinados conceitos matemáticos, ou quaisquer áreas do saber. É preciso conectar conhecimentos às aplicações tecnológicas, tornando isso um processo de inserção da tecnologia contemporânea da educação. Não se trata apenas de mera apreciação ou significância vazia do uso da tecnologia, mas de conexão entre conhecimentos e aplicações.

Segundo levantamento feito pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), há no Brasil cerca de 242 milhões de *Smartphones* em uso em um país, com uma população de aproximadamente 214 milhões de pessoas, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A pesquisa mostra ainda que, ao adicionar notebooks e tablets, chega-se ao número de 352 milhões de dispositivos portáteis no Brasil, o que representa, em média, 1,6 dispositivos por pessoa (BRASIL, 2022).

O domímio alcançado pela tecnologia, nos diversos âmbitos da sociedade, não reverbera do mesmo modo no terreno da educação, que parece ainda caminhar a passos lentos na utilização dos recursos tecnológicos disponíveis, acessíveis, reais, palpáveis e facilitadores para o processo de ensino aprendizagem. Os PCNs afirmam que "a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação" (BRASIL, 1998).

As tecnologias estão presentes na vida escolar; usá-las como auxílio para o ensino e aprendizagem dos estudantes, motivação e entendimento de assuntos tidos como mais complexos para os discentes é necessário. Como aponta Reis (2016, p. 5), a utilização de softwares matemáticos proporciona ao aluno visualização, modelagem, simulações, conexões, experimentos e conjecturas em gráficos que representam uma determinada função. Diante disso, o aplicativo GeoGebra se apresenta como ferramenta facilitadora no processo de ensino aprendizagem para o ensino de matemática.

3.3 GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software de matemática gratuito e que pode ser usado em todos os níveis educacionais, pois traz, em sua configuração, geometria, álgebra, planilhas, estatística e gráficos. Oferece ainda, uma plataforma *on-line* com inúmeras funcionalidades (GEOGEBRA.ORG, 2022). Além de software para computadores, o GeoGebra disponibilizou uma versão em aplicativo para *Smartphones IOS* e *Androids* também gratuitos e que após instalado não requer o uso de internet para acessar sua interface. O fato de o aplicativo não precisar de internet possibilita aos alunos e professores uma maior autonomia e praticidade para usá-lo como tecnologia complementar ao Ensino das funções logarítmicas no Ensino de Matemática.

O aplicativo possui, entre muitos comandos, o controle deslizante, comando que facilita o movimento de pontos e gráficos, fazendo que, por meio da construção e manipulação dos gráficos, os alunos vejam as modificações ocorridas nas funções (GOODWIN, 2017, p.50).

O GeoGebra é interativo, fácil de manusear, e é uma ferramenta que auxilia o professor quanto à dinamicidade e praticidade durante as aulas, pois permite construir o gráfico de qualquer função a partir da sua lei de correspondência. Com isso, o professor consegue uma construção perfeita e pode mostrar aos alunos as características fundamentais das funções logarítmicas.

Ao utilizar o GeoGebra como ferramenta visual que permite aos alunos raciocinar e deduzir por si próprios, cria-se um ambiente de maior participação e discussão das informações, favorecendo a motivação no novo objeto de aprendizagem utilizado (MENEGUCI, 2022, p.50). Reafirmando o que disse Meneguci (2022), o uso do GeoGebra propõe que o aluno possa tornar-se o protagonista da construção do seu conhecimento junto com o professor, que deve trazer as bases teóricas dos conteúdos, estabelecendo uma conexão entre o conhecimento e as ferramentas digitais.

O aplicativo traz, dentro da sua funcionalidade, uma interface voltada para a análise das funções, em que o usuário precisa inserir, de forma simples, apenas a lei de correspondência; ele plota o gráfico de imediato. O usuário pode usar o comando de pontos especiais para visualizar os pontos especiais da função, como intersecção com o eixo das abcissas e eixo das ordenadas, pontos de máximo, ou mínimo e, com o comando de controle deslizante, visualizar o crescimento e decrescimento das funções.

O GeoGebra possui uma plataforma online de colaboração com ferramentas de apoio a criação, compartilhamento e utilização de sequências didáticas de diversos assuntos que envolvem Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (MENEGUCI, 2022, p.48). Diante de tantas praticidades, dinamicidades, facilidades e possibilidades que o GeoGebra oferece para o aperfeiçoamento do ensino de matemática e em especial as funções logarítmicas, o seu uso pode e deve ser mais aproveitado pelo professor.

3.3.1 O ensino das funções

O estudo de funções se faz importante e imprescindível, pois possui inúmeras aplicações no cotidiano, desde a escolha de promoção de companhia de telefone móvel, ou no imposto de renda em função do rendimento (PINHEIRO; MAGALHÃES; DA SILVA, 2020). Segundo a definição de função trazida por Lima:

> Dados os conjuntos X, Y uma *função* $f: X \to Y$ *(*lê-se “uma função de X, Y” é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$, $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domíniio e o Y é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$ (LIMA et al., 2016, p.47).

Nos livros de matemática adotados no Ensino Médio a definição de função é apresentada de maneira mais simplificada, porém o professor deve cercar-se da definição técnica, abordando o conceito de função de maneira clara e enfatizando que, como bem lembra Lima et al (2016, p. 48), para ser função, é necessário dispor de três partes indispensáveis e indissociáveis: o domínio, o contradomínio e a lei de correspondência $x \to f(x)$. Espera-se que o aluno do primeiro ano do Ensino Médio compreenda a base do que seja função, ou, pelo menos, os elementos que compõem uma função.

O ensino de funções deve ser ministrado de maneira que os alunos vejam o sentido das aplicações do conteúdo no cotidiano, sempre aproximando o ensino das funções da realidade do aluno, sem renunciar aos conceitos e definições formais, validando, constantemente, os conhecimentos que os estudantes já possuem sobre matemática básica, linguagem algébrica e situações do dia a dia, por exemplo, uma taxa de juros na compra de um aparelho celular. Vejamos o que os PCNs orientam sobre o ensino de funções.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2000, p.121).

Durante a aplicação dos conceitos na resolução dos problemas os alunos têm muitas dificuldades na interpretação dos dados, que passam, invariavelmente, pela tradução da linguagem coloquial para a linguagem algébrica, sendo imprescindível que o aluno adquira logo, quando possível, o entendimento dessa linguagem algébrica, conseguindo reconhecê-la facilmente nas situações-problema.

3.3.2 O ensino das funções logarítmicas

O estudo dos logaritmos como função nos traz aplicações cotidianas, como na matemática financeira, aplicado aos juros compostos; na química, no estudo da desintegração radioativa; na física, usando as leis de resfriamento dos corpos. Isso faz com que esse instrumento de estudo seja de suma importância por trabalhar a interdisciplinaridade na vida escolar.

Uma estratégia que pode ser utilizada pelo professor para o aperfeiçoamento do ensino-aprendizagem das funções logarítmicas é a inserção do uso da tecnologia nas aulas de matemática, assim como a contextualização e a interdisciplinaridade no ensino das funções logarítmicas. Quanto ao uso da tecnologia, Pereira (2021, p.18) afirma: “o estudo de funções com o auxílio da tecnologia, em especial de softwares que plotam gráficos, pode tornar a aula bem mais dinâmica, o que pode propiciar o despertar do interesse do aluno pelo estudo de Matemática”.

Tomando como base a afirmação, pode-se, com isso, superar uma deficiência no ensino das funções logarítmicas, a análise gráfica, pois os softwares auxiliam de maneira objetiva e prática a compreensão e o entendimento das construções gráficas. Haja vista que cada função tem seu gráfico característico e, de posse do entendimento dos conceitos, é possível identificar se é, ou não, uma função logarítmica.

Vale ressaltar que nem só com o uso dos softwares é possível que o aluno consiga entender, aplicar e resolver problemas. Para isso, o professor precisa, antes, certificar-se de que teoricamente, o aluno já alcançou a compreensão dos conceitos e definições, devendo ele mostrar e demonstrar ao aluno as propriedades e especificidades das aplicações das funções logarítmicas no âmbito interdisciplinar.

Ao tempo em que as funções logarítmicas surgiram como uma tecnologia que auxiliaram, dentre outras coisas, no processo das Grandes Navegações, foi possível observar que as tecnologias sempre contribuem para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do conhecimento para a sociedade. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), é preciso compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-los a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas (BRASIL, 1998).

4 PERCURSO METODOLÓGICO

A presente pesquisa, amparada por uma abordagem quanti-qualitativa, delineou um percurso metodológico. Mesmo tendo, em essência, um caráter qualitativo, este estudo comporta dados quantitativos para esclarecer alguns aspectos da questão investigada, partindo das classificações de Marconi e Lakatos (2017), ao procurar conhecer como se dá o ensino de funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra na escola Militar Tiradentes IV, na Cidade de Caxias – MA e como ele aperfeiçoa o ensino de matemática.

Quanto à natureza, trata-se de uma pesquisa aplicada com ênfase, na prática e resolução de problemas, quanto aos meios é uma pesquisa-ação, em que o pesquisador participa diretamente da pesquisa, intervindo no fenômeno estudado e modificando-o. No formato de pesquisa-ação, há a associação entre a teoria e a ação. Dessa forma, os pesquisadores e os participantes da situação, ou do problema, se envolvem de modo cooperativo, ou participativo. Quanto aos fins é intervencionista, pois não apenas explica a realidade estudada, mas também interfere nela para modificá-la (RICHARDSON, 2012, p.92).

No tocante aos procedimentos, foi realizada a leitura e análise da bibliografia que discute a temática e serviu de base para a realização da pesquisa de campo para diagnosticar o modo como se dava o ensino das funções logarítmicas e intervir junto ao objeto de estudo. As bases de dados utilizadas para pesquisar os trabalhos da literatura pertinente foram: Scielo, Google Acadêmico e Lista das Dissertações de Mestrado dos alunos do PROFMAT. A seleção se deu a partir de critérios de inclusão, por trabalhos desenvolvidos no intervalo dos últimos dez anos, com descritores que corresponderam aos objetivos desta pesquisa. Foram excluídos trabalhos acadêmicos produzidos há mais de dez anos, com exceção dos livros e legislação vigente que ultrapassaram esse ínterim.

Mesmo tendo, em essência, um caráter qualitativo, os estudos de caso podem também comportar dados quantitativos para esclarecer algum aspecto da questão investigada. Os métodos correspondem ao problema da pesquisa, ao associarem os interesses e a necessidade da pesquisa. Assim sendo, o método quantitativo, segundo Richardson (2012, p.80) caracteriza-se pela quantificação tanto na coleta, quanto no tratamento dos dados, com técnicas de estatísticas. Em contrapartida, o método qualitativo não recorre a instrumentos estatísticos, apesar de também basear-se no problema, sem medir unidades e categorias, mas busca entender as categorias que compõem um fenômeno social.

A coleta de dados se deu a partir da análise de dois questionários e da oitiva dos participantes, mediante diálogos decorrentes dos encontros durante a realização da oficina. Foi inicialmente abordada a caracterização do local e dos sujeitos envolvidos nesse estudo. Em seguida, se explicitará a aplicação dos instrumentos de coleta de dados por meio dos questionários.

4.1 *Locus* e sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada no Colégio Militar Tiradentes IV na cidade de Caxias – MA, no período de 12 a 26 de setembro de 2022. A escola citada foi escolhida para servir de base para o desenvolvimento da pesquisa a partir do tracejar do perfil buscado para o desenvolvimento da oficina “O ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra”. Tal perfil buscou um universo de alunos que não tivessem ainda nenhum conhecimento sistemático acerca da temática que foi desenvolvida, para ser possível conhecer como deve ser realizado o ensino das funções logarítmicas com, ou sem, o uso de tecnologia e outros problemas que são inerentes ao ensino de matemática descritos a seguir.

No turno vespertino, horário em que foi realizada a oficina, a escola conta com quatro turmas de primeiro ano. Após conversa com a direção, coordenação e o professor de Matemática da referida escola, a turma selecionada para o desenvolvimento do projeto foi o 1º Ano D. Os critérios de seleção dessa turma deveram-se às dificuldades dos alunos com baixo rendimento, desatenção e entraves no processo de ensino aprendizagem na disciplina de Matemática, segundo relatos do professor.

Os sujeitos da pesquisa foram, no total, 20 alunos, com faixa etária entre 15 e 17 anos. Por essa razão, foi necessário que os pais e/ou responsáveis concedessem sua participação por intermédio de um termo de consentimento livre e esclarecido que foi assinado por eles, autorizando a participação dos filhos na oficina e em todas as atividades referentes a ela (o termo segue no Apêndice A).

4.2 Instrumentos de investigação

A coleta de dados foi realizada com a aplicação de dois questionários semiestruturados, aplicados em dois momentos: no início da oficina e no final de sua realização, pretendendo, ao fim, conseguir estabelecer uma comparação entre a prática do ensino das funções logarítmicas, a partir de definições de funções, e a utilização da tecnologia por meio do aplicativo GeoGebra. Os dois questionários, diagnóstico e o avaliativo, foram aplicados pela plataforma *Google Forms*. O questionário diagnóstico contou com seis perguntas: quatro objetivas e duas subjetivas, e o questionário avaliativo, contou com sete perguntas: uma de caráter objetivo e as demais em linhas da subjetividade (conforme consta no Apêndice B e C respectivamente).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A oficina objetivou conhecer o ensino das funções logarítmicas com o uso da tecnologia com o uso do aplicativo GeoGebra. Para o desenvolvimento da oficina, foram traçados os seguintes objetivos específicos: identificar as dificuldades no ensino de matemática; diagnosticar a compreensão do estudo de funções e funções logarítmicas; usar o aplicativo GeoGebra para o Ensino das funções logarítmicas; realizar a resolução de questões-problema das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra e apontar como as funções logarítmicas são cobradas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O projeto foi realizado no período de 12 a 26 de setembro de 2022, com um universo de 20 sujeitos, na faixa etária entre 15 e 17 anos, que participaram da oficina efetivamente, respondendo aos dois questionários, participando da realização das atividades, fazendo-se presentes aos encontros que aconteceram no turno vespertino, no horário das aulas de Matemática. A carga horária da oficina correspondeu à 24 horas de encontros presenciais com aulas teóricas e práticas, ensinando as definições, aplicações e contextualizações das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra, valendo-se da amplitude do conteúdo para desenvolver o ensino de matemática como prática interdisciplinar.

A construção do planejamento para a realização da oficina se valeu da organização pedagógica com a seguinte sequência didática de conteúdos e objetivos:

1) Quanto aos conteúdos: noções de funções e os logaritmos; as propriedades operatórias dos logaritmos e funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra; a resolução de problemas com o auxílio do aplicativo GeoGebra; resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra.

2) Quanto aos objetivos: verificar o conhecimento sobre funções; definir funções; relacionar a definição formal de função com o cotidiano; conhecer o contexto histórico da criação dos logaritmos; entender a definição de logaritmos; compreender a relação entre logaritmos e equações exponenciais; aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos; identificar as condições de existências das funções logarítmicas; aprender funções logarítmicas; conhecer o aplicativo GeoGebra; entender o comportamento das funções logarítmicas por meio do aplicativo GeoGebra; modelar problemas relacionados às funções logarítmicas no aplicativo GeoGeobra; analisar o manejo do aplicativo com relação ao estudo das funções logarítmicas; resolver problemas usando o aplicativo GeoGebra; averiguar o entendimento das funções logarítmicas a partir do uso do aplicativo GeoGebra.

Planejar deve ser um ato de via dupla, momento em que o professor, conhecedor da realidade da sala de aula, precisa garantir que os conteúdos que serão trabalhados correspondam a objetivos claros e que as metodologias escolhidas respondam a esses objetivos dentro do processo ensino-aprendizagem com foco no aluno.

> O planejamento é um fator indispensável no processo educativo, uma vez que vários aspectos precisam ser considerados, como a disposição curricular dos conteúdos e as condições prévias de aprendizagem dos alunos, qual metodologia é adequada de acordo com a realidade educacional, bem como se o modelo de assimilação e contextualização dos conteúdos são favoráveis ao desenvolvimento da aprendizagem, conforme objetivos pré-fixados (PRATES; BARBOSA, 2020, p.8).

Como afirma Libâneo (2006, p.241), planejar é um ato imprescindível para a organização do ensino, considerando que é durante a aula que o professor tem a oportunidade de criar situações, ou trazer situações problema da realidade do aluno para a sala de aula, de modo que os alunos consigam assimilar ativamente os conhecimentos, e assim ocorra o desenvolvimento cognitivo.

A pesquisa foi caracterizada em quatro fases distintas e complementares, a saber: 1) o diagnóstico, através do primeiro questionário; 2) explanação do aporte teórico; 3) a prática amparada na resolução de questões e no uso do aplicativo GeoGebra e 4) a avaliação por meio do segundo questionário. Os questionários aplicados aos sujeitos da pesquisa constituíram-se de perguntas semiestruturadas, abertas e fechadas. Essa sequência se dará na análise e discussão dos dados para melhor compreensão dos resultados da pesquisa.

5.1 Questionário diagnóstico

O questionário diagnóstico foi disponibilizado antecipadamente para que o professor responsável pela turma repassasse via grupo de *WhatsApp*, e os alunos respondessem pela plataforma *Google Forms*, como assim o fizeram.

Nesse primeiro questionário, foram disponibilizadas seis questões que ajudaram a traçar o perfil dos alunos quanto ao uso das tecnologias no ensino de matemática, o entendimento sobre funções, a capacidade de contextualizar o ensino-aprendizagem de funções e saber se eles já tinham estudado logaritmos. Os sujeitos participantes da pesquisa serão representados pela letra A referente a alunos e pela ordem numérica de 01 a 20, sempre que necessário, a fim de que se garanta o anonimato dos participantes. Vale ressaltar que a grafia das respostas dos alunos não foi corrigida nos questionários diagnóstico e final.

Sobre o ensino de funções, uma das perguntas buscou apurar o que os alunos entendiam por função, questionando: “O que você entende por função?”. As respostas foram as mais diversas e apontaram, entre outras situações, o desconhecimento total por parte de alguns entrevistados acerca de função, como pode ser observado a seguir.

A01 – "." (o aluno respondeu apenas com um ponto); A02 – *"É um conjunto de dois elementos"*; A03 – *"Relações de conjuntos"*; A04 – "*E um conjunto de dois elementos"*; A05 – *"não usei"*; A06 – *"Representação do dia a dia"*; A07 – *"O básico, porém não lembro muito do assunto"*; A08 – *"Que é um conjunto numérico a um único elemento de um outro conjunto numérico"*; A09 – *"Função é uma regra da matemática que junta os elemento do domínio com o condomínio"*; A10 – *"Só um pouco"*; A11 – *"Eu entendo quê é estabelecida entre duas variáveis, às funções podem ser injetora, sobrejetoras, bijetoras e simples. Relacionado cada elemento de outro conjunto quê é x a um único elemento de outro conjunto quê é y. Não sei se tá certo"*; A12 – "*Dois conjunto que se relacionam chamados de domínio e contradomínimo"*; A13 – *"Função é uma regra quem relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro"*; A14 – *"Acredito que função é uma regra que relaciona cada elemento, de um conjunto a um único elemento de outro"*; A15 – *"Acredito que função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto, a um único elemento de outro"*; A16 – *"Não sei"*; A17 – *"Um valor depende do outro"*; A18 – "…" (o aluno respondeu com reticências); A19 – "." (o aluno respondeu apenas com um ponto); A20 – "." (o aluno respondeu apenas com um ponto) (O autor, 2022).

Geralmente nos livros de Matemática adotados no Ensino Médio, a definição de função é apresentada de maneira mais simplificada, como exemplifica o livro adotado na escola do referido projeto, quando define: "dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma relação que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B" (BONJORNO, 2020 p.13). Porém, o professor deve cercar-se da definição técnica, abordando o conceito de função de maneira clara e enfatizando que, como bem lembra Lima et al (2016, p.48), para ser função, é necessário dispor de três partes indispensáveis e indissociáveis: o domínio, o contradomínio e a lei de correspondência $x \rightarrow f(x)$.

Espera-se que o aluno do primeiro ano do Ensino Médio compreenda a base do que seja uma função, ou, pelo menos, os elementos que compõem uma função. A BNCC não traz, de forma objetiva, as habilidades que o aluno deva desenvolver ao estudar a definição de função. O que o documento preconiza objetivamente são habilidades específicas de determinadas funções, como função afim, quadrática, exponencial e logarítmicas (BRASIL, 2017). É necessário que o estudante tenha desenvolvido habilidades que garantam a ele o reconhecimento dos elementos que compõem uma função e as condições para que ela exista, possibilitando que ele tenha entendimento necessário e suficiente para dar continuidade aos estudos sobre tais funções.

Nenhum dos alunos compreendiam, de fato, a definição do que era função, porém, como podemos observar nas entrevistas dos A03, A09, A11, A12 e A13, A14 e A15, que têm respostas repetidas (A13, A14 e A15), eles alcançam, ainda que de modo superficial, e confuso, o conhecimento de alguns elementos que compõem as funções, mostrando que a deficiência referente às definições formais e aos elementos fundamentais para o entendimento do conteúdo das funções são evidentes e preocupantes, no que tange ao ensino de matemática, pois eles precisam entender e compreender a definição de função, estando eles no nível de ensino que se encontram, ensino médio.

Quando em um universo de 20 alunos, apenas sete (sendo que destes três se repetem) demonstram algum nível de entendimento acerca do conteúdo de funções, fica perceptível a falta das habilidades fundamentais que esses alunos não adquiriram sobre o entendimento de definição de função. Tais habilidades estão preconizadas pela BNCC, fazem parte da prática da aprendizagem, evidenciando que estes procedimentos quanto ao ensino de funções precisam ser reavaliados.

Em estudos sobre a contextualização do ensino de matemática, Silva e Oliveira (2017, p. 5) enfatizam que o contexto em que o aluno está inserido pode dar condições para que ele desenvolva habilidades conforme suas experiências de vida, pautando a Matemática com o cotidiano e a interdisciplinaridade, fazendo com que o aluno a veja não de forma isolada, mas como ferramenta indispensável para diversas áreas do conhecimento.

Partindo desse pressuposto, uma das inferências do questionário visou conhecer a percepção dos alunos quanto ao processo de contextualização do ensino de funções, pedindo que citassem uma situação do cotidiano que pudesse ser modelada por função. As respostas estão listadas abaixo.

A01 – “.” (o aluno respondeu apenas com um ponto); A02 – *“Velocidade de um carro”*; A03 – *“Não sei”;* A04 – *“Fazer a atividade de matemática”*; A05 – *“nao sei”*; A06 – “*Quando for abastecer o carro”*; A07 – *“controle de custos”*; A08 – “*Resolução de problemas como dividir um biscoito com os seus irmãos”*; A09 – *“Sinceramente não sei te responder”*; A10 – *“Valor de um pão "y"”*; A11 – *“1. Caio tem 4 anos a mais quê Selena é juntos possuem 18 anos: x= idade da Selena x + 4= idade Caio Equação: x+(×+4)=18 2×+4=18 2×=18- 4 2×=14 ×=14/2=7”*; A12 – “?”; A13 – *“Ao abastecemos, uma moto no posto de gasolina ,o preço a ser pago depende da quantidade de litros de combustível colocado no tanque”*; A14 – *“Ao abastecemos uma moto, no posto de gasolina o prea ser* *pago depende da quantidade de litros de combustível colocado no tanque"*; A15 – *"Ao abastecemos uma moto no posto de gasolina o preço a ser Pago depende da quantidade de litros de cada colocado no tanque"*; A16 – *"Não sei"*; A17 – *"observação gráficos em Jornais e revistas"*; A18 – *"..."* (o aluno respondeu apenas com reticências); A19 – "." (o aluno respondeu apenas com um ponto); A20 – "." (o aluno respondeu apenas com um ponto) (O autor, 2022).

Quando se parte para a pesquisa de determinado objeto de estudo, do lugar de pesquisador carregam-se muitas hipóteses, durante a coleta de dados por meio do questionário, que é uma ferramenta que individualiza a participação do sujeito pesquisado, algumas dessas hipóteses não chegam a ser alcançadas pelo fato da resposta do indivíduo pesquisado ser uma variável não controlável (LAKATOS; MARCONI, 2017 p.217). As respostas dos alunos A01, A03, A5, A09, A16, A18, A19 e A20, por exemplo, que continham entre "ponto", "reticência" e "não sei", apresentaram a necessidade de outro olhar para o objeto estudado, reconfigurando os caminhos dessa pesquisa.

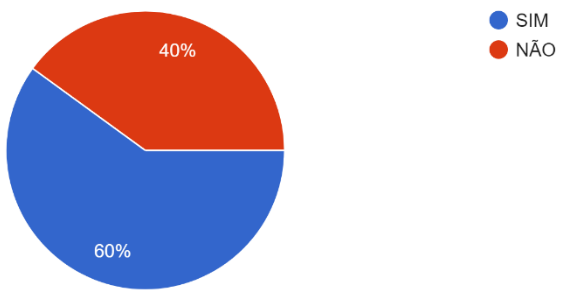
Sem conseguir precisar o significado, ou sentido das respostas apontadas pelos alunos citados acima, durante a realização da oficina, acredita-se que eles não souberam como modelar a aplicação de função em seu cotidiano, pois não conheciam nenhuma relação entre o ensino das funções e a realidade que os rodeavam. Práticas balizadas no ensino tradicional podem ser um dos fatores de influência negativa para o processo ensino-aprendizagem quanto às funções, haja vista que o uso de métodos tradicionalistas se mostram ineficazes "pois levam o aluno apenas a desenvolver a memorização e repetição dos conteúdos ministrados, sem que o mesmo possa perceber a real necessidade de se aprender" (SILVA; OLIVEIRA, 2017 p. 4).

Analisando holisticamente, os alunos apontam as respostas de modo confuso, reafirmando que, de fato, não aprenderam como aplicar as definições de funções no cotidiano. Indubitavelmente, se a teorização for ministrada de forma meramente conteudista no mundo abstrato da matemática, sem relação entre a definição de função e situações vivenciadas, o aluno acabará por desenvolver bloqueios que o impedirão de aprender os conteúdos de maneira satisfatória (SILVA; OLIVEIRA, 2017, p.8). Desde que as definições não sejam apreendidas efetivamente, a compreensão do ensino das funções e a aplicabilidade desse ensino no cotidiano não serão alcançadas pelos alunos.

Ao versar sobre o uso das tecnologias e o estudo de logaritmos, a coleta e análise dos dados deu-se de forma quantitativa. De tal forma, procedeu-se às seguintes perguntas: "Você conhece algum aplicativo, ou software usado como ferramenta para estudar matemática?" "O que você acha do uso da tecnologia para estudar matemática?” “Você já usou o GeoGebra para estudar matemática?” “E sobre logaritmos, você já estudou logaritmo?”

Sobre o uso de tecnologias na educação, os dados coletados no questionário mostram porcentagens por vezes discrepantes, entre a demanda e a realidade do uso das TICs como auxílio para o ensino de matemática. Quando perguntados se conheciam algum aplicativo/software usado como ferramenta para estudar matemática, os alunos responderam conforme resultados apresentados no Gráfico 01:

Gráfico 01 - Software usado para o estudo da matemática.



Fonte: O autor (2022).

Mais da metade dos sujeitos participantes da pesquisa conhecem algum aplicativo, ou software que pode ser utilizado para o ensino de matemática, contribuindo para a superação de um ensino fragmentado, descontextualizado e distante da realidade desses alunos que se tornam cada vez mais dependentes das tecnologias.

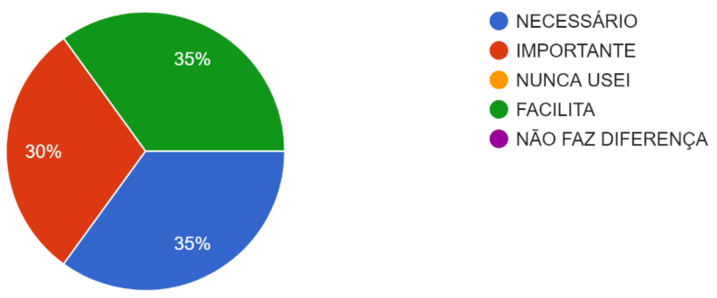
> A utilização de software no processo de ensino e aprendizagem da matemática é uma recomendação curricular importante, considerada uma contribuição significativa no sentido de promover a compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de relacionar a investigação de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização, os processos argumentativos e a modelação (PACHECO, 2019, p. 4).

Ao considerar que os alunos têm conhecimento de aplicativos, ou softwares que os possibilitem compreender o ensino aprendizagem de matemática, o professor deve buscar estratégias para inserir esses aplicativos, ou softwares, para dinamizar e contextualizar as aulas, modelando as definições abstratas e aproveitando os benefícios e facilidades que a tecnologia oferece para o ensino de matemática. Quanto aos alunos que desconhecem as ferramentas, cabe também ao professor apresentá-las.

As tecnologias estão presentes na vida escolar, e usá-las como auxílio para o ensino e a aprendizagem dos estudantes, como motivação e entendimento de assuntos tidos como mais complexos para os discentes é algo necessário. Como aponta Reis (2015, p. 5), a utilização de softwares matemáticos proporciona ao aluno visualização, modelagem, simulações, conexões, experimentos e conjecturas.

Referente à pergunta seguinte sobre o que os alunos achavam quanto ao uso da tecnologia para estudar matemática, os dados ficaram concentrados quase de forma igualitária entre três critérios: necessário, importante e facilita. Os resultados apresentados no Gráfico 02, mostraram que os alunos participantes da pesquisa têm uma consciência crítica em relação a necessidade, possibilidade e dinamicidade que o uso da tecnologia pode agregar ao ensino de matemática.

Gráfico 02 - O uso da tecnologia para estudar matemática



Fonte: O autor (2022).

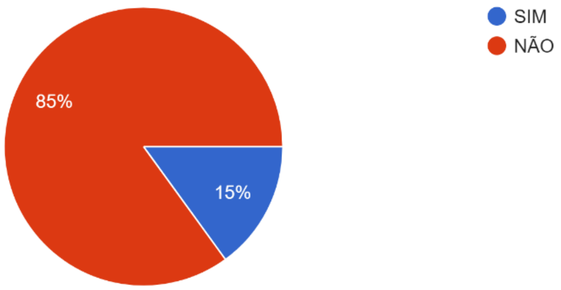
Ressalta-se que nenhum dos sujeitos responderam que o uso da tecnologia para estudar matemática não faz diferença, ou “nunca usei”, respostas que estavam disponíveis na mesma pergunta. Tal fato aponta que, apesar da necessidade e interesse por parte dos alunos, essas tecnologias não se fazem presentes no ambiente escolar, pairando muito mais nos discursos teóricos do que efetivamente, na prática do ensino de matemática.

Entre os aplicativos utilizados para o ensino de matemática, o GeoGebra foi o selecionado para a aplicação deste projeto, por dispor de um leque abrangente de conteúdos matemáticos, como Geometria, Estatística e Álgebra, por ser gratuito, estar disponível nos modelos *Android* e *IOS*, e, após instalado, não necessitar de internet para o uso. Sobre o GeoGebra:

> Ele possibilita a realização de construções fundamentadas em conhecimentos matemáticos, explorando a imaginação, criatividade e investigação de quem o utiliza. O app é de fácil manuseio, e pode ser utilizado em diversas séries da Educação Básica facilitando o desenvolvimento e a compreensão de conteúdos matemáticos (SILVA, 2022 p.43).

Diante dessas facilidades e da possibilidade de inserir a tecnologia para auxiliar no ensino de matemática por meio do aplicativo GeoGebra, foi perguntado aos alunos se eles já haviam usado o GeoGebra para estudar matemática. Os resultados podem ser observados no Gráfico 03.

Gráfico 03 - Uso do GeoGebra.

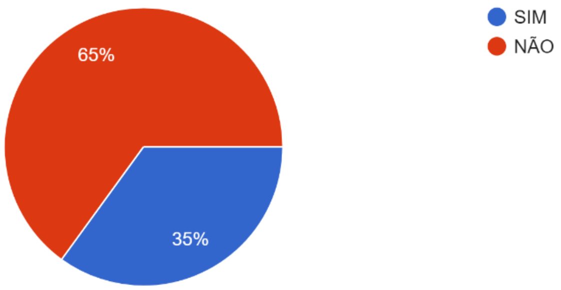


Fonte: O autor (2022).

Apenas três alunos responderam de modo afirmativo, estabelecendo um paralelo entre o Gráfico 01 e o Gráfico 03. Isso aponta que, dos 12 alunos que conhecem algum aplicativo (Gráfico 01), apenas três já utilizaram o GeoGebra como ferramenta para ter auxílio no estudo de matemática. Tal episódio comprova que a tecnologia para o ensino de matemática não está sendo aproveitada de maneira eficiente, uma vez que os alunos têm acesso a ela pelo celular, mas, em sala de aula, não é usada com o propósito educacional.

Conforme preconizado no DCTM, as funções logarítmicas estão inseridas no currículo do 1º Ano do Ensino Médio, recorte no qual foi desenvolvida a pesquisa. Para conhecer o entendimento prévio dos alunos sobre o objeto da pesquisa, perguntou-se aos participantes se já haviam estudado funções logarítmicas. Os resultados seguem no Gráfico 04:

Gráfico 04 - Estudo das funções logarítmicas



Fonte: O autor (2022).

Do total pesquisado, treze alunos afirmaram que nunca estudaram o referido conteúdo, entretanto os sete alunos que responderam já terem estudado sobre funções logarítmicas, inquestionavelmente, não estudaram neste ano letivo, nesta turma, pois podem ser repetentes, ou transferidos de outras escolas onde já tenham estudado este conteúdo. Mesmo os que já haviam estudado sobre funções logarítmicas afirmaram, em conversa, que nunca usaram nenhum tipo de tecnologia que lhes possibilitasse uma melhor compreensão do conteúdo ministrado.

Após analisar as respostas do questionário diagnóstico, alguns pontos precisaram ser modificados e repensados para a realização da oficina, como os objetivos das aulas e os conteúdos a serem desenvolvidos, que foram replanejados. Os resultados mostraram que os sujeitos envolvidos na pesquisa apresentavam dificuldades em conteúdos que são pré-requisitos para o estudo das funções logarítmicas e que precisavam ser superadas para que os objetivos da oficina fossem alcançados, como exemplo, as noções e definição de função.

5.2 Desenvolvimento da proposta da oficina

Propor o ensino das funções logarítmicas sempre foi o princípio norteador para a realização da oficina “O ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra”, pensada e replanejada, após análise do questionário diagnóstico e conversa com os alunos, que ajudaram a identificar algumas problemáticas e dificuldades inerentes ao ensino de matemática, que ainda se faz de modo arcaico, conteudístico e preso a memorização.

Aplicada por uma abordagem diferente da usual, construindo as definições e o conhecimento junto com os alunos, usando a tecnologia por meio do aplicativo GeoGebra para trabalhar esses conhecimentos, na prática de resolução de problemas, a oficina trouxe mudanças satisfatórias para o ensino-aprendizagem de matemática.

No primeiro contato com os alunos com os quais a oficina foi realizada, o professor responsável teve o cuidado de me apresentar à turma para que eu me familiarizasse com o ambiente e com os discentes. Esse contato foi importante para a construção do planejamento, pois foi nessa conversa informal que eles falaram como se dava o ensino de matemática e como esperavam que esse ensino fosse ministrado para que tivessem um melhor aproveitamento na disciplina. A partir dessas informações, foram reelaborados os planos da oficina (apresentados nos Apêndices D, E, F, respectivamente).

Os primeiros conteúdos abordados na oficina foram as noções de funções e os logaritmos. Os objetivos delineados para o entendimento desses conteúdos foram: verificar o conhecimento sobre funções; definir funções; relacionar a definição formal de função com o cotidiano; conhecer o contexto histórico da criação dos logaritmos; entender a definição de logaritmos e compreender a relação entre logaritmos e equações exponenciais.

O caminho trilhado para alcançar esses objetivos partiu sempre da perspectiva de uma problematização de dado conteúdo, da construção de hipóteses dos alunos e explanação do conhecimento sistematizado, possibilitando a construção de conhecimento junto com os alunos.

Na abordagem inicial, foi pedido que os alunos explanassem suas dificuldades em relação ao ensino de matemática. Os participantes relataram que as aulas de matemática, ao longo dos anos, foram monótonas, com uma aplicação tradicional dos conteúdos e resolução de exercícios que não lhes despertavam interesse, ou não aguçavam sua criatividade, sem haver contextualização sobre o conteúdo abordado e suas vivências, apontando ainda a incompreensão das regras e definições de alguns conteúdos, em especial, funções.

Para iniciar a oficina, provocou-se a atenção dos participantes por meio de indagações, que ajudaram a avaliar o conhecimento deles em relação aos conceitos que seriam usados mais adiante. Quando perguntados sobre o que era uma grandeza, eles, ainda de forma tímida, não souberam responder. Quando dada a definição de grandeza matemática, embasada em Dante (2015), “Grandeza é tudo que pode ser medido ou contado”, foi pedido que dessem exemplos de grandeza. Então começaram a falar: “velocidade”; “hora” (tempo); “distância”; “idade”; mostrando que entenderam a definição.

De posse da definição de grandezas, fizeram exercícios sobre as noções intuitivas quanto ao conteúdo de funções, fazendo relações entre velocidade e tempo, consumo de energia elétrica e valor a ser pago, criando uma noção intuitiva de função como relação entre duas grandezas, explicando que para constituir uma função, são necessários dois conjuntos e uma regra de acordo com as grandezas/conjuntos, que diz como associar uma grandeza/conjunto ao outro. Após construir os conhecimentos sobre noções intuitivas, relacionando-os ao cotidiano, foi dada a definição formal de função já apontada anteriormente neste texto.

Foi apresentado aos participantes o contexto histórico das Grandes Navegações e desenvolvimento da Astronomia, que impulsionaram a criação dos logaritmos como ferramenta para facilitar cálculos, tais como transformar produtos em soma. Simplificando a explicação, relacionaram-se os conceitos de progressão aritmética (P.A) e progressão geométrica (P.G) para mostrar na prática como eram realizadas as transformações de multiplicações em adições. Para esse exemplo, foi utilizada a seguinte tabela com uma P.A de primeiro termo 1 e razão 1 com uma P.G de primeiro termo 2 e razão 2.

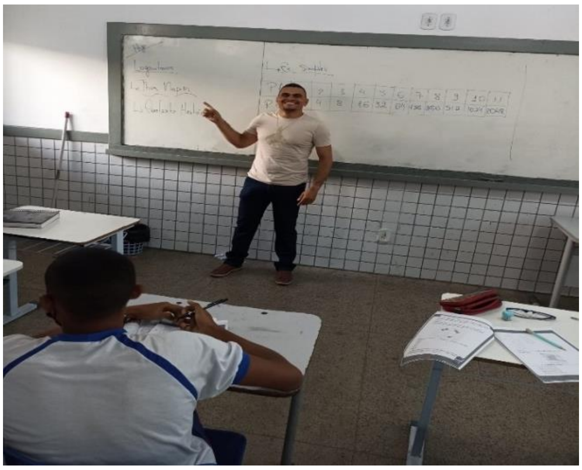
P.A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P.G	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Fonte: LIMA (2016, p. 7).

Foi explicado que, de posse do dispositivo, para efetuar o produto $64x256$, por exemplo, basta que se verifique, na primeira linha, os valores correspondentes ao 64 e ao 256 e então efetuar uma simples soma. Dessa forma, teríamos: $6 + 8 = 14$. Assim, bastava ver que o número na segunda linha associado ao 14 é 16394. Logo, $64x256 = 16394$.

Logo abaixo, seguem figuras do primeiro encontro da oficina, dos momentos da apresentação da Tabela P.A e P.G e das definições de logaritmo.

Figura 02 - Apresentação da tabela de P.A e P.G para os alunos



Fonte: O autor (2022).

Figura 03 - Definição de logaritmo apresentada na oficina

Fonte: O autor (2022).

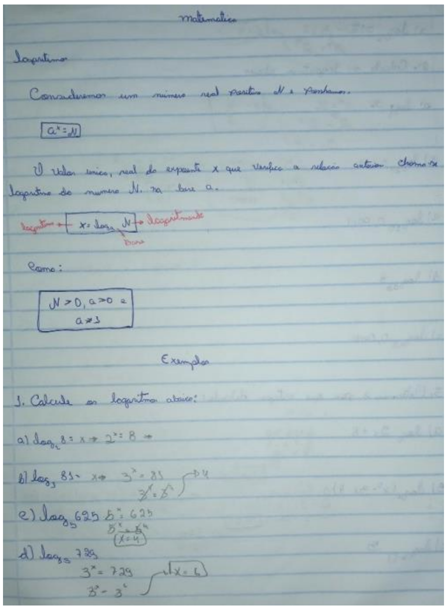
Após mostrar o funcionamento do dispositivo, verificou-se que o fato chamou a atenção da turma, pois os alunos reagiram, fazendo uma comparação do dispositivo apresentado com uma calculadora atual. Então foi pedido a eles que efetuassem algumas multiplicações, usando a tabela. Enquanto faziam a atividade, pontuaram que, de fato, para a época, o método utilizado facilitava as operações.

Dada a introdução do contexto histórico, foi apresentado de maneira intuitiva a noção de logaritmo com a equação exponencial $2^x = 3$. Posteriormente foi definido logaritmo, baseado em Iezzi, Dolce, Murakami (2004, p.57): Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Em símbolos:

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então: $\log_a b = x \iff a^x = b$.

Foi proposto a eles responderem a seguinte pergunta: "A que expoente deve-se elevar a base 4 para que se obtenha 64?" De maneira satisfatória, um número considerável da turma deu a resposta esperada, 3 (três). Foi explanado a eles que o que fizerem foi resolver $\log_4 64$, de forma intuitiva. Com isso os alunos compreenderam a definição de logaritmo. De posse da definição, foram explicadas as condições de existência dos logaritmos e resolvidos alguns exemplos elementares como $\log_2 8$, como pode ser visto na Figura 04 abaixo:

Figura 04 - Resolução de atividade 01



Fonte: O autor (2022).

Ao término do encontro foi solicitado aos participantes que avaliassem a aula, o conteúdo e sua abordagem. Alguns relataram por escrito: A07 "Eu gostei da forma como foi abordado o dispositivo com P.A e P.G”; A13 “a aula de hoje foi muito boa, assunto muito bom, professor muito gente boa e atencioso passou o assunto de forma simples e fácil”. Para o encontro seguinte, foi sugerido que os alunos instalassem o aplicativo GeoGebra, para que se familiarizassem com sua interface.

A retomada do conhecimento construído na aula anterior deu início ao segundo encontro, com os seguintes objetivos: aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos; identificar as condições de existências das funções logarítmicas; aprender funções logarítmicas; conhecer o aplicativo GeoGebra; entender o comportamento das funções logarítmicas com o aplicativo GeoGebra, para contemplar os seguintes conteúdos: “as propriedades operatórias dos logaritmos” e “funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra”, trabalhados nesse encontro.

Nessa aula, foram apresentadas e explicadas sistematicamente as consequências da definição e as propriedades de logaritmos, além de terem sido demonstradas todas as propriedades dentro da oficina. Foram dados exemplos das aplicações de todas as propriedades apresentadas.

Foi explicado que, dada a definição de logaritmos, por Iezzi, Dolce, Murakami (2004, p.60-61) decorrem as seguintes consequências e propriedades para $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$.

Quanto as consequências

O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0.$$

O logaritmo da base em qualquer base é igual a 1.

$$\log_a a = 1.$$

A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Dois logaritmos, em uma mesma, base são iguais se, e somente se, os logaritmos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c.$$

Quanto as propriedades:

Logaritmo do produto:

$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c.$

Logaritmo do quociente:

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$

Logaritmo de potência:

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b$.

Durante as demonstrações das propriedades, os alunos sentiram dificuldades de compreensão, em virtude, dos termos algébricos e por não terem familiaridade com demonstrações, uma vez que, relataram que os professores não demonstravam propriedades, apenas apresentavam e davam exemplos de aplicações com números e não na forma algébrica.

Esse fato evidencia lacunas no conhecimento, por parte dos alunos, sobre termos algébricos para aplicar nas demonstrações, conhecimento esse que eles precisavam ter adquirido desde o 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, baseado no currículo dessa esfera de ensino, quando estudaram as expressões e termos algébricos.

Ao resolver exemplos nos quais se aplicavam as propriedades, os alunos também sentiram dificuldades quanto à manipulação com as operações básicas de multiplicação, divisão, potenciação e principalmente fatoração, mais uma evidência de que as habilidades elementares, que deveriam dominar desde o ensino fundamental, não foram construídas consistentemente. Para tanto, foi necessário que se repetissem os procedimentos mais de uma vez e se resgatassem, brevemente, esses conteúdos, para que fosse possível prosseguir com a oficina.

Definida função logarítmica, consoante o livro didático adotado pela escola, Prisma matemática: funções e progressões:

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada Função Logarítmica (BONJORNO, 2020, p.99).

Após a definição, foi explicado o significado de cada termo da definição das funções logarítmicas, o domínio ($\mathbb{R}_+^*$ conjunto dos números reais não negativos), o contradomínio e a imagem ($\mathbb{R}$ conjunto dos números reais), enfatizando as condições de existências dos logaritmos quanto à base a (um número positivo e diferente de 1) e o logaritmando x (um número positivo). Os alunos não entenderam as definições técnicas, devido todos os problemas que vêm sendo apontados nessa pesquisa. Uma vez mais, foi repetida toda a explicação, desde os significados dos símbolos matemáticos, os conceitos fundamentais para a compreensão da definição de função, explanando quais os significados de domínio, contradomínio e imagem e a lei de correspondência, que, nas funções logarítmicas, transformam produtos em soma, por exemplo. Isso diminuiu as confusões de entendimento por parte dos alunos.

Foram trazidas à luz da discussão, as formas de representação das funções logarítmicas, por meio de uma equação matemática, ou graficamente, enfatizando que cada função tem sua característica quanto ao gráfico e as funções logarítmicas, em particular possuem, como característica fundamental, não tocar o eixo das ordenadas do plano cartesiano (Oy).

Foi explicado também, sobre o crescimento e decrescimento das funções e que as funções logarítmicas, quando na forma algébrica (equação), podem ser crescentes (quando a base $a > 1$), ou decrescentes (quando $0 < a < 1$). Graficamente, analisam-se os elementos do domínio, que estão representados no eixo das abscissas (Ox) em relação aos elementos da imagem, representados no eixo das ordenadas (Oy), orientando-os que observassem o que acontecia com os valores no eixo (Oy) quando os valores de (Ox) aumentavam. Concluindo que, quando os valores de (Ox) e de (Oy) aumentam juntos, a função é crescente, e quando os valores de (Ox) aumentam e os de (Oy) diminuem, a função é decrescente.

Alguns dos alunos entenderam o processo, e isso só foi possível após a retomada das noções básicas, que foram trazidas ao longo das aulas. A busca por explicação mais simples sobre termos muito técnicos para eles e, sobretudo, a abstração matemática contribuíram, efetivamente, para eles superarem algumas de suas dificuldades de Matemática.

Sobre as aplicações das funções logarítmicas no cotidiano, retomou-se a explicação de que elas servem para modelar fenômenos que crescem, ou decrescem lentamente, como o crescimento de um caracol. Foram apresentadas aplicações quanto à interdisciplinaridade, como no cálculo de juros compostos em Matemática Financeira, cálculo do pH, estudado na Química, a lei de resfriamento dos corpos, vista na Física e para calcular a intensidade dos abalos sísmicos estudados na Geografia. Com essa vasta aplicação em diversos campos do saber, o estudo das funções logarítmicas despertou interesse e curiosidade dos alunos.

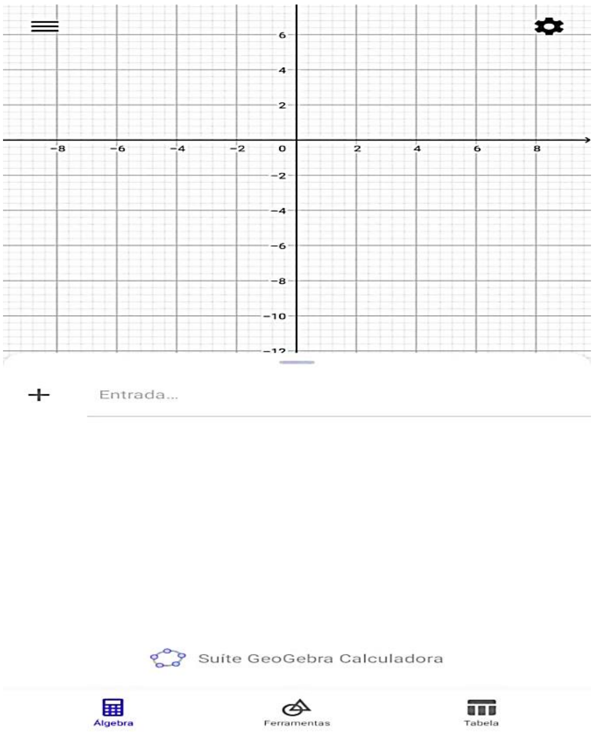
Após construir o aporte teórico com os alunos, com muitas dificuldades, lentidão e com dúvidas que persistiram acerca do estudo das funções logarítmicas, principalmente sobre a interpretação gráfica e as condições de existência da função, a fim de minimizar a abstração do ensino das funções logarítmicas, começamos a usar o aplicativo GeoGebra, que os alunos já tinham instalado em seus celulares. Foi explicado que o GeoGebra serve para inúmeras aplicações dos conteúdos matemáticos e que eles poderiam depois explorar as demais funcionalidades, mas que, naquela oportunidade, iríamos utilizar a parte específica de funções logarítmicas dentro do aplicativo.

Para iniciar o ensino das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra, foi explicado que a parte algébrica está conectada diretamente à parte gráfica e que, ao digitar a função no campo “entrada”, o gráfico seria exibido logo acima. Diante disso, foram dadas as seguintes instruções: (I) Abra o aplicativo GeoGebra, (II) Toque na opção entrada, aparecerá um teclado virtual dividido em quatro partes: numérica (1,2,3), funções ($f(x)$), teclado alfabético (A, B, C) e o alfabeto grego (#&), (III) vá à opção $f(x)$ e escolha o ícone que representa logaritmo, (IV) digite a base da função logarítmica (a) e no parêntese digite o logaritmando da função (x).

As figuras abaixo mostram a interface e os comandos listados acima para a utilização do GeoGebra como os alunos utilizaram durante a oficina:

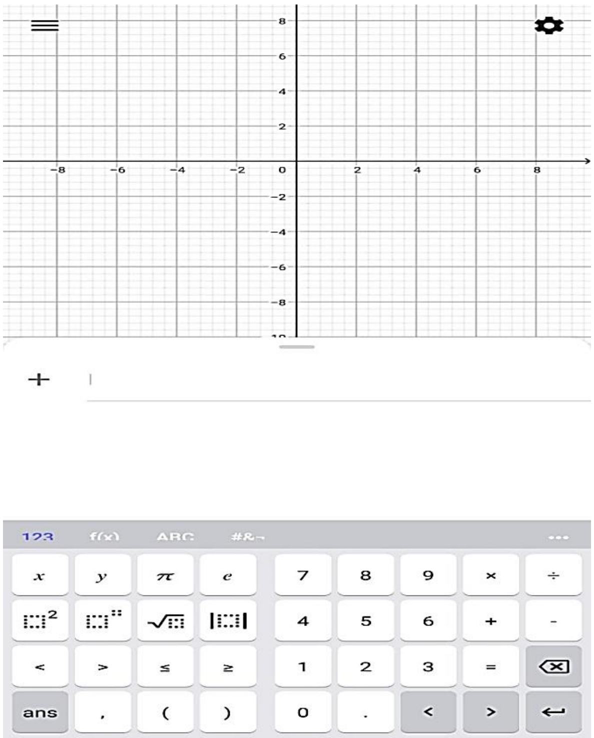
Inserir as figuras de 05 a 13, respectivamente.

Figura 05 - Interface de entrada



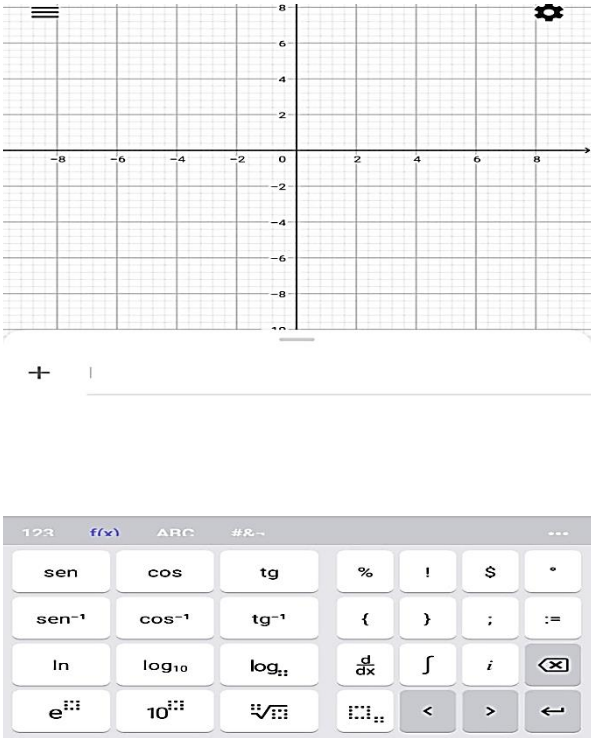
Fonte: O autor (2022).

Figura 06 - Interface do teclado numérico



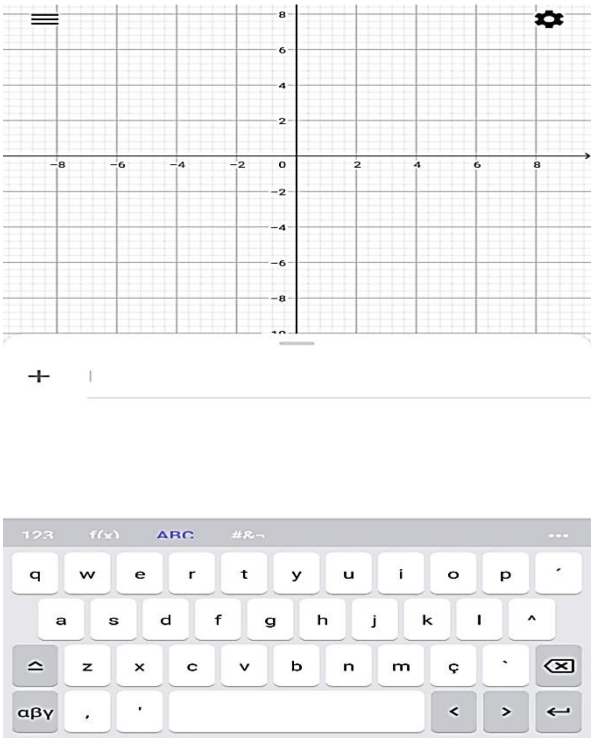
Fonte: O autor (2022).

Figura 07 - Interface das funções



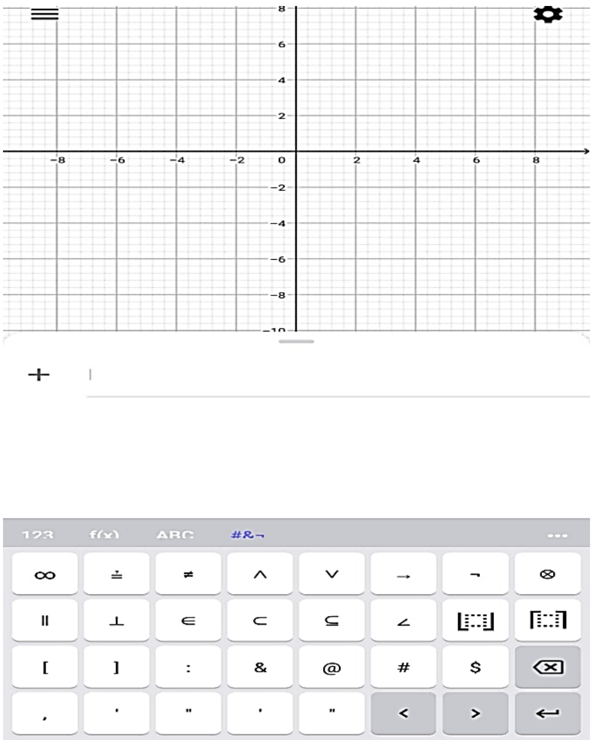
Fonte: O autor (2022).

Figura 08 - Interface do teclado alfabético



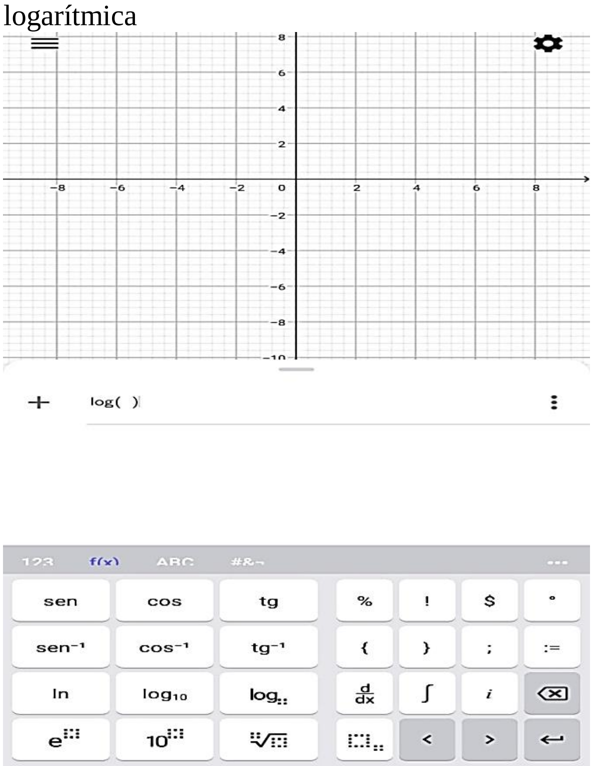
Fonte: O autor (2022).

Figura 09 - Interface do alfabeto grego



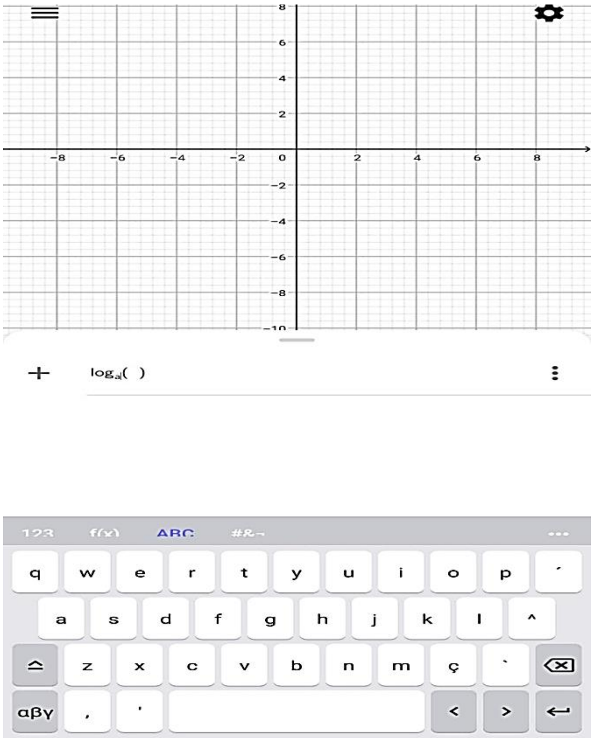
Fonte: O autor (2022).

Figura 10 - Interface de inserção da função logarítmica



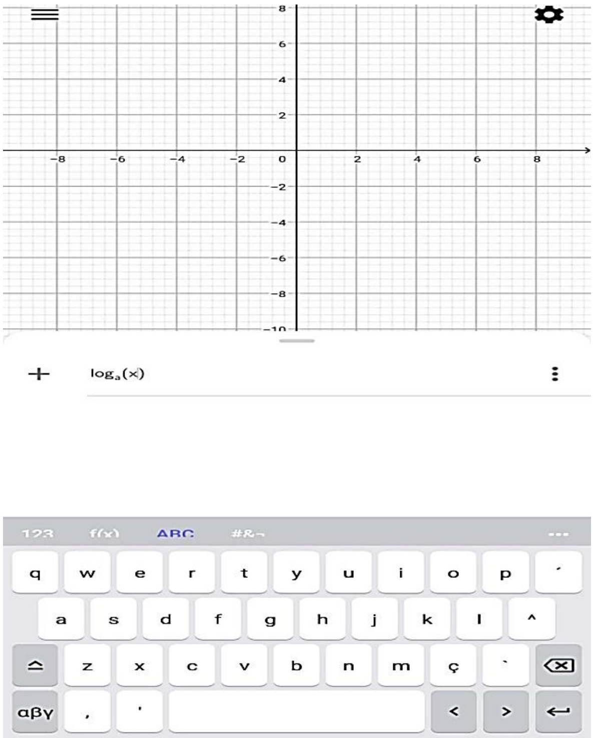
Fonte: O autor (2022).

Figura 11 - Interface da inserção da base da função logarítmica



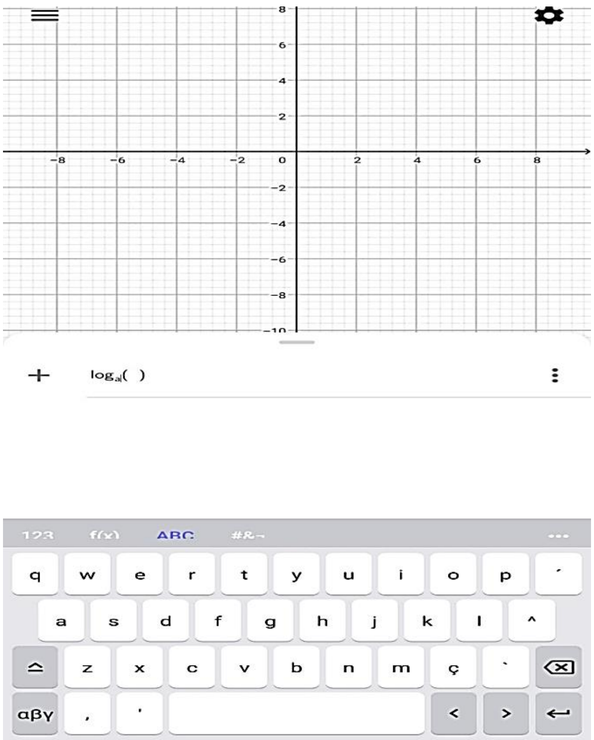
Fonte: O autor (2022).

Figura 22 - Interface da inserção do logaritmando da função logarítmica



Fonte: O autor (2022).

Figura 33 - Interface da função logarítmica de base a.



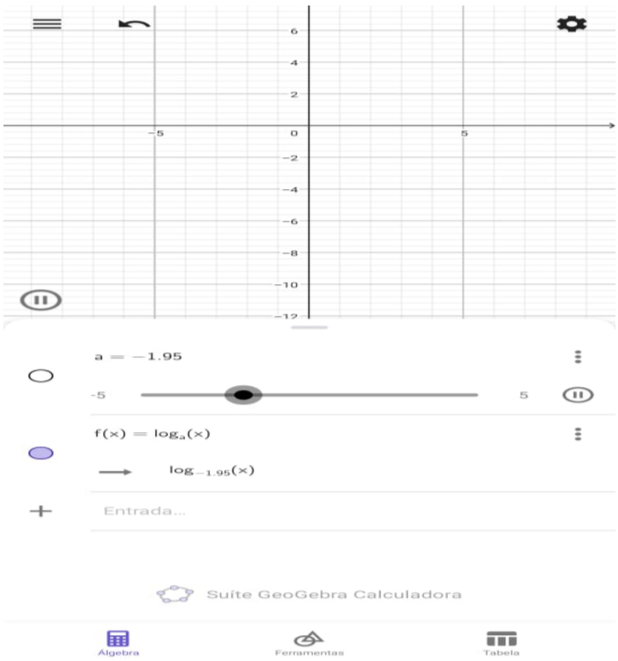
Fonte: O autor (2022).

Foi solicitado aos alunos que descrevessem oralmente o que estava na interface do aplicativo representado na Figura 13, ao que responderam que tinha dado alguma coisa errada, porque não aparecia nenhum gráfico, apareceu um $a = 1$ e uma "barra" com menos cinco (-5) e cinco (5). Diante disso, foi explicado a eles que essa barra era o controle deslizante que mostrava o que acontecia com o gráfico quando a base (a) variava no intervalo de $(-5$ a $5)$, na forma de animação como se fosse um vídeo.

Foi pedido que tocassem no ícone "*play*", para que vissem a animação e observassem atentamente o que acontecia quando o controle deslizante passava pelo intervalo mostrado e o gráfico da função logarítmica. Ao que responderam: A01 – "o gráfico muda de um lado para o outro"; A02 – "o gráfico aumenta e diminui"; A03 – "o gráfico fecha e abre"; A04 – "o gráfico some". De posse das respostas, utilizou-se a última para pedir a eles que dessem uma pausa, quando o fato ocorresse, e observassem a interface do aplicativo.

Ao fazer isso, foi solicitado que dessem o valor que aparecia na base da função logarítmica. Os que deram a pausa no momento correto relataram, entre outros valores, "-1,95"; "-2,31; -0,42; -2,47; -3,9". Perguntado o que esses números tinham em comum, responderam que eram todos negativos. A partir daí, escrevi no quadro a definição de funções logarítmicas, para que observassem e fizessem a análise entre a definição e a parte gráfica, enfatizando que a definição dizia que a base do logaritmo (a) tem que ser sempre positiva $(a > 0)$. Portanto, quando esse valor era negativo, a função deixaria de existir, como exemplifica a Figura seguinte:

Figura 44 - Interface do aplicativo do A07

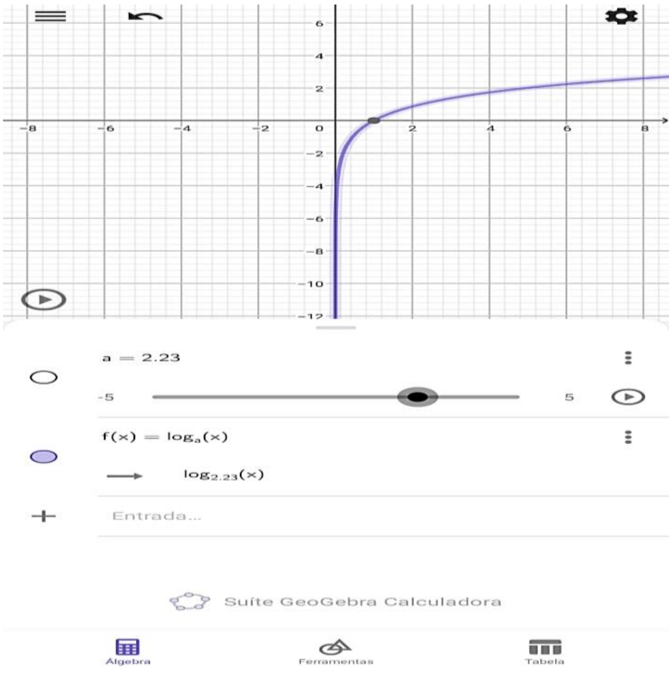


Fonte: O autor (2022).

Dando prosseguimento à aula, foi explicado que a base das funções logarítmicas, além de garantir a existência da função, define se a função é crescente ($a > 1$), ou decrescente ($0 < a < 1$). Para que eles visualizassem isso no gráfico, pediu-se para que deslocassem o ponto no controle deslizante para um valor maior que um ($a > 1$), analisassem e dessem seu depoimento quanto ao gráfico da função.

Apontaram que o gráfico "ficou na parte de cima do lado direito". Foi solicitado que analisassem o gráfico com relação aos valores do eixo das abscissas (Ox) com o eixo das ordenadas (Oy). Eles perceberam e relataram que o "gráfico sobe". Com essa ideia intuitiva, explanei que essa era a ideia de função crescente, que, à medida que os valores de (Ox) aumentam, os valores de (Oy) também aumentam. Veja na Figura15.

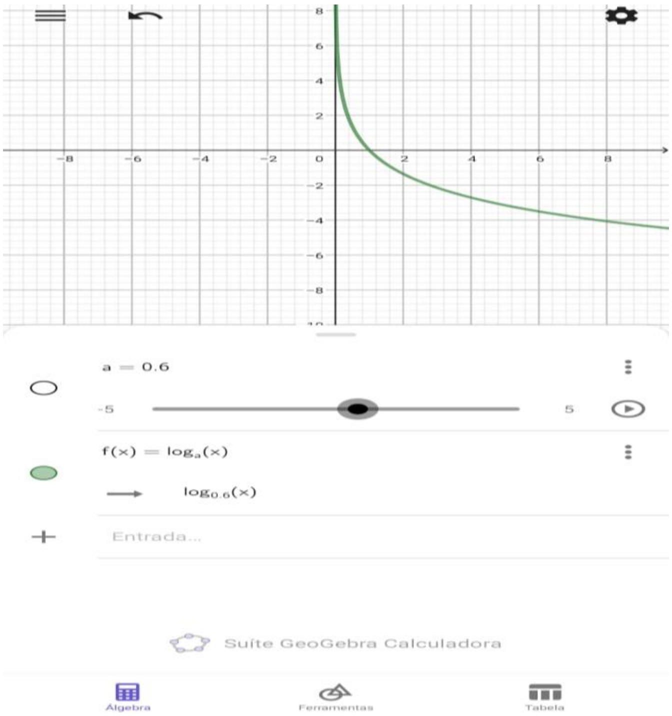
Figura 55 - Interface do aplicativo do A15



Fonte: O autor (2022).

De maneira análoga, fizemos a análise para os valores da base maiores que zero e menores que um ($0 < a < 1$) Figura 16, mostrando que à medida que os valores de (x) aumentam, os valores de (y) diminuem. Fixando, assim, o conceito de funções decrescentes.

Figura 16 - Interface do aplicativo do A04



Fonte: O autor (2022).

Para que os alunos compreendessem melhor a definição, a existência, o comportamento e as características das funções logarítmicas, foram analisados, no aplicativo, a definição dada anteriormente, usando os termos algébricos para que juntos analisássemos e discutíssemos o comportamento gráfico. Desse modo seria alinhada à parte teórica à gráfica (visual), para comprovar as teorias abordadas.

Para o último encontro, planejaram-se as aplicações das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra na resolução de problemas com os seguintes objetivos: modelar problemas relacionados as funções logarítmicas no aplicativo GeoGeobra; analisar o manejo do aplicativo com relação ao estudo das funções logarítmicas; resolver problemas usando o aplicativo GeoGebra; averiguar o entendimento das funções logarítmicas, a partir do uso do aplicativo GeoGebra, para contemplar o conteúdo resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra.

Em virtude do pouco tempo disponibilizado, os problemas escolhidos foram de aplicações imediatas, mas todos contextualizados. Para resolvê-los, os alunos precisaram aplicar e identificar os elementos das funções apresentadas durante a realização da oficina para prosseguir no processo de ensino aprendizagem das funções logarítmicas. Os problemas propostos foram retirados do principal exame para acesso ao nível superior, o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM de diferentes anos da aplicação do exame (Anexo 01).

A aula foi iniciada fazendo uma revisão geral dos conteúdos abordados durante os encontros anteriores, destacando os elementos, definições e aplicações das funções logarítmicas. Após essa abordagem, foram resolvidos exemplos no quadro, explicando-os e pedindo auxílio dos alunos quanto à modelagem e os elementos que correspondiam às funções. Na resolução da questão, aplicamos definição, propriedades operatórias das funções logarítmicas e operações elementares de Matemática. Para estabelecer uma comparação e mostrar as facilidades do uso das tecnologias, resolveram-se os mesmos exemplos, usando o aplicativo GeoGebra. A seguir, são apresentados os exemplos resolvidos no quadro, como podem ser vistos na Figura17.

Exemplo 01: Durante os estudos sobre o crescimento de uma determinada árvore, foi possível modelar o crescimento dela no decorrer do tempo por meio da função $A(t) = 1 + \log_3(5 + t)$, em que t é o tempo em anos e $A(t)$ é a altura em metros. Sendo assim, qual a altura dessa árvore, após 4 anos?

Figura 17 - Resolução do exemplo 01

Fonte: O autor (2022).

Resolução: observa-se que $t = 4$, logo o problema pede a imagem da função, quando o elemento do domínio for 4. Assim:

I: $A(t) = 1 + \log_3(5 + t)$

II: $A(4) = 1 + \log_3(5 + 4)$

III: $A(4) = 1 + \log_3 9$

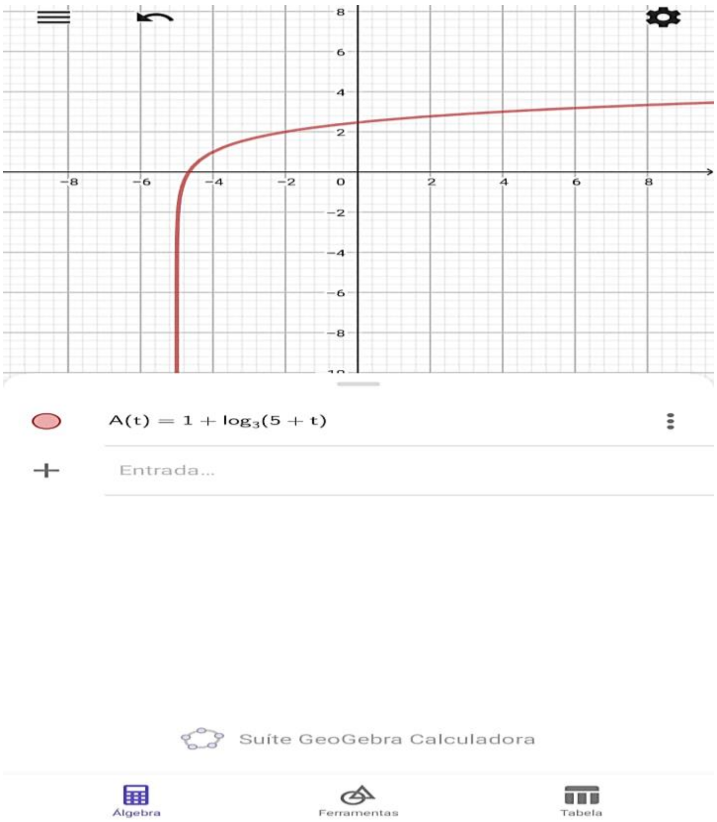
IV: $A(4) = 1 + 2$

V: $A(4) = 3$

Dessa forma, a altura da árvore decorridos 4 anos será de $3m$. Na linha (III) da resolução, foi aplicada a definição de logaritmo. Durante a resolução, os alunos participaram na identificação dos dados do problema, porém não conseguiram relacioná-los aos elementos das funções, como imagem e domínio. Foi preciso explicar que $A(t)$ representava a imagem pelo elemento do domínio (t), e a lei de correspondência era $1 + \log_3(5 + t)$, que diz como estes elementos estão relacionados. Outra dificuldade encontrada foi na resolução de equações. Alguns alunos não compreenderam, então foi realizada uma breve revisão sobre resolução de equações do primeiro grau.

Após resolver manualmente, orientou-se que resolvessem então no aplicativo GeoGebra. Para isso, foram dadas as instruções: digitar a função no campo “entrada”. Veja Figura 18.

Figura 6 - Interface do exemplo 01 no aplicativo do A13

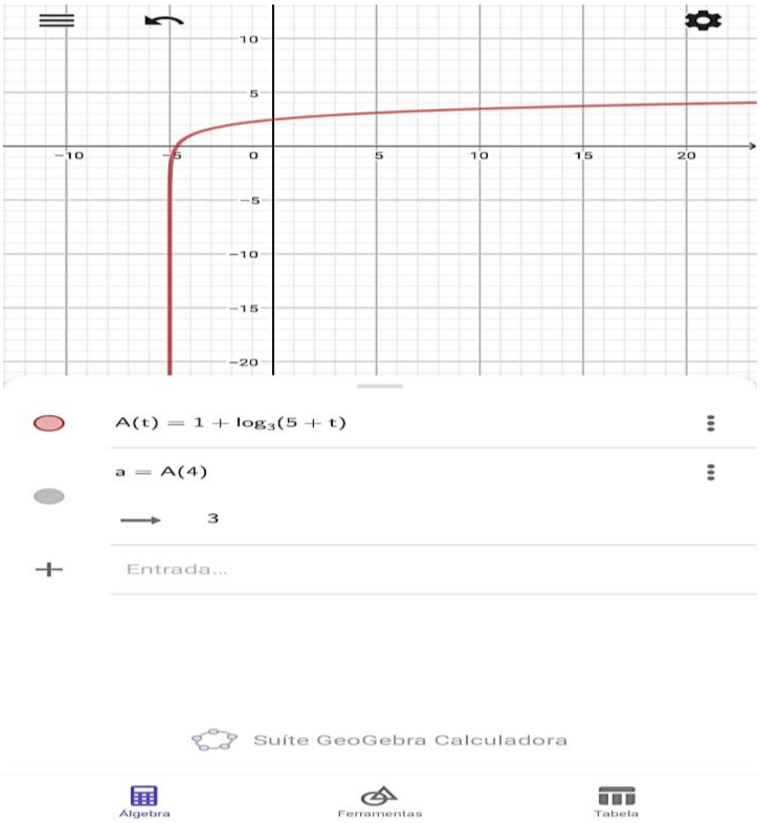


Fonte: O autor (2022).

Perguntou-se quanto à função ser crescente, ou decrescente, para cerificação de que tinham entendido esses conceitos. De modo satisfatório, muitos alunos responderam que era uma função crescente, pois a base era 3, e três é um número maior que 1, mostrando que entenderam esse conceito.

Com a função na interface, instruiu-se que digitassem a $imagem$ que o problema pedia pelo elemento do domínio $A(4)$ na entrada seguinte. Logo, constataram que o aplicativo já apresentava, imediatamente a resposta da referida questão (Figura 19). Eles disseram que a resolução manual foi simples, mas no GeoGebra foi muito rápido e mais fácil. Foi explicado que o aplicativo facilita, mas é preciso que eles entendam as definições e saibam quais são os elementos das funções para poder usá-los no aplicativo.

Figura 19 - Interface do exemplo 01 no aplicativo do A13



Fonte: O autor (2022).

O exemplo seguinte trouxe mais dificuldade de manipulação para resolução.

Exemplo 02: O volume de um reservatório em função do tempo é dado em litros pela função: $v(t) = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1)$. Considere que $t \geq 1$, e t é dado em dias e $v(t)$ é dado em litros. Sendo assim, após quantos dias o volume da piscina será de 284 litros?

A resolução do exemplo 02, eles acharam muito difícil, por terem que usar as propriedades de potências com expoente negativo e por terem mais contas a serem solucionadas. Eles apresentaram dificuldades nos processos de resoluções das equações, sendo necessário repeti-las mais de uma vez. No aplicativo GeoGebra, as dificuldades foram para inserir a fração na base do logaritmo e a confusão, por parte de alguns, sobre onde inserir os dados para a resolução dos problemas, pois a questão dava um elemento do conjunto $imagem$ e pedia o correspondente no $domínio$. Novamente foi explicado que $v(t)$ representava o eixo dos y e t representava o eixo dos x, que as frações são divisões e que só precisavam digitar $1:2$ que o aplicativo entenderia como fração.

Resolução:

$v(t) = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$284 = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$284 - 300 = 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$-16 = 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1) : (4)$

$-4 = \log_{\frac{1}{2}}(t-1)$, aplicando a definição de logaritmo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = t - 1$

$2^4 = t - 1$

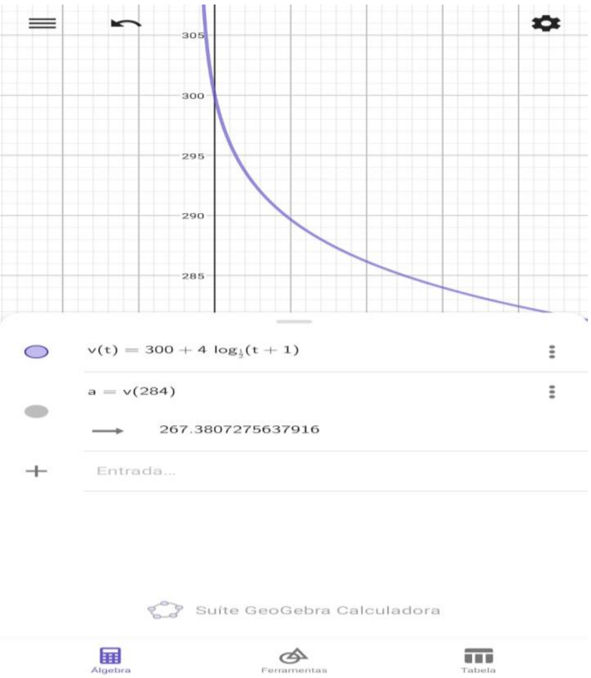
$16 + 1 = t$

$17 = t$

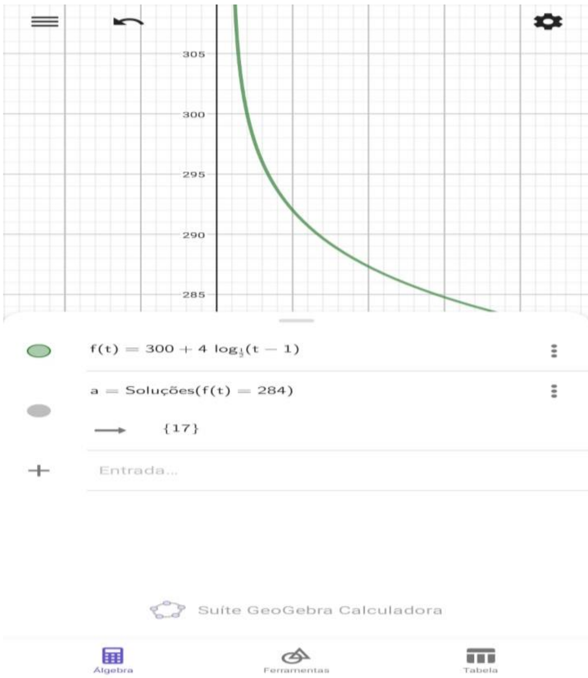
Resolução no GeoGebra: No campo "entrada", digitar a função logarítmica. No próximo campo "entrada" digitar a palavra "solução" e digitar entre os parênteses $v(t) = 284$ para obter a resposta. Alguns alunos erraram a questão pelo fato de não inserirem a equação corretamente no campo "solução", ou inserirem os dados, de acordo com o problema 01, trocando o elemento da $imagem$ pelo elemento do $domínio$. Ver as Figuras 20 e 21:

Figura 20 - Interface do exemplo 02 no aplicativo do A08

Figura 7 - Interface do exemplo 02 no aplicativo do A02



Fonte: O autor (2022).



Fonte: O autor (2022).

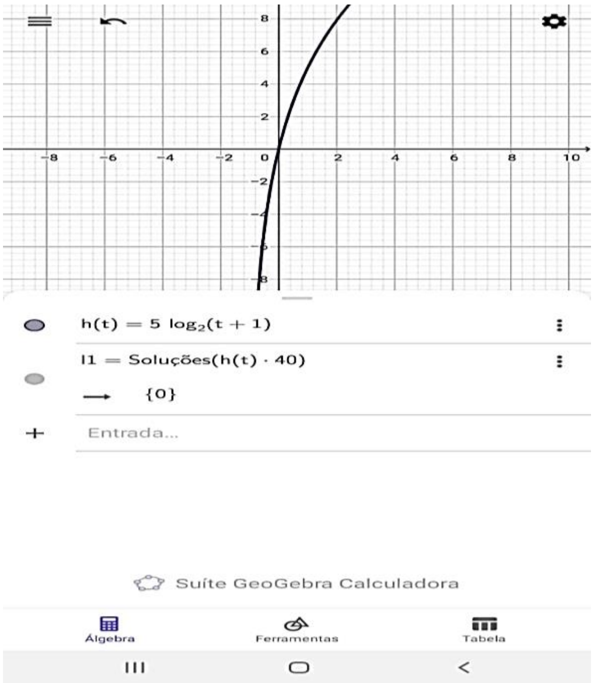
Após resolver e explicar a resolução pelo aplicativo GeoGebra, disponibilizaram-se os problemas propostos (Anexo 01). Aqui foram apresentados apenas três dos problemas propostos, pois não houve tempo hábil para resolver, dentro da oficina, as demais questões.

Análise dos problemas propostos

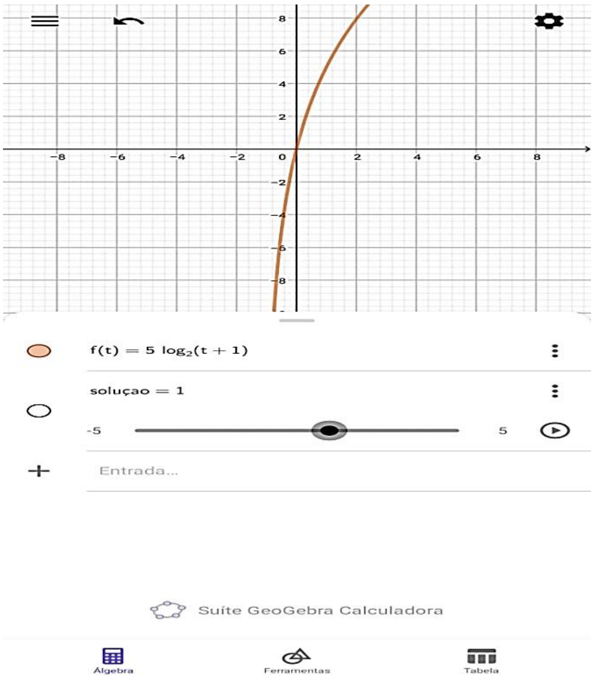
Problema01: (Enem 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h(t) = 5.\log_2(t+1)$, em que t é o tempo contado em dia e $h(t)$, a altura da planta em centímetro. A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima?

Figura 8 - Interface do problema 01 no aplicativo do A04

Figura 9 - Interface do problema 01 no aplicativo do A09



Fonte: O autor (2022).



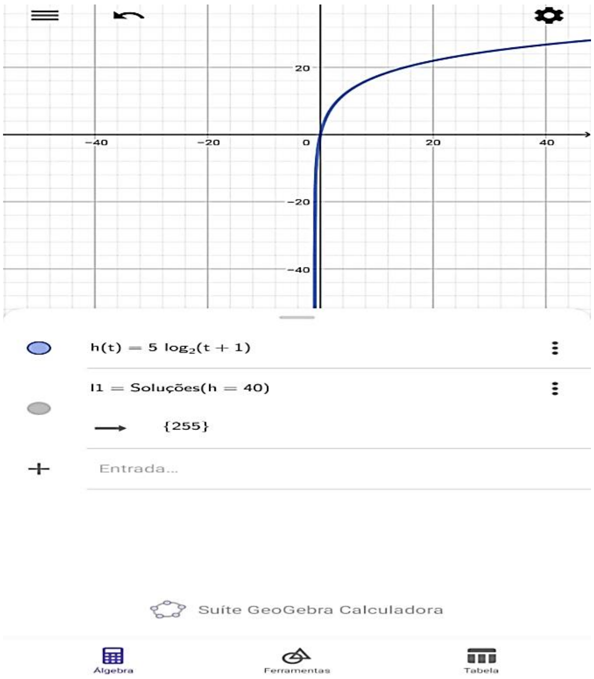
Fonte: O autor (2022).

Nas Figuras 22 e 23, vemos duas resoluções erradas resolvidas no aplicativo GeoGebra. O erro deu-se no momento da digitação quando digitou (.) em vez de (=) no campo “solução”, enquanto o outro não digitou a função. Ainda assim, nas figuras 22 e 23, os alunos souberam quais elementos da função logarítmica a questão pedia, pois digitaram o comando “solução”, mostrando que compreenderam que o problema pedia o elemento do domínio através da imagem.

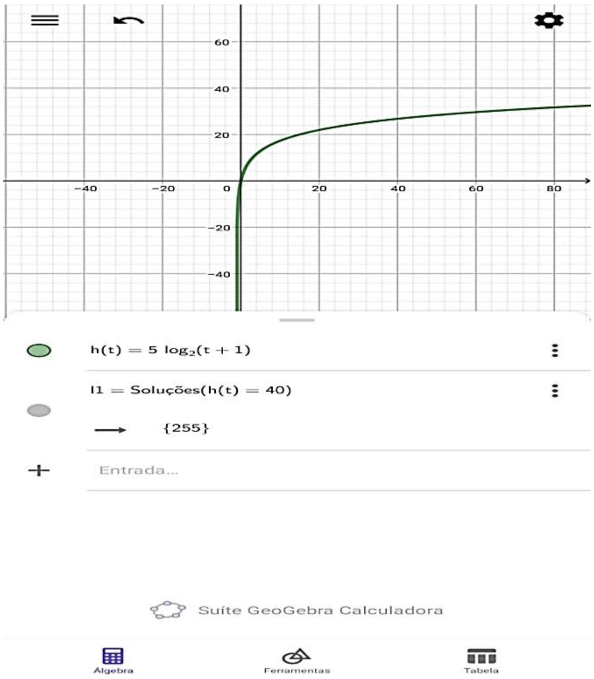
O mesmo problema foi resolvido corretamente por 75% da turma. Tais participantes entenderam o manejo do aplicativo e compreenderam a relação entre os dados do problema e os elementos das funções, alinhando corretamente teoria e prática, como pode ser visto nos dois exemplos abaixo.

Figura 10 - Interface do problema 01 no aplicativo do A10

Figura 115 - Interface do problema 01 no aplicativo do A16



Fonte: O autor (2022).

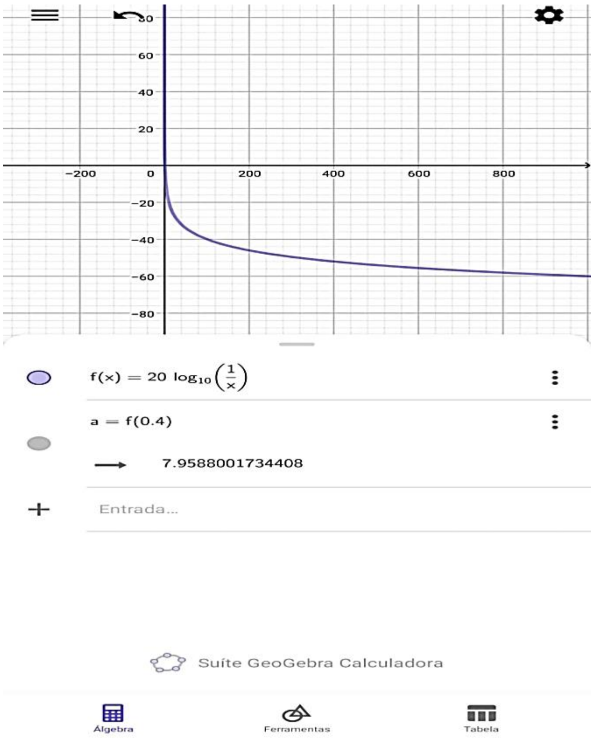


Fonte: O autor (2022).

Os problemas 02 e 03 apresentam resoluções parecidas. Serão apresentados os enunciados dos problemas e as resoluções dos alunos, logo em seguida serão feitas as análises de ambas as resoluções.

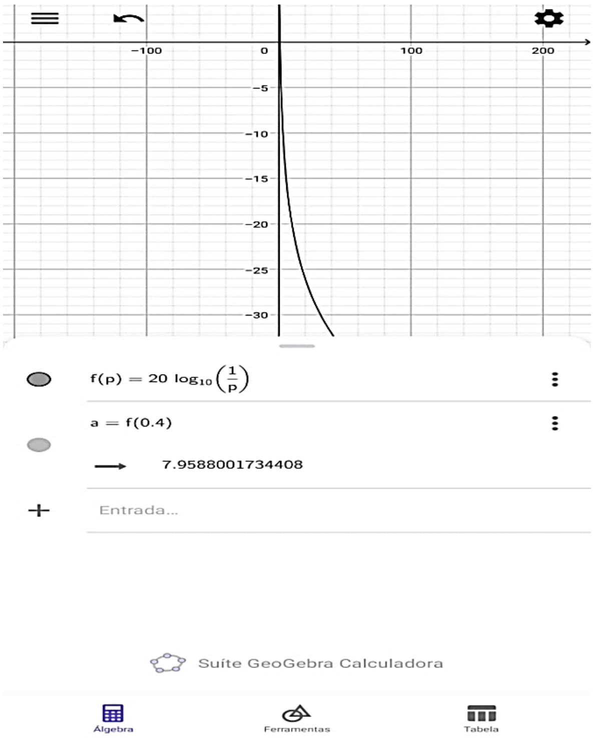
Problema02. O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por: $h = 20.\log_{10}\frac{1}{p}$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0{,}3$, qual a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros?

Figura 12 - Interface do problema 02 no aplicativo do A02



Fonte: O autor (2022).

Figura 137 - Interface do problema 02 no aplicativo do A07

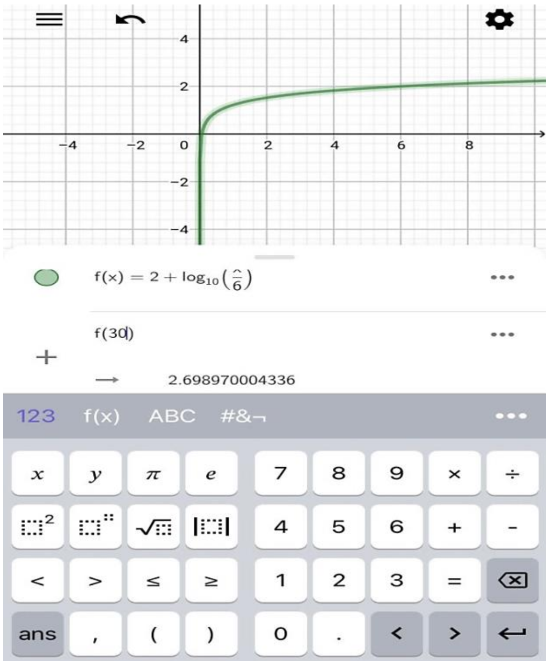


Fonte: O autor (2022).

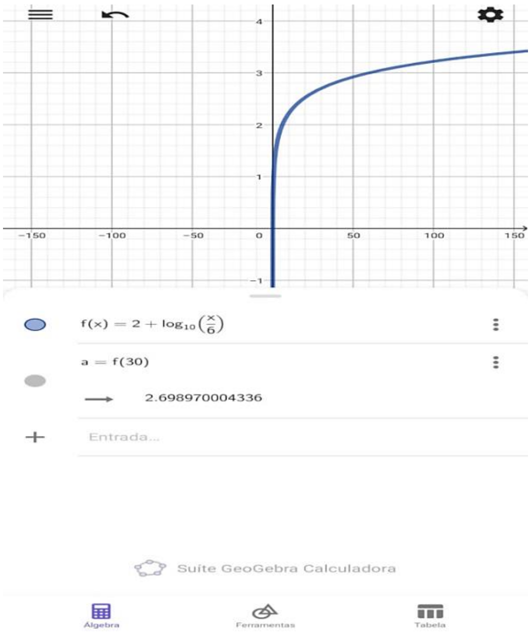
Problema 03. O tempo, em minutos, que um medicamento leva para fazer efeito em uma pessoa é dado pela função: $f(x) = 2 + \log_{10}\left(\frac{x}{6}\right)$. Considere que x é a idade e f(x) é o tempo em minutos. Em um paciente que possui 30 anos, qual o tempo necessário para que esse remédio faça efeito?

Figura 14 - Interface do problema 03 no aplicativo do A11

Figura 15 - Interface do problema 03 no aplicativo do A17



Fonte: O autor (2022).



Fonte: O autor (2022).

Os problemas 02 e 03 foram resolvidos corretamente pelos alunos, com menos dificuldade para inserir a função no aplicativo, dominando melhor os comandos, compreendendo onde inserir os elementos do domínio. O fato de comprovarem que conseguiram responder corretamente, despertou motivação entre eles; comparavam os resultados entre si e pediram mais questões para resolverem.

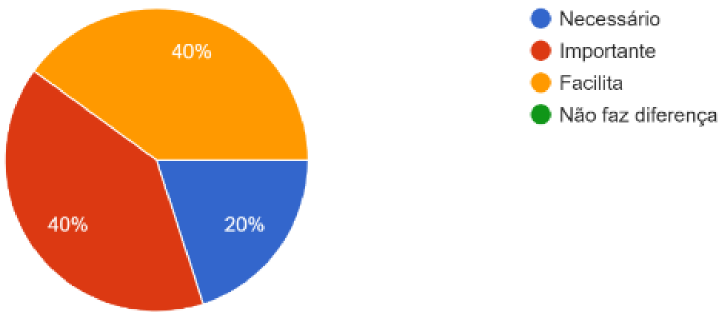
Chegado ao final da oficina, era perceptível que a turma estava diferente da turma que iniciou a oficina. Os alunos estavam mais envolvidos na aula, prestavam mais atenção, participavam dando opiniões e resolviam problemas com e sem o uso da tecnologia. Tal resultado comprovou que, com a inserção da tecnologia, aliada a uma aula dinâmica em que o professor construa, com os alunos, as definições, a partir de observações, análises e conhecimentos que estes já possuam, é possível melhorar o ensino das funções.

5.3 Questionário final

Após o encerramento da oficina foi disponibilizado aos alunos um questionário avaliativo com sete questões, sendo uma objetiva e as demais subjetivas. Entre as questões, três foram usadas para comparar o conhecimento e aproveitamento antes e depois da realização da oficina, enquanto as outras serviram para avaliar como se deu o processo ensino-aprendizagem das funções logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra.

A primeira questão, a título de comparação, tinha o intuito de comprovar o que já havia sido coletado no primeiro questionário, quando se perguntou o que os discentes achavam sobre o uso da tecnologia para estudar Matemática. De fato, repetir essa indagação no questionário de avaliação reforçou o entendimento de que os alunos são conscientes da importância que o uso da tecnologia traz para o ensino de matemática, como pode ser visto nos resultados abaixo.

Gráfico 05 - O uso da tecnologia para estudar matemática



Fonte: O autor (2022).

Nos primeiros resultados, antes da realização da oficina que inseriu a tecnologia com o aplicativo GeoGebra, os dados se mostraram de forma concentrada em elementos favoráveis ao uso da tecnologia para estudar Matemática: 35% disseram facilitar, outros 35% que era necessário e 30% que era importante. Após ter passado pela experiência de usar a tecnologia na oficina, esses números tiveram mudanças significativas, o dado "necessário" perdeu quinze pontos percentuais, distribuídos entre os dois outros dados apontados. "Facilita" saiu de 35% para 40%, enquanto, "Importante" ganhou dez pontos percentuais.

Esses resultados mostraram haver interesse por parte dos alunos em utilizar as ferramentas tecnológicas que eles dominam. Portanto é viável e relevante a utilização dessas ferramentas que contribuem para o entendimento e o aproveitamento dos conhecimentos prévios dos alunos. Deve-se observar a relação com seu cotidiano e a orientação do professor, o que concorre para o aperfeiçoamento do ensino de matemática.

A percepção inicial sobre o que venha ser função, por parte dos alunos mudou consideravelmente, uma vez que oito alunos não tinham noção do que responder antes de participarem da oficina. Após a intervenção, esse número caiu para dois. Outros, mesmo tendo algum conhecimento prévio acerca de função, melhoraram o seu entendimento. Após a aplicação da oficina, quando perguntado "O que você entende por função? Os alunos trouxeram as seguintes respostas para pergunta:

A01 – *"Relação entre duas grandezas"*; A02 – *"Função são dois conjuntos não vazios"*; A03 – *"Quando 2 conjunto se relacionam entre eles"*; A04 – *"Presisa de dois conjuntos que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro"*; A05 – *"Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto"*; A06 – "*relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjuntos"*; A07 – *"é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro"*; A08 – *"Uma forma de dar uma relação sobre algo"*; A09 – *"Uma regra que é usada em uma linguagem q é a matemática"*; A10 – *"É uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento. O primeiro conjunto é chamado de domínio, e o segundo contradomínio ou a função e a relação de duas grandezas"*; A11 – *"Muita coisa"*; A12 – *"Acho que é a relação entre os conjuntos"*; A13 – *"Que função é usada para resolver problemas"*; A14 – *"É a base variada que pode encontrar o valor de x"*; A15 – *"É a relação de duas grandeza"*; A16 – *"Método de resolver problemas"*; A17 – *"Método de resolver problemas"*; A18 – "*É um assunto de matemática que estuda gráfico"*; A19 – "." (o aluno respondeu com um ponto); A20 – "." (o aluno respondeu com um ponto) (O autor, 2022).

O professor deve, antes de trazer uma definição, fazer com que os alunos usem o raciocínio de maneira intuitiva para construir conceitos sobre o conteúdo abordado, aproveitando as habilidades e conhecimentos prévios que possibilitem a eles uma interpretação ainda que informal do modelo exposto (PONTES, 2021, p. 7).

As respostas dos alunos A03, A04, A6, A07 e A10 são parecidas, o que evidencia que tiveram um entendimento de função como relação entre dois conjuntos, parte da definição abordada durante a aplicação da oficina. Vale ressaltar que a resposta do participante A10 foi a que mais se aproximou do objetivo da pergunta. Observa-se que, além da relação entre conjuntos, ele associou os elementos que compõem a função, o domínio, o contradomínio e a relação entre grandezas. Isso mostra que o aluno A10 foi além das noções intuitivas e compreendeu, de forma satisfatória, as definições discutidas durante a oficina. As funções em geral possuem diversas aplicações no cotidiano. Isso faz com que os professores possam inserir em suas práticas a interdisciplinaridade, contextualizando-a na realidade em que os alunos estão inseridos, motivando-os a buscar um melhor entendimento das funções para o ensino de matemática.

> A contextualização e a interdisciplinaridade permitem explorar a integralidade dos diferentes componentes e áreas do conhecimento, bem como suas conexões com situações vivenciadas pelos estudantes, para trazer contexto e contemporaneidade aos objetos de conhecimento, superar a fragmentação e promover o desenvolvimento de uma visão sistêmica (MARANHÃO, 2022).

Partindo desse pressuposto e interessado em conhecer o que o aluno apreendeu sobre contextualização aplicado à função durante a oficina, em caráter comparativo ao questionário diagnóstico, repetiu-se a preposição no questionário avaliativo: “Cite uma situação do cotidiano que pode ser modelada por função.”

A01 – *“Velocidade de automóvel”*; A02 – *“Escola, concurso”*; A03 – *“É quando preciso dividir um biscoito com os meus irmãos”*; A04 – *“Salário”*; A05 – *“A ida da minha casa até a escola”*; A06 – *“Em um gráfico como exemplo os gráficos e estatística das eleições”*; A07 – *“Um vendedor de autopeças recebe como salário uma quantia fixa de 400,00 e mais R$ 2,00 por peça vendida. Seu salário (y) é função da quantidade de peças vendidas(y)”*; A08 – *“Dia a dia”*; A09 – *“Velocidade de um carro e seu tempo de chagada”*; A10 – *“Radar, preço”*; A11 – *“Gráficos das eleições”*; A12 – *“Ir e vim da escola”*; A13 – *“Velocidade, distância”*; A14 – *“Velocidade, distância”*; A15 – *“Em gráfico de futebol, planilhas de negócios e pesquisas”*; A16 – *“Nos gráficos de estatísticas de gráfico de futebol”*; A17 – *“Nos gráficos de estatísticas de futebol”*; A18 – *“Gráfico de estatística”*; A19 – “.” (o aluno respondeu com um ponto); A20 – “...” (o aluno respondeu com reticências) (O autor, 2022).

Dada a evolução do entendimento dos alunos e suas habilidades desenvolvidas dentro da oficina, que os possibilitou modelar uma situação do cotidiano com uma função, evidencia-se que a intervenção sobre o ensino de função foi positiva. Uma evidência observada, nas respostas trazidas acima, está relacionada à ideia de gráficos, que os alunos trouxeram para visualizar uma aplicação das funções em situações cotidianas.

O Ensino de Matemática carrega situações de dificuldades no processo ensino-aprendizagem tanto para o professor quanto para o aluno, no sentido de apreender o conteúdo, ser capaz de aplicá-lo de modo contextualizado e resolver problemas. Durante a intervenção, na interação com os alunos, foram identificadas dificuldades quanto à resolução de problemas, no que versa a extração dos dados para a modelagem matemática e operações básicas como: multiplicação, divisão e potenciação. Diante disso, perguntou-se quais eram as dificuldades na resolução de problemas matemáticos. As respostas seguem abaixo:

A01 – *“É mais no final da alternativa da questão que surge a dúvidas, porque geralmente são dois cálculos”*; A02 – *“Nenhuma”*; A03 – *“Muitos cálculos”*; A04 – *“São as* *teórica é muito difícil"*; A05 – *"as vezes a troca de sinais"*; A06 – *"Vários"*; A07 – *"As muitas regras da matemática"*; A08 – *"Ñ tenho dificuldade"*; A09 – *"Meu problema é com déficit de atenção ou TDAH minha incapacidade de manter atenção em atividades da escola é no cotidiano e pela ocorrência de ações compulsivas. Já fui no psicólogo, dificuldade de concentração"*; A10 – *"Nada"*; A11 – *"O principal é a falta de atenção"*; A12 – *"Poucas dificuldades"*; A13 – *"Os meios utilizados"*; A14 – *"Defiti de atenção"*; A15 – *"Tenho poucos problemas na hora da resolução dos problemas"*; A16 – *"Tudo"*; A17 – *"As contas e a parte teórica"*; A18 – *"Falta de atenção"*; A19 – *"Falta de atenção";* A20 – *"Tenho um pouco de dificuldade mais se eu me empenhar mais melhora"* (O autor, 2022).

Um problema comum relatado nas respostas foi a "falta de atenção" por parte dos alunos, situação já trazida à luz da discussão, quando se falou no entrave do ensino de matemática na Educação Básica, agora comprovado nesse questionário avaliativo. O professor precisa conversar com os alunos, estabelecendo uma relação amigável quando esse tipo de dificuldade se estabelece nas aulas de matemática, para poderem juntos minimizarem essas lacunas.

Para isso o professor deve ter em mãos ferramentas que possam trazer a atenção dos alunos para o desempenho das atividades propostas. Um exemplo é a inserção das tecnologias de que esses alunos já dispõem, como o *Smartphone*, no qual podem usar, dentre outras ferramentas, o aplicativo GeoGebra, para facilitar na resolução de problemas e ganhar a atenção deles. O A13 aponta que *"os meios utilizados"* geram as dificuldades no processo ensino-aprendizagem; as resoluções de problemas por métodos tradicionais, mecanizados e decorativos, descontextualizados, acabam por afastar a atenção dos alunos.

Os alunos A4, A7 e A17 trazem nas suas respostas que a teoria é uma dificuldade na hora de aplicá-la na resolução de problemas. Esse fato é consequência de uma aplicação teórica ineficaz, pois o professor não construiu o conhecimento com os alunos, impossibilitando-os de usar o raciocínio para entender as definições formais que serão abordadas, sempre trazendo os conhecimentos básicos que devem ser acumulativos para o aluno poder usar com frequência o que já aprendeu para aprender mais. Segundo Paulo Freire, a ideia de concepção bancária na educação impede que o aluno construa conhecimento, pois;

> Em lugar de comunicar-se, o educador faz "comunicados" e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção "bancária" da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los (FREIRE, 1996 p. 57).

É preciso romper com essas práticas depositárias em que o professor somente apresenta as definições e os conceitos por ele adquiridos, dos quais ele já tem domínio, sem uma retomada, junto aos alunos, dos conhecimentos que eles já têm, aproveitando situações cotidianas que estão relacionadas ao conteúdo, mesmo que os alunos nem saibam inicialmente de tal relação.

As operações básicas aparecem entre as respostas sobre as dificuldades na resolução de problemas, o que evidencia que os conhecimentos que deveriam ser adquiridos em matemática, ao longo da vida escolar, foram insuficientes, como traz o A05 *"troca de sinais"*, o A07 *"muitas regras"* e o A17 *"as contas e a parte teórica"*. Isso aponta que o problema é muito mais amplo, pois os alunos chegam no Ensino Médio sem dominar o básico do ensino de matemática.

Uma resposta chamou atenção: *"Meu problema é com déficit de atenção ou TDAH minha incapacidade de manter atenção em atividades da escola é no cotidiano e pela ocorrência de ações compulsivas. Já fui no psicólogo, dificuldade de concentração"* (A09, 2022). Apesar de não ser o tema de abordagem da pesquisa, é necessário trazer essa discussão à tona, ainda que de modo superficial. Durante a pesquisa, nem em conversa com a gestão e o professor da turma, nenhuma informação foi dada sobre o referido aluno. Foi o próprio aluno que, durante uma conversa informal com a turma, relatou da sua situação em especial, afirmando não haver acompanhamento especializado para ele na escola.

No intento de conhecer mais sobre os resultados construídos junto aos alunos em relação ao ensino de funções logarítmicas ministrados durante a oficina, de forma contextualizada, interdisciplinar e auxiliado pelo aplicativo GeoGebra, perguntou-se aos discentes: "Qual a importância do estudo das funções logarítmicas para o Ensino de Matemática?"

Veja as respostas dadas pelos estudantes:

A01 – *"Servem para nos auxiliar é resolver problemas em quê há muitas possibilidades"*; A02 – *"é útil para situações como os juros compostos , já que ela é a função inversa da função exponencial e a medição de magnitude de terremotos, há também sua aplicação na química e na geografia"*; A03 – *"Acho que facilitar as resolução das operações"*; A04 – *"Importante para o aprendizado de resolução de problemas"*; A05 – *"Muito importante"*; A06 – *"Necessário, além de ser um conhecimento a mais, também ajudará para um futuro próximo, para a realizações de concursos"*; A07 – *"Importante para o aprendizado e resolução de problemas"*; A08 – *"Ajuda a resolver problemas"*; A09 – *"Necessário para aprendermos mais"*; A10 – *"Para ajuda"*; A11 – *"Os estudos do* *logaritmo são importantes pois podemos fazer a resolução ou saber o valor de um expoente de qualquer base"*; A12 – *"A importância de colocar alguma coisa nova no estudo das funções logarítmicas"*; A13 – *"Resolução dos problemas"*; A14 – *"De suma importância"*; A15 – *"Necessário para resolver problemas"*; A16 – *"Facilitar uma descoberta no aprendizado"*; A17 – *"Ajuda a resolver problemas"*; A18 – *"Para fazer a medição de magnitude de um terremoto"*; A19 – *"Útil para situação de problemas que há muitas possibilidades"*; A20 – "..." (o aluno respondeu com reticências) (O autor, 2022).

Diante da análise dos resultados da pesquisa, constatou-se que o ensino de funções logarítmicas, da forma como foi ministrado na oficina, alcançou os objetivos traçados pelo projeto, permitindo inicialmente conhecer, por meio da escuta dos discentes, as dificuldades, anseios e perspectivas sobre o ensino de matemática. Os relatos posteriores ao fim da oficina foram os mais diversos: afirmaram que *"as aulas eram chatas"*, *"monótonas"* e *"não sabiam onde poderiam aplicar o conteúdo estudado no cotidiano"*. Com base nessa escuta e interação, foi possível traçar estratégias que superassem essas dificuldades para aperfeiçoar o ensino das funções logarítmicas, como o uso do aplicativo GeoGebra, a contextualização, e mostrando a eles onde aplicar o conteúdo estudado no dia a dia das Ciências e em outras áreas do conhecimento.

Metade dos participantes da pesquisa (A01, A03, A04, A07, A08, A11, A13, A15, A17 e A19) relataram que o estudo das funções logarítmicas é importante para a resolução de problemas, um dos objetivos traçados para a aplicação da oficina, evidenciando que uma das dificuldades apontadas pelos discentes foi superada: a falta de atenção. Uma vez que, a metodologia utilizada na intervenção foi a resolução de problemas, usando a tecnologia do aplicativo GeoGebra, fazendo com que a representação abstrata fosse visualizada por meio dos gráficos.

As funções logarítmicas possuem uma vasta aplicabilidade. Explorar isso no processo de ensino dessas funções fez com que os alunos dessem mais atenção, interessassem-se vendo situações problemas do dia a dia modeladas por funções logarítmicas e, consequentemente, aprendessem. É o que nos relatam, como exemplo desta aplicabilidade, os participantes A02 *"é útil para situações como os juros compostos, já que ela é a função inversa da função exponencial e a medição de magnitude de terremotos, há também sua aplicação na química e na geografia"*; A18 "*Para fazer a medição de magnitude de um terremoto"*. As respostas corroboraram a amplitude interdisciplinar que as funções logarítmicas possuem.

"Os estudos do logaritmo são importantes pois podemos fazer a resolução ou saber o valor de um expoente de qualquer base" (A11). A resposta apresentada pelo aluno A11 foi

uma das definições de logaritmos abordada durante a intervenção, mostrando que ele conseguiu aprender uma aplicação do conteúdo ministrado durante a participação na oficina: o logaritmo como solução de uma equação exponencial.

"A importância de colocar alguma coisa nova no estudo das funções logarítmicas" (A12). "O que seria essa coisa nova?" A inserção da tecnologia do aplicativo GeoGebra, o que possibilitou trazer para a sala de aula novas abordagens para o ensino das funções logarítmicas, tornando a aula dinâmica, interativa, atrativa e próxima da realidade deles quanto ao uso da tecnologia e deu visibilidade ao contexto no qual eles estão inseridos.

O uso de softwares/aplicativos contribui para facilitar o ensino de matemática, pois eles minimizam cálculos, criam de forma rápida tabelas, plotam gráficos precisos, são dinâmicos e de fácil manuseio (SILVA, 2016, p.20). O aplicativo GeoGebra, muito difundido para o estudo de Matemática, possui inúmeras funcionalidades para o estudo das funções logarítmicas, como plotar gráficos, por exemplo. Usando essa tecnologia foi possível aproximar os alunos da construção do conhecimento, associando a apreensão teórica à aplicação prática, ao utilizar o aplicativo.

Após a utilização dessa ferramenta como instrumento de auxílio metodológico, para avaliar o seu uso e o modo como os alunos interagiram e aprenderam com o GeoGebra, foi pedido aos alunos que descrevessem como o uso do aplicativo GeoGebra contribuiu para o estudo das funções logarítmicas. As respostas tiveram resultado positivo, como podem ser vistas a seguir.

A01 – *"Facilita muito"*; A02 – "*Contribui para facilitar a compreensão do conteúdo função afim é a sua utilização na construção de gráficos de função e demais conteúdos matemáticos"*; A03 – *"Facilita bastante e ajuda a gente entender tudo"*; A04 – *"Facilitar a resolução"*; A05 – *"Facilita o aprendizado"*; A06 – *"E muito bom"*; A07 – *"Ajudou bastante, facilitou a resolução e trouxe novas experiências"*; A08 – *"Facilita bastante o conhecimento e o aprendizado"*; A09 – *"O uso é bem fácil de usar é muito bom"*; A10 – *"Facilita e ajuda nas resoluções dos problemas"*; A11 – *"Fasilita"*; A12 – "*Ele ajuda pois dada a função, ele já faz a resolução do problema"*; A13 – "*É importante para ampliar o conhecimento"*; A14 – "*Muito bom e interativo"*; A15 – *"Ajuda bastante, pois com o aplicativo aprendemos funções logaritímicas de forma mais conceituada, porque o aplicativo nos ensina de certa forma onde cada elemento vai"*; A16 – *"Ele facilita os resultado e ensinar de forma descontraída"*; A17 – *"facilitou"*; A18 – *"Através do aplicativo Geografia ficar mais fácil a resolução das questões de logaritmo"*; A19 – *"Me ajudou bastante a aprender como usar cada função"*; A20 – *"Facilita"* (O autor, 2022).

Uma das bases para o domínio do estudo das funções logarítmicas é entender o comportamento gráfico que caracteriza a referida função, podendo-se, a partir disso, diferenciá-la das demais funções. O uso do GeoGebra *"contribui para facilitar a compreensão do conteúdo função afim é a sua utilização na construção de gráficos de função e demais conteúdos matemáticos"* (A02). Uma das partes mais importantes que o aplicativo GeoGebra agrega para o ensino das funções logarítmicas é a construção precisa do gráfico, o que contribuiu para apresentar visualmente os elementos que compõem as funções, apontados nas definições que já foram apresentadas teoricamente e agora estão na interface do aplicativo. Com a praticidade da plotagem do gráfico e com as ferramentas que o aplicativo possui, foi possível mostrar, de maneira clara e objetiva, o domínio, a imagem e o comportamento da função, fazendo com que o aluno visualizasse, no plano cartesiano, onde a função de fato pode existir.

A resolução de problemas foi uma das respostas mais apontadas, haja vista que o aplicativo GeoGebra faz os cálculos de maneira instantânea, desde que a função esteja corretamente modelada e que os alunos identifiquem quais elementos o problema pedia, se um elemento do domínio, ou da imagem da função logarítmica. Para que o aluno consiga efetivamente usar o aplicativo, ele precisa ter os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e a lei de correspondência bem definidas.

A intuitividade de manusear o aplicativo GeoGebra facilitou o ensino das funções logarítmicas, estabelecendo interação entre teoria e prática, aproximando alunos e professor, canalizando a atenção deles, despertando a curiosidade, além de facilitar o aprendizado. O ensino aconteceu de forma descontraída, rompendo com as práticas mecânicas, desinteressantes, descontextualizadas, como podemos ver nas considerações dos entrevistados: A16 *"Ele facilita os resultado e ensinar de forma descontraída"*, A09 *"O uso é bem fácil de usar é muito bom"* e A14 *"Muito bom e interativo"*.

O uso do GeoGebra facilitou o ensino das funções logarítmicas, como afirmaram 60% dos participantes da pesquisa, comprovando que associar a tecnologia ao ensino de matemática amplia o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo abordado. Isso possibilitou a vivência de novas experiências e de aprendizagem que aproveitou ferramentas às quais eles têm acesso e de que têm disponibilidade, desde que dominem a parte teórica, como observado nas respostas dos participantes A07 *"Ajudou bastante, facilitou a resolução e trouxe novas experiências"* e A08 *"Facilita bastante o conhecimento e o aprendizado"*.

Foi feita uma pergunta para os alunos avaliarem a oficina. Para eles a oficina se voltou para o uso da tecnologia associada ao ensino das funções logarítmicas com o do uso do aplicativo GeoGebra. Como se pôde observar, quando perguntados: "Quais suas considerações sobre a realização da oficina, O ensino das funções logarítmicas: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra?", responderam:

A01 – *"E um aplicativo muito bom, pois ele facilita muito mais a resolução em casos de dúvidas sobre a questão"*; A02 – *"Excelente"*; A03 – *"Muito produtivo e interessante e já vai ajudar no conteúdo de logaritmos. Um abraço professor Gleison"*; A04 – "*Ajuda bastante entender as coisas e facilita tudo"*; A05 – *"muito boa"*; A06 – *"Ótima"*; A07 – *"Gostei muito pq o aplicativo facilita bastante a resolução das questões"*; A08 – *"Muito bom é interativo"*; A09 – *"Achei necessário o aplicativo GeoGebra ajudou muito"*; A10 – *"Muito interessante"; A*11 – *"Gostei bastante, me ajudou a entender"*; A12 – *"Um aplicativo interessante"*; A13 – *"Muito boa"*; A14 – *"Melhora muito"*; A15 – *"Muito bom, pois fica de uma forma muito dinâmica o aprendizado do aluno"*; A16 – *"Achei necessário o uso do aplicativo geogebra"*; A17 – *"Muito bom"*; A18 – *"Muito bom"*; A19 – *"Muito bom"*; A20 – *"Muitos boas"* (O autor, 2022).

Analisando as respostas dos participantes, a realização da oficina foi positiva, produtiva e interessante, conforme trouxeram os participantes: A02 *"Excelente"*; A03 *"Muito produtivo e interessante e já vai ajudar no conteúdo de logaritmos"; A*11 *"Gostei bastante, me ajudou a entender"*; A15 *"Muito bom, pois fica de uma forma muito dinâmica o aprendizado do aluno".* Dez participantes disseram que a oficina foi *"muito boa"* devido a interação, aulas dinâmicas apontando a necessidade da construção do conhecimento a partir da criação dos logaritmos até as aplicações no cotidiano das funções logarítmicas, tanto na matemática quanto em outras áreas do conhecimento, dando ênfase à contextualização e à interdisciplinaridade, usando o aplicativo GeoGebra como ferramenta para associar teoria e prática.

Dispondo de uma metodologia diferente da usual, onde as aulas são monótonas, o professor detém o conhecimento e o aluno é só um receptáculo, tendo uma única forma para a resolução de problemas, polindo a criatividade e o protagonismo do aluno. É importante lembrar que, segundo o DCTMA (2022, p.69), o princípio do protagonismo deve ser igualmente valorizado e suas práticas estimuladas nas situações de aprendizagem para ser reconhecida a sua potência. O professor deve aproveitar esse protagonismo e as tecnologias que estão disponíveis e são extensão da realidade dos alunos, como o *Smartphone*. Usar esse protagonismo e essas ferramentas na oficina fez com que os alunos voltassem a atenção para a aula, participando ativamente da construção do conhecimento sobre funções.

A intervenção se deu após a escuta dos alunos, saber as dificuldades que estes apontaram no ensino de matemática e o que esperavam para as aulas serem melhores. A partir disso, foram trabalhadas as definições de funções, explorando os conhecimentos prévios dos alunos sobre as aplicações matemáticas no cotidiano e aperfeiçoando essas habilidades. Assim, chegou-se à ideia das noções intuitivas com aporte teórico construído junto ao aluno para aplicar na prática a resolução de problemas, usando o aplicativo GeoGebra como ferramenta auxiliar para o estudo das funções logarítmicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa possibilitou conhecer os meandros do ensino de matemática quanto ao ensino das funções logarítmica e ao uso das tecnologias nesse processo de ensino aprendizagem. Alcançando a conclusão de que as dificuldades inerentes ao ensino de matemática podem ser superadas quando os problemas são identificados ao escutar o aluno, elaborar estratégias que atendam à realidade trazida por eles, inseri-los no processo de construção do conhecimento, romper com as amarras do ensino tradicional, valorizar o conhecimento prévio dos alunos, contextualizar o ensino, mas não substituir a aprendizagem de conceitos e definições elementares pelo simples uso da tecnologia. Há que se ter a coadunação entre a teoria e o uso das tecnologias para que se possa aplicar aquela com eficiência.

Nesse processo, a definição de funções se desenvolveu tomando como base os conhecimentos prévios dos alunos, permitindo que eles desenvolvessem a noção intuitiva do conteúdo com as vivências cotidianas, e, a partir do entendimento das definições formais, eles construíram conhecimentos das definições de funções.

Uma abordagem relevante acerca do ensino de matemática com ênfase ao ensino de funções está relacionada à noção intuitiva, quando o aluno compreende o que foi abordado, mesmo sem dominar as definições técnicas. Isso foi evidenciado nas respostas que os alunos deram durante a realização da oficina. Como o exemplo do participante A01, que trouxe a ideia de função como relação entre grandezas.

Quando se atraiu a atenção dos alunos para que compreendessem como se deu a criação dos logaritmos e como estes contribuíram para o desenvolvimento tecnológico à época, possibilitou-se que esses estudantes tivessem interesse em entender como tal instrumento de cálculo foi utilizado anteriormente e poderia ser utilizado por eles. Isso foi possível a partir da apresentação das aplicações das funções logarítmicas para situações cotidianas, como o cálculo de juros compostos aplicados diretamente na Matemática e em outras áreas do conhecimento, como na Geografia para entender a intensidade dos abalos sísmicos e na Química para calcular e classificar o pH das substâncias.

Como foi apresentado o conteúdo, definindo as funções logarítmicas, enfatizando as principais características, como transformar produtos em soma e sua gama de aplicações nas Ciências e Fenômenos da Natureza, ressignificou o interesse dos alunos pelo ensino das funções logarítmicas, fazendo com que esse estudo fosse útil e aplicável para os alunos. Isso deu sentido ao porquê de estudar o conteúdo dentro do ensino de matemática.

Usar o aplicativo GeoGebra para análise do comportamento gráfico das funções logarítmicas, bem como compreender os conceitos e definições apresentados de forma abstrata como imagem, domínio, crescimento e decrescimento das funções, foi facilitado com a visualização desses elementos na interface do aplicativo, contribuindo para superar as dificuldades inerentes à linguagem técnica da matemática. Ao conseguirem dominar esses conceitos, usar o aplicativo para resolver problemas contextualizados, nos quais conseguiram identificar os elementos fundamentais que definem funções, foi fácil para os alunos, mas somente por estes dominarem esses conceitos. Ficou evidente que, para aqueles que não dominaram os conceitos, o uso do aplicativo pouco fez diferença para a identificação dos elementos da função e a resolução de problemas.

Importa ressaltar que, associar o ensino das funções logarítmicas com o auxílio do aplicativo GeoGebra, para aperfeiçoar o ensino de matemática, é algo tangível e urgente, tanto quanto se faz necessário promover aulas mais próximas da realidade dos alunos, contextualizadas e com caráter interdisciplinar, nas quais vejam o que aprenderam na sala de aula e possam aplicar no seu cotidiano. Para isso, é preciso que o professor reveja sua prática metodológica, esteja capacitado teoricamente quanto aos conteúdos e disposto a inserir o recurso da tecnologia como um aliado, não substituto, ao ensino de matemática.

Em relação ao questionário diagnóstico, em que as respostas se apresentaram incipientes, descontextualizadas e com um percentual de 40% dos alunos respondendo com “não sei”, quando perguntado o que entendiam sobre função, as mudanças alcançadas no questionário avaliativo, após a intervenção, foram perceptíveis, pois apenas 10% dos participantes voltaram a mencionar o “não sei”. A intervenção trouxe a evolução do entendimento dos alunos e suas habilidades desenvolvidas dentro da oficina.

O ensino das funções logarítmicas apresentou resultados positivos nesta pesquisa, com o uso da tecnologia presente na realidade dos participantes que utilizaram seus *Smartphones* para instalarem o GeoGebra, que os auxiliou a superar as dificuldades que a abstração de conceitos matemáticos deixou ao longo do processo ensino-aprendizagem, permitindo que eles visualizassem na forma gráfica a construção e o entendimento de conceitos e definições. A construção desse conhecimento foi amparada por práticas contextualizadas que promoveram a interação de forma dinâmica, mas que exigiram, antes, planejamento e paciência para que as necessidades dos alunos fossem escutadas e respondidas por meio da intervenção que aponta caminhos para aperfeiçoar o ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto. **Prisma Matemática:** Funções e Progressões: Ensino Médio: área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática:** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2004. 488 p.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução 03 de 21 de novembro de 2018**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, 1988.

BRASIL. **Fundação Getúlio Vargas** – FGV. 2022.

BRASIL. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística** – IBGE-2021.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNEM. 1998

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica** – SAEB. 2022.

EVES, Houward. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 17. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GEOGEBRA.ORG. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 12 out. 2022.

GOODWIN, Fernanda Coelho. A utilização do software Geogebra no tablet para o estudo das funções. **Revista Formação@docente**, Belo Horizonte, v. 9, n.3, 2017.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar 2**: Logaritmos. 9. ed. São Paul: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; MURACAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar vol-1**: Logaritmos. 9. ed. São Paul: Atual, 2004.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos da metodologia cientifica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez editora, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática no ensino médio**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MARANHÃO. Secretaria de Estado da Educação. **Documento curricular do território maranhense**: ensino médio / Maranhão, Secretaria de Estado da Educação. São Luís, 2022.

MENEGUCI, Micon do Nascimento. **Uma proposta metodológica de ensino de logaritmos através de tecnologia**. Nova Iguaçu, 2022.

OLIVEIRA, Alceu Leonel Santos de; NETTO, Daiane; CASSAL, Janete Beatriz Kruger; GENEROSO, Moiisés Guazelli; SILVA, William Pereira da; SANTOS, Carla Margarete Ferreira dos. **Matemática aplicada na química**: Ensino de equações logarítmicas no cálculo do pH. 6º Simpósio de Integração Científica e Tecnológica do Sul Catarinense – SICT-Sul, 2017.

PACHECO, Erica Farias. Utilizando o software Geogebra no ensino da matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3° ano do ensino médio. **Debates em Educação**, Maceió, v. 11, n. 24. 2019.

PEREIRA, Paulo Ricardo Gonçalves. **Ensino de funções a partir das competências e habilidades propostas na base nacional comum curricular**: uma aplicação para a resolução de problemas do Enem e diversos. 2021.

PINHEIRO, Marcus Túlio Freitas; MAGALHÃES, André Ricardo; DA SILVA, Karine Socorro Pugas. **O uso do GeoGebra pode potencializar o ensino aprendizagem das funções logarítmicas?** Revista Multidisciplinar Plurais. Salvador, v.5. 2020.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos. Revista **Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. e202106-e202106, 2021.

PRATES, Rosiane Figueredo; BABOSA, Adriana Costa. O planejamento e a utilização dos planos de aula “nova escola” em matemática. **ReBECEM**, Cascavel (PR), v. 4, n. 3, p. 476-498, ago. 2020.

RAMOS, S. S. A. **Logaritmos:** uma abordagem didática. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~eidam/2016/1/MA11/Logaritmos%20.pdf>. Acesso em: 10 out. 2022.

REIS, Fernanda Pacheco dos. **Introdução ao estudo das funções de 1º grau com o uso do software GeoGebra**. Trabalho de Conclusão de especialização (Instituto de Matemática. Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134091>. Acesso em: 13 out. 2022.

RICHARDSON, Roberto Jarry. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. 3. ed. 14. reimpre. São Paulo: Atlas, 2012.

RODRIGUES, Ricardo Batista. **Novas tecnologias da informação e da comunicação**. Recife: IFPE, 2016.

SILVA, Adriano Costa. **Atividades investigativas de matemática com celular:** uso do GeoGebra para o ensino de Geometria Espacial. Universidade Federal de Viçosa, 2022.

SILVA, Girleide Maria da. **Um estudo sobre o uso do Geogebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio**. Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR, 2016.

SILVA, Leonardo Rodrigo; OLIVEIRA, Renata Gonçalves Lacerda. Ensino de funções voltadas as práticas do cotidiano por meio da contextualização. **Revista Acadêmica Educação e Cultura em Debate**, v. 3, n. 2, ago/dez. 2017.

APÊNDICE

Apêndice A – Termo de consentimento livre e esclarecido

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO- UEMA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) participante, você está sendo convidado (a) a participar da pesquisa “Logaritmos: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra”, desenvolvida por Gleison Silva Pereira, discente do curso de Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual do Maranhão- UEMA, sob orientação da Professora Dra. Sandra Imaculada Moreira.

O objetivo central do estudo é desenvolver possibilidades de ensino-construção-aprendizagem para a resolução de problemas com logaritmos, utilizando o aplicativo GeoGebra, com alunos do 1° ano do Colégio Militar Tiradentes no município de Caxias – MA. O convite à sua participação se deve a realização da pesquisa já citada e desenvolvimento científico na área de Ensino de Matemática.

“Serão garantidas a confidencialidade e a privacidade das informações por você prestadas”. Sua participação, consistirá em, durante a realização da Oficina: Logaritmos: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra, participar das atividades propostas em sala de aula, interagir, responder um questionário na abertura da oficina e um no encerramento, possibilitando que as informações colhidas sejam organizadas, analisadas, divulgadas e publicadas na construção da dissertação em questão.

A sua participação justificar-se-á pela oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas com o uso da tecnologia como facilitadora para o processo de ensino-construção-aprendizagem.

Assine o presente documento, nas duas vias de igual teor. Uma cópia ficará em seu poder e a outra será arquivada em um local seguro pelo pesquisador responsável.

Agradeço a sua contribuição e coloco-me a disposição para os esclarecimentos que forem necessários.

____

Nome do Participante da Pesquisa

____

Assinatura do Responsável pelo Participante da Pesquisa

____

Pesquisador: Gleison Silva Pereira

Apêndice B – Questionário diagnóstico

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO

Departamento de Matemática e Informática – CECEN

PROFMAT – UEMA

Mestrando: Gleison Silva Pereira   Orientadora: Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Oficina Funções Logarítmicas: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra – Questionário Diagnóstico.

01. Você conhece algum app/software usado como ferramenta para estudar matemática?

(   ) Sim

(   ) Não

02. O que você acha do uso da tecnologia para estudar matemática?

(   ) Necessário

(   ) Importante

(   ) Nunca usei

(   ) Facilita

(   ) Não faz diferença

03. Você já usou o GeoGebra para estudar matemática?

(   ) Sim

(   ) Não

04. O que você entende por função?

05. Cite uma situação do cotidiano que pode ser modelado por função?

06. Você já estudou funções logarítmicas?

Apêndice C – Questionário Avaliativo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO

Departamento de Matemática e Informática – CECEN

PROFMAT – UEMA

Mestrando: Gleison Silva Pereira Orientadora: Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Oficina Funções Logarítmicas: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra – Questionário Avaliativo

01. O que você acha do uso da tecnologia para estudar matemática?

( ) Necessário

( ) Importante

( ) facilita

( ) não faz diferença

02. O que você entende por função?

03. Cite uma situação do cotidiano que pode ser modelado por função.

04. Quais suas dificuldades na resolução de problemas matemáticos?

05. Descreva como o uso do aplicativo GeoGebra contribui para o estudo das funções logarítmicas?

06. Qual a importância do estudo das funções logarítmicas para o ensino da Matemática?

07. Quais suas considerações sobre a realização da oficina, Logaritmos: resolução de problemas com o uso do aplicativo GeoGebra?

Apêndice D – Plano de aula 01

Logaritmos: Resolução de problemas com uso do aplicativo GeoGebra	
PLANEJAMENTO DAS AULAS DOS DIAS 12, 13 e 26 DE SETEMBRO DE 2022.	**AULA 01**
I – CONTEÚDO: Ensino das Funções Logarítmicas	
II – OBJETIVOS ESPECÍFICOS: • Verificar o conhecimento sobre funções; • Conhecer o contexto histórico da criação dos logaritmos; • Entender a definição de logaritmos; • Compreender a relação entre logaritmos e equações exponenciais;	
III - PROCEDIMENTOS: **1) PAUTA** 1) Acolhida; 2) Apresentação; 3) Explanação do projeto; 4) Alusão ao contexto histórico da criação dos logaritmos; 5) Definição de logaritmos e aplicações da definição na forma de exemplos; 6) Fechamento. **2) Proposta de Atividade:** Neste encontro, será apresentado o projeto Logaritmos: resolução de problemas usando o aplicativo GeoGeobra para os alunos do 1º ano D do ensino médio da Escola Militar Tiradentes IV. Na oportunidade, será proferido o contexto histórico da criação dos logaritmos. Seguido da explanação da definição de logaritmos através da proposta inicial de transformar multiplicações em soma, divisões em subtrações e potências em produtos por meio de exemplos básicos relacionando a P.A e P.G. Será explanada a definição como solução de equações exponenciais assim como a verificação do conhecimento sobre funções. **3) Avaliação:** O que você aprendeu na aula de hoje?	
IV - FECHAMENTO DA AULA: O que você achou mais interessante no encontro de hoje?	

O questionário foi enviado na semana anterior, via *Google Forms* para o grupo de *WhatsApp* da turma em que foi feito a pesquisa para que o pesquisador pudesse ganhar tempo.

Apêndice E – Plano de aula 02

Logaritmos: Resolução de problemas com uso do aplicativo GeoGebra	
PLANEJAMENTO DA AULAS DO DIA 13 DE SETEMBRO	**AULA 02**

Avaliação do encontro anterior:

No primeiro encontro foi apresentado o projeto Ensino das Funções Logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra à turma do 1ºD da Escola Militar Tiradentes IV, sujeitos escolhidos para a aplicação da oficina pelo critério de dificuldade em matemática. 20 alunos participaram da oficina, expondo nesse primeiro momento suas dificuldades e descontentamentos com o ensino de matemática desenvolvido na escola. Após a conversa, foi explicado como se daria a aplicação da oficina, com aulas teóricas referente ao conteúdo e aplicação prática usando o aplicativo GeoGebra para resolver problemas.

Na abordagem inicial, foi pedido que os alunos explanassem as dificuldades com o ensino de matemática, os participantes relataram que as aulas de matemática ao longo dos anos são monótonas, com uma aplicação tradicional dos conteúdos e resolução de exercícios que não lhes desperte interesse ou aguce a criatividade e contextualização sobre o conteúdo abordado. Relataram também sobre a incompreensão das regras e definições de alguns conteúdos, em especial, funções.

Foi feito uma alusão ao contexto histórico da criação dos logaritmos, definição de logaritmos e aplicação da definição de logaritmos na forma de exemplos elementares. Apresentado aos participantes o contexto histórico das Grandes Navegações e desenvolvimento da Astronomia, que impulsionaram a criação dos logaritmos como ferramenta para facilitar cálculos, como transformar produtos em soma, apresentando uma analogia relacionando os conceitos de progressão aritmética (P.A) e progressão geométrica (P.G) para mostrar na prática como eram realizadas as transformações de multiplicações em adições. Para esse exemplo foi usada a seguinte tabela com uma P.A de primeiro termo 1 e razão 1 com uma P.G de primeiro termo 2 e razão 2.

P.A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P.G	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Foi explicado que de posse do dispositivo, para efetuar o produto 64*256, bastava verificar na primeira linha os valores correspondentes ao 64 e ao 256 e efetuar uma simples soma, dessa forma teríamos: 6+8= 14, assim basta ver a que número na segunda linha está associado o 14, que é 16394, logo 64*256=16394.

Após mostrar o funcionamento do dispositivo, verificou-se que o fato chamou a atenção da turma, então foi pedido a eles que efetuassem algumas multiplicações usando a tabela.

Após a introdução, foi dado a definição de logaritmo trazida dos livros tradicionais: Dado um número real $a>0$, *o logaritmo de um número x>0 na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y=x$.* Escreve-se $y=\log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a.

De posse da definição, foi dado as condições de existência dos logaritmos e resolvido alguns exemplos elementares como $\log_2 8$ de forma intuitiva. Foi proposto a eles responderem a seguinte pergunta: a que expoente deve-se elevar a base 4 para que se obtenha 64? De maneira satisfatória, um número considerável da turma deu a resposta esperada, 3. Dessa forma, foi visto que os alunos compreenderam a definição de logaritmo.

Ao término da aula foi pedido aos participantes a opinião sobre o conteúdo e a abordagem do assunto, alguns relataram por escrito que gostam da forma como foi abordado o dispositivo com P.A e P.G, foi pedido para o próximo encontro que os alunos baixassem o aplicativo GeoGebra, para começar a fazer o uso da ferramenta com logaritmos.

I – CONTEÚDO: As propriedades operatórias dos logaritmos; Funções Logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra

II – OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Aplicar as propriedades operatórias dos Logaritmos;
- Identificar as condições de existências das funções logarítmicas;
- Aprender funções logarítmicas;
- Conhecer o aplicativo GeoGebra;
- Entender o comportamento das funções logarítmicas através do aplicativo GeoGebra;

III - PROCEDIMENTOS:

1) PAUTA

1) Acolhida;

2) Retomada aos estudos de logaritmos;

3) Definição das funções;

4) Resolução de problemas com funções logarítmicas;

5) Navegação com o aplicativo GeoGebra para o conhecimento do comportamento do gráfico da função $\log_2 x$;

6) Resolução de problemas de funções logarítmicas usando o aplicativo GeoGeobra.

2) Proposta de Atividade:

Na atividade de hoje vamos retomar o estudo dos logaritmos relembrando algumas propriedades operatórias. Vamos entender o conceito e definir funções, com o intuito de compreender o estudo das funções logarítmicas a partir das condições para que tais funções existam. A partir da compreensão do conteúdo, fazer a aplicação na resolução de problemas de funções logarítmicas. Alcançado o entendimento sobre a definição de funções e

funções logarítmicas será feito a visualização do comportamento das funções logarítmicas utilizando o aplicativo GeoGebra. Vamos utilizar a modelagem matemática para resolução de problemas com o auxílio do aplicativo GeoGebra. **3) Avaliação:** O que você aprendeu na aula de hoje?
IV - FECHAMENTO DA AULA: O que você achou mais interessante no encontro de hoje?

Apêndice F – Plano de aula 03

Logaritmos: Resolução de problemas com uso do aplicativo GeoGebra	
PLANEJAMENTO DAS AULAS DOS DIA 26	**AULA 03**

Avaliação do encontro anterior: A aula foi iniciada fazendo uma revisão geral dos conteúdos abordados durante os encontros anteriores, destacando os elementos, definições e aplicações das funções logarítmicas. Após essa abordagem, foram resolvidos exemplos no quadro, explicando-os e pedindo auxílio dos alunos quanto à modelagem e os elementos que correspondiam às funções. Na resolução da questão, aplicamos definição, propriedades operatórias das funções logarítmicas e operações elementares de Matemática. Para estabelecer uma comparação e mostrar as facilidades do uso das tecnologias, resolveram-se os mesmos exemplos, usando o aplicativo GeoGebra. Os exemplos abaixo foram resolvidos em sala de aula.

Exemplo 01: Durante os estudos sobre o crescimento de uma determinada árvore, foi possível modelar o crescimento dela no decorrer do tempo por meio da função $A(t) = 1 + \log_3(5 + t)$, em que t é o tempo em anos e A(t) é a altura em metros. Sendo assim, qual a altura dessa árvore, após 4 anos?

Resolução: observa-se que $t = 4$, logo o problema pede a imagem da função, quando o elemento do domínio for 4. Assim:

I: $A(t) = 1 + \log_3(5 + t)$

II: $A(4) = 1 + \log_3(5 + 4)$

III: $A(4) = 1 + \log_3(9)$

IV: $A(4) = 1 + 2$

V: $A(t) = 3$

Dessa forma, a altura da árvore decorridos 4 anos será de 3m. Na linha (III) da resolução, foi aplicada a definição de logaritmo. Durante a resolução, os alunos participaram na identificação dos dados do problema, porém não conseguiram relacioná-los aos elementos das funções, como imagem e domínio. Eu precisei explicar que $A(t)$ representava a imagem pelo elemento do domínio (t), e a lei de correspondência era $1 + \log_3(5 + t)$, que diz a forma como estes elementos estão relacionados. Outra dificuldade encontrada foi na resolução de equações. Alguns alunos não compreenderam, então foi realizada uma breve revisão sobre resolução de equações do primeiro grau.

Após resolver manualmente, orientou-se que resolvessem então no aplicativo GeoGebra. Para isso, foi dada a instrução: digitar a função no campo “entrada”.

Perguntou-se quanto à função ser crescente ou decrescente, para cerificação de que tinham entendido esses conceitos. De modo satisfatório, muitos alunos responderam que era uma função crescente, pois a base era 3, e três é um número maior que 1, mostrando que entenderam esse conceito.

Com a função na interface, instruiu-se que digitassem a imagem que o problema pedia pelo elemento do domínio $A(4)$ na entrada seguinte. Logo constataram que o aplicativo apresentava imediatamente a resposta da referida questão. Eles disseram que a resolução manual foi simples, mas no GeoGebra foi muito rápido e mais fácil. Foi explicado que o aplicativo facilita, mas é preciso que eles entendam as definições e saibam quais são os elementos das funções para poder usá-los no aplicativo.

O exemplo seguinte trouxe mais dificuldade de manipulação para resolução.

Exemplo 02: O volume de um reservatório em função do tempo é dado em litros pela função: $v(t) = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1)$. Considere que $t \geq 1$, e t é dado em dias e $v(t)$ é dado em litros. Sendo assim, após quantos dias o volume da piscina será de 284 litros?

A resolução do exemplo 02, eles acharam muito difícil, por terem que usar as propriedades de potências com expoente negativo e por terem mais contas a serem solucionadas. Eles apresentaram dificuldades nos processos de resoluções das equações, sendo necessário repeti-las mais de uma vez. No aplicativo GeoGebra, as dificuldades foram para inserir a fração na base do logaritmo e a confusão, por parte de alguns, sobre onde inserir os dados para a resolução dos problemas, pois a questão dava um elemento do conjunto imagem e pedia o correspondente no domínio. Novamente foi explicado que $v(t)$ representava o eixo dos y e t representava o eixo dos x, que as frações são divisões e que só precisavam digitar $(1:2)$ que o aplicativo entenderia como fração.

Resolução:

$v(t) = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$284 = 300 + 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$284 - 300 = 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1).$

$-16 = 4.\log_{\frac{1}{2}}(t-1) : (4)$

$-4 = \log_{\frac{1}{2}}(t-1)$, aplicando a definição de logaritmo:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = t - 1$

$2^4 = t - 1$

$16 + 1 = t$

$17 = t$

Resolução no GeoGebra: No campo "entrada", digitar a função logarítmica. No próximo campo "entrada" digitar a palavra “solução” e digitar entre os parênteses $v(t) = 284$ para obter a resposta. Alguns alunos erraram a questão pelo fato de não inserirem a equação corretamente no campo “solução”, ou inserirem os dados de acordo com o problema 01, trocando o elemento da imagem pelo elemento do domínio.

I – CONTEÚDO: Resolução de problemas de Funções Logarítmicas com o uso do aplicativo GeoGebra

II – OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Modelar problemas relacionados as funções logarítmicas no aplicativo GeoGeobra;
- Analisar o manejo do aplicativo com relação ao estudo das funções logarítmicas;
- Resolver problemas usando o aplicativo GeoGebra;
- Averiguar o entendimento das funções logarítmicas a partir do uso do aplicativo GeoGebra.

III - PROCEDIMENTOS:

1) PAUTA

1) Acolhida;

2) Retomada aos conteúdos anteriores;

3) Resolução de problemas de funções logarítmicas usando o aplicativo GeoGeobra.

4) Aplicação do questionário final.

2) Proposta de Atividade:

Na atividade de hoje, retomaremos o estudo dos logaritmos, relembrando alguns problemas elementares sobre funções logarítmicas usando o aplicativo GeoGebra. Após a retomada será resolvido questões sobre funções logarítmicas que já foram aplicadas no ENEM e de algumas universidades nacionais. Acontecerá a resolução de questões usando o aplicativo GeoGebra. Logo em seguida os participantes deverão enviar os prints da tela do aplicativo com as questões resolvidas, tanto as que estiverem com os resultados esperados quanto as que apresentaram alguma divergência na resolução ou mesmo no uso inadequado do aplicativo. Ao término do encontro será solicitado o preenchimento do questionário final e uma avaliação.

3) Avaliação:

O que você aprendeu na aula de hoje?

IV - FECHAMENTO DA AULA:

O que você achou mais interessante no encontro de hoje?

ANEXO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
Departamento de Matemática e Informática – CECEN
PROFMAT – UEMA
Acadêmico: Gleison Silva Pereira
Prof. Orientador: Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Questão para resolver usando o aplicativo GeoGebra.

01. (Enem 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura.

Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2 (t + 1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?