UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA – UFOB
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

TAIS GUINALLI SCHIAVO

ANÁLISE DA BNCC PARA O ENSINO MÉDIO E A REESTRUTURAÇÃO DO CURRÍCULO MATEMÁTICO EMBASADO NAS CHAVES PARA APRENDIZAGEM

BARREIRAS

2021

TAIS GUINALLI SCHIAVO

ANÁLISE DA BNCC PARA O ENSINO MÉDIO E A REESTRUTURAÇÃO DO CURRÍCULO MATEMÁTICO EMBASADO NAS CHAVES PARA APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho

BARREIRAS

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

S329 Schiavo, Taís Guinalli

Análise da BNCC para o Ensino Médio e a reestruturação do currículo matemático embasado nas chaves para a aprendizagem. / Taís Guinalli Schiavo. – 2021.

230f.: il

Orientador: Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho

Dissertação – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2021.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Currículo. I. Carvalho, Edmo Fernandes. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 510.7

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Tais Guinalli Schiavo

Análise da BNCC para o Ensino Médio e a reestruturação do currículo matemático embasado nas chaves para aprendizagem

Dissertação de mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/ Universidade Federal do Oeste da Bahia

Composição da Banca Examinadora

Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho – Orientador
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Prof^a^. Dr^a^. Eliane Santana de Souza Oliveira – Membro externo
Universidade Estadual de Feira de Santana

Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira – Membro interno
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Agradecimentos

Ser grato é assumir o quão abençoado somos por tudo o que temos e por quem somos. Por termos uma vida saudável, uma família que nos criou e acompanha nossas fases, amigos verdadeiros, um lar, uma profissão, mas, acima de tudo, a capacidade de estar em constante aprendizado e ser resiliente perante os obstáculos que inevitavelmente surgem em nossa vida. Ser grato é perceber que mesmo quando erramos, estamos aprendendo e que a cada manhã nos é dada a oportunidade de escrever uma nova história.

Reservo esse momento especial, assim, para expressar minha gratidão a tudo e todos que, de uma forma ou de outra, fizeram parte da minha caminhada e contribuíram para que essa etapa fosse concluída.

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e por ter me abençoado com uma família sensacional que sempre me apoiou em todas as decisões e que foi essencial na formação de meu caráter e de meus valores. Agradeço ainda, por todas as oportunidades que surgem no meu caminho e que permitem minha constante evolução. Agradeço por ter sido presenteada com essa sede incessante por conhecimento, por ser apaixonada pela leitura e por viver empolgada ao perceber que somos tão pequenos perante um mundo imenso e caótico de ideias e possibilidades.

Ao meu marido Felipe, por todo o apoio e incentivo, por entender minhas horas de dedicação a essa pesquisa e tornar meus dias mais leves, depois de horas e horas de leitura e escrita.

À minha colega Sivonete, por ter me acolhido tão bem em meu momento de transição de estado e de escola e, principalmente, por ter me informado sobre as inscrições do PROFMAT da UFOB, sem ela provavelmente não estaria onde estou hoje.

Aos meus colegas e professores da graduação do IFRS - campus Caxias do Sul, que sempre acreditaram em mim, as vezes até mesmo quando eu tinha dúvidas, e constantemente me incentivaram a entrar em um programa de mestrado.

Ao meu orientador Edmo, por acolher minhas ideias e contribuir tão ilustremente com seus conhecimentos e a todos os professores da UFOB que foram brilhantes durante esses dois anos de caminhada.

A todos os autores que tornaram esta pesquisa possível e, em especial, à Jo Boaler, por ser uma pessoa tão inspiradora e por lutar bravamente pela disseminação de uma matemática útil e acessível a todos.

“A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente de repetir o que outras gerações fizeram - homens que são criativos, inventivos e descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que podem ser críticas, podem verificar e não aceitar tudo o que lhes é oferecido”.

Jean Piaget

RESUMO

A homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio, no ano de 2018, trouxe desafios à comunidade escolar e, em especial, ao professor de matemática, que se deparou com a necessidade de quebrar paradigmas e reinventar suas práticas pedagógicas. Isso porque, além de conhecer e entender suas propostas, totalmente ressignificadas em busca de um ensino que promova o protagonismo juvenil, é preciso elaborar e executar planejamentos que viabilizem o ensino efetivo de uma matemática útil para a vida do estudante, tendo em vista a melhora do cenário atual que indica baixos níveis de aprendizado na área e considerando, ainda, a redução de carga horária semanal destinada à disciplina em escolar regulares. A partir das inquietações geradas por este contexto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa nos campos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e da Neurociência Cognitiva (NC), com enfoque especial às chaves para aprendizagem de Jo Boaler que, por sua vez, nos levaram a traduzir a problemática central deste trabalho como: o fenômeno da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas utilizadas nas instituições escolares. A partir dessa delimitação, objetivou-se construir um Modelo Praxeológico Didático-Matemático (Alternativo) (MPDMA) para o ensino de matemática sob a ótica da TAD, da NC e, mais especificamente, das chaves para aprendizagem, considerando a necessidade de reestruturação da prática docente e do currículo recorrente da implementação da BNCC no Ensino Médio. Objetivamos também compreender como a TAD, os estudos recentes sobre a NC e as seis chaves para aprendizagem, podem influenciar na reestruturação da prática docente matemática; quais as aproximações e distanciamentos entre as competências e habilidades propostas pela BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias e o ensino com base nas seis chaves para aprendizagem e, ainda, qual o papel das tarefas matemáticas neste cenário. Este estudo permitiu constatarmos uma estreita relação entre as propostas da BNCC, da TAD e da NC bem como a importância ímpar das tarefas matemáticas para um ensino eficiente. Além disso, a construção do MPDMA com foco em dicas e informações práticas a respeito de uma abordagem matemática embasada na multiplicidade, flexibilidade e profundidade, que utiliza tarefas matemáticas visuais e abertas abre as portas para a criação de outros materiais que objetivem ajudar o professor no processo de organização e planejamento de aulas, escolha de tarefas e elaboração de avaliações formativas.

Palavras-chave: Chaves de aprendizagem matemática. Ensino de matemática. Base Nacional Comum Curricular. Teoria Antropológica do Didático. Neurociência Cognitiva.

ABSTRACT

The approval of the National Common Curricular Base (BNCC) for Secondary Education, in 2018, brought challenges to the school community and, in particular, to the mathematics teacher, who faced the need to break paradigms and reinvent their pedagogical practices. This is because, in addition to knowing and understanding their proposals, totally reframed in search of teaching that promotes youth protagonism, it is necessary to develop and execute plans that enable the effective teaching of mathematics useful for the student's life, with a view to improving the current scenario that indicates low levels of learning in the area and also considering the reduction of weekly hours devoted to discipline in regular schoolchildren. Based on the concerns generated by this context, a qualitative bibliographic research was carried out in the fields of Anthropological Theory of Didactics (TAD) and Cognitive Neuroscience (NC), with a special focus on the keys to learning by Jo Boaler, who, Instead, they led us to translate the central problem of this work as: the phenomenon of the fragmentation of mathematical knowledge in the curricula and the superficiality of the mathematical tasks used in school institutions. From this delimitation, the objective was to build a Praxeological Didactic-Mathematical Model (Alternative) (MPDMA) for the teaching of mathematics from the perspective of TAD, NC and, more specifically, of the keys for learning, considering the need for restructuring the teaching practice and the recurrent curriculum of the implementation of BNCC in high school. We also aim to understand how TAD, the recent studies on NC and Jo Boaler's six learning keys, can influence the restructuring of mathematical teaching practice; what are the approximations and distances between the competences and skills proposed by the BNCC for the area of Mathematics and its Technologies and teaching based on the six learning keys and, still, what is the role of mathematical tasks in this scenario. This study allowed us to see a close relationship between the proposals of BNCC, TAD and NC, as well as the unique importance of mathematical tasks for efficient teaching. In addition, the construction of the MPDMA with a focus on tips and practical information regarding a mathematical approach based on multiplicity, flexibility and depth, which uses visual and open mathematical tasks opens the door to the creation of other materials that aim to help the teacher in process of organizing and planning classes, choosing tasks and preparing formative assessments.

Keywords: Keys to learning Matematical. Matematcs teaching. Common National Curriculum Base. Anthropollogical Theory of Didactics. Cognitive Neuroscience.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTAS DE QUADROS

Lista de siglas

AH –	Colégio Amber Hill
BNCC –	Base Nacional Comum Curricular
DM –	Didática da Matemática
INEP –	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB –	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC –	Ministério da Educação
MPDMA –	Modelo Praxeológico Didático-Matemático (Alternativo)
NC –	Neurociência Cognitiva
OBMEP –	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE –	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
OM –	Organização Matemática (Praxeologia Matemática)
PISA –	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PP –	Colégio Phoenix Park
SAEB –	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TAD –	Teoria Antropológica do Didático
TTD –	Teoria da Transposição Didática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É de conhecimento geral que a Matemática é uma disciplina de "poucos amigos". Empiricamente sabe-se como os professores desta área encontram dificuldades em ensiná-la, enquanto grande parte dos alunos alega não compreender tal disciplina e reluta em enxergá-la como algo útil para suas vidas.

Os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)[1] de 2017, mostram como o ensino de Matemática está crítico no Brasil. A pesquisa que verifica o nível de proficiência em Matemática de alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio mostrou dados preocupantes: em uma escala de níveis que vai até 10 (sendo 10 o nível máximo de proficiência), 51,4% dos alunos do 5º ano estão abaixo do nível 5; no 9º ano, 78% estão abaixo deste nível e, na 3ª série, alarmantes 83% dos estudantes estão abaixo do nível 5 de proficiência em matemática (INEP, 2019, p.96-100).

Do mesmo modo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)[2], maior estudo sobre educação do mundo apontou, em sua última edição realizada em 2018, que o cenário brasileiro de 2017 se manteve. Segundo esta pesquisa, 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico mínimo considerado para o pleno exercício da cidadania. Os dados também apontam que

> **[...] mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras.** Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área. Em termos de escolarização, os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da OCDE[3] (489) quando o assunto é proficiência em Matemática (MEC, 2019, s/p, grifo nosso).

---

[1] O SAEB é uma pesquisa realizada periodicamente pelo INEP. No ano de 2017, coletou uma série de informações junto às redes de ensino e às escolas de Educação Básica, por meio de testes cognitivos e questionários, com o intuito de oferecer subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais, como também para a produção de análises e estudos, tornando propícia a avaliação da qualidade da educação ofertada no país. O público alvo desta pesquisa foram alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Participaram do Saeb 2017 mais de 73 mil escolas e aproximadamente 5,4 milhões de estudantes de escolas públicas e privadas. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/RELAT%C3%93RIO+SAEB+2017/fef63936-8002-43b6-b741-4ac9ff39338f?version=1.0>. Acesso em 08 abr. 2020.

[2] Realizado a cada três anos, o Pisa tem o objetivo de mensurar até que ponto os jovens de 15 anos adquiriram conhecimentos e habilidades essenciais para a vida social e econômica. Em 2018, 79 países e 600 mil estudantes participaram do teste, que ocorre desde 2000. No Brasil, foram envolvidas 597 escolas públicas e privadas com 10.961 alunos, escolhidos de forma amostral de um total aproximado de 2 milhões de estudantes. Cerca de 7 mil professores também responderam questionários.

[3] A Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) constitui foro composto por 35 países, dedicado à promoção de padrões convergentes em vários temas, como questões econômicas, financeiras,

Além disso, quando comparado com países da América do Sul, o Brasil é o que tem resultados mais insatisfatórios na disciplina; seus índices do Pisa encontram-se estagnados desde 2009, mesmo com aumento de investimentos pelo governo federal na Educação Básica, segundo o site do Ministério da Educação (MEC).

Desde 1988, quando a Constituição Federal do Brasil garantiu, em seu artigo 205, a educação como direito fundamental e dever do Estado, da família e da sociedade, diversas políticas públicas vêm sendo implementadas a fim de oferecer uma educação de qualidade a todos os cidadãos brasileiros. Em meio a estas, destacamos o processo de construção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[4], prevista no Inciso IV do Artigo 9° e no Artigo 26, ambos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que afirmam ser responsabilidade da União o estabelecimento de competências e diretrizes para a educação, nos níveis Infantil, Fundamental e Médio, a fim de nortear os currículos e conteúdos mínimos necessários para uma formação básica comum, bem como a garantia de que cada sistema de ensino possa estabelecer uma parte curricular diversificada, caracterizada pelas necessidades regionais e locais. A elaboração da BNCC iniciou-se em 2014 e seu processo de implementação se estende até o presente momento, onde escolas pilotos iniciam os testes do Novo Ensino Médio, criado a partir da homologação, em 2018, da BNCC na etapa Ensino Médio.

A parte da BNCC direcionada ao Ensino Médio (que agora passa a ser tratado como Novo Ensino Médio) traz expectativas positivas para o ensino de matemática, bem como de outras áreas do conhecimento. O documento reconhece que o ciclo final da Educação Básica brasileira tem sido "um gargalo na garantia do direito à educação", explanando uma crítica ao excesso de componentes curriculares presentes no currículo vigente até então, bem como às abordagens distantes da realidade dos jovens e do mundo do trabalho. A partir dessa perspectiva, sua nova estrutura[5], agrupando os componentes curriculares em áreas do conhecimento e adicionando ao currículo os itinerários formativos, promete extinguir a

comerciais, sociais e ambientais. Suas reuniões e debates permitem troca de experiências e coordenação de políticas em áreas diversas da atuação governamental. Disponível em: <http://www.itamaraty.gov.br/pt-BR/politica-externa/diplomacia-economica-comercial-e-financeira/15584-o-brasil-e-a-ocde>. Acesso em 08 abr. 2020.

[4] Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 09 jun 2020.

[5] A saber: linguagens e suas tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; ciências da natureza e suas tecnologias; ciências humanas e sociais aplicadas; formação técnica e profissional.

fragmentação de conteúdos tão comum nas escolas e focar na formação técnica e profissional do estudante, bem como no desenvolvimento de dez competências gerais[6] em busca de igualdade, diversidade e equidade.

Com relação à área da Matemática e suas Tecnologias, é visível a ênfase no ensino de matemática integrado à realidade do aluno, relacionado às novas tecnologias e ao pensamento computacional, como também provocador de processos de reflexão e abstração, criação, análise, indução e dedução sistêmica, em busca de sustentação para tomada de decisão. Além disso, o documento destaca a importância de desenvolver cidadãos com habilidades de investigação, resolução de problemas e construção de modelos, a fim de que sejam capazes de "[...] mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p.529).

Apesar de apresentar um discurso totalmente repaginado, a própria BNCC salienta que um dos desafios para a aprendizagem da matemática no Ensino Médio está em proporcionar aos estudantes uma visão de matemática ampla e real, fruto de um longo processo de experiências humanas ao invés de um conjunto de regras e técnicas a serem memorizadas, como vem acontecendo, de modo geral, nas aulas de matemática brasileiras.

É visto que muito deste trabalho (reorganizar os conteúdos do currículo, repensar as práticas pedagógicas, reproduzir e construir outras visões da matemática) está nas mãos dos professores, implementadores diretos desta "nova" perspectiva de ensino na sala de aula. Sendo assim, acreditamos que mudanças efetivas no quadro educacional brasileiro, de matemática em especial, só acontecerão quando os professores estiverem preparados para esta transição. Isto porque, a maioria deles (incluo-me nesta maioria), aprendeu matemática de forma tradicional e sabe "ensiná-la" da maneira como vem se fazendo até agora: apresentada, em grande parte, por aulas expositivas, cuja sequência se dá por explanação de um novo conteúdo, exploração de exemplos, aplicação de tarefas de fixação e, por fim, avaliação escrita formal.

Nesse sentido, Moralatti et al. (2014, p. 649) explicam que isso ocorre pois a prática docente sofre interferência direta dos saberes que foram constituídos ao longo de toda a escolaridade do professor, inclusive, apontando que suas experiências prévias como estudantes de matemática interferem mais em sua prática do que as próprias experiências adquiridas na formação superior.

[6] As dez competências gerais da Educação Básica serão exploradas posteriormente, no capítulo 2.

Além disso, estudos de Jo Boaler (2016, 2017, 2018, 2019a, 2019b, 2019c, 2020), Moralatti et al. (2014), Devlin (2019), Valle (2019) dentre outros, apontam que mesmo quando há intenção de mudar as formas de ensinar, nem sempre os resultados são satisfatórios, muitas vezes devido ao fato de que os professores de matemática se veem frente as extensas listas de conteúdos fragmentados que precisam ser ensinados ao longo do ano e sentem-se pressionados a ensinar todos eles, o que acaba, muitas vezes, resultando em um ensino superficial, embasado na memorização de fórmulas, reprodução de algoritmos e execução de listas de tarefas repetitivas, pouco profundas e desconexas. Junto a essa problemática, soma-se o fato de que a implementação do Novo Ensino Médio em escolas de tempo regular impactará na redução do número de aulas destinadas especificamente à disciplina de matemática, agravando ainda mais a preocupação em "dar conta" de todos os tópicos previstos para cada série, durante um ano letivo.

Sendo assim, tendo em vista o quadro atual do ensino de matemática brasileiro previamente apresentado, as expectativas advindas devido à implementação do Novo Ensino Médio e a necessidade de orientação e apoio aos docentes diante da urgente reestruturação do ensino matemático, nosso objetivo com esse trabalho é construir um Modelo Praxeológico Didático Matemático (Alternativo) (MPDMA) para o ensino de matemática sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD)[7], da Neurociência Cognitiva (NC) e, mais especificamente, das chaves para aprendizagem, considerando a necessidade de reestruturação da prática docente e do currículo recorrente da implementação da BNCC no Ensino Médio.

Inicialmente, nos desdobraremos sobre *o fenômeno da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas utilizadas nas instituições escolares***.** A partir das reflexões em torno deste fenômeno, pensado em termos da Teoria da Transposição Didática, buscaremos responder: de que maneira a TAD, os estudos recentes sobre a NC e as seis chaves para aprendizagem de Jo Boaler, podem influenciar na reestruturação da prática docente matemática? Quais são as aproximações e distanciamentos entre as competências e habilidades propostas pela BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias e o ensino com base nas seis chaves para aprendizagem? Qual o papel das tarefas matemáticas neste cenário?

---

[7] No capítulo 1 destinaremos um tópico para a explanação das principais ideias desta teoria.

METODOLOGIA

Na busca por respostas a estes questionamentos e a fim de atingir o objetivo proposto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa (YIN, 2016; GODOY, 1995). A revisão de literatura realizada bem como a fundamentação teórica base deste trabalho, contemplaram publicações científicas recentes da área da Didática da Matemática, da Neurociência Cognitiva e da Educação - com clara ênfase nos estudos de Jo Boaler a respeito das chaves para aprendizagem - que foram primordiais para o delineamento da pesquisa como um todo e para a compreensão do fenômeno sob o qual nos debruçamos.

A partir da compreensão do fenômeno delimitado e embasados nas noções epistemológico-teóricas de referência desta pesquisa, iniciamos uma análise dos documentos de referência para a educação na modalidade Ensino Médio (BNCC e Documento de Orientação Curricular da Bahia) a fim de elucidar as novas diretrizes para o currículo e para o ensino de matemática no Brasil e na Bahia, e verificar as relações entre estes documentos, a TAD, a NC e as chaves para a aprendizagem.

Feito isso e amparados nas reflexões realizadas no decorrer desse processo, criamos um Modelo Praxeológico Didático Matemático (Alternativo) que, a partir de referências da TAD, da NC e das chaves da aprendizagem e ainda, considerando as orientações da BNCC e do Documento de Orientação Curricular da Bahia, busca guiar os professores de matemática nesse cenário de mudanças.

O MPDMA foi construído, assim, tendo em vista a compactação das informações exploradas durante os dois momentos anteriores (embasamento epistemológico-teórico e análise dos documentos de referência para a educação na modalidade Ensino Médio) a fim de apresentar orientações aos professores de matemática interessados num ensino sob esse viés, com relação à preparação de aulas, à escolha de tarefas, à orientação de estudantes (individual e em grupo), à avaliação e à organização curricular. Complementarmente, apresentamos alguns exemplos de sequências didáticas embasadas no MPDMA, como forma de deixar ainda mais claro aos professores as diversas possibilidades de abordagem que o ensino de matemática sob a luz das noções teóricas supracitadas proporciona.

Com base no método acima descrito, este trabalho foi organizado em grandes blocos.

No primeiro capítulo, a revisão de literatura conduz nosso olhar às concepções do professor e de que forma as tarefas matemáticas utilizadas por ele podem interferir na construção de saberes matemáticos. Ainda, indica a importância de entendermos alguns conceitos da Didática da Matemática capazes, tanto de explanar a trajetória do saber matemático

- que percorre um longo caminho desde a sua criação, nas universidades e instituições de pesquisa, até sua chegada à instituição escolar - quanto de organizar o saber matemático através de um modelo praxeológico, que o descreve em dois níveis: *práxis* (relacionado ao saber fazer) e *logos* (relacionado ao saber propriamente dito). Atrelados a esta temática, são apresentados, ainda neste capítulo, estudos da Neurociência Cognitiva que fornecem provas sobre a incrível plasticidade cerebral e sobre como nossas funções executivas influenciam no aprendizado. As perspectivas a respeito do cérebro humano nos conduzem, ainda, às chaves da aprendizagem de Jo Boaler, que salientam a importância de uma nova mentalidade matemática embasada no poder do esforço e dos erros, na multiplicidade, flexibilidade e profundidade da matemática, bem como nas inúmeras possibilidades que o trabalho colaborativo pode oferecer para um ensino significativo e igualitário. Nesse sentido, damos grande enfoque às tarefas matemáticas abertas e visuais, apresentando possibilidades de explorar quaisquer tarefas sob uma nova perspectiva, tendo em vista a formação de pensadores matemáticos e não meros reprodutores de algoritmos.

Na sequência, o segundo capítulo apresenta uma análise dos documentos orientadores para o ensino de matemática no Novo Ensino Médio, explanando, primeiramente, as competências e habilidades esperadas nesta fase da Educação Básica e, posteriormente, as relações existentes entre estes documentos e os estudos apontados no primeiro capítulo.

Por fim, no terceiro capítulo propomos e analisamos o MPDMA para o ensino de matemática sob as novas perspectivas elencadas, sugerindo aos professores esquemas de organização e planejamento de aula que levem em consideração as chaves de aprendizagem, enfatizando o uso de tarefas abertas e visuais. Ainda, apresentamos uma sugestão de organização curricular para os três anos do Ensino Médio, criado a partir da conexão de grandes ideias geradoras, que têm como intuito possibilitar o desenvolvimento de todas as habilidades exigidas pela BNCC nesta etapa de ensino.

1 NOÇÕES EPISTEMOLÓGICO-TEÓRICAS DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS CHAVES PARA APRENDIZAGEM

Conforme mencionado anteriormente, no decorrer do presente trabalho refletiremos sobre *o fenômeno didático da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas utilizadas nas instituições escolares.* Para tanto, este capítulo apresenta uma revisão de literatura que explana, de forma geral, os fatos envolvidos neste fenômeno e de que maneira eles vêm sendo observados, no Brasil e no mundo, por pesquisadores da educação. Ainda, elucida conceitos da Didática da Matemática (DM), bem como resultados de estudos da NC capazes de apontar evidências sobre práticas pedagógicas diferenciadas e, principalmente, sobre o uso de tarefas abertas e visuais que favorecem a aprendizagem matemática. Por fim, observa o fenômeno de interesse desta pesquisa sob a ótica da DM e da NC, apontando as aproximações entre estes campos de estudo e de que forma eles ajudam a compreender tal fenômeno.

1.1 REVISÃO DE LITERATURA

O cenário de Educação Matemática observado nas avaliações externas previamente mencionadas (SAEB, PISA) revela uma real necessidade de interferências na forma como a matemática é vista e ensinada em grande parte das escolas. Becker (2019) afirma que as concepções epistemológicas dos professores interferem diretamente no ensino dessa disciplina, e, de forma geral, se referem “[...] à ausência de preocupação com a gênese do conhecimento matemático, à crença na transmissibilidade dos conceitos dessa ciência, à natureza desse conhecimento e à presença de concepções epistemológicas empiristas e aprioristas[8]” (BECKER, 2019, p. 963). Segundo o autor essas concepções (empiristas e aprioristas) “[...] negam o desenvolvimento cognitivo, à medida que concebem a origem da capacidade cognitiva humana como resultante da pressão do meio sobre uma tábula rasa ou como determinada pelo genoma[...]” (BECKER, 2019, p. 964).

De forma semelhante, Boaler (2018, 2019) afirma que o modo como a matemática é vista e tratada pelos professores é equivocada e prejudicial, pois é embasada na crença de que existe predisposição para aprender matemática (privilégio só de alguns), acredita na repetição

[8] Concepções empiristas dizem respeito à crença na transmissão de conhecimentos como condição suficiente para a aprendizagem enquanto as concepções aprioristas dizem respeito à crença na herança genética das capacidades matemáticas.

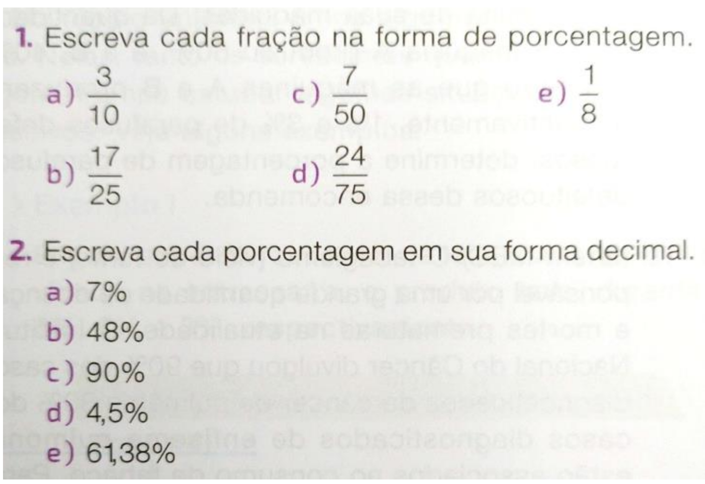
de métodos que podem ser transmitidos e memorizados e não dá espaço à criatividade e diversidade de ideias.

Em palestra na Universidade Stanford, Califórnia, em maio de 2019, Keith Devlin e Jo Boaler, refletindo a respeito da Natureza da Matemática do século XXI[9], comentam sobre a necessidade de reverter o papel de vilã que a matemática assume em grande parte do mundo, tanto para crianças, como para jovens e adultos, através de uma mudança de perspectiva do professor frente ao seu ensino. Boaler descreve, em sua fala, um pouco do cenário de Educação Matemática atual e aponta algumas possibilidades:

> Ensinam métodos para as crianças e elas têm que repetir os métodos. Elas são julgadas por quão corretas e rápidas elas são ao repetir estes métodos. [...] Mas há uma forma totalmente diferente de pensar matematicamente, que eu acho ser mais valiosa e que chamo de "liberdade matemática". Nessa forma, ao invés de dar métodos para as pessoas e pedir: "repitam esses métodos comigo", você dá problemas ricos e abertos. E elas trabalham com esses problemas, testam ideias diferentes, chegam a limites onde não conseguem mais avançar. E então o professor pode ensinar os métodos dentro destes problemas ricos e abertos. Isso muda tudo para as crianças. Quando você dá estas questões abertas, elas têm uma tarefa muito diferente como aprendizes matemáticos. Não estão apenas repetindo o método do professor. Primeiro, elas têm que criar ideias para chegar a métodos por elas mesmas. Este é um processo tão importante, mas é algo que nossas crianças nunca, ou raramente, têm a oportunidade de fazer nas salas de aula. [...] Quando elas chegam para a prova elas têm que escolher qual método usar, mas, em muitos casos, elas nunca escolheram um método. (BOALER; DEVLIN, 2019).

Para exemplificar de maneira breve, a crítica da autora no trecho acima, observemos duas tarefas retiradas de um livro didático[10] utilizado na 3ª série do Ensino Médio (PNLD 2018-2020) em uma escola estadual da Bahia (figura 1).

Figura 1: Tarefa sobre porcentagem apresentada em um livro didático brasileiro.


1. Escreva cada fração na forma de porcentagem.

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{17}{25}$ c) $\frac{7}{50}$ d) $\frac{24}{75}$ e) $\frac{1}{8}$

2. Escreva cada porcentagem em sua forma decimal.

a) 7%
b) 48%
c) 90%
d) 4,5%
e) 61,38%

Fonte: Souza e Garcial, 2016, p.13

[9]BOALER, J. DEVLIN, K. Palestra proferida em Stanford, Califórnia, 2019. Disponível em:< https://www.YouCubed.org/pt-br/resources/the-nature-of-21st-century-mathematics/>. Acesso em 24 mar. 2020.

[10] SOUZA, J. R. GARCIA, J. S.R.. #Contato matemática, 3º ano. 1.ed. São Paulo: FTD, 2016.

Nota-se um engessamento das práticas matemáticas e um certo grau de superficialidade nas tarefas apresentadas. Percebe-se que a tarefa não permite nem estimula a criatividade na representação das soluções e de técnicas de resolução. Verifica-se também a crença na prática consecutiva de tarefas iguais, com o objetivo de promover a memorização de uma técnica específica.

Lucas et al. (2014) refletem sobre esta problemática amparados na Teoria Antropológica do Didático[11], de Yves Chevallard, e consideram-na como um fenômeno didático institucional, ou seja, um fato observável no ensino de matemática, proveniente das instituições escolares enquanto um todo, derivado de diversas interferências internas e externas, e não um problema direcionado a um ou outro professor. Os autores apontam, entretanto, que as tarefas matemáticas escolhidas pelo docente são fatores decisivos no ensino de uma matemática inflexível, atomizada e fragmentada.

Boaler, Munson e Williams (2017), nesse mesmo sentido, abordam este fenômeno sob uma perspectiva curricular, observando como as interferências externas direcionam as escolhas dos professores por tarefas que objetivam apenas a memorização e a aplicação de métodos:

> [...] os professores recebem conjuntos de padrões que devem ensinar e, independentemente do nível de competência dos redatores desses padrões, **todos fatiam a matemática em pedacinhos, dando aos professores pequenas áreas atomizadas de conteúdo** - muitas vezes, um conjunto de métodos – **a serem ensinados**. **As conexões desaparecem - os professores não conseguem vê-las e elas se perdem das rotas de aprendizado dos alunos.** Em vez disso, os professores veem as listas de conteúdo - geralmente com 100 ou mais métodos em um ano - e trabalham sistematicamente em cima delas. Isso muitas vezes leva a abordar o conteúdo superficialmente, pois, quando a matemática desconectada é oferecida em pequenas seções, há muita coisa a ser feita antes da conclusão de qualquer ano. As conexões entre as ideias ficam invisíveis e os alunos não desenvolvem uma das percepções mais importantes possíveis - de que a matemática é um conjunto de grandes ideias conectadas (p.1, grifo nosso).

Devlin (2019), em uma perspectiva histórica, traz em pauta as mudanças do mundo e suas relações com a problemática até aqui abordada. Segundo sua reflexão, nos anos 90, não existia muita tecnologia e era fundamental conhecer procedimentos matemáticos e ter habilidades processuais, mas hoje em dia, com o avanço das tecnologias, o ensino da matemática focado apenas em métodos e procedimentos não tem sentido. Ele defende que embora a "abordagem tradicional[12]" da matemática tenha funcionado em sua época escolar,

[11] O próximo tópico deste capítulo é destinado a uma melhor explanação desta teoria.

[12] Ao utilizarmos o termo "abordagem tradicional" ou "ensino tradicional", durante este trabalho, referimo-nos à prática de sequências didáticas pautadas na transmissão de conteúdos, onde há ação predominante do professor que inicia o conteúdo, estabelece a sequência, expõe, determina procedimentos, conclui e avalia, cabendo ao aluno, apenas, a execução de atividades (MORELATTI et al, 2014, p.639).

com ele e com outros no passado, trouxe medo e ódio à essa disciplina a grande parte dos alunos e se refere ao ensino tradicional da matemática como uma "carnificina humana" que funciona para uma minoria. Ainda, aponta que essa forma de ensino, além de permitir que pouquíssimos profissionais se formem na área (somente o suficiente para atender à demanda social), forma jovens no Ensino Médio com capacidade matemática insuficiente para ter sucesso em um mundo em que ela desempenha um papel central.

> [...] a questão não é algoritmos versus estratégias; trata-se de abordar a matemática como o fornecimento de um kit de ferramentas (OBSOLETO), em vez de desenvolver uma maneira de pensar (CRUCIAL). A primeira abordagem do kit de ferramentas era defensável e, sem dúvida, inevitável, nos milênios antes de termos ferramentas para matemática processual. **Mas no mundo de hoje, a capacidade crucial de ser dominada é o pensamento matemático** [...] O matemático de hoje pensa como um humano, em vez de calcular como um computador (DEVLIN, 2019, grifo nosso, tradução nossa).

Jo Boaler (2019a, p.30) afirma, inclusive, que "[...] a matemática é um domínio conceitual, não uma lista de fatos e métodos a serem lembrados" e destaca que os alunos que entendem a matemática como um rol de regras a serem decoradas "[...] não estão envolvidos no processo crítico de compreensão, de modo que seu cérebro é incapaz de organizar e arquivar ideias; em vez disso, ele se esforça para se agarrar a longas listas de métodos e regras".

Valle (2019) aponta como o próprio Pisa, observado a nível mundial, é um forte indicador de que os baixos níveis de aprendizagem são percebidos em escolas onde as técnicas matemáticas são priorizadas enquanto sua fundamentação, os questionamentos e as reflexões ficam em segundo plano ou são esquecidos. No Japão, por exemplo, que atinge alto nível de desempenho em exames internacionais de matemática, os estudantes dedicam cerca de 44% do seu tempo criando, raciocinando e se esforçando para compreender conceitos e contam com grande incentivo dos professores no enfrentamento de dificuldades. Em contrapartida, em países com menor índice de desempenho, observa-se uma cultura onde o professor guia o aluno na direção da resolução de um problema quando surge qualquer dificuldade; ele estrutura a resolução, "[...] fragmenta-a em pequenos passos simples e esvazia o problema de suas dificuldades e oportunidades de aprendizagem mais profunda. Isso faz com que os alunos se sintam bem, mas aprendam menos, ou de forma mais superficial" (VALLE, 2019, p.67-68).

Para Lucas et al. (2014), uma das alternativas para minimizar os efeitos do fenômeno da rigidez e atomização da matemática, é construir a matemática escolar sob um viés participativo, em um ambiente propício ao diálogo, sugerindo, por exemplo, que os alunos recebam oportunidades de se envolverem na atividade matemática através de investigações, uma vez que atividades investigativas:

> [...] por um lado permitem a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade e a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição; e, por outro lado, permitem procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes e levantar novas questões para investigar (LUCAS et al., p.1329).

Na citação acima, percebe-se a forte influência da TAD à ótica dos autores, que enfatizam como a escolha adequada de tarefas proporciona aos estudantes o conhecimento do saber matemático por completo, passando por todos os seus níveis praxeológicos: o nível *práxis*, referente ao saber fazer e o nível *logos* que se refere à justificativa da prática, ou melhor, ao saber propriamente dito.

Nesse mesmo sentido, Boaler, Munson e Williams (2017) defendem que o ensino de matemática a partir de grandes ideias é essencial para seu aprendizado. Os autores deixam claro que o aprofundamento destas ideias centrais e a verificação das conexões existentes entre elas são mais importantes do que quantidade, memorização ou rapidez e declaram a importância de tarefas abertas e visuais para a promoção desta “nova matemática”, conceitual e multidimensional.

A partir desta breve explanação, torna-se necessário, agora, esclarecer, sob a ótica da DM, as diferenças entre fatos e fenômenos didáticos, as relações institucionais envoltas no ensino e na aprendizagem e a estrutura das tarefas matemáticas. Ainda, é preciso conhecer os aspectos da Neurociência Cognitiva que contribuem para esta temática, considerando a plasticidade cerebral como fundamental para a aquisição de novos conhecimentos. Complementarmente aos argumentos sobre a importância da neurociência na educação, as seis chaves da aprendizagem de Jo Boaler concretizam de forma simples, as maneiras pelas quais o professor pode colocar em prática tais conhecimentos a fim de elaborar planejamentos de aula, com vista em tarefas investigativas, visuais e abertas, trabalhadas de forma colaborativa.

Acompanhemos tal explanação nos tópicos que seguem.

1.2 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: NOÇÕES DIDÁTICAS

O ato de ensinar é tão antigo quanto as primordiais civilizações e embora essa prática seja naturalizada pelo nosso condicionamento cultural, trata-se de uma prática demasiadamente complexa (CHEVALLARD, 2013). Sendo assim, para tratarmos do ensino e aprendizagem matemática, neste trabalho, recorreremos a alguns conceitos da Teoria da Transposição

Didática (TTD) e da Teoria Antropológica do Didático, ambas desenvolvidas[13] pelo professor e pesquisador francês Yves Chevallard.

Primeiramente, é essencial entender o papel geral da *teoria* na didática, diferenciando *fatos* de *fenômenos*. Isso porque, embora haja um consenso na sociedade de que a ciência se preocupa com os *fatos*, Chevallard (2013) afirma que essa é uma descrição insatisfatória da ciência. Ele menciona que os *fatos* representam aquilo que realmente existe, que é real - acontecimentos, feitos, casos, etc. - enquanto os *fenômenos* revelam "[...] mais relacionamentos do que a nossa familiaridade direta com o mundo dos fatos nos permitiria reconhecer" (CHEVALLARD, 2013, p.2). Isso significa que os *fenômenos* tratam de estabelecer relações maiores entre os fatos e os fatores que influenciam e interferem no acontecimento dos mesmos; de encontrar os caminhos que geraram esse ou aquele fato. A *teoria* começa a partir do *fato*, entretanto rapidamente se vê envolta de uma diversidade de outros fatores e influências. Os *fenômenos didático*s são, portanto, *construções teóricas*.

A TTD, nesse sentido, se preocupa com os fenômenos que ocorrem no sistema de ensino e, basicamente, lida com duas questões centrais: os sujeitos envolvidos e os conhecimentos a serem ensinados.

Primeiramente, em se tratando dos sujeitos envolvidos, a Didática da Matemática busca "[...] compreender e explicar em bases científicas os 'sistemas antropológicos'" relacionados ao ensino (CHEVALLARD, 2013, p.3). Ela se encaixa no campo das ciências da cultura e acaba, muitas vezes, tendo sua objetividade científica questionada, já que, ao lidar com seres humanos, sofre influência de quem está envolvido neste sistema educacional - pessoas compreendidas na estrutura e funcionamento desse sistema, aos quais Chevallard denominou *atores*.

> De fato, sempre que têm algo a dizer sobre o assunto, os atores de dentro do sistema são propensos a contestar a descrição dos ditos e feitos das pessoas de fora. E alguns deles vão até desafiar o próprio direito que as pessoas de fora têm de ofertar tais descrições, com o argumento de que eles não participam do sistema (CHEVALLARD, 2013, p.3).

Nesse sentido, o autor aponta que um dos problemas enfrentados pelo didático se refere ao fato de que ele descreverá o mundo didático em termos de fenômenos enquanto os atores do sistema sempre irão responder com fatos.

---

[13] O conceito de didática e transposição didática são anteriores a Yves Chevallard, mas esse autor desenvolveu uma teoria em torno da didática, levando em consideração, não apenas o cenário escolar, mas toda a transformação e influências sofridas pelo conhecimento desde sua origem (nas universidades e centros de pesquisa), passando pela sociedade (que seleciona o que deve ou não ser ensinado), até chegar à escola e se transformar em um objeto de saber a ser ensinado.

> Os atores irão firmemente opor sua sabedoria do mundo escolar, em virtude da íntima familiaridade que lhes dá acesso fácil e direto a tal saber, à suposta ciência do sistema de ensino, à qual os didáticos gostariam tanto de recorrer. Tal é a situação que coloca o didático em apuros (CHEVALLARD, 2013, p.4).

A DM, portanto, não lida somente com a forma como um aluno aprende ou não, mas observa os diversos fatos envolvidos (não obviamente semelhantes a ele) que, após um estudo aprofundado, irão se mostrar relacionados intrinsecamente. "A experiência prova que a didática da matemática deve realmente se preocupar com todos os aspectos da vida didática (CHEVALLARD, 2013, p.5)".

A discrepância entre a linguagem dos fatos e dos fenômenos é um dos objetos de observação da TTD. Vejamos que observar uma aula de matemática, atentando à relação binária professor-aluno diz respeito a um fato, entretanto, sob a perspectiva da teoria didática, essa relação deve ser analisada de forma ternária, relação chamada por Chevallard (2013) de *relação didática*. Ela diz respeito a uma relação que une três "objetos": o professor, o ensino e o conhecimento ensinado.

Para o autor, estudar e entender os processos envoltos ao conhecimento a ser ensinado é primordial e deve entrar em pauta na teoria didática pois "[...] muito pouco do que ocorre entre professor e alunos pode ser entendido apenas em termos do que o professor e os alunos concebem, por assim dizer, como pessoas livres do contexto" (CHEVALLARD, 2013, p.6). Nesse sentido, Chevallard (2013) faz uma crítica ao fato de que, a maioria dos professores e pessoas da *Noosfera*[14] se concentram apenas na sua relação com o aluno e na relação que o aluno tem com o conhecimento, mas se esquivam totalmente da questão do conhecimento, como se fosse insignificante entender suas relações pessoais com o mesmo e o processo de chegada do conhecimento à escola. A transformação do conhecimento é ingrediente essencial na didática, entretanto, é

> [...] um dos mais frágeis e ocultos de seus constituintes, a ser referido apenas alusivamente e indiretamente. Curiosamente, o conhecimento no sistema de ensino parece gerar atitudes ambivalentes por parte daqueles que são responsáveis por ele - ou seja, os atores que são realmente agentes do sistema. Há portanto, mais do que um toque de sacralidade e medo nas relações que o conhecimento inspira, como se alguma coisa deva ser mantida em segredo [...] E é precisamente a tarefa da teoria da transposição didática, se puder contribuir de algum modo, revelar o que pode ter dado errado (CHEVALLARD, 2013, p.7).

[14]Expressão utilizada para definir a 'esfera pensante' ou instituição invisível' relacionada ao conhecimento; uma instituição formada por professores, técnicos, pesquisadores, especialistas envolvidos no processo de definir os saberes que devem ser ensinados e de que forma devem chegar à sala de aula (SILVA, 2017, p.5).

É nisso que consiste, então, a segunda grande preocupação da TTD: as transformações que ocorrem no conhecimento até que ele se torne propriamente um saber a ser ensinado. Compreender o processo envolto no ato de ensinar exige refletir sobre a relação didática (ternária) existente nesse processo, percebendo sua complexidade e tendo em vista que ensinar se trata de "uma tarefa altamente artificial".

O processo de transformar um corpo de conhecimento em um objeto de saber[15] a ser ensinado, exige diversas modificações e adaptações. Os corpos de conhecimento - aqueles criados nas universidades e institutos de pesquisa - não são concebidos para serem ensinados, mas para serem *usados* e, nesse sentido, a transposição didática tem a intenção de transformá-los em "objetos de ensino" que facilitem a aprendizagem. "A transição do conhecimento considerado como uma ferramenta a ser posto em prática, para o conhecimento como algo a ser ensinado e aprendido, é precisamente o que eu tenho chamado de *transposição didática* do conhecimento" (CHEVALLARD, 2013, p. 9).

A ideia de Transposição Didática, foi formulada originalmente por Michel Verret e tinha sentido de "[...] transmissão de um saber adquirido. Transmissão dos que sabem para os que ainda não sabem. Daqueles que aprenderam para aqueles que aprendem" (VERRET, 1975, apud SILVA, 2017, p. 4). Chevallard, no entanto, vê a transposição de forma mais abrangente e a considera como uma ação que não depende apenas do professor, mas, pelo contrário, é resultante das ações e intenções de diversos componentes da Noosfera.

> Desta forma, a noosfera é, pois, o lugar por excelência, onde se busca soluções para equacionar a tensão entre a necessidade de adequação interna e compatibilidade externa, inerente ao sistema de saberes, capaz de assegurar a especificidade do saber escolar. É o lugar onde se designa o saber-a-ensinar, onde se processa uma seleção dos saberes que podem e/ou devem ser ensinados. É a instância que se preocupa com as questões relativas à transposição externa e à normalização dos saberes (SILVA, 2017, p. 9).

O processo de transposição didática, assim, não se trata de uma mera simplificação do conhecimento científico mas implica, necessariamente, *deslocamentos*, *rupturas* e *transformações* nesse conjunto de saberes que inicialmente foram criados para serem *utilizados*, mas passam a ter outra função social. Nesse sentido, o didático precisa estar atento às lacunas existentes entre a matemática criada, a ensinada e a aprendida:

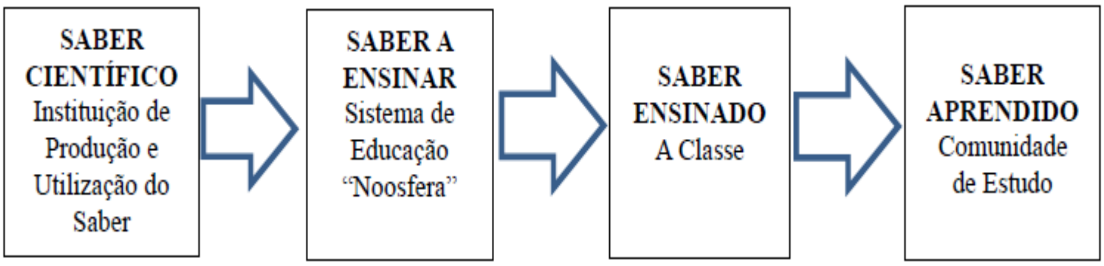
> O conceito de transposição didática, somente por isso, refere-se à passagem do saber acadêmico para o saber ensinado, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa testemunha a necessidade de questionamento, enquanto que ao mesmo tempo

[15] Nos referimos a objeto de saber como um conjunto de conhecimentos socialmente disponíveis na literatura. Antes de ser objeto ensinado, o objeto de saber sofre um grande número de transformações a que chamaremos transposição didática.

> é a primeira ferramenta. Para o didático, é uma ferramenta que lhe permite dar um passo atrás, questionar as evidências, erodir ideias simples, retirar-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo, em suma, exercer sua vigilância epistemológica (CHEVALLARD, 1994, *apud* GOULART; FARIA, 2019, p. 1573).

Abaixo, a imagem explana os processos envoltos na transposição didática, em seu sentido mais amplo.

Figura 2: Transposição didática esquematizada



Fonte: Goulart; Farias. 2019, p.1575

Vemos na imagem, resumidamente, que o conhecimento proveniente das universidades e centros de pesquisa são apresentados à sociedade e, a partir disso, a *noosfera* interfere na escolha dos conhecimentos, fazendo as devidas adaptações. Os saberes são transformados em conteúdos previstos nos documentos oficiais de educação nacional que, posteriormente, são introduzidos nos currículos escolares e organizados pelas editoras nos livros didáticos, que novamente o transformam. A partir disso, os professores organizam suas aulas, prevendo quais e como serão ensinados e, por fim, o aluno "recebe" estes conhecimentos, o que não significa, necessariamente, que houve aprendizagem ou que se sabe, exatamente, o que ele aprendeu.

Devido à particularidade de cada estudante e com a consciência de que os conteúdos não chegam a todos da mesma maneira, a Didática da Matemática assume que ensino e aprendizagem não podem ser efetivamente separados. Chevallard (2013) sinaliza que a aprendizagem é fundamental para a didática, citando que todo processo de ensino é movido pelo desejo de que o aluno aprenda (intenção didática) e que, ao se analisar profundamente o processo didático, é notório que ele muitas vezes aprende coisas que não foram explicitamente ensinadas e, neste sentido, é que o ensino e a aprendizagem não podem ser separados.

A Teoria Antropológica do Didático foi desenvolvida, assim, a partir da necessidade de ampliar os estudos concomitantes sobre ensino e aprendizagem matemática. Na TAD, são articuladas noções que visam permitir pensar, de forma unificada, os diversos fenômenos didáticos que surgem a partir da análise de situações de ensino (SANTOS; MENEZES, 2015), observados em função de um estudo da ecologia[16] dos saberes, ou seja, sob o interesse "[...] pelas condições e restrições sob as quais um determinado saber vive em determinada instituição [...]" (GOULART; FARIAS, 2019, p. 1575-1576). A gestão do tempo, o contrato didático[17], a transposição didática e diversos outros fenômenos presentes em uma sala de aula e também fora dela são postos em pauta nesta teoria.

Ainda, a questão da aprendizagem é colocada em termos das relações pessoais e institucionais com os diversos objetos do saber. Sendo assim, inicialmente, precisamos entender três conceitos primitivos: os objetos "O", as pessoas "X" e as instituições "I".

Basicamente, o objeto O é o "material de base" desta construção teórica. Tudo é objeto, as pessoas e as instituições também o são, assim como todas as demais entidades que serão trabalhadas. Entretanto, o objeto só existe a partir do momento em que é reconhecido por uma pessoa X ou instituição I, portanto, está associado às relações estabelecidas com X ou com I, denotadas por R(X,O) e R(I,O) (GOULART; FARIAS, 2019).

O conceito de instituição nesse sentido, refere-se a um "[...] dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar que são próprias a cada 'tipo' ou 'forma de instituição'" (SANTOS; MENEZES, 2015, p.651). Uma instituição, portanto, possui uma estrutura heterogênea, formada por diversas relações de pessoas X com objetos O.

O conceito de pessoa deriva de dois estágios anteriores: o indivíduo e o sujeito. Indivíduo é o estágio mais primitivo, pois não se sujeita nem muda pelas relações com objetos e instituições. O indivíduo se torna sujeito ao se relacionar com uma instituição, ou seja, quando se sujeita a uma I, sob suas formas, demandas, hábitos. E através dessas várias relações do indivíduo com diferentes instituições é que se constitui a pessoa (SANTOS; MENEZES, 2015).

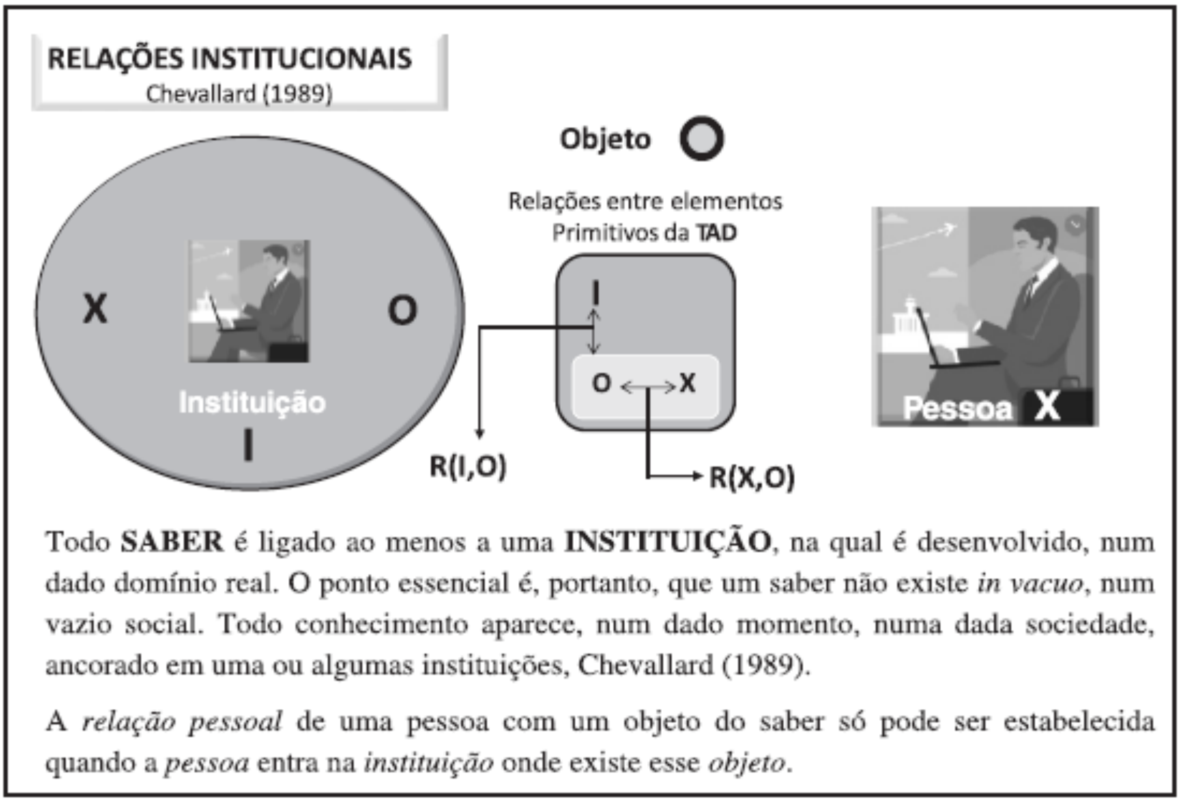
A imagem a seguir ilustra de forma clara as relações mencionadas.

---

[16] Chevallard inspira-se em elementos de perspectiva ecológica, fazendo uso de conceitos como nicho ecológico, habitat, cadeia alimentar e ecossistema para explicar as relações entre os objetos e no estudo do objeto em si mesmo (aqui, objeto toma diferentes sentidos como, por exemplo: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições). Segundo Artaud (1988, p.101, *apud* SILVA, 2016) "a problemática ecológica apresenta- se como um meio de questionar o real".

[17] Contrato didático é "[...] o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. [...] esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo, que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro" (BROUSSEAU, 1986, *apud* GOULART; FARIAS, 2019, p.1587).

Figura 3: Relações institucionais



Fonte: Henriques, Nagamine, Nagamine, 2012, p.1264

Além disso, é importante ressaltar que os objetos se relacionam de maneiras diferentes, de acordo com a instituição e suas características próprias. Sendo assim, as relações das pessoas X com os objetos O das instituições I geram um fenômeno didático dentro de I, também conhecido como *contrato didático*. Portanto, uma pessoa X que entra em uma instituição I no qual um objeto O (*objeto institucional)* é fruto da relação R (I,O), passa a fazer parte de I e começa a viver uma relação com O sob a influência de I, o que implica que a relação R(X,O) será construída (caso ainda não existisse) ou irá se alterar sob a limitação do contrato institucional.

A partir desses conceitos, Chevallard define que há aprendizagem quando a relação R(X,O) se altera (ou é construída) em função de I. “Em outras palavras, havendo alteração em R(X,O) então haverá aprendizagem da pessoa X sobre o objeto O. De forma análoga, caso R(X,O) não se altere, podemos afirmar que a pessoa nada aprendeu” (SANTOS; MENEZES, 2015, p.653).

Depois de tentar estabelecer tais relações entre X e O, é do interesse da instituição I, verificar se a pessoa X é um *sujeito adequado,* ou seja, se foi realmente capaz de estabelecer as relações com o objeto O em conformidade com R(I,O). Sendo assim, é comum que a instituição promova a *avaliação institucional* que, para Chevallard (1999, apud SANTOS; MENEZES, 2015, p.654) "[...] é um dos mecanismos segundo os quais I é levada a pronunciar, por meio de alguns dos seus agentes, um veredito de conformidade (ou não conformidade) R(X,O) com R(I,O)".

Há, entretanto, controvérsias a respeito do uso da avaliação institucional e como sua importância demasiada acaba por interferir nas intenções de aprendizagens.

Imaginemos I1 como sendo a instituição sala de aula de uma escola, X1 os alunos, O1 um objeto de saber, e os professores, o contrato didático e o institucional estabelecidos previamente, as avaliações, etc, os agentes em I1. Chevallard sugere que sendo a avaliação um dos elementos controladores da conformidade, e por ser estabelecida através dos contratos pedagógico e didático, sua importância dentro da instituição é claramente exposta às pessoas, podendo "podar" o real interesse de X1 por O1. Resumidamente, o que acontece é que as pessoas (estudantes) podem se preocupar demasiadamente com sua adequação à instituição, ou seja, com as avaliações institucionais (testes), de forma a comprometer a formação dos conceitos necessários para a compreensão dos objetos de conhecimento. Santos e Menezes (2015) afirmam, nesse sentido, que as alterações nas relações entre sujeito e objeto vão além das questões epistemológicas e metodológicas.

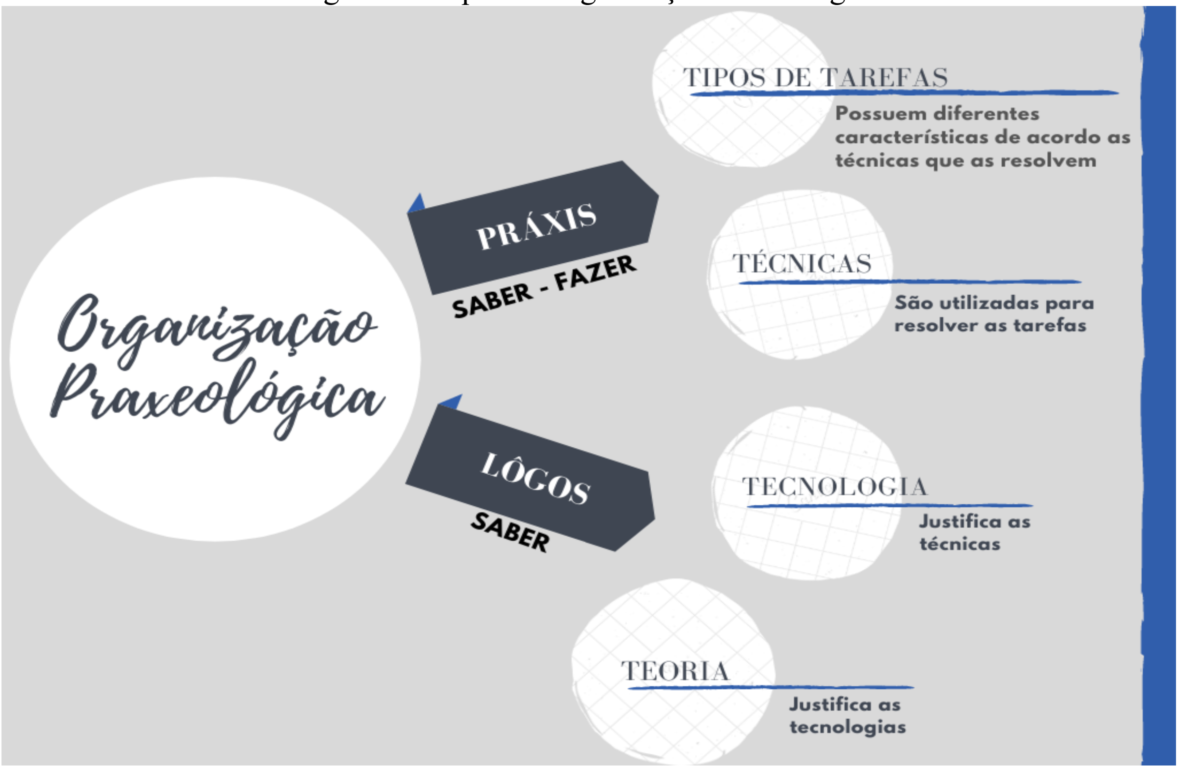
> Elas partem, também, de uma intencionalidade vinculada ao contrato que é estabelecido. Isso não significa que deixamos de fora esses outros fatores. Porém, é extremamente necessário, quando olharmos para o saber aprendido pelo aluno, considerarmos a relação entre os contratos (pedagógico e didático) estabelecidos; eles podem ter um peso maior nas escolhas realizadas pelos sujeitos X1 (alunos) (SANTOS; MENEZES, 2015, p.654).

Sendo assim, as relações entre pessoas, objetos e a instituição sofrem influência de uma série de intencionalidades, que provém tanto dos sujeitos como das instituições. Na sala de aula, o contrato didático, a transposição didática e a gestão do tempo, a maturidade dos alunos e seus objetivos, por exemplo, são fenômenos didáticos que ocorrem devido a essas intencionalidades.

Antes de trazermos em pauta o fenômeno didático sob o qual nosso olhar será direcionado, é preciso entender ainda o saber matemático à luz da TAD, que o considera como resultado da ação humana institucional, ou seja, algo que se produz, se utiliza, se ensina e, de forma geral, transita entre as instituições. Neste sentido, o saber matemático é descrito em termos de organizações ou praxelogias institucionais e organizado em dois níveis: *práxis* (saber-fazer) e *logos* (saber). Juntando estes dois níveis, tem-se a noção de Praxeologia ou Organização Matemática (OM) que permite o estudo das práticas institucionais relativas a um objeto do saber matemático e que, portanto, é um modelo para análise da ação humana institucional.

A figura 4 mostra um esquema que sintetiza a Praxeologia Matemática.

Figura 4: Esquema Organização Praxeológica



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Dentro do nível p*ráxis,* descrevem-se dois componentes: os *tipos de problemas/tarefas* que se estudam e as *técnicas* que são usadas para resolvê-los (as). Dentro do nível l*ogos,* encontram-se duas componentes: "[...] a *tecnologia* (discurso matemático diretamente relacionado com a prática) que serve para tornar as técnicas inteligíveis, para as descrever, interpretar, justificar o seu funcionamento e, em última análise, fundamentar a produção de novas técnicas;" e a *teoria*, responsável por dar significado aos problemas propostos, permitindo explicar e interpretar descrições e justificações tecnológicas (LUCAS *et al*., 2014, p. 1331).

> [...] a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e a gente supõe que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificado das tarefas e técnicas que a gente chama de tecnologia da técnica. O postulado enunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que a gente chama teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, apud SANTOS; MENDEZ, 2015, p. 656).

Para entender melhor de que maneira essas etapas estão relacionadas, precisamos compreender que existem *tipos de tarefas - de praxeologia pontual, local regional ou global -*

e a partir delas, relações matemáticas mais ou menos complexas, que envolvem uma ou mais técnicas, tecnologias e teorias. No quadro 1, veremos alguns exemplos de tarefas abordados por Santos e Menezes (2015) para explicar tais relações dentro de cada praxeologia.

Quadro 1: Tipos de tarefas

PRAXEOLOGIAS		
Exemplo de tarefa	**Descrição**	**Principal característica**
Praxeologia pontual		
Encontre o valor de x, na equação $124 + x = 103$, usando a transposição de termos.	Para resolver essa tarefa, o aluno utilizará uma única técnica (previamente indicada pelo enunciado), cuja tecnologia diz respeito à propriedade das operações inversas no conjunto dos números reais e cuja teoria provém da Álgebra.	Uma única técnica é utilizada para resolver a tarefa.
Praxeologia local		
Resolva as equações de segundo grau abaixo: a) $x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 + 4x + 4 = 0$	Para resolver essa tarefa, o aluno pode utilizar diversas técnicas, tais como fatorar as expressões, colocar em evidência o fator comum, completar quadrados, soma e produto, dentre outras. Tais técnicas giram em torno de uma tecnologia que pode ser representada pelas propriedades das operações inversas no conjunto dos números reais. Nesse caso, a Álgebra é a teoria que justifica esses elementos tecnológicos.	A tarefa pode ser resolvida através de diversas técnicas.
Praxeologia regional		
Para fazer um passeio turístico, um grupo de pessoas fretou um ônibus por R$1200,00. Com a adesão de mais cinco pessoas, cada um dos que já havia pago, teve a restituição de R$20,00. Qual foi o custo do frete por pessoa?	Para resolver esta tarefa, deve-se utilizar elementos tecnológicos que dão suporte à equação de segundo grau já que, durante a resolução do problema, a seguinte equação será obtida: $x^2 + 5x - 300 = 0$. Entretanto, isso não será suficiente para realizar a tarefa. O estudante deverá ter conhecimento de alguns conceitos de matemática financeira, tais como custo, valor total, valor restituído, valor pago. A partir disso, surgem novos elementos tecnológicos que justificam os conhecimentos financeiros utilizados. A teoria que embasa as resoluções ainda diz respeito a Álgebra.	Mais de uma tecnologia é utilizada para justificar as técnicas.

Praxeologia global		
Quais são as dimensões de um retângulo cujo perímetro e área medem, respectivamente, 50cm e 150cm?	Ao resolver essa tarefa, é necessário, inicialmente compreender alguns conceitos da Geometria, como área e perímetro. Posteriormente, precisa-se de conceitos da Álgebra para montar um sistema de equações que irá gerar a equação do segundo grau $x^2 - 25x + 150 = 0$. Note que, embora estejamos novamente frente à uma equação do segundo grau, o processo de resolução da tarefa envolveu diversas técnicas, tecnologias e também embasamento em duas teorias, a saber, Álgebra e Geometria.	Além das características da praxeologia regional, a global envolve mais de uma teoria.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Figura 5: Tipos de tarefas

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Os autores compreendem que quando as praxeologias são colocadas em “movimento” (ilustrado na figura 5), ou seja, quando se passa de uma pontual para uma local, a tecnologia está destaca-se em primeiro plano; quando se passa desta para a regional, a teoria ganha ênfase e, por fim, ao passar da praxeologia regional para a global, o bloco do saber (tecnologia e teoria) ganha mais visibilidade em detrimento do bloco saber-fazer.

Em vista disso, na perspectiva da TAD, trabalhar com matemática deve ser uma atividade que está integrada indissoluvelmente em todas as componentes da OM. Isso quer dizer que quando se fala de construção de saber matemático, ao receber determinada tarefa, o estudante deve ser capaz de integrá-la aos outros três elementos da Praxeologia Matemática: técnicas, tecnologias e teorias; e nesse sentido, as tarefas propostas para os estudantes devem permitir que essa integração aconteça.

É fato, no entanto, conhecido por qualquer educador matemático e apontado por estudos de diversos cantos do mundo[18], que geralmente os alunos não compreendem as tecnologias e teorias envolvidas no processo de resolução de tarefas matemáticas. Henriques, Nagamine e Nagamine (2012) citam um exemplo bem comum: imaginemos um aluno que memoriza uma certa tecnologia (fórmula ou teorema); ele consegue resolver alguns tipos de tarefas utilizando tal tecnologia através de técnicas, mas, muitas vezes, não sabe explicar o porquê do resultado encontrado ou o motivo daquela técnica funcionar. Isso ocorre pois, segundo a decomposição praxeológica em dois blocos, este estudante se detém apenas ao saber-fazer (praxe) enquanto o ambiente tecnológico-teórico (logôs) geralmente é apenas de domínio do professor.

Lucas *et al*. (2014) aprofundam esse fato e consideram-no como um fenômeno, a saber, denominando-o, como mencionado previamente, de "fenômeno didático institucional da rigidez e a atomização das organizações matemáticas escolares". Os autores apontam que os questionamentos tecnológicos das técnicas matemáticas utilizadas é um fazer desconhecido na matemática escolar. Para eles, a falta dessa dimensão na escola é a geradora dos principais problemas da disciplina, pois, na escola, "[...] se consideram as técnicas como objetos de estudo em si mesmas (LUCAS et al., 2014, p. 1332)". Quando o *lôgos* é deixado de lado, com ênfase apenas na aplicação de técnicas, o saber matemático torna-se incompleto, mecânico e superficial, ou seja, as organizações matemáticas dentro da escola são atomizadas e os processos ensinados tornam-se rígidos e inflexíveis.

Os autores defendem um ensino de matemática com ênfase aos dois níveis da OM, afirmando que até mesmo em se tratando da abordagem de novos problemas matemáticos, é necessário, muitas vezes, o questionamento das técnicas aprendidas e de outros aspectos da teoria.

> Na verdade, o matemático não ansia apenas criar bons problemas e resolvê-los, mas pretende, além disso, caracterizar, delimitar e inclusivamente classificar os problemas em "tipos de problemas". Para avançar no seu trabalho, o matemático necessita de construir, desenvolver e caracterizar as técnicas que utiliza para resolver os problemas, até ao ponto de controlá-las e padronizar o seu uso, pelo que deve estabelecer as condições sob as quais as técnicas funcionam ou deixam de ser aplicáveis e, em última análise, construir argumentos sólidos e eficazes que sustentem a validade dos seus procedimentos (LUCAS et al., 2014, p. 1332).

[18] No decorrer do trabalho traremos evidências de diversos estudos capazes de confirmar este fato.

É notável a importância de o estudante conhecer os porquês das técnicas utilizadas, e como esse processo de construção - através da caracterização, delimitação e desenvolvimento - favorece a aprendizagem, a ponto de permitir que o mesmo seja capaz de saber-fazer de forma justificada, e não a partir de regras memorizadas, que não sabe de onde saíram ou porque funcionam.

A fala de Boaler em sua palestra em Stanford, citada na introdução deste trabalho, comunica-se fortemente com este ponto de vista. Ela faz uma crítica ao fato de que, quando nos deparamos com um problema matemático, após análise inicial, é preciso *decidir* que técnica utilizar; entretanto, na maioria das vezes, os alunos nunca sequer precisaram fazer esta escolha (se referindo ao fato de que, quando o professor trabalha apenas com tarefas de praxeologia pontual ou local, o aluno já sabe a técnica que deve usar, ou segue um algoritmo recém visto, sem precisar pensar se aquela técnica é ou não apropriada). Nesse tipo de abordagem, os estudantes raramente se deparam com problemas que envolvem diferentes tecnologias e teorias, e, quando isso ocorre (quando precisam resolver problemas fora do contexto ao qual estão trabalhando em sala de aula), pode até ser que conhecem uma técnica para resolvê-los, mas não sabem como proceder porque não conhecem a técnica com profundidade a ponto de decidir que ela deve ser utilizada.

Por conta disso, é primordial a escolha de tarefas de praxeologia regional e global e o direcionamento das mesmas de maneira a permitir com que os alunos compreendam todas as etapas da OM. Para Lucas et al. (2014, p. 1332), ao programar suas aulas, o docente deve objetivar a construção de técnicas e seu desenvolvimento progressivo, bem como a “[...] construção de um discurso *teórico* justificativo e interpretativo da prática matemática [...]”.

A grande ênfase dada pela TAD às tarefas propostas se estabelecerá, pois, como um dos focos deste trabalho. Escolher intencionalmente tarefas com características específicas torna possível o direcionamento do ensino às relações mais complexas do saber matemático, ou seja, trabalhar com tarefas que envolvem todos os componentes da OM e fazer um direcionamento adequado das aulas pode proporcionar maior engajamento e melhor aprendizagem. No capítulo destinado às seis chaves para a aprendizagem, aprofundaremos essa temática, apresentando exemplos de tarefas investigativas, bem como outras tarefas de praxeologia regional e global, que possibilitam a exploração da matemática de forma completa. Por hora, abordaremos a aprendizagem sob a ótica da neurociência, buscando elucidar suas contribuições e de que maneira seus estudos fortalecem a ideia da TAD sobre o uso de tarefas com essas características.

1.3 NEUROCIÊNCIA COGNITIVA

A Neurociência Cognitiva estuda os mecanismos relativos à cognição através da análise do comportamento do cérebro quando recebe estímulos. Conhecer os processos neuronais envoltos por trás da aprendizagem é fundamental para a compreensão de como, biologicamente, o sujeito aprende, permitindo novas perspectivas ao docente, que passa a planejar suas práticas de maneira intencional, considerando a influência de tais processos na construção de conhecimentos concretos e duradouros.

Sendo assim, esta seção tratará, inicialmente, de explanar de forma breve, as funções executivas do cérebro humano, com o intuito de evidenciar como a atenção, o controle inibitório e a memória podem ser utilizados em favor da produção e escolha de tarefas matemáticas. Posteriormente, apresentará as seis chaves para a aprendizagem de Jo Boaler, que são embasadas, predominantemente, nos resultados da neurociência aos quais destacam a plasticidade do cérebro, a importância do esforço e de mentalidades de crescimento, bem como o uso de tarefas visuais e trabalhos colaborativos para uma melhor aprendizagem matemática.

1.3.1 Funções executivas

Antes de tratar especificamente das funções executivas, é importante conhecer um pouco sobre o cérebro humano, órgão responsável por diversas funções, dentre elas, a linguagem e a aprendizagem que são processamentos "[...] resultantes de processos cognitivos primários como: sensação, percepção, atenção e memória (s) " (PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009, p.19).

O cérebro humano é composto por aproximadamente 100 bilhões de neurônios que se comunicam por meio de prolongamentos (dentritos e axônios) formando uma rede de milhares de conexões neuronais. Para cada estímulo que recebe, uma nova conexão se forma, incrementando a rede já existente. Possuímos, assim, um complexo sistema de processamento responsável por selecionar, de maneira rápida, as redes importantes para cada situação, de acordo com a característica do estímulo recebido. O contato do mundo externo com nossa rede interna se dá através da transformação dos estímulos sensoriais recebidos pelo corpo em impulsos elétricos.

> Dessa forma, **o que conhecemos do mundo é uma re-leitura do que foi transmitido ao nosso cérebro pelos estímulos sensoriais**. Os receptores periféricos transmitem impulsos ao cérebro de acordo com o que conseguem perceber do mundo externo. Esses impulsos devem ser integrados e re-construídos num processo que se denomina percepção. Essas percepções somente podem ser compreendidas e reconhecidas

> depois de um processo de aprendizagem contínuo que classifica, organiza, compara e integra os estímulos sensoriais em um único objeto. Após os processos de sensação e de percepção a informação em processamento chega ao nosso sistema límbico responsável pela atribuição emocional ao estímulo (PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009a, p.19, grifo nosso).

A aprendizagem sob o viés da NC, portanto, diz respeito ao "[...] fortalecimento ou enfraquecimento das conexões neuronais as quais têm seus padrões conectivos alterados a todo momento em resposta aos estímulos externos, às nossas percepções, pensamentos e ações" (BROCKINGTON, 2011, p.21). O cerne da aprendizagem está na modificação cerebral, ou, mais especificamente, nas sinapses. Otimizar o aprendizado requer, pois, a estimulação destas sinapses da forma mais variável possível, sendo que a multiplicidade dos estímulos externos é que determinará a complexidade das ligações entre as células e como elas se comunicarão no sistema nervoso (FÓZ, 2009).

Nesse sentido, as funções executivas são essenciais para "lidarmos" com estes estímulos, pois referem-se a habilidades utilizadas no planejamento, iniciação, realização e monitoramento de comportamentos intencionais (DIAS; TREVISAN; PRADO, 2012). É por meio dessas habilidades que somos capazes de direcionar nossos comportamentos a metas, avaliando a eficiência e adequação dos mesmos, percebendo estratégias ineficientes e criando outras eficientes, a fim de, com isso, resolver problemas imediatos, de médio ou de longo prazo.

> A evolução humana pode ser associada à aquisição de complexas capacidades cognitivas, que permitiram ao indivíduo responder adequadamente aos estímulos ambientais e engajar-se em um comportamento dirigido a metas, determinado pela motivação e regulado pela emoção. Tais capacidades incluem (a) manutenção e manipulação mental das informações, (b) auto-regulação do comportamento, o que envolve agir com base em escolhas prévias e não por impulso, e (c) pronta adaptação a mudanças na ação em curso. Trata-se, respectivamente, da memória operacional, do controle inibitório e da flexibilidade mental que, no âmbito da neuropsicologia, são referidos como funções executivas (MELLO, 2009, p. 81).

As funções executivas podem ser desmembradas em aspectos mais básicos, para serem melhor compreendidas. Sendo assim, refletiremos sobre alguns destes aspectos, a saber, a atenção, o controle inibitório e a memória.

1.3.2 Atenção, controle inibitório e memória

A todo momento, recebemos inúmeros estímulos advindos dos diversos canais sensoriais, o que torna necessário a seleção e a hierarquização destes estímulos, processo cognitivo denominado *atenção*.

Segundo Lima (2005, p.113), a atenção é “[...] um importante construto para a compreensão dos processos perceptivos e funções cognitivas em geral”, principalmente devido ao fato de termos limitações no processamento de informações e inabilidade de atender diversos estímulos simultaneamente. Sendo assim, a atenção possibilita a escolha de estímulos significativos em detrimento de outros, além de permitir com que o sistema nervoso mantenha “[...] um contato seletivo com as informações que chegam através dos órgãos sensoriais, dirigindo a atenção para aqueles que são comportamentalmente relevantes e garantindo uma interação eficaz com o meio” (LIMA, 2005, p.114). Neste sentido, o que percebemos é influenciado diretamente por onde, de fato, estamos dirigindo nossa atenção, aumentando a sensibilidade perceptual do alvo determinado e reduzindo interferências causadas por outros estímulos que não são de nosso interesse, chamados estímulo distratores.

Em nossas relações com o meio ambiente, estamos expostos a grande quantidade de estímulos do foro visuo espacial por exemplo, e certamente, não processamos todos eles simultaneamente. A partir disso, a seleção que fazemos desses estímulos pode ser explicada pelo controle dicotômico atencional que ocorre através do processamento *bottom-up* ou ascendente, ou do processamento *top-down* ou descendente (RODRIGUES, 2016).

O processamento *bottom-up* está relacionado aos *processos automáticos* da atenção neurofisiológica e perceptiva (SILVA, 2019). Ele nos permite fazer o processamento de estímulos externos de acordo com sua relevância e suas próprias características, ou seja, *são as* características do objeto que influenciam a percepção e orientação do foco atencional para si.

De outra forma, o processamento top-down, diz respeito às nossas influências internas, direcionando o foco atencional aos estímulos definidos por nós mesmos como relevantes para uma dada tarefa (RODRIGUES, 2016). Esse é um processo de alta ordem, que exige atividade cognitiva e a determinação de metas para uma orientação esperada. Sendo assim, são estabelecidos objetos prioritários em detrimento de outros (inibição de estímulos irrelevantes) e criam-se relações com a memória visual-espacial (SILVA, 2019).

Rodrigues (2016) aponta a atenção como a primeira etapa dos sistemas de pensamento e ação, por ser um processo essencial para a percepção, ação, memória e aprendizagem. Considera ainda a atenção seletiva[19], juntamente com o controle inibitório e a memória de trabalho, processos cognitivos indispensáveis para a aprendizagem, sendo anteriores à ela.

---

[19] Com relação à sua origem, a atenção pode ser voluntária ou involuntária. Com relação à operacionalização, ela pode ser seletiva, sustentada, alternada ou dividida. A atenção seletiva, neste cenário, diz respeito à capacidade de privilegiar certos estímulos em detrimento de outros e está ligada ao mecanismo básico que subsidia o mecanismo atencional (LIMA, 2016).

A atenção seletiva pode ser vista como um dispositivo que modera as respostas neuronais devido ao fato de reter os processos mentais em uma única tarefa ignorando os demais estímulos (RODRIGUES, 2016) sendo portanto, um processamento de alta ordem (*top down*). As tarefas cotidianas que a envolvem,

> [...] avaliam a resistência a algumas formas de distração e, portanto, requerem a focalização dos recursos de um processamento em um número reservado de canais sensoriais. Essa resistência à distração pode ocorrer tanto para garantir o processamento perceptual adequado de sinais sensoriais importantes, via um mecanismo de filtragem, quanto para assegurar a seleção adequada de ações importantes (MAIA, 2010, p. 19).

Além desse, contamos com um processo complementar à atenção seletiva, conhecido como controle inibitório, que de forma semelhante, "[...] diz respeito à capacidade de os indivíduos inibirem respostas a estímulos irrelevantes ou distratores de um dado objetivo, que habitualmente interrompem o curso de uma ação ou resposta" (RODRIGUES, 2016, p.2). Trata, pois, de suprimir entradas internas (que ocorrem por meio da memória, por exemplo) e externas (recebidas pelas vias sensitivas).

Em se tratando de memória, Pantano e Assencio-Ferreira (2009b, p.30) a definem como uma atividade eletrofisiológica responsável pelo "[...] registro, manutenção e evocação de fatos já acontecidos" e moldada pela consciência, emoção, atenção e concentração, interesses, percepções sensoriais, associação a estímulos recebidos e repetição.

> Falar de memória nos obriga a falar das atividades relacionadas à emoção, pois as bases dos impulsos da motivação, principalmente a motivação para o processo de aprendizagem, bem como as sensações de prazer ou punição, são realizadas em grande parte pelas regiões basais do cérebro, as quais, em conjunto, são derivadas do Sistema Límbico (PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009b, p. 26).

Segundo Pantano e Assencio-Ferreira (2009b), a memória possui três fases. A fase de fixação depende do nível de consciência do indivíduo, do estado geral do organismo, da atenção global, da capacidade de manutenção da atenção sustentada, do interesse e conteúdo emocional que o indivíduo atribui ao estímulo, assim como seu conhecimento prévio, da capacidade de compreensão do conteúdo e dos canais senso-perceptivos envolvidos. Já a fase de conservação depende da repetição e utilização dos estímulos bem como de sua associação com outros elementos. Por fim, a fase de evocação trata-se da reprodução dos dados fixados. É importante salientar que os dados evocados nunca são iguais aos fixados, pois sofreram modificação no processo de conservação, além de receber características pessoais.

Existem também, dois tipos de memória: a memória de trabalho ou operacional e a memória a longo prazo. A memória a longo prazo é estruturada de forma mais estável, podendo ser explícita (reproduzida por meio da linguagem) ou implícita (não podem ser expressas de forma linguísticas: habilidades motoras, perceptivas, aprendizado de regras e procedimentos).

Já a memória de trabalho é aquela usada imediatamente quando os estímulos são recebidos. Nela, as informações são mantidas ativas, por um curto período de tempo, para serem manipuladas na realização de tarefas (PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009b). De maneira complementar, Rodrigues (2016, p. 2) a define como um "[...] sistema de armazenamento e manipulação temporária da informação que atua durante a realização de um conjunto de outras tarefas cognitivas, tais como na compreensão, na aprendizagem e no raciocínio".

A memória de trabalho compreende alguns componentes que estão relacionados, dentre outros, com a capacidade de atenção e seleção de informações (o que explica a relação estreita entre atenção seletiva e memória de trabalho); a ligação entre informações processadas no momento com as informações armazenadas na memória de longo prazo; a aquisição de novas informações verbais; a manipulação e armazenamento de informações visuais e espaciais; a integração entre as informações verbais e espaciais bem como destas com a memória de longo prazo (RODRIGUES, 2016).

Embora o sistema de memória de trabalho seja extremamente rápido, durando apenas alguns segundos, é essencial para a realização de processos cognitivos como raciocínio e aprendizagem, pois situa-se na base de tarefas essenciais como leitura, compreensão e operações matemáticas e permite constante manipulação de informações.

A forma com que os dados de memória podem ser armazenados varia, podendo ocorrer de maneira isolada (quando se refere a dados aleatórios/ vazios), relacionados (quando há uma relação simples dos dados com algum objeto ou pessoa) ou de forma integrada (quando os dados relacionam-se com uma série de significados). Dito isso, a aprendizagem propriamente dita ocorre quando o armazenamento se dá de forma integrada, pois é aí que são estabelecidos diversos significados para a informação recebida (PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009b).

A seleção de tarefas que proporcionam estímulos visuais e, ainda, favorecem o engajamento de conceitos em busca de um armazenamento integrado, torna-se ímpar no sucesso do ensino matemático[20], tendo como base o breve esboço traçado até aqui, sobre como, fisiologicamente, aprendemos. Isso porque, de maneira geral, a aprendizagem pode ser percebida como a aquisição e processamento de informações através de processos cognitivos,

[20] A partir das seis chaves de aprendizagem propostas por Boaler, conseguiremos elucidar de forma minuciosa essas contribuições.

iniciando pela estimulação sensorial e terminando com seu armazenamento e recuperação (memória). As representações internas criadas através desse processo, como vimos, sofrem influência de múltiplos fatores - a intensidade e as características dos estímulos recebidos, a relevância da tarefa desempenhada, o estado emocional e a motivação do sujeito, o contexto em que se encontra inserido, suas expectativas, experiências anteriores, dentre outros (LIMA, 2016, PANTANO, ASSENCIO-FERREIRA, 2009b).

Além da necessidade de direcionar atenção na busca por tarefas que favoreçam o uso das funções executivas em prol de uma melhor aprendizagem, outro aspecto a ser considerado, apontado por Rodrigues (2016), diz respeito à considerável gama de autores que mostram a forte influência das funções cognitivas sobre o desempenho acadêmico, funcionamento adaptativo e sistemas emocionais e comportamentais do ser humano e que, aparentemente, ignoram o efeito do "ambiente circundante" na aprendizagem. O autor enfatiza que "Os processos de atenção e de memória são essenciais para uma boa aprendizagem, fato que está muito bem escrito na literatura, contudo a maioria dos estudos apresenta pouca validade ecológica" e reflete: "[...] se o processo de aprendizagem se refere à aquisição de informação externa e à sua conjugação com informações internas, será que algumas dificuldades de aprendizagem podem ser explicadas logo na interação indivíduo-ambiente?" (RODRIGUES, 2016, p.5). Da mesma maneira, Wajnsztejn e Alessi (2009) destacam a extrema importância do fator ambiental para a maturação do sistema nervoso e afirmam:

> A experiência e o aprendizado passarão a desempenhar um papel fundamental para a integração das regiões cerebrais e mesmo para promover alterações estruturais celulares. Nesse estágio, a plasticidade assume o sentido e garante a especialização crescente (WAJNSZTEJN, ALESSI, 2009, p. 46).

Ficou claro como os conceitos da TAD complementam essa narrativa. Lembremos como os fenômenos didáticos são descritos e observados sob toda a perspectiva ecológica que envolve as instituições, os sujeitos e os objetos. A crítica de Rodrigues (2016) nos leva novamente a reflexões dos fatos *versus* fenômenos; sabe-se, por um lado, que é fato que as funções executivas interferem na aprendizagem, sendo fundamentais para a seleção de estímulos, organização e manutenção dos conceitos aprendidos, construídos, experienciados. Entretanto, como a própria neurociência apura, as emoções também têm seu papel inquestionável e, junto delas, um emaranhado de outros aspectos internos e externos aos sujeitos causam impactos nessas funções. Os problemas referentes à aprendizagem referem-se assim, a fenômenos que extrapolam abordagens lineares e exigem múltiplas perspectivas. Cabe ao professor, a todo o momento, refletir sobre as relações e fenômenos didáticos envoltos no ambiente escolar.

Certamente foge de seu alcance, dominar minimamente a teoria por trás dos processos cognitivos a nível neuronal e, complementarmente, todas as nuances que circundam o estudante. Todavia, compreender os impactos dos estímulos externos e internos na aprendizagem, conhecer as vantagens da atenção seletiva em descartar estímulos distratores, estar ciente da influência das emoções nos processos cognitivos, bem como entender as fases da memória e de que maneira ocorre a fixação de informações, permite ao educador um novo olhar sobre a elaboração de planejamentos, em busca estratégias que conquistem o foco atencional dos alunos, auxiliando-os a realizar atividades de forma engajada e aumentando suas possibilidades de sucesso.

Vejamos agora algumas considerações sobre as contribuições diretas deste campo da ciência para os educadores:

● O aumento da complexidade das tarefas solicitadas aos alunos, por exemplo, é um fator que promove maior engajamento atencional e é ímpar na diminuição da percepção de estímulos distratores.

> [...] o quanto um estímulo distrator será excluído da percepção não depende apenas da intenção do voluntário em ignorá-lo, mas também do quanto uma tarefa alvo esgota recursos cerebrais de processamento. [...] distratores não são processados pelo cérebro se os voluntários estiverem com seus recursos alocados em uma tarefa de alta demanda atencional (ERTHAL et al., 2004, p. 36).

● Conhecer os benefícios da liberação de neurotransmissores do prazer (serotonina e dopamina, por exemplo), permite ao professor planejar e promover atividades interessantes, desafiadoras e excitantes, com a intenção de propiciar o aumento e o estímulo destes neurotransmissores no cérebro, o que ocasionará a sensação de bem estar ao estudar (FÓZ, 2009, p. 176). Mais a mais, os estudos apontados por Erthal et al. (2004) sugerem que os estímulos emocionais ganham destaque na disputa pela atenção, pois os mesmos são dificilmente ignorados. Sendo assim, de maneira complementar, estabelecer conexões entre os conteúdos/tarefas trabalhados e os assuntos de interesse dos estudantes, trazendo significado para seus aprendizados, pode aprimorar ainda mais as aulas de matemática.

● Ao recordarmos as fases da memória previamente mencionadas, percebemos a importância da aprendizagem integrada, que tem por cerne o estabelecimento de relações entre as informações recebidas, seus diversos significados e os “conceitos” previamente armazenados na memória a longo prazo, resultado da bagagem e das experiências prévias do aluno. Assim, a exploração de tarefas que envolvem e desafiam os estudantes, que permitem a interligação entre conceitos matemáticos, denominadas de praxeologia regional ou global, é essencial.

- Os níveis de neurotransmissores lançados no sistema nervoso se alteram de acordo com os estímulos recebidos, dentre eles, os advindos dos órgãos sensitivos. Nesse sentido, as tarefas de praxeologia regional ou global podem ser potencializadas, por exemplo, se a elas forem adicionados elementos visuais (formas e cores). Estudos de Souza (1996, apud FÓZ, 2019) mostram que em uma sala de aula, de modo geral, apenas 19% dos alunos são aprendizes auditivos enquanto 46% são aprendizes visuais e, embora estes números já sejam suficientes para investir em planejamentos que envolvam o visual, para Boaler et al. (2016, p.4), inclusive os alunos cujo "[...] lado forte não é o raciocínio visual precisam dele mais do que qualquer outra pessoa". Os autores afirmam, embasados em estudos da neurociência (cujos detalhamentos traremos no próximo capítulo), que quando trabalhamos com a matemática sob quaisquer formas, as vias visuais do nosso cérebro são ativadas, mas quando tarefas matemáticas utilizam-se de estímulos visuais ou espaciais, há uma potencialização no desenvolvimento de seu conhecimento matemático. Portanto, apostar em estímulos visuais, além de atingir um maior percentual de alunos, elevará a dosagem de neurotransmissores liberados durante as tarefas matemáticas.
- Ainda em se tratando da exploração dos estímulos visuais em tarefas matemáticas, Silva et al. (2019) destacam como o amadurecimento da percepção e da memória visuoespacial propicia o desenvolvimento do raciocínio matemático, enfatizando a possibilidade de o professor desenvolver tarefas que visem o amadurecimento destas estruturas cerebrais a fim de fortalecer a aprendizagem matemática. Os autores salientam, também, o papel decisivo das estimulações adequadas para a execução de tarefas, de forma que os níveis de complexidade dos estímulos estejam em compatibilidade com a fase do desenvolvimento em que o estudante se encontra.

Em complemento a estas observações, daremos sequência à descrição das contribuições da neurociência para a educação, agora sob o olhar de Jo Boaler (2016, 2017, 2018, 2019a, 2019b, 2019c, 2020), que elenca seis chaves para a aprendizagem matemática.

1.4 AS SEIS CHAVES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Jo Boaler[21], professora de Educação Matemática na Universidade de Stanford, pesquisadora e escritora, é um dos grandes nomes da atualidade em se tratando de pesquisas nas áreas de Educação Matemática, neurociência na educação, ciências da aprendizagem, aprendizagem colaborativa, equidade na educação, etc.

Seus trabalhos apontam, dentre tantos, três importantes resultados da neurociência para o ensino da matemática: "[...] a capacidade que os cérebros têm de se transformar; os impactos positivos do esforço para o aprendizado e a evidência de que áreas do cérebro relacionadas a aspectos visuais são acionadas quando trabalhamos em um problema matemático" (VALLE, 2019, p. 50). A partir destes resultados, Boaler apresenta evidências observadas e testadas a curto, médio e longo prazo, sobre como a matemática ensinada para uma "mentalidade de crescimento", além de trazer incontáveis benefícios individuais para os alunos - desenvolvimento da autonomia, da autoconfiança, do respeito ao próximo, da capacidade de raciocinar e utilizar diversas representações para expressar ideias - promove a equidade e desmistifica a ideia de que existem "pessoas da matemática", mostrando-a como uma disciplina útil, flexível e acessível a todos.

Boaler se destaca ao construir evidências de métodos eficazes no ensino da matemática, apresentando resultados observados em diversas salas de aula ao redor do mundo, inclusive com estudos longitudinais que, além de observarem a evolução dos alunos durante o período escolar, colheram dados de suas vidas no período adulto e compararam os impactos da educação tradicional e da educação baseada em mentalidades. O interessante é que, embora todos os resultados apresentados pela autora estejam embasados em evidências científicas, tanto na área da neurociência, como da psicologia, da sociologia e da ciência da educação, percebe-se a consciência de que falar de aprendizagem envolve seres sociais, plurais, instáveis e complexos e, sendo assim, é preciso observar as incontáveis influências externas e internas sofridas por ele. É notável como todas as suas pesquisas priorizam o olhar ao estudante, às suas

[21] Professora de educação Matemática na Stanford University e cofundadora do YouCubed. É analista para testagem do Pisa na Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Foi premiada com a prestigiosa bolsa de pesquisa Marie Curie de Educação Matemática na Inglaterra e ganhou o prêmio de melhor doutorado naquele país. É membro eleito da Royal Society of Arts (Grã-Bretanha) e ex-presidente da International Organization for Women and Mathematics Education (IOWME) . Foi agraciada com o Prêmio Presidencial da National Science Foundation e com o Prêmio de Equidade Kay Gilliland do National Council of Supervisors of Mathematics. Autora de nove livros e inúmeros artigos de pesquisa. Jo Boaler trabalha como consultora para diversas empresas do Vale do Silício e como apresentadora da Casa Branca sobre meninas e STEM (sigla para ciência, tecnologia, engenharia e matemática) (BOALER, 2018).

características, a sua história de vida, ao contexto no qual está inserido, às suas crenças e o modo como lida com as dificuldades, ou seja, seus estudos não deixam de levar em consideração o ambiente ecológico onde os sujeitos encontram-se inseridos.

Seu legado proporciona aos professores de matemática, através de uma linguagem simples e acessível, ferramentas para novas abordagens de ensino que afetam positivamente o aprendizado dos alunos, mas principalmente, que favorecem uma mudança de mentalidade, tendo em vista a criação de ambientes de ensino plurais, equitativos e eficazes[22].

Com o intuito de divulgar gratuitamente e expandir para o mundo os resultados de suas pesquisas em sala de aula, Jo Boaler, juntamente com Cathy Williams, decidiram em 2013, criar um website, intitulado YouCubed. Tão logo da criação do mesmo, foram convidadas a transformá-lo em um Centro de Estudos da Universidade de Stanford. No website, que atualmente conta com mais de 46,8 milhões[23] de visitas de cerca de 140 países, encontram-se livros, artigos, vídeos e um leque de sugestões de atividades diferenciadas que envolvem esta abordagem de ensino, indicadas para os mais diversos níveis e públicos. O Brasil foi o primeiro país a traduzir o site, através do Instituto Sidarta, que vem desenvolvendo pesquisas e divulgando as mentalidades matemáticas pelo país.

Jack Dieckman, diretor de pesquisa do YouCubed, informou, no seminário de estudos em epistemologia e didática (SEED) na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, que o "[...] YouCubed se distingue por aplicar o trabalho mais recente em neurociência no ensino de matemática, enfatizando, por exemplo, a natureza altamente visual do pensamento matemático" (DIECKMAN, 2019, apud VALLE, 2019, p.41).

Diante desta breve exposição sobre Boaler e seu trabalho, apresentaremos agora as seis chaves para a aprendizagem indicadas pela autora no livro “Mente sem barreiras: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem” (BOALER, 2020). Estas chaves - crescimento do cérebro; esforço; mentalidades; multiplicidade; flexibilidade e profundidade e colaboração - encontraram destaque nas pesquisas da autora por mostrarem-se essenciais para o sucesso na aprendizagem matemática. Além da obra citada, embasaremos esta seção no livro “Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador” (BOALER, 2018), bem como em

[22] Mais informações sobre as pesquisas e/ou currículo de Boaler em: <https://ed.stanford.edu/faculty/joboaler>. Acesso em 13 jul. 2020.

[23] Consultado no dia 28 de setembro de 2020.

artigos, livros e materiais dela e de outros autores que tratam sobre o tema, disponíveis tanto no YouCubed como em revistas científicas e em repositórios digitais.

1.4.1 Chave I: crescimento do cérebro

Até pouco tempo atrás existiam duas crenças a respeito do cérebro: que o mesmo era formado ao nascer e permanecia imutável pelo restante da vida; ou que tinha um período de desenvolvimento na infância, encerrando-se na adolescência. Quando uma pessoa se deparava com algum problema ou dificuldade de aprendizado, na escola por exemplo, a dificuldade era contornada, buscando-se explorar outras habilidades, pois partia-se do pressuposto que tais problemas não poderiam ser superados (BOALER, 2020).

Hoje a ciência sabe que o cérebro tem incrível plasticidade e adaptabilidade. Há evidências que mostram como ele é altamente modificável e que, diante de oportunidades significativas de aprendizagem, todos podem aprender em qualquer nível" (MAGUIRE; WOOLLETT, 2011; IUCULANO et al, 2015, apud VALLE, 2019, p. 49).

Em um breve retrospecto sobre as descobertas da ciência do cérebro, Boaler (2020) apresenta os resultados das pesquisas de Michael Merzenich - um dos principais neurocientistas do mundo - que, em 1970, ao mapear as atividades cerebrais (mapas mentais) dos macacos, concluiu que seus cérebros estavam mudando. Embora tenha sofrido repúdios de outros cientistas que acreditavam que os cérebros eram fixos desde o nascimento ou a partir de uma certa idade, seus estudos foram o pontapé inicial para os resultados posteriores que confirmaram a neuroplasticidade dos humanos.

Um dos mais importantes estudos da época foi feito em Londres, tendo como público alvo os taxistas dos "táxis pretos". Para ser motorista de um táxi preto de Londres, é preciso ser aprovado em um teste conhecido como "o conhecimento". Essa prova é tão complexa que exige cerca de 4 anos de estudo, pois é necessário memorizar 25 mil ruas e 20 mil pontos de referência dentro de um raio de quase 10 quilômetros. As pesquisas de Maguire, Woollett e Spiers (2006, apud BOALER, 2020) mostraram que após a preparação para a prova, que exigiu extenso treinamento espacial, os motoristas tiveram um crescimento significativo de seu hipocampo (parte do cérebro importante para o raciocínio espacial e matemático), o que comprovou, de fato, como o cérebro dos pesquisados sofreu alterações e cresceu mesmo na fase adulta. Além disso, a pesquisa pode comprovar que, ao se aposentarem, o hipocampo dos taxistas voltava ao normal, não pela idade, mas por falta de uso.

Outro fato, no início dos anos 2000, ganhou destaque na área da neurociência e medicina: uma menina de 9 anos, Cameron Mott, que sofria da síndrome de Rasmussen[24] teve todo o hemisfério esquerdo do cérebro removido. Inicialmente acreditou-se que Cameron ficaria paralisada pelo resto da vida, já que esta é a parte do cérebro que controla os movimentos físicos. Entretanto, em pouco tempo, a menina começou a se movimentar constatando-se que o lado direito do seu cérebro estava fazendo as conexões necessárias para desenvolver as funções do lado esquerdo, mais uma vez, evidenciando a incrível capacidade do cérebro se desenvolver.

As evidências destas e de muitas outras pesquisas da área, assim como vimos anteriormente, mostram que quando recebemos estímulos, nossos neurônios se comunicam por meio dos dendritos e axônios formando uma rede de milhares de conexões neuronais sendo que, para cada estímulo recebido, uma nova conexão é formada ou fortalecida. De maneira resumida, quando aprendemos alguma coisa, nosso cérebro se desenvolve de três maneiras:

- Formação de uma nova rota (inicialmente frágil e tênue);
- Fortalecimento de uma rota já existente (de acordo com a profundidade da aprendizagem);
- Formação de uma conexão entre duas rotas antes desconectadas (não nascemos com essas rotas, elas crescem e se desenvolvem à medida que aprendemos e, quanto mais nos esforçamos melhor o aprendizado e crescimento cerebral); (BOALER, 2020).

Na área da educação, a escola Arrowsmith, em Toronto, Canadá, é exemplo de como o ensino direcionado à formação de novas rotas cerebrais é eficiente, inclusive para pessoas diagnosticadas com deficiências de aprendizagem.

Barbara Arrowsmith-Young é citada por Boaler (2020) como pioneira em treinamento cognitivo de alunos diagnosticados com dificuldades de aprendizagem. Barbara passou toda a fase escolar com dificuldades na pronúncia de palavras, no raciocínio espacial e em compreender declarações de causa e efeito. Quando adulta, dedicou-se a estudos sobre desenvolvimento infantil e lesões cerebrais, o que levou-a à neuroplasticidade. A partir de sua "descoberta própria" sobre as possibilidades de desenvolvimento do cérebro, iniciou uma série de trabalhos direcionados às áreas que mais tinha dificuldade, obtendo melhorias significativas em sua vida e, inclusive, passando a compreender pela primeira vez gramática, matemática e lógica.

[24] "A síndrome de encefalite crônica com epilepsia (síndrome de Rasmussen) ocorre tipicamente em crianças e é caracterizada pelo desenvolvimento de epilepsia focal intratável, hemiparesia progressiva e deterioração intelectual". Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0004-282X1999000600023#:~:text=RESUMO%20%2D%20A%20s%C3%ADndrome%20de%20encefalite,com%20a%20fase%20da%20doen%C3%A7a.>. Acesso em 28 jul. 2020.

A escola Arrowsmith e o programa de treinamento para educadores criados por Barbara, dão sequência às evidências sobre a eficácia do treinamento cerebral; o método aplicado consiste em submeter os alunos a uma série de testes que diagnosticam seus pontos fortes e fracos e, a partir dos pontos fracos, traçar estratégias de ensino que visem construir rotas e conexões específicas à cada necessidade. Essa escola é apenas um exemplo de como exercícios cognitivos direcionados são capazes de desenvolver rotas cerebrais e permitir com que qualquer pessoa utilize seu potencial ilimitado para aprender.

Boaler (2020), neste sentido, salienta como é comum professores e pais rotular crianças quando percebem nelas alguma dificuldade; a partir disso são criadas e espalham-se poucas expectativas sobre elas, muitas vezes fazendo-as sentir-se incapazes. Ela critica a crença cultural arraigada, principalmente no mundo ocidental, de que apenas algumas pessoas são capazes de grandes realizações e salienta que quando os professores transmitem a ideia de que alguns alunos não têm capacidade para aprender alguma coisa, estão fechando os olhos frente às recentes evidências científicas.

Boaler e Lamar (2019) deixam claro que não se trata de argumentar que todas as pessoas têm o mesmo cérebro e o mesmo potencial, e sim, de mostrar que quando se ampliam o ensino e as expectativas, aumenta-se significativamente o número de alunos que alcançam um bom desempenho, inclusive, sendo capazes de livrar-se dos rótulos de transtorno ao quais estão vinculados.

As autoras relatam, ainda, que grande parte das pesquisas sobre distúrbios de aprendizagem em matemática já realizadas na etapa do Ensino Fundamental, focam apenas na velocidade e precisão nos cálculos aritméticos e deixam de lado outros fatores relevantes. Em geral, basta que as crianças apresentem problemas específicos em memorizar fatos desconexos que já são consideradas portadoras de algum distúrbio de aprendizagem.

Entretanto sabe-se que somente quando o armazenamento de informações se dá de forma integrada, ou seja, quando as informações se relacionam com uma série de outros significados, é que há um maior fortalecimento das rotas neuronais e ocorre, de fato, a aprendizagem (PANTANO; ASSENCIO-FERREIRA, 2009b). É preciso, portanto, questionar-se a respeito dos parâmetros utilizados para estas testagens, indagando-se sobre o quanto a memorização de fatos desconexos, a velocidade e a precisão de cálculos caracterizam a aprendizagem matemática. Boaler e Lamar (2019) inferem, nesse sentido, que não há um consenso em relação aos critérios de avaliação que permitem diagnósticos de distúrbios e que, muitas vezes, os alunos são classificados dessa forma por razões que provêm da ansiedade matemática e não de problemas cognitivos.

A ansiedade matemática, descrita por Ashcraft como sentimento de "tensão, apreensão ou medo no trabalho com a matemática" (BOALER, LAMAR, 2019, p.4), geralmente é transmitida por professores e pais, mesmo que de forma inconsciente, e resulta na obstrução do funcionamento do cérebro. É comum crianças crescerem pensando que, ou você é uma pessoa da matemática, ou não. Deste pensamento, qualquer dificuldade que surgir ao longo da vida escolar torna-se um lembrete à criança de que ela não é, de fato, uma pessoa da matemática.

> O ensino de matemática processual e os testes de alta pressão, combinados às ideias predominantes de que apenas alguns alunos pertencem à matemática, culminou no desenvolvimento da ansiedade matemática difundida em todo o mundo. Um estudo constatou que 40% de todos os jovens adultos em um programa de trainee apresentavam ansiedade matemática; outras pesquisas descobriram que aproximadamente 50% dos alunos de cursos introdutórios de matemática na faculdade sofrem de ansiedade matemática [...]. Os pesquisadores agora sabem que, quando as pessoas com ansiedade encontram números, um centro de medo no cérebro é ativado - o mesmo centro de medo que acende quando as pessoas veem cobras ou aranhas. Uma vez que esse centro de medo é ativado no cérebro, a atividade nos centros de soluções de problemas diminui (BOALER, LAMAR, 2019, p.4-5).

Além destas redes de medo (abrangendo a ínsula) e de dor (envolvendo a amígdala) serem estimuladas antes e durante as tarefas matemáticas em indivíduos com alta ansiedade matemática, Moura-Silva, Neto e Gonçalves (2020) inferem que a ansiedade reduz a capacidade de memória de trabalho, além de possibilitar a apresentação de déficit de atenção e inibição quando trabalham com tarefas matemáticas e até mesmo quando pensam em realizar uma.

> Eles também são mais propensos a cometer erros em tarefas matemáticas, têm representações menos precisas de magnitude numérica, abordam os problemas matemáticos de maneira diferente de seus pares menos ansiosos e tendem a elevar mais recursos de controle cognitivo para concluir objetivos com estímulos aversivos relacionados ao raciocínio matemático, podendo impactar a eficiência de processamento e gerar déficits de desempenho (MOURA-SILVA, NETO, GONÇALVES, 2020, p.246).

Por fim, em se tratando de "aprender matemática", rotulações estão presentes nos mais variados contextos. Segundo Boaler (2018), os dados colhidos em seu curso[25] ministrado para mais de 40 mil pessoas, mostraram como grande parte delas foram traumatizadas, em algum momento da vida, pela matemática e que as crenças incorretas sobre a matemática e sobre o cérebro alimentam diariamente tais traumas.

> Esse nível de intensidade de emoções negativas em torno da matemática não é raro: mais do que qualquer outra disciplina, ela tem o poder de abater a moral dos estudantes, e muitos adultos não superam suas experiências escolares nessa disciplina caso elas sejam negativas [...]. Seria difícil estimar o número de pessoas do nosso planeta que foram prejudicadas pelo mau ensino dessa disciplina, mas as ideias

[25] Curso para pais e professores sobre as descobertas sobre o cérebro e a aprendizagem matemática intitulado MOOC (do inglês Massive Open Online Course, ou sólido curso, aberto e on-line).

> negativas que predominam em relação a ela não provêm apenas de práticas de ensino inadequadas. Elas provêm de uma premissa que permeia muitas sociedades e está no cerne do fracasso e subdesempenho em matemática: que apenas algumas pessoas podem ser boas na disciplina. Essa crença - de que a matemática é um “dom” que algumas pessoas têm e outras não - é responsável por grande parte do generalizado fracasso em matemática no mundo (BOALER, 2018, p. xiii, xiv-xv).

Em oposição ao que parece ser unânime na sociedade, a neurociência comprova que não existem características cerebrais natas que determinam o desempenho em matemática de um sujeito. “Ninguém nasce sabendo matemática nem com a falta de habilidade para aprendê-la” (BOALER, 2015, apud VALLE, 2019, p. 49).

As novas tecnologias e equipamentos modernos de escaneamento cerebral contribuem ainda mais para as descobertas sobre a neuroplasticidade e sobre a importância de mudanças na maneira como a escola percebe o aprendizado. Boaler (2018) cita as pesquisas do National Institute of Mental Health, que analisaram o cérebro dos participantes após a prática de um exercício diário de 10 minutos, durante três semanas. Percebeu-se que passado esse período, seus cérebros tinham sido “reprogramados” e cresceram em resposta aos estímulos recebidos.

Boaler e Lamar (2019) apresentam, ainda, mais duas pesquisas promissoras em se tratando de modificações cerebrais a partir de intervenções direcionadas.

A primeira diz respeito a um estudo, realizado por Huber, Donnelly, Rokem e Yeatman (2018), com 24 crianças de 7 a 12 anos diagnosticadas clinicamente com dificuldades significativas de leitura ou com dislexia. Os participantes foram submetidos a um programa intensivo de leitura, ao longo de oito semanas. Durante a pesquisa, coletaram-se dados de ressonância magnética do cérebro dos alunos a fim de rastrear seu crescimento. Os resultados apontaram crescimento cerebral em larga escala e melhoria significativa nas habilidades de leitura, aumentando a pontuação do grupo de intervenção para a faixa de leitores médios.

O segundo diz respeito ao trabalho da neurocientista Teresa Luculano e suas colegas de Stanford (2015) que comparou o comportamento cerebral de dois grupos de crianças distintos durante a execução de tarefas matemáticas. Um dos grupos era formado por crianças diagnosticadas como portadoras de distúrbios de aprendizagem matemática e outro formado por crianças consideradas com desempenho médio. Através de ressonâncias magnéticas, foi detectado que as crianças com diagnóstico de distúrbios apresentavam maior número de regiões do cérebro acesas durante a execução das tarefas matemáticas se comparadas às regiões acesas do outro grupo (tecnicamente, espera-se que apenas áreas específicas do cérebro se acendam quando se trabalha com matemática, o que não ocorreu no primeiro grupo). A partir desses resultados, os alunos de ambos os grupos receberam aulas particulares durante 8 semanas, com duração de 40 a 50 minutos por dia, com foco no fortalecimento da compreensão sobre as relações entre as operações matemáticas e dentro delas. Após esse período de intervenção, os dois grupos obtiveram o mesmo desempenho e, além disso, apresentaram as mesmas áreas acesas do cérebro.

Estes resultados evidenciam a necessidade urgente de abandonar a ideia de rigidez do cérebro, bem como "[...] a concepção de que as crianças são inteligentes ou burras, rápidas ou lentas" (BOALER, 2018, p.4). É possível perceber que, mesmo num curto período de tempo, desde que sejam aplicadas estratégias direcionadas e estímulos corretos, o cérebro pode ser transformado.

Neste sentido, Boaler fez sua própria experiência de três semanas, primeiramente no ano de 2015, no intitulado *YouCubed Summer Camp*. Foram selecionados 83 alunos do Ensino Fundamental II de duas escolas públicas dos Estados Unidos da América para participar de 18 dias de uma intervenção de ensino em matemática, no campus de Stanford. Os participantes se enquadravam nas faixas de baixo, médio ou alto desempenho e, ao serem entrevistados previamente, grande parte apresentava ideias negativas sobre si mesmos e sobre a matemática, e no geral não consideravam-se "pessoas da matemática" (BOALER, 2019c).

Durante este curso de férias, os alunos eram frequentemente lembrados das descobertas da neurociência sobre o cérebro, bem como da importância de ver a matemática de formas diferentes: visualmente, numericamente, algebricamente, verbalmente, em forma de algoritmos, tabelas, gráficos, etc. Quando os alunos achavam algo muito difícil, eram lembrados de que o cérebro se desenvolvia a partir de momentos de grande esforço.

Neste acampamento, os alunos foram ensinados com atividades abertas, criativas e que promoviam o raciocínio e a resolução de problemas, sempre embasados nas ideias de desenvolvimento do cérebro. As tarefas engajadoras garantiam que os estímulos irrelevantes fossem ignorados e que a atenção dos alunos se mantivesse na atividade matemática. Ao fim da intervenção, houve uma melhoria equivalente a 2,8 anos escolares, com relação às notas dos alunos em testes padronizados.

Figura 6: Resultado dos alunos antes e depois do curso de verão em testes padronizados

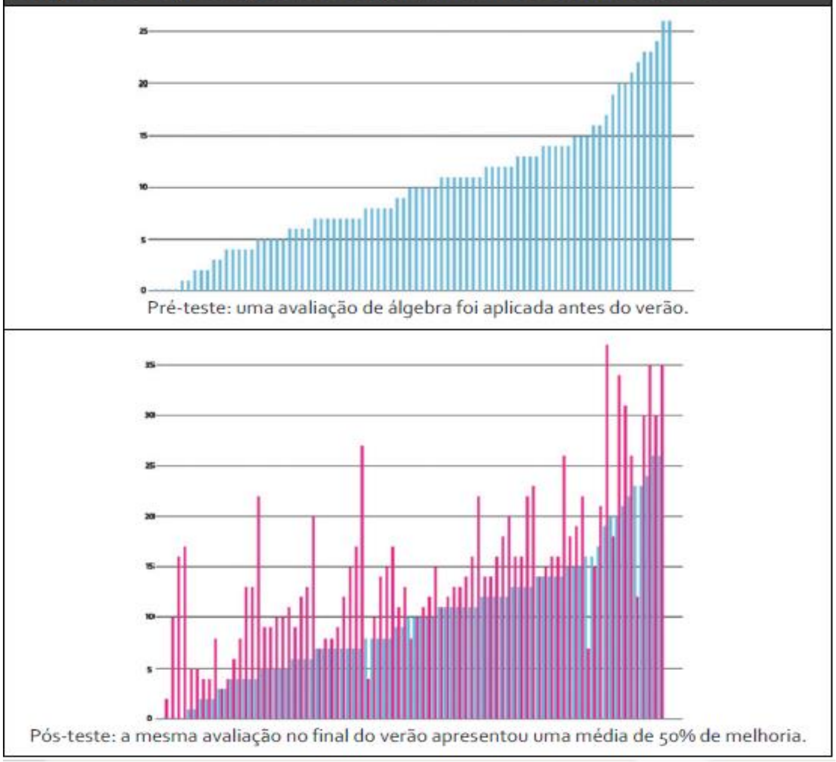


Fig. 1 A melhoria dos alunos do curso de verão do youcubed em testes padronizados é mostrada em dois gráficos. O eixo y mostra pontuações de álgebra; o eixo x mostra cada um dos 83 alunos.

Fonte: Boaler, 2019c, s/p

A figura 6 contém os gráficos apresentados em Boaler (2019c) referentes à comparação entre a pontuação dos alunos participantes do acampamento em testes padronizados antes e depois do acampamento.

Em janeiro de 2020, o programa Mentalidades Matemáticas, promovido pelo Instituto Sidarta e liderado por Jack Dieckmann, realizou um curso de férias no Brasil, com moldes semelhantes ao *YouCubed Summer Camp*. O curso de férias do Brasil contou com a participação de 70 crianças do 5° ano do Ensino Fundamental de duas escolas municipais de Cotia (SP) e buscou verificar, segundo Ya Jen Chang, presidente do Instituto Sidarta, os impactos desse curso norte-americano no contexto dos alunos brasileiros. Durante 10 dias, os alunos vivenciaram uma rotina diferente do habitual: aprenderam sobre o funcionamento do cérebro humano e suas reações quanto a estímulos, erros e acertos; fizeram tarefas matemáticos em grupos, trabalhando com materiais concretos, figuras, canetas coloridas e diferentes formas de representações matemáticas; à tarde praticavam esportes e faziam brincadeiras, aprendendo a importância do trabalho em equipe e a presença da matemática em tarefas cotidianas.

Os resultados[26] verificados no Brasil, assim como os de Boaler nos EUA, foram positivos: 96% dos alunos compreenderam como o erro é importante para a aprendizagem e aumentaram o seu gosto pela matemática; além disso, houve um avanço de cerca de 1,3 ano de aprendizado matemático ao longo desses 10 dias de curso.

Ao verificar os resultados significativos deste curso, Boaler (2020) enfatiza a importância de levar conhecimento sobre novas formas de ensinar e aprender matemática, e cita, principalmente, como é essencial que professores conheçam a capacidade que o cérebro tem de crescer enquanto aprende, durante toda a vida. Os estudos sobre a neuroplasticidade só se estabeleceram há 20 anos e muitos professores, que acreditam que o cérebro é fixo e que a matemática é só para alguns, trabalham uma matemática excludente, voltada para poucos, inflexível e inacessível, e continuam a contribuir para a manutenção da ansiedade matemática e do triste quadro de resultados negativos de ensino e aprendizagem matemática mundial.

Conclusivamente, a partir da afirmação de que: "[...] a plasticidade cerebral faz com que o cérebro se comporte mais como um músculo, que se modifica a partir de situações de esforço e que quanto mais desafiado, mais se desenvolve" (BOALER, 2015, apud VALLE, 2019, p.65) trataremos agora da segunda chave para aprendizagem: o esforço.

1.4.2 Chave II: esforço

No momento de preparação de uma aula de matemática, é comum o professor selecionar tarefas com o intuito de que seus alunos sejam bem-sucedidos. Livros didáticos e apostilas, por conseguinte, apresentam uma série de perguntas triviais (tarefas de praxeologia pontual e local) que não oferecem grandes dificuldades, permitindo que a maioria dos alunos as respondam simplesmente com a aplicação de alguma técnica. Embora intuitivamente possa parecer que isso se refere à busca pelo êxito do aluno, Boaler (2020) critica tal abordagem e afirma que acertar respostas não é um bom exercício mental. Para a autora, há muito mais em aprender errando do que simplesmente chegando ao resultado correto.

Para embasar tal afirmação, Boaler (2018) cita a proposta de modelos mentais de Jean Piaget, que na década de 1930, sugeriu que o ser humano modela o modo como suas ideias se encaixam e, quando esses modelos mentais fazem sentido, se encontram num estado denominado equilíbrio. Entretanto, quando se depara com novas ideias, há um esforço a fim de encaixá-las nos modelos já existentes e, quando elas parecem não se encaixar, existe a

[26] Dados disponíveis em: < https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2020/08/metodologia-de-ensino-matematico-faz-alunos-evoluirem-13-ano-em-10-dias.html>. Acesso em 31 ago. 2020.

necessidade de modificação do modelo atual, entrando num estado denominado desequilíbrio. A partir desse desequilíbrio, concluiu-se, é que surge a aprendizagem. No entanto, como já citado, o estilo de ensino de matemática atual consiste geralmente em propor aos estudantes, tarefas simples e repetitivas que não possibilitam o importante passo para o estado de desequilíbrio.

Carol Dweck, psicóloga e pesquisadora[27], comenta, nesse sentido, sobre a importância de que pais e professores instruam seus filhos a respeito de não ser admirável acertar tudo, pois isso mostra que eles não estão aprendendo. Segundo ela, quando o filho chega e diz que acertou tudo em uma prova, a correta reação dos pais é dizer: “Hum, desculpe; isso significa que você não teve oportunidades de aprender algo” (BOALER, 2018, p. 18). Para a autora, embora seja uma mensagem radical, é necessária para anular a ideia de que aprender corresponde a acertar tudo, e até mesmo, de que é preciso “ser inteligente” para ser bem sucedido.

As questões de inteligência e elogios entram em pauta quando o assunto é aprendizado, esforço e mente. Dweck (1999, apud VALLE, 2019) aponta que há alguns mitos do senso comum que precisam ser questionados. Esses mitos dizem respeito principalmente ao fato de acreditarmos que alunos com altas habilidades apreciam desafios, que o sucesso escolar incentiva a vontade do aluno em desenvolver novas habilidades, que o elogio referente à inteligência encoraja os estudantes e que a confiança dos alunos em sua inteligência é a chave para que eles queiram sempre mais. Segundo suas pesquisas, ao contrário do que se pensa, os alunos mais habilidosos ficam preocupados excessivamente com suas falhas e acabam evitando situações desafiadoras. Além disso, os elogios à inteligência acabam fazendo com que os estudantes evitem situações de risco e lidem mal com obstáculos na aprendizagem; “[...] a maioria dos estudantes mais confiantes não querem que sua inteligência seja testada e essa confiança é abalada quando são confrontados com dificuldades” (VALLE, 2019, p. 53).

Neste sentido, Valle (2019) traz em pauta o termo *mindset,* criado por Dweck (2006) para representar as crenças que as pessoas têm acerca de sua própria inteligência e habilidades. Dweck verificou atitudes e posturas das pessoas e agrupou-as em dois tipos de *mindsets*: *mindset* de crescimento e *mindset* fixo. Pessoas com *mindset* de crescimento acreditam em sua capacidade de desenvolver e ampliar suas habilidades com esforço e persistência, enfrentam

[27] Segundo seu perfil na página da Universidade de Stanford, seu trabalho une a psicologia do desenvolvimento, a psicologia social e a psicologia da personalidade e examina as auto-concepções que as pessoas usam para estruturar a si e orientar seu comportamento. Sua linha de pesquisa analisa as origens dessas auto-concepções, seu papel na motivação e auto-regulação e seu impacto nas conquistas e nos processos interpessoais. Realizou alguns trabalhos relacionando a interferência das mentalidades na aprendizagem matemática.

desafios de forma empenhada e encorajada, mesmo diante de falhas e enxergam o erro como oportunidade de aperfeiçoamento. Enquanto isso, pessoas com *mindset* fixo acreditam que suas habilidades e inteligências são limitadas, fixas e inatas, e, por serem pré-estabelecidas, não há muito o que fazer a respeito disso. São acomodadas, criam barreiras psicológicas que acabam por prejudicar seu aprendizado e, quando se deparam com alguma dificuldade, associam-na à falta de inteligência desistindo sem esforço, sentem-se incapazes e desconfortáveis frente a desafios e evitam ao máximo serem expostas a situações que podem levá-las a cometer erros. A autora também explica que uma pessoa pode ter *mindset*s diferentes em áreas distintas de sua vida, estar aberta a aprender e crescer praticando um novo esporte, por exemplo, mas apresentar *mindset* fixo em se tratando de suas habilidades musicais.

A forma como criamos nosso *mindset* está diretamente ligada às mensagens recebidas enquanto crianças.

> Quando as crianças são demasiadamente elogiadas por suas habilidades e inteligência, elas tendem a achar que, se são elogiadas como sendo talentosas, devem sempre acertar para corresponder àquele status. Essas crianças costumam evitar situações de desafio, por terem medo de errar e não condizer com o rótulo concedido pelos elogios que elas receberam. Por outro lado, quando elas são elogiadas pelo seu esforço, empenho, perseverança, foco, estratégias e aperfeiçoamento do aprendizado, elas tendem a se motivar diante de desafios, não temer o erro, e desenvolvem uma postura de *mindset* de crescimento. Crianças que são rotuladas como excelentes, medianas ou ruins em uma disciplina, a partir de suas notas, costumam desenvolver um *mindset* fixo, pois tendem a achar que aquela avaliação as define e que elas ou são boas ou não o são em determinada área (DWECK, 2006, apud VALLE, 2019, p. 54-55).

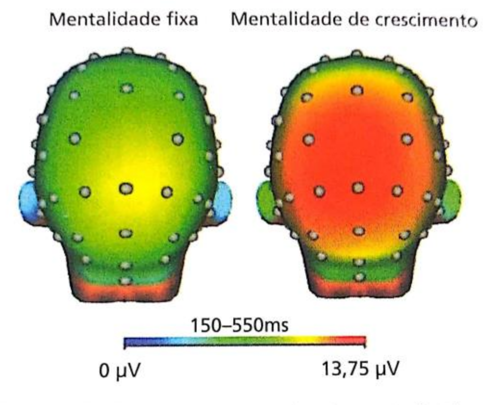
De maneira complementar, Boaler (2018) apresenta os resultados das pesquisas do psicólogo Jason Moser (2011) a respeito das respostas do cérebro quando cometemos erros. Segundo o autor, ao cometer um erro, o cérebro responde de duas formas:

- Negatividade relacionada ao erro (NRE): ocorre aumento da atividade elétrica do cérebro quando experimenta um conflito entre a resposta correta e o erro. *Esta atividade ocorre mesmo se não estivermos cientes do erro.*
- Pe: sinal cerebral que ocorre quando há consciência do erro cometido e a atenção consciente é dada a ele.

O interessante sobre essa pesquisa, é que, ao contrário do que o senso comum sugere - que aprendemos com o erro apenas quando percebemos que ele ocorreu e o corrigimos, mesmo quando não estamos conscientes de nossos erros, ocorrem disparos cerebrais, ou seja, nos momentos de erro, o cérebro é desafiado e cresce, independentemente de nossa consciência sobre ele (BOALER, 2018).

Além disso, Moser et al. (2011, apud BOALER, 2018) mostram que as atividades cerebrais após o erro verificadas em seus estudos eram maiores em indivíduos com mentalidade de crescimento do que naqueles com mentalidade fixa.

Figura 7: Atividade cerebral em indivíduos com mentalidade fixa e de crescimento



Fonte: Boaler, 2018, p. 12

Complementarmente, Daniel Coyle (apud BOALER, 2020), ao realizar estudos sobre pessoas consideradas talentosas e com alto desempenho, nas mais diversas áreas (música, matemática, esporte, etc.), concluiu que o sucesso não se deve a habilidades naturais e sim a um tipo especial de atividade e prática. As pesquisas revelaram que essas pessoas, ao adotarem tais práticas, tinham suas rotas cerebrais revestidas de mielina, "[...] substância que envolve os neurônios, cuja finalidade é aumentar a velocidade e lisura durante a transmissão de informações" (WAJNSZTEJN; ALESSI, 2009, p.40).

> Nossos cérebros funcionam através de uma rede interconectada de fibras nervosas (incluindo neurônios), e a mielina é uma forma de isolamento que envolve as fibras e aumenta a força, a velocidade e a precisão do sinal. Quando revemos uma ideia ou chutamos uma bola de futebol, a mielina reveste as rotas neurais envolvidas, otimizando aqueles circuitos e tornando os movimentos e pensamentos mais fluidos e eficientes no futuro. A mielina é vital para o processo de aprendizagem. A maior parte da aprendizagem leva tempo, e a mielina ajuda o processo reforçando os sinais e fortalecendo lentamente as rotas (BOALER, 2020, p.39).

Os matemáticos, jogadores de golfe e futebol e músicos mais bem sucedidos estudados por Coyle, apresentaram "rotas maravilhosas" em seus circuitos neurais, que, por estarem envolvidas em camadas sobrepostas de mielina, tornavam-se muito mais eficazes. A pesquisa concluiu também que qualquer pessoa é capaz de desenvolver essas "rotas maravilhosas" desde que trabalhe no limite de sua compreensão, errando constantemente em situações difíceis, consertando erros, seguindo em frente e, por conseguinte, cometendo novos erros, pressionando-se a todo momento com exercícios complexos. Coyle observou, ainda, que os pesquisados utilizam "[...] um mecanismo neurológico no qual certos padrões de prática direcionada constroem habilidade. Sem perceber, eles entraram em uma zona de aprendizagem acelerada que, embora não possa ser engarrafada, pode ser acessada por aqueles que sabem como" (BOALER, 2020, p.40). Como característica significativa dessas práticas, está a presença de "[...] falhas e o papel do esforço e do erro na transformação de iniciantes em especialistas. Isso condiz com a pesquisa cerebral que mostra maior atividade cerebral quando as pessoas se esforçam e cometem erros e menor atividade quando acertam" (BOALER, 2020, p.40-41).

Com relação à aprendizagem escolar, é comum que Boaler apresente evidências coletadas através da observação de aulas de matemática, nos mais diversos países. Em se tratando da verificação de métodos utilizados por professores no incentivo do esforço e consciência dos benefícios do erro, a autora relata suas observações em uma aula do Ensino Fundamental em Xangai, na China - cidade em que os estudantes apresentam o melhor desempenho em matemática do mundo. Ela constatou que, na dinâmica da aula, o professor constantemente chamava à frente alunos para expor suas ideias, mas ele escolhia exatamente os que apresentavam erros. O intrigante é que os alunos se sentiam contentes com isso, pois os erros eram valorizados pelo professor (BOALER, 2018). Além disso, verificou que em uma aula de uma hora, os alunos trabalham com cerca de 3 questões, profundas e complexas, que exigiam reflexão, discussão e argumentação e, enquanto os alunos discutiam entre si, era comum a intervenção do professor com perguntas provocativas e declarações intencionalmente incorretas, com o objetivo de incentivá-los a contra argumentar (BOALER, 2020).

A autora destaca o contraste acentuado existente entre as aulas da China e as aulas nos Estados Unidos onde, em uma hora de aula, são resolvidos cerca de 30 questões, simples e sem profundidade - quadro semelhante ao encontrado no Brasil. Logicamente, há diferenças significativas entre as tarefas trabalhadas nos dois países (tarefas de praxeologia pontual/local x tarefas de praxeologia regional/global), tamanha a discrepância com relação à quantidade trabalhada, entretanto, refletiremos mais profundamente sobre tipos de tarefas nos tópicos destinados à multiplicidade e flexibilidade e profundidade.

Também, Boaler (2020) cita um importante estudo feito a partir dos dados do TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) que é um teste internacional de matemática e ciências realizado a cada quatro anos em 57 países. A autora destaca que as informações destes testes, de maneira isolada, não são muito úteis já que analisar apenas as pontuações dos alunos não apresenta de que forma são ensinados e nem como são as aulas nos países de melhor e pior classificação. Entretanto, no último teste aplicado, alguns pesquisadores resolveram estudar a natureza do ensino de matemática nos países com melhores resultados e fizeram diversas constatações.

A respeito do Japão, por exemplo, sempre classificado entre os 5 melhores do mundo, constatou-se que nas aulas de matemática, 44% do tempo era utilizado "[...] inventando, pensando e debatendo-se com conceitos subjacentes" enquanto nos Estados Unidos, este tipo de atividade ocorria em menos de 1% do tempo (BOALER, 2020, p.41-42). Além disso, os professores japoneses mostraram, nitidamente, querer que os alunos se esforcem, muitas vezes dando a resposta errada propositalmente para que os mesmos voltassem à questão e trabalhassem mais ainda em conceitos fundamentais, os seja, o trabalho se dava em torno da praxeologia matemática completa. Em comparação a este comportamento, observou-se que nos EUA e no Reino Unido, por exemplo, os professores no geral poupam seus alunos do esforço. Nestes países, quando um estudante pede ajuda, o professor estrutura o trabalho pra ele, subdivide o problema e o separa de forma que sobra para o mesmo apenas a tarefa de aplicar alguma técnica, sem de fato compreender porque ela faz sentido. Os professores esvaziam os problemas e os alunos se sentem bem mas pouco aprendem.

A maioria das pessoas, principalmente no mundo ocidental como já citado, é criada com a ideia de que erros são ruins (BOALER, 2018). Constantemente essa ideia é reforçada desde a infância, quando somos elogiados pela nossa inteligência e criticados devido a nossos erros. Ao ingressarmos na escola, quando recebemos notas por provas e trabalhos, de acordo com nossos erros e acertos, essas mensagens são acentuadas: "[...] se os alunos recebem notas por seus trabalhos de matemática [...] e são penalizados por cometerem erros, então eles recebem uma mensagem muito negativa sobre erros e aprendizagem de matemática" (BOALER, 2018, p.16).

A mudança de perspectiva a respeito do erro e do esforço ultrapassa as questões educacionais. Estimativas conservadoras sugerem que pelo menos um terço dos estudantes experimenta extremo estresse em matemática, indiferentemente de grupos de realizações ou contextos econômicos específicos e, quando estão estressados, sua memória de trabalho é comprometida fazendo com que não consigam acessar os fatos matemáticos que conhecem (BOALER, 2019a).

Moura-Silva, Neto e Gonçalvez (2020) apontam também que a ansiedade matemática possui, além de marcadores cognitivos - ao limitar a memória de trabalho durante atividades matemáticas complexas; marcadores fisiológicos, quando ativa, por exemplo, áreas do cérebro relacionadas à percepção de dor; e marcadores comportamentais, quando o aluno foge de carreiras que apresentam a necessidade de habilidades numéricas. Ainda, complementam:

> Considerando que indivíduos com alta ansiedade matemática são mais propensos a autogerar erros em tarefas numéricas e ponderando que erros são vistos de modo negativo em aulas de Matemática, provavelmente eles constituem fator contributivo no desenvolvimento e manutenção da ansiedade matemática. Intervenções educativas que redimensionem positivamente o "erro" em tarefas matemáticas, neste sentido, podem ter implicações positivas no processo de ensino e aprendizagem podendo quebrar o ciclo viciante da ansiedade matemática que gera mau desempenho, que, por sua vez, gera mais ansiedade matemática (MOURA-SILVA, NETO, GONÇALVES, 2020, p.262).

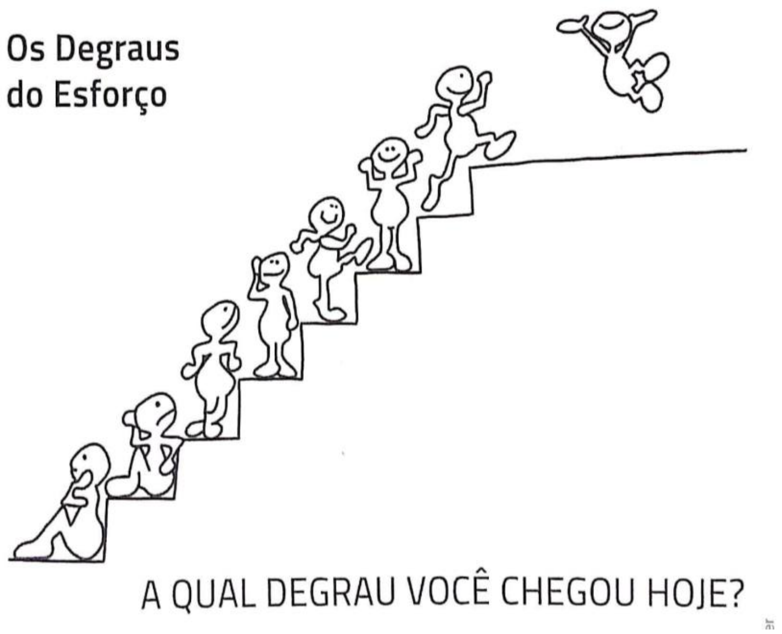
Elizabeth e Robert Bjork, cientistas que estudaram a aprendizagem por décadas, assinalam que muito do que é feito na escola é improdutivo pois as práticas necessárias para a aprendizagem geralmente são contra-intuitivas. Eles enfatizam a importância do professor instigar o cérebro dos alunos gerando "dificuldades desejáveis" e destacam o fato de recuperar informações do cérebro como excelente atividade para mudança e posterior acesso no cérebro (apud BOALER, 2020, p.43).

> Muitas pessoas estudam para provas relendo conteúdos, mas os Bjork salientam que isso não é muito útil para o cérebro. Uma maneira bem mais útil de revisar a matéria é testar a si mesmo, para que você continue tendo que se lembrar do conteúdo - e assim cometa erros e os corrija ao longo do caminho. Os cientistas da aprendizagem apontam que tais testes não devem ser eventos de performance, pois estes causam estresse e reduzem a experiência de aprendizagem. A autotestagem não avaliativa ou a testagem por pares é mais benéfica (BOALER, 2020, p.43).

Após conhecer as evidências da importância dos erros e do esforço no desenvolvimento do cérebro e, além disso, da reversão de ideias errôneas sobre a matemática que geram ansiedade em tantos estudantes e repercutem negativamente em diversos âmbitos de suas vidas, deparamo-nos com a dicotomia de desafiar os alunos expondo-os a situações conflitantes e, ao mesmo tempo evitar que desenvolvam estresse e ansiedade matemática. Complementarmente, Boaler (2020) relata que as queixas mais comuns levadas até ela por professores referem-se ao fato de que os alunos não querem se esforçar e querem apenas que lhes seja dito o que fazer. A autora então afirma que este tipo de atitude do aluno é um grande indicativo de que ele apresenta mentalidade fixa e que, em algum momento de sua vida, recebeu mensagens de que não seria bem sucedido e que precisar se esforçar é indicação de fraqueza. Sendo assim, "[...] as interações dos professores e dos pais com os alunos enquanto estes trabalham, em especial nesses momentos muito importantes de esforço, são fundamentais para o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento" (BOALER, 2020, p.49).

De forma a exemplificar como pequenas atitudes são capazes de modificar a maneira como a matemática é "sentida" pelos estudantes, Boaler (2020) apresenta a professora Jennifer Schaefer, que ministra aulas para o sexto ano em Ontário, no Canadá. Jennifer afirma que quando seus alunos chegam no sexto ano, já têm definido se são "espertos" ou não e esse comportamento de *mindset* fixo é muito negativo para a aprendizagem. A partir dessa premissa, passou a dedicar os dois primeiros meses do ano letivo buscando construir (ou reconstruir) a confiança de cada aluno em si mesmo, mostrando-lhes informações sobre a neuroplasticidade e a capacidade de aprender a partir das dificuldades. Como forma de transformar o assunto de forma visual e, para uma melhor compreensão dos alunos, Jennifer fez uma analogia entre a construção do conhecimento e os degraus de uma escada (conforme figura 8).

Figura 8: Os degraus do esforço

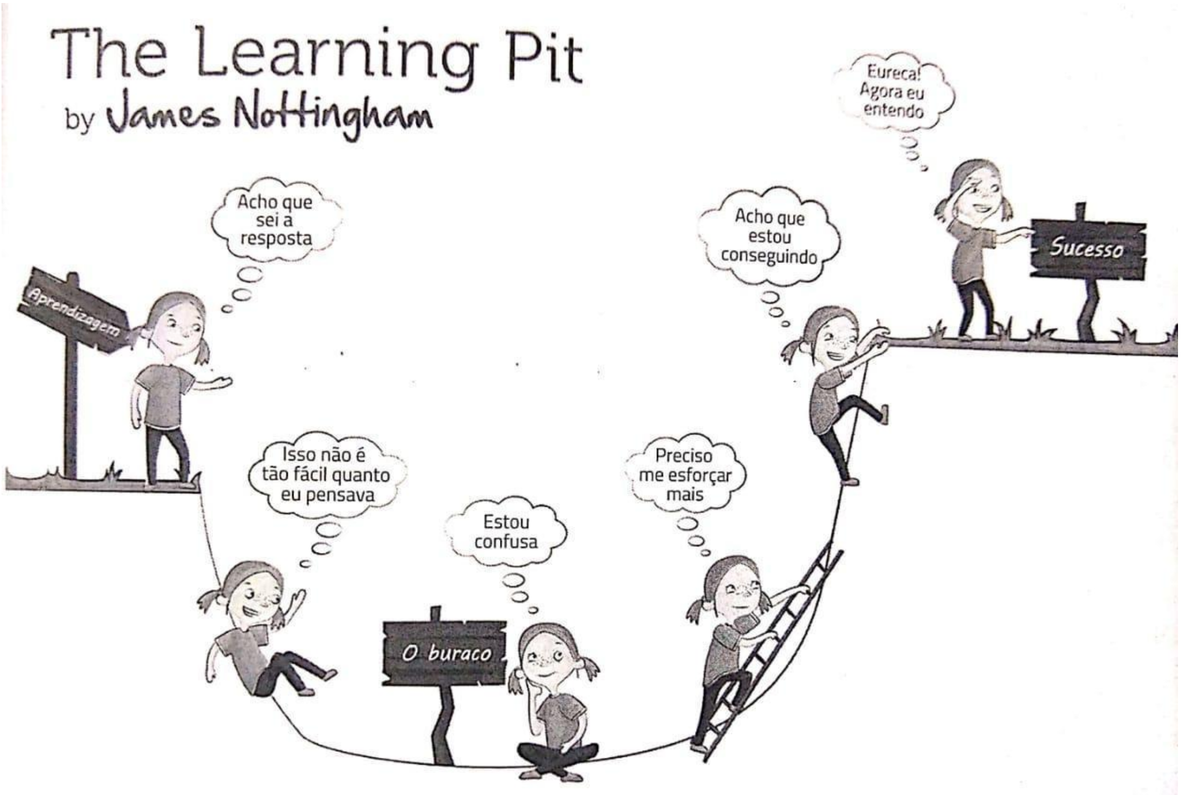


Fonte: Boaler, 2020, p.50

Jennifer diz para os alunos que ninguém quer estar no degrau mais baixo (triste, ressentido) e também não no mais alto (sentindo-se superior, chato demais porque já terminou). Sugere que todos fiquem no meio e espalha imagens de degraus por toda a sala, de forma construir lembranças visuais e contínuas da importância do esforço para a aprendizagem.

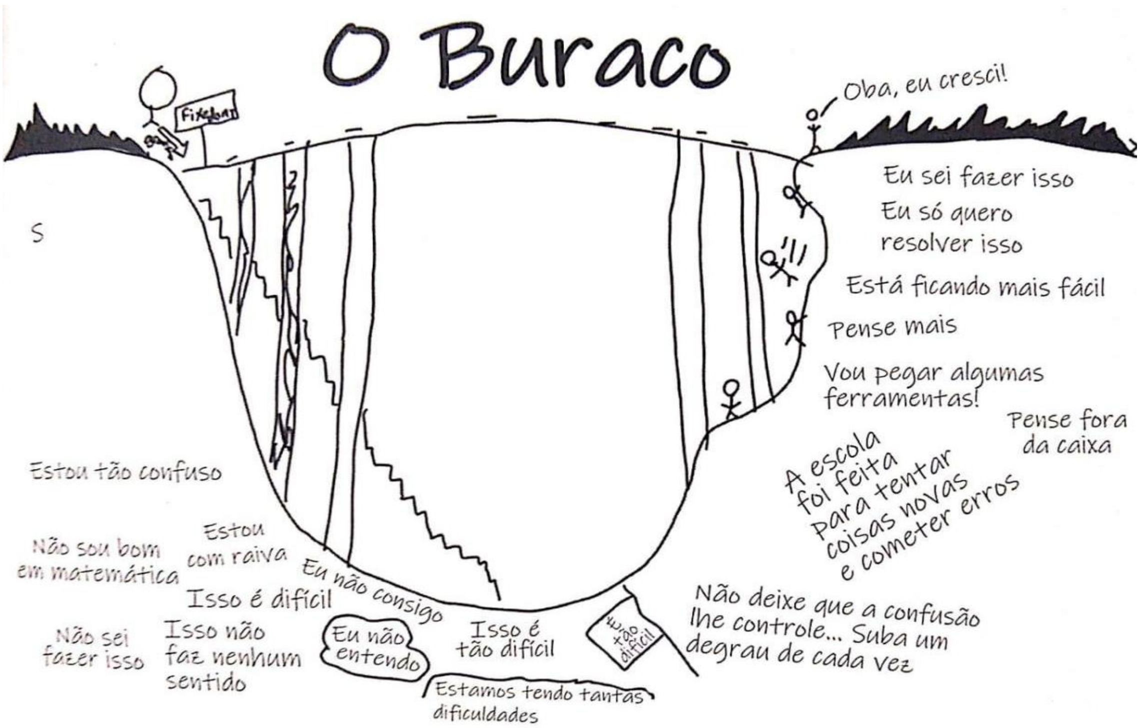
Além disso, a fim de permitir com que seus alunos trabalhem seus sentimentos e entendam o significado dos mesmos para sua aprendizagem e evolução, Jennifer também utiliza a ideia do "buraco de aprendizagem" (figura 9), criada por James Nottingham, educador do Reino Unido. A figura 10, na página seguinte, mostra o resultado deste trabalho.

Figura 9: O buraco da aprendizagem de James Nottingham



Fonte: Boaler, 2020, p.51

Figura 10: O buraco da aprendizagem criado pelos alunos de Jeniffer



Fonte: Boaler, 2020, p.51

Por fim, além de buscar inspiração nos modelos de aula da China e do Japão e nos resultados da neurociência, bem como na utilização de analogias (escada do esforço e buraco da aprendizagem) para mostrar aos alunos a importância dos erros, é necessário refletir sobre um tópico que muitas vezes deixa os professores confusos: como trabalhar a importância dos erros se, no geral, as escolas e os sistemas de ensino obrigam a aplicação de provas com notas que pontuam apenas os acertos? De que forma o professor deve conduzir as avaliações com foco no esforço e na aprendizagem?

A fim de refletir sobre esta problemática, apresentaremos agora esclarecimentos e estratégias sobre avaliação apontadas por Boaler em suas obras.

1.4.2.1 Avaliação para uma mentalidade de crescimento

Existem inúmeras maneiras de entender, raciocinar e representar a matemática (veremos mais sobre isso no tópico multiplicidade), mesmo assim, o que se percebe nas escolas é que "[...] todas essas formas complexas e variadas de compreensão dos estudantes viram-se reduzidas a letras e números isolados que são usados para julgar o valor dos alunos" (BOALER, 2018, p. 123). Há um encorajamento em testá-los, geralmente através de questões procedimentais, e classificá-los de forma excessiva e prejudicial, criando uma cultura que acaba por definir o aluno pela nota que ele tira. Os testes padronizados não testam de fato o que é importante e valioso na matemática. Segundo Boaler (2018), empresas como a Google declaram que não se interessam no desempenho dos estudantes em testes padronizados pois isso não prediz como será seu comportamento e sucesso no trabalho. Um bom teste é aquele que avalia o que é importante - a criatividade, a flexibilidade e o pensamento analítico - mas os testes de matemática em geral, só testam o que é fácil de testar (memorização de fatos e aplicação de técnicas).

A partir de um estudo longitudinal realizado por Boaler na Inglaterra, a autora constatou algo muito interessante sobre o ensino escolar tradicional, com foco nos testes externos e o ensino baseado em projetos abertos. Após analisar as respostas dadas pelos alunos no *General Certificate of Secundary Education* (GSCE), verificou-se que os estudantes que haviam aprendido matemática por meio de projetos tinham tentado resolver um número muito maior de questões da prova, empenhando-se em resolvê-las mesmo sem ter visto problemas semelhantes em aula. Ainda, verificou-se que eles foram mais bem sucedidos em questões que envolviam procedimentos que não tinham sequer visto na escola. Segundo a autora, embora em questões procedimentais, que envolviam apenas o uso de um método padrão, o desempenho dos dois grupos se assemelhou, quando se tratavam de questões conceituais que exigiam mais reflexão, houve considerável destaque dos alunos da escola de projetos em detrimento dos alunos da escola tradicional. Boaler (2018) afirma que pode parecer contraintuitivo os alunos que não fazem testes em suas escolas terem desempenho superior aos que são treinados para isso, mas afirma que as pesquisas sobre o cérebro e a aprendizagem são capazes de justificar tais resultados:

> Alunos sem experiência em exames e testes podem obter pontuações altas, porque **a preparação mais importante que podemos dar aos estudantes é uma mentalidade de crescimento, crenças positivas sobre a própria capacidade e ferramentas matemáticas para a resolução de problemas** que eles estejam preparados para usar em qualquer situação matemática (BOALER, 2018, p. 124, grifo nosso).

Conforme vimos no tópico dedicado às noções didáticas, a TAD também aborda esta temática, constatando a negatividade das avaliações institucionais ao interferirem nos objetivos dos estudantes que, ao invés de estarem focados em seu aprendizado (relação pessoa-objeto), acabam direcionando sua atenção para obter da avaliação o rótulo de “sujeito adequado na instituição”.

Além da interferência dos testes na motivação dos alunos, as notas produzidas pelos mesmos geram um impacto ainda mais negativo no ensino: quando os alunos recebem uma nota baseada na quantidade de acertos e erros que cometeram, além de acreditarem cada vez mais que o erro é ruim e que a matemática se trata de performance, se comparam uns com os outros e acabam decidindo que não são tão bons, começando a enxergar a si mesmos como os próprios pontos e notas. “Eles não consideram os pontos como um indicador de sua aprendizagem ou do que precisam fazer para aprender. Eles encaram a pontuação como indicador de quem eles são como pessoas” (BOALER, 2018, p.124).

Ao contrário do que muitos ainda pensam, legado de uma cultura que valoriza os testes e notas mais do que persistência, coragem e resolução de problemas, uma cultura que acredita que ao acrescentar notas e pontos a tarefas, os alunos sentem-se motivados a aprender, estudos recentes afirmam que isso apenas os desmotiva, comunicando mensagens fixas e prejudiciais que resultam em menos aprendizagem. Boaler (2018) cita uma série de pesquisas realizadas por Elawar e Corno, Butler e Pulfrey, Butera e Buchs, que observaram, basicamente, o comportamento de alunos de três grupos distintos: um que recebia notas, outro que recebia notas e comentários diagnósticos e outro que recebia apenas comentários diagnósticos. Os resultados obtidos foram esclarecedores: os estudantes que receberam apenas comentários apresentaram desempenho superior, mostrando um aprendizado duas vezes mais rápido do que os outros dois grupos, que, além do menor desempenho, apresentaram-se mais desmotivados.

Constatou-se também que os alunos que receberam tanto a nota como o comentário se importaram apenas com a nota, focando-se estritamente nela.

A autora relata, ainda, que acompanhou diversos professores que decidiram substituir os métodos de avaliação tradicional por avaliações focadas em dar aos estudantes informações sobre o que eles aprenderam bem e onde precisam se dedicar um pouco mais, acompanhadas de mensagens sobre mentalidade de crescimento. Essa nova abordagem resultou em drásticas mudanças em sala de aula, não apenas a nível de desempenho, mas a nível comportamental: observou-se diminuição da ansiedade matemática e aumento na confiança e engajamento dos alunos.

Avaliar pensando em fornecer informações e ferramentas aos alunos com o intuito de aprimorar seu aprendizado, tendo clareza sobre o que sabem, o que precisam saber e como vão fazer para alcançar este objetivo é o que se chama de "avaliação para aprendizagem".

Para entender um pouco mais sobre esta avaliação, é preciso saber que existem, basicamente, dois tipos de avaliação: a avaliação formativa e a somativa. Enquanto a avaliação formativa é a base da avaliação para aprendizagem, a avaliação somativa resume a aprendizagem do aluno a um ponto de chegada, e geralmente é utilizada atrelada a uma nota (BOALER, 2018). O quadro abaixo, adaptado de Boaler (2018, p. 131), mostra de forma mais detalhada, a diferença entre as duas avaliações.

Quadro 2: Comparativo entre avaliações formativa e somativa

Avaliação formativa	**Avaliação somativa**
● informa a aprendizagem e é a essência da *avaliação para aprendizagem*. ● usada para descobrir em que ponto os alunos estão em seu aprendizado para que os professores e alunos saibam o que ainda é preciso estudar para depois seguir. ● informa os alunos sobre o que sabiam, o que precisavam saber e as maneiras de diminuir a lacuna entre os dois. ● ensina aos alunos a responsabilidade pelo próprio aprendizado.	● objetivo de resumir a aprendizagem do aluno. ● muitas vezes é usada formativamente, ou seja, atribui-se uma pontuação ou nota final enquanto os alunos ainda estão aprendendo conteúdos. ● geralmente, após a avaliação somativa, os professores passam para o próximo assunto sem esperar para ver o que os testes revelaram. Isso significa que a avaliação é usada apenas como um meio de

● capacita os alunos para tornarem-se aprendizes autônomos que podem se autorregular e determinar o que mais precisam aprender e conhecem maneiras de melhorar sua aprendizagem. ● o professor despende menos tempo contando aos alunos sobre o rendimento deles e mais tempo capacitando-os a assumir o controle de suas rotas de aprendizagem.	rotular os alunos e não entender, de fato, o que aprenderam ou não.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Para Boaler (2018), ao longo do processo de aprendizagem do aluno, é muito importante avaliar formativamente. Além de fornecer uma série de estratégias e métodos para a abordagem de conceitos que não foram aprendidos, a avaliação formativa cria nos alunos a responsabilidade pelo próprio aprendizado.

A avaliação para aprendizagem pode ser dividida em três partes:

> 1. Comunicar claramente os alunos sobre o que eles aprenderam.
> 2. Ajudar os alunos a se conscientizarem sobre onde eles estão em sua jornada de aprendizagem e onde precisam chegar.
> 3. Dar aos alunos informações sobre maneiras de preencher a lacuna entre o ponto em que se encontram e o ponto em que precisam chegar (BOALER, 2018, p. 131).

Segundo a autora, a avaliação é chamada *para* aprendizagem porque as informações geradas por ela ajudam a tornar o ensino mais eficaz, conduzindo os alunos a uma aprendizagem máxima. Ela afirma que “[...] os aprendizes mais eficazes são aqueles que são reflexivos, que se engajam em metacognição - pensar sobre o que sabem - e que assumem o controle da própria aprendizagem (WHITE; FREDERIKSEN, 1998, apud BOALER, 2018, p.131)”.

Há, portanto, uma urgente necessidade de refletirmos sobre a avaliação. Avaliar para medir a capacidade do aluno através de uma nota, provoca ansiedade matemática, transmite mensagens fixas sobre o conhecimento e confirma aos alunos que os erros são ruins. Em contrapartida, avaliar para aprendizagem é ferramenta essencial para orientar o trabalho do professor e garante a formação de sujeitos autocríticos e responsáveis pela própria aprendizagem.

Sabendo da necessidade de orientar os professores a respeito desta perspectiva de avaliação, Boaler (2018) compartilha nove estratégias que utiliza para encorajar os alunos a tornarem-se mais conscientes da matemática que conhecem, daquela que estão aprendendo e de qual seu lugar no processo de aprendizagem.

1.4.2.1.1 ***Autoavaliação***

É uma ferramenta que dá informações claras sobre a matemática que os alunos estão aprendendo, ou seja, elucida quais teorias, tecnologias e técnicas estão sendo usadas na resolução das tarefas, através de declarações que permitem aos alunos pensarem sobre o que aprenderam e já sabem utilizar e o que ainda precisam melhorar. Estudos de Black et al. (2012, apud BOALER, 2018) constataram que quando os alunos precisam classificar sua compreensão sobre determinado assunto por meio de uma autoavaliação, eles são incrivelmente precisos, sem superestimá-la nem subestimá-la.

Boaler sugere ainda que, com o início de cada unidade, o professor apresente claramente quais são os conteúdos matemáticas que irão ser trabalhados, de forma que os estudantes comecem a perceber o caminho que deverão percorrer em suas jornadas de aprendizagem, "eles aprendem o que é importante, assim como o que precisam trabalhar para melhorar o rendimento" (BOALER, 2018, p.132).

As autoavaliações geralmente são organizadas através de itens, cujas frases devem comunicar *conteúdo* como, por exemplo: "Entendo a diferença entre média e mediana e quando cada uma deve ser usada", ou *práticas matemáticas*: "Aprendi a persistir nos problemas e a não desistir mesmo quando eles são difíceis" (BOALER, 2018, p.132). Elas podem ser usadas para avaliar uma única aula ou um período de tempo mais longo e, impreterivelmente, devem ser realizadas com tempo, permitindo aos alunos um momento para reflexão sobre sua aprendizagem. Abaixo, apresentamos um exemplo de autoavaliação.

Figura 11: Autoavaliação

AUTOAVALIAÇÃO: POLÍGONOS

	Posso fazer isso de maneira independente e explicar como pensei ao meu colega ou professor.	**Posso fazer isso de maneira independente.**	**Preciso de mais tempo. Preciso ver um exemplo que me ajude.**
Desenhar retas e segmentos de linha com medições fornecidas.			
Desenhar retas e segmentos de retas paralelas.			
Desenhar retas e segmentos de retas que se intersectam.			
Criar um polígono com determinado perímetro.			
Criar um quadrado ou um retângulo com determinada área.			
Criar uma forma irregular cuja área pode ser encontrada dividindo-a em retângulos ou quadrados.			

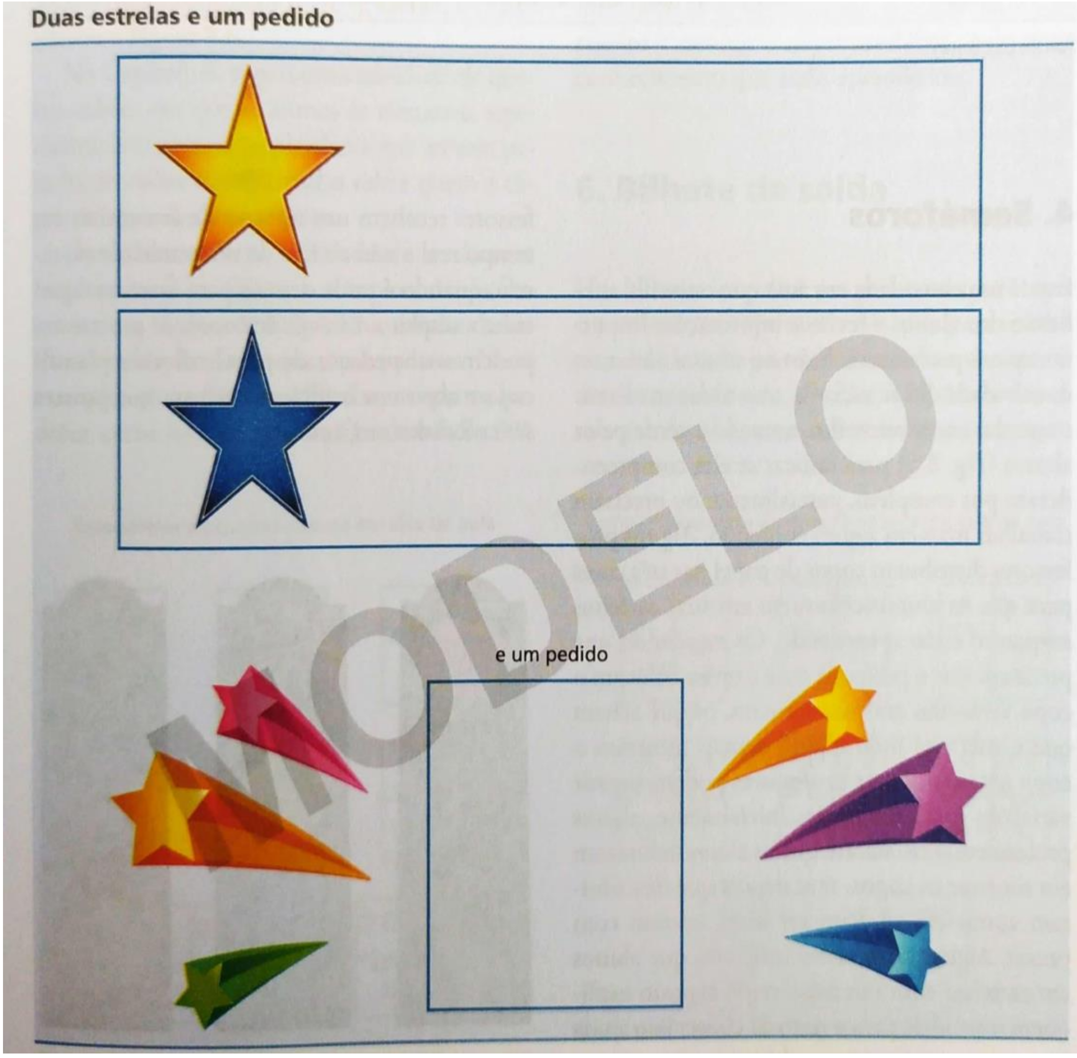
Fonte: Lori Mallet, apud Boaler, 2018, p.133

1.4.2.1.2 ***Avaliação por pares***

É semelhante a autoavaliação, mas se trata de fornecer critérios de avaliação claros sobre o *trabalho dos outros*. Nessa avaliação, os alunos têm a oportunidade de se conscientizarem da matemática que estão aprendendo e do que ainda precisam aprender baseados no que os colegas apresentam. “A avaliação por pares é altamente eficaz, em parte porque os estudantes são muito mais abertos para ouvir críticas ou sugestões de mudança de outro aluno e porque os pares em geral se comunicam de maneiras que são facilmente compreendidas entre si” (BOALER, 2018, p.136-137).

Uma sugestão para tal avaliação é o "método duas estrelas e um pedido", onde os alunos selecionam, no trabalho do colega, duas coisas bem feitas e uma que deve ser melhorada, conforme figura abaixo.

Figura 12: Método duas estrelas e um pedido

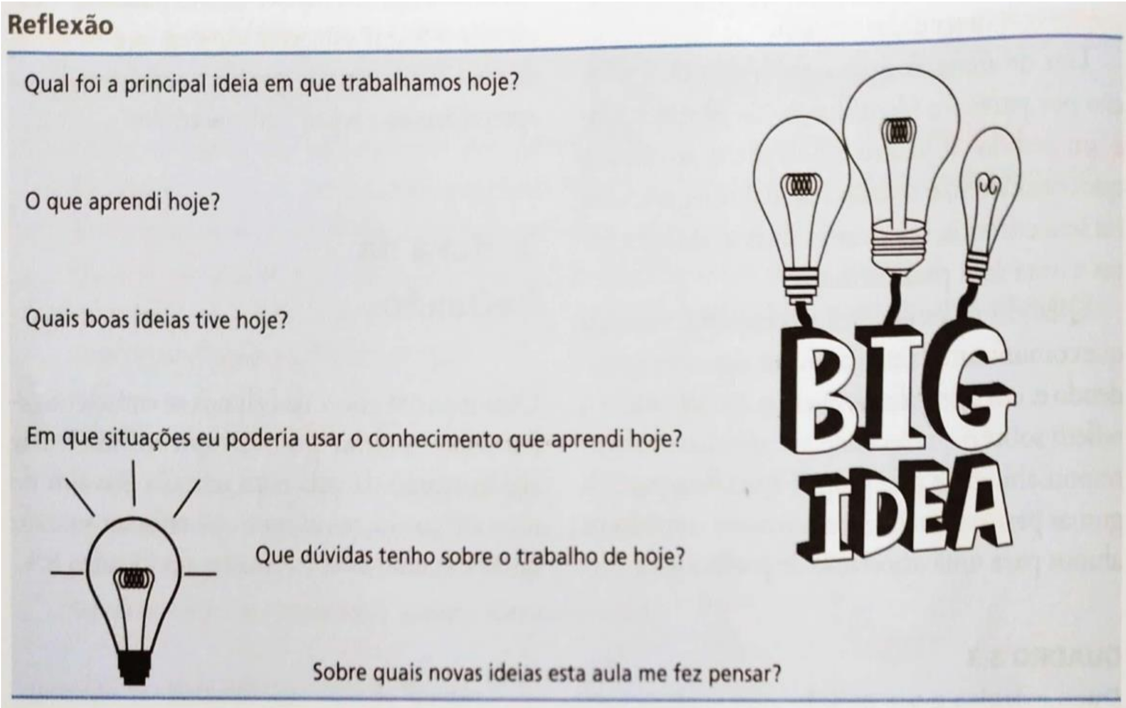


Fonte: Lisa Henry, apud Boaler, 2018, p. 137

1.4.2.1.3 ***Hora da reflexão***

A hora da reflexão é essencial para a conscientização dos alunos sobre as ideias que estão aprendendo. No final da aula, permitir um momento para reflexões sobre o que foi trabalhado no dia, o que foi aprendido e as dúvidas que possivelmente tenham surgidos é excelente. A figura 16, mostra um exemplo de perguntas que podem guiar esta reflexão.

Figura 13: Hora da reflexão



Fonte: Lisa Henry, apud Boaler, 2018, p. 138

1.4.2.1.4 ***Semáforos***

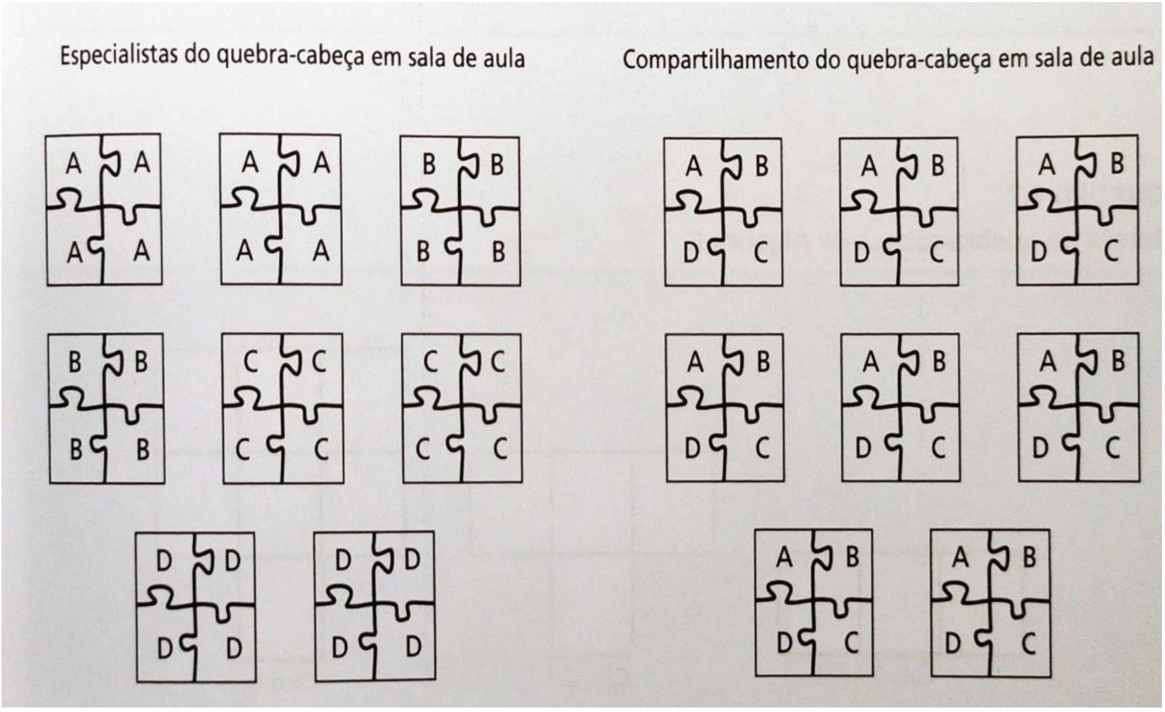
Essa é uma estratégia interessante para fornecer ao professor um *feedback* imediato sobre o andamento da aula, além de dar liberdade aos alunos para expressar como se sentem em relação ao novo conteúdo ou tarefa. Existem variantes desta atividade mas, em geral, ela se resume à utilização das cores do semáforo para representar como os estudantes estão se sentindo a respeito da matemática aprendida. Em uma das variantes, distribui-se para cada aluno, três copos de plástico, um vermelho, um amarelo e um verde. O estudante deve escolher qual copo colocar sobre a mesa, demonstrando que precisa que o professor revise a matéria (vermelho), que a aula está indo rápido demais e precisa de mais um tempo (amarelo) ou que compreendeu com facilidade (verde). Os alunos do copo verde podem auxiliar o professor e também explicar suas ideias, dando retorno ao professor em tempo real sobre o ensino e também ajudando os colegas.

1.4.2.1.5 ***Grupos de quebra-cabeças***

Nessa estratégia, os alunos se juntam em grupos, cada qual responsável por aprender (tornar-se especialista) um determinado assunto, novo método, ou fenômeno interessante. Depois criam-se novos grupos, formados com um especialista de cada assunto e os membros ensinam uns aos outros sobre o novo conhecimento que aprenderam previamente. Segundo

Boaler, é preciso ao menos quatro conhecimentos diferentes para que essa dinâmica funcione, de modo que, quando os membros trocam de grupo, cada um deles tenha algo diferente a compartilhar. A figura abaixo mostra como os grupos de quebra-cabeças podem ser trabalhados em uma turma de 32 alunos.

Figura 14: Esquema de organização de grupos de quebra-cabeça



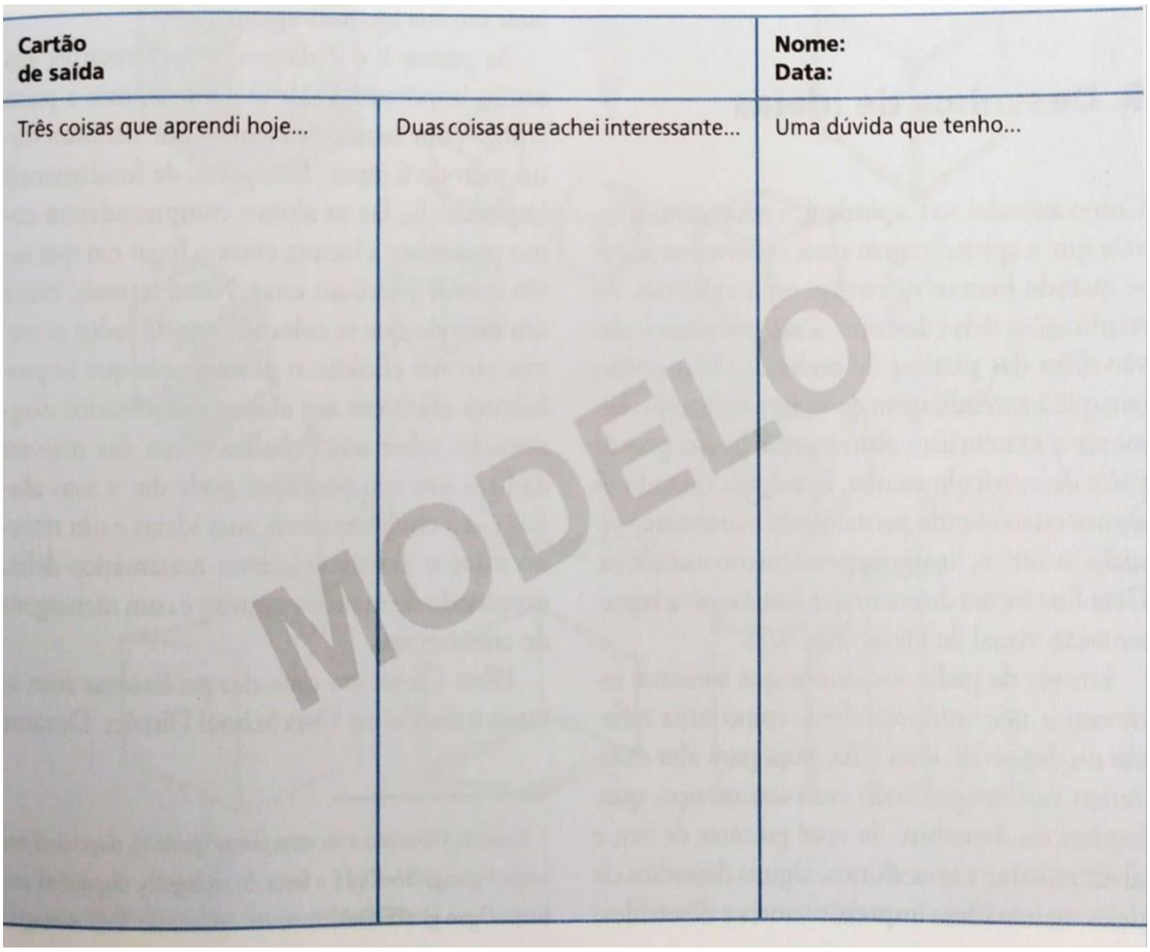
Fonte: Boaler, 2018, p. 139

1.4.2.1.6 ***Bilhete de saída***

De forma semelhante à hora da reflexão, o bilhete de saída serve para que os alunos reflitam e informem sobre as coisas que aprenderam, o que acharam interessante e as dúvidas que tiveram. É um pedaço de papel preenchido ao fim da aula, e pode ser formatado de acordo com a criatividade do professor. Abaixo, trazemos um exemplo apresentado por Boaler (2018), mas indicamos uma página da *web*[28] que traz diversos modelos editáveis de cartão de saída que facilitam o trabalho do professor:

[28] Disponível em: <https://templates.office.com/pt-br/bilhetes-de-sa%C3%ADda-tm44563831>. Acesso em 02 nov.2020.

Figura 15: Modelo de cartão de saída



Cartão de saída		Nome: Data:
Três coisas que aprendi hoje...	Duas coisas que achei interessante...	Uma dúvida que tenho...

Fonte: Boaler, 2018, p. 141

1.4.2.1.7 ***Formulários on-line***

Usar formulários on-line que solicitam comentários ou ideias sobre as aulas em tempo real ajuda os alunos a engajarem-se nas tarefas, principalmente aqueles que geralmente não participam verbalmente da aula. Pedir para que enviem reflexões, ou que transmitam os indicadores vermelho, verde e amarelo também são possibilidades e permitem ao professor acompanhar, através de seu celular ou computador, um feedback instantâneo da aula.

1.4.2.1.8 ***Desenhos de ideias***

Conforme apresentado anteriormente, a aprendizagem é reforçada quando o pensamento matemático usa-se de representações visuais ao invés de ser tratado apenas de maneira abstrata, proporcionando a construção de novas rotas cerebrais. Sendo assim, uma maneira de encorajar estas práticas é pedir que, nos momentos de reflexão ou depois da aula, os alunos utilizem desenhos e esboços para mostrarem sua compreensão e suas ideias.

1.4.2.1.9 ***Alunos formulam perguntas e testes***

Redigir uma boa questão permite o desenvolvimento da criatividade e a percepção do que é mais importante em determinado conteúdo. Logo, pedir que os estudantes escrevam uma avaliação, além de ser uma excelente possibilidade de aprendizagem, fornece aos professores indicativos sobre a maneira que estão vendo os conteúdos.

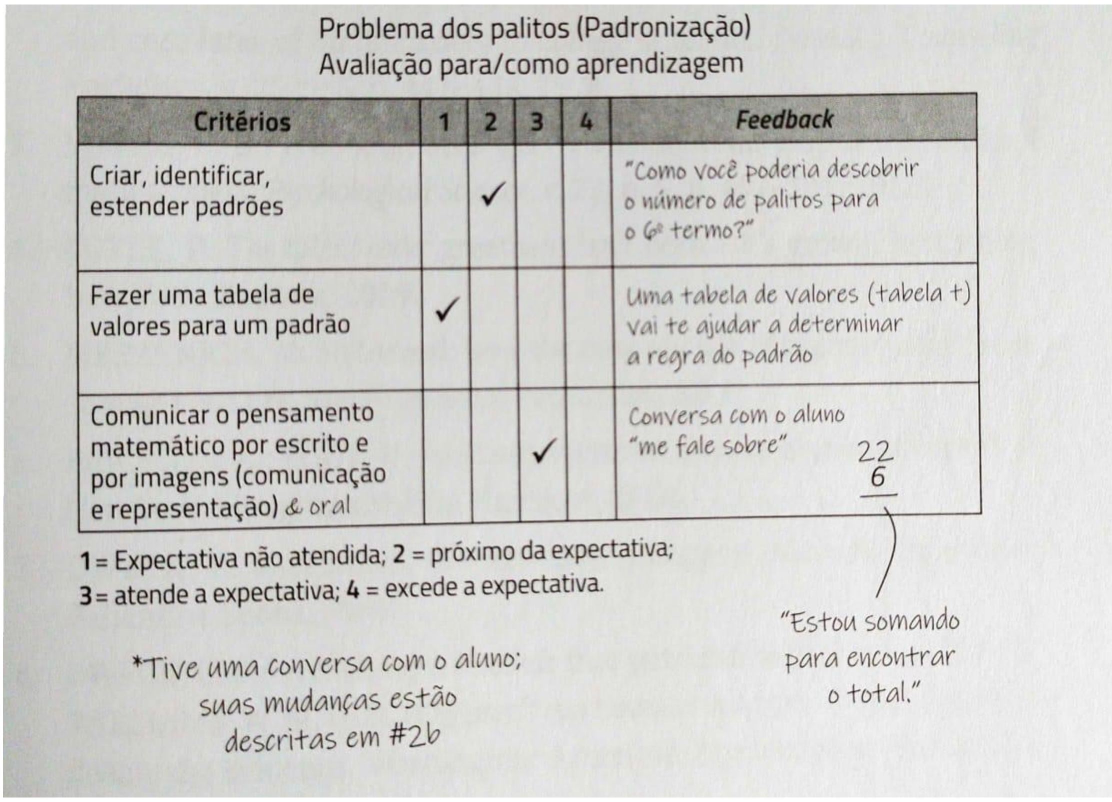
As estratégias apresentadas até aqui dizem respeito às duas primeiras etapas da avaliação para aprendizagem, pois ajudam os alunos a perceber o que aprenderam e o que deveriam saber. Entretanto, a terceira etapa é ainda mais importante, pois é através dela que os estudantes saberão de que forma agir para alcançar a aprendizagem efetiva, preenchendo as lacunas entre o local no qual se encontram e onde precisam estar. Nesta etapa, o papel do professor é primordial, cabendo a ele oferecer comentários diagnósticos sobre o trabalho dos alunos, guiando seus próximos passos. "Uma das maiores dádivas que um professor pode dar a seus alunos é seu conhecimento, suas ideias e um retorno sobre o desenvolvimento matemático deles, expressado de maneira positiva e com mensagens de crescimento" (BOALER, 2018, p.142).

Nesse sentido, o uso de rubricas é uma boa alternativa. As rubricas são esquemas práticos, diretos e objetivos, que categorizam e classificam em níveis, as produções, os conhecimentos e as tarefas, elucidando o que se espera do aluno com relação ao que está sendo trabalhado. Nas rubricas, o professor deve deixar claro os objetivos ou critérios da tarefa, e permitir que o aluno sinalize em que nível ele atingiu tal objetivo/critério. A tarefa primordial do professor é elucidar os objetivos esperados e os objetivos de excelência, mostrando o que é esperado mas ampliando os horizontes, caso queira ir além (piso baixo teto alto). Nesse sentido, por meio da descrição de cada nível, o estudante deve ser levado a refletir, de forma autônoma, sobre o seu progresso, concluindo se está aquém do esperado (ou seja, observando o que errou) e/ou como pode ir além, chegando a conclusões sobre seu aprendizado sem precisar que o professor indique isso pessoalmente. O professor, por sua vez, pode acompanhar o desenvolvimento do aluno a partir de um recurso mais qualitativo e não pela soma de pontuação de questões. As rubricas, portanto, podem ser utilizadas tanto como instrumento de avaliação de tarefas quanto para autoavaliação.

As rubricas são ferramentas eficientes para avaliação pois, segundo Porto (2005, apud LOBATO, 2011), permitem: *objetividade* (sabe-se exatamente quais são as habilidades esperadas e demonstradas pelos estudantes); *facilidade* (depois de elaboradas, as rubricas tornam simples a tarefa de avaliar); *gradatividade* (possibilita-se a explicitação gradual do desempenho esperado com relação à tarefa ou conteúdo); *transparência* (ao enunciar os objetivos esperados e de excelência, os estudantes têm uma visão clara do que já sabem e/ou o que ainda precisam fazer para alcançar a aprendizagem, tendo condições de “comparar” os objetivos já alcançados com os esperados).

A figura abaixo é uma rubrica da escola de Mark Cassar, onde o professor verifica se o estudante satisfez a área de aprendizagem descrita na coluna “critérios” e, complementarmente, inclui um *feedback* para o aluno indicando maneiras para melhorar. “Neste caso, a rubrica reflete uma conversa que o professor teve com o aluno para garantir sua compreensão” (BOALER, 2020, p.178).

Figura 16: Rubrica da escola de Mark Cassar



Problema dos palitos (Padronização)
Avaliação para/como aprendizagem

Critérios	1	2	3	4	Feedback
Criar, identificar, estender padrões		✓			"Como você poderia descobrir o número de palitos para o 6º termo?"
Fazer uma tabela de valores para um padrão	✓				Uma tabela de valores (tabela t) vai te ajudar a determinar a regra do padrão
Comunicar o pensamento matemático por escrito e por imagens (comunicação e representação) & oral			✓		Conversa com o aluno "me fale sobre" 22 6

1 = Expectativa não atendida; **2** = próximo da expectativa; **3** = atende a expectativa; **4** = excede a expectativa.

"Estou somando para encontrar o total."

*Tive uma conversa com o aluno; suas mudanças estão descritas em #2b

Fonte: Mark Cassar, apud Boaler, 2020, p. 178

Este é um exemplo de rubrica simples, que pode ser usado ao fim de uma tarefa cotidiana. Rubricas mais elaboradas, entretanto, podem ser criadas ao fim de tópicos maiores, conforme demonstrativo abaixo.

Figura 17: Exemplo de rubrica para diversas tarefas

RUBRICA SOBRE ______________________________

Nome:		Data:			
		4	**3**	**2**	**1**
Eixo(s) estruturante(s)	**Critérios de avaliação**	**NÍVEL DE EXCELÊNCIA**	**NÍVEL ESPERADO**	**NÍVEL ABAIXO DO ESPERADO**	**NÍVEL LONGE DO ESPERADO**
1.	**1.**	( ) -	( ) -	( ) -	( ) -
	2.	( ) -	( ) -	( ) -	( ) -
2.	**1.**	( ) -	( ) -	( ) -	( ) -

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

O modelo acima, pode ser preenchido sob as seguintes orientações:

Eixos estruturantes: Selecionar temas gerais (eixos), a partir dos objetivos que foram estabelecidos na atividade a ser avaliada, de forma que os mesmos estruturem sua rubrica. Em cada linha deve ser escrito um eixo estruturante diferente (caso haja mais de um).

Critérios de avaliação: Nestes espaços, devem ser descritos detalhadamente o que se espera que o estudante realize ou compreenda. Os critérios derivam dos eixos estruturantes, podendo haver mais de um critério de avaliação vinculado a cada eixo.

Níveis do aprendizado: Formam uma escala onde o estudante percebe o quanto ele avançou, a partir das respostas marcadas. Podem ser expressos numericamente ou de forma descritiva, desde que sejam escolhidas palavras que não desmotivem os estudantes. No modelo de rubricas com 4 níveis, o terceiro nível corresponde ao objetivo esperado e o quarto nível corresponde ao objetivo de excelência, sendo atingido quando o estudante supera as expectativas iniciais. Alguns professores utilizam, também, emojis com expressões faciais que sugerem os níveis 4, 3, 2 e 1.

Conclusivamente, entendendo que em muitas escolas, haja obrigatoriedade de atribuir notas aos alunos, elencamos agora alguns conselhos de Boaler (2018) sobre como ser justo e continuar passando mensagens de crescimento na avaliação.

> 1. *Sempre permita que os alunos reapresentem um trabalho ou uma prova para obter uma nota mais alta.* Essa é a suprema mensagem de mentalidade de crescimento, comunicando aos alunos que você se importa com a *aprendizagem* e não apenas com a *performance*. Alguns professores declaram que isso é injusto, pois os alunos podem

> ir embora e aprender sozinhos o que precisam, para melhorar sua nota. Entretanto, devemos valorizar tais esforços, pois, em sua essência, eles envolvem aprendizagem.
> 2. *Compartilhe as notas com os administradores da escola, mas não com os alunos.* Se sua escola exige notas antes do fim de um curso, isso não significa que você deve mostrá-las aos alunos. Em vez disso, dê aos alunos um retorno diagnóstico verbal ou escrito sobre maneiras de melhorar.
> 3. *Use notas multidimensionais.* Muitos professores acreditam na amplitude da matemática e podem valorizar matemática multidimensional na sala de aula, mas avaliam os alunos somente quanto a darem as respostas corretas em questões procedimentais. Os melhores professores com quem trabalhei que tinham que dar notas usaram os trabalhos de matemática dos alunos mais do que o desempenho em testes - registrando, por exemplo, se eles fazem perguntas, mostram ideias matemáticas de maneiras diferentes, raciocinam e justificam, ou se baseiam nas ideias uns dos outros. Em outras palavras, eles avaliam a multidimensionalidade da matemática. Quando são avaliados nas mesmas formas de estudar dessa disciplina, o número de alunos bem-sucedidos é muito maior.
> 4. *Não use uma escala de cem pontos*[29]. Um dos métodos mais injustos e matematicamente chocantes de atribuir notas é o de usar algumas tarefas como base para uma nota, assumindo que cada uma vale cem pontos e dando zero para qualquer tarefa incompleta, ausente ou sem sucesso. Reeves (2006) demonstrou que tais práticas desafiam a lógica, pois a diferença entre os alunos que recebem um A, B, C ou D é sempre de 10 pontos, mas a diferença entre um D e um F é de 60 pontos. Isso significa que uma tarefa ausente pode significar que um aluno deixe de ganhar um A e ganhe um D para uma classe. A recomendação de Reeves é usar a seguinte escala de quatro pontos:
> $A = 4$
> $B = 3$
> $C = 2$
> $D = 1$
> $F = 0$
> em que todos os intervalos são iguais, em vez de:
> $A = 91 +$
> $B = 81 - 90$
> $C = 71 - 80$
> $D = 61 - 70$
> $F = 0$
> que é uma escala matematicamente absurda (REEVES, 2006).
> 5. *Não inclua as primeiras tarefas das aulas de matemática na nota de fim de curso.* Quando fazem isso, os professores estão essencialmente classificando os alunos conforme seu trabalho de um curso anterior. As notas devem mostrar o que os alunos aprenderam em um curso, não o que eles tinham aprendido em outro. As notas devem incluir apenas os trabalhos e tarefas em que os alunos estão trabalhando e que estão sendo aprendidos naquele curso.
> 6. *Não inclua as tarefas de casa, se solicitadas, como parte da nota.* [...] a tarefa de casa é uma das práticas mais iníquas na educação. Sua inclusão nas notas causa estresse aos alunos e aumenta as chances de resultados injustos (BOALER, 2018, p. 146).

Finalmente, é bom salientar que propor essas alterações na metodologia de avaliação não significa que o processo escolar será facilitado para os estudantes, mas sim, que a avaliação passa a ser um instrumento com significado ímpar em termos de aprendizagem e não apenas uma ferramenta de "medição" de desempenho.

> Quando oferecemos avaliações aos estudantes, criamos uma oportunidade importante. Tarefas e questões bem-elaboradas acompanhadas de devolutivas claras oferecem aos

[29] Esse tipo de pontuação é bastante comum nos EUA.

> alunos um percurso de mentalidade de crescimento que os ajuda a saber que eles podem alcançar altos níveis de aprendizagem e, crucialmente, como podem chegar lá (BOALER, 2018, p.126).

1.4.3 Chave III: mentalidades

A fim de introduzir a ideia de mentalidades matemáticas, imaginemos duas situações: de um lado, a alegria de uma criança brincando com conjuntos de blocos coloridos, ordenando-os e estabelecendo pequenos padrões, ou ainda seu fascínio quando conta um conjunto de objetos e, após movê-los, se dá conta de que o número ainda é o mesmo, independente de sua organização; de outro, o pavor e o desgosto pela matemática apresentados comumente por grande parte das crianças quando iniciam a matemática escolar.

Sob esta perspectiva, embora o ser humano seja pensador e usuário natural da matemática, movido pela descoberta de padrões no mundo, em muitos casos o contato com a matemática escolar bloqueia essa relação natural e transforma a matemática em algo abstrato e complexo (BOALER, 2019a).

> A matemática é uma disciplina ampla e multidimensional, e requer raciocínio, criatividade, estabelecimento de conexões e interpretação de métodos; ela é um conjunto de ideias que ajudam a iluminar o mundo e está em constante mudança. As questões que a envolvem devem encorajar e reconhecer as diversas formas de ver essa disciplina e os variados caminhos que as pessoas seguem para resolver problemas (BOALER, 2018, p.xiii).

Segundo Boaler, entretanto, a matemática escolar está longe de ser tratada desta forma. O que se vê, de modo geral, é uma matemática ensinada como um conjunto de métodos e regras que devem ser aceitos e memorizados. Logo nas primeiras séries, são introduzidos aos alunos algoritmos de adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números – técnicas que foram criadas para facilitar o trabalho matemático, mas que acabam sendo ensinadas e usadas como fins em si mesmos, deixando-se de lado a importância de ver a matemática de forma ampla e flexível, como útil ferramenta para compreender o mundo e resolver problemas.

Nesse sentido, Devlin (2009) observa alguns pontos de um estudo realizado por Nunes, Schliemann e Carraher nas feiras de Recife, com o intuito de verificar se a matemática tradicional recebida na escola era útil na vida dos jovens feirantes durante seu trabalho. A pesquisa apontou, dentre outras coisas, que enquanto as crianças e jovens estavam vendendo em suas barracas (sem papel, caneta ou calculadora), apresentaram uma aritmética quase impecável (cerca de 98% de acerto), porém, a porcentagem de acertos caia para 74%, ao estarem diante de um problema que remetia ao seu cotidiano de vendas com a mesma aritmética (com papel e caneta) e apenas 37% das vezes quando enfrentavam o mesmo problema na forma de um teste de aritmética (apenas com símbolos).

Observemos, mais detalhadamente, dois exemplos apresentados por Devlin.

O primeiro a respeito de uma menina de nove anos, foi assim relatado: ao ser abordada pelo pesquisador em sua barraca de cocos e ser questionada sobre o preço três cocos, a menina respondeu: “Quarenta, oitenta, cento e vinte”. Com cada coco custando Cr$40, a técnica utilizada por ela era seguir somando 40 até alcançar o número correto de adições. Entretanto, ao realizar a multiplicação 40x3 no teste aritmético nos moldes escolares sua resposta foi 70. A explicação da menina para chegar a esse resultado foi: “Baixa 0; quatro e três dá sete” (DEVLIN, 2009, p. 169).

O segundo trata-se da observação do raciocínio usado por um menino de 12 anos, também vendedor nesta feira, ao calcular o preço da venda de diferentes quantidades de cocos. Primeiramente, o pesquisador se passou por cliente e pediu o preço de dez cocos. O menino respondeu: “Três são 105, com mais três é 210 (pausa). Tá faltando quatro. É (pausa) parece que é 350”. Depois, em outro momento, ele precisou calcular o preço de quatro cocos, respondendo: “Vai ser 105, mais trinta, faz 135...um coco é 35… dá... 140.” Ao fazer a prova de aritmética formal, solicitou-se novamente que o menino calculasse 35x4, sem, no entanto, ser feita a devida contextualização. Ao realizar tal operação, ele verbalizou os seguintes passos “quatro vezes cinco é vinte, leva o dois; dois mais três é cinco, vezes quatro é vinte”, e então seu resultado deu 200. É possível observar que, embora o menino não estivesse fazendo as contas de forma mais rápida (por exemplo, apenas adicionar o zero no fim do número 35, quando foi multiplicado por 10), mostrou que adquiriu habilidades aritméticas de forma autodidata enquanto trabalhava em sua barraca, diferentemente do que aconteceu com a matemática aprendida na escola, já que demonstrou não ter se apropriado do algoritmo da multiplicação. Além disso, ele utilizou uma técnica muito comum em matemática: quando fazia os cálculos mentalmente, ele iniciava seu raciocínio quebrando o problema em questões mais simples. No caso dos quatro cocos, ele separou em três cocos mais um coco.

> Isso permitiu que ele começasse com o que ele sabia, isto é, que o custo de três cocos é Cr$105. Então, para acrescentar no custo o quarto coco, ele primeiro arredondou o preço de um coco para Cr$30 e somou esta quantia obtendo Cr$135. Ele então (aparentemente, embora ele não tenha verbalizado esse passo com precisão) observou que o fator de correção para o arredondamento era de Cr$5 e adicionou tal fator de correção para dar a resposta (correta) Cr$140 (DEVLIN, 2009, p. 168).

É notável que, ao se depararem com a matemática em seu ambiente de trabalho, os jovens vendedores da feira sabiam lidar com ela, talvez não da maneira mais fácil ou mais rápida, mas utilizavam-la com flexibilidade e compreendiam o que estavam fazendo, ao passo que, frente a uma operação matemática nos moldes escolares, pareciam lidar com algo totalmente diferente, algo desconhecido.

Devlin (2009) destaca que a grande diferença entre os métodos utilizados nas barracas das feiras (aritmética mental) e os métodos utilizados na aritmética escrita, levaram os pesquisadores a prosseguir com suas pesquisas, indagando sobre as habilidades desenvolvidas nos dois métodos. Aplicaram então, um teste de matemática para 16 alunos da terceira série do Ensino Fundamental que trabalhavam na feira, composto por três tipos de problemas: simulações de vendas (como as vivenciadas nas barracas), problemas formulados com palavras e cálculos aritméticos elementares, que envolviam adição, subtração, multiplicação e divisão. Constatou-se que em todas as categorias, os estudantes apresentaram desempenho inferior do que aquele observado na feira, enquanto faziam suas vendas mas, de modo geral, ao fazerem o teste no papel (exceto na adição), as crianças foram mais bem sucedidas utilizando a aritmética mental/oral do que a escrita. O quadro abaixo mostra, de forma resumida, a porcentagem de acertos observados, em média, pelos jovens feirantes.

Quadro 3: Desempenho dos jovens nas quatro operações matemáticas

	Simulações de venda		Problemas formulados com palavras		Cálculo	
	Oral	Escrito	Oral	Escrito	Oral	Escrito
Adição	67%	75%	83%	62%	100%	79%
Subtração	57%	22%	69%	22%	60%	14%
Multiplicação	89%	50%	64%	50%	100%	39%
Divisão	50%	0%	50%	0%	50%	7%

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Outra pesquisa interessante, apresentada por Devlin (2009), é o estudo intitulado Adult Math Project (AMP) realizado pela antropóloga Jean Lave, que teve como público alvo pessoas comuns do sul da Califórnia que faziam compras em um supermercado. Lave constatou que, assim como os feirantes, os compradores utilizaram de várias técnicas quando precisavam fazer cálculos matemáticos: redução a problemas menores, arredondamentos, estimativas, uso da flexibilidade numérica. Dentre estas técnicas, no entanto, quase nenhuma se assemelhou aos procedimentos aprendidos na escola.

A fim de comparar o desempenho aritmético dos participantes durante as compras e frente à matemática escolar, foi aplicado um pequeno teste. O resultado indicou que o desempenho dos compradores apresentava, em média, 98% de sucesso no supermercado, em comparação a apenas 59% no teste (DEVLIN, 2009). Concluiu-se que isso ocorreu, dentre outros fatores, pois as pessoas consideravam que as questões do teste exigiam cálculos precisos, enquanto em situações cotidianas, elas estavam mais propensas a utilizar estimativas. Além disso, verificou-se que, independente do histórico escolar dos pesquisados, se tinham recentemente saído da escola ou não, se eram "bons" em matemática ou não, as questões aritméticas nas situações cotidianas eram bem sucedidas.

Em resumo, os adultos mostraram sucesso frente a situações que necessitavam de comparações de preços, transformações de unidades para verificar qual produto era mais vantajoso, descontos, etc, mas, ao se depararem com situações semelhantes frente a um teste matemático, não conseguiram aplicar as mesmas ideias. Dentre outras coisas, uma conclusão importante desta pesquisa foi que, na fase adulta, a principal dificuldade com a aritmética "da escola" não era em cálculos simples com as quatro operações básicas, mas sim nas transformações que geralmente são necessárias ao se resolver um problema matemático.

> Para resumir, o motivo pelo qual as pessoas têm dificuldades com a aritmética escolar parece residir no fato de que elas saem da escola sem ter dominado a matéria, ou tendo compreendido apenas parcialmente as importantes regras de transformação. Tal observação é particularmente intrigante porque os compradores no supermercado parecem resolver quase todos os seus problemas numéricos por uma série de operações que transformam o problema em outro equivalente que pareça mais fácil, conseguindo evitar completamente a execução de cálculos de verdade (no sentido habitual da palavra "cálculo"). Uma vez que as transformações que os compradores fazem corretamente ao determinar qual é a compra mais em conta em geral correspondem às transformações que deveriam ser feitas para solucionar o problema de matemática escolar equivalente, a explicação mais provável para a disparidade é que os alunos *decoram* os procedimentos de transformação ensinados na escola, sem jamais alcançar qualquer compreensão real. Mas logo que esse aluno se torna um consumidor adulto, ele tem pouca dificuldade para desenvolver a habilidade de aplicar as mesmas transformações em situações da vida real (DEVLIN, 2009, p. 192-193).

Devlin (2009, p.195) infere, a partir disso, que "[...] se quisermos aumentar a probabilidade de aprender matemática, precisaremos avaliar longa e arduamente a forma e o contexto no qual a matemática é apresentada". Ele destaca que a matemática da escola geralmente se mostra completamente simbólica: aprende-se um procedimento e ele deve ser realizado na mesma ordem, da mesma forma, independente dos números envolvidos ou do que representam. Este é o grande ponto enfatizado pelo autor: os métodos ensinados na escola são universais, possíveis de serem aplicados em quaisquer circunstâncias, para quaisquer números e, para as pessoas que são capazes de lidar com procedimentos abstratos e simbólicos, estes são extremamente úteis. Entretanto, o foco no ensino desta matemática universal exige uma abstração que precisa ser construída e que é fruto de um processo que vai muito além do uso de fórmulas. O problema não está em mostrar aos alunos como uma pequena regra matemática pode ser utilizada e funciona em diversas situações, mas sim, em apenas apresentar as regras considerando que os alunos a aceitem e utilizem sem questionamentos.

O autor complementa, destacando a importância dos procedimentos abstratos e simbólicos, já que os mesmos estão por trás de toda a ciência, tecnologia e medicina, e praticamente todos os aspectos da vida moderna. Entretanto salienta que o fato de ser importante não implica, necessariamente, que o processo de aprendizado ou de aplicações é fácil ou natural (DEVLIN, 2009). Segundo ele, o ser humano opera e evolui no processo de busca por significado e, diferentemente de um computador, que é programado pra seguir regras e manipular símbolos sem nenhuma compreensão, precisa encontrar sentido em suas ações.

> Uma vez que os procedimentos da aritmética ensinada na escola foram desenvolvidos como métodos universais - aplicáveis em todos os casos, quaisquer que sejam os números envolvidos -, a primeira coisa que o aluno tem que fazer a fim de dominar esses procedimentos é aprender a ignorar temporariamente quaisquer significados concretos possíveis nos números ou objetos reais do mundo. A segunda coisa que o aluno deve fazer para alcançar tal domínio é construir um tipo diferente e mais abstrato de significado. Mas a maioria dos alunos nunca consegue ir tão longe. Eles acabam lutando para lembrar ou aplicar sequências de operações aparentemente sem sentido sobre símbolos sem nenhum significado. Como consequência, as respostas que eles dão geralmente também não têm sentido (DEVLIN, 2009, p.236).

Da mesma maneira, Boaler (2019a) aponta que o que se vê nas escolas, de maneira geral, são alunos que enxergam a matemática como um conjunto fixo de métodos (técnicas) que precisam ser memorizados e que não se envolvem no processo crítico de compreensão necessário para pensar e fazer matemática (tecnologias e teorias); impedidos assim, de compreender o papel da matemática em seu próprio crescimento e aprendizagem. A autora salienta ainda, a importância do estudante ver na matemática escolar um assunto conceitual no qual deve pensar e fazer sentido, indicando que, quando os alunos têm a possibilidade de ver a matemática em um cenário amplo (praxeologia global), como um quebra-cabeças a ser explorado, quando têm a possibilidade de fazer perguntas, pensar e relacionar ideias, aí é que entendem seu papel de pensadores, de construtores de sentido.

Em posse dessas reflexões a respeito da matemática como ferramenta natural para o homem e sua evolução, em conflito com a matemática abstrata e desconexa vivenciada na escola, chegamos a um melhor entendimento sobre o que consiste *ter uma mentalidade matemática*. Segundo Boaler (2019a), quando o aluno vê a matemática como um conjunto de ideias e relações, e ao mesmo tempo consegue perceber seu papel de pensar e dar sentido a essas relações, neste momento ele está tendo mentalidade matemática.

> Uma mentalidade matemática reflete uma abordagem ativa para conhecimentos de matemática, nos quais os alunos veem seu papel na compreensão e criação de sentido. O senso numérico reflete uma profunda compreensão da matemática, mas se dá através de uma mentalidade matemática focada em dar sentido aos números e quantidades. É útil pensar nas formas como o senso numérico é desenvolvido nos alunos, não apenas porque o senso numérico é a base para todos os níveis superiores de matemática, mas também porque senso numérico e mentalidades matemáticas se desenvolvem de forma conjunta, e aprender sobre formas de desenvolver um ajuda o desenvolvimento do outro (BOALER, 2019a, p. 30).

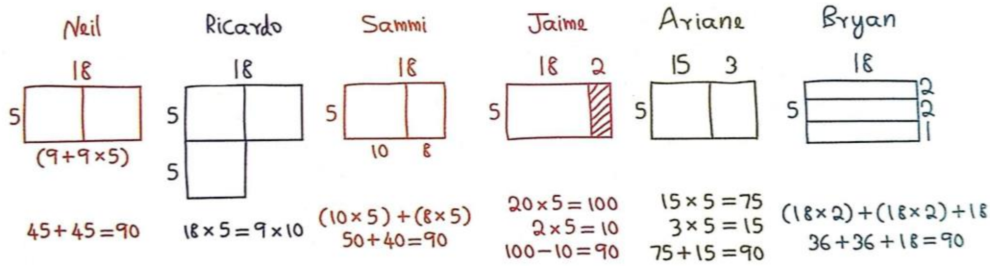
A matemática, portanto, é um domínio conceitual e deve ser trabalhada na escola como tal. Por este ângulo, Boaler (2020) reflete sobre como, ainda quando crianças, aprendemos a contar; primeiramente, precisamos lembrar a ordem e os nomes dos números, mas, ao mesmo tempo, desenvolvemos o conceito de número, ou seja, a ideia geral, o que o número representa. Ao passo que os estágios iniciais de adicionar números são ensinados, aprendemos o método chamado “continuar contando”. Esse método é usado quando se tem dois conjuntos de números, por exemplo, “11 mais 4” e você aprende a contar o primeiro conjunto (contando até 11), depois continuar contando (12, 13, 14, 15). Note que quando esse método de contagem é apreendido, ao mesmo tempo é desenvolvido o conceito de soma. “Este não é um método de adição; é uma ideia conceitual” (BOALER, 2020, p.34).

A autora segue sua análise refletindo sobre quando iniciam-se os agrupamentos de números, por exemplo, quando se pede para que os alunos contem quantos palitos há em três grupos de quatro palitos e, à medida que eles aprendem a adicionar grupos, está sendo desenvolvido o conceito de produto. Ela frisa que, novamente, este não é o método em si, ou o algoritmo da multiplicação, mas sim a sua ideia conceitual, sendo que soma e produto são conceitos em matemática que exigem um pensamento profundo das crianças. “Os estudantes devem aprender métodos, como somar e multiplicar, não como fins em si mesmos, mas como parte de uma compreensão conceitual de números, somas e produtos e de como eles se relacionam uns com os outros” (BOALER, 2020, p. 34).

À primeira vista, parece ser difícil trabalhar de maneira tão conceitual, e ao mesmo tempo, dar ao aluno o papel de protagonista. Boaler (2018), entretanto, infere que existem diversas maneiras de envolver os alunos conceitualmente. Primeiramente, ela fala sobre a importância de dar a eles “acesso às razões pelas quais os métodos funcionam, e não apenas lhes dar métodos para memorizar” (BOALER, 2018, p. 118). Além disso, enfatiza o valor de perguntar aos estudantes de que forma eles veem determinada ideia, o que pode ajudá-los de maneira muito expressiva a compreendê-la conceitualmente. A partir disso, mostra como uma simples "conversa numérica" pode proporcionar a prática de uma matemática conceitual.

O método das conversas numéricas, criado pelas educadoras Ruth Parker e Kathy Richardson e desenvolvido por Cathy Humphreys e Sherry Parrison, trata-se de uma abordagem que propõe falar sobre as diferentes maneiras de se abordar um problema numérico. "Em uma conversa numérica, pede-se aos alunos que façam um cálculo numérico de cabeça, sem usar papel e lápis, e depois os professores coletam os diferentes métodos usados" (BOALER, 2018, p. 118). A partir dessa coleta, o professor vai até a lousa e representa numericamente e em forma de desenho as diversas perspectivas do mesmo problema, escrevendo os nomes dos alunos que tiveram tais ideias, de forma a valorizar suas contribuições. A figura abaixo é um exemplo de uma conversa numérica sobre o cálculo 18x5.

Figura 18: Soluções visuais para 18x5



Fonte: Boaler, 2018, p.119

Boaler afirma que as conversas numéricas são extremamente importantes e, sempre que utiliza essa estratégia, independente da faixa etária dos envolvidos, todos ficam impressionados com a variedade de possibilidades de um simples problema numérico. O exercício de pensar as operações aritméticas sem utilizar o algoritmo tradicional ajuda a perceber como a matemática pode ser flexível e contribui para o desenvolvimento do senso numérico e da matemática conceitual. Ainda, identificar cada uma das representações desenhadas na lousa com o nome de quem as pensou, valoriza o estudante e encoraja sua participação e engajamento.

Boaler e Dweck, ao unirem suas pesquisas, chegaram à conclusão de que a matemática é uma das disciplinas que mais necessita de uma transformação de mentalidade dos alunos (VALLE, 2019). Isso porque, as pessoas bem-sucedidas matematicamente têm um jeito próprio de lidar com a matemática; têm desejo em compreendê-la, refletem sobre ela e buscam conexões, têm confiança de que encontrarão sentido nela e esta abordagem está diretamente relacionada com a mentalidade matemática.

A fim de embasar suas afirmações, Boaler (2018) cita a pesquisa de Eddie Gray e David Tall[30], realizada com estudantes de 7 a 13 anos. Nela, observou-se a maneira como os alunos realizavam as tarefas matemáticas e constatou-se que aqueles com alto rendimento apresentaram senso numérico, ou seja, interagiram com os números de forma flexível e conceitual enquanto os estudantes com baixo rendimento insistiam em utilizar um método-padrão, mesmo quando isso era muito difícil de fazer. Verificou-se que a diferença entre alunos de alto e baixo rendimento não estava em pessoas que sabiam mais ou menos matemática, e sim, na forma como lidavam com ela. Os estudantes de baixo rendimento

> [...] pareciam aferrar-se a procedimentos formais que haviam aprendido, usando-os com muita precisão, não os abandonando mesmo quando fazia sentido abandoná-los. Os alunos com baixo rendimento *não sabiam menos*, eles simplesmente não usavam números com flexibilidade - provavelmente porque haviam sido colocados na rota errada, desde muito cedo, de tentar memorizar métodos e fatos numéricos, em vez de interagir com os números de forma flexível (BOALER, 2018, p.33).

Percebemos, novamente, a importância da praxeologia matemática ser trabalhada como um todo: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. O que vemos, nos diversos relatos apresentados até aqui, é que "aprender" uma matemática baseada apenas na aplicação de técnicas memorizadas dificulta o trabalho matemático e muitas vezes gera resultados insatisfatórios. Ao contrário, quando se estabelece um processo de construção conceitual, onde as técnicas são explicadas com base nas tecnologias e teorias que a sustentam, há de fato, a construção de uma mentalidade matemática e o estudante consegue, a partir disso, refletir sobre o melhor procedimento para cada tipo de situação ao qual se depara.

A ciência do cérebro é capaz de explicar porque, de modo geral, apenas a memorização de fatos e métodos não é eficiente quando se fala em aprendizagem matemática. Aprender matemática implica em um processo cerebral conhecido como *compressão*. Quando se aprende algo novo em matemática, ele toma grande espaço no cérebro; é preciso pensar sobre seu funcionamento, sobre como ele se relaciona com o que você já conhece, conectando-o com outras ideias. Mas a partir do momento que realmente se aprende este conteúdo, ele é compactado no cérebro e, daí em diante, pode-se voltar a usar este conceito quando quiser, de forma prática.

> O processo de compressão acontece porque o cérebro é um órgão altamente complexo com muitas coisas a controlar, e ele só é capaz de focar em algumas ideias não comprimidas em determinado momento. Ideias que são bem-conhecidas são compactadas e armazenadas (BOALER, 2018, p.34).

[30] Traremos mais detalhes sobre esta pesquisa no tópico direcionado à flexibilidade e profundidade.

A grande questão é que só aprendemos realmente a matemática quando construímos relações com o que já conhecemos, criando conexões que fazem sentido. Portanto, ao focar em fórmulas e métodos estamos apenas utilizando a memória de curto prazo, mas não construiremos redes que nos permitam utilizar os conhecimentos posteriormente, sempre que precisarmos. *"O cérebro só é capaz de comprimir conceitos; ele não é capaz de comprimir regras e métodos"* (BOALER, 2018, p.35, grifo nosso). Isso explica porque grande parte dos estudantes têm dificuldades com a matemática: eles não se envolvem no pensamento conceitual e seus cérebros são incapazes de organizar e arquivar as ideias. Dessa forma, abordar a matemática conceitualmente é a essência da mentalidade matemática.

Muitas pessoas se perguntam, neste contexto, o que fazer sobre fatos matemáticos, aqueles que precisamos memorizar, aqueles que acreditamos aprender através da prática mecânica e treinos de rapidez. Boaler (2018) afirma que existem sim fatos que é bom memorizar (a tabuada, por exemplo), mas sugere que mesmo estes fatos sejam ensinados por meio do engajamento conceitual. Os fatos matemáticos são apenas uma parte da matemática; a concepção de que recordar rapidamente de fatos matemáticos é ser bom em matemático tem "papel-chave na criação de estudantes ansiosos e descontentes com a matemática" (BOALER, 2018, p.35). Quando o aluno está inserido em um contexto de "matemática dos fatos e das fórmulas", além de não envolver o conhecimento adquirido no processo cerebral de compressão, os fatos por ele memorizados podem ser comprometidos ao realizar um teste matemático, por exemplo. Como já citado anteriormente, o início das provas com tempo limitado é o começo da ansiedade matemática para ⅓ dos alunos. E quando eles estão estressados, não conseguem acessar a área do cérebro utilizada para manter as memórias de fatos matemáticos (área de memória operacional do cérebro). Além disso, muitos estudantes sentem a necessidade de compreender profundamente assuntos e tópicos, mas não têm essa oportunidade nas aulas e muito menos nos testes cronometrados.

Pesquisadores do cérebro (DELAZER et al., 2005, apud Boaler, 2018) observaram o ensino por meio de duas abordagens: memorização e estabelecimento de estratégias e concluíram que os alunos que obtiveram melhores resultados foram os que compreenderam as relações numéricas através do raciocínio sobre estratégias numéricas.

Evidências científicas mostram, ainda, que outra diferença entre bem e mal sucedidos está na sua forma como enxergam a vida, como são persistentes e na maneira como recebem mensagens de incentivo, tanto sobre seu potencial, como sobre suas oportunidades de aprender. O trabalho de Boaler com a equipe do Pisa, que analisou dados de 13 milhões de estudantes no mundo, no ano de 2012, constatou que crianças com mentalidade de crescimento tinham desempenho muito melhor. Sendo assim, destaca Boaler (2018), as melhores oportunidades de aprendizado acontecem quando os estudantes acreditam em si mesmos, ou seja, quando têm *mindset* de crescimento.

Como já citado anteriormente, a forma como o *mindset* é criado em cada pessoa, está diretamente relacionado às mensagens recebidas enquanto crianças. Assim, é de grande responsabilidade de pais e professores, passar mensagens de crescimento para as crianças, tendo em vista o elogio ao esforço, à dedicação e principalmente mostrando o papel fundamental do erro na construção do conhecimento. Dweck e Mueller (1998) mostram que crianças que recebem elogio pelo esforço tendem a encarar desafios (90%) enquanto as que recebem elogio pela inteligência geralmente optam pelo caminho mais fácil, pois têm medo de pôr à prova sua inteligência e acabar constatando que não são de fato, inteligentes. “O elogio gera uma sensação de conforto, mas quando as pessoas são elogiadas pelo que são (‘Você é tão inteligente’) e não pelo que fizeram (‘Você fez um trabalho incrível’), elas ficam com a ideia de que têm uma quantidade fixa de capacidade” (BOALER, 2018, p.7).

É preciso, portanto, dar ênfase ao minucioso trabalho necessário para criar uma nova cultura entre professores e profissionais das áreas de matemática que, no geral, segundo pesquisas de Leslie et al. (2015), são os mais radicais na ênfase à capacidade inata fixa (BOALER, 2018, p.viii). Valle (2019) contribui com essa reflexão, mostrando um estudo realizado por Rattan, Good e Dweck (2012) que identificou que aqueles professores que acreditam na inteligência matemática como algo fixo, são mais propensos a confortar os alunos de baixo desempenho e, ainda, rotulam mais rapidamente estudantes com baixas habilidades do que os professores que acreditam que a inteligência pode ser desenvolvida. “Crianças que receberam um feedback de conforto neste estudo adotavam a crença de inteligência do professor, além de relatarem diminuição na motivação e nas expectativas acerca de sua performance” (VALLE, 2019, p.57).

Sendo assim, ao trabalhar com uma matemática ampla e flexível, contextualizada e com sentido, incentivando os estudantes a questionar, refletir e criar estratégias para facilitar o trabalho matemático, possibilita-se a criação de mentalidades matemáticas, imprescindíveis para um aprendizado significativo. Além disso, ao associar as mentalidades matemáticas com elogios aos alunos pelo esforço e dedicação, valorizando o erro para o aprendizado e ajudando-os na construção de *mindset* de crescimento, potencializa-se ainda mais a aprendizagem.

Por fim, é preciso enfatizar que o trabalho do docente não é de transmissor de conhecimento e sim de incentivador, problematizador; ele deve, acima de tudo, promover a participação ativa do estudante na construção de seu conhecimento: “[...] não é o trabalho do professor que apresenta e fixa nos alunos os conceitos matemáticos, mas a ação do aluno que os constrói - com a importante ajuda do professor" (BECKER, 2019, p. 980).

1.4.4 Chave IV: multiplicidade

Estimular o desenvolvimento de mentalidades matemáticas e de *mindsets* de crescimento é de extrema importância para a melhoria da aprendizagem matemática. Entretanto, apenas modificar as mensagens passadas aos estudantes e encorajar sua confiança e participação não são suficientes, se a matemática da escola continuar sendo trabalhada de forma estritamente tradicional.

Ao falarmos em matemática tradicional, referimo-nos à aula exclusivamente expositiva e unidimensional, que valoriza a execução correta dos procedimentos, o encontro de uma única resposta correta e o aprendizado através da resolução de grandes listas de tarefas de praxeologia pontual e local. Uma abordagem onde impera a inflexibilidade e o uso limitado da matemática; onde não há aprofundamento e a real compreensão fica em segundo plano.

Embora muitos tradicionalistas afirmem que a *prática* de exercícios é fundamental pois, apesar de sinapses dispararem em nosso cérebro ao se aprender algo novo, para que de fato ocorra uma mudança cerebral estrutural, é preciso rever as ideias e aprendê-las profundamente, Boaler (2018) defende que repetir métodos em listas extensas de exercícios é inútil e afirma que o mais importante é reforçar a ideia aprendida através de seu uso em diversas situações e de maneiras diferentes. Em termos praxeológicos, a autora refere-se a importância de trabalhar diferentes tipos de tarefas que oportunizem o uso de mais de uma técnica e que possam ser investigadas e justificadas, proporcionando aos alunos a criação e estabelecimento de estratégias próprias, ao classificarem tarefas em tipos de tarefas, de acordo com as técnicas, tecnologias e teorias utilizadas. Para Boaler (2018, 2020), listas de tarefas que repetem a mesma ideia várias vezes só afasta os alunos da matemática e não os preparam para utilizar a matemática em diferentes situações.

O que se quer enfatizar é que, de nada adianta passar mensagens de incentivo aos alunos se as tarefas trabalhadas não permitirem múltiplos caminhos, se forem repetitivas e descontextualizadas, se não exigirem algo além da aplicação vazia de fórmulas e algoritmos. Chevallard (2012, apud GOULART; FARIAS, 2019), nesse sentido, faz uma crítica ao ensino de matemática pautado em mostrar aos alunos tudo de forma pronta e inquestionável, sem apresentar vínculos com a razão de ser[31] das técnicas utilizadas. O autor compara a sala de aula com a visita a um museu, "[...] onde os alunos admiram obras de arte que já estão prontas, finalizadas, sem vivenciar a produção da obra" (p.1587). Devlin (2019) faz outra analogia que deixa ainda mais clara a mensagem que desejamos passar: "É uma reviravolta matemática na velha história de dar peixe a uma pessoa faminta em vez de ensiná-la a pescar. Um tem valor limitado no momento, o outro é uma valiosa habilidade para a vida".

Assim sendo, não se pode pedir que se esforcem e dizer que seu êxito depende de trabalho duro se não for apresentado aos estudantes ferramentas para aprender com mais eficiência, oportunizando a experimentação de novas estratégias e permitindo a busca de informações quando não conseguem avançar. É preciso que os professores ensinem em uma perspectiva de crescimento, ressignificando sua forma de planejar, escolher e direcionar as tarefas, a fim de que estejam alinhadas a um propósito maior, um propósito que considere de suma importância o enlaçamento *praxis-lôgos.*

> Se dissermos aos alunos que se esforcem, mas não lhes mostrarmos maneiras de obter maior acesso ou se apresentarmos a matemática como um conjunto de perguntas curtas e fechadas, corremos o risco de enviar mensagens contraditórias. Para que os alunos vejam a matemática como uma disciplina de crescimento, eles precisam de questões matemáticas por meio das quais possam crescer e que lhes ofereçam muitas maneiras de obter sucesso; isto é, perguntas que pedem aos alunos que raciocinem, desenhem, colaborem, estabeleçam conexões e aprendam (BOALER, 2019c).

A neurociência é capaz de mostrar como a multidimensionalidade amplia as possibilidades de aprendizagem. Estudos afirmam que o aprendizado matemático é otimizado quando os dois lados do cérebro estão se comunicando: o lado esquerdo - que lida com informações factuais e técnicas, e o lado direito - que lida com informações visuais e espaciais (BOALER, 2019a). Ainda, alguns estudos dirigidos pelos neurocientistas de Stanford, observaram as redes de interação no cérebro quando está resolvendo um problema matemático e mostraram que há o envolvimento de cinco áreas diferentes do cérebro, donde duas são rotas visuais: a ventral e a dorsal (figura 19) (BOALER et al, 2016; BOALER, 2020). Estes estudos mostraram também que, mesmo quando estamos lidando com um cálculo numérico simples, 12x25 por exemplo, utilizando os dígitos simbólicos 12 e 25, ainda assim o raciocínio matemático utilizado baseia-se no processamento visual.

---

[31] A razão de ser dos tipos de tarefas está sustentada pelo discurso didático tecnológico-teórico capaz de descrever, justificar, interpretar e descrever a *praxis.* (GOULART; FARIAS, 2019, p. 1584)

Figura 19: Redes neurais para aritmética mental

Fonte: Boaler, et.al, 2016 (versão traduzida)

As pesquisas apontaram ainda que, quando utilizam-se diferentes representações da matemática, há comunicação entre diferentes áreas cerebrais, resultando na criação de redes neurais mais fortes (BOALER, 2020; VALLE, 2019) de forma que "[...] a base neurobiológica da cognição matemática envolve uma comunicação complicada e dinâmica entre os sistemas cerebrais da memória, controle e detecção, e das regiões de processamento visual do cérebro" (BOALER et al, 2016, p.2).

Citando Joonkoo Park e Elizabeth Brannon (2013), Boaler (2020) apresenta outros indícios de como a aprendizagem e o desempenho matemáticos são otimizados quando as duas áreas cerebrais (lado direito e lado esquerdo) se comunicam entre si:

> Podemos aprender ideias matemáticas através de números, mas também podemos aprendê-las por meio de palavras, imagens, modelos, algoritmos, tabelas e gráficos; de movimentos e do tato; e de outras representações. Mas **quando aprendemos usando dois ou mais desses meios e as diferentes áreas cerebrais responsáveis por eles se comunicam, a experiência de aprendizagem é maximizada** [...]. Aprender novos conhecimentos requer diferentes rotas cerebrais - **rotas que focalizam a atenção, a memória, o raciocínio, a comunicação e a visualização**, por exemplo. Quando estimulamos todas essas rotas considerando o conhecimento em uma abordagem multidimensional, nossos cérebros são fortalecidos e a aprendizagem é maximizada (BOALER, 2020, p.88-82, grifo nosso).

Sob essa mesma perspectiva, Boaler et al. (2016) salientam, embasados em estudos de Berteletti e Booth (2015), a ativação de uma parte específica do cérebro responsável pela percepção e representação dos dedos (área somatossensorial) quando fazemos contas, mesmo se não estivermos utilizando as mãos para tais contagens. Esta constatação evidencia que "quando as pessoas praticam e aprimoram formas de perceber e representar os próprios dedos, elas conseguem um melhor desempenho em matemática (LADDA et al., 2014; GRACIA-BAFALL, NOEL, 2018)" (apud BOALER et al., 2016).

Pesquisas na área da neurociência também concluíram que quando as crianças melhoram suas representações com os dedos, concomitantemente avançam em seu conhecimento de aritmética. Nesse sentido, embora muitos professores e adultos, no geral, acreditem que utilizar os dedos na contagem é algo infantil e que deve ser uma fase superada o mais rápido possível, comprovou-se que desenvolver representações numéricas com os dedos é essencial para a evolução matemática. Os dedos "são nosso recurso visual mais fácil e útil, essencial no desenvolvimento cerebral que se prolonga até a idade adulta" (BOALER et al., 2016, p.2); isso não significa que a pessoa deve utilizar esse tipo de contagem pelo resto da vida, mas que utilizá-la é essencial para o desenvolvimento cerebral.

As evidências que mostram a importância das vias e conexões visuais entre as diferentes rotas cerebrais e do uso dos dedos para a contagem se relacionam com pesquisas no campo da "cognição corporificada", que afirmam que muitos dos conceitos matemáticos que criamos são processados em memórias motoras visuais e sensoriais (BOALER, et al., 2016). Isso pode ser empiricamente percebido, por exemplo, quando vamos explicar algo no qual estamos pensando e, ao não encontrarmos palavras adequadas, tentamos representá-las através de gestos e desenhos no ar. Nesse sentido, não há uma separação entre corpo e mente, ou seja, o corpo faz parte da cognição e "as partes do nosso cérebro que controlam a percepção e o movimento também estão envolvidas na representação do conhecimento" (BOALER et al., 2016, p.3).

Fica claro, portanto, como o ensino através de representações visuais, do uso consciente do corpo e de materiais concretos estimulam a melhora do desempenho matemático dos alunos, em todos os níveis de ensino, inclusive na universidade (SOWELL, 1989, apud BOALER et al. 2016). Apesar do senso comum insistir na ideia de que desenhar, visualizar ou trabalhar com cores e materiais concretos é algo elementar, útil apenas nas primeiras fases da aprendizagem, Boaler et al. (2016, p.3) salientam que a "parte mais interessante e complexa da matemática é predominantemente visual" citando exemplos de grandes matemáticos que conferem à representação visual o papel central na resolução de problemas.

Outro aspecto que faz da matemática visual extremamente importante no século XXI é a forma como as representações de dados e conhecimentos do mundo são, em sua grande maioria, baseados em imagens. Boaler et al. (2016) apontam como muitas empresas têm grande quantidade de dados e como os atuais e futuros profissionais precisam compreender estes dados e buscar padrões visuais nessa gama de informações, citando por exemplo, o trabalho de cientistas da computação e matemáticos que precisam ver padrões em dados de forma que "jamais teriam sido identificados com as técnicas estatísticas".

Neste sentido, uma aula multidimensional, ao contrário da unidimensional, dá importância a boas perguntas, ao raciocínio lógico, a diferentes representações e interpretações, ao compartilhamento de ideias, aproveitando o coletivo para explanar diversas rotas de solução e é embasada em tarefas matemáticas visuais que permitem tais abordagens. A prática de uma matemática multidimensional

> [...] não só oferece um engajamento mais profundo, novas compreensões e estímulos cerebrais, como também mostra que a matemática pode ser uma matéria aberta e bela, em vez de fixa, fechada e impenetrável. **A matemática visual não é importante apenas para alguns alunos** - aqueles com dificuldades ou os chamados "pensadores visuais", tampouco é apenas um prelúdio para a parte abstrata -, **ela é importante para todos, em todos os níveis** (BOALER et al., 2016, p.3, grifo nosso).

Em um estudo longitudinal realizado por Boaler em duas escolas públicas da Inglaterra - Phoenix Park (PP) e Amber Hill (AH) - foram observadas as implicações de duas diferentes abordagens de ensino (por meio de projetos e da forma tradicional) tanto na vida escolar dos estudantes (primeira parte do estudo), como em sua vida adulta (pesquisa realizada com os estudantes 8 anos após a saída da escola).

O estudo inicial contou com a análise de 290 alunos dos 13 aos 16 anos, das duas escolas durante o período de 3 anos e o segundo estudo deu-se em duas etapas: uma pequena pesquisa com os 290 ex-alunos e entrevistas mais aprofundadas com 20 alunos, 10 de cada escola, escolhidos de forma a obter equilíbrio de gênero e aproveitamento (BOALER, SELLING, 2017).

Na escola Amber Hill, as aulas eram baseadas no uso de livros didáticos, palestras de professores e práticas de exercícios. Basicamente, os alunos sentavam, ouviam passivamente os professores introduzirem os métodos/técnicas (15-20 minutos) e depois os praticavam. A matemática era vista como entediante e mecânica pelos alunos, conforme fica claro na fala de uma aluna durante as observações: "Em matemática você tem que lembrar, em outros assuntos você pode pensar sobre isso".

Na escola Phoenix Park, o ensino se baseava em projetos e agrupamentos heterogêneos. Os professores introduziam um novo conteúdo somente quando era necessário no avanço dos projetos; nunca davam respostas prontas ou diziam diretamente o que fazer, apenas respondiam com outras perguntas de sondagem, permitindo a autonomia e desenvolvimento dos alunos enquanto aprendentes.

No início da pesquisa, aos 13 anos, os alunos das duas escolas foram submetidos a testes padronizados externos e apresentaram mesmos níveis. Após estes três anos, uma nova avaliação[32] mostrou que os alunos de PP obtiveram notas significativamente mais altas do que os de AH, além de estarem acima da média nacional. O curioso é que os alunos da Phoenix Park, mesmo não sendo treinados diretamente para avaliações externas (o período de treinamento para as provas ocorreu somente no fim do terceiro ano) foram melhores.

Analisando as questões acertadas pelos alunos de cada uma das escolas, verificou-se que em Phoenix Park houve melhor desempenho em questões envolvendo procedimentos que os estudantes não tinham aprendido, pois eles desenvolveram a habilidade de modificar e adaptar métodos para aplicar em outras situações. Também foram melhores em questões conceituais que exigiam mais reflexão. Já os alunos de Amber Hill, que eram treinados com frequência para o exame, não foram bem no geral, pois as questões exigiam compreender o que estava sendo perguntado e escolher qual o procedimento mais apropriado, habilidades que a abordagem tradicional não permitiu desenvolver, gerando limitações quando era necessário aplicar o conhecimento em situações diferentes das que estavam habituados (VALLE, 2019).

> Os resultados deste estudo longitudinal mostraram que os estudantes das duas escolas desenvolveram tipos diferentes de conhecimento matemático. Os alunos da Phoenix Park não adquiriram um amplo conhecimento de procedimentos e regras matemáticas, mas conseguiam aplicar o conhecimento que construíram em diferentes situações, conseguindo adaptar e usar com flexibilidade a matemática que aprenderam, pois eles haviam compreendido bem os métodos para serem capazes de aplicá-los em diferentes situações. Os alunos da Amber Hill acumularam um amplo conhecimento de procedimentos, mas achavam difícil relembrar esses métodos com o passar do tempo e tinham dificuldade de diferenciar os métodos aprendidos para adaptá-los e decidir qual utilizar em diferentes situações (BOALER, 2002, apud VILLA, 2019, p.34).

A abordagem de Phoenix Park gerou melhorias significativas, tornando perceptível a maior compreensão e melhor desempenho dos alunos em testes, além de um melhor desenvolvimento em abordagens ativas do conhecimento, refletindo na capacidade de se adaptar e aplicar diferentes métodos nas diversas avaliações realizadas. Os resultados de PP também mostraram equidade com relação a gêneros, etnias e classes sociais enquanto em Amber Hill as diferenças se acentuaram, principalmente com relação classe social (a maioria dos alunos de alto desempenho eram de classe média e a maioria dos alunos de baixo desempenho eram de classe trabalhadora).

As conclusões de Boaler deixam claro que o sucesso dos alunos da PP provém de sua postura ativa frente à matemática e a forma como eram "obrigados" a propor teorias, criticar e

---

[32] Uma parte da conclusão destes estudos já foi no tópico "esforço", quando falamos das consequências de um ensino com foco em avaliações externas em oposição ao ensino baseado em projetos abertos.

questionar as ideias dos colegas, sugerindo novas abordagens, sendo autores dos próprios métodos e direções na sala de aula, ações que são importantes para motivação e engajamento.

Oito anos depois, em entrevistas na fase adulta, verificou-se grande destaque dos antigos alunos da Phoenix Park com relação aos de Amber Hill, em diversos segmentos da vida, como profissão e classe social, por exemplo. Enquanto os alunos de AH foram ensinados a seguir regras, tendo sempre o caminho indicado pelo professor frente a qualquer dificuldade, os alunos de PP tiveram liberdade para explorar e, a partir disso, aprenderam a fazer perguntas, indagar usando matemática e tirar conclusões, habilidades que lhes foram úteis e serviram de alavanca para sua vida pessoal e profissional pós escola. "As experiências escolares dos participantes do Phoenix Park lhes deram relações diferentes com os conhecimentos matemáticos, que os ajudaram no trabalho e na vida" (BOALER, SELLING, 2017, p.7).

Os professores de PP não focavam apenas no domínio de conteúdos: queriam formar jovens questionadores, responsáveis e solucionadores de problemas e as entrevistas 8 anos depois mostraram que isso, de fato, tinha acontecido. "Os ex-alunos indicaram que haviam aprendido a ter autoridade intelectual, assim como uma postura muito ativa em relação à matemática em suas vidas" (BOALER, SELLING, 2017, p.11).

> Ambientes de aprendizagem nos quais os alunos interagem ativamente com a matemática e se envolvem numa ampla gama de práticas matemáticas ainda são relativamente raros nas salas de aula de matemática (Jacobs et al., 2006; Litke, 2015). As reflexões dos participantes de Phoenix Park e Amber Hill sugerem que tais experiências podem não apenas aumentar a compreensão individual, mas também proporcionar aos alunos oportunidades de desenvolverem conhecimentos adaptativos e de se engajarem com sucesso na matemática em suas vidas [...] Ao conversar com os adultos de Amber Hill, parecia que suas identidades matemáticas incluíam a submissão a autoridades externas - canhões de conhecimento e listas de conteúdo. Em contraste, os adultos de Phoenix Park falavam em usar ativamente o conhecimento para resolver problemas. Eles viam a matemática como um conhecimento que eles poderiam usar, adaptar e aplicar a diferentes situações (BOALER, SELLING, 2017, p.15).

É importante que a escola, assim, dê importância à "expertise adaptativa de trabalho", pois, no século XXI ser capaz de se adaptar em circunstâncias variáveis é primordial. Fica claro, portanto, que "[...] o tipo de tarefa proposto nas aulas de matemática tem papel determinante no engajamento dos estudantes e cria condições para o desenvolvimento de aprendizagem profunda de importantes conceitos matemáticos que surgem a partir de suas resoluções" (BOALER, 2015; BOALER, MUNSON, WILLIAMS, 2017a, apud VALLE, 2019, p. 79-80).

No próximo tópico, destinado a flexibilidade e profundidade, apresentaremos diversas sugestões de Boaler sobre como explorar tarefas do cotidiano a fim de torná-las múltiplas e, a partir da utilização da flexibilidade e profundidade matemáticas, produzir conexões entre as diferentes rotas cerebrais. Por hora, apresentaremos apenas algumas ideias de como explorar as diversas formas de representação de um determinado problema matemático.

2.4.4.1 As várias nuances de um problema matemático

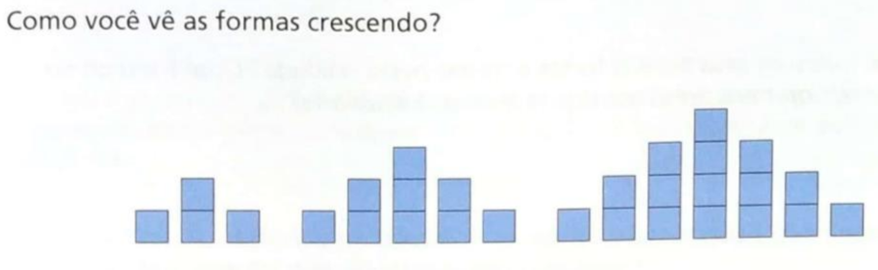
Explorar as múltiplas possibilidades de um problema matemático exige tempo. Sendo assim, antes de mais nada, Boaler (2020) sugere que, ao invés de trabalhar uma extensa lista de exercícios, sejam escolhidas duas ou três tarefas do livro didático, por exemplo, para serem exploradas. Alguns questionamentos são sugeridos pela autora, a fim de conduzir os alunos nessa exploração múltipla:

> - Você sabe resolver a questão com números?
> - Você sabe resolver a questão com imagens que se liguem aos números por meio de códigos em cores?
> - Você sabe escrever uma história que capte a questão?
> - Você sabe criar outra representação das ideias? Um esboço, um rabisco, um objeto físico ou uma forma de movimento? (BOALER, 2020, p.85).

Diversas são as formas de fazer tais perguntas e obter participação e engajamento dos alunos.

Vejamos um exemplo de uma tarefa clássica de sequência numérica (figura 20), abordada de uma maneira visual e problematizada em um curso de férias em São Francisco, para alunos concluintes dos 6º e 7º anos.

Figura 20: Sequência numérica apresentada visualmente



Fonte: Boaler, 2018, p.54

Segundo Boaler (2018), geralmente uma tarefa deste tipo tem como instrução encontrar o centésimo caso (ou outro caso distante qualquer) e, posteriormente, o enésimo caso, com o intuito de haver uma generalização (algébrica).

Neste curso, entretanto, primeiramente foi solicitado que os alunos pensassem sozinhos: “como você vê as formas crescendo?” Foram encorajados a pensar visualmente, fazer esboços coloridos, mostrando onde viam os quadrados crescerem a cada passo.

(Relataremos as observações de um grupo de três alunos, Luke, Jorge e Karlos).

Primeiramente, pode-se constatar que os meninos viram as formas crescer de maneiras diferentes: enquanto Luke e Jorge perceberam cubos sendo adicionados à base da figura - o que posteriormente ficou conhecido pela turma como "método da pista de boliche", Carlos percebeu o crescimento como se os quadrados estivessem caindo em cima da base, método que ficou conhecido como "gota de chuva".

Figura 21: Representação dos alunos

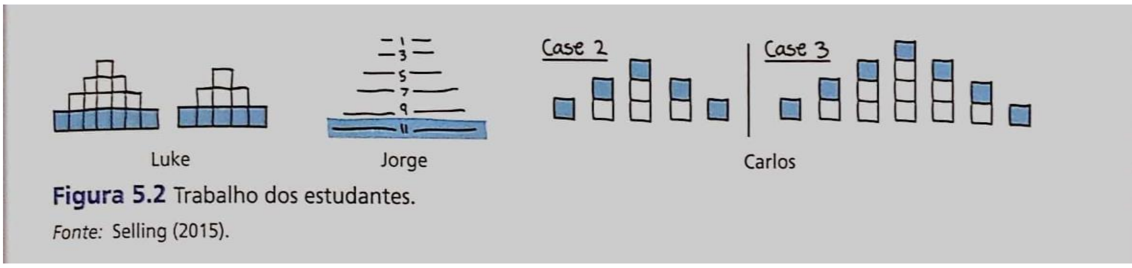


Figura 5.2 Trabalho dos estudantes.
Fonte: Selling (2015).

Fonte: Selling, 2015, apud Boaler, 2018, p.55

Depois de tentarem resolver individualmente a função de crescimento - próxima tarefa dada -, eles juntaram seu grupo e compartilharam suas ideias, cada qual explicando sua compreensão aos outros. O interessante foi que os meninos não mostraram apenas seus métodos, mas dedicaram tempo tentando compreender e utilizar os métodos uns dos outros.

> Eles propuseram ideias uns aos outros, inclinando-se sobre a mesa e apontando para seus esboços no papel. Como é típico na resolução de problemas de matemática, eles andaram em ziguezague, aproximando-se de uma solução, depois se distanciando, depois retornando na direção da resolução (LAKATOS, 1976). Eles tentaram diferentes rotas para a resolução e exploraram amplamente o terreno matemático (BOALER, 2018, p. 55).

A partir deste exemplo, Boaler (2018) pontua alguns aspectos que permitiram que esta tarefa simples de observação de padrões fosse elevada a uma tarefa de alto engajamento, possibilitando aos alunos alto nível de compreensão da matemática:

1. É uma tarefa desafiadora, mas acessível.
2. Os alunos viram a tarefa como um quebra-cabeça, pois estavam curiosos e queriam resolver o problema, o que os engajou completamente.
3. O raciocínio visual solicitado permitiu aos alunos enxergar realmente que havia um "crescimento" acontecendo, possibilitando sua compreensão sobre esse padrão. "Eles estavam trabalhando para encontrar uma solução complexa e estavam confiantes fazendo isso, pois tinham construído uma representação visual como auxílio" (BOALER, 2018, p.55).

4. Os alunos se sentiram encorajados pois todos tinham desenvolvido previamente sua própria maneira de pensar no crescimento e ficaram entusiasmados quando compartilharam suas ideias com os demais.

5. A forma com que a aula foi estruturada estimulou os alunos a propor ideias, sem temer os erros.

6. Os alunos tinham sido ensinados a respeitar o pensamento dos outros.

7. Os meninos usaram suas próprias ideias para resolver o problema, não estavam engessados em técnicas ou métodos impostos pelo professor.

8. Os meninos trabalharam em equipe.

9. Os alunos trabalharam de forma heterogênea. Segundo os relatos de Boaler, o menino com rendimento mais alto ficava apresentando palpites, geralmente utilizando procedimentos mecânicos, enquanto os meninos com rendimento inferior induziam-no a pensar de maneira visual e conceitualmente.

Ao concluir as observações sobre esta tarefa, Boaler (2018) destaca a importância da representação visual nas tarefas matemáticas, principalmente nas que tratam de padrões. Ela enfatiza que quando restringimos as tarefas apenas à escrita algébrica e generalizada (tabela 1), sem abordar seu caráter visual, "[...] perdemos uma incrível oportunidade de aumentar sua compreensão" (BOALER, 2018, p.56).

Tabela 1: Solução algébrica do padrão

Posição	#Cubos
1	4
2	9
3	16
n	$(n+1)^2$

Fonte: Boaler, 2018, p.56

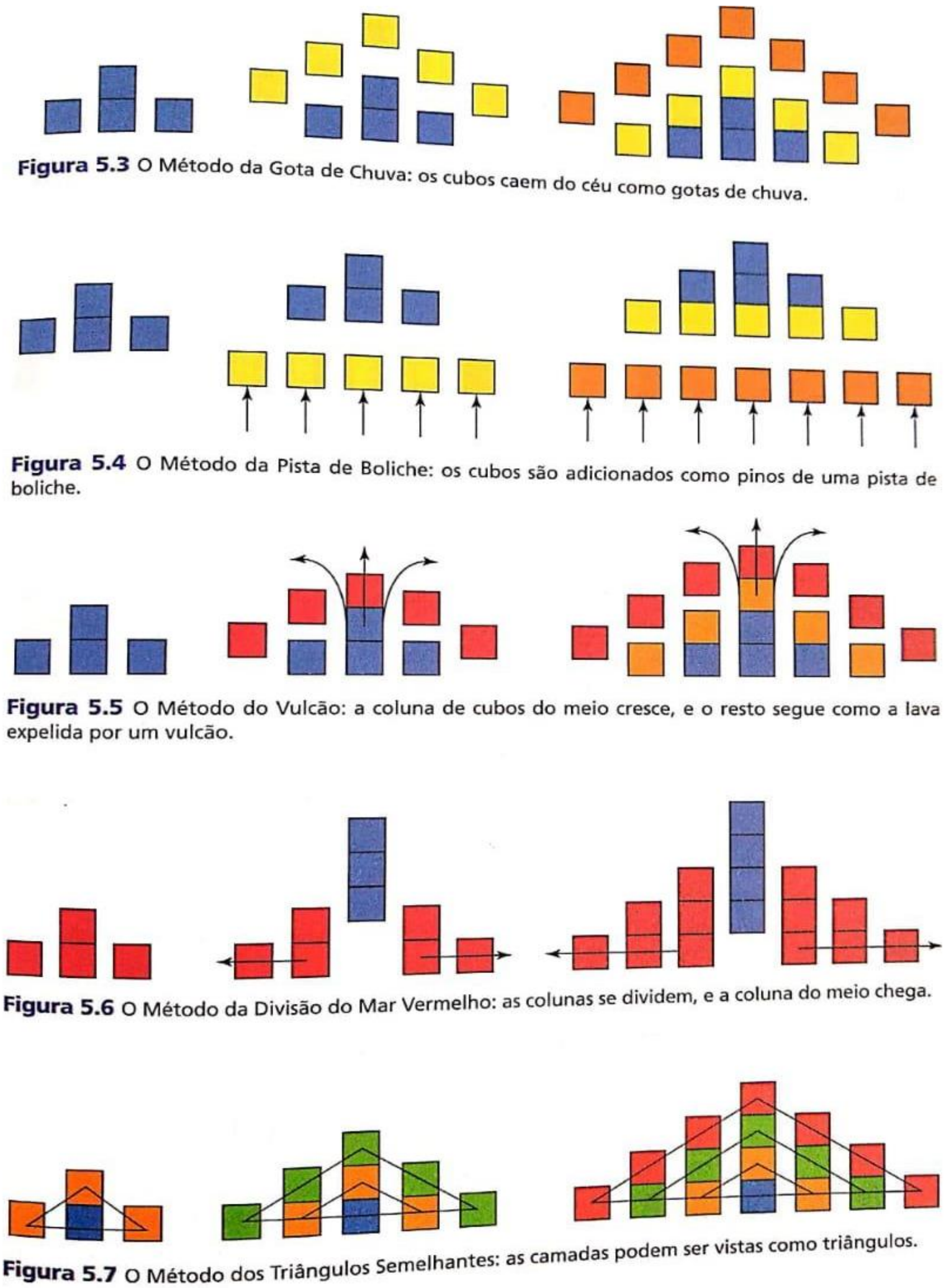
Complementa ainda que, ao chegar na expressão $(n+1)^2$, sem fazer a exploração visual, nem mesmo professores do Ensino Médio, com os quais Boaler trabalhou, foram capazes de explicar o que essa expressão significava.

> Quando não pedimos aos estudantes que pensem visualmente sobre o crescimento da figura eles não têm acesso a um importante entendimento do crescimento da função. Eles frequentemente não sabem dizer o que n significa ou representa, e a álgebra continua sendo um mistério para eles - um conjunto de letras abstratas que eles movimentam sobre uma página. Nossos alunos do curso de férias sabiam o que o n representava, pois eles mesmos o tinham desenhado. Eles sabiam por que o enésimo

> caso era representado por $(n+1)^2$. A expressão algébrica que eles, por fim, produziram tinha sentido para eles (BOALER, 2018, p. 58).

Abaixo, apresentamos algumas das possíveis representações do padrão de crescimento dessa sequência, utilizando formas e cores, que enfatizam ainda mais a riqueza da representação visual na resolução de problemas matemáticos.

Figura 22: Representação visual do padrão



Fonte: Boaler, 2018, p.57

Figura 23: Representação visual do padrão (continuação)

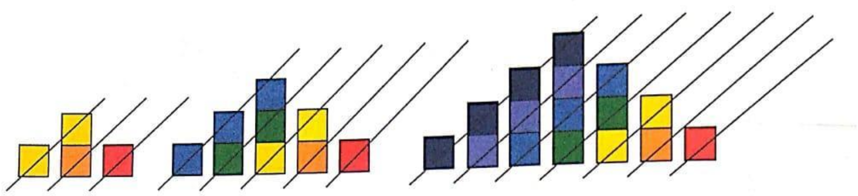


Figura 5.8 O Método do Fatiamento: as camadas podem ser vistas em diagonal.

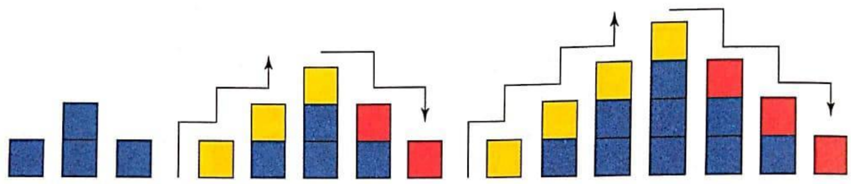


Figura 5.9 O Método "Escada para o Céu, Acesso Negado" do filme *Wayne's World (Quanto mais idiota melhor)*.

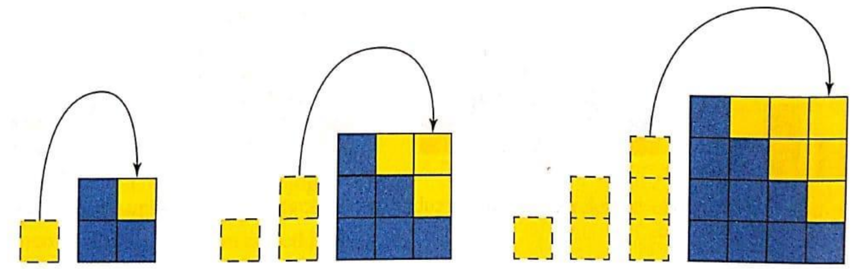
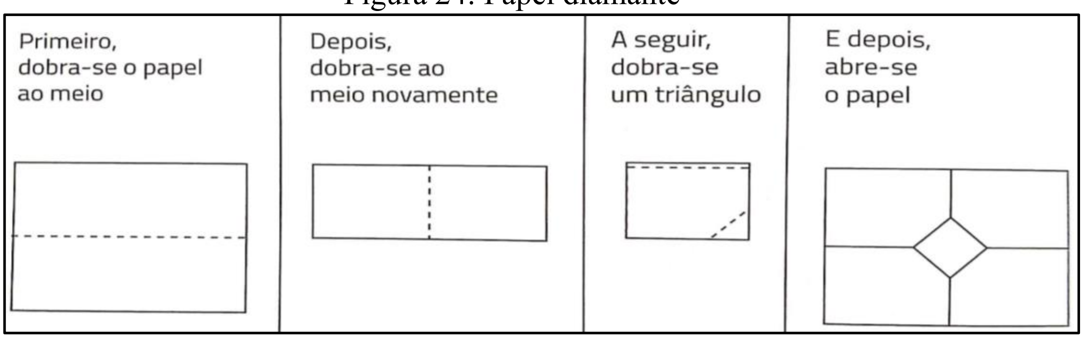


Figura 5.10 O Método do Quadrado: as formas podem ser reorganizadas como um quadrado a cada vez.

Fonte: Boaler, 2018, p. 58

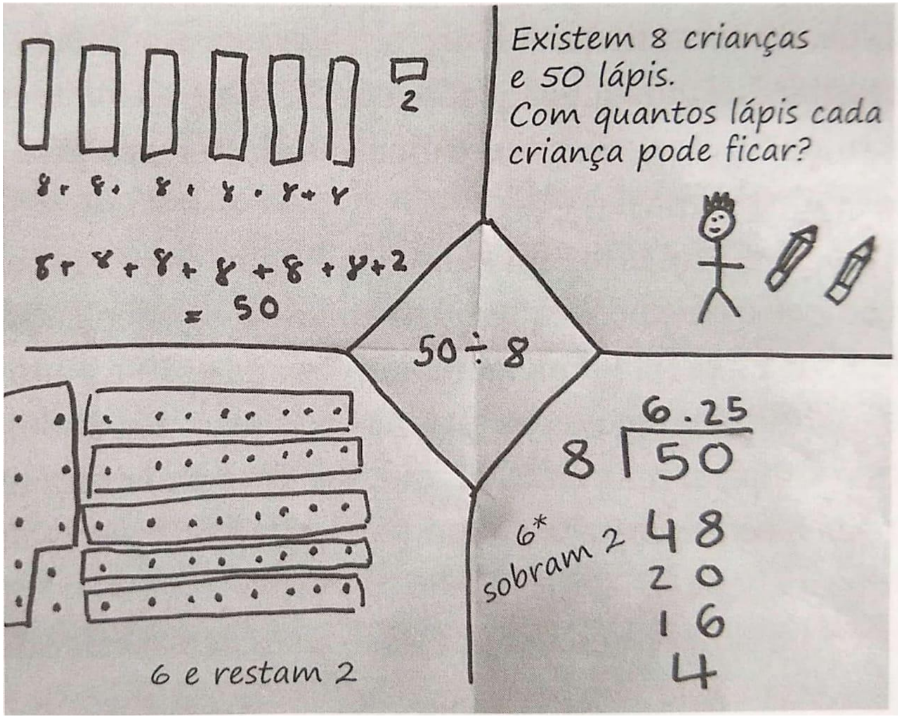
Outra forma de engajar os alunos permitindo diversas abordagens de um mesmo problema é a proposta do papel diamante, de Cathy Williams. Ela consiste em colocar um problema matemático no centro do diamante, e solicitar aos alunos que preencham os quatro espaços em torno do problema, com soluções abordadas de diferentes maneiras. A figura 24 mostra como criar o papel diamante e a figura 25 retrata um exemplo de aplicação em uma questão de divisão.

Figura 24: Papel diamante



Fonte: Boaler, 2020, p.86

Figura 25: Atividade no papel diamante

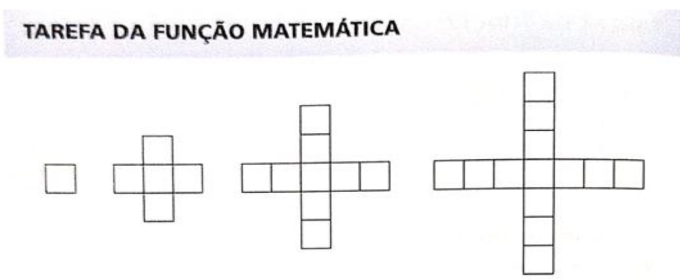


Fonte: Boaler, 2020, p.87

Note como o papel diamante é uma ferramenta extremamente útil na aplicação dos questionamentos sugeridos por Boaler, a fim de explorar a multiplicidade de problemas matemáticos e, ao mesmo tempo, na promoção da autonomia e liberdade dos alunos ao expressar suas respostas.

Outra atividade, proposta para uma turma de álgebra na escola Railside onde Boaler realizou uma pesquisa longitudinal com duração de 5 anos, encerra nossos exemplos de multiplicidade matemática. Nesta atividade, solicitou-se que os alunos representassem uma função afim (figuras 26 e 27) através de palavras, gráficos, tabelas, símbolos e diagramas. Também foram incentivados a utilizar diversas cores para tornar representações mais claras e dinâmicas.

Figura 26: Representações de uma função afim

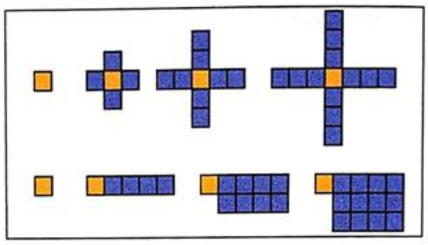


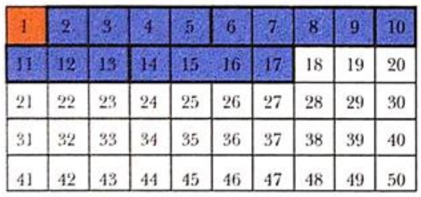
Fonte: Boaler, 2018, p. 111

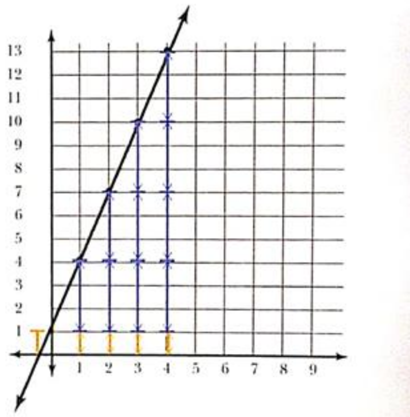
Figura 27: Representações de uma função afim (continuação)

$y = 4x + 1$

X	Y
0	$4(0) + 1 = 1$
1	$4(1) + 1 = 5$
2	$4(2) + 1 = 9$
3	$4(3) + 1 = 13$
n	$4n + 1$







- Existe um quadrado na etapa 1.
- Para cada etapa adicional, é acrescido um quadrado adjacente ao original em todos os quatro lados.
- A figura continua crescendo para a esquerda, direita, para cima e para baixo, acrescentando quatro quadrados para cada nova etapa.

Fonte: Boaler, 2018, p. 111

Além das vantagens já apresentadas até aqui, Boaler (2020) sinaliza que o professor, ao pensar em um ensino múltiplo, não tem necessidade de buscar novos recursos, o que precisa realmente fazer é estimular seus alunos a se envolverem no conteúdo de diversas maneiras. Segundo ela, isso muitas vezes inspira os professores que pensam mais criativamente sobre suas matérias e a forma como as ensinam e o reflexo é sentido através de alunos mais empolgados e envolvidos, lembrando que esse tipo de abordagem estimula a produção de neurotransmissores do prazer, altamente influentes em uma aprendizagem efetiva.

> [...] quando os professores diversificam o currículo, substituindo uma lista simples de respostas numéricas, páginas de texto ou equações por imagens, modelos, palavras, vídeos, músicas, dados e desenhos, a sala de aula muda de um lugar onde todo o trabalho parece igual para outro onde a variedade é atraente e a criatividade pode ser celebrada (BOALER, 2020, p.90).

Esse tipo de abordagem, em muitos sentidos, pode gerar insegurança aos professores. Obviamente, seguir o cronograma do livro didático ou apostila, explicar um algoritmo ou criar um esquema de resolução para que os alunos reproduzam, está na zona de conforto do professor, que sabe exatamente o que esperar. Entretanto, relatos de professores da Califórnia que participaram de um curso *on-line* ministrado por Boaler, mostraram que, ao proporem novas formas de pensar matemática, modificaram sua mentalidade e começaram a enxergar a si mesmos como seres ilimitados. Ao perceberem o avanço dos alunos e uma melhoria significativa em sua aprendizagem, os professores passaram a trabalhar cada vez mais em conjunto, discutindo novas abordagens, e perderam o medo de tratar a matemática de forma multidimensional. Eles pararam de utilizar perguntas de respostas automáticas e passaram a desafiar seus estudantes.

O relato da professora Jean Maddox, uma das alunas do curso citado, sintetiza esse sentimento:

> Quando comecei esta jornada, eu sempre fazia o algoritmo porque essa era minha zona de conforto. Agora, eu penso, "Muito bem, como vou desenhar isso? Como vejo isso visualmente?". Hoje entendo por que o algoritmo funciona, pois agora tenho essa imagem totalmente clara na minha cabeça. O que tem sido algo muito bom quando se trata de coisas como frações. E, para essas crianças, é como, "Ah, é por isso que funciona". E elas vêem que tudo é essa coisa visual, e daí alguém diz: "Puxa vida!" Para algumas dessas crianças, a matemática sempre foi ter que memorizar fatos e esse tipo de coisa, e agora elas ficam assim, admiradas (BOALER, 2020, p. 94-95).

É possível notar que essa proposta não é complexa, mas envolve, em sua essência, múltiplas vias de aprendizagem, já que incentiva os alunos a buscarem caminhos diferentes dos habituais. Há grande ênfase no uso de representações visuais, cores e formas - que têm forte influência na atenção seletiva, bem como no uso de tarefas complexas e desafiadoras - que envolvem diversos recursos neuronais e que, por conseguinte, possibilitam melhor engajamento nas tarefas e redução da possibilidade de intervenção de estímulos distratores.

Mais a mais, é importante frisar que, em aulas unidimensionais, o aluno possui apenas uma maneira de ser bem-sucedido enquanto nas aulas multidimensionais, todas as formas de ser matemático são valorizadas.

> Se considerarmos o trabalho dos matemáticos, por exemplo, sabemos que eles executam cálculos em algumas ocasiões, mas eles também têm que fazer boas perguntas, propor ideias, conectar diferentes métodos, usar muitas representações diferentes, raciocinar por meio de rotas distintas e muitos outros atos matemáticos [...]. Ninguém é bom em todas essas maneiras de trabalhar, mas todos são bons em algumas delas (BOALER, 2018, p 106).

Conclusivamente, mudanças nesse sentido fazem com que os estudantes ressignifiquem seu processo de aprendizado, dando-se conta de que aprender está mais relacionado com expressar e discutir ideias do que com encontrar rapidamente uma resposta correta (VALLE, 2019). Além disso, uma abertura para a multiplicidade dá espaço para desafios e incertezas e é o primeiro passo para o desbloqueio com relação ao erro e a fraqueza. Os professores e alunos que passaram a trabalhar com a multiplicidade perceberam que é bom se esforçar e que a necessidade de pensar sobre questões não habituais e superar desafios é sinal de crescimento cerebral.

> Isso gera mais confiança em momentos de dificuldade e disposição para compartilhar ideias sobre as quais elas não têm certeza. Uma das características mais tristes e centrais da mentalidade de cérebro fixo é o medo de estar errado. As mentes das pessoas ficam literalmente travadas, imobilizadas, por seu medo, motivo pelo qual a abordagem da vida que valoriza a multidimensionalidade, o crescimento e o esforço é tão libertadora (BOALER, 2020, p.97).

Por fim, para Boaler: "A multidimensionalidade é o complemento perfeito para uma abordagem de mentalidade de crescimento. Cada uma funciona melhor com a presença da outra" (2020, p.98).

1.4.5 Chave V: flexibilidade e profundidade

A evolução da ciência e da tecnologia afetou diretamente a maneira como vivemos, aprendemos e encaramos desafios. Obviamente, a educação também sofre diretamente influências e interferências desse "mundo contemporâneo".

Em se tratando do ensino da matemática, conforme previamente defendido, os estudantes do século XXI não precisam mais ser treinados para agirem como calculadoras, já que a tecnologia está disponível a todos e realiza cálculos com precisão e rapidez; sendo assim, o que os estudantes precisam, de fato, é vivenciar a matemática como uma matéria conectada, composta grandes ideias duradouras. "Os alunos que aprendem por meio de grandes ideias e conexões desfrutam mais da matemática, compreendem-na mais profundamente e estão mais bem preparados para encarar os grandes problemas complexos que encontrarão em suas vidas" (BOALER, MUNSON, WILLIAMS, p.13).

Devlin (2019) acrescenta que é crucial para o ensino eficaz de matemática, uma abordagem profunda, se referindo à busca pelo desenvolvimento da capacidade de pensar de forma fluida e criativa, fazendo adaptações às definições e técnicas já dominadas, analogias com raciocínios que já funcionaram com problemas semelhantes e combinando (de forma criativa) abordagens já conhecidas para novas situações. Para o autor, os matemáticos não resolvem mais os problemas seguindo regras e procedimentos, passo a passo, como era necessário fazer antes do avanço da tecnologia; eles aplicam heurísticas - formas flexíveis de pensar, adquiridas pela prática ao longo do tempo. Enquanto o computador faz o papel de seguir procedimentos e aplicar regras, o homem tem o poder de tomar decisões. Devlin (2019) aponta ainda, que adquirir tal heurística requer tempo, e o pensamento matemático, em si, demanda tempo para se desenvolver. Sendo assim, o desafio dos professores de matemática da atualidade é encontrar uma maneira de atingir esse objetivo, indo contra as ideias enraizadas de rapidez e memorização.

Boaler (2020) reflete sobre lentidão e rapidez no processo de compreensão matemática e critica a confusão que ocorre nas escolas, quando os professores, ao observarem alunos que aprendem lentamente e outros que aprendem rapidamente, rotulam esta velocidade com diferença de potencial. Ela salienta que essa disparidade de tempo se refere às diferentes atividades cerebrais envolvidas no processo de aprendizado e afirma que a lentidão e profundidade são mais importantes. Baseada, dentre outros, nos estudos de Norman Doidge, Boaler (2020) afirma que quando se aprende algo rapidamente, o que ocorre é o fortalecimento de conexões neurais já existentes que, "assim como se formam, se desfazem facilmente".

> É o que acontece quando estudamos para uma prova e revisamos algo que já aprendemos. Nós colocamos a informação para dentro e a reproduzimos por um dia ou dois, mas ela não dura e é rapidamente esquecida. Alterações cerebrais mais permanentes resultam da formação de novas estruturas no cérebro - o florescimento de conexões neurais e sinapses. Esse processo é sempre lento (BOALER, 2020, p.111).

Mello (2009), neste sentido, mostra que a aprendizagem está intrinsecamente ligada à integração de conceitos e não a informações desconexas memorizadas em um pequeno período de tempo. Segundo a autora, essa integração pode ser definida por regras lógicas ou ideias resultantes de operações de abstração e generalização. Na abstração, considera-se a parte os elementos que compõem um todo complexo e na generalização aplica-se uma ideia abstrata a exemplares de uma mesma espécie. Ainda, a autora infere que os conceitos são representados na memória como nós "conectados entre si por meio de propriedades específicas e relações de categoria, formando assim redes semânticas" (MELLO, 2009, p.83). Sob essa perspectiva, quando houver de fato aprendizagem e as conexões neurais estiverem fortalecidas, o acesso a uma representação conceitual não ocorre de forma superficial, o que se observa é o desencadeamento automático e difuso de todos os conceitos relacionados a esta informação que estão armazenados na memória de longo prazo.

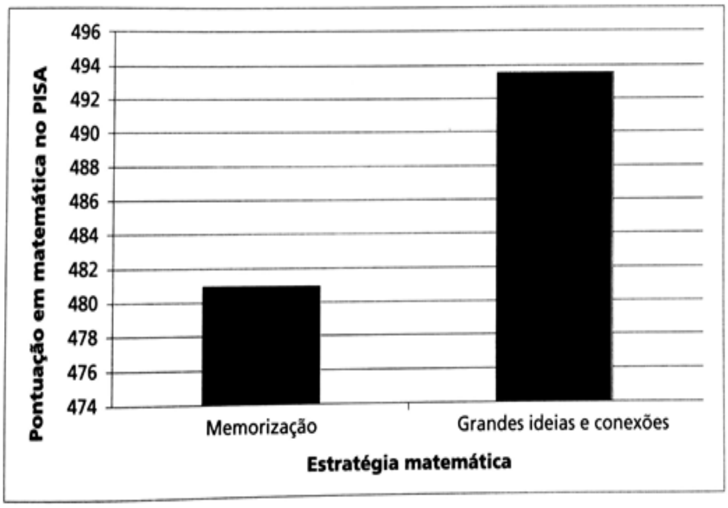
A valorização da memorização e rapidez ao invés da profundidade e compreensão pode prejudicar aqueles que pensam com paciência e profundidade, que acabam se afastando da matemática por acharem que não se enquadram nessa disciplina, além de prejudicar aqueles que são bons em memorização, pois perdem a possibilidade de ter acesso a uma compreensão mais profunda sobre as coisas (BOALER, 2020). Citando os ganhadores da Medalha Fields, Laurent Schwartz e Maryam Mirzakhani, que falaram abertamente sobre serem lentos com a matemática, Boaler (2020) inclusive, apresenta um trecho autobiografia de Schartz, refletindo sobre como se sentia na escola, devido à sua falta de rapidez:

> Eu estava sempre profundamente incerto a respeito de minha capacidade intelectual; eu achava que não era inteligente. Na verdade, eu era, e ainda sou, bastante lento. Eu necessito de tempo para entender as coisas, porque sempre preciso entendê-las completamente. No final da décima primeira série, eu secretamente me considerava burro, o que me preocupou por muito tempo. Eu continuo lento… No final da décima primeira série, avaliei a situação e cheguei à conclusão de que a rapidez não tem uma relação precisa com a inteligência. O importante é entender profundamente as coisas e suas relações entre si. É aí que reside a inteligência. O fato de ser rápido ou lento não é realmente relevante (BOALER, 2020, p.110).

A pesquisa realizada pela equipe da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), do Pisa, conforme já mencionado anteriormente, ajuda a mostrar como o enfoque na memorização de técnicas - matemática trabalhada de maneira superficial - é menos eficiente do que abordagens através de ideias fundamentais e as ligações existentes entre elas (BOALER, 2018).

O gráfico abaixo mostra a diferença entre o rendimento dos alunos, ao redor do mundo, que usam uma ou outra estratégia.

Figura 28: Pontuação em matemática no Pisa de acordo com a forma de abordagem



Fonte: Boaler, 2018, p. 45

Os dados desse estudo, juntamente com as ideias anteriormente abordadas, contribuem com as reflexões sobre a necessidade de uma nova maneira de ensinar e, ainda mais importante, de enxergar as diversas formas de expressão matemática produzidas pelos estudantes. Isso porque, como essa diversidade não é explorada e valorizada pelo ensino tradicional, geralmente os que se destacam nessa disciplina são aqueles que apresentam facilidade na memorização de fatos e procedimentos. A partir dessas novas perspectivas, aqueles que não são bons em memorização mas tem criatividade, são visuais, ou têm forte raciocínio e lógica (características importantes para o pensamento matemático), terão mais espaço e voz.

Lucas et al. (2014, p.1328) contribuem, nesse sentido, enfatizando a importância do caráter flexível, autônomo e aberto do pensamento matemático "[...] em oposição à rígida, dirigida e rotineira" matemática ensinada nas escolas e afirmam: "[...] a *flexibilidade* na utilização de *diversos registros de representações* (gráficos, simbólicos, linguagem natural, gestual,...), bem como, a *flexibilidade* na articulação sistemática de *diferentes interpretações do mesmo objeto matemático* são condições essenciais para desenvolver a atividade matemática genuína" (p.1330, grifo do autor).

Anteriormente, citamos algumas contribuições do trabalho de Eddie Gray e David Tall para a compreensão das mentalidades matemáticas. Agora, exploraremos um pouco mais seus resultados, de forma a explanar a importância da flexibilidade para a aprendizagem matemática. Para recordar, esta pesquisa envolveu estudantes de 7 a 13 anos classificados com alto, médio ou baixo desempenho e concluiu que a diferença de desempenho verificada entre os alunos não se tratava de que uns sabiam mais matemática que outros, mas sim, da maneira flexível (ou não) utilizada por eles quando lidavam com a matemática (BOALER, 2018, 2020).

Para melhor observação das estratégias utilizadas pelos alunos na adição de números, foram definidas três categorias: aqueles que contavam tudo; aqueles que utilizavam fatos da matemática que já conheciam; e os que utilizavam senso numérico, ou seja, utilizavam os números de forma flexível (BOALER, 2018, 2020). Apresentemos um exemplo para melhor esclarecer: foi pedido aos alunos quanto era 7+19, sendo apresentado uma figura com 7 e uma com 19 bolinhas. Os que contaram tudo, simplesmente contavam as bolinhas uma a uma; os que lembravam de fatos conhecidos, utilizavam algo que já tinham visto, que haviam memorizado; e os que tinham senso numérico flexibilizavam a pergunta, por exemplo, transformando 7+19 em 6+20. Ao serem analisados quanto às estratégias utilizadas no geral, os percentuais encontrados foram:

Quadro 4: Desempenho x estratégia utilizada

Alunos de alto desempenho:
Fatos conhecidos: 30%
Continuar contando: 9%
Senso numérico: 61%

Alunos de baixo desempenho:
Fatos conhecidos: 6%
Continuar contando: 72%
Contar tudo: 22%
Senso numérico: 0 %

Fonte: Boaler, 2020, p.115

Observou-se, assim, que os alunos de baixo desempenho aprenderam uma estratégia e a aderiram em todas as perguntas, até mesmo naquelas em que não fazia muito sentido utilizá-la, não pensaram em momento algum, em maneiras de flexibilizar a matemática para facilitar seu trabalho: a matemática que estavam utilizando era mais difícil (BOALER, 2020).

> Os alunos de baixo desempenho abordaram o cálculo de 16-13 fazendo contagem regressiva, o que na verdade é bastante difícil, havendo muito espaço para erro [...]. Os de alto desempenho lidaram com os números de maneira flexível, subtraindo 3 de 6 e 10 de 10 para chegar a 3. Esse tipo de flexibilidade com números é de extrema importância, mas quando os alunos são treinados para memorizar fatos de matemática cegamente e trabalhar com algoritmos antes de entendê-los, eles recorrem automaticamente à memorização e nunca desenvolvem a capacidade de pensar nos números de maneira flexível (BOALER, 2020, p. 116).

Ter senso numérico, ou seja, utilizar os números com flexibilidade, é muito mais importante para o aprendizado matemático do que simples memorização de fatos, isso porque, o senso numérico atrela aos fatos matemáticos uma compreensão profunda dos números e da forma como eles se relacionam entre si (BOALER, 2019b).

Com isso em mente, apresentaremos diversas estratégias propostas por Jo Boaler, ao longo de todas as suas obras, que podem ajudar os professores no preparo de aulas que priorizem multiplicidade, flexibilidade e profundidade. O mais importante de tudo, é que não são necessários materiais mirabolantes ou grandes investimentos para que esta mudança ocorra: as sugestões e exemplos indicados pela autora baseiam-se nas atividades e materiais que são geralmente utilizados nas escolas, apenas explorados de formas não convencionais.

1.4.5.1 Abertura de tarefas tradicionais

Boaler (2018) destaca a possibilidade de abrir as tarefas tradicionais, encorajando os alunos a pensar de maneira diferente sobre elas, ou seja, encontrando novos métodos, rotas e representações. Isso pode ser feito exigindo reflexões de maneira visual ou pedindo aos alunos que encontrem sentido em suas soluções, explicando, por exemplo, porque esta ou aquela resposta fazem sentido.

Em vista disso, compilando as informações apresentadas por Valle (2019) e Boaler (2018), elencamos algumas características centrais que tornam uma atividade matemática aberta:

- Contém múltiplos pontos de entrada;
- Encorajam várias maneiras de ser enxergadas;
- Contém/encorajam caminhos e estratégias variadas para encontrar soluções;
- Permitem a criação de conexões entre diferentes ideias matemáticas;
- São desafiadoras;
- Estimulam a investigação e o raciocínio;
- Favorecem o esforço como parte natural e esperada do processo de resolução;
- Possibilitam momentos de troca de ideias quando trabalhadas em grupos;

De acordo com Cohen e Lotan (2014),

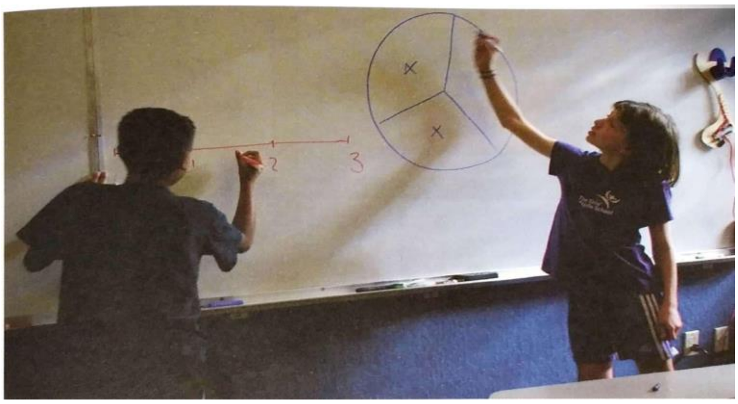
> [...] dependendo da estruturação do problema aberto, os alunos desenvolvem diferentes planos, exploram múltiplos caminhos e com frequência chegam a soluções legitimamente diferentes e às vezes a nenhuma solução. Atividades abertas também podem ter apenas uma resposta correta, porém várias maneiras diferentes de encontrá-la ou mesmo representá-la. Ao propor esse tipo de tarefa, o professor faz com que as experiências de vida do aluno, opiniões e pontos de vista se tornem componentes legítimos do conteúdo a ser aprendido (apud VALLE, 2019, p.84).

Atividades matemáticas abertas, portanto, estão relacionadas às tarefas que envolvem praxeologias regionais e globais. Note como há ênfase na possibilidade de utilizar várias técnicas para resolver o mesmo problema, bem como nas diversas maneiras de ser enxergado e, principalmente, justificado.

Boaler e Lamar (2019, p.9) salientam que ao trabalhar com uma matemática aberta, os professores se empenham a reconhecer e valorizar todas as manifestações matemáticas de seus alunos "o que inclui fazer conjecturas, resolver problemas, comunicar-se, argumentar, desenhar, dar exemplos, fazer conexões, e usar representações variadas [...]" permitindo que um número muito maior de estudantes obtenha bom desempenho e, com isso, promovendo equidade.

Para exemplificar como se pode abrir uma tarefa tradicional, Boaler (2018) cita uma aula da professora Cathy Humphrey, que pediu a seus alunos para resolverem $1 \div 2/3$. A ideia, porém, não era apenas apresentar o resultado numérico, mas sim, que os alunos explicassem o sentido de sua solução, além de uma representação visual da operação. A aula foi iniciada com a seguinte fala: "Talvez vocês conheçam uma regra para resolver essa questão, mas essa regra não importa hoje, quero que vocês encontrem sentido em sua resposta, que expliquem por que sua solução faz sentido" (BOALER, 2018, p.68). A valorização da tecnologia e teoria envoltos em uma simples divisão deu novo rumo a uma tarefa geralmente utilizada em listas de repetição de técnicas pré definidas. A figura 29 ilustra os alunos apresentando sua solução para os colegas.

Figura 29: Solução visual para 1÷2/3



Fonte: Boaler, 2020, p.69

Outro exemplo apresentado por Boaler (figura 30) diz respeito a expressões algébricas, muitas vezes trabalhadas através da repetição de exercícios. Sua dica é: “Em vez de pedir aos alunos que simplifiquem $[1/3(2x + 15)] + 8$, um problema comum em aulas de álgebra, peça aos alunos que encontrem todas as maneiras possíveis de representar $[1/3(2x + 15)] + 8$, que sejam equivalentes” (BOALER, 2018, p.155).

Figura 30: Diversas representações de uma expressão algébrica

$\frac{1}{3}(2x + 1S) + 8$	$\frac{2x + 1S}{3} + 8$	$\frac{2}{3}x + S + 8$
$\frac{2x}{3} + 13$	$\frac{2x + 1S + 24}{3}$	$\frac{1}{3}(2x + 39)$

Fonte: Boaler, 2018, p. 155

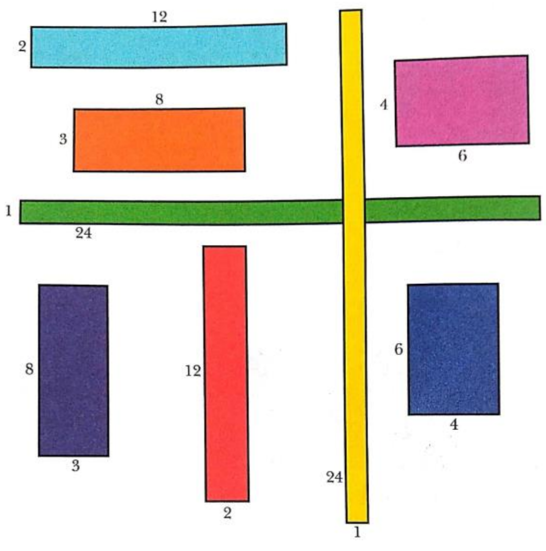
Aqui também podemos notar como a valorização da pluralidade de possíveis técnicas na simplificação de uma expressão algébrica, por exemplo, permite um aprofundamento na teoria envolta nessa prática.

1.4.5.2 Transformação de uma atividade simples em uma tarefa de investigação

Quando se transforma uma atividade em tarefa investigativa, o estudante vê a oportunidade de sugerir ideias, criar caminhos, deixando para trás o papel de reproduzir métodos e regras. "O mesmo conteúdo matemático pode ser ensinado como questões que pedem um procedimento ou como questões que pedem aos estudantes que pensem sobre ideias e usem um procedimento" (BOALER, 2018, p. 68).

Como exemplo de tarefa investigativa, Boaler (2018) mostra que, ao invés de solicitar a área de um retângulo de 12 por 4, o professor pode perguntar quantos retângulos diferentes de área 24 podem ser encontrados (figura 31). Note que, neste caso, o aluno não vai simplesmente utilizar a fórmula de área de retângulo, mas, além disso, deve refletir sobre todas as possíveis combinações de números cujo produto é 24.

Figura 31: Retângulos com área 24



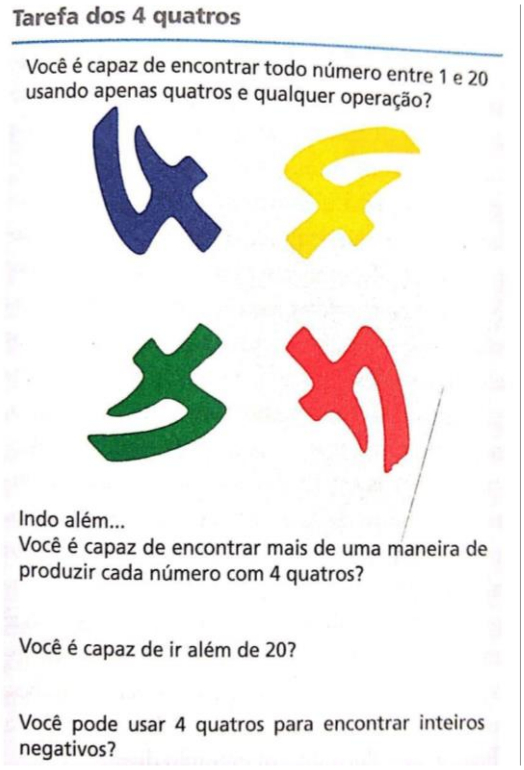
Fonte: Boaler, 2018, p.70

Outro exemplo é trabalhar com as operações matemáticas, não somente resolvendo questões tradicionais, mas utilizando a tarefa dos 4 quatros[33] (figura 32). Nesta tarefa, é

[33] No Youcubed encontram-se melhores instruções para o professor guiar tal tarefa: https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/5.-Os-Quatro-4s-semana-1.pdf. Acesso em 14 out. 2020.

solicitado aos alunos que escrevam todos os números entre 1 e 20 utilizando apenas quatro números 4 e qualquer operação matemática.

Figura 32: Tarefa dos quatro 4's.


Tarefa dos 4 quatros

Você é capaz de encontrar todo número entre 1 e 20 usando apenas quatros e qualquer operação?

Indo além...
Você é capaz de encontrar mais de uma maneira de produzir cada número com 4 quatros?

Você é capaz de ir além de 20?

Você pode usar 4 quatros para encontrar inteiros negativos?

Fonte: Boaler, 2018, p.71

Embora não pareça tão profunda, essa tarefa investigativa é extremamente válida para a compreensão das operações matemáticas e suas propriedades (*lôgos*). A fala de uma professora que aplicou esta tarefa retirada do YouCubed é capaz de ilustrar seu impacto: "O problema dos quatros foi incrível! Usei essa tarefa em minha turma do 6º ano, e os alunos estavam criando equações que levaram a discussões sobre propriedade distributiva, ordem de operações, variável… foi fantástico!" (BOALER, 2018, p. 70).

1.4.5.3 Apresentar o problema antes de apresentar o método

Para Chevallard (1999, apud SANTOS; MENEZES, 2015, p.663), "[...] a construção de uma praxeologia se inicia em uma falta de técnica para a resolução de um determinado tipo de tarefa". Essa forma de abordagem permite com que os alunos explorem as possibilidades a partir de seus conhecimentos prévios e de sua curiosidade e, em algum momento, esbarrem na necessidade de aprender um novo método. Neste momento a curiosidade e atenção dos alunos é peça chave para uma melhor aprendizagem.

Shackleton-Jones (2010) também defende esse tipo abordagem, ao qual dá o nome de "apoio ao desempenho", onde novos conceitos são introduzidos apenas no momento de necessidade. Segundo o autor, quando a aprendizagem se baseia em problemas que são apresentados antes da teoria necessária para resolvê-los, "[...] os aprendentes aprendem apenas quando falham, pelo que o contexto afetivo é garantido (assumindo que querem ter êxito). A teoria prevê, portanto, que os aprendentes aprendem melhor imediatamente após o insucesso".

Para comprovar a eficácia desta perspectiva de ensino, Boaler (2018) apresenta as pesquisas de Schwarts e Bransford (1998) que observaram três maneiras diferentes de ensinar matemática: a) o professor apresenta um método e aluno resolve problemas utilizando tal método; b) os alunos descobrem métodos por meio de exploração; c) os alunos recebem problemas aplicados para trabalhar, mesmo antes de saber resolvê-los e posteriormente, o professor explicita o método.

Os resultados deste estudo apontaram a terceira forma de ensino como a que mais gerou resultados positivos. Constatou-se que

> [...] quando os alunos recebiam problemas para resolver e não conheciam métodos para isso, mas recebiam oportunidades para explorar os problemas, eles ficavam curiosos, e seus cérebros eram preparados para aprender novos métodos, de modo que, quando os professores os ensinavam, os alunos prestavam mais atenção e tinham mais motivação para aprendê-los (BOALER, 2018, p. 59).

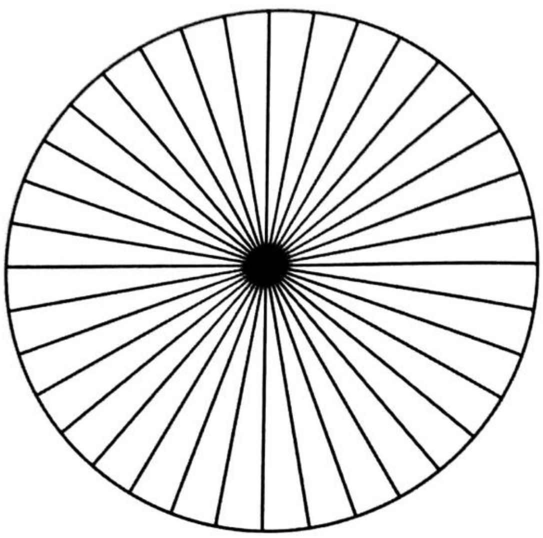
A partir dessa e outras pesquisas, Boaler infere que o melhor momento para explicar novos métodos é depois de os alunos explorarem os problemas a partir de sua intuição e indica duas maneiras de trabalhar desse modo: através de projetos ou por meio de uma abordagem conceitual, focada em conexões e comunicações. Segundo a autora, embora a intuição seja vista pela maioria dos estudantes como algo proibido na matemática escolar, ela é ímpar no processo de resolução de problemas matemáticos.

> Quando se pede aos estudantes que pensem intuitivamente, muitas coisas boas acontecem. Primeiro, eles deixam de pensar estreitamente sobre métodos isolados e consideram a matemática de uma maneira mais ampla. Segundo, eles se dão conta de que precisam usar a própria mente - pensar, buscar sentido e raciocinar. **Eles param de pensar que sua tarefa é apenas repetir métodos e percebem que sua tarefa é pensar sobre a adequação dos diferentes métodos.** E terceiro, como mostrou o estudo de Schwartz e Bransford, seus cérebros ficam preparados para aprender novos métodos (BOALER, 2018, p.62, grifo nosso).

Boaler (2020) descreve uma aula ministrada em uma escola de ensino por projetos, como exemplo de atividade que pode ser proposta antes de o método ser ensinado. Nessa aula, a professora pediu a um grupo de estudantes que pensassem de que forma um fazendeiro poderia fazer um cercado com 36 peças de cerca, a fim de maximizar a área por elas cercada.

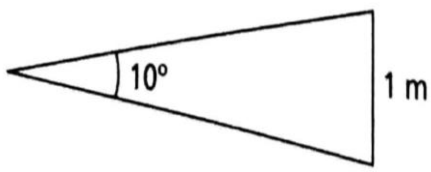
Os alunos começaram suas investigações, experimentando diferentes formas (quadrados, retângulos e triângulos) até que dois deles perceberam que a maior área viria de uma figura com 36 lados (figura 33). A partir dessa ideia, começaram a fazer esboços para verificar a área encontrada. Eles dividiram sua figura em 36 triângulos, dos quais conheciam a base e a medida do ângulo oposto (figura 34). Ao chegarem nesta etapa do trabalho, não conseguiram mais avançar, então o papel da professora foi intervir na investigação, apresentando os conceitos de trigonometria que os alunos ainda não conheciam, mas que seriam necessários para a finalização do problema.

Figura 33: Representação do terreno com 36 lados



Fonte: Boaler, 2020, p. 60

Figura 34: Representação de um dos triângulos internos



Fonte: Boaler, 2020, p. 60

Ao apresentar esse exemplo, Boaler (2018) faz uma observação muito importante sobre a grande diferença entre o ensino tradicional e o ensino através de projetos. Ela observa que, para alguns alunos, trabalhar o problema da cerca significou aprender sobre trigonometria, já para outros significou apenas entender o conceito de formas e áreas. O interessante disso é que o papel do professor não era simplesmente seguir um roteiro pré definido e apresentar os conceitos do livro didático, seu papel primordial foi ter a sutileza de perceber qual matemática cada grupo estava precisando para dar prosseguimento ao seu processo de descoberta.

> [...] um livro didático é um instrumento muito pouco assertivo que não pode prever o que um estudante sabe ou precisa saber. Em uma sala de aula com uma mentalidade de crescimento, o professor é quem toma as decisões em relação a indivíduos ou grupos de alunos, para desafiá-los, ajudá-los e desenvolvê-los exatamente no nível certo (BOALER, 2018, p. 102).

O ponto de vista de Boaler (2018) mostra-se consonante com os estudos de Silva et al. (2019), apontados no capítulo destinado às funções executivas, que destacam a importância de serem observados os níveis de complexidade dos estímulos fornecidos aos alunos, de forma que estejam em compatibilidade com sua fase de desenvolvimento. A sensibilidade do professor perante as particularidades de cada estudante, neste sentido, é ímpar no processo de ensino matemático a partir de projetos e problemas investigativos.

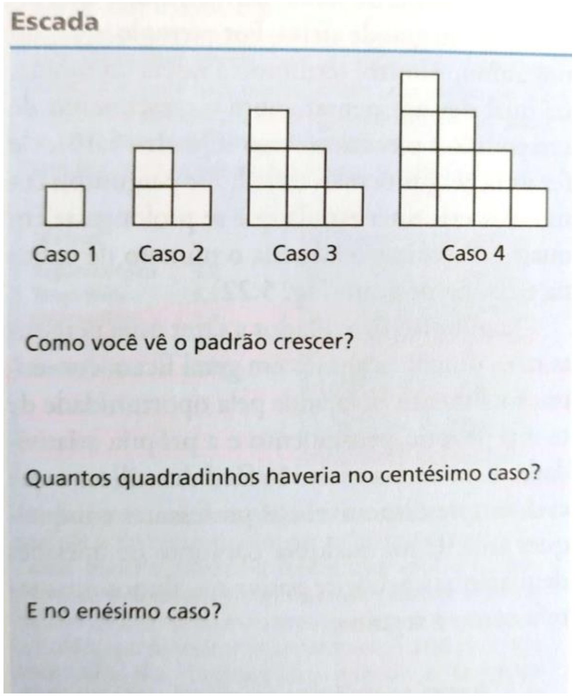
1.4.5.4 Explorar atividades de piso baixo teto alto

Para Boaler, qualquer atividade matemática pode ser transformada em piso baixo teto alto. Rebaixar o piso significa perguntar como os alunos enxergam o problema. Já elevar o teto, apresenta um leque de possibilidades. Uma delas, por exemplo, é pedir para os estudantes formularem uma nova questão semelhante, porém mais difícil, ou ainda, modificar alguns parâmetros do problema de forma a torná-lo mais complexo. “Quando são convidados a fazer uma pergunta mais difícil, os alunos em geral ficam contentes, totalmente engajados pela oportunidade de usar o próprio pensamento e a própria criatividade” (BOALER, 2018, p.73).

Boaler incentiva os professores a utilizarem esta estratégia, enfatizando que qualquer professor, em qualquer aula, pode dizer “agora vocês é que escrevem a questão. Tentem torná-la mais difícil”.

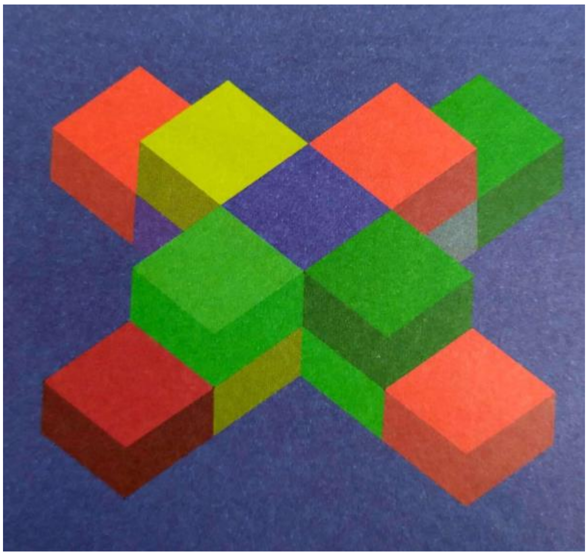
Como exemplo, trazemos uma questão simples de sequência numérica (figura 35), explorada através da observação dos padrões visualmente e depois expandida para o caso tridimensional (figura 36). Boaler (2018) conta que, inicialmente propôs o problema da escada plana até a generalização, ou seja, descrever o comportamento no n-ésimo caso mas, um de seus alunos do curso de verão, perguntou o que aconteceria se a escada fosse prolongada em quatro direções, intrigado com o número de cubos existentes na n-ésima posição.

Figura 35: Problema da escada



Fonte: Boaler, 2018, p.74

Figura 36: Prolongamento do problema da escada



Fonte: Boaler, 2018, p.74

1.4.5.5 Acrescentar a exigência de convencer e argumentar

A argumentação está no âmago da matemática e permite acesso à profunda compreensão; além disso, tem papel fundamental na promoção da equidade, reduzindo as distâncias entre os alunos que compreendem e aqueles que têm dificuldades (BOALER, 2018).

Nesse sentido, Boaler (2018) apresenta uma estratégia pedagógica proposta pela professora Cathy Humphrey, denominada *conversa entre céticos*. Nessa proposta, é explicado aos alunos que o nível de convencimento mais fácil é convencer-se a si mesmo de alguma coisa, o próximo nível é convencer a um amigo e, o nível mais difícil é convencer a um cético. Para atingir esse último estágio é preciso desenvolver altos níveis de argumentação. Ter que convencer o cético faz com que se raciocine de forma mais completa. Segundo Boaler, os alunos se divertem nas conversas de céticos, se desafiam de maneira saudável e aprendem com isso.

> Os alunos que estão fazendo o papel de céticos em uma discussão fazem perguntas de aprofundamento como: "Como você utilizou esse método?"; "Por que isso funciona?"; "Você pode provar isso?", estimulando que os outros alunos apresentem razões completas e convincentes. Esse processo estimula eles a aprenderem sobre argumentação e prova matemática (VALLE, 2019, p. 85).

A conversa de céticos é uma valiosa ferramenta no aprofundamento do nível *lôgos* e seu uso pode deixar a tarefa de explicar as técnicas muito mais divertida. Essa prática em sala de aula pode favorecer o aprendizado matemático em dois sentidos: primeiramente, como já discutido de forma insistente neste trabalho, o fato de utilizar a praxeologia matemática por completo, nos níveis *praxis* e *lôgos*; em segundo lugar, por criar um ambiente de descontração e possibilitar a elevação de serotonina e dopamina nos alunos, que estudarão mais à vontade e consequentemente, permitirão que os processos neuronais aconteçam de forma fluída, sem a interferência de fatores que geralmente dificultam a aprendizagem matemática, como é o caso da ansiedade, do tédio, etc.

Como exemplo de tarefa que promove o desenvolvimento da argumentação dos estudantes, juntamente com o papel do cético, Boaler (2018) sugere o uso da chamada "dobradura de papel", desenvolvida por Mark Driscoll. Essa tarefa consiste em separar os alunos em pares e entregar a eles um pedaço quadrado de papel. A partir daí, pede-se que os alunos façam dobras no papel para construir novas formas. A figura 37 mostra um exemplo dessa atividade.

Figura 37: Dobradura de papel

Dobradura de papel

Trabalhe com um colega. Revezem-se nos papéis de cético e convencedor. Quando você é o convencedor, sua tarefa é ser convincente! Justifique todas as suas afirmativas. Céticos devem ser céticos! Não se deixe convencer facilmente. Exija razões e justificativas que façam sentido para você.
Para cada um dos problemas a seguir, uma pessoa deve fazer a forma e ser convincente. Seu colega é o cético. Ao passar para a questão seguinte, invertam os papéis.
Inicie com um pedaço de papel quadrado e faça dobras para construir uma nova forma. Depois, explique como você sabe que a forma que construiu tem a área especificada.

1. Construa um quadrado que tenha exatamente ¼ da área do quadrado original. Convença seu parceiro de que é um quadrado e que ele tem ¼ da área.
2. Construa um triângulo que tenha exatamente ¼ da área do quadrado original. Convença seu parceiro que ele é ¼ da área.
3. Construa outro triângulo, também com ¼ da área, que não seja congruente com o primeiro que você construiu. Convença seu parceiro que ele é ¼ da área.
4. Construa um quadrado que tenha exatamente ½ área do quadrado original. Convença seu parceiro de que é um quadrado e que ele tem ½ da área.
5. Construa outro quadrado, também com ½ da área, com orientação diferente daquele que você construiu na questão 4. Convença seu parceiro que ele tem ½ da área.

Fonte: Boaler, 2018, p.75

Para concluir este capítulo, apresentamos agora uma lista de seis sugestões para abrir tarefas e aumentar o potencial de aprendizagem dos alunos, explorando a multiplicidade, a flexibilidade e a profundidade matemáticas:

> 1 - Abra a tarefa para que haja diversos métodos, rotas e representações;
> 2 - Inclua oportunidade de investigação.
> 3 - Formule o problema antes de ensinar o método.
> 4 - Acrescente um componente visual e pergunte aos alunos como eles veem a matemática.
> 5 - Amplie a tarefa para que ela tenha "piso mais baixo e teto mais alto".
> 6 - Peça aos alunos que convençam e argumentem; sejam céticos; (BOALER, 2018, p.77).

1.4.6 Chave VI: colaboração

Historicamente, no século XIX e parte do XX, as escolas eram pensadas para treinar jovens que exibissem comportamentos tais quais os exigidos pela indústria: trabalhadores que faziam suas tarefas silenciosamente, por conta própria, em uma linha de produção e com a supervisão de um gerente. Atualmente, entretanto, as empresas adotam outros métodos colaborativos de trabalho, onde “a solução criativa de problemas é a chave para o sucesso[...]” (DEVLIN, 2010).

Tendo em vista essa nova necessidade social e, concomitantemente, devido a todos os benefícios para o ensino, trataremos agora da sexta chave para a aprendizagem matemática: a colaboração.

Conectar-se com pessoas e com uma infinidade de ideias é o cerne do trabalho em equipe e, além de favorecer a evolução de cada um individualmente, é essencial para a equidade, tendo em vista que a construção de uma sociedade equitativa só é possível quando todos têm direito à voz e cada um tem participação na construção do todo.

Trabalhar em grupo também pode permitir que a equidade seja alcançada, quando o assunto é ensinar matemática de alto nível. Boaler (2018) relata como é difícil para os professores escolher tarefas que estejam em um nível adequado para cada um de seus alunos, mas afirma que existe um ponto ideal, em que a tarefa é desafiadora, mas não ponto de estar fora de seu alcance. Nesse sentido, os apontamentos de Cohen e Lotan (2014) levantados por Valle (2019), apresentam o trabalho em grupo como ferramenta para ajudar os docentes a ensinarem conteúdos profundos e de qualidade, utilizando a colaboração entre os alunos para enlaçar os conhecimentos, gerar uma grande rede de ideias, e, por consequência, um ensino equitativo.

> A dicotomia entre equidade e excelência tem permeado o debate sobre política educacional e trabalho docente por anos. O senso comum afirma que um currículo desafiador resultará no aprofundamento das desigualdades. Ao mesmo tempo, ao nivelar por baixo, alguns não serão desafiados. Portanto, o professor se vê diante da tarefa de ajudar aqueles com mais dificuldades ou apostar nos que sentam nas cadeiras da frente. Para Cohen e Lotan, essa dicotomia não precisa e não deve existir. E o trabalho em grupo é a arma mais eficaz para a obtenção de resultados ao mesmo tempo equitativos e rigorosos (VALLE, 2019, p.91).

Uma aula planejada para a colaboração, cria um ambiente de liberdade de expressão, permite que os alunos se abram às discussões e questionem-se uns aos outros sobre como estão pensando e como veem cada problema; não há distinções entre quem sabe mais ou menos e aqueles que muitas vezes estão inseguros, acabam sentindo-se incluídos, confiantes para expor suas ideias e investidos no trabalho em grupo.

Boaler (2019c) declara que observou mudanças significativas nos alunos ao longo de seu curso de férias - mudanças na maneira que viam a si mesmos e aos outros - grande parte devido à convivência em grupos e o direcionamento de atividades voltadas para a colaboração. Ela conta que à medida que os alunos compreenderam as diversas maneiras de pensar e resolver problemas, expressas por si mesmo e pelos outros, começaram a valorizar pontos de vista diferentes, deixando de lado, inclusive, os “pré-conceitos” criados devido aos desempenhos de cada um antes do curso.

> Os alunos mudaram suas perspectivas ao longo do curso de férias, mudando de ideia sobre seu próprio potencial e sobre a natureza da matemática. Eles começaram a se ver capazes, e viam seu papel na matemática como solucionadores de problemas, pessoas que exploravam conjecturas e ideias e raciocinavam sobre elas (BOALER, 2019c).

Em um trecho da obra Mente sem Barreiras, Boaler (2020) reflete que parte da razão pela qual as pessoas desistem de aprender é por acharem difícil e se verem sozinhas nesse esforço e salienta que uma das grandes mudanças que ocorrem quando se trabalha em grupo é a possibilidade de enxergar que todo mundo tem dificuldades.

> Este é um momento crucial para os alunos, o qual os ajuda a saber que a aprendizagem é um processo para todos e que os obstáculos são comuns. Outra razão pela qual os rumos de aprendizagem dos alunos mudam é pelo fato de receberem uma oportunidade de conectar ideias. Conectar-se com a ideia de outra pessoa requer e desenvolve um nível mais alto de compreensão (BOALER, 2020, p.134-135).

A neurociência também explica a importância do trabalho em grupo na aprendizagem. Primeiramente, a colaboração ativa no cérebro as regiões do córtex orbitofrontal medial e a rede frontoparietal, conhecidas pelos cientistas como “cérebro social”, sendo que a rede frontopariental auxilia no desenvolvimento das funções executivas. É possível verificar que, quando colaboramos com outras pessoas, nosso cérebro precisa dar sentido ao pensamento e aprendizagem do outro, para só a partir daí, interagir (BOALER, 2020). Em segundo lugar, Glasser (1998, apud FÓZ, 2009) aponta que, dentre as possibilidades de aprendizagem, aprendemos 70% do que discutimos, 80% do que experimentamos e 95% do que ensinamos para outra pessoa; sendo assim, o trabalho em grupo mostra-se como uma maneira eficaz de permitir aos alunos que discutam, experimentem e ensinem uns aos outros, aumentando consideravelmente as possibilidades de aprendizagem.

A partir disso, pode-se pensar que é simples utilizar essa chave de aprendizagem na escola: basta organizar a classe em grupos ao invés de trabalhar individualmente. No entanto, o trabalho em grupo, nos moldes tradicionais, está longe de reproduzir um ambiente de colaboração.

> [...] o trabalho em grupo em sala de aula pode fracassar quando os estudantes participam de maneira desigual nos grupos. Se os aluno são deixados por conta própria e não são encorajados a desenvolver normas produtivas, o que tende a acontecer é o seguinte: alguns alunos farão a maior parte do trabalho, outros vão cruzar os braços e relaxar e há aqueles que podem ser deixados de fora porque não tem prestígio social com os demais (BOALER, 2018, p. 104).

Trabalhar em grupo dessa forma só acentua a desigualdade: aqueles que têm facilidade de liderar ou expressar-se acabam sempre assumindo as responsabilidades, os tímidos não têm voz, aqueles que têm dificuldades nem tentam, por se sentirem inferiores, e, por fim, a aprendizagem colaborativa e potencializada não é atingida. Para Cohen e Lotan (2014, apud VALLE, 2019, p. 92): "[...] é um erro assumir que um agrupamento de pessoas vai trabalhar de maneira construtiva naturalmente. Os alunos precisam ser preparados para a cooperação, é necessário estabelecer normas claras de trabalho".

Portanto, é de extrema importância estabelecer normas e criar oportunidades para que os estudantes aprendam a trabalhar de forma colaborativa. Nesse sentido, Boaler (2018) sugere a utilização da instrução complexa[34], criada por Elizabeth Cohen, que tem por objetivo orientar o trabalho em grupo para a colaboração e, ao mesmo tempo, para a autonomia, gerando experiências de equidade e responsabilidade social.

1.4.6.1 Instrução Complexa

A instrução complexa baseia-se em quatro princípios - multidimensionalidade, papeis, atribuição de competência e responsabilidade compartilhada com os estudantes.

Apresentaremos a partir de agora, estes princípios de maneira detalhada, embasados em exemplos observados por Boaler (2018) na escola Railside, que utiliza desta estratégia tendo em vista ensino e práticas pedagógicas equitativas. A referida escola obteve resultados[35]

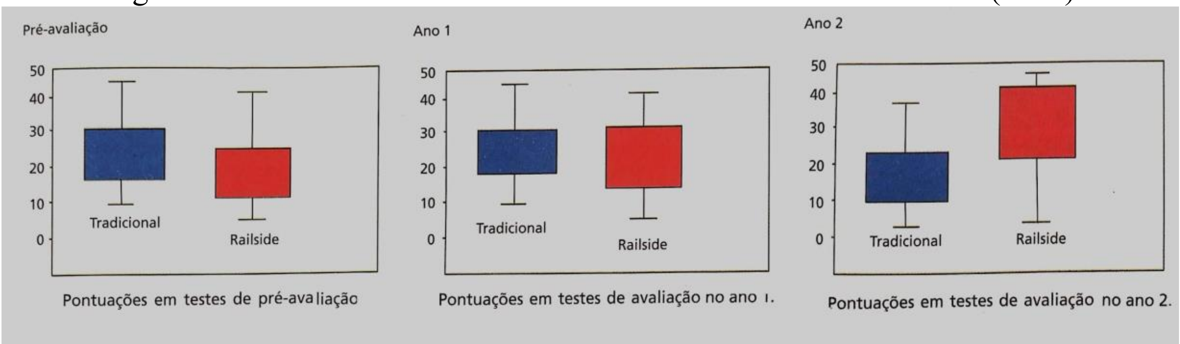
---

[34] Explicações introdutórias sobre instrução complexa podem ser vistas no vídeo disponível de Jo Boaler disponível em: <https://www.youcubed.org/pt-br/resources/introducao-a-instrucao-complexa/>. Acesso em 19 out. 2020.

[35] Esses resultados foram provenientes de um estudo da National Science Foundation (NSF), onde contrastaram-se diferentes abordagens de ensino de matemática. Foram acompanhados mais de 600 estudantes durante quatro anos em diferentes escolas de Ensino Médio. No início do estudo, período onde os alunos recém haviam completado o 8º ano do Ensino Fundamental, foi aplicado uma avaliação para esse nível de ensino. Nessa primeira avaliação, os alunos da Railside apresentaram desempenho inferior se comparados aos alunos das demais escolas.

impressionantes no ensino de grupos heterogêneos (figura 38) ao utilizar a instrução complexa (BOALER, 2018).

Figura 38: Resultados de um estudo da National Science Foundation (NFD)



Fonte: Boaler, 2018, p. 105

1.4.6.1.1 ***Multidimensionalidade***

Conforme já comentamos em um tópico reservado especificamente para tratar desse tema, multidimensionalidade trata-se de valorizar todas as formas de ser matemático, considerando bons cálculos, boas perguntas, propostas de ideias, conexões entre diferentes métodos, diferentes tipos de representações, raciocínios por meio de rotas distintas, etc. Na instrução complexa, as diferentes dimensões da matemática são valorizadas e os estudantes são avaliados com relação a elas. O mantra dessa abordagem, fixado nas paredes da escola Railside, é capaz de resumir essa perspectiva: "Ninguém é bom em todas essas maneiras de trabalhar, mas todos são bons em algumas delas" (BOALER, 2018, p.106).

Ao contrário dos alunos das escolas tradicionais pesquisadas que, ao serem questionados sobre o que é preciso para ser bem sucedido em matemática, respondem que o segredo é "prestar muita atenção" (97% dos alunos), os alunos de Railside responderam:

- Fazer boas perguntas
- Reformular problemas
- Explicar
- Usar lógica
- Justificar métodos
- Usar manipulativos
- Conectar ideias
- Ajudar os outros

Além destas respostas, falas de estudantes desta escola conseguem exprimir de que forma o ensino através das instruções complexas modifica a maneira como a matemática é vista:

Passado um ano, observou-se um avanço significativo dos alunos de Railside com relação aos que estudavam em escolas tradicionais e, em dois anos, a diferença de desempenho foi considerável, mostrando o grande avanço dos alunos de Railside (BOALER, 2018, p. 104).

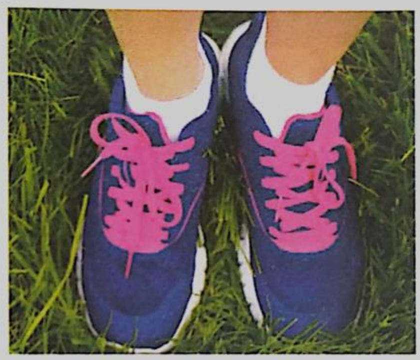
> Antes, na escola de Ensino Fundamental, a gente só trabalhava as habilidades matemáticas. Mas aqui, a gente trabalha socialmente e também tenta aprender, ajudar e receber ajuda das pessoas para aperfeiçoar nossas habilidades sociais, matemáticas e lógicas (aluno da Raiside, 9° ano, apud BOALER, 2020, p.106).
> Não existe apenas uma maneira de fazer. É mais interpretativo. Não existe apenas uma resposta. Existe mais de uma maneira de obtê-la. E depois é como: "Por que funciona?" (aluna da Railside, 9° ano, apud BOALER, 2020, p. 106).

Anteriormente, apresentamos diversos exemplos de atividades exploradas através da multiplicidade. Agora, somado a isso, mostraremos como uma atividade múltipla, trabalhada em grupos colaborativos, pode ser ainda mais produtiva e engajadora.

Trata-se de uma atividade de álgebra proposta por uma professora da Railside, que consistia em pedir aos alunos que utilizassem ferramentas matemáticas como tabelas e gráficos para construir uma equação no formato $y = mx + b$, a fim de modelar o problema de encontrar o comprimento de cadarços necessários para diferentes tipos de calçados (figura 39).

Figura 39: Tarefa comprimento do cadarço

Cadarços



Qual o comprimento dos cadarços necessários para diferentes tamanhos de calçados?

Investigue a relação entre comprimento de cadarço e tamanho de calçado.

Produza uma equação na forma de y = mx + b que ajudaria um fabricante de sapatos a saber qual comprimento de cadarços ele precisa comprar para calçados diferentes.

Fonte: Boaler, 2018, p. 113

Cada grupo levou um calçado para visualizar o problema de maneira real, conseguindo manipular os objetos do estudo. O êxito desse desafio, segundo a professora, consistia em boa comunicação dentro da equipe, na participação de todos, através de propostas de ideias e na utilização de múltiplos métodos para mostrar e explicar o trabalho.

O aspecto mais difícil deste problema para muitos alunos foi saber como iniciar, principalmente porque a instrução inicial era bem aberta: formar uma equação que ajudasse a encontrar o tamanho de cadarço ideal para cada tipo de calçado. As observações de Boaler constataram muitas dúvidas nesse momento inicial. Frases como “eu não entendo”, “eu não entendo a pergunta”. A partir dessas declarações, alguns alunos sugeriram reler o problema em voz alta, analisar o tênis e o cadarço, até surgir uma nova pergunta: “Como esse sapato está ligado àquela equação?”. Outro menino sugeriu encontrarem o comprimento do próprio cadarço trazido e, ao medirem o cadarço, se deram conta que também seria necessário verificar o número de furos do calçado, pois esse número interferiria no comprimento do cadarço. O engajamento observado mostrou que, depois da confusão inicial, os alunos começaram a encorajar-se mutuamente, voltando à questão e fazendo perguntas uns aos outros. Quando voltavam à questão, novos questionamentos impulsionaram a investigação:

- “O que a questão está nos perguntando?
- Como poderíamos reformular a questão?
- Quais são as partes fundamentais do problema?” (BOALER, 2018, p.113).

Boaler (2018) reflete que as perguntas formuladas pelos alunos só existiram porque o trabalho dos professores da Railside envolvia, dia após dia, circular entre os grupos encorajando os estudantes, pedindo a eles que reformulassem o problema, indagando suas decisões e avaliando sua compreensão. Segundo a autora, essas atitudes permitiram o desenvolvimento da habilidade de formular perguntas úteis na resolução de problemas, aumentando o nível de engajamento entre os sujeitos. E complementa citando os fatores que contribuíram para que esse engajamento ocorresse:

> - O trabalho do professor, que havia minuciosamente elaborado o problema e circulado pela sala fazendo perguntas aos alunos.
> - A tarefa em si, que era suficientemente aberta e desafiadora para permitir que os alunos contribuíssem com ideias.
> - A multidimensionalidade da sala de aula: diferentes maneiras de trabalhar matematicamente, como fazer perguntas, desenhar diagramas e fazer conjecturas foram valorizadas e incentivadas.
> - O pedido de lidar com um objeto e ideia da vida real.
> - Altos níveis de comunicação entre os estudantes, os quais tinham aprendido a ajudar-se mutuamente fazendo perguntas uns aos outros (BOALER, 2018, p. 113-114).

Boaler (2018) conclui afirmando que muitas escolas empregam o trabalho em grupo, entretanto não obtém as mesmas taxas de sucesso encontradas em Railside, e uma das razões para isso é que os alunos não foram ensinados a ajudar-se mutuamente e nem apresentadas a uma matemática multidimensional.

1.4.6.1.2 Papéis

Na instrução complexa, cada aluno tem um papel a desempenhar dentro do grupo, que encoraja sua responsabilidade frente aos outros estudantes. Nas salas de aula que utilizam essa metodologia, um cartaz contendo ideias sobre trabalho em grupo e os papeis de cada componente geralmente são fixados na parede. As designações de cada aluno dentro de um grupo estão descritas nos quadros abaixo[36].

Quadro 5: Descrição dos papeis em um grupo

Facilitador:	Antes de vocês começarem, faça com que todo o grupo leia junto este cartão do princípio ao fim. "Quem quer ler?" "Todo mundo entendeu o que tem de fazer?" Mantenha o grupo unido. Assegure que todas as ideias sejam escutadas. "Alguém acha que é de outro jeito? Podemos passar para a próxima etapa?" Assegure que todos consigam dar suas explicações.
Registrador/Repórter:	Seu grupo precisa organizar todos os resultados, e estes devem mostrar as ideias de todos, ser bem organizados, e conter cores, setas, e outras ferramentas que transmitam a matemática, os argumentos e conexões de vocês. "Como a gente vai mostrar essa ideia?" Prepare-se para participar de uma reunião com o professor.
Monitor de Recursos:	Pegue os materiais para sua equipe. Assegure que todas as perguntas sejam para o time. Quando sua equipe tiver terminado, chame o professor para que possam refletir sobre o que foi feito.
Harmonizador:	Lembre sua equipe de encontrar motivos para cada afirmação matemática, e buscar conexões entre as diferentes afirmações. "Como tem tanta certeza? Como isso está relacionado a..." Nada de conversa fora do grupo!

Fonte: YouCubed

Os papéis devem ser distribuídos aleatoriamente entre os integrantes e é importante que todos os estudantes experimentem todos os papeis com o passar das aulas.

36 Um arquivo em PDF contendo esses quadros pode ser baixado no YouCubed, disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/09/COD39_Group-Work-Fun%C3%A7%C3%B5es-do-Grupo_PORTUGUESE.pdf.>. Acesso em 26 ago. 2020.

O papel do professor é muito importante durante o trabalho em grupo, e ele precisa ter em mente que depois que os alunos iniciam as tarefas é difícil retomar a atenção para dar novas informações ou instruções de trabalho. Sendo assim, quando essas intervenções são necessárias, o professor não tenta exigir silêncio a toda a sala; ao invés disso, chama os regristradores/repórteres para essas conversas de alinhamento. Posteriormente, eles retornam a seus grupos e passam as novas informações recebidas. Boaler (2018, p. 116) salienta que a atribuição de papeis, além de auxiliar o professor, também dá aos alunos "[...] uma responsabilidade que é inerentemente valiosa para auxiliá-los a se sentirem matematicamente capazes".

*1.4.6.1.3 **Atribuição de competências***

Atribuir competência consiste em "[...] elevar o status dos alunos que os professores acham que podem ter pouco prestígio em grupo - por exemplo, elogiando algo que eles disseram ou fizeram que tenha valor intelectual e assegurando a atenção do grupo ou da classe inteira" (BOALER, 2018, p.116).

Para entender melhor a atribuição de competências, veremos um exemplo relatado por Boaler ao analisar um grupo de três alunos trabalhando na escola de Railside.

> Quando a professora se aproximou, um menino quieto do Leste Europeu murmurou algo para os outros dois membros do seu grupo - duas meninas latinas alegres e animadas que estavam dirigindo o fluxo do trabalho. Ivan disse algo bem sucinto: "Esse problema é como o último problema que fizemos". O professor que estava visitando a mesa imediatamente captou comentário, dizendo: "Bom, Ivan, este é realmente um ponto importante; este problema é parecido com o último, e isso é algo sobre o que devemos pensar - em que aspectos esses problemas são semelhantes e diferentes". Posteriormente, quando as meninas ofereceram uma resposta a uma das perguntas do professor, ele disse: "Olha, é como a ideia do Ivan; vocês estão se baseando nela". O professor elevou o *status* da contribuição de Ivan, a qual provavelmente teria se perdido sem intervenção dele. Ivan visivelmente mudou sua postura corporal e inclinou-se para frente quando o professor elogiou sua ideia, e mais tarde, lembrou as meninas da ideia dele (BOALER, 2018, p.116-117).

Boaler (2018, p.117) enfatiza, também, que o feedback ao estudante deve ser "[...] público, intelectual, específico e relevante à tarefa do grupo para que confronte questões de status do aluno" e explica o porquê dessas características. Ser um feedback público é importante pois permite com que os outros alunos saibam que esse colega teve a ideia; o fato de ser intelectual reforça a ideia de que esse feedback tem a ver com o trabalho matemático do aluno e o aspecto específico garante que os alunos saibam exatamente o que o professor está elogiando.

1.4.6.1.4 Responsabilidade compartilhada com os estudantes

Trabalhar em grupo, conforme já citado, não é uma tarefa natural. Boaler insiste que é preciso investir tempo para ensinar os estudantes a se engajar nas conversas de grupo, ouvindo e construindo com base nas ideias dos outros. Para isso, uma de suas sugestões é, antes de iniciar as tarefas em grupo, construir com os alunos uma lista de regras[37] sobre o que é bom ou não para um trabalho em grupo bem sucedido. Pedir que compartilhem o que gostam ou não gostam que os outros membros do grupo façam ou falem durante o trabalho, elaborar uma lista de regras e colar nas paredes das salas faz com que haja um comportamento mais cuidadoso, já que as normas foram criadas por eles mesmos.

Na figura abaixo, vemos um exemplo de um quadro criado nesta perspectiva. Na lista das atitudes que desaprovadas vemos: “Não gostamos quando membros do grupo nos digam a resposta; vão muito rápido; não ouvem; não explicam para nós; nos fazem sentir estúpidos”; na lista do que eles gostam, vemos: “não ser rápido, fazer perguntas, mostrar as ideias em desenhos, compartilhar seus pensamentos, me ajudar a entender”.

Figura 40: Quadro de "regras" do trabalho em grupo

Fonte: Boaler, 2018, p. 118

[37] O Youcubed apresenta um material orientador para professores, com o intuito de guiá-los nessa conversa introdutória sobre grupos. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Bom-Trabalho-de-Grupo-%C3%81lgebra.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

Além disso, é imprescindível que o professor deixe claro que a rapidez não é importante e sim pensar de forma profunda e conjunta, utilizando diversas representações e ouvindo as ideias de todos.

Após essa parte inicial, onde são deixados claros os objetivos do trabalho bem como os comportamentos ideias para a colaboração, é necessário encorajar e estimular o trabalho, para que todos deem seu melhor. Para isso, Boaler sugere as seguintes estratégias:

- atribuição de notas aos grupos (teste de participação);
- seleção de um aluno para responder determinada pergunta;
- aplicação de provas de grupo;

A atribuição de notas diz respeito a avaliar o comportamento do grupo durante a aula; isso não indica que o teste de participação termina com uma nota propriamente dita, mas sim, que ele deve passar aos alunos uma mensagem intensa de que a interação de cada um é importante e que o professor, nesse sentido, está percebendo essa importância.

Boaler (2018) mostra como utilizar essa estratégia: primeiramente o professor deve escolher a tarefa e posteriormente mostrar os modos de trabalhar que valoriza, conforme já mencionado anteriormente. Uma dica é apresentar em forma de slides ou cartazes essas expectativas, para que sejam constantemente recordadas. Os quadros abaixo são de professores de Railside: o primeiro destaca as maneiras matemáticas de trabalhar que são valorizadas por eles e o segundo se refere aos modos de interação que desencadeiam em um bom trabalho de grupo.

Quadro 6: Metas matemáticas para o teste de participação

Metas matemáticas no teste de participação

Seu grupo será bem-sucedido hoje se você estiver...

- Reconhecendo e descrevendo padrões.
- Justificando os raciocínios e usando múltiplas representações.
- Estabelecendo conexões entre diferentes abordagens e representações.
- Usando palavras, setas, números e codificação em cores para comunicar ideias claramente.
- Explicando ideias claramente aos membros da equipe e ao professor.
- Fazendo perguntas para compreender as ideias dos outros membros do grupo.
- Fazendo perguntas que façam o grupo ir além.
- Organizando uma apresentação para que pessoas de fora do grupo possam compreender as suas ideias.

Ninguém é bom em todas essas coisas, mas todos são bons em alguma coisa. Você vai precisar de todos os membros de seu grupo para ser bem-sucedido na tarefa de hoje.

Fonte: Carlos Cabana.

Fonte: Cabana, apud Boaler, 2018, p.149

Quadro 7: Metas do grupo para o teste de participação

Metas do grupo no teste de participação

Durante o teste de participação, vou ficar atento a ...

- Arcar-se para trabalhar no centro da mesa.
- Ter o mesmo tempo de fala para todos.
- Manter a união.
- Ouvir uns aos outros.
- Fazer muitas perguntas uns aos outros.
- Seguir os papéis de minha equipe.

Fonte: Carlos Cabana.

Fonte: Cabana, apud Boaler, 2018, p.149

A partir daí os alunos podem enfim, iniciar seu trabalho. Durante a aula o professor vai passando pelos grupos, observando seu comportamento e fazendo anotações. Utilizar um papel com espaços delimitados para cada grupo facilita a organização. Além disso, sugere-se que sejam anotadas literalmente as colocações de alunos dignas de atenção, o que pode ser feito na prancheta de anotações, ou na lousa, de forma a enaltecer o aluno frente a sala.

Ao final da aula, é possível dar um retorno para cada grupo sobre como foi o seu desempenho, com ou sem nota, a depender de cada professor. Abaixo um exemplo ilustrativo:

Quadro 8: Anotações do professor sobre os grupos

• Início rápido • Todos trabalhando juntos • Ótimas discussões • Mantendo a união "Vamos descobrir como cada um do grupo vê a forma" A+	• Os quatro trabalhando • Verificando o trabalho uns dos outros • Fazendo perguntas legais: "Como seria esse trabalho com outro número?" • Bons papéis de grupo A+
• Experimentando ideias • Fazendo perguntas uns aos outros • Falando sobre o trabalho A	• Tarefa lenta – fora da tarefa • Construindo formas no meio da mesa • Verificando ideias • Boa discussão A
• "O que vocês acham?" • Construindo formas no meio da mesa • Conferindo entre si A+	• Falando sobre roupas • Fora da tarefa – grupo pediu para parar • Trabalhando individualmente, sem discussão B
• "Alguém vê de um jeito diferente?" • Explicação bacana um para o outro • Ótimo debate sobre significado A+	• Começaram bem • Leitura silenciosa • Todos focados o tempo todo • Fazendo perguntas legais A+

Fonte: Boaler, 2018, p.150

Segundo a autora, “[...] as anotações não precisam ser detalhadas, mas elas ajudam os alunos a compreender o que você valoriza e a ficar muito mais atentos ao modo como eles interagem uns com os outros” (BOALER, 2018, p.150).

Com relação à seleção de um aluno para responder determinada pergunta individualmente, Boaler expõe a maneira como os professores de Railside encorajam a responsabilidade: eles se aproximam de um grupo e fazem uma pergunta relacionada ao trabalho, mas escolhem aleatoriamente um aluno, que deve respondê-la sozinho. Se o estudante não souber responder, o professor deixa para o grupo a tarefa de garantir sua compreensão, voltando posteriormente para refazer a pergunta ao mesmo estudante.

O último método citado, também utilizado pelos professores de Railside, é a aplicação de uma prova de grupo. Essa estratégia consiste em aplicar uma prova, em que cada integrante deve resolver individualmente. Entretanto, apenas a prova de um dos alunos de cada grupo é escolhida aleatoriamente e, a nota atribuída àquela prova será a nota de todos os demais componentes. A ideia central dessa estratégia é garantir que todos os membros compreendam a matemática, ou seja, que os estudantes sintam-se responsáveis pela aprendizagem dos colegas (BOALER, 2018).

Boaler conta que nos primeiros meses de observação, quando os alunos tinham ingressado recentemente em Railside, aqueles com maior rendimento se queixavam por ter sempre que explicar as coisas aos outros, mas com o tempo, mudaram de atitude e começaram a valorizar a possibilidade de estar em grupos e poder explicar seu raciocínio. Além disso, mesmo não sendo o objetivo principal, os alunos que mais se beneficiaram com esse tipo de ensino foram os com mais alto rendimento inicial. Isso porque estavam explicando seu trabalho, o que eleva seu nível de compreensão sobre o assunto, e de maneira multidimensional já que, muitas vezes, são necessárias diversas representações para conseguir explicar um raciocínio próprio a outra pessoa. Boaler reflete que, ao virem de outras escolas, esses alunos de alto rendimento eram “operadores procedimentais velozes” mas que a pressão que receberam para trabalhar com mais amplitude e profundidade ajudou-os imensamente em seu processo de aprendizagem. “Os estudantes também desenvolveram percepções mais amplas do valor dos diferentes alunos, e eles começaram a perceber que todos tinham algo a oferecer na resolução de problemas” (BOALER, 2018, p.119).

Por fim, Boaler (2018, p.121) destaca dois verbos que julga essenciais para a promoção da equidade - *justificar* e *argumentar.* Segundo ela, “justificativa e argumentação são práticas intrinsecamente matemáticas”, mas tem um papel que vai além da matemática, o de promover a equidade. Como exemplo, Boaler cita o aluno Juan, um dos alunos considerado de baixo desempenho no início das observações. Em uma entrevista ele deixou claro como foi ajudado pela prática da justificação e afirmou se sentir à vontade para pedir aos colegas explicarem o porquê de suas respostas.

Em um cartaz na parede da sala de Railside, a seguinte frase encorajava o trabalho em grupo: “Sempre dê ajuda quando necessário, sempre peça ajuda quando precisar”.

Boaler (2018) exprime suas conclusões sobre o que observou nessa escola, com o passar do tempo:

> Seria difícil passar anos na sala da Railside sem perceber que os alunos estavam aprendendo a tratar uns aos outros de forma mais respeitosa do que em geral se vê nas escolas [...]. Enquanto trabalhavam em matemática, os alunos eram ensinados a apreciar as contribuições de diferentes alunos, de muitos grupos culturais distintos e com muitas características e perspectivas diferentes. Parecia-me que os alunos aprenderam algo extremamente importante por meio deste processo - algo que serviria bem para eles próprios e a outros em suas futuras interações na sociedade. Chamei isso de ***equidade relacional*** (BOALER, 2008), **uma forma de equidade com menos ênfase em pontuações iguais em testes e mais ênfase no respeito e na consideração pelos outros**, seja qual for sua cultura, raça, religião, gênero ou outra característica. É comum acreditar que os alunos vão aprender a ter respeito por pessoas e culturas diferentes se eles tiverem discussões sobre tais questões ou lerem diversas expressões literárias em aulas de inglês ou de estudos sociais. Acredito que todas as disciplinas têm algo a contribuir na promoção de equidade, e que a matemática - muitas vezes considerada uma disciplina mais abstrata, muito distante das responsabilidades da consciência cultural ou social - tem uma contribuição importante a dar. As relações respeitosas que os alunos da Railside desenvolveram entre culturas e gêneros foram possíveis apenas por uma abordagem da matemática que valorizava diferentes *insights*, métodos e perspectivas na resolução coletiva de determinados problemas.[...] **O ensino equitativo envolve ensinar uma matemática ampla, aberta e multidimensional, instruindo os estudantes a serem responsáveis uns pelos outros**, **e transmitir mensagens de mentalidade de crescimento aos alunos** (BOALER, 2018, p.121-122, grifo nosso).

Propor trabalhos em grupo, portanto, exige jogo de cintura, atenção e sensibilidade e, certamente, envolve desconfianças. Para o professor, é uma atitude desafiadora e que pressupõe o acolhimento de inúmeras incertezas. Jenny Morril, professora e escritora, contou para Boaler como se sentiu após mudar sua mente e acolher as incertezas que permeavam seu trabalho. Ela comenta como passou grande parte de sua carreira sentindo a necessidade de ser especialista ao interagir com os colegas e como tinha medo de parecer não ter conhecimento sobre determinado assunto, como tinha medo de ser julgada caso não conseguisse contornar alguma situação.

> Estar disposta a se sentir desconfortável por não saber algo e ainda saber que não preciso desistir de alguma coisa só porque não a entendo imediatamente. E tenho outros recursos que posso utilizar para aumentar minha aprendizagem como educadora, como pessoa. Então, para mim, é apenas... Eu sempre me senti como se fosse uma ilha e tivesse que saber tudo... para mim, mudou a forma como eu me oriento na vida em termos de ouvir melhor, eu acho. Sinto-me como se crescesse e aprendesse pela colaboração, então acho que me abri para uma maneira diferente de me relacionar com minha comunidade de colegas para que eu possa aprender melhor, e compartilhar é realmente aprender. Toda essa ideia de deixar de julgar e saber seu

> próprio valor me transformou como pessoa.[...] Hoje sei que posso aparecer e não necessariamente saber, mas posso usar minha intuição, posso usar meus colegas, posso pesquisar no Google, posso assistir a um vídeo, posso assistir a um canal no YouTube, um vídeo do YouTube sobre como explicar um processo de matemática ou algo assim… Eu nunca vou parar de aprender. Ao passo que antes, era como se eu tivesse que entrar pela porta sabendo. Essa era a minha mentalidade fixa. Eu tinha que dar a impressão de que estava tudo entendido, tratado e sobre controle, e esse não é necessariamente o jeito como faço as coisas agora. Então abandonei essa ideia... Eu não respondo às mudanças com tanta tensão quanto antes. Então me sinto mais aberta para reconhecer que estou experimentando algo que pode ser desconfortável no momento, mas que posso aprender a entender. Quanto mais eu relaxo com isso, mas consigo entender (BOALER, 2020, p. 152).

Muitas vezes os alunos veem o professor apresentar tudo correto, o tempo inteiro, sempre sabendo as respostas de todas as perguntas, sem erros e sem dificuldades, e isso acaba criando uma falsa imagem do que significa ser bom em matemática, ou em qualquer outra coisa. Boaler (2020) sugere que os professores acolham suas incertezas e aceitem a possibilidade de não saberem algo ou cometerem erros. Sugere ainda que esses momentos sejam compartilhados com seus alunos; compartilhar a incerteza é uma estratégia valiosa e, quando se está vulnerável e se admite não entender determinadas coisas, abre-se a possibilidade de que outros se juntem e formem um círculo de compartilhamento de ideias de maneira aberta e livre de preconceitos e julgamentos.

1.4.7 Resumo das chaves

Antes de apresentar nossas considerações a respeito do fenômeno observado sob a ótica da DM e da NC, a imagem[38] a seguir representa, de forma sucinta, um breve resumo sobre as chaves de aprendizagem.

[38] Disponível em tamanho maior no apêndice A.

Figura 41: As chaves para aprendizagem

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

1.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O FENÔMENO DA FRAGMENTAÇÃO DO SABER MATEMÁTICO NOS CURRÍCULOS E DA SUPERFICIALIDADE DAS TAREFAS MATEMÁTICAS UTILIZADAS NAS INSTITUIÇÕES ESCOLARES

Após explanarmos, em linhas gerais, os principais conceitos da Didática da Matemática, refletindo sobre os fenômenos didáticos institucionais relacionados à transposição da matemática e seu ensino sob uma perspectiva praxeológica, e, posteriormente, explorarmos estudos da Neurociência Cognitiva que versam tanto sobre as funções executivas, como sobre o ensino através das seis chaves para aprendizagem, levantaremos agora algumas questões a respeito do fenômeno sob o qual esta pesquisa se debruça, ao qual denominamos o *fenômeno da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas utilizadas nas instituições escolares***.**

Referimo-nos, resumidamente, aos caminhos propostos pela noosfera para os conhecimentos matemáticos que visivelmente fragmentaram a matemática escolar, transformando os currículos em imensas listas de conteúdos desconexos, e de que maneira essa disposição dos conceitos no currículo acaba interferindo nos tipos de tarefas presentes nos livros didáticos e utilizados pelos professores na instituição escolar. Esse fenômeno implica, pois, em um ensino mecânico e superficial, que pode ser verificado no comportamento dos estudantes frente à disciplina de modo geral (ansiedade matemática, medo, tédio, baixo engajamento) e nos resultados negativos obtidos pelos estudantes brasileiros em avaliações matemáticas de larga escala (SAEB, PISA).

Será que os professores brasileiros, assim como critica Chevallard, não se questionam a respeito da forma como a matemática chega às instituições escolares? Os conteúdos, os exemplos expostos e as tarefas propostas pelos livros didáticos e apostilas de ensino contemplam uma matemática que tem sentido para os estudantes? De que forma a BNCC impacta na transposição didática da matemática dentro das instituições e, mais especificamente, na ação docente?

Fazendo uma breve ressalva ao fenômeno de interesse deste trabalho, notemos como os problemas observados em sala e impactantes nas avaliações de larga escala sofrem reflexos de variadas e complexas interferências. Certamente torna-se inviável amarrar cada ponta ligada à sala de aula e ao ensino de matemática, mas cabe um momento de reflexão: o aluno, sujeito aprendente, provêm de um contexto, tem sua história, tem expectativas, tem objetivos, tem particularidades; o professor, já foi aprendente e agora é, essencialmente, ensinante; da mesma forma que o estudante, possui suas particularidades, sofre influência de suas experiências, tem suas próprias convicções, mas ainda assim, precisa seguir protocolos e exigências da instituição na qual trabalha; a instituição escolar constrói-se com base na comunidade em que se encontra inserida e tem suas particularidades, entretanto, segue as recomendações e normas provenientes da unidade a que pertence (município, estado ou federação); estas, ainda, estão sob as influências do que é decidido de forma nacional, no caso do Brasil, a BNCC. Em meio a tantos fatores, de que forma o professor pode pensar um ensino de matemática significativo e promissor? Será que o conhecimento a respeito da TTD e da TAD juntamente com os resultados da NC podem, de fato, auxiliá-los na tarefa complexa de ensinar? De que forma as chaves da aprendizagem de Jo Boaler podem, de fato, contribuir para uma melhoria no ensino, facilitando o trabalho docente?

Sabemos que não teremos as respostas a todas essas perguntas, principalmente devido ao fato de estarmos lidando com um fenômeno que, por si só, interliga-se a uma série de fatos diferentes em cada estado, em cada município, em cada instituição e em cada sala de aula. Cabe a nós, entretanto, dar sequência ao estudo, analisando os documentos de referência para o ensino de matemática, a fim de estabelecer relações entre as teorias e práticas pedagógicas elencadas até aqui e os objetivos (competências e habilidades) que devem ser atingidos pela educação, em especial na última etapa da Educação Básica, tendo em vista a construção do MPDMA.

2 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS DE REFERÊNCIA PARA A MATEMÁTICA - NOVO ENSINO MÉDIO: CONDIÇÕES PARA IMPLEMENTAÇÃO DAS CHAVES DE APRENDIZAGEM

A Base Nacional Comum Curricular brasileira é um documento que normatiza e define um conjunto de elementos essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Devido à sua importância ímpar como condutora da construção de currículos e como guia para planejamentos e intencionalidades pedagógicas, faremos neste momento, uma análise de seu texto geral, apresentaremos sua estrutura e as principais mudanças previstas para o Ensino Médio e, posteriormente, exploraremos a parte específica direcionada à área da matemática, dando enfoque às competências que lhe cabem. Embora as habilidades da área da matemática sejam mencionadas durante este capítulo, optamos por não explora-las de forma profunda, primeiramente por serem muitas (43 habilidades) e, em segundo lugar, pelo fato de as competências conseguirem, por si sós, contemplar os objetivos centrais desta área no Ensino Médio.

Nesse processo de análise, faremos apontamentos indicando as aproximações entre as novas expectativas da BNCC para o ensino e às chaves para aprendizagem, juntamente com os conceitos da TAD e os estudos da NC. Ainda, devido aos interesses pessoais da autora que atualmente trabalha em uma escola estadual baiana, será feita uma análise do Documento Orientador de Implementação do Novo Ensino Médio na Bahia, a fim de verificar as mudanças no currículo de matemática e as possibilidades de implementação das ideias até aqui apresentadas para um ensino condizente com as instruções estaduais.

É importante frisar, novamente, que muitas são as interferências internas e externas atuantes diretamente na aprendizagem de matemática. Em vista disso, buscaremos explanar os principais fatores que contribuem para a existência do fenômeno didático previamente mencionados e, em paralelo, propor ferramentas que possam ser utilizadas por professores para suavizar os impactos desse fenômeno na aprendizagem dos alunos. Serão explorados tipos de tarefas para o ensino de matemática sob as perspectivas de Jo Boaler, bem como propostas de abordagens que colocam o estudante como agente e construtor de seu conhecimento; tudo isso, tendo em vista as perspectivas do ensino de matemática no Novo Ensino Médio, proposto pela BNCC.

2.1 A BNCC

A Constituição Federal Brasileira de 1988, reconhece, em seu artigo 205, a educação como direito fundamental, e propõe, em linhas gerais, as finalidades que devem ser garantidas através dela: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1988).

A fim de atender a estes requisitos, uma série de políticas públicas vêm sendo implementadas no Brasil, desde então, objetivando assegurar uma formação educacional básica comum a todos. O artigo 26 da LDB (1996) deixa claro o compromisso da União na elaboração de competências e diretrizes comuns para a Educação Básica (Ensino Infantil, Fundamental e Médio), e ainda enfatiza a necessidade de existir uma parte diversificada, que considere as características e particularidades locais, sociais e individuais da escola e dos alunos:

> [...] os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996).

O processo de construção e implementação das normas que estabelecem uma base nacional comum de ensino, desde a Constituição de 1988 até a vigência do Novo Ensino Médio em escolas-piloto no ano de 2020, passou por uma série de etapas. A figura abaixo contempla, de modo geral, os principais marcos desse processo.

Figura 42: Principais marcos para implementação da BNCC no Brasil

Fonte: Adaptado de movimentopelabase.org.br e do Documento Orientador do Novo Ensino Médio do MEC.[39]

[39] Movimento pela Base disponível em: <http://movimentopelabase.org.br/linha-do-tempo/>. Acesso em 09 jun. 2020. Documento Orientador do Novo Ensino Médio disponível em:

A Base Nacional Comum Curricular, assim,

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento[...] (BRASIL, 2018, p.7, grifo do autor).

Sua homologação, portanto, é um marco na história da educação nacional considerando que o intuito do documento é influenciar não apenas os currículos, mas "[...] a formação inicial e continuada dos educadores, a produção de materiais didáticos, as matrizes de avaliações e os exames nacionais que serão revistos à luz do texto homologado da Base [...]", bem como insistir em um regime de colaboração entre União, Estados, Distrito Federal e Municípios, pautado em altas expectativas de aprendizagem e com o "[...] compromisso da equidade que a sociedade brasileira espera daqueles que juntos atuam na educação" (BRASIL, 2018, p.5).

O documento tem como premissa assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais (figura 43), que se referem a "[...] mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores [...]" úteis na resolução de problemas complexos do cotidiano, do mundo do trabalho e do pleno exercício da cidadania (BRASIL, 2018, p. 8).

A Base indica a clara intenção de que as decisões pedagógicas tomadas garantam a formação de cidadãos que devem "saber" e, sobretudo, "saber fazer", constituindo e mobilizando conhecimentos, habilidades, atitudes e valores pré-estabelecidos, na resolução de demandas complexas de sua vida (BRASIL, 2018). Tal expectativa com relação à educação mostra semelhanças com a ideia central da TAD, quando organiza os saberes matemáticos em praxeologias que englobam o nível *praxis* (saber-fazer) e *lôgos* (saber).

Em virtude disso, o documento afirma seu compromisso com a educação integral, não no sentido de duração da jornada escolar, mas em vista à formação e ao desenvolvimento humano global, compreendendo sua complexidade e rompendo com visões reducionistas que privilegiam a dimensão afetiva ou a intelectual. Nesse sentido, enfatiza sua intenção de construir de forma intencional, "[...] processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea" (BRASIL, 2018, p.14).

<http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/documento-orientador.pdf>. Acesso em 09 jun. 2020.

Figura 43: Competências gerais da BNCC

Fonte: INEP[40]

As ideias defendidas pela BNCC são compatíveis com os estudos expostos até agora, referentes à neurociência, à pluralidade e multiplicidade da sociedade contemporânea, à complexidade do sujeito envolvido nas relações institucionais de ensino, bem como à influência de suas emoções e mentalidades na aprendizagem.

Destacamos, inicialmente - dentre muitos aspectos da área da matemática que posteriormente serão detalhados - como o jovem, sujeito principal da educação, é visto em sua totalidade. A juventude é considerada como uma condição sócio-histórico-cultural, composta por sujeitos que necessitam ser observados "[...] em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se

40 Disponível em: <http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79.>. Acesso em 30 set. 2020.

encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais[...]" (Parecer CNE/CEB nº 5/2011; apud BRASIL, 2018, p.463).

Além disso, a BNCC prioriza:

- o acolhimento das diversidades e promoção do respeito à pessoa humana e seus direitos - tema muito trabalhado pelas chaves da aprendizagem de Boaler, principalmente pela chave IV - colaboração;
- a garantia do protagonismo estudantil, reconhecendo os estudantes como "[...] interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem [...]" (BRASIL, 2018, p.463) - verificamos aqui a valorização do ensino a partir da praxeologia como um todo, onde o aluno sabe e, por isso, sabe fazer, logo, é responsável por seu próprio aprendizado; verificamos ainda a aposta no trabalho do professor mediador, embasado em questionamentos e intervenções intencionais, que deve partir do que o aluno vê e como ele entende, para com isso, conduzir a construção de novos saberes;
- a formação de "[...] sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis [...]" capazes de enfrentar os desafios da contemporaneidade e a tomada de decisões (BRASIL, 2018, p.463) - os trabalhos com a matemática de maneira múltipla, flexível e profunda, o uso de problemas matemáticos para o desenvolvimento da argumentação, criatividade e autonomia, as conversas céticas e as justificativas que permitem a criticidade, os trabalhos colaborativos que proporcionam autonomia e responsabilidade para com si e para com o próximo; todos estes aspectos previamente mencionados contribuem para a formação dos sujeitos, conforme infere a BNCC.
- a promoção de uma aprendizagem colaborativa e de atitudes cooperativas e propositivas, em busca de desenvolver nos estudantes "[...] a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares" (BRASIL, 2018, p.465) – notemos como novamente a chave VI - colaboração, pode possibilitar aos jovens o desenvolvimento da capacidade de trabalhar em grupo, respeitar as diferenças e engajar-se na busca de soluções para problemas sociais.

e assume:

- "[...] a firme convicção de que todos os estudantes podem aprender e alcançar seus objetivos, independentemente de suas características pessoais, seus percursos e suas histórias" (BRASIL, 2018, p. 465) - observa-se aqui a consonância com as pesquisas da neurociência que inferem sobre a plasticidade do cérebro, bem como os estudos de Boaler que confirmam a capacidade ilimitada de todos, principalmente alcançada quando há uma mudança de mentalidade que garante que todos saibam que podem ser bem sucedidos, na área que desejarem.

Em se tratando da organização curricular, a BNCC apresenta um novo arranjo para os componentes curriculares, que agora encontram-se agrupados em grandes áreas do conhecimento. Essa modificação foi feita a fim de superar a fragmentação disciplinar do conhecimento praticada até então nas escolas, e dar sentido ao que se aprende, valorizando a aplicação dos conhecimentos na vida real e facilitando o trabalho interdisciplinar e a elaboração de projetos curriculares inovadores.

Os componentes curriculares: Matemática, Língua Portuguesa, Arte, Língua Inglesa, Educação Física, História, Geografia, Sociologia, Filosofia, Biologia, Química e Física são considerados, a partir da BNCC, como parte de quatro áreas do conhecimento, o que não necessariamente exclui as disciplinas e suas especificidades, mas "[...] implica o **fortalecimento das relações** entre elas e a sua **contextualização para a apreensão e intervenção na realidade**, requerendo trabalho conjugado e cooperativo dos seus professores no planejamento e na execução dos planos de ensino" (BRASIL, 2009, apud BRASIL, 2018, p. 32, grifo do autor). Nestes moldes, o documento apresenta, para cada área, as competências específicas a serem promovidas ao longo desta etapa de ensino, bem como as habilidades essenciais que garantirão o desenvolvimento das mesmas. Além das áreas do conhecimento, deverão ser inseridos no currículo, de maneira complementar, os itinerários formativos, que visam o aprofundamento acadêmico em uma ou mais áreas e a formação técnica e profissional do estudante, "[...] o que possibilitará o fortalecimento do protagonismo juvenil no que se refere à escolha de seu percurso de aprendizagem e, também, à ampliação das ações voltadas à construção dos projetos de vida dos estudantes" (BRASIL, 2018b, p.3).

Neste sentido, há uma substituição do modelo único de currículo do Ensino Médio, adotado até então, por um modelo diversificado e flexível, composto pela

> **[...] Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos**, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I - linguagens e suas tecnologias;
> II - Matemática e suas Tecnologias;
> III - ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV - ciências humanas e sociais aplicadas;
> V - formação técnica e profissional" (LDB, Art. 36, apud BRASIL, 2018, p.468, grifo do autor).

Figura 44: Competências gerais da educação básica

Fonte: Brasil, 2018, p. 469

O Novo Ensino Médio, a partir das ideias da BNCC, tem sua carga horária ampliada de 2400 horas para pelo menos 3000 horas totais (1000 horas anuais), sendo no máximo 1800 horas destinadas à formação geral básica, e o restante desta jornada destinada aos itinerários formativos. Os itinerários serão organizados de maneira flexível, por cada instituição de ensino e se darão “[...] por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, considerando os interesses e necessidades dos estudantes, a relevância para o contexto local e as possibilidades dos sistemas de ensino [...]” (BRASIL, 2018b, p.4).

É importante ressaltar, por fim, que a BNCC não se trata de um currículo e sim de um referencial que deve guiar a construção dos currículos, com base nas dez competências gerais para a Educação Básica e nas competências e habilidades específicas de cada área do conhecimento.

De maneira resumida, a BNCC tem sua proposta, três frentes centrais:

> [...] o desenvolvimento do protagonismo dos estudantes e de seu projeto de vida, por meio da escolha orientada do que querem estudar; a valorização da aprendizagem, com a ampliação da carga horária de estudos; e a garantia de direitos de aprendizagem comuns a todos os jovens, com a definição do que é essencial nos currículos a partir da BNCC.[41]

[41] Guia de implementação do novo Ensino Médio. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/documento-orientador.pdf>. Acesso em 09 jun. 2020.

Devido aos interesses deste trabalho, daremos enfoque, agora, à análise das competências (e habilidades) direcionadas à área de Matemática e suas Tecnologias no Novo Ensino Médio. Além disso, como foi permitido às redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, a elaboração de currículos próprios, desde que: a) as competências gerais da Educação Básica sejam inter-relacionadas e desdobradas no tratamento didático nas três etapas da Educação Básica (BRASIL, 2018); b) a carga horária anual mínima seja cumprida; analisaremos em especial o plano de ação para implementação do Novo Ensino Médio criado pela Secretaria da Educação da Bahia[42], que guiará as escolas baianas no período de transição (2020 a 2023). É importante salientar que a matriz curricular retirada deste documento e observada neste trabalho trata-se daquela destinada a escolas regulares, com cumprimento de carga horária mínima exigida pela BNCC (diferente das organizações curriculares que ocorrem, por exemplo, em escolas técnicas ou de tempo integral).

2.1.1 A Matemática e suas Tecnologias no Novo Ensino Médio

De maneira complementar ao que englobam as competências gerais, o capítulo da BNCC direcionado à Matemática e suas Tecnologias no Novo Ensino Médio, enfatiza a construção de uma "[...] visão integrada da matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos" (BRASIL, 2018, p.528). Devido à necessidade de ter sempre como referência a realidade do aluno - e junto dela, as exigências do mercado de trabalho, os avanços tecnológicos, a potencialidade das mídias sociais, dentre outros - o pensamento computacional e as novas tecnologias ganham destaque nessa área, e, juntamente com outros conhecimentos, devem estimular o desenvolvimento de processos de reflexão e abstração, criação, análise, indução e dedução sistêmica, em busca de sustentação para tomada de decisão. Além disso, destaca-se a importância de desenvolver cidadãos com habilidades de investigação, resolução de problemas e construção de modelos, a fim de que sejam capazes de "[...] mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p.529).

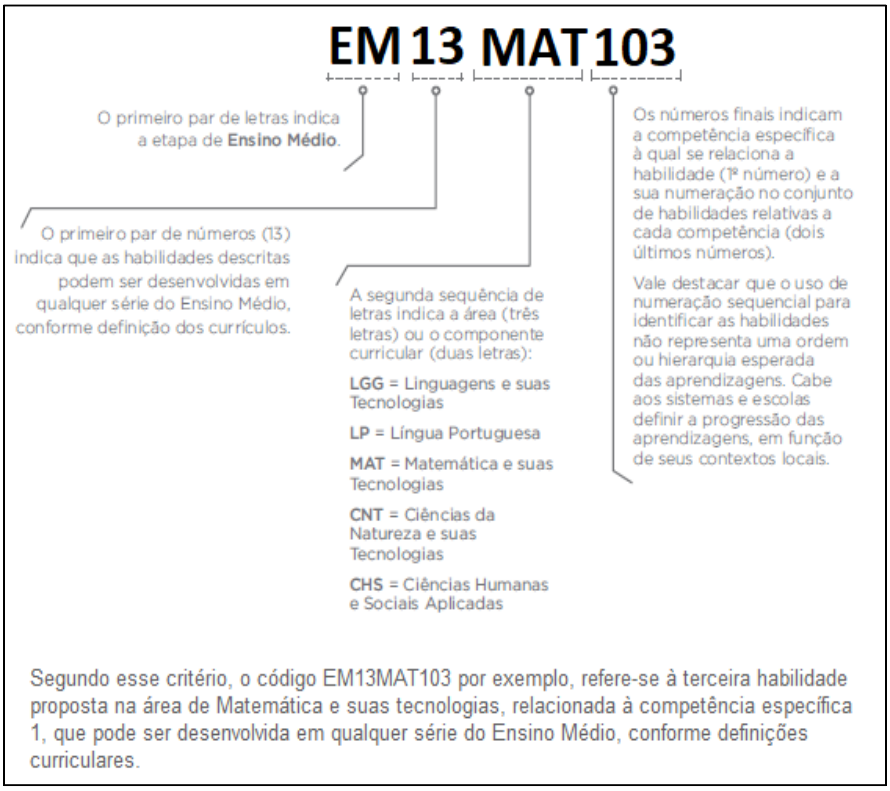
Para alcançar tais objetivos, é sugerido que os saberes do Ensino Médio sejam articulados aos campos da matemática já estudados no Ensino Fundamental (aritmética,

[42] Disponível em: <http://jornadapedagogica.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2020/01/Documento-Orientador-Novo-Ensino-M%C3%A9dio-na-Bahia-Vers%C3%A3o-Final.pdf>. Acesso em 09 out. 2020.

álgebra, geometria, probabilidade e estatística, grandezas e medidas) e que agora devem ser consolidados, ampliados e aprofundados.

A partir daí, são apresentadas cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e subjacentes a elas, 43 habilidades relacionadas a conceitos matemáticos, que devem ser desenvolvidas pelos alunos durante os três anos deste ciclo final de ensino[43]. As competências estão enumeradas de 1 a 5 e as habilidades são identificadas por códigos, que evidenciam suas características, conforme explicitado na figura abaixo.

Figura 45: Códigos de habilidades da BNCC



Fonte: Adaptado de Brasil. 2018, p. 34

O documento ainda permite que os currículos sejam organizados de diversas formas. Uma sugestão é orientar-se por meio de unidades temáticas, reunindo as habilidades propostas pela BNCC e outras que sejam julgadas necessárias pelas escolas, de acordo com suas demandas. Outra sugestão é organizá-los por unidades similares às utilizadas no Ensino Fundamental, ou seja, Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018, p.542). Para esta última opção, há uma proposta de separação das habilidades de acordo com essas três grandes áreas: 21 habilidades para Números e Álgebra, 12 habilidades para Geometria e Medidas e 10 habilidades para Probabilidade e Estatística.

[43] A BNCC não segrega as habilidades de acordo com as séries do Ensino Médio. Fica a cargo de cada currículo definir quais habilidades serão trabalhadas em quais séries.

Antes de citar e refletir sobre as competências específicas da Matemática e suas Tecnologias, tais quais encontram-se no documento, faremos uma breve análise de trechos do texto introdutório desta área, quando algumas competências são tratadas em um âmbito mais geral. Esta análise busca apresentar semelhanças entre BNCC, a TAD e as chaves para aprendizagem.

Quadro 9: Relações entre a BNCC e as chaves de aprendizagem

Trechos da BNCC	**Relação com as seis chaves da aprendizagem**
“[...] para o desenvolvimento de competências que envolvem **raciocinar,** é necessário que os estudantes possam, em **interação com seus colegas e professores**, **investigar, explicar e justificar** as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de **argumentação matemática**. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas **à representação e à comunicação para expressar as generalizações**, bem como à construção de uma **argumentação consistente para justificar** o raciocínio utilizado” (BRASIL, 2018, p. 529, grifo nosso).	Inicialmente, notamos como a chave VI (colaboração) pode auxiliar no processo de interação previsto no documento. As técnicas de trabalho em grupo, a instrução complexa, bem como a estratégia de conversa entre céticos, por exemplo, são ferramentas capazes de auxiliar os professores a proporcionar ambientes que facilitem essa interação, além de possibilitar o desenvolvimento de habilidades de argumentação tão apreciadas em diversas chaves da aprendizagem. Ainda, as habilidades de representação e comunicação solicitadas no documento, bem como a investigação, explicação e justificativa de soluções, são trabalhadas na chave IV (multiplicidade), onde a matemática é vista sob diversas perspectivas e onde o professor assume o papel de estimular os alunos a enxergar os problemas sob suas perspectivas, desenhá-los e utilizar diversas representações, investigar, argumentar, etc.
“As competências que estão diretamente associadas a **representar** pressupõem a elaboração **de registros para evocar um objeto matemático.** Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em	Novamente o documento dá grande ênfase às diversas representações da matemática e à importância de o estudante desenvolver habilidades que lhe permitam utilizar tais representações para compreender problemas, ideias, fatos e conceitos matemáticos e ao mesmo

especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a **importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos,** uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. [...] Por esse motivo, espera-se que os estudantes **conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática** – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio” (BRASIL, 2018, p. 529, grifo nosso).	tempo, desenvolver seu raciocínio matemático. As chaves IV e V (multiplicidade e flexibilidade e profundidade) mostram evidências, ferramentas e tipos de tarefas que os professores podem utilizar para propiciar o desenvolvimento de tais habilidades pelos alunos.
“Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam **apresentar e justificar seus resultados**, **interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles**. É nesse contexto que a competência de **comunicar** ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de **justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos** e conectivos lógicos, **mas também por meio da língua materna**, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros” (BRASIL, 2018, p. 529-530, grifo nosso).	Aqui vemos como a conversa de céticos e o papel diamante são ferramentas importantes no desenvolvimento destas habilidades nos estudantes, principalmente para que consigam comunicar suas ideias, construídas com o uso de representações algébricas, visuais ou corporais, utilizando a linguagem materna. Ainda, verificamos a importância de concepções de uma matemática múltipla, flexível e visual, construídas com o uso de tarefas de praxeologia regional ou global. Tal abordagem confere aos alunos a possibilidade de entenderem as justificativas que embasam suas técnicas. Tudo isso, é claro, sendo pensado em conjunto com o desenvolvimento da capacidade de trabalhar em grupo, através da colaboração.
“Cabe observar que essas competências consideram que, além da cognição, os estudantes devem **desenvolver atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de**	Verificamos aqui, como as ideias das chaves I, II, III e VI (crescimento do cérebro, esforço, mentalidade e colaboração, respectivamente) estão presentes. Inicialmente, ao falar da

respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo" (BRASIL, 2018, p. 529-530, grifo nosso).	autoestima e perseverança, percebemos a importância de trabalhar a plasticidade do cérebro mostrando como todos, independentemente de quaisquer crenças, têm possibilidade de aprender; as ideias de *mindset* de crescimento e o conhecimento sobre como o esforço é positivo para a aprendizagem também ajudam na construção de um cenário de perseverança por parte dos estudantes. Conclusivamente, o respeito à opinião do outro é trabalhado, mais intensamente, na chave de colaboração.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

2.1.2 Competências e habilidades específicas de Matemática e suas Tecnologias

Conforme já mencionado anteriormente, dentro de cada área do conhecimento, são elencadas competências e habilidades que espera-se desenvolver nos alunos durante os três anos do Ensino Médio. Na matemática, são instituídas cinco competências gerais e 43 habilidades relacionadas a elas. O documento enuncia a primeira competência, explana sua ideia central e posteriormente as habilidades necessárias para o desenvolvimento da mesma; igualmente, apresenta a segunda competência, sua ideia central e suas habilidades, e assim sucessivamente.

Neste momento, apresentaremos as cinco competências acompanhadas de reflexões sobre o texto que as explica, fazendo apontamentos sobre como as chaves da aprendizagem podem auxiliar no desenvolvimento das mesmas.

Quadro 10: Competência 1 - Matemática e suas Tecnologias

1ª Competência
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Fonte: Brasil, 2018, p.532

Nesta competência, objetiva-se que os estudantes consigam compreender, interpretar e analisar criticamente o que é "[...] produzido e divulgado nos meios de comunicação [...] muitas vezes de forma imprópria e que induz a erro; generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado de amostragem, forma de representação de dados - escalas inapropriadas [...]" (BRASIL, 2018, p.532). Nesse sentido, vemos a importância de proporcionar aos alunos tarefas matemáticas e momentos pedagógicos que trabalhem sua criticidade, que permitam refletir, indagar, refutar e ver o conhecimento como algo a ser construído e não como algo pronto e inquestionável. Os trabalhos colaborativos, a exigência de justificativa nas tarefas, a relação com uma matemática ampla e interligada a diversos contextos, o uso de tarefas de investigação e as conversas entre céticos são exemplos de práticas que podem ajudar o estudante a desenvolver tal competência.

Quadro 11: Competência 2 - Matemática e suas Tecnologias

2ª Competência
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Fonte: Brasil, 2018, p.532

Nesta competência, espera-se que os alunos consigam "[...] **investigar** questões de impacto social que os mobilizem a **propor ou participar de ações individuais ou coletivas** que visem solucionar tais problemas [...] " e ainda "[...] possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas [...] **valorizando a diversidade de opiniões** de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos" (BRASIL, 2018, p.534, grifo nosso).

Percebe-se aqui a notoriedade do trabalho colaborativo e sua importância social ao proporcionar experiências de troca de ideias e discussões com pessoas que podem ter pontos de vista contrários e mesmo assim, saber lidar com essas divergências, orquestrando soluções conjuntas embasadas em princípios solidários, éticos e sustentáveis. A BNCC espera que a escola seja um ambiente de preparo para a vida, portanto o coletivo precisa estar presente nas aulas de matemática, não de maneira superficial, mas com intencionalidade, com um direcionamento adequado do professor que busca não apenas ensinar conhecimentos matemáticos, mas mostrar a importância da cooperação, do trabalho em equipe, da responsabilidade pelo outro e do respeito às diferenças.

Quadro 12: Competência 3 - Matemática e suas Tecnologias

3ª Competência
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Fonte: Brasil, 2018, p.532

Para desenvolver tal competência, o aluno precisa de habilidades que dizem respeito "[...] à **interpretação, construção de modelos, resolução e formulação** de problemas matemáticos envolvendo **noções, conceitos e procedimentos** quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 535, grifo nosso). Ainda, torna-se necessário que os estudantes trabalhem com problemas de real significado para eles, bem como que construam significados para problemas próprios da matemática (BRASIL, 2018).

Nota-se como o uso de problemas matemáticos e tarefas investigativas é pertinente para o desenvolvimento desta competência. Quando o professor pergunta ao aluno: "o que você vê" e, a partir disso, conduz seu aprendizado, incentivando-o a construir modelos e interpretar problemas, verificando todas possibilidades, discutindo estratégias e pontos de vista; e, da mesma forma, quando utiliza da estratégia do "piso baixo teto alto", proporcionando a possibilidade de formular novos problemas matemáticos, refletindo sobre o que aconteceria se alguns parâmetros mudassem na questão, por exemplo, também está contribuindo para o desenvolvimento desta competência.

A BNCC justifica, ainda, sua intenção ao incluir a elaboração de problemas, como um dos objetivos dessa competência:

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "Resolver e Elaborar Problemas" em lugar de "Resolver Problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018, p. 536).

Neste trecho verificamos como é importante a classificação dos problemas em tipos de problemas que, apesar de diferentes, apresentam semelhanças que facilitam sua resolução, quando bem observadas. Para que o estudante tenha a "maturidade matemática" para fazer tal tipo de interpretação, é preciso que esteja frequentemente exposto a tarefas de praxeologia regional e global, que instiguem o uso de diversas técnicas, provenientes de uma ou mais tecnologias e teorias. Esse amadurecimento requer, necessariamente, o conhecimento do *lôgos,* pois, enquanto o conhecimento em nível *praxis* permite ao aluno resolver apenas tarefas das quais sabe que as técnicas conhecidas vão funcionar (quando por exemplo, o professor acabou de ensinar uma técnica e propõe tarefas de praxeologia pontual e local a fim de praticá-la), o nível *lôgos* possibilita o aprofundamento e a compreensão de porquê tais técnicas funcionam, além de direcionar a leitura de problemas para um viés mais teórico e analítico, permitindo a classificação de problemas semelhantes que podem ser resolvidos de forma análoga.

Além deste, outros trechos referentes a esta competência evidenciam a estreita relação entre as pretensões da BNCC, as seis chaves para a aprendizagem de Boaler e os conceitos da TAD. O trecho abaixo, de forma complementar, ajuda a confirmar a comunhão entre todas as ideias apresentadas até aqui. Vejamos:

> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, **identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários** ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam **aplicar esses conceitos**, **executar procedimentos** e, ao final, **compatibilizar os resultados** com o problema original, **comunicando a solução aos colegas** por meio de **argumentação consistente** e linguagem adequada. No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve a**nalisar os fundamentos e propriedades** de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses **diferentes tipos de problemas,** incluindo a **construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados** (BRASIL, 2018, p. 536).

Quadro 13: Competência 4 - Matemática e suas Tecnologias

4ª Competência
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Fonte: Brasil, 2018, p.532

Para esta competência, é necessário que o estudante seja capaz de utilizar **representações diversas de um mesmo objeto matemático**, bem como compreender suas ideias e realizar conversões entre as mesmas, sendo capaz, com isso, de "[...] dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de **resolver problemas**, **comunicar e argumentar[...]**", ampliando sua capacidade de pensar matematicamente (BRASIL, 2018, p. 538, grifo nosso).

Neste sentido, nota-se que a Base incentiva a exploração de mais de um registro de representação sempre que possível, pois, além de ser imprescindível para a resolução de problemas, a flexibilidade e multiplicidade da matemática permitem um leque amplo de formas de compreender problemas, comunicar ideias e argumentar sobre eles.

Quadro 14: Competência 5 - Matemática e suas Tecnologias

5ª Competência
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil, 2018, p.532

A quinta e última competência destaca a importância do reconhecimento da matemática como "[...] um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, **coletivamente construído**, com seus objetivos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados [...]", bem como a percepção da atividade matemática como uma atividade humana, que é **suscetível a acertos e erros** e construída em um processo de "[...] buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação" (BRASIL, 2018, p. 538, grifo nosso). Para isso, pressupõe que sejam desenvolvidas habilidades de investigação e formulação de argumentos, que devem ser estimuladas através de experimentações com materiais concretos, experiências empíricas, utilização de apoios visuais e tecnologias digitais, dentre outros.

Há portanto, saliência de um aluno protagonista, com acesso constante à oportunidades de experimentar, enxergar e fazer matemática de forma individual e coletiva, e nesse processo, estar suscetível a erros e acertos, que são próprios da atividade humana e importantes no processo de aprendizagem, conforme frisam as chaves da aprendizagem de Boaler.

2.2 ANÁLISE DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BAIANAS

O documento orientador de implementação do Novo Ensino Médio na Bahia, estabelece, para as escolas regulares, que as 1800 horas destinadas para a formação geral básica devem ser distribuídas em 600 horas anuais para cada série. Informa ainda que os componentes curriculares das Áreas do Conhecimento deverão ser trabalhados, conforme orienta a BNCC, de forma integrada e interdisciplinar, enquanto as disciplinas eletivas ofertadas deverão possibilitar aos estudantes, escolhas relacionadas com seus projetos de vida.

Para que ocorra essa integração, é recomendado que a parte geral e a parte flexível do currículo sejam trabalhadas por meio de Temas Geradores[44], considerando que optar por um trabalho guiado por temas "[...] auxiliará os educadores na seleção dos objetos de conhecimento (conteúdos, processos, avaliação) para conduzir o desenvolvimento das habilidades e competências, conhecimentos e saberes significativos nas práticas sociais dos estudantes" (BAHIA, 2020, p.10).

Além disso, este documento discorre sobre como os métodos de ensino escolhidos pelos professores devem objetivar a participação dos estudantes em todo o processo educativo, tendo em vista o "[...] desenvolvimento de sua autonomia e o poder de decisão sobre a própria vida, a partir do acesso ao conhecimento científico, do desenvolvimento do senso crítico e ético [...]"

[44] Segundo o documento, "Tema Gerador é uma metodologia inovadora para o processo de ensino e aprendizagem que estimula a curiosidade, provoca o debate, prioriza a problematização dos saberes já constituídos, histórica e socialmente, pelos seres humanos situados em um mundo concreto, conflituoso e contraditório" (BAHIA, 2020, p. 10).

(BAHIA, 2020, p. 21). Para tal, elenca algumas metodologias que permitem ao estudante exercer um papel ativo em seu processo de aprendizagem, a saber:

- Aprendizagem baseada em problemas.
- Aprendizagem baseada em projetos.
- Estudo de caso.
- Aprendizagem entre pares ou times.
- Aprendizagem criativa.
- Sala de aula invertida.
- Aulas de campo.
- Trabalhos em grupos operativos.
- Júris simulados.
- Seminários.
- Oficinas. (BAHIA, 2020, p. 21)

Ainda, pontua sobre a avaliação da aprendizagem, destacando que a mesma deve ser realizada por meio de metodologias e instrumentos diversificados, que considerem as especificidades de cada estudante bem como as diversas formas de expressar a aprendizagem, respeitando os inúmeros tempos e maneiras de aprender. Neste sentido, enfatiza a importância de serem extrapoladas as formas de avaliação tradicional, tendo em vista que "[...] habilidade é a aplicação prática integrada aos conhecimentos teóricos para resolver e, também, produzir conhecimentos para a compreensão e resolução dos fenômenos complexos da contemporaneidade" (BAHIA, 2020, p.22) e, portanto, precisa ser avaliada por meio de observações, registros em diários de bordo, portfólios, seminários, desenvolvimento de protótipos, artefatos e modelos, "[...] por meio de diversas manifestações das linguagens artísticas e culturais" (BAHIA, 2020, p.22).

Embora no momento da escrita deste trabalho, o Documento Curricular Referencial da Bahia - DCRB/ Etapa do Ensino Médio, não estivesse pronto[45], o Documento Orientador de Implementação do Novo Ensino Médio já apresenta a proposta de matriz curricular para esta etapa, conforme quadro abaixo.

[45] O período de 21 de agosto a 05 de outubro de 2020 foi utilizado para uma escuta aos estudantes para escrita do Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) – Etapa do Ensino Médio. Após essa data, não encontramos nenhuma informação sobre o andamento do Documento. As informações sobre o encerramento da etapa de escuta aos estudantes encontram-se disponível em: <http://estudantes.educacao.ba.gov.br/noticias/sec-prorroga-escuta-line-para-contribuicoes-sobre-o-documento-curricular-referencial-da-bah>. Acesso em 09 out. 2020.

Quadro 15: Matriz Curricular Ensino Médio - Bahia

MATRIZ CURRICULAR ENSINO MÉDIO								
FORMAÇÃO GERAL BÁSICA (BNCC)								
Área de Conhecimento	Componente Curricular	1ª. Série		2ª. Série		3ª. Série		Carga Horária Total
		Nº h/sem	CH Anual	Nº h/sem	CH Anual	Nº h/sem	CH Anual	
Linguagens e suas Tecnologias	Língua Portuguesa	2	80	2	80	2	80	240
	Inglês	2	80	1	40	---	---	120
	Ed. Física	1	40	1	40	---	---	80
	Arte	1	40	1	40	---	---	80
Matemática e suas Tecnologias	Matemática	2	80	2	80	2	80	240
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Química	1	40	1	40	2	80	160
	Física	1	40	1	40	2	80	160
	Biologia	1	40	2	80	1	40	160
Ciências	História	1	40	1	40	2	80	160

Fonte: Bahia, 2020, p. 11

Quadro 16: Matriz Curricular Ensino Médio - Bahia (continuação)

Humanas e Sociais Aplicadas	Geografia	1	40	1	40	2	80	160
	Filosofia	1	40	1	40	1	40	120
	Sociologia	1	40	1	40	1	40	120
SUB TOTAL		**15**	**600**	**15**	**600**	**15**	**600**	**1800**
PARTE FLEXÍVEL								
OBRIGATÓRIAS	Iniciação Científica	2	80	2	80	2	80	240
	Produção e Interpretação Textual	2	80	2	80	2	80	240
	Projeto de Vida e Cidadania	2	80	2	80	2	80	240
Eletiva I		2	80	2	80	2	80	240
Eletiva II		2	80	2	80	2	80	240
SUBTOTAL		**10**	**400**	**10**	**400**	**10**	**400**	**1200**
TOTAL		**25**	**1000**	**25**	**1000**	**25**	**1000**	**3000**

Fonte: Bahia, 2020, p. 11-12

A partir disso, gostaríamos de destacar três pontos importantes, referentes à explanação do Documento Orientador da Bahia, que brevemente apresentamos: as metodologias de ensino, a avaliação e a carga horária direcionada para Matemática e suas Tecnologias.

Tanto as metodologias de ensino sugeridas como as considerações feitas a respeito da avaliação mostram grande proximidade com as chaves de aprendizagem de Boaler. Verifica-se o destaque ao trabalho em grupo (colaboração), à aprendizagem baseada na resolução de problemas e estudos de caso (tarefas de piso baixo teto alto e tarefas investigativas); à valorização da criatividade dos alunos e a possibilidade de permitir com que eles mesmos conduzam seu aprendizado (na sala de aula invertida, por exemplo).

Além disso, ao sugerir que a avaliação extrapole os meios tradicionais, o documento dá importância às particularidades do aluno e ao seu processo de aprendizagem, não apenas ao resultado final (avaliação formativa) - aspectos recorrentemente abordados por Jo Boaler quando indica que a matemática não é apenas uma resposta correta, e sim construção, erro, investigação, colaboração, uso de diferentes tipos de representação e manifestação de linguagens.

Em se tratando da carga horária destinada à matemática, preocupação que teve grande importância na motivação para a escrita deste trabalho, nota-se que há uma significativa redução de tempo: no currículo vigente até então no estado da Bahia, a cada série do Ensino Médio destinavam-se três horas/aula de matemática semanais; agora, essa carga horária foi reduzida a duas, ou seja, o professor terá cerca de 33% menos tempo de aula semanal, o que nos leva de volta à pergunta: como as chaves de aprendizagem de Boaler, juntamente com as ideias da TAD e os conhecimentos a respeito da NC podem auxiliar os professores neste período de mudança?

O que vimos até agora mostrou que há grande harmonia entre a BNCC e as propostas de ensino de matemática sob o viés das seis chaves de aprendizagem e demais teorias apresentadas. O que nos resta, portanto, é delinear de forma mais clara, alguns caminhos para que os professores de matemática percebam novas possibilidades e consigam organizar os conteúdos e tarefas de cada série, norteados pelas competências e habilidades sugeridas pela BNCC, a partir da organização curricular em grandes ideias (eixos centrais) e minimizando sua constante preocupação em não conseguir “dar conta” de uma lista imensa de conteúdos fragmentados.

Valle (2019, p.72) comenta como os currículos de matemática brasileiros até então “[...] tendem a fragmentar o aprendizado da disciplina em listas com inúmeros conceitos e métodos que os professores precisam ensinar [...]” e mostra como essa explanação curricular dificulta a percepção das relações que existem entre os conceitos matemáticos. Devlin (2019), por sua vez, infere que pesquisas em ciências cognitivas mostram claras evidências de que a única maneira de obter uma aprendizagem profunda é através do prolongado envolvimento com tópicos específicos da matemática. O autor defende que qualquer currículo de matemática deve se concentrar em um pequeno número de tópicos específicos, a ser trabalhados de forma aprofundada e com significado[46]; qualquer coisa a mais é opcional e deve ser empregada em

[46] Muitos trechos da BNCC deixam claro que seu principal objetivo é garantir aos estudantes **aprendizagens essenciais,** tendo em vista a formação de cidadãos que devem **“saber”** e **“saber fazer”**; mais especificamente, na área destinada à Matemática e suas Tecnologias, mostra-se a importância de os estudantes tenham um letramento matemático “mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão **aprofundar e ampliar** as habilidades propostas para o Ensino Fundamental [...]” (BRASIL, 2018, p.530) indo ao encontro da profundidade sugerida por Devlin (2019). Ainda, com relação ao ensino de uma matemática com significado proposta pelo autor, a BNCC destaca a importância de práticas pedagógicas que priorizem a “contextualização dos conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e **torná-los**

pequenas doses. Ele sugere, ainda, que quando o professor quiser trabalhar com tópicos além do essencial, deve fazê-lo com entusiasmo, mostrando a ampla utilidade da matemática. Por exemplo: falar sobre algum fato da atualidade e perguntar: “o que é (onde está) a matemática envolvida nisso?”.

> Observe que, para fazer esse tipo de coisa, não é necessário que o professor conheça nada da matemática envolvida. O importante é ser capaz de descobrir essa matemática! Uma tarefa que é bastante fácil, considerando o Google, a Wikipedia e o YouTube. A capacidade de dominar rapidamente uma nova técnica matemática é uma das habilidades mais importantes para um matemático atualmente (DEVLIN, 2019).

Da mesma forma, Boaler, Munson e Williams (2017) propõe que o ensino de matemática seja pensado através da identificação de eixos fundamentais, a serem trabalhadas com os alunos em cada ano escolar, bem como as conexões que podem ser estabelecidas a partir deles. Os autores, ainda, criticam abordagens superficiais de imensas listas de conteúdos que tornam imperceptíveis as conexões existentes entre as grandes ideias matemáticas e também defendem a organização curricular por meio de grandes conceitos. E afirmam:

> Enquanto os alunos se debruçaram sobre as atividades focadas nessas grandes ideias, eles se depararam com a necessidade de muitos dos métodos menores e nós os ensinamos durante as atividades. A vantagem dessa abordagem de ensino para as grandes ideias, e o ensino de ideias menores à medida que vão surgindo, é que os alunos sempre querem aprender os métodos menores, pois precisam deles para resolver os problemas. [...] Quando fazem isso, seus cérebros estão preparados para aprender o novo método, pois eles estão curiosos e precisam dele. **Quando se ensina por meio das grandes ideias na matemática, a maioria das ideias e métodos menores surgem naturalmente e os alunos podem aprendê-los de maneiras significativas e intencionais**. As ideias que nunca surgem provavelmente não são muito importantes para se aprender! (BOALER.; MUNSON.; WILLIAMS, 2017, p.3, grifo nosso).

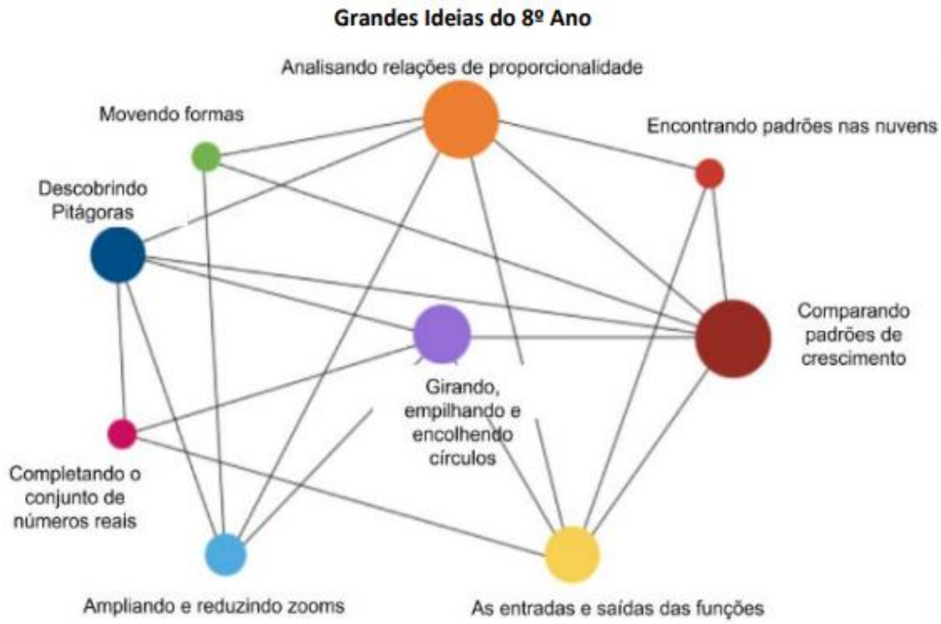
A imagem abaixo é um exemplo de currículo organizado com base em ideias[47] centrais que se interrelacionam: trata-se de um mapa para o currículo do 8º ano do Ensino Fundamental dos EUA, elaborado pelos autores.

---

significativos [...]” (BRASIL, 2018, p.16), bem como a incorporação de “[...] temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global” (BRASIL, 2018, p.19).

[47] Boaler, Munson e Williams criaram cronogramas de ensino matemático para turmas da Educação Infantil bem como para as séries do 1º ao 8º ano do Ensino Fundamental. Em seu artigo: “O que é a Beleza Matemática? Ensinando por meio de grandes ideias e conexões”, os autores disponibilizam de forma esquemática, as ideias centrais estabelecidas para turmas do Ensino Fundamental. Disponível em: <https://www.YouCubed.org/wp-content/uploads/2020/01/O-que-%C3%A9-a-Beleza-Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em 30 mar. 2020.

Figura 46: Esquema grandes ideias para o 8º ano



Fonte: Boaler, Munson, Williams, 2017, p. 12

Boaler, Munson e Williams (2017) apontam que o primeiro passo essencial para desenvolver a grade curricular é, portanto, o estabelecimento dessas ideias centrais. Para eles, o ideal é que os professores se juntem e descubram quais são essas grandes ideias unificadoras, tendo a consciência de que, quando uma ideia é realmente importante, ela se conectará a outras ideias nesta série. Além disso, contribuem com esse processo de reflexão necessário antes de decidir os eixos centrais:

> Há várias maneiras de usar esses mapas de grandes ideias. Você pode reunir-se com colegas e discutir como vocês entendem o significado de cada grande ideia e como ela se conecta ao que você ensina. Quais oportunidades devem ou precisam ser oferecidas aos alunos para que explorem essas grandes ideias? Como você pode dar destaque a essas ideias em suas aulas? Você também poderia explorar as conexões dentro de cada rede e perguntar: como você poderia dar aos alunos a oportunidade de conectar essas ideias? (BOALER, MUNSON e WILLIAMS, 2017, p. 6).

Pensando no cenário da educação pública baiana, essa tarefa pode ser realizada durante as jornadas pedagógicas preparatórias (que ocorrem antes do início do ano letivo), bem como nos momentos destinados às atividades complementares nas escolas. Na Bahia, as atividades complementares são orga

nizadas por área do conhecimento, o que facilita a elaboração de um planejamento articulado.

3 MODELO PRAXEOLÓGICO DIDÁTICO MATEMÁTICO ALTERNATIVO PARA O NOVO ENSINO MÉDIO: AS TAREFAS MATEMÁTICAS ABERTAS

Tendo em vista a carga horária destinada à matemática para as escolas regulares do estado da Bahia no Novo Ensino Médio, as competências e habilidades da BNCC, as chaves para aprendizagem, a TAD e os estudos da NC, apresentaremos agora um Modelo Praxeológico Didático-Matemático (Alternativo) para o ensino de matemática no Novo Ensino Médio, criado por nós a fim de oferecer aos professores um guia orientador para o planejamento de aulas, avaliações e elaboração/utilização de tarefas matemáticas visuais e abertas. Este modelo, portanto, sugere praxeologias para o professor conduzir seu trabalho sob as perspectivas e orientações da BNCC e das chaves para aprendizagem.

O MPDMA é composto por **infográficos** que organizam, de forma dinâmica e resumida, os principais pontos para uma prática docente embasada nas chaves para aprendizagem e por três **mapas curriculares** - fundados sob eixos centrais - criados como sugestão para organização curricular de cada ano do Ensino Médio e que, juntos, possibilitam a abordagem de todas as habilidades exigidas pela BNCC para essa etapa de ensino.

A escolha das temáticas abordadas em cada infográfico ocorreu-se tendo em vista a importância destes tópicos, sob nossa perspectiva, para o trabalho docente.

O infográfico intitulado "Explorando as chaves para aprendizagem" (figura 47/ apêndice B) traz dicas, lembretes e recomendações para o trabalho geral do professor, abordando de forma enlaçada as seis chaves de aprendizagem.

O infográfico intitulado "Organizando o trabalho em grupo" (figura 48/ apêndice C), organiza os principais conceitos da instrução complexa bem como apresenta dicas e lembretes sobre a importância do trabalho colaborativo e da preparação dos estudantes para esse tipo de trabalho.

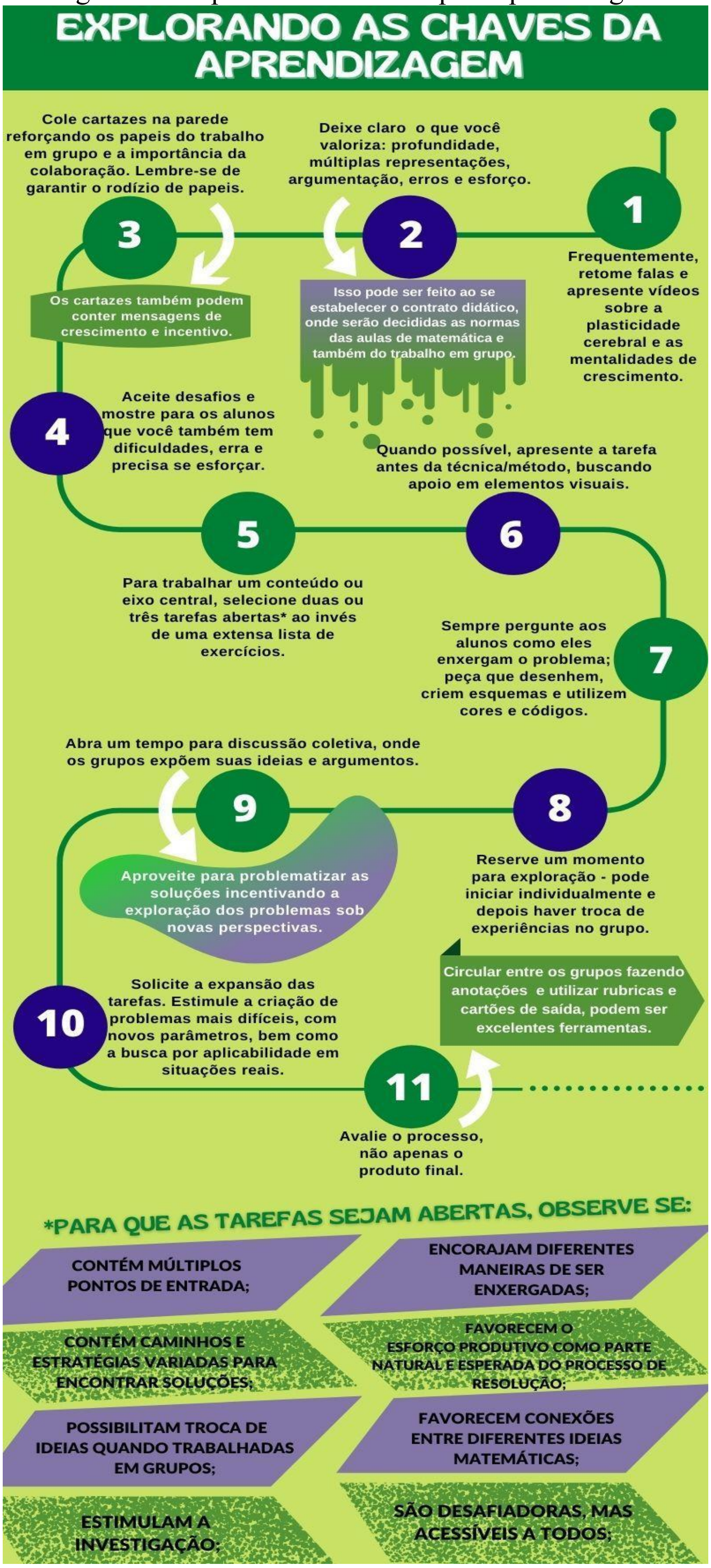
O infográfico intitulado "Avaliação para aprendizagem" (figura 49/ apêndice D), mostra a avaliação sob uma perspectiva "não classificatória", que objetiva situar o estudante em seu processo de aprendizado. Como apontado ao longo desse trabalho, se a avaliação for utilizada apenas como uma ferramenta que mede o quanto o aluno sabe e o classifica através de números, ela acabará contribuindo para a manutenção da crença em uma matemática rígida, onde erros são importantes e a resposta final é o único fator de valor. Nesse sentido, instruir os professores sobre como avaliar para a aprendizagem é de extrema relevância para o ensino embasado nas chaves para aprendizagem.

A escolha dos temas geradores e a organização dos currículos para a 1ª, 2ª e 3ª série do Ensino Médio (figuras 50, 51 e 52/ apêndices E, F e G), se deram com base nas habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias listadas na BNCC, buscando enlaçar e conectar os conceitos matemáticos a fim de que não sejam mais apresentados e trabalhados de forma fragmentada e engessada.

Por fim, para exemplificar de que forma as conexões entre essas habilidades podem ser trabalhadas, apresentamos três exemplos de tarefas matemáticas abertas e visuais que encerram este capítulo: as primeiras duas tarefas (e suas respectivas orientações) foram retiradas do *Youcubed* enquanto a terceira tarefa e seu roteiro foram construídos pela autora, com base em materiais retirados de diversos sites educacionais e nas ideias centrais indicadas pelo MPDMA. As tarefas mencionadas foram escolhidas tendo em vista os temas geradores dos currículos de cada série criados por nós, com o intuito de apresentar as diversas possibilidades de exploração de tarefas visuais e abertas trabalhadas sob a perspectiva do MPDMA.

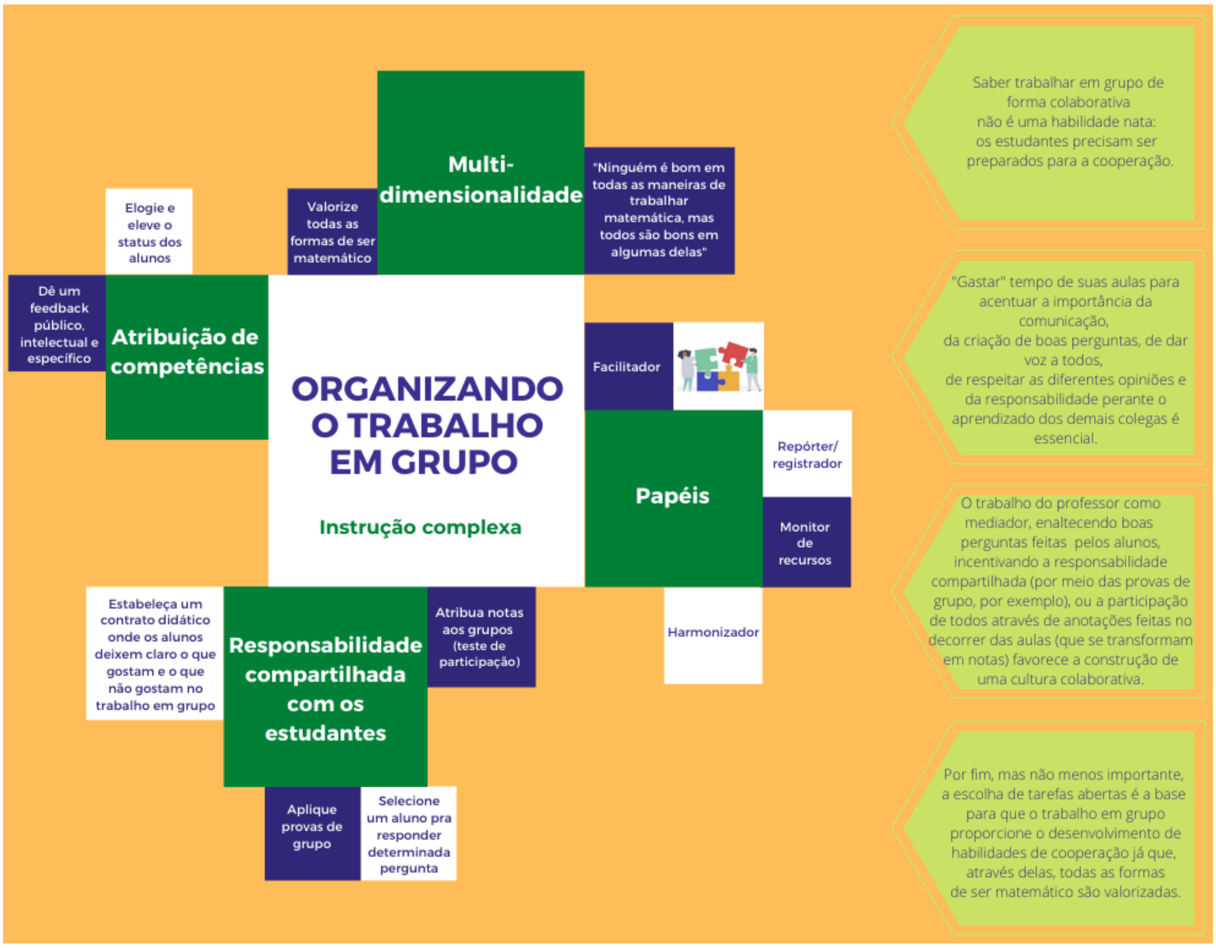
3.1 INFOGRÁFICOS, ESQUEMAS E GUIAS

Figura 47: Explorando as chaves para aprendizagem



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Figura 48: Instruções para o trabalho em grupo



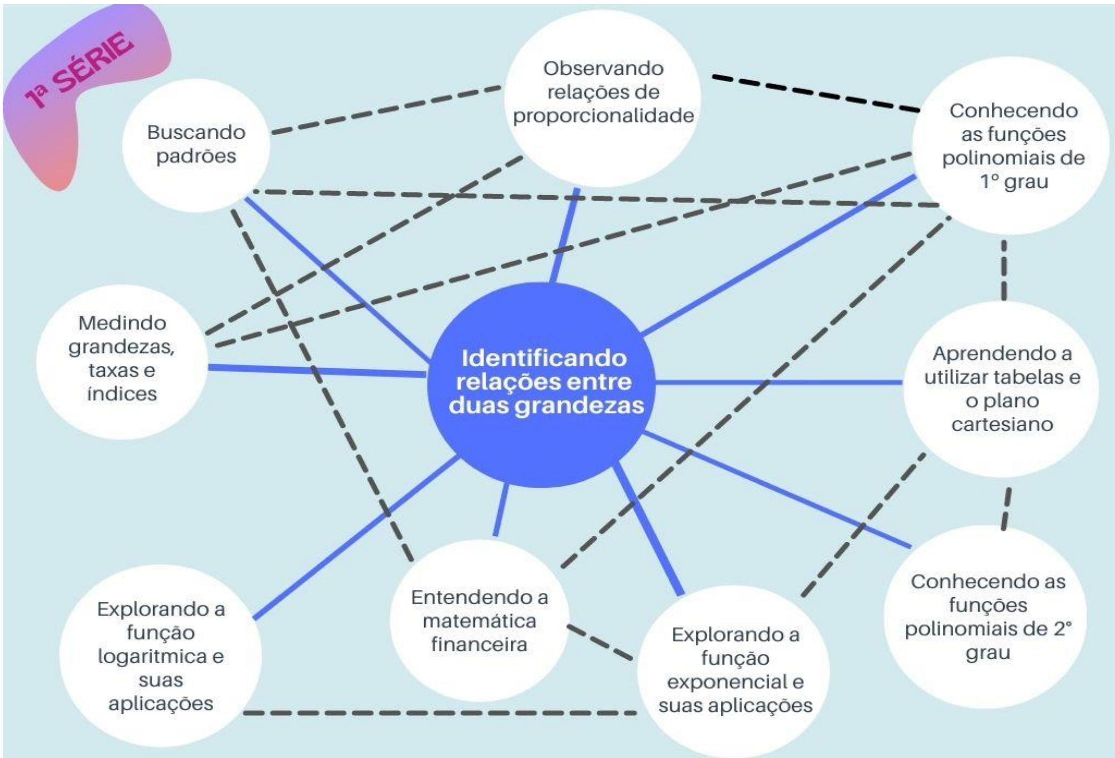
Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Figura 49: Avaliação para aprendizagem

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

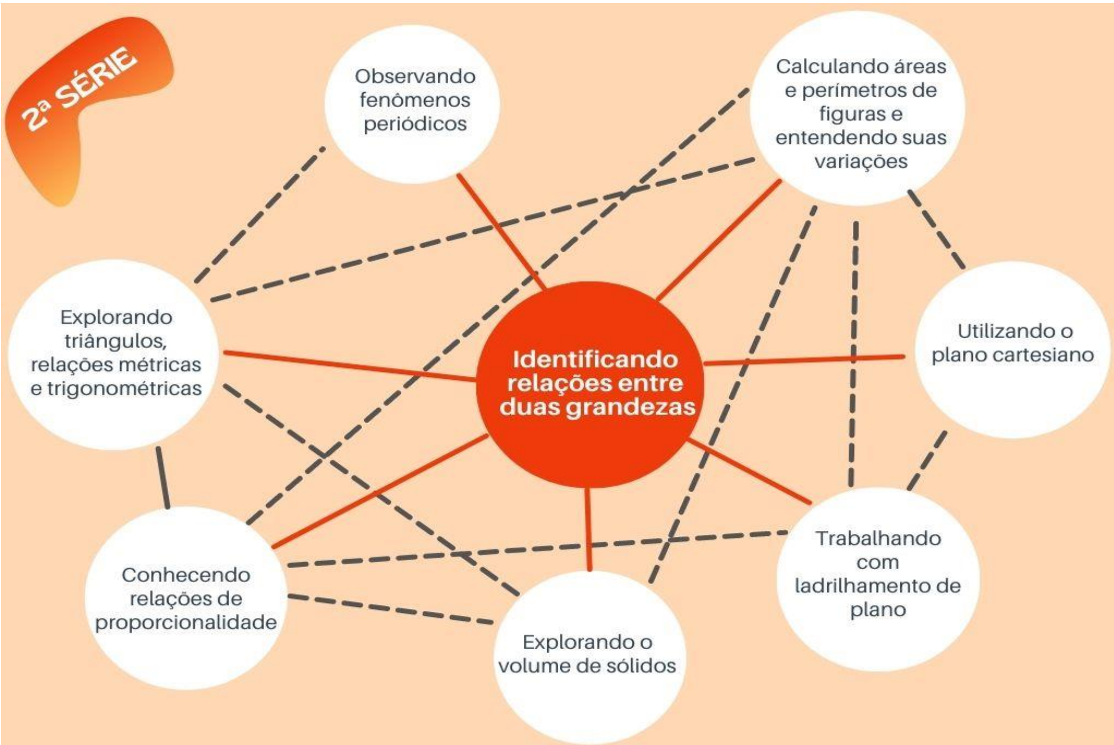
3.2 SUGESTÃO DE CURRÍCULO BASEADO EM EIXOS CENTRAIS

Figura 50: Grandes ideias para a 1ª série do Ensino Médio



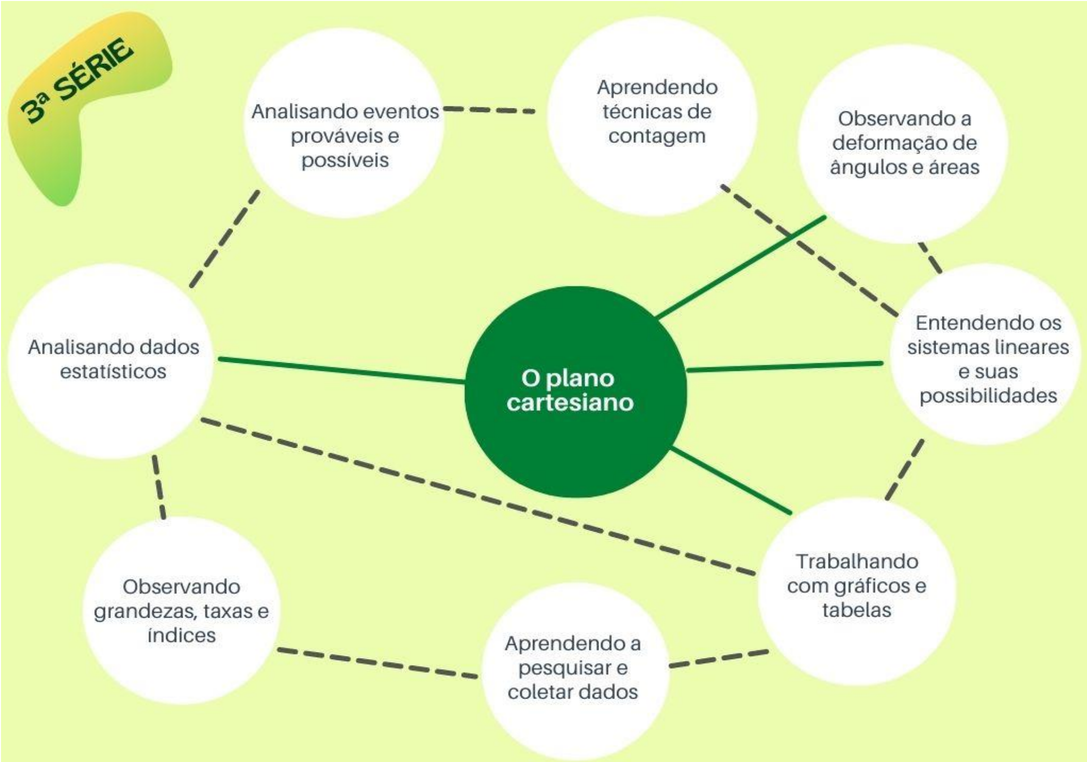
Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Figura 51: Grandes ideias para a 2ª série do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Figura 52: Grandes ideias para a 3ª série do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

3.2.1 *Sugestão de tarefas envolvendo os eixos centrais*

Nesse momento apresentaremos, para cada série do Ensino Médio, tarefas abertas e visuais e, junto delas, sugestões de organização de aulas baseadas no MPDMA. Junto a isso, uma análise a priori destas tarefas e algumas observações sobre as habilidades contidas na BNCC que podem ser exploradas a partir das mesmas.

5.2.1.1 Tarefa sugerida para a 1ª série

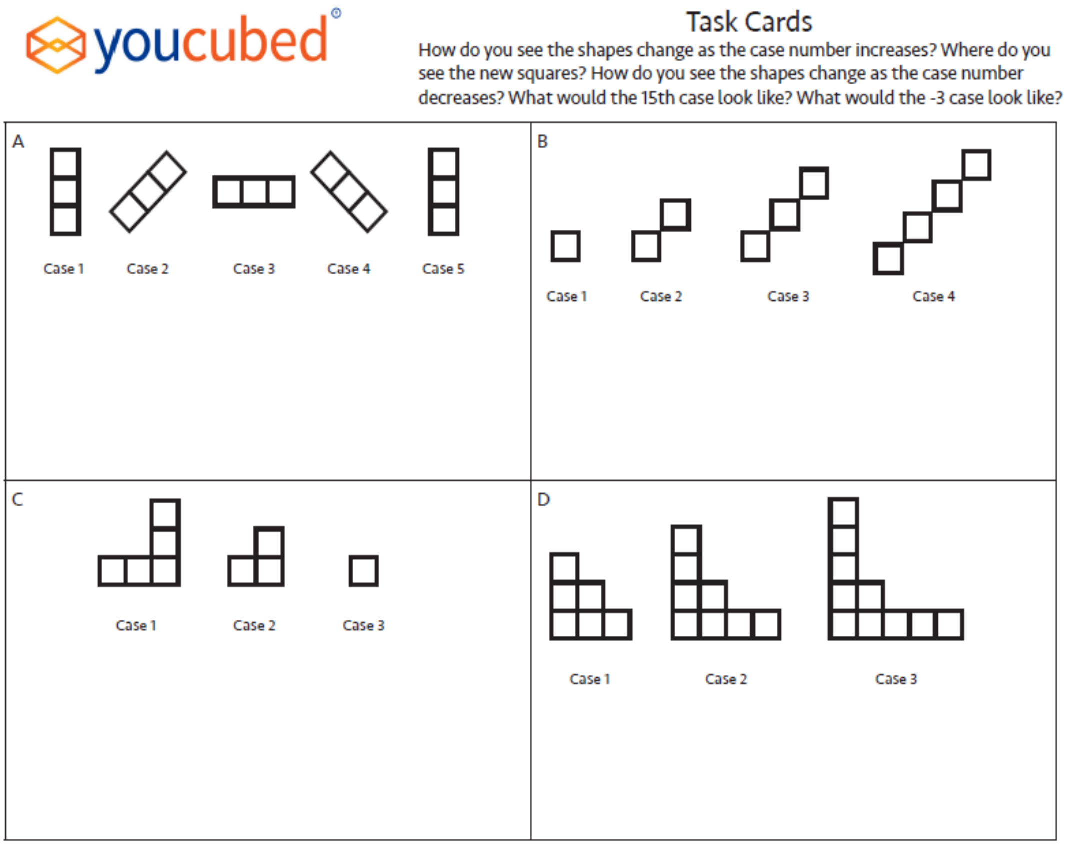
Tarefa sobre função polinomial do 1º grau (função afim)[48]

1º momento (Explorar parte 1 - tempo sugerido: 40 minutos)

A tarefa começa com a distribuição de um cartão de tarefa *(task card)* aos alunos, que devem estar reunidos em grupos. Além do cartão (figura 53), os alunos devem estar equipados com lápis/ canetas coloridas e uma cartolina.

[48] Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/09/Seeing-and-Describing-FInal-copy.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

Figura 53: Cartão de tarefa



Fonte: YouCubed[49]

Os seguintes questionamentos são feitos:

- Como você vê as formas mudando, conforme o número de caixas aumenta?
- Onde você vê os novos quadrados?
- Como você vê as formas mudando conforme o número do caso diminui?
- Qual seria o 15º caso?
- Qual seria a aparência do caso -3?

A partir de suas reflexões, os grupos devem preparar uma página que mostre, visualmente, como eles perceberam as mudanças nos padrões. Por fim, devem registrar tais representações em um cartaz. É importante deixar claro que os cartazes devem ser bem detalhados e explicados, para que os outros alunos possam entender o raciocínio ali expresso. Para tanto, a codificação dos padrões com cores é fundamental para os leitores compreenderem o trabalho.

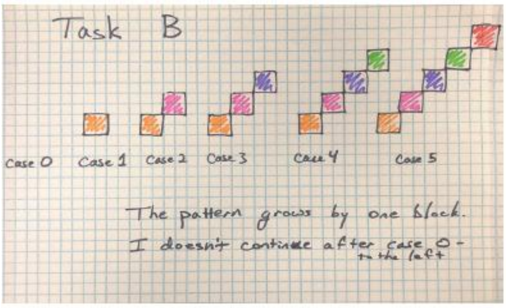
---

49 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/09/Seeing-and-Describing-FInal-copy.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

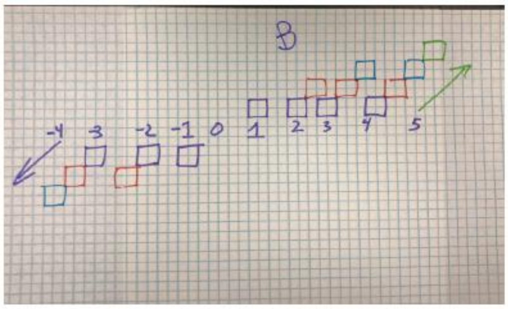
2º momento (Discutir - tempo sugerido: 15 minutos):

Expor os cartazes ao longo da sala e fazer um passeio com os alunos, verificando as diferentes representações feitas em cada um dos casos. A ideia é tornar perceptível as diversas maneiras de se ver um padrão. Alguns grupos podem ter decidido que o padrão simplesmente acaba, outros podem concluir que as peças giram ou se movem; este é um momento para introduzir as questões de domínio da função.

Figura 54: Padrões criados pelos grupos



In this example the domain is zero and the positive integers. (0, 1, 2, 3, 4, ...)



In this example the domain is all integers. (..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,...)

Fonte: YouCubed[50]

3º momento (Discutir - tempo sugerido: 10 minutos):

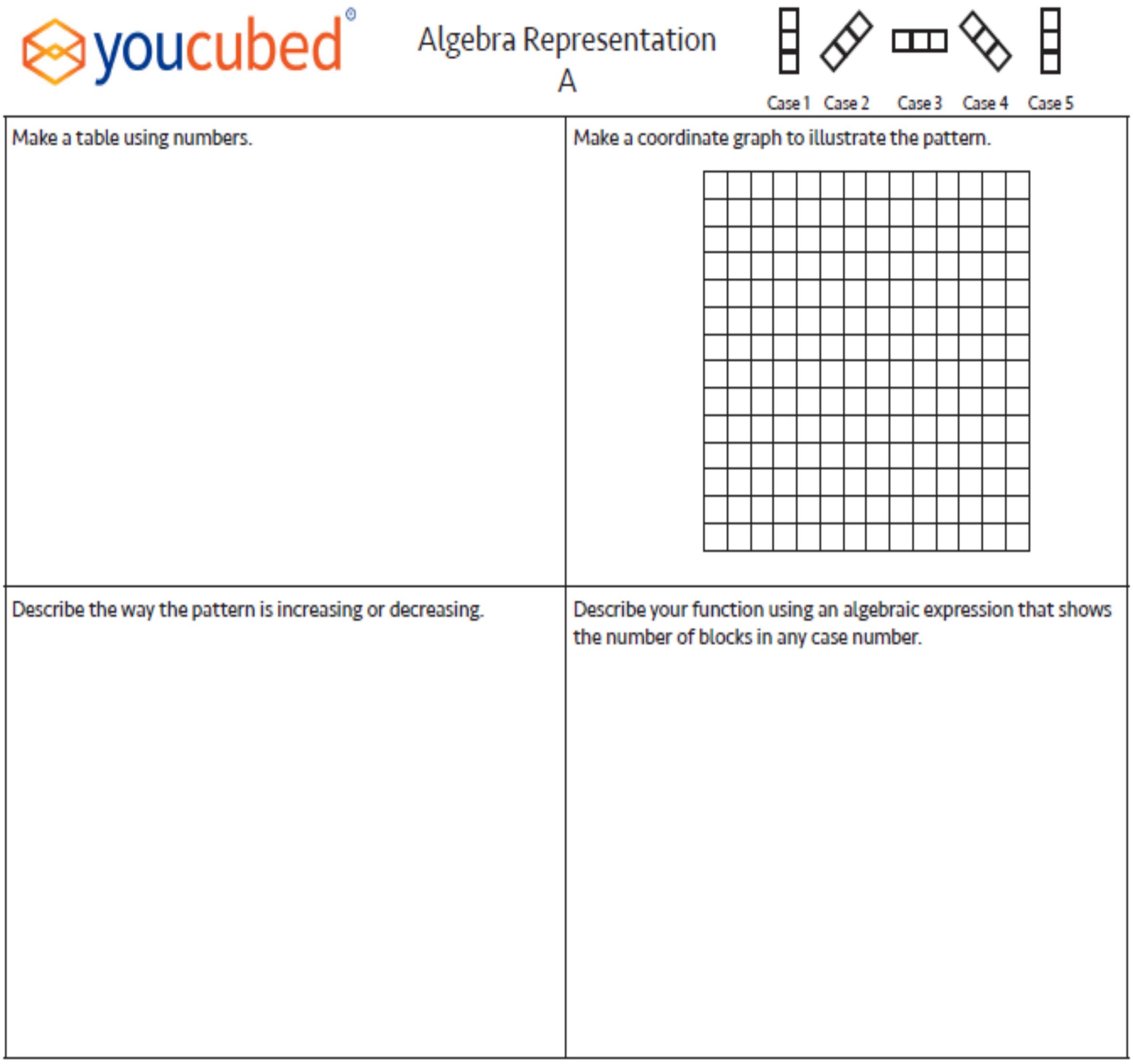
Questionar os alunos sobre o que aconteceria se os padrões fossem numéricos. Os padrões continuariam se comportando da mesma maneira? Deixar um tempo para reflexões no grupo, observando que esse é um momento propício para entender sobre o que significa uma função ser contínua com domínios diferentes.

4º momento (Explorar parte 2 - tempo sugerido: 30 minutos)

Os alunos receberão um material sobre a representação algébrica de cada um dos padrões, conforme a figura 55 (os demais padrões têm cartões semelhantes), e deverão estar munidos de lápis e canetas coloridas.

50 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/09/Seeing-and-Describing-FInal-copy.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

Figura 55: Cartão de representação algébrica - 1º padrão



Fonte: YouCubed[51]

Neste momento, deverão refletir sobre 4 representações muito importantes de cada função: tabela de valores, gráfico de coordenadas, descrição escrita e expressão algébrica. Para Boaler, esta é a hora em que os alunos se unem para resolver o desafio; não é um momento para ensinar diretamente como se deve fazer cada uma das representações, e sim incentivar a busca por conexões entre as diferentes representações através de codificação de cores, por exemplo. É um momento muito importante onde erros e aprendizados devem ser celebrados.

51 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/09/Seeing-and-Describing-FInal-copy.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

5º momento (Discutir - tempo sugerido: 10 minutos):

Discutir sobre as diferentes representações mostradas pelos trabalhos dos alunos. Além disso, podem ser retomados os trabalhos realizados na parte 1. Na primeira tarefa, foi solicitado aos alunos sobre o que aconteceria no caso 15 e no caso -3. Neste momento, depois que os estudantes generalizaram as funções, pode-se abrir uma discussão sobre como encontrar estes casos utilizando a tabela, o gráfico ou a representação algébrica, realizados na etapa anterior.

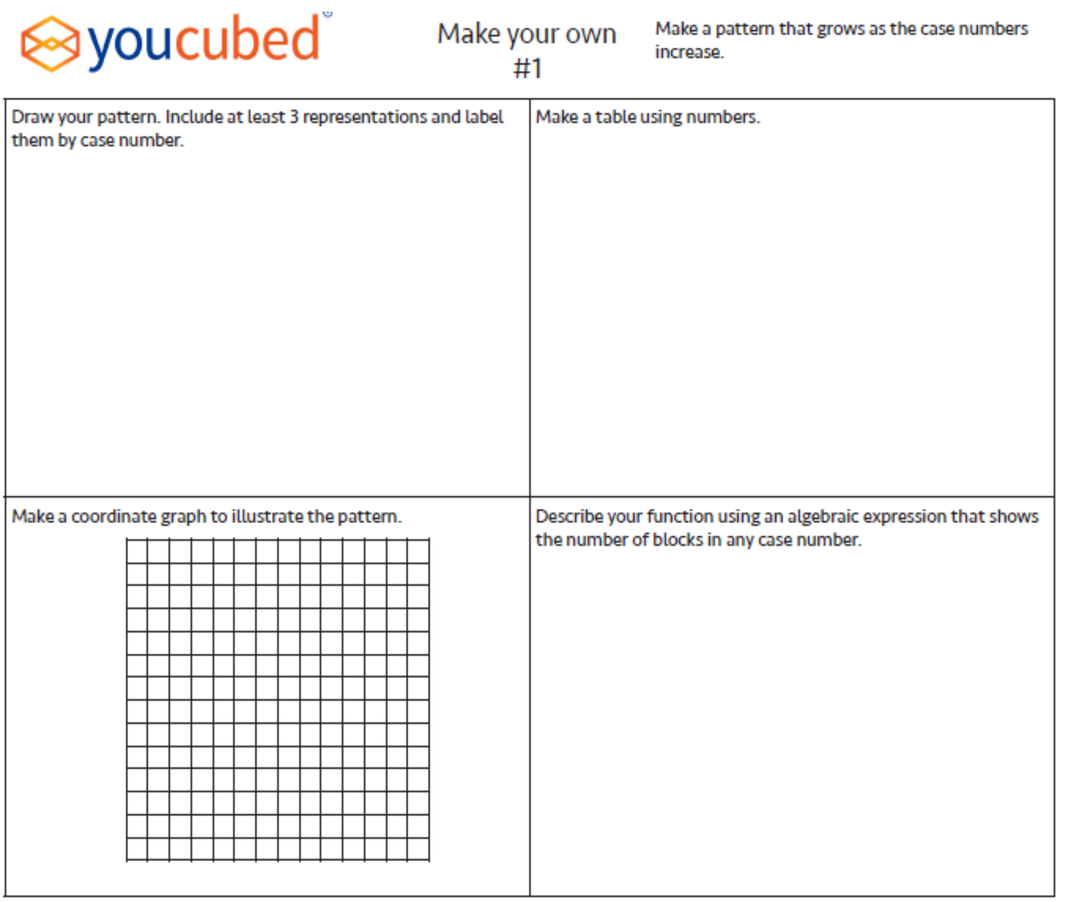
6º momento (Explorar parte 3 - tempo sugerido: 20 minutos)

Os alunos devem criar seus próprios padrões para atender a duas funções diferentes:

- Um padrão que cresce conforme o número de casos aumenta.
- Um padrão que fica menor conforme o número de casos aumenta.

Eles receberão um material, conforme imagem abaixo e, novamente, utilizarão lápis e canetas coloridas.

Figura 56: Cartão faça você mesmo – caso crescente


youcubed

Make your own #1

Make a pattern that grows as the case numbers increase.

Draw your pattern. Include at least 3 representations and label them by case number.

Make a table using numbers.

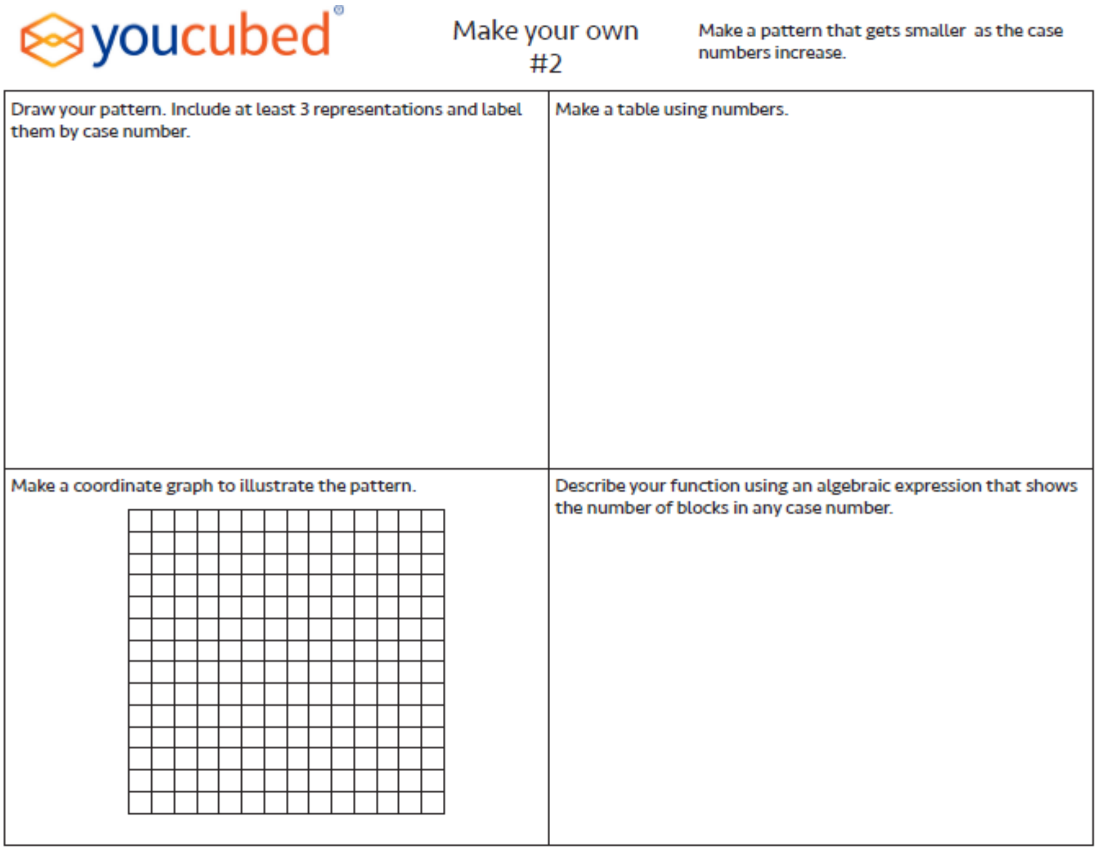
Make a coordinate graph to illustrate the pattern.

Describe your function using an algebraic expression that shows the number of blocks in any case number.

Fonte: YouCubed[52]

52

Figura 57: Cartão faça você mesmo – caso decrescente



Fonte: Youcubed[53]

7º momento (Discutir - tempo sugerido: 20 minutos):

Discutir sobre os padrões e representações produzidas pelos estudantes.

Boaler sugere que, neste momento, o professor facilite a discussão sobre os trabalhos, fazendo as seguintes indagações:

- Os padrões criados são todos funções? Como você sabe?
- Todas as funções são afins? Como você sabe se são afins ou não?

Ainda, observa que, em aulas futuras, os alunos verão padrões de crescimento que não são lineares (uma exponencial, por exemplo); se alguns alunos construírem padrões de crescimento que não sejam lineares, é um ótimo momento para discutir a diferença.

8º momento (Refletir - tempo sugerido: 5 minutos):

Este momento é reservado para que os alunos reflitam em que situações as funções afins são úteis. Boaler sugere que os alunos busquem aplicações da função afim em jornais, revistas

53 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/09/Seeing-and-Describing-FInal-copy.pdf>. Acesso em 14 out. 2020.

e notícias na internet. Pode-se também ser utilizado aqui, um cartão de saída, um formulário online, uma rubrica, dentre outros.

Algumas observações sobre esta tarefa:

- A proposta encontrada na íntegra no YouCubed sugere que a atividade seja iniciada com a reprodução de um vídeo curto sobre a plasticidade cerebral ou sobre a importância dos erros na aprendizagem, dando ênfase às chaves I e II.
- O tempo sugerido para cada momento pode variar de acordo com o perfil das turmas, a distribuição das aulas e as intenções do professor. Se quisermos, entretanto, utilizar como base o tempo sugerido por Boaler (indicado anteriormente), ao transportarmos esta proposta de tarefa segundo o cronograma do novo Ensino Médio na Bahia, percebemos que ela pode ser trabalhada no decorrer de duas semanas. Em uma situação hipotética, onde as duas aulas de matemática semanais sejam conjugadas, é possível fazer os primeiros cinco momentos em uma semana e os demais momentos na semana seguinte.
- Esta tarefa permite uma série de possibilidades: se o período de aplicação for estendido, ela pode ser utilizada para entender as progressões aritméticas e relacioná-las com funções polinomiais do 1º grau de domínio natural; no momento de reflexão sobre a utilidade das funções trabalhadas, podem ser problematizadas diversas situações sobre custo e receita de empresas ou salários comissionados (envolvendo conceitos financeiros), sobre velocidade média (envolvendo conceitos da física), sobre relações percentuais, dentre outros.
- Diversos eixos do currículo proposto estão compreendidos nesta tarefa, a saber: padrões de crescimento e decrescimento; relações entre duas grandezas; funções polinomiais do 1º grau; plano cartesiano; grandezas, taxas e medidas (no momento em que os alunos são convidados a explorar jornais e notícias); e - caso surja no momento da criação de padrões livres - noções iniciais de crescimento exponencial ou quadrático. Ainda, permite reflexões básicas sobre rotações, angulações e espelhamentos.
- O trabalho em grupo e a colaboração (chave VI) são utilizados para a otimização da tarefa bem como para permitir que os alunos não desistam frente às dificuldades (chave II); com a ajuda uns dos outros e a junção de várias ideias, é possível criar um ambiente plural e de equidade. Além disso, todo o processo de aprendizagem inicia através do próprio trabalho dos alunos: eles precisam pensar sobre os padrões, estabelecer relações, explanar as ideias para os demais colegas e, posteriormente, observar e refletir sobre as construções dos outros grupos (chave III). A mediação do professor nos momentos de discussão é de extrema importância

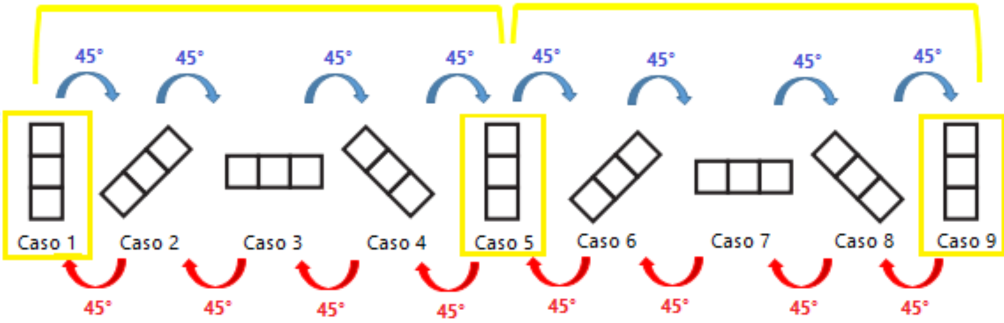
nessa tarefa, pois é capaz de dar ênfase ao conhecimento gerado pelos próprios estudantes e conduzir o processo de aprendizagem onde o aluno é protagonista.

- A todo o momento, os estudantes são incentivados a utilizar cores e representações visuais para explicar os padrões, reafirmando a importância destes estímulos na aprendizagem. Complementarmente, além das representações visuais, as múltiplas faces da matemática são exploradas, através de tabelas, escritas e representações algébricas (chave IV).
- Os diversos momentos permitem a prática do esforço (chave II) como primordial para a aprendizagem matemática - já que a tarefa não é precedida por uma explanação teórica de função e suas representações; bem como deixam claras a multiplicidade, flexibilidade e profundidade da matemática (chaves IV e V).
- É uma tarefa de piso baixo teto alto (chave V) pois abre espaço para os alunos criarem seus próprios padrões. Ainda, permite aos estudantes perceberem a utilidade da matemática na vida real quando partem em busca de indícios das funções trabalhadas em revistas, jornais e internet.
- Trata-se de uma tarefa de praxeologia regional, envolvendo diversas técnicas dentro da teoria da álgebra. Entretanto, de acordo com o tipo de abordagem do professor, a tarefa pode apresentar praxeologia global, conforme exemplos citados anteriormente. Nota-se como o *lôgos* e o *praxis* são trabalhados durante todo o processo: os alunos não aprendem simplesmente a construir um gráfico de função a partir de sua lei ou de pares ordenados, não memorizam uma fórmula para escrever a expressão algébrica de um padrão de crescimento linear; as técnicas utilizadas são construídas conforme as tecnologias e teorias vão sendo aprofundadas (chave III). Oportuniza-se uma aprendizagem completa, em todos os níveis praxeológicos.
- Com a necessidade de refletir sobre possíveis soluções apresentadas pelos alunos nesta tarefa, mapeando os conhecimentos envolvidos, apresentamos agora uma análise a priori da tarefa sugerida.

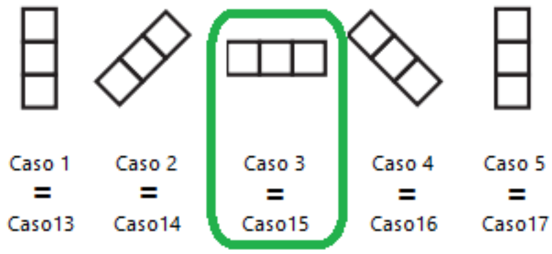
Quadro 17: Análise a priori tarefa 1ª série

Tarefa 1ª série **Momentos 1, 2 e 3**
Padrão A • Conforme os casos crescem, o bloco inicialmente na posição vertical (que forma 90° com o solo), gira 45° no sentido horário. A cada 4 giros, o bloco retorna à posição vertical. O número de quadradinhos, em cada caso, se mantém. Logo a sequência é (3, 3, 3, 3, ...)

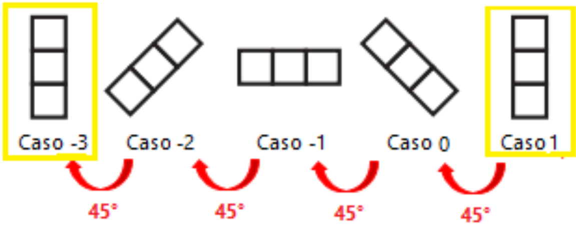
- Conforme os casos decrescem, o bloco gira 45° no sentido anti-horário, novamente retornando à posição observada inicialmente a cada 4 giros. Da mesma forma que a observação feita anteriormente, o número de quadradinhos, em cada caso, se mantém. Veja:



- Como já mencionado, a cada 4 giros o bloco volta à posição vertical. Logo, nas posições 1, 5, 9, 13, 17, ... ele estará na vertical. Como queremos saber a posição do caso 15, basta verificarmos que ele se assemelha ao caso 3, pois está à duas rotações do caso vertical. Veja:

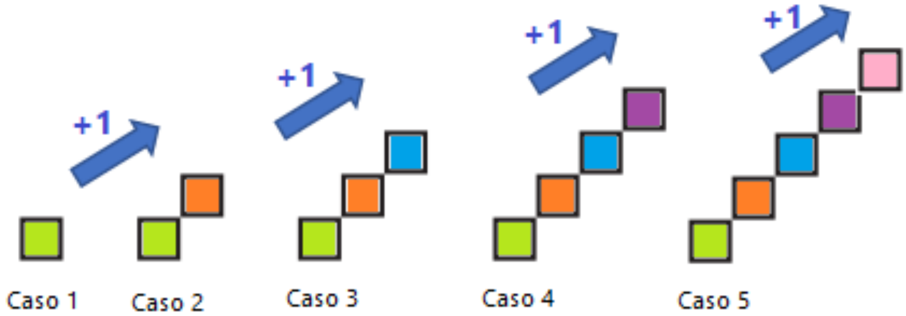


- Da mesma maneira, podemos verificar o que acontece à esquerda do caso 1, fazendo rotações de 45° no sentido anti-horário.

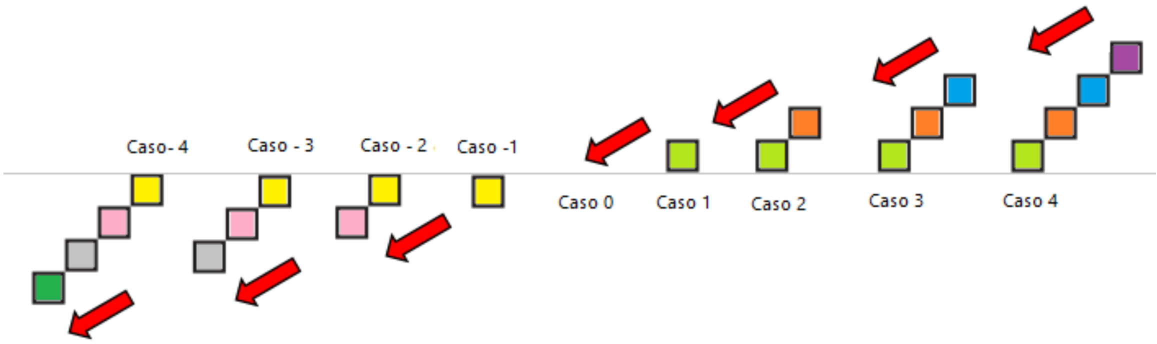


Padrão B

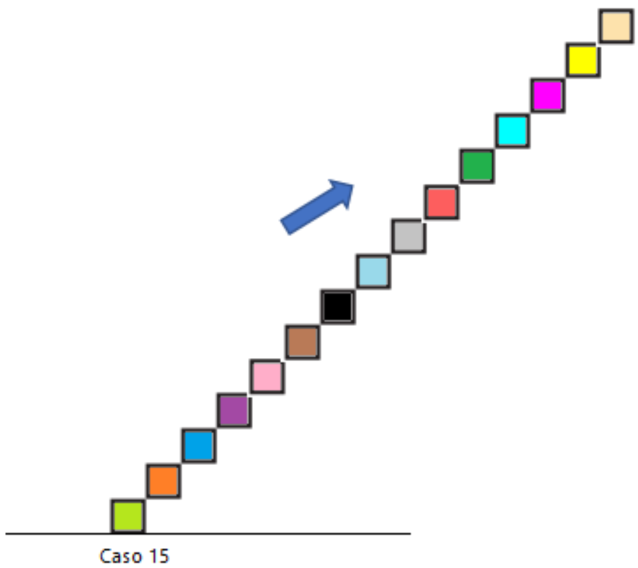
- Conforme os casos crescem, um quadradinho é acrescentado no canto superior direito do último quadrado do caso anterior. No caso 1, há 1 quadradinho, no caso 2 há 2 quadradinhos, no caso 3 há 3 quadradinhos e assim sucessivamente. A sequência encontrada é (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)



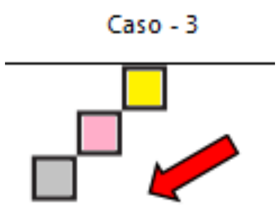
- Conforme os casos decrescem, fazemos duas análises diferentes: *do n-ésimo caso até o caso 1, conforme cada caso decresce, é retirado um quadradinho do canto superior direito da figura do caso sucessor; ao chegar no caso 1, o caso anterior a ele (caso zero) não tem nenhum quadradinho; *se continuarmos a observar os casos no "ambiente negativo", podemos considerar que agora os quadradinhos estão abaixo da linha imaginária em que o caso 1 se iniciou, sendo assim, a cada caso à esquerda de zero, acrescenta-se um quadradinho no canto inferior esquerdo da figura anterior.



- Como já mencionado, o número de quadradinhos, nos casos positivos, é igual ao número do próprio caso. Sendo assim, no caso 15, há 15 quadradinhos colocados um sobre o outro na diagonal de forma crescente, conforme figura abaixo.

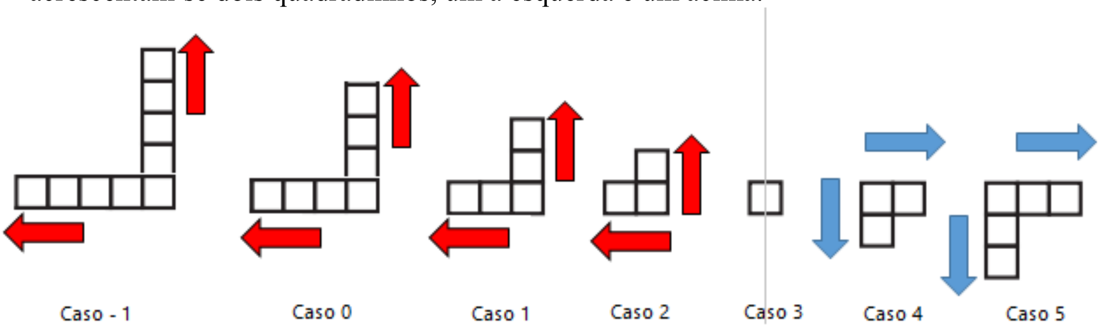


- De acordo com a análise feita no segundo item, a respeito do decrescimento do padrão, vemos que o caso – 3 é da seguinte forma:

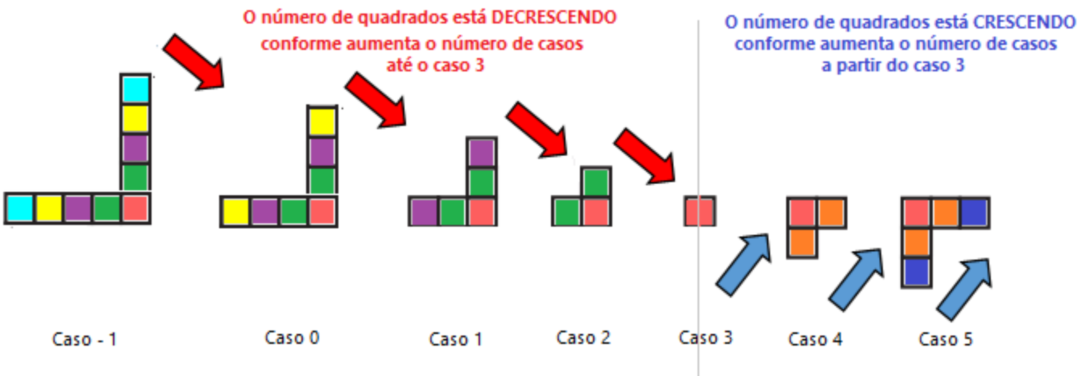


Padrão C

- O caso 3 funciona como um eixo de espelhamento: do caso 3 para frente (olhando a sequência de forma crescente), a cada novo caso, acrescentam-se dois quadradinhos, um à direita e um abaixo; do caso 3 para trás (olhando a sequência de forma decrescente, a cada novo caso, acrescentam-se dois quadradinhos, um à esquerda e um acima.



Temos, assim que a sequência é decrescente até o caso 3 e crescente a partir do caso 3, sempre acrescentando-se ou somando-se 2 quadradinhos.



Utilizando o sinal negativo para diferenciar as figuras antes do caso 3 das figuras depois do caso 3, temos: (...-9, -7,-5, -3, 1, 3, 5, 7, 9, ...)

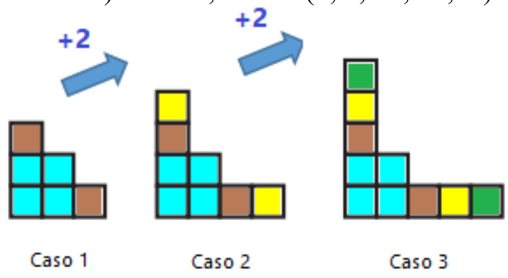
- Se olharmos a sequência de forma crescente (do maior caso para o menor), vemos que o número de quadradinhos decresce até o caso 3 e depois cresce a partir do caso 3.

- A partir da análise feita anteriormente, vejamos que o caso 15 é composto por 1 quadradinho (do caso 3) acrescentado de $(15-3).2=24$ quadradinhos, sendo 12 à direita e 12 abaixo do quadradinho inicial. Note que o cálculo $(15-3)$ se refere à quantos casos há entre o caso 3 e o caso 15 e a multiplicação por 2 foi feita já que, a cada caso, são acrescentados 2 quadradinhos. Sendo assim, o caso 15 é composto por $1+(15-3).2=25$ quadradinhos.

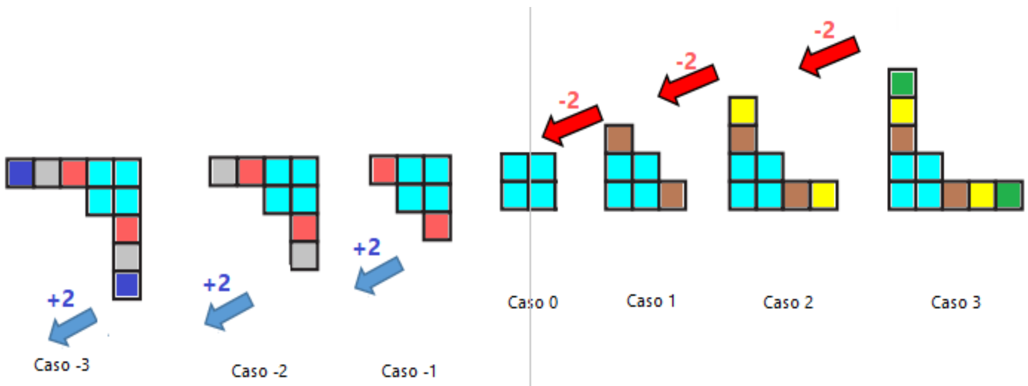
- Da mesma forma do caso 15, o caso – 3 é composto por 1 quadradinho (do caso 3) acrescentado de $|-3-3|.2=12$ quadradinhos, sendo 6 à esquerda e 6 acima do quadradinho inicial. Sendo assim, o caso - 3 é composto por $1+|-3-3|.2=13$ quadradinhos. Na sequência, utilizando o sinal negativo, temos que o caso -3 corresponde ao número -13.

Padrão D

- A sequência inicia, no caso 1, com 6 quadradinhos e, a cada novo caso, a sequência aumenta em 2 quadradinhos (um colocado sobre o quadrado superior esquerdo e outro colocado ao lado direito do quadrado inferior direito). Temos, assim: (6, 8, 10, 12, ...)



- Conforme os casos decrescem, a quantidade de quadrados também decresce, de 2 em 2 até o caso 0. Entretanto, nos casos negativos, conforme olhamos a sequência de maneira decrescente (caso -1, caso -2, caso -3, ...) o número de quadradinhos aumenta de dois em dois.

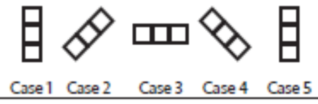


- A partir desta análise temos que o caso 15 é composto por 6 quadradinhos (do caso 1) acrescentados de $(15 - 1).2 = 28$ quadradinhos, sendo 14 à direita do quadrado inferior direito e 14 acima do quadrado superior esquerdo da forma inicial (caso 1).
  Note que o cálculo $(15 - 1)$ se refere à quantos casos há entre o caso 1 e o caso 15 e a multiplicação por 2 foi feita já que, a cada caso, são acrescentados 2 quadradinhos. Sendo assim, o caso 15 é composto por $6 + (15 - 1).2 = 34$ quadradinhos.

- Como já temos o caso 3 pronto (dado pelo exercício) e o caso – 3 nada mais é do que uma rotação anti-horária dessa formação (rotação de 180°), temos que o caso – 3 é composto pelo mesmo número de quadradinhos do caso 3, a saber, 10. Se considerarmos a figura rotacionada como negativa, o caso -3 é representado pelo número -10.

Momentos 4 e 5

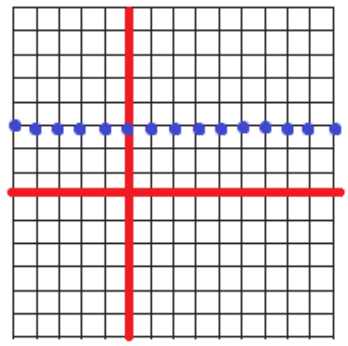
Representação Algébrica
A



Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
1	3
2	3
3	3
4	3
5	3

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva de que maneira o padrão está crescendo ou decrescendo

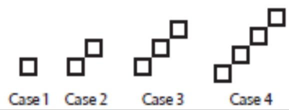
Embora as peças sofram rotações, o número de quadrados (3) que as formam se mantém constante, independente do caso.

Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

$$y = 3$$

Onde y é o número de quadradinhos.

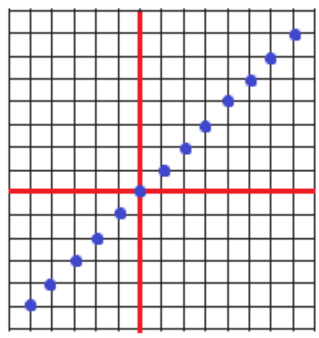
Representação Algébrica
B



Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva de que maneira o padrão está crescendo ou decrescendo

A cada novo caso, o número de quadradinhos cresce em uma unidade.

Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

$$y = x$$

Onde y é o número de quadradinhos e x é.o caso youcubed®

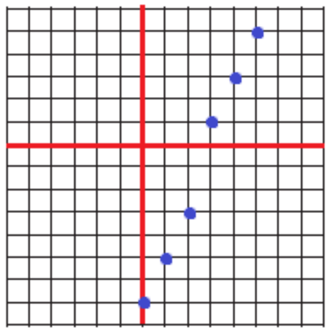
Representação Algébrica
C

Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
-1	-9
0	-7
1	-5
2	-3
3	1
4	3
5	5

Obs.: embora o número de quadradinhos seja sempre positivo, utilizamos o sinal de negativo para representar a rotação da figura.

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva de que maneira o padrão está crescendo ou decrescendo

O caso 3 divide a sequência em duas: do caso três para frente, o número de blocos aumenta de dois em dois, do caso 3 para trás, o número de blocos também aumenta de dois em dois.

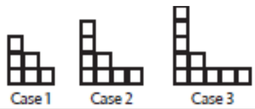
Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

Para $x < 3$, temos $y = 2x - 7$
Para $x \geq 3$, temos $y = 2x - 5$

Onde y é o número de quadradinhos e x é.o caso

youcubed®

Representação Algébrica
D

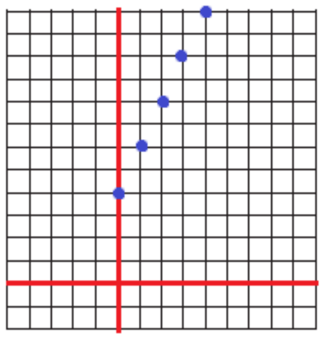


Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
-3	-10
-2	-8
-1	-6
0	4
1	6
2	8
3	10

Obs.: O número de quadradinhos sempre será positivo. Entrentanto, utilizamos o sinal negativo para representar a rotação das peças.

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva de que maneira o padrão está crescendo ou decrescendo

A sequência cresce, a cada novo caso, de duas em duas unidades, até o caso -1. A partir do caso zero, que inicia com 4 unidades, novamente a sequência cresce de duas em duas unidades.

Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

Para $x < 0$, temos $y = 2x - 4$
Para $x \geq 0$, temos $y = 2x + 4$

Onde y é o número de quadradinhos e x é.o caso

Momentos 6 e 7

youcubed® Faça você mesmo #1

Crie um padrão que cresça conforme o número de casos aumenta

Desenhe seu padrão. Inclua no mínimo 3 reprsentações e identifique-as de acordo com o número do caso.

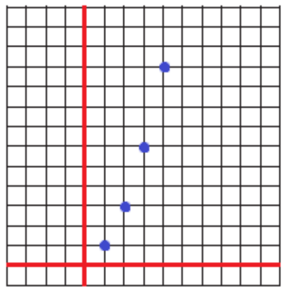
Caso 1 Caso 2 Caso 3 Caso 4

Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

+2 +3 +4 +5

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_2 &= a_1 + 2\\
a_3 &= a_2 + 3\\
+\quad a_4 &= a_3 + 4\\
a_5 &= a_4 + 5\\
&\ldots\ldots\\
a_n &= a_{n-1} + n
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 1 + 2 + \cdots + n$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

soma de PA

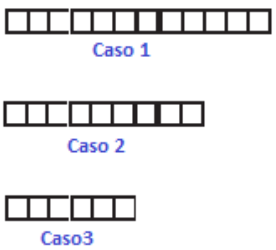
$$\Rightarrow y = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow y = \frac{n^2+n}{2}}$$

youcubed® Faça você mesmo #2

Crie um padrão que decresça conforme o número de casos aumenta.

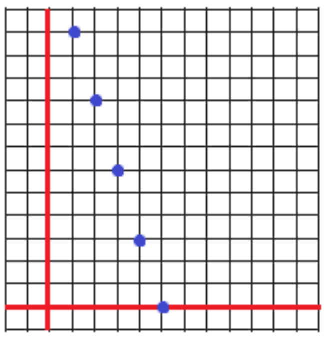
Desenhe seu padrão. Inclua no mínimo 3 reprsentações e identifique-as de acordo com o número do caso.



Faça uma tabela usando números

Caso	Número de quadradinhos
1	12
2	9
3	6
4	3
5	0

Faça um gráfico para ilustrar o padrão



Descreva sua função usando uma expressão algébrica que mostre o número de blocos em cada caso numérico

$$y = -3x + 15$$

Onde y representa o número de blocos e x o numero do caso.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

- A partir das observações redigidas e da análise a priori realizada, percebe-se que as seguintes habilidades da BNCC podem ser desenvolvidas a partir da exploração desta tarefa:

Quadro 18: Habilidades envolvidas na tarefa 1ª série

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: Extraído de Brasil, 2018

5.2.2.2 Tarefa sugerida para a 2ª série

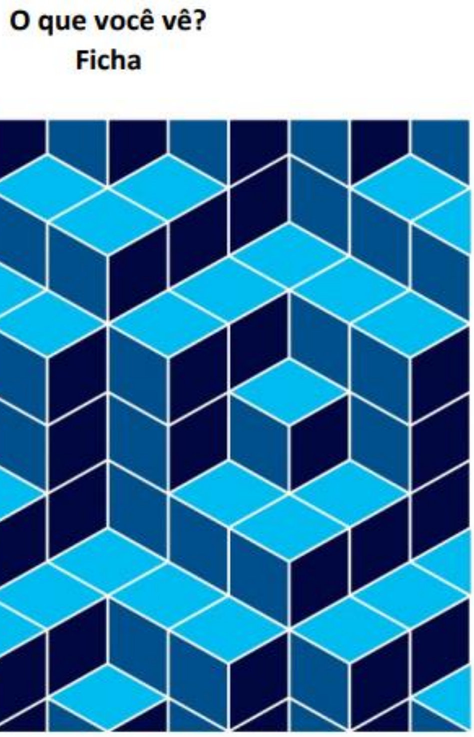
Tarefa sobre área e volume e suas relações com as funções afim, quadrática e cúbica[54]

1º momento (Lançar- tempo sugerido: 10 minutos)

Pedir para que os alunos se organizem em grupos de quatro componentes. Projetar no quadro a ficha "O que você vê?" e entregar duas cópias impressas para cada grupo, de forma que os alunos, dois a dois, possam observar a imagem mais de perto. Iniciar uma discussão questionando: "O que vocês vêem?" (este é um momento que deve permitir aos alunos pensar de forma criativa, logo, é importante aceitar todas as respostas oferecidas). Depois de ouvir as respostas, deve-se questionar: "Quantos cubos vocês vêem?" (dá-se um tempo para que os alunos façam a contagem de maneira individual, e depois compartilhem seu raciocínio com o grupo). Posteriormente, os grupos explanam sua contagem para a turma. Poderá haver números diferentes de cubos e ideias discordantes; neste momento, os estudantes são convidados a explicar seu raciocínio. É importante deixar claro que há diferentes respostas porque a pergunta foi aberta, sem muita especificidade, portanto, diversas podem ser as soluções.

[54] Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

Figura 58: Ficha cubos



Fonte: YouCubed[55]

2º momento (Explorar parte 1- tempo sugerido: 30+ minutos)

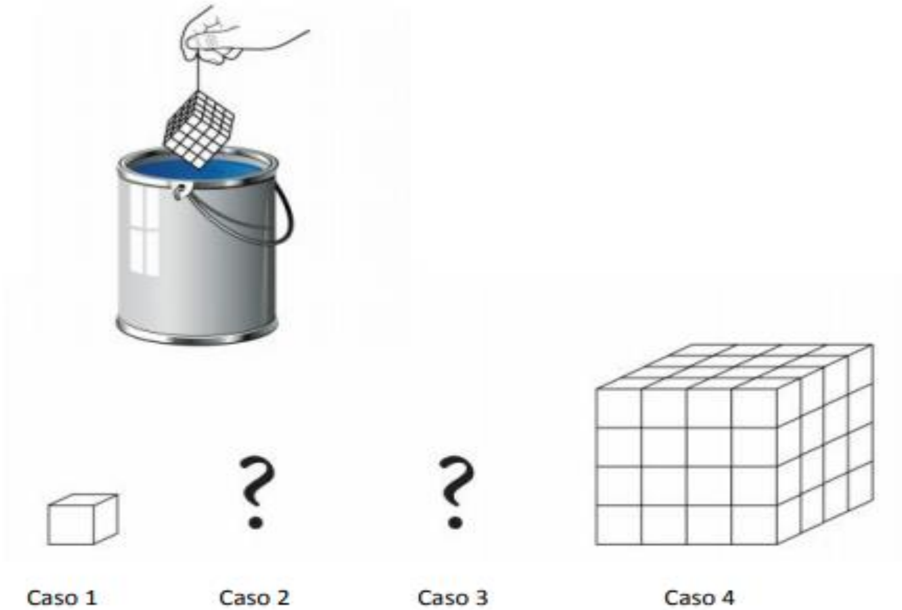
Para esse momento, é necessário que os alunos recebam a ficha “cubo pintado”, cubos de açúcar (ou de outro material), cartolina (ou uma toalha para colocar sobre as mesas); marcadores, lápis e canetas coloridas e um caderno para anotações.

Iniciar este momento falando sobre como a próxima tarefa também envolve cubos e destacando que as discussões anteriores sobre os diferentes modos de perceber um padrão serão úteis na realização desta nova etapa. Mostrar os materiais que estão disponíveis para esse momento de exploração e incentivar os alunos a utilizarem os cubos de açúcar e os marcadores para visualizar o que ocorre. Além disso, é importante estimular a criação de códigos entre as cores pintadas no cubo e as anotações no caderno, pois isso proporciona melhor visualização dos padrões e das relações entre o visual e o simbólico.

55 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

Figura 59: Ficha cubo pintado

Cubo Pintado
Ficha



Instruções da Atividade

Imagine que nós pintamos de azul um cubo de 4 x 4 x 4 em todos os lados.

Quantos dos cubos pequenos não foram pintados?
Quantos têm 1 face azul?
Quantos têm 2 faces azuis?
Quantos têm 3 faces azuis?

Quantas unidades do cubo não têm faces pintadas, 1, 2, ou 3 faces pintadas num cubo de qualquer tamanho? Pense de forma visual.

Fonte: Youcubed[56]

Inúmeras possibilidades podem surgir na exploração do cubo pintado. A mediação do professor nesse momento é importante para lembrar os alunos de registrarem o que pensam, discutem e descobrem, organizando tais informações em uma tabela, por exemplo. Essa etapa exige bastante tempo e é importante que os estudantes tenham este momento de explorar, pintar e contar os cubos com tranquilidade. Quando a maioria dos grupos estiverem no fim do processo de investigação do cubo 4x4x4, solicitar que pensem sobre pelo menos dois cubos de outros tamanhos (2x2x2; 3x3x3; 5x5x5, etc).

---

56 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

3º momento (Discutir - tempo sugerido: 20 minutos)

Escrever a tabela abaixo no quadro e pedir aos alunos que mostrem suas descobertas e registrem-nas nesta tabela. Os alunos devem sentir-se livres para inserir na tabela as informações encontradas, bem como para acrescentar linhas e colunas caso haja necessidade. Eles devem defender suas ideias, explicando seu raciocínio através de representações visuais, escritas, verbais, dentre outras. As divergências de respostas devem ser escritas em cores diferentes e discutidas até que se chegue a uma conclusão a seu respeito.

Quadro 19: Observações padrão de acordo com o número de cubos

	Tamanho do cubo					
# de faces pintadas num cubo	1x1x1	2x2x2	3x3x3	4x4x4	5x5x5	nxnxn
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte: YouCubed[57]

Este é um momento, ainda, de estabelecer conexões entre as representações visuais e as expressões criadas para um cubo de qualquer tamanho ($n \times n \times n$). "Como os números nas expressões estão relacionados com o cubo?" As respostas para essa pergunta podem levar a diversas direções, sendo assim, é fundamental o papel do professor em conduzir o diálogo de forma a criar uma cultura de aprendizado com os erros, com a intuição, com a colaboração, ou seja, um ambiente de aprendizado mútuo enquanto comunidade.

4º momento (Explorar parte 2 - tempo sugerido: 15 minutos)

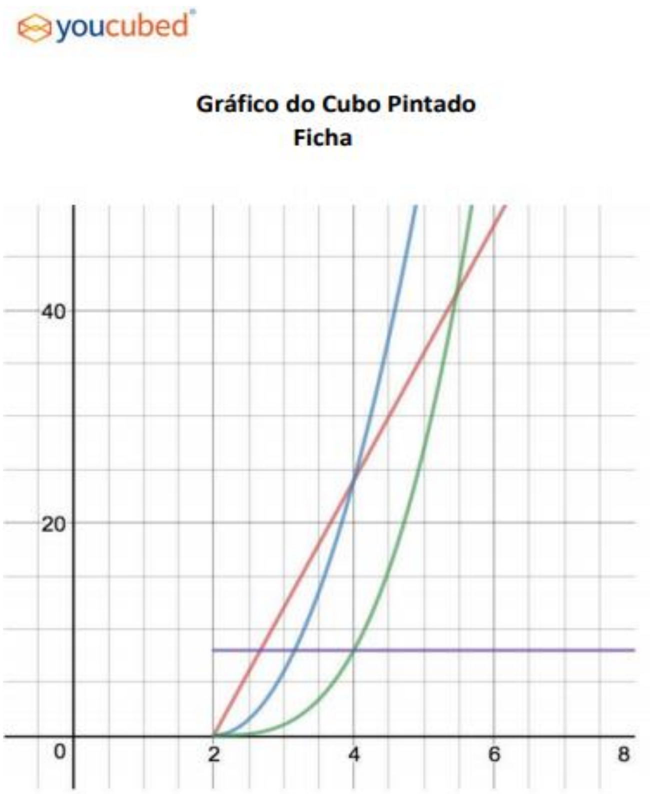
Entregar duas cópias da ficha "Gráfico do cubo pintado" para cada grupo. Pedir para que seja identificado o gráfico que representa cada padrão ou expressão anteriormente encontrada. É importante estimular o uso dos cubos de arestas 3, 4 e 5 construídos com os cubinhos de açúcar para que sejam estabelecidas conexões visuais entre os objetos e os gráficos.

---

57 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

Observação: o material do YouCubed apresenta discussões sobre domínio de função apenas no momento 5. Entretanto, não há menção sobre diferença de domínio entre as funções criadas na primeira exploração (naturais maiores ou iguais a dois) e o domínio gráficos apresentados aqui (reais maiores ou iguais a dois). Uma alternativa é, primeiramente, utilizar um gráfico apenas com os pontos gerados por abscissas de valor natural maior ou igual a dois e, posteriormente, "ligar" estes pontos, explorando o fato de que os cubos podem ter qualquer tamanho de aresta dentro do domínio dos reais maiores ou iguais a dois, ou seja, os casos não se aplicam somente a cubos com arestas de tamanho natural.

Figura 60: Ficha gráfico do cubo pintado



Fonte: YouCubed[58]

5º momento (Discutir - tempo sugerido: 20 minutos)

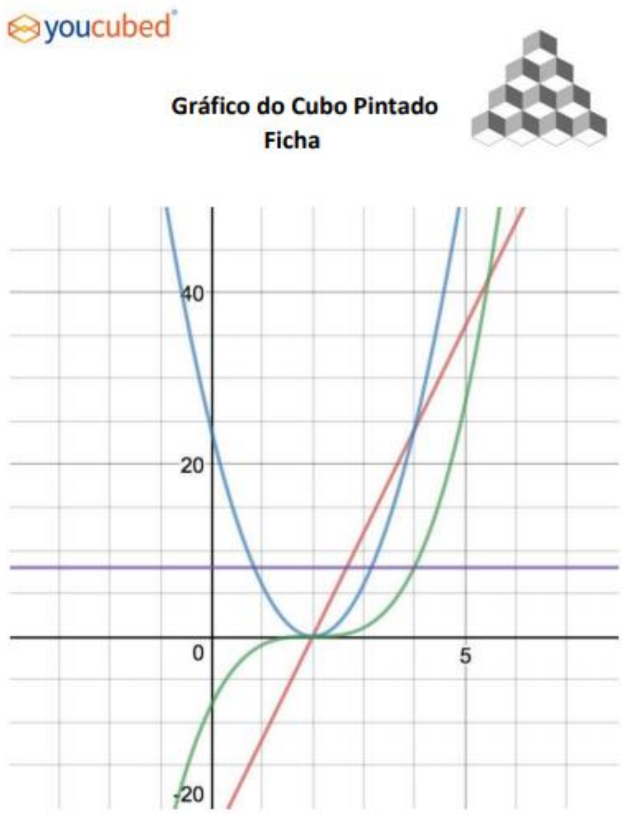
Convidar os alunos a mostrar estratégias para estabelecer conexões entre as diferentes representações vistas durante a tarefa. É um momento propício, também, para instigar a reflexão sobre o porquê cada função recebe este nome e qual é a relação do nome com sua representação visual. Além disso, pode-se perguntar: "O que vai acontecer com esses gráficos se o tamanho do cubo for aumentando? Como isso está relacionado à representação visual? Qual padrão está

58 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

crescendo mais rápido que os outros? Por que? O que estes pontos de intersecção significam? [...]"

Para enriquecer as discussões sobre as funções polinomiais do 1º, 2º e 3º grau (afim, quadrática, cúbica), uma nova ficha é entregue aos alunos, agora com os três gráficos com domínio real.

Figura 61: Ficha gráfico cubo pintado - domínio real



Fonte: YouCubed[59]

A partir dele, é possível fazer novas perguntas, guiando as reflexões para um momento conclusivo: O que há de diferente entre os gráficos das duas fichas? "Por que na ficha de um gráfico, os valores começam em 2? O que vocês percebem em relação à forma de cada gráfico, e o que acontece aos valores de y quando os valores x são menores que 2?" A partir disso, é possível destacar os tipos diferentes de crescimento de cada função, bem como os conceitos de domínio e imagem apropriados para a contagem do número de cubos pintados, destacando como é importante, em matemática, conhecer a situação modelada pela função para entender seu comportamento e utilizá-la de maneira adequada.

59 Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/Semana-4-Cubo-Pintado.docx.pdf>. Acesso em 15 out. 2020.

6º momento (Estender - tempo sugerido: 30 minutos)

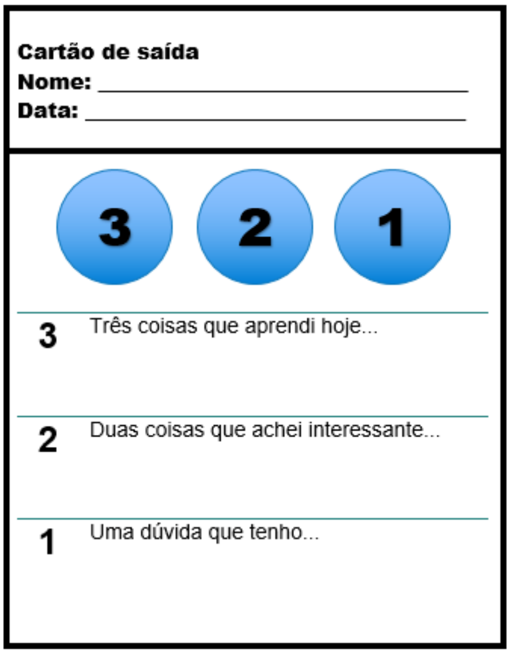
Pedir para que os grupos criem sua própria investigação utilizando outras formas (prismas retangulares, pirâmides de base quadrada, dentre outros).

7º momento (Refletir - tempo sugerido: 10 minutos)

Questionar os alunos sobre o que aprenderam a respeito das representações visuais, padrões, expressões e gráficos.

Neste momento, o uso de um cartão de saída é uma excelente opção, e pode ser explorada conforme exemplo[60] abaixo:

Figura 62: Modelo de cartão de saída



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Algumas observações sobre esta tarefa:

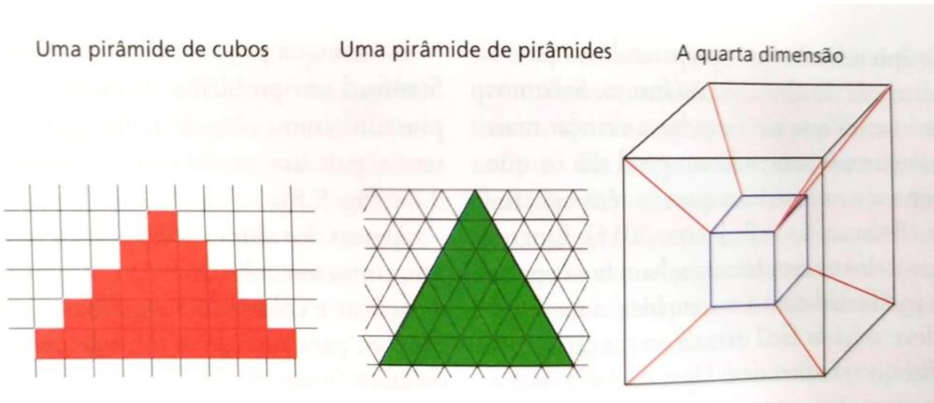
- Da mesma forma que a tarefa anterior, a proposta encontrada na íntegra no YouCubed sugere que a atividade seja iniciada com a reprodução de um vídeo curto sobre a plasticidade cerebral ou sobre a importância dos erros na aprendizagem, dando ênfase às chaves I e II.
- O tempo sugerido por Boaler não necessariamente precisa ser utilizado; cabe ao professor, de acordo com o perfil das turmas, a distribuição das aulas e suas intenções, organizar a distribuição do tempo em cada momento. Entretanto, se os tempos sugeridos forem mantidos,

[60] O cartão o acima foi editado a partir dos modelos disponíveis em: <https://templates.office.com/pt-br/bilhetes-de-sa%C3%ADda-tm44563831>. Acesso em 16 out. 2020.

essa tarefa pode ser trabalhada no decorrer de duas semanas, sendo 1º, 2º e 3º momento na primeira semana e os demais momentos na segunda semana.

- Podemos observar que, nesta tarefa, há liberdade na organização de ideias e representações: enquanto na tarefa dos padrões de crescimento, os alunos recebiam a todo o momento, fichas com espaços delimitados para melhor organização do pensamento, nesta proposta, eles são livres para organizar seu raciocínio da forma que acharem mais conveniente (chave III). É importante salientar, entretanto, que o professor precisa conhecer seus alunos e saber quando há a necessidade ou não, de orientações mais detalhadas. Sendo assim, caso seja oportuno, o professor pode criar mais fichas para guiar os estudantes e ajudá-los a expressar suas descobertas de forma organizada. O papel do professor mediador e sensível a todas essas questões é fundamental para o bom resultado desta tarefa.
- O momento "estender" permite que a criatividade do professor e dos alunos entre em ação. É possível criar discussões a respeito de área e volume de sólidos, problematizando situações de pintura de salas em formato de cubo, paralelogramo ou outro sólido qualquer (quantos litros de tinta são necessários para pintar uma sala com determinadas medidas? O que acontece com a quantidade de tinta se as dimensões aumentarem ou diminuírem?); volume de sólidos (quantos litros de água uma piscina em determinado formato e dimensões comporta? O que acontece quando essas dimensões são alteradas?). Além disso, o professor pode propor aos alunos que eles mesmo criem seus problemas, ampliando as possibilidades e levando-os a novas direções (chave IV). Boaler (2018) compartilha uma experiência que teve ao propor para seus alunos de Stanford o prolongamento da tarefa dos cubos.

Figura 63: Prolongamento do problema do cubo



Fonte: Boaler, 2018, p. 166

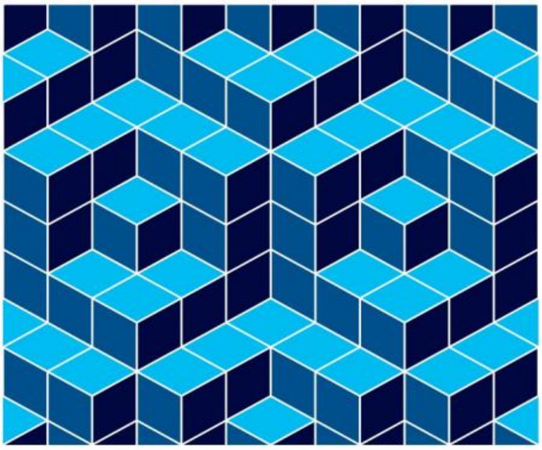
Ela comenta que este foi o melhor momento da aula e proporcionou uma ocasião riquíssima de aprendizagem: alguns alunos sugeriram encontrar a resposta deste problema com uma pirâmide de cubos ao invés de um cubo de cubos, outros propuseram descobrir as relações entre uma pirâmide feita de pirâmides menores e também surgiram questionamentos sobre como encontrar relações se o cubo fosse levado a uma quarta dimensão e, a partir daí, n dimensões (BOALER, 2018, p. 165-166). A figura 63 representa o prolongamento do problema do cubo vivenciado pela turma de Boaler.

- Diversos eixos do currículo proposto estão compreendidos nesta tarefa, a saber: proporcionalidade, identificando relações entre duas grandezas, área e perímetro de figuras e variações, volume de sólidos, plano cartesiano. Além disso, a "retomada" de conceitos vistos na 1ª série (funções polinomiais de 1º e 2º grau) ajuda a desconstruir a ideia de que a matemática é uma série de conteúdos fragmentados e possibilita a percepção de uma matemática ampla, flexível e repleta de conexões (chaves V e VI).
- O trabalho em grupo e a colaboração seguindo a instrução complexa (chave VI) têm grande destaque nesta tarefa. Nota-se como a utilização organizada dos recursos, a exposição clara das ideias, a retomada constante ao problema e a síntese das sugestões propostas pelos componentes do grupo é fundamental para que os padrões sejam verificados e as relações entre os casos concretos e os casos gerais sejam estabelecidas. Nesse sentido, a atribuição de papéis conforme sugere a instrução complexa (facilitador, registrador/repórter, monitor de recursos, harmonizador) é essencial. Da mesma forma, os direcionamentos e intervenções intencionais do professor fazem toda a diferença para que ocorra uma aprendizagem completa, valorizando as produções dos alunos e preenchendo as possíveis lacunas que surgirem.
- A matemática visual, concreta, colorida e múltipla novamente tem papel central na tarefa e permite diversas abordagens e perspectivas (chaves IV e V).
- É dado aos alunos a possibilidade de ampliarem o problema e explorarem novos parâmetros e contextos, pois trata-se de uma atividade de piso baixo teto alto (chaves III e IV).
- É uma tarefa considerada de praxeologia global, envolvendo conceitos de geometria e álgebra. A praxeologia é trabalhada como um todo e o aluno tem a possibilidade de compreender o porquê das técnicas utilizadas e quais as tecnologias e teorias que as embasam.
- Com a necessidade de refletir sobre possíveis soluções apresentadas pelos alunos nesta tarefa, mapeando os conhecimentos envolvidos, apresentamos agora uma análise a priori da tarefa sugerida.

Quadro 20: Análise a priori tarefa 2ª série

Tarefa 2ª série
Momento 1

O que você vê?
Ficha

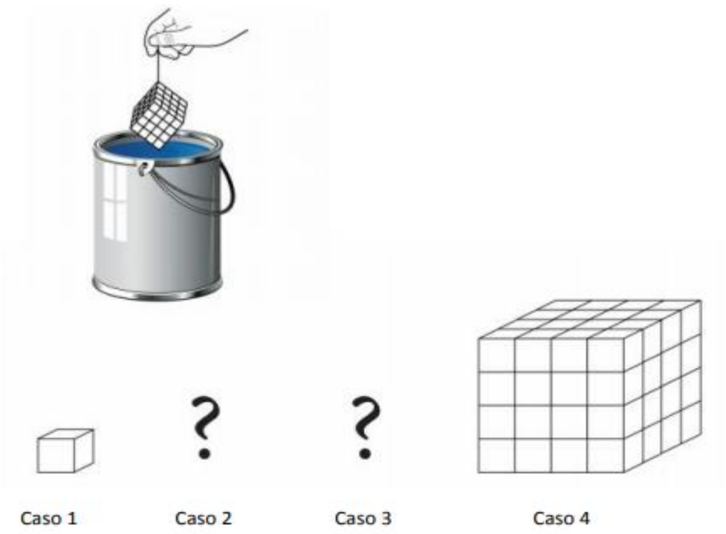


- Vemos um conjunto de cubos sobrepostos. As faces mais claras representam a parte superior dos cubos e as partes mais escuras representam suas faces laterais.

- Vemos 62 cubos menores 1x1 (inteiros ou em partes) e 8 cubos maiores 3x3 (vasados) formados por cubos menores. Há entretanto, outros cubos que formam a imagem mas que não aparecem na mesma – estes cubos não foram contabilizados.

Momento 2

Cubo Pintado
Ficha

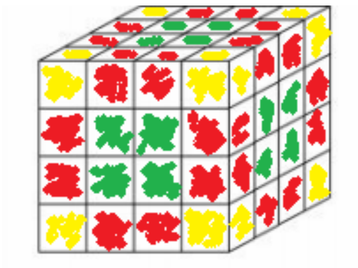


Instruções da Atividade

Imagine que nós pintamos de azul um cubo de 4 x 4 x 4 em todos os lados.

Quantos dos cubos pequenos não foram pintados?
Quantos têm 1 face azul?
Quantos têm 2 faces azuis?
Quantos têm 3 faces azuis?

Quantas unidades do cubo não têm faces pintadas, 1, 2, ou 3 faces pintadas num cubo de qualquer tamanho? Pense de forma visual.



Cubos com nenhuma face pintada

Cubos com 1 face pintada

Cubos com 2 faces pintadas

Cubos com 3 faces pintadas

- O cubo $4 \times 4 \times 4$ é formado por 64 cubos menores.
- Os cubos que não tem face pintada são os cubos internos, que não aparecem. Ou seja, tirando a "casca de fora" sobra um cubo interno $2 \times 2 \times 2$ que tem 8 cubos.
- Os cubos com 1 face pintada são os 4 cubos internos de cada face. Como o cubo tem 6 faces, temos um total de $6 \times 4 = 24$ cubos com essa característica.
- Os cubos com 2 faces pintadas são os que compõe as arestas do cubo maior, entretanto, não estão nos vértices. Cada aresta tem 2 cubos com essa característica, logo, temos $12 \times 2 = 24$ cubos.
- Os cubos com 3 faces pintadas são os que pertencem ao vértice do cubo maior e, portanto, são 8.
- Sendo assim, temos:

Cubos com nenhuma face pintada -> 8

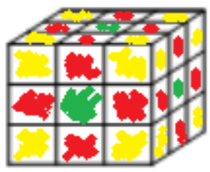
Cubos com 1 face pintada -> 24

Cubos com 2 faces pintadas -> 24

Cubos com 3 faces pintadas -> 8

TOTAL: 64

- Para generalizar, vamos refletir um pouco sobre os cubos 3x3x3, 4x4x4 e 5x5x5.



Caso 3

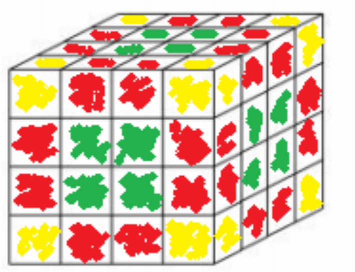
Cubos com nenhuma face pintada -> 1x1x1=1 $\boxed{\text{-> } (3-2)^3}$

Cubos com 1 face pintada -> 6x1=6 $\boxed{\text{-> } 6 \times (3-2)^2}$

Cubos com 2 faces pintadas -> 12x1=12 $\boxed{\text{-> } 12 \times (3-2)}$

Cubos com 3 faces pintadas $\boxed{\text{-> } 8}$

TOTAL: 27



Caso 4

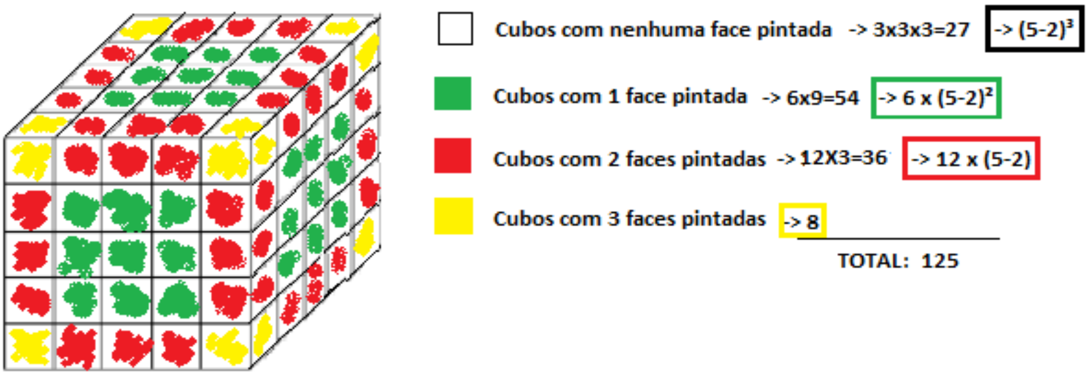
Cubos com nenhuma face pintada -> 2x2x2=8 $\boxed{\text{-> } (4-2)^3}$

Cubos com 1 face pintada -> 6x4=24 $\boxed{\text{-> } 6 \times (4-2)^2}$

Cubos com 2 faces pintadas -> 12x2=24 $\boxed{\text{-> } 12 \times (4-2)}$

Cubos com 3 faces pintadas $\boxed{\text{-> } 8}$

TOTAL: 64



Caso 5

- Podemos perceber que há um padrão para o cálculo de cada um dos cubos. Se chamarmos de n o n-ésimo caso, temos:
  - Os cubos sem face pintada são compostos pelo cubo do número do caso subtraído de 2 unidades.

$$\boxed{(n-2)^3}$$

  - Os cubos com 1 face pintada são calculados multiplicando-se por 6 (que representa o número de faces) o quadrado do número do caso subtraído de 2.

$$\boxed{6 \times (n-2)^2}$$

  - Os cubos com 2 faces pintadas são calculados multiplicando-se por 12 (que representa o número de arestas) o número do caso subtraído de 2 unidades.

$$\boxed{12 \times (n-2)}$$

  - Os cubos com 3 faces pintadas são sempre 8 (que é o número de vértices do cubo).

$$\boxed{8}$$

Momento 3

	Tamanho do cubo					
# de faces pintadas num cubo	1x1x1	2x2x2	3x3x3	4x4x4	5x5x5	nxnxn
0	0	0	$(3-2)^3=1$	$(4-2)^3=8$	$(5-2)^3=27$	$(n-2)^3$
1	0	0	$6(3-2)^2=6$	$6(4-2)^2=24$	$6(5-2)^2=54$	$6(n-2)^2$
2	0	0	12(3-2)=12	12(4-2)=24	12(5-2)=36	12(n-2)
3	0	8	8	8	8	8
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0
TOTAL	1	8	27	64	125	n^3

Observações: O caso geral é válido apenas a partir do 2º caso.

"Como os números nas expressões estão relacionados com o cubo?"

- O número de cubos sem nenhuma face pintada é uma expressão elevada ao cubo. Considerando que essa expressão diz respeito a quantidade de cubos que sobra ao serem retirados todos os cubinhos externos (a "casca" do cubo maior) temos que: *a retirada está representada pelo (-2) da expressão; * os cubinhos que sobram também estão organizados em forma de cubo, logo a expressão (n-2) está elevado ao cubo.

- O número de cubos com 1 face pintada é uma expressão elevada ao quadrado. Considerando que essa expressão diz respeito a quantidade de cubos que estão no centro de cada uma das 6 faces, podemos perceber que elas sempre formam um quadrado, quando retiramos os cubos das extremidades (retirada representada pelo -2).
- O número de cubos com 2 faces pintadas é uma expressão linear. Essa expressão diz respeito a quantidade de cubos que estão nas arestas, mas que não são os vértices do cubo; diferentemente das anteriores, não forma um cubo nem um quadrado.
- Ainda, podemos escrever uma expressão que represente, em cada caso, o número total de cubos com pelo menos uma face pintada. Essa expressão pode ser encontrada de duas formas.

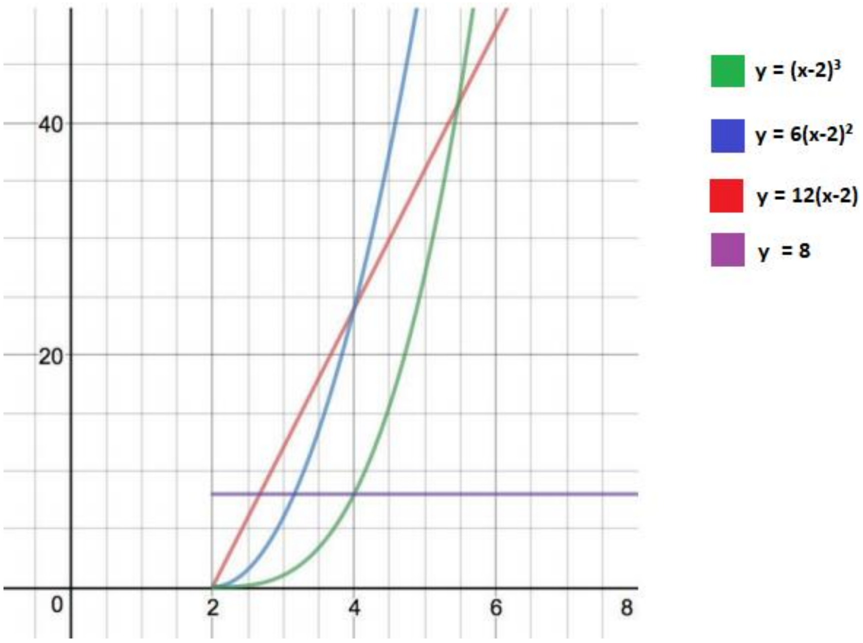
1ª: Somando as expressões que representam o número de cubos com faces pintadas:

$$6(n-2)^2 + 12(n-2) + 8$$
$$\Rightarrow 6(n^2 - 4n + 4) + 12n - 24 + 8$$
$$\Rightarrow 6n^2 - 24n + 24 + 12n - 24 + 8$$
$$\Rightarrow 6n^2 - 12n + 8$$

2ª: Como o número de cubos pintados é o total de cubos menos os cubos que não têm nenhuma face pintada, temos:

$$\Rightarrow n^3 - (n-2)^3$$
$$n^3 - (n^3 - 6n^2 + 12n - 8)$$
$$\Rightarrow 6n^2 - 12n + 8$$

Momentos 4 e 5



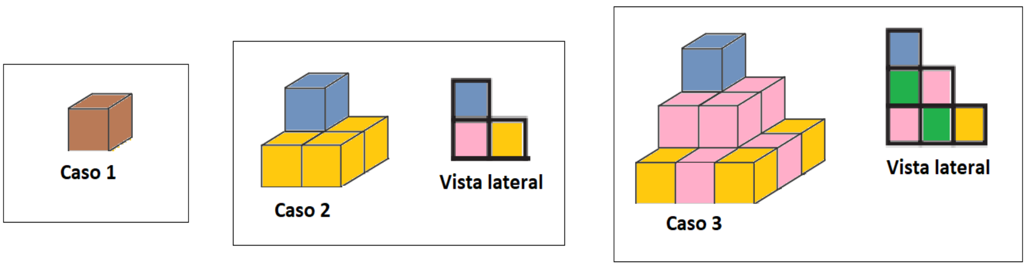
"O que vai acontecer com esses gráficos se o tamanho do cubo for aumentando?
Qual padrão está crescendo mais rápido que os outros? Por que?
Como isso está relacionado à representação visual?
O que estes pontos de intersecção significam? "

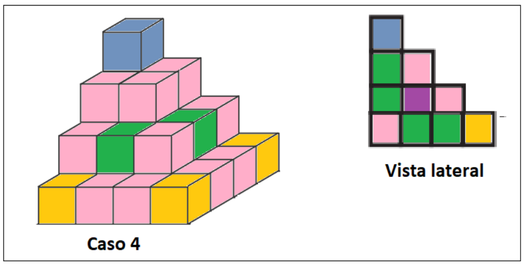
Com exceção do gráfico roxo (constante), os demais gráficos são crescentes, indicando que, à medida em que as arestas aumentam, aumentam-se o número de cubos com 0, 1, 2 ou 3 faces pintadas. Inicialmente (caso 3) vemos que o valor da função afim (vermelho) é maior que o das duas outras funções crescentes. Isso ocorre porque, quando trabalhamos com o cubo de aresta 3, há mais cubinhos com duas faces pintadas do que com 1 ou com nenhuma. No cubo de aresta 4, os gráficos azul e vermelho se intersectam, significando que há um número igual de cubos com duas e com 1 face pintadas. O número de cubos com nenhuma face pintada ainda é inferior. Do cubo 4 ao cubo 8, há mais cubos com 1 face pintada do que com 2 ou com nenhuma, por isso o gráfico azul cresce mais rápido do que os demais A partir do cubo 8, no entanto, há mais cubos sem nenhuma face pintada do que com 1, ou 2. Isso ocorre porque, qualquer valor acima de 8, ao ser subtraído de 2 e elevado ao cubo, sempre será maior do que este mesmo número elevado ao quadrado e multiplicado por 6 ou simplesmente multiplicado por 12. Temos, algebricamente:

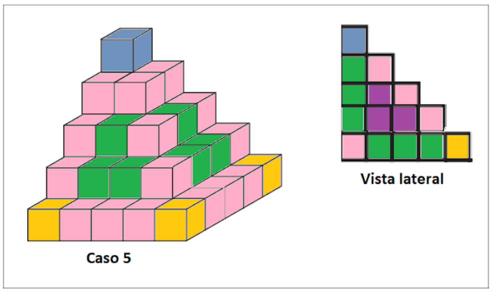
- $12(n-2) > 6(n-2)^2 > (n-2)^3$, se $x = 3$
- $12(n-2) = 6(n-2)^2 > (n-2)^3$, se $x = 4$
- $6(n-2)^2 > 12(n-2) > (n-2)^3$, se $4 < x < 8$
- $6(n-2)^2 = (n-2)^3 > 12(n-2)$, se $x = 8$
- $(n-2)^3 > 6(n-2)^2 > 12(n-2)$, se $x = 8$

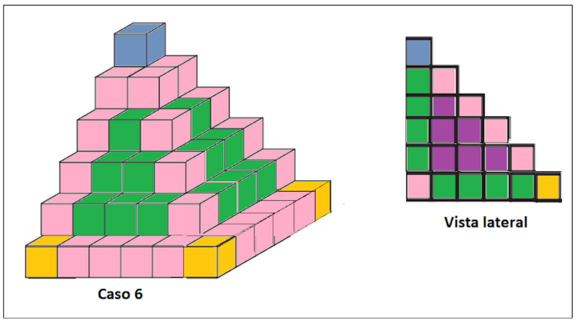
Momento 6

Criar outra investigação com outras formas:









Observações:

- Os cubos com nenhuma face pintada são aqueles que ficam internos nas “pirâmides de cubos”. Eles começam a aparecer no caso 4, onde o cubo central da terceira linha fica “escondido”: temos, portanto, 1 cubo sem cor. No caso 5, além desse cubo, os 4 cubos internos da linha 4 também não são pintados, temos, portanto, 1+4. No caso 6, além destes, os 9 cubos internos da linha 5 não são pintados, resultando em 1+4+9 cubos sem pintura.
  Temos:
  $$a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-3)^2$$

  Como $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$:
  $$\boxed{\Rightarrow a_n = \frac{(n-3)^2(n-2)^2(2n-5)^2}{6}}$$

- Os cubos com uma face pintada são observados nas laterais e no fundo da “pirâmide de cubos”.
  ANÁLISE DAS LATERAIS: Como cada pirâmide tem duas laterais iguais, multiplicamos o número de cubos roxos representados nas figuras acima por 2. Podemos perceber que, a partir do caso 4, os cubos roxos aparecem da seguinte forma: 1, $1+2$, $1+2+3$, e assim sucessivamente. Daí, temos, nas laterais, 2.1, $2.1+2$, $2.(1+2+3)$, ...

  ANÁLISE DO FUNDO: A partir do caso 4, os cubos com uma única face pintada são os quadrados internos de cada base. No caso 4, temos um quadrado 2x2, no caso 5, temos um quadrado 3x3 e assim sucessivamente. Logo, em cada caso, há 2^2, 3^2, 4^2, ... cubos da base com apenas uma face pintada.

LATERAIS +FUNDO: Somando, em cada caso, os cubos das laterais e do fundo, chegamos à: $2.(1) + 2^2$; $2.(1+2) + 3^2$; $2.(1+2+3) + 4^2$;
Temos:

$$a_n = 2[1 + 2 + \cdots + (n-3)] + (n-2)^2$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}(k^2 + k)$:

$$\Rightarrow a_n = 2\left[\frac{(n-3)^2 + n - 3}{2}\right] + (n-2)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow a_n = 2n^2 - 9n + 10}$$

- Os cubos com duas faces pintadas aparecem apenas nas laterais. Eles começam no caso 3, sendo 2 em cada lateral; no caso 4 sendo 4 em cada lateral, no caso 5 sendo 6 em cada lateral, e assim sucessivamente. Chegamos à: 2.2; $2(2.2)$; $2(2.3)$; $2(2.4)$, ...
Temos:

$$a_n = 2[2(n-2)]$$

$$\boxed{\Rightarrow a_n = 4n - 8}$$

- Os cubos com 3 faces pintadas aumentam de 5 em 5. Como no caso 2 há 1 cubo, no caso 3 há 6 cubos, e assim por diante, a expressão que representa o total de cubos com 3 faces pintadas é

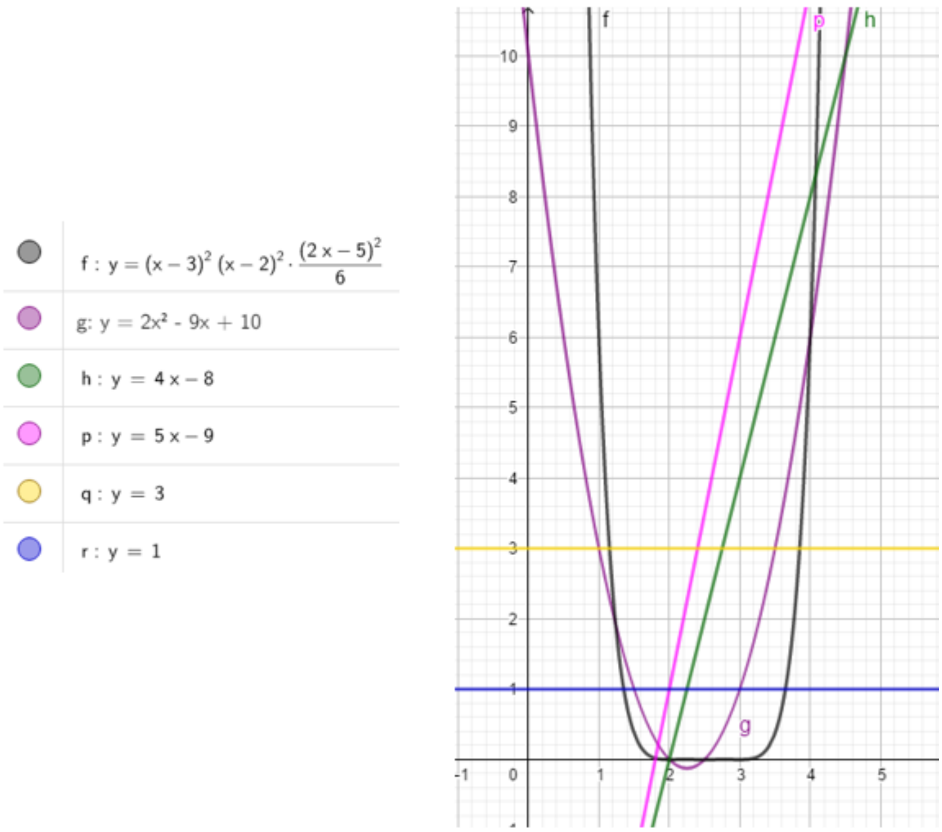
$$\boxed{5n - 9.}$$

- Os demais casos assumem sempre o mesmo valor.

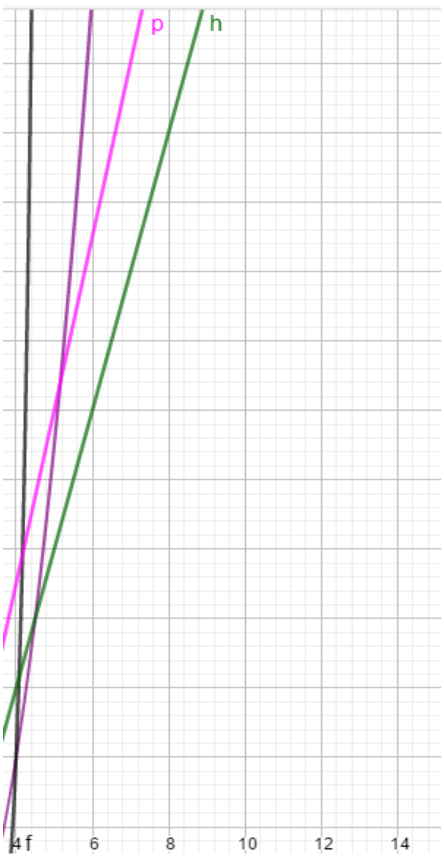
A tabela abaixo resume os dados e as conclusões encontradas.

TABELA SINTETIZADORA							
# de faces pintadas num cubo	1	2	3	4	5	6	n
0	0	0	0	1	5	14	$\frac{(n-3)^2(n-2)^2(2n-5)^2}{6}$
1	0	0	2	6	13	28	$2n^2 - 9n + 10$
2	0	0	2	8	17	24	$4n - 8$
3	0	1	6	11	16	21	$5n - 9$
4	0	3	3	3	3	3	3
5	0	1	1	1	1	1	1
6	1	0	0	0	0	0	0
TOTAL	1	5	14	30	55	91	$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Escrevendo essas expressões em forma de funções, onde $x = n$ e $a_n = y$, com o auxílio do Geogebra podemos construir os seguintes gráficos:



Como nos é interessante analisar o comportamento a partir do caso 4, temos:



Podemos perceber como, a partir do 4, o gráfico preto (que representa os cubos sem faces pintadas) cresce muito mais rápido que os demais. A partir do caso 5, o gráfico roxo (que representa os cubos com 1 face pintada) é o segundo a crescer mais rápido e mantém esse comportamento por todo o plano, seguido do gráfico rosa (3 faces) e, por fim do verde (2 faces). Nota-se que, conforme o caso cresce, há mais cubos com nenhuma face pintada ou apenas uma face pintada do que os demais. Isso ocorre já que a "borda" vai ser sempre menor do que o que a preenche.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

- A partir das observações redigidas e da análise a priori realizada, percebe-se que as seguintes habilidades da BNCC podem ser desenvolvidas a partir da exploração desta tarefa:

Quadro 21: Habilidades envolvidas na tarefa 2ª série

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Fonte: Extraído de Brasil, 2018

5.2.2.3 *Tarefa sugerida para a 3ª série*

<u>Tarefa sobre introdução à contagem</u>

1º momento (Explorar parte 1 - tempo sugerido: 20 minutos)

Dividir a turma em grupos e entregar para cada grupo, uma ficha diferente sobre tarefas simples de contagem (abaixo trazemos algumas sugestões[61]). Junto com a ficha, o grupo

[61] As tarefas foram criadas pelos autores ou retiradas de sites que possuem diversas opções de tarefas sobre contagem: <https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA220/n01.pdf>; <http://clubes.obmep.org.br/blog/biblioteca-sala-de-problemas-contagem/>. Acesso em 19 out. 2020.

também pode receber materiais manipulativos para ajudá-los na visualização das possibilidades. Pode-se entregar os símbolos das olimpíadas e os símbolos do alfabeto Plutoniano recortados para manipulação, bem como as figuras representando as bolas de sorvete e as casquinhas. O interessante é ter material suficiente para que se possa montar todas as combinações (no caso dos símbolos do alfabeto, é preciso ter no mínimo 5 de cada símbolo, a fim de que as palavras formadas apenas por um símbolo sejam consideradas; no caso das bolas de sorvete, é preciso ter três bolas de cada cor, para que os sorvetes de apenas um sabor sejam considerados). A tarefa do caminho e as demais tarefas, caso o professor não consiga produzir os materiais manipulativos, podem ser trabalhadas utilizando desenhos e canetas coloridas.

Além disso, cada grupo deve receber uma cartolina na qual esquematizará a solução encontrada e as ideias utilizadas para chegar à mesma. Durante essa tarefa, sugere-se o uso de representações visuais para expressar as ideias, seja através dos materiais manipulativos recebidos ou através de desenhos e esquemas feitos pelos próprios alunos.

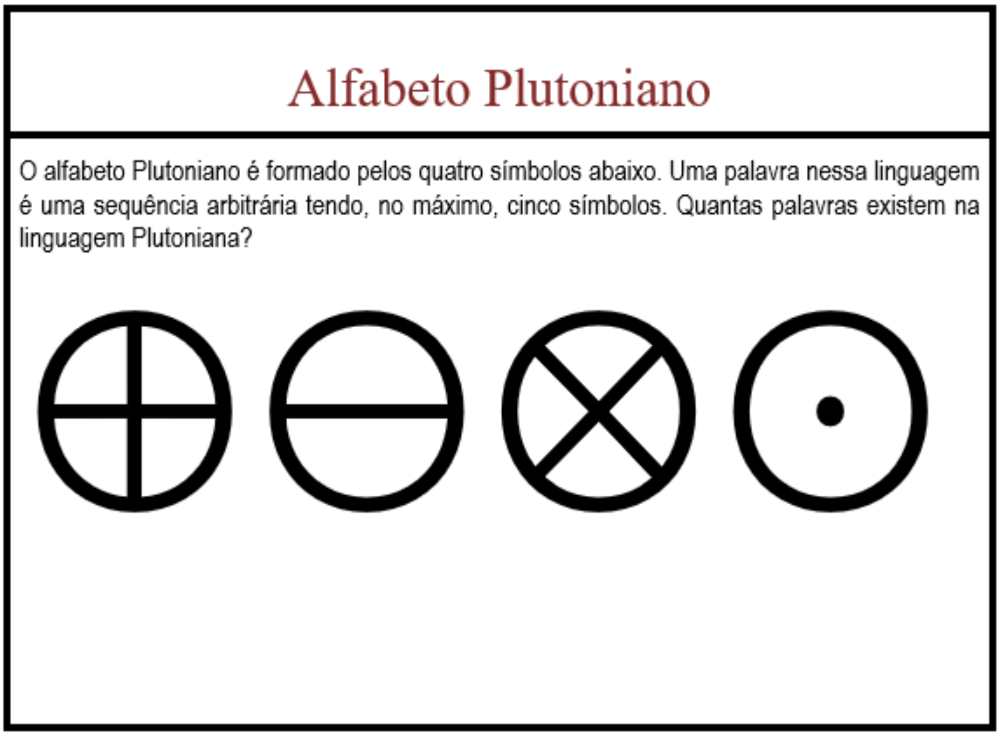
Figura 64: Ficha esportes olímpicos

Fonte: Página dos Clubes de Matemática da OBMEP[62]

---

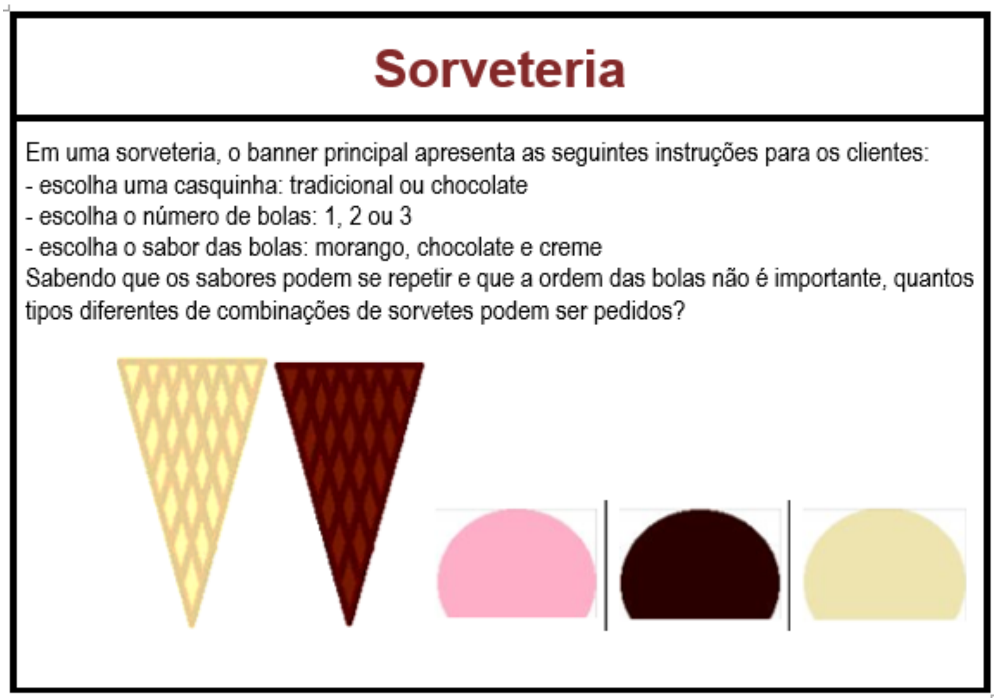
[62] Disponível em: < http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-latinhas-de-refrigerante/>. Acesso em 19 out. 2020.

Figura 65: Ficha alfabeto plutoniano



Fonte: Página dos Clubes de Matemática da OBMEP [63]

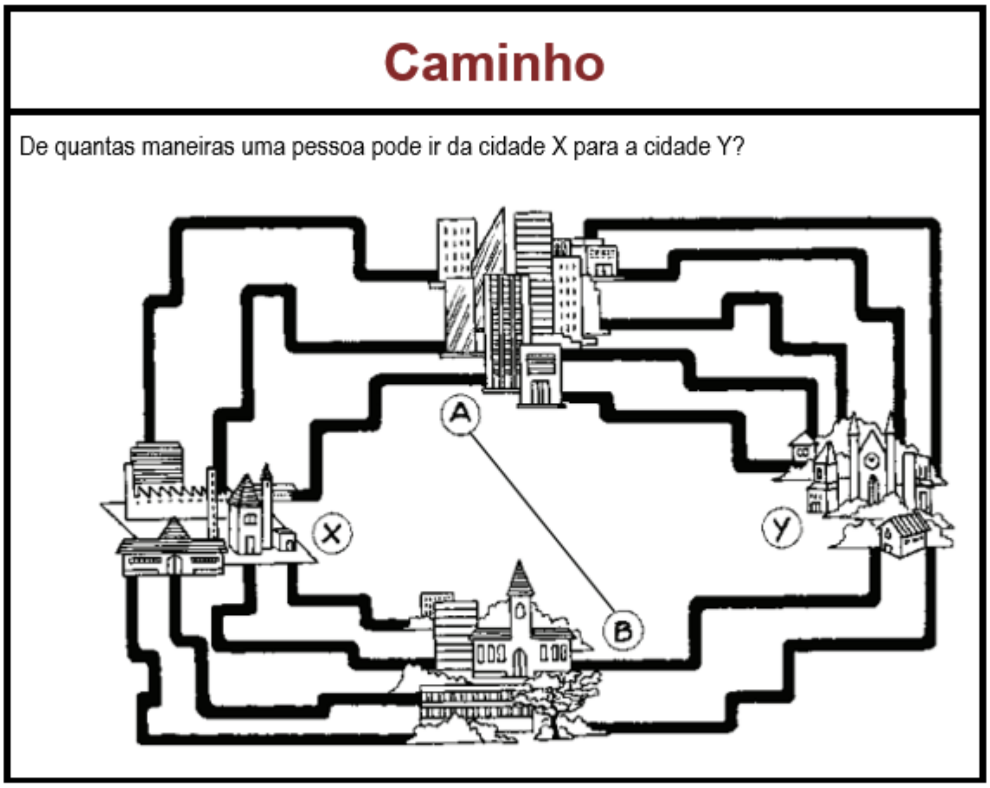
Figura 66: Ficha sorveteria



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

[63] Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-alfabeto-plutoniano/>. Acesso em 19 out. 2020.

Figura 67: Ficha caminho



Fonte: Unicamp[64]

2º momento (Compartilhar - tempo sugerido: 20 minutos)

Os alunos são convidados a compartilhar seu problema e seu cartaz com a solução. Devem ser incentivados a explicar, com o máximo de detalhes, os caminhos e decisões tomadas.

3º momento (Discutir - tempo sugerido: 20 minutos)

Esse momento é crucial para a aula e deverá permitir que os estudantes percebam as semelhanças entre os problemas resolvidos por eles e pelos colegas. Algumas perguntas podem orientar tais discussões: Existem semelhanças entre estes problemas? E entre as estratégias utilizadas pelos grupos? Existem diferenças entre estes problemas? É possível estabelecer uma "regra" que funcione para resolver todos estes problemas? O intuito é chegar à definição do princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo) e do princípio aditivo. Neste momento podem surgir também discussões a respeito da árvore das possibilidades e sobre seu uso na manipulação de casos de contagem simples, bem como da necessidade de separar um problema de contagem em casos menores, quando necessário (caso do alfabeto Plutoniano).

[64] Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA220/n01.pdf>. Acesso em 19 out. 2020.

4º momento (Explorar parte 2 - tempo sugerido: 15 minutos)

Cada grupo deve receber uma ficha “grupo de pessoas” conforme representado abaixo. É interessante que o número de pessoas seja pequeno para que eles possam fazer as testagens, caso sintam necessidade.

Quadro 22: Ficha grupo de pessoas

Grupo de pessoas

O que aconteceria caso o problema das latinhas de refrigerante com símbolos das olimpíadas considerasse a ordem das figuras impressas? E no caso das bolas de sorvete, o que aconteceria se definíssemos que a ordem dos sabores importa? Pense sobre isso e resolva esses dois problemas:

- Um grupo de 4 pessoas está participando de uma competição que premiará os três primeiros colocados com medalhas de ouro, prata e bronze para o 1º, 2º e 3º lugar, respectivamente. Quantos pódios diferentes podem ser formados com essas pessoas?
- Um grupo de 4 pessoas precisa eleger três representantes para formarem uma comissão. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

5º momento (Refletir - tempo sugerido: 20 minutos)

Questionar os alunos sobre as soluções encontradas para os agrupamentos de pessoas, conduzindo as discussões a fim de que fique claro a diferença entre arranjos e combinações. Neste momento, o professor pode apresentar as fórmulas matemáticas (técnicas) geralmente utilizadas, mas deve frisar que as fórmulas não precisam necessariamente ser utilizadas, desde que haja compreensão dos procedimentos realizados. Isso fica claro quando os alunos percebem:

a) o arranjo como sendo a aplicação direta do princípio fundamental da contagem;

b) a combinação como resultado da aplicação do princípio fundamental da contagem, onde o total encontrado deve ser dividido pelo número de vezes que as formatações são contadas “a mais” (quando falamos em uma comissão de três pessoas A, B e C, a ordem das pessoas não importa. No entanto, ao usar o princípio multiplicativo, contamos uma mesma comissão seis vezes ao invés de uma - ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Sendo assim, após utilizar o princípio multiplicativo, é necessário que este resultado seja dividido pelo número de vezes que tal comissão foi contada “a mais”. Esse número é resultado da permutação dos elementos, no caso, $3! = 6$).

6º momento (Estender - tempo sugerido: 15 minutos)

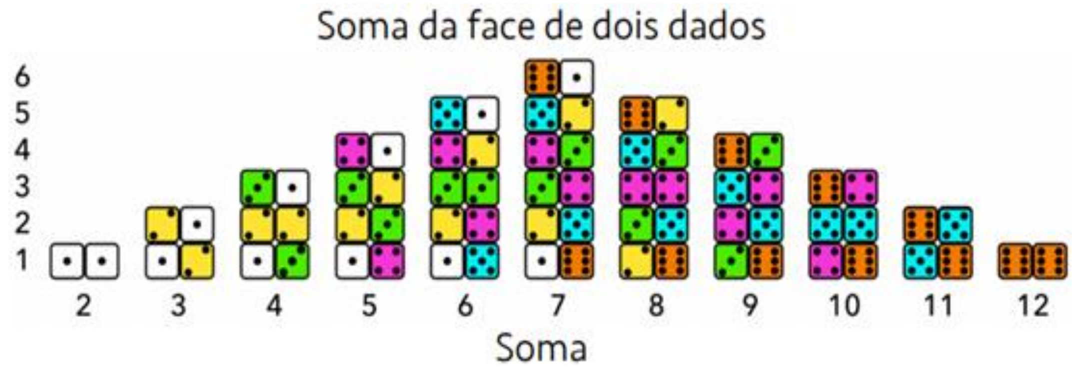
Desafio - Considerando que probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um determinado evento, obtidas pela **razão entre casos favoráveis e casos possíveis**, responda: ao lançarmos dois dados não viciados, qual a probabilidade de obtermos faces voltadas para cima onde a soma entre elas seja 6?

Incentivar o uso de desenhos para representar todas as possíveis combinações (que somam 2, 3, 4, 5, 6…, 12) e, a partir disso, destacar aquelas que somam 6.

7º momento (Refletir - tempo sugerido: 15 minutos):

Apresentar a seguinte imagem (figura 72), que apresenta todo o espaço amostral do caso dos dados, organizado na forma de um gráfico de frequência. Refletir com os alunos a diferença entre a posição dos dados, por exemplo, nas duas possibilidades de soma 3, questionando qual é a influência de contar a soma 1+2 ou a soma 2+1, quando se fala em contagem e probabilidade. Relembrar as diferenças e semelhanças entre arranjos e combinações pedindo para que os estudantes façam um quadro comparativo ou um mapa mental sobre o assunto.

Figura 68: Representação visual soma da face de dois dados



Fonte: Youcubed[65]

Algumas observações sobre esta tarefa:

- O tempo sugerido para os momentos foi criado pela autora, com base em sua experiência em sala de aula, mas pode variar de acordo com o perfil das turmas, a distribuição

[65] Disponível em:<https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/12/Soma-da-face-de-dois-dados-.pdf>. Acesso em 09 fev. 2021

das aulas e as intenções do professor. Entretanto, se os tempos sugeridos forem mantidos, essa tarefa pode ser trabalhada no decorrer de três aulas, sendo os 5 primeiros momentos em duas aulas consecutivas e os momentos restantes na aula seguinte.

- A matemática visual e manipulável está novamente presente (chave IV). Dar ênfase à visualização dos casos diferentes e permitir suas testagens é de suma importância para a compreensão da contagem e suas nuances. Além disso, possibilitar o momento de compartilhamento de soluções, com o uso de cartazes que expressem as ideias de cada grupo, proporciona o desenvolvimento de habilidades de argumentação bem como deixa claro a importância de suas descobertas e sua responsabilidade para com a aprendizagem do restante da turma (chave III e VI).
- Nesta tarefa, pode-se perceber que o assunto matemático desejado foi introduzido apenas quando houve a necessidade de enunciá-lo. De acordo com Boaler, Chevallard e outros autores mencionados, apresentar um novo conteúdo/ método depois de um problema que necessite de sua compreensão é uma estratégia poderosa para engajar os alunos. Citamos previamente que, na TAD, a construção de uma praxeologia se inicia da falta de uma técnica para resolvê-la, portanto, ao optar por essa estratégia, os alunos têm a possibilidade de explorar a tarefa a partir de seus saberes prévios e construir seus conhecimentos de contagem compreendendo toda a praxeologia envolta nesse processo. É nesse sentido que, no quinto momento, foi enfatizado a importância de entender o significado real das fórmulas de arranjo e permutação já que sua memorização não é necessária desde que a teoria que as justifica seja compreendida.
- Os momentos "estender" e "refletir" permitem aos alunos perceber a estreita relação entre contagem e probabilidade. O momento também pode ser utilizado para indagá-los sobre outras situações do cotidiano que envolvem esses dois conceitos, ampliando os horizontes para uma abordagem estatística, quando se reflete sobre o gráfico de frequências apresentado utilizando a figura dos dados. Pode-se refletir a respeito de percentuais e de que outras formas as frequências podem ser representadas (gráfico de setores, por exemplo). Ainda, é possível ir além, solicitando que os estudantes pensem de que forma este assunto está relacionado com previsões meteorológicas, pesquisas de opinião, cálculo de eficácia de medicamentos, etc., incentivando-os a conhecer mais sobre as formas que dados são coletados, como são processados e de que maneira são transmitidos para a população, verificando sua importância em diversas questões do dia a dia. Além disso, solicitar a criação de um quadro comparativo ou mapa mental sobre o tema permite que o aluno expresse de maneira visual, o que compreendeu

da tarefa e, caso tenha ficado alguma lacuna, torna possível sua identificação neste momento de síntese.

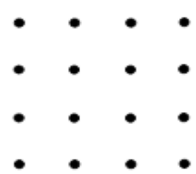
- Os eixos do currículo proposto que estão compreendidos nesta tarefa são, principalmente, contagem e análise de eventos prováveis e possíveis. Entretanto, de acordo com a forma de exploração dos dois últimos momentos, é possível fazer um enlaçamento com outros eixos, a saber, pesquisa e coleta de dados, gráficos e tabelas estatísticos, dentre outros. É importante ressaltar que os três primeiros momentos contam com tarefas introdutórias de contagem e, por isso, não envolvem outros eixos matemáticos. Caso o professor queira aprofundar mais o eixo de contagem e relacioná-lo com outros eixos, apresentamos a seguir alguns exemplos de tarefas que podem ser trabalhadas a fim de que sejam exploradas relações da contagem com estatística (exemplo 1), geometria (exemplos 2 e 3), sistemas lineares (exemplo 4), dentre outros temas geradores do currículo sugerido.

Exemplo 1[66]: O conjunto {3,6,9,10} é acrescido de um quinto elemento, denotado por n e diferente de todos os quatro elementos iniciais. Esse novo elemento faz com que a mediana dos elementos do conjunto recém-formado seja igual à sua média. Qual é a soma de todos os possíveis valores de n?

Exemplo 2[67]: Sobre uma reta r foram marcados os pontos distintos A, B, C e D, e sobre uma reta s, concorrente a r no ponto A, foram marcados os pontos F, G, H e J. Determine a quantidade de triângulos que podemos formar com todos esses pontos.

Exemplo 3[68]: Qual o número de quadrados que podem ser construídos com vértices nos pontos do quadriculado abaixo?

Figura 69: Quadrado de pontos



Fonte: Página dos Clubes de Matemática da Obmep[69]

[66] Disponível em: < http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-medias-e-medianas-de-um-conjunto/ >. Acesso em 19 out. 2020.

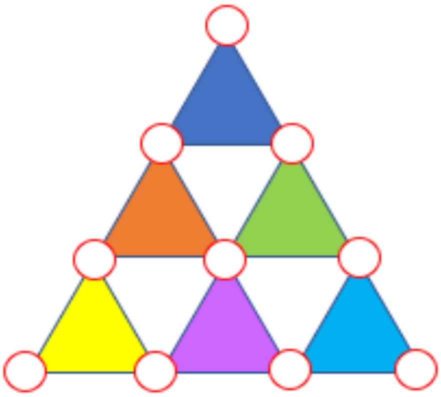
[67] Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-quantos-triangulos/>. Acesso em 19 out. 2020.

[68] Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-quantos-quadradinhos/ >. Acesso em 19 out. 2020.

[69] Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-quantos-quadradinhos/>. Acesso em 19 out.2020.

Exemplo 4[70]: Seis triângulos foram desenhados e coloridos conforme mostra a figura abaixo. Distribua os números 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 nos círculos que foram colocados sobre os vértices dos triângulos, de modo que as somas dos números colocados nos três vértices de cada triângulo colorido sejam iguais. De quantas maneiras é possível fazer essa distribuição?

Figura 70: Triângulos



Fonte: Página dos Clubes de Matemática da Obmep[71]

Observação: Para fazer a distribuição, considere os triângulos fixos e, portanto, não faça rotações ou simetrias.

- Com a necessidade de refletir sobre possíveis soluções apresentadas pelos alunos nesta tarefa, mapeando os conhecimentos envolvidos, apresentamos agora uma análise a priori da tarefa sugerida.

Quadro 23: Análise a priori tarefa 3ª série

Tarefa 3ª série Momentos 1 e 2
Analisaremos apenas duas das quatro tarefas sugeridas pois a intenção com a análise a priori é ter uma ideia geral das possíveis estratégias que os estudantes podem apresentar durante a resolução dos problemas. Escolhemos a tarefa dos esportes olímpicos e do alfabeto plutoniano.

[70] Disponível em: < http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-vertices-de-triangulos/ >. Acesso em 19 out. 2020.

[71] Disponível em: < http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-vertices-de-triangulos/ >. Acesso em 19 out. 2020.

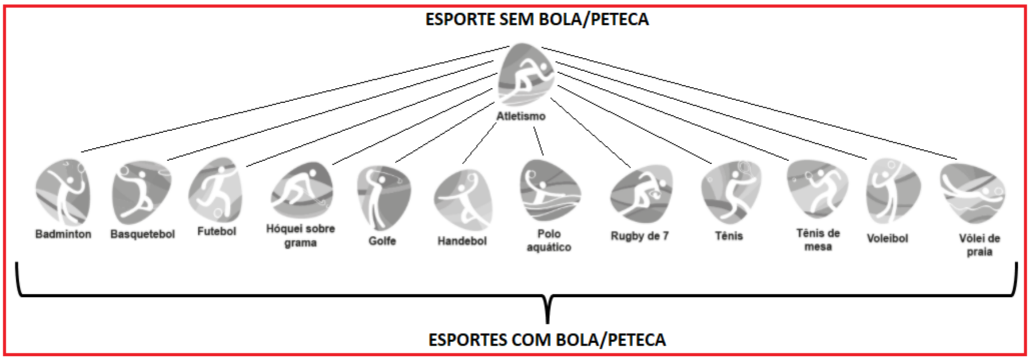
Tarefa esportes olímpicos e latinhas de refrigerante

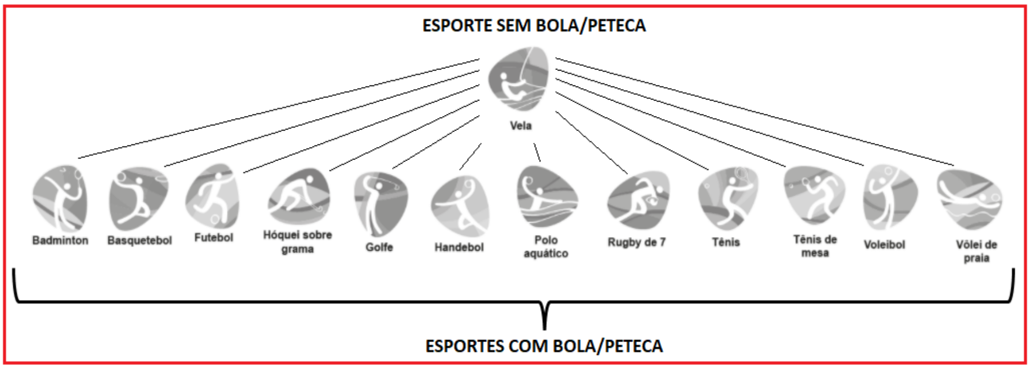
Há 12 tipos de esportes que utilizam algum tipo de bola ou peteca: badminton, basquetebol, futebol, golfe, handebol, hóquei sobre grama, polo aquático, rugby, tênis, tênis de mesa, voleibol e vôlei de praia.

Do total de 39 esportes representados, descontando os que utilizam bola ou peteca, sobram 27 que não utilizam.

Como em cada latinha haverá a combinação de dois esportes diferentes, um com cada característica, podemos pensar, por exemplo, em quantas dessas latinhas aparecerá o Atletismo. Ou ainda, em quantas dessas latinhas poderá aparecer a Vela.

O esquema abaixo é capaz de ilustrar essas combinações.





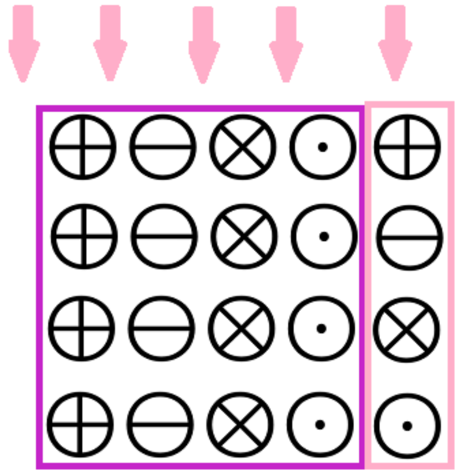
Podemos notar que, independendo do esporte sem bola/ peteca escolhido em cima, os possíveis esportes que o acompanharão serão sempre os mesmos 12, a saber, aqueles que envolvem o uso de bola ou peteca.

Sendo assim, é fácil perceber que, para cada esporte sem bola, 12 latinhas diferentes podem ser criadas. Como temos um total de 27 esportes sem bola e, cada um deles gera 12 diferentes latinhas, o total de latinhas diferentes é $27 \times 12 = 324$.

Tarefa alfabeto plutoniano

<u>Esboço de uma possível estratégia:</u>

Vamos começar contando quantas palavras diferentes existem, formadas com 5 símbolos.



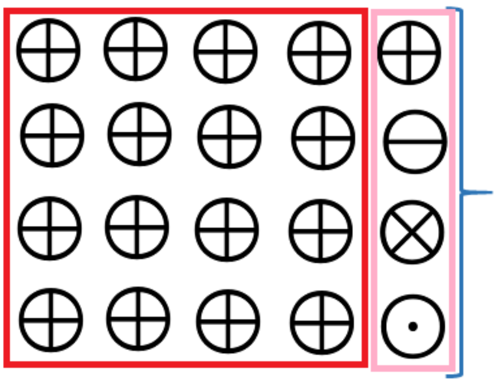
Ao criarmos uma palavra com 4 símbolos diferentes (sendo que 1 dos símbolos aparece 2 vezes)temos as seguintes possibilidades:

- Se a ordem dos simbolos for tal qual a figura ao lado, mudando apenas a coluna rosa (que pode ser colocada em 5 posiçoes diferentes), temos um total de 4 palavras diferentes para cada mudança efetuada pela coluna rosa. Sendo assim, um total de 5 x 4 = 20.

- Cada vez que a ordem dos símbolos na caixa roxa mudar, pode-se novamente criar mais 20 palavras distintas.

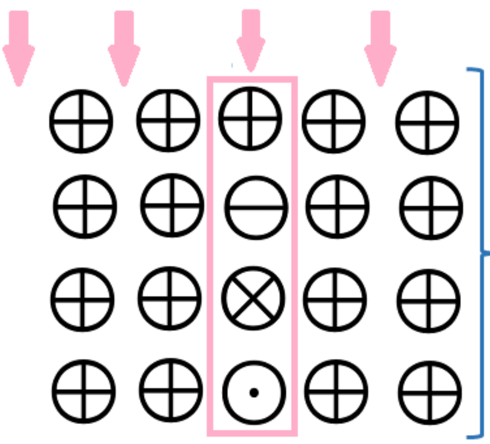
Para cada simbolo que inicia, há 6 diferentes combinações. Assim temos 6 x 4 = 24

Juntando essas informações, temos 20 x 24 = 480



Quando escrevermos 4 símbolos iguais em sequência e mudamos apenas o último, formamos 4 palavras diferentes para cada símbolo escolhido para iniciar a palavra. Sendo assim, temos 4 x 4 = 16 palavras nesses moldes.

Tipos de símbolo | Palavras distintas



Além disso, mantendo essa mesma formatação (utilizando 4 símbolos iguais e um diferente para formar cada palavra, podemos inserir os símbolos diferentes em 4 diferentes espaços: na 1ª posição, na 2ª posição, na 3ª posição (caso esboçado ao lado) ou na 4ª posição (note que a 5ª posição já foi contada anteriormente).
No entanto, cada vez que fazemos essas alterações da posição dos símbolos diferentes, uma das 4 palavras já foi contada anteriormente (a que contém 5 símbolos iguais).
Sendo assim, temos o total de 4 x 3 = 12 palavras com essas características.

Tipos de símbolo | Palavras distintas

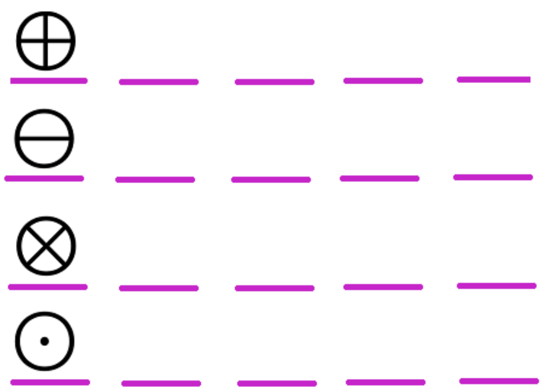
....

OBSERVAÇÃO!!!!

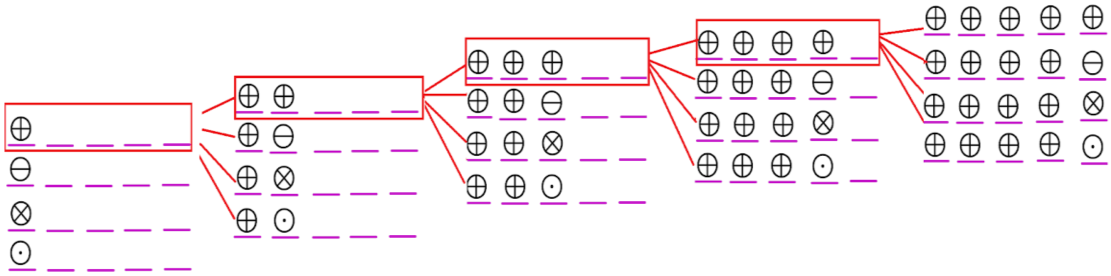
Continuar contando dessa forma pode levar muito tempo e representa grandes possibilidades de erro já que o esquecimento de qualquer caso pode resultar uma conclusão equivocada.
Se os grupos que possuem essa tarefa seguirem por esse caminho, certamente levarão mais tempo do que os outros para chegar a alguma conclusão e podem haver divergências de resultados (isso é ótimo!). No momento de troca de ideias, as divergências gerarão grandes oportunidades de aprendizagem tanto para estre grupo como para outros que possam ter escolhido outras vias/estratégias.
Ao fim das discussões, caso os estudantes não concluam por conta própria, é importante que o professor deixe claro o grande número de estratégias que podem ser utilizadas na resolução de problemas de contagem, mas alertando, no entanto, que contar as possibilidades, caso por caso, nem sempre será viável (principalmente considerando o fato de que, geralmente, problemas de contagem envolvem números muito grandes). Além disso, se o problema envolve muitos casos diferentes, pode-se acabar esquecendo de algum deles, comprometendo a contagem final.

<u>Esboço de outra possível estratégia:</u>
Cada palavra é composta por 1, 2, 3, 4 ou 5 símbolos.
Façamos o caso formado por 5 símbolos, sendo que os demais são análogos.
Cada espaço abaixo representado por linhas roxas deve ser preenchido com um dos 4 símbolos do alfabeto plutoniano.

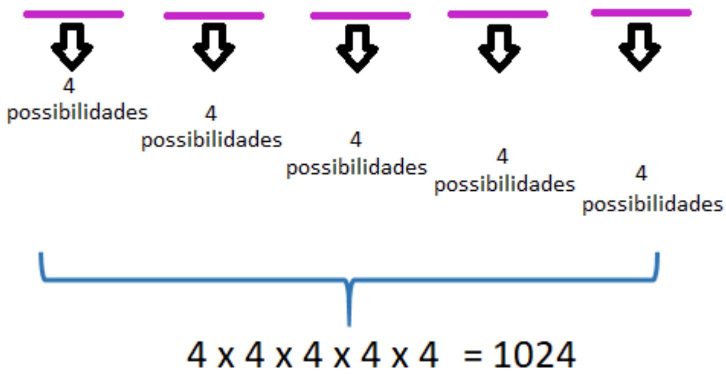
Começaremos escolhendo o símbolo que deve preencher o primeiro espaço:



Notemos que há 4 possibilidades para preencher o primeiro espaço. Após decidido o primeiro símbolo da palavra, novamente temos 4 possibilidades para o segundo espaço. Após decidido o segundo símbolo, novamente temos 4 possibilidades de escolha para o terceiro espaço, e assim sucessivamente.



Podemos calcular o total de palavras, sendo assim, multiplicando as possibilidades de preenchimento de cada espaço:



Da mesma forma, uma palavra com:

- 4 símbolos poderá ser escrita de $4\times4\times4\times4=256$ formas diferentes.
- 3 símbolos poderá ser escrita de $4\times4\times4=64$ formas diferentes.
- 2 símbolos poderá ser escrita de $4\times4=16$ formas diferentes.
- 1 símbolo poderá ser escrita de 4 formas diferentes.

Somando todas essas possibilidades, concluímos que o alfabeto plutoniano tem $1024+256+64+16+4=1364$ palavras.

Momento 3

Existem semelhanças entre estes problemas? E entre as estratégias utilizadas pelos grupos? Existem diferenças entre estes problemas? É possível estabelecer uma "regra" que funcione para resolver todos estes problemas?

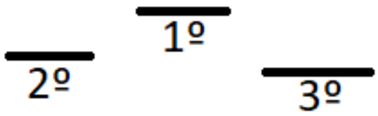
- Há semelhanças sim. Todos os problemas tratam-se de etapas e escolhas. O problema das latinhas era composto por duas etapas: escolher o símbolo do esporte sem bola e, posteriormente, escolher o símbolo do esporte com bola. O problema do alfabeto, embora estivesse separado em casos (palavras com 1 símbolo, palavras com 2 símbolos, ...) consistia em escolher o símbolo que iria ser colocado em cada um dos espaços que forma a palavra. O mesmo ocorre nos problemas do sorvete e dos caminhos.
- Todos os problemas envolveram a multiplicação das possibilidades de cada etapa. Além disso, o problema do alfabeto exigiu que, ao final de cada um dos casos, fossem somadas todas as possibilidades.

Momentos 4 e 5

- Se a ordem do símbolo das latinhas fosse considerada, teríamos que multiplicar nossa resposta por dois já que, a latinha formada por futebol e vela (nesta ordem) seria diferente da latinha formada por vela e futebol.

- Da mesma forma, se a ordem dos sabores importasse, seria necessário contar mais tipos de sorvete. Os sorvetes com 3 sabores distintos deveriam ser multiplicados por 6 já que $MCCr \neq MCrC \neq CCrM \neq CMCr \neq CrCM \neq CrMC$

- Num pódio, a posição de cada pessoa importa.



Logo, temos 4 possibilidades para o primeiro lugar, 3 possibilidades para o 2º lugar e 2 possibilidades para o 3º lugar.

Isso dá um total de $4 \times 3 \times 2 = 24$ pódios diferentes.

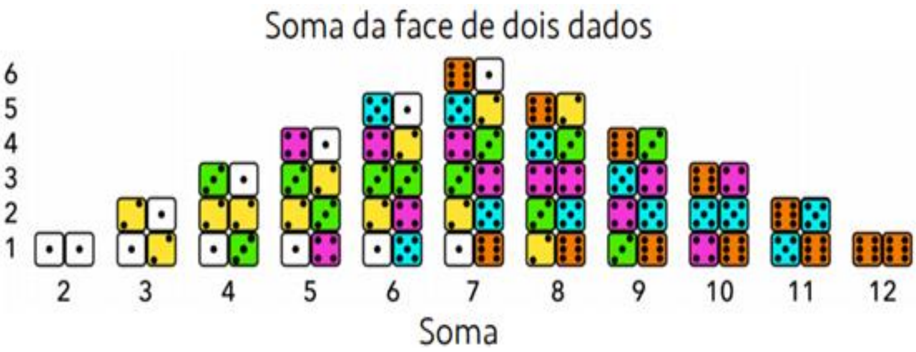
- Em uma comissão, a posição das pessoas não importa.
  Sejam A, B, C e D as pessoas disponíveis para formar a comissão, temos as possíveis comissões:
  - Comissão formada com os integrantes A, B e C.
  - Comissão formada com os integrantes A, B e D.
  - Comissão formada com os integrantes A, C e D.
  - Comissão formada com os integrantes B,C e D.
  O que totaliza 4 comissões.

- De outra maneira:
  Se a posição importasse, teríamos 24 comissões diferentes (conforme cálculo na tarefa do pódio realizado anteriormente). Como a posição não importa, isso significa que estamos contando comissões iguais mais de uma vez.
  Supondo que uma comissão seja formada pelas pessoas A, B e C. Note que essa mesma comissão foi contada em todas as vezes abaixo:
  ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
  Sendo assim, precisamos dividir o valor encontrado (24) por 6.
  Logo, o total de comissões é $24 \div 6 = 4$.

Momento 6

O lançamento de cada dado gera 6 possíveis respostas.
Como estão sendo lançados dois dados, utilizando o princípio fundamental da contagem previamente aprendido, temos um total de $6 \times 6 = 36$ combinações possíveis, conforme figura abaixo[72]:

[72] Certamente é pouco provável que os alunos não construam os desenhos dessas combinações em forma de um gráfico de frequências. Entretanto, a fins de praticidade, utilizamos a figura já construída, retirada do YouCubed.



Como queremos que a soma dos dois dados seja 6, temos as seguintes possibilidades:

(1 e 5), (5 e 1), (2 e 4), (4 e 2), (3 e 3)

Senso assim, no lançamento destes dados, a probabilidade de soma das faces ser 6, será:

$$P = \frac{5}{36}$$
$$P = 0{,}139$$
$$P = 13{,}9\%$$

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

- A partir das observações redigidas e da análise a priori realizada, percebe-se que as seguintes habilidades da BNCC podem ser desenvolvidas a partir da exploração desta tarefa:

Quadro 24: Habilidades envolvidas na tarefa 3ª série

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Fonte: Extraído de Brasil, 2018

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A transposição didática da matemática, para Chevallard (2013), é fruto das transformações do saber criado em universidades e centros de pesquisa no saber matemático produzido para ser trabalhado dentro da instituição escolar. Essa transformação é promovida pela *noosfera* (instância distante da sala de aula) por meio de reorganizações que adaptam os saberes de acordo com intenções e necessidades da sociedade, interferindo diretamente na forma como os estudantes são ensinados e de que maneira se relacionam com os saberes matemáticos. Os resultados de avaliações em larga escala bem como o desgosto, medo e apatia comumente apresentados pelos estudantes quando se fala em matemática, sugerem, no entanto, que seu ensino apresenta falhas, ecoando em um quadro preocupante no Brasil.

Devido à necessidade de aprofundamento a respeito desta temática, pesquisas em livros, artigos, monografias e dissertações, nacionais e internacionais, nos levaram a refletir sobre o fenômeno da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas utilizadas nas instituições escolares. Os fatos intrínsecos a este fenômeno conduziram-nos a uma série de questionamentos a respeito do currículo e, frente ao atual cenário brasileiro de mudanças com a implementação da BNCC, sobre como ensinar matemática de forma significativa, tendo em vista, ainda, a redução considerável de carga horária destinada à disciplina.

Neste sentido, instituímos como objetivo geral deste trabalho, construir um Modelo Praxeológico Didático-Matemático (Alternativo) para o ensino de matemática sob a ótica da TAD, da NC e, mais especificamente, das chaves para aprendizagem, considerando a necessidade de reestruturação da prática docente e do currículo recorrente da implementação da BNCC no Ensino Médio.

Objetivamos também compreender como a TAD, os estudos recentes sobre a NC e as seis chaves de aprendizagem de Jo Boaler, podem influenciar na reestruturação da prática docente matemática; quais as aproximações e distanciamentos entre as competências e habilidades propostas pela BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias e o ensino com base nas seis chaves de aprendizagem e, ainda, qual o papel das tarefas matemáticas neste cenário.

As noções epistemológico-teóricas abordadas no primeiro capítulo ofereceram subsídios para inferirmos que de fato, o conhecimento e uso dessas teorias por docentes matemáticos pode sim auxiliar na criação de estratégias de ensino com base nas exigências contemporâneas, principalmente, considerando que a aplicação das chaves para aprendizagem têm apresentado resultados estatísticas favoráveis e ajudado professores em diversas partes do mundo a atuarem de forma diferente, fundamentados na compreensão de como o cérebro funciona e de como qualquer pessoa pode aprender matemática em altos níveis.

Em linhas gerais, a pesquisa apresentada mostrou a necessidade de mudanças na maneira como a matemática vem sendo ensinada nas escolas brasileiras, considerando o fenômeno da fragmentação do saber matemático nos currículos e da superficialidade das tarefas matemáticas nas instituições escolares.

Mais do que isso, apresentou subsídios capazes de guiar os professores nesse caminho de reinvenção, onde faz-se primordial ensinar matemática a partir de uma mentalidade de crescimento, informando constantemente aos alunos sobre a incrível plasticidade do cérebro, apresentando evidências científicas de como os erros e os momentos de esforço são excelentes alavancas de aprendizagem e, principalmente, mostrando uma matemática multidimensional, flexível e profunda, repleta de conexões que tornam-na ferramenta de observação do mundo e de solução de problemas reais. Tudo isso, amparado em tarefas abertas e visuais, que valorizam as várias formas de ser matemático e estimulam o trabalho colaborativo, transformando a sala de aula em um ambiente de respeito às diferenças, de construção de conhecimentos, troca de ideias e apreciação da criatividade.

> Quando fazemos essas mudanças para os alunos, isso não apenas melhora as notas nos testes, mas também muda quem eles são como pessoas. Se queremos que nossos alunos se tornem os jovens adultos que nossa sociedade precisa - aqueles que se envolvem no pensamento do século XXI, raciocinando, conectando e colaborando-, as salas de aula de matemática devem se tornar lugares em que os alunos acreditam em seu próprio potencial ilimitado e se engajam ativamente com ideias matemáticas. Essas salas de aula são mais interessantes para os alunos e para os professores. Somos todos aprendizes de matemática e todos podemos desenvolver relacionamentos ativos e investigativos com a matemática. Quando o fazemos, e a matemática se torna um espaço aberto e criativo de investigação, os aprendizes de matemática descobrirão que poderão fazer qualquer coisa [...] (BOALER, 2019c).

Nessa perspectiva, conseguimos compreender a importância ímpar das tarefas para um ensino de matemática efetivo, visto que é a partir delas que o estudante se coloca como autor e protagonista. Trabalhar apenas com extensas listas de tarefas rasas e descontextualizadas, de praxeologia pontual e local, não instiga a criatividade e autonomia do estudante, pois geralmente exigem apenas a aplicação de técnicas recém estudadas e acabam por tornar-se um exercício de repetição e memorização. Do contrário, quando são escolhidas tarefas investigativas, contextualizadas, de praxeologia regional e global, trabalhadas sob o viés das chaves para aprendizagem, todo o saber matemático pode ser envolvido, possibilitando a formação de conexões neurais fortes e duradoras e, consequentemente, a aprendizagem propriamente dita. “O cérebro só é capaz de comprimir conceitos; ele não é capaz de comprimir regras e métodos” (BOALER, 2018, p.35), sendo assim, a escolha de tarefas que permitem a exploração da matemática de forma conceitual é primordial.

As pesquisas de Boaler também permitiram com que conhecêssemos estratégias pedagógicas com vista no desenvolvimento de cidadãos aptos a construir modelos, investigar e resolver problemas, capacitando-os a mobilizar e autogerir seu raciocínio, representação, argumentação e comunicação, com base em discussões e trocas de ideias entre seus pares, de forma similar ao que presume a BNCC (BRASIL, 2018, p.529).

A partir disso, ainda, foi possível constatar que, mesmo com a redução da carga horária de matemática no Novo Ensino Médio (em escolas regulares), promover um ensino de matemática efetivo é plausível, desde que o mesmo não seja embasado em inúmeros saberes fragmentados mas sim, construído e consolidado por meio de grandes eixos centrais, a serem estabelecidos em conjunto, pelo corpo docente de cada escola. A fragmentação dos saberes matemáticos em pequenos conteúdos desconexos - fenômeno comum até então nas escolas brasileiras - é um dos grandes entraves do ensino matemático e, por conseguinte, propulsor de problemas de ansiedade matemática e resultados negativos com relação a essa disciplina. Quando os professores preocupam-se em perpassar todos os conteúdos listados nos currículos tradicionais, se veem obrigados a tratá-los de forma rápida e superficial, mostrando técnicas e algoritmos através de aulas expositivas e solicitando aos alunos apenas a reprodução e repetição dos mesmos. As ideias são desconexas e apenas aqueles com facilidade de memorização se destacam. Do contrário, quando o conhecimento matemático é ensinado com base em eixos centrais (defendido por Boaler e também sugerido na BNCC), possibilita-se ao estudante uma visão geral da matemática o que pode facilitar a construção do conhecimento matemático em todos os níveis praxiológicos: *praxis* (saber fazer) e *lôgos* (saber).

Ainda, dentre os pontos estudados destacamos a necessidade de desmistificar a ideia de que se deve ensinar para que os estudantes sejam bem sucedidos em avaliações externas, bem como a perspectiva de que dar notas a tarefas e testes estimula e incentiva os alunos. Segundo Boaler, quando se ensina por meio de grandes ideias e de tarefas abertas e visuais, a matemática é aprendida de maneira muito mais eficaz e, mesmo que os estudantes não sejam preparados intencionalmente para exames, seu desempenho em testes externos posteriores mostra-se satisfatório, já que os mesmos aprenderam uma matemática conceitual e não uma série de regras e procedimentos memorizados. Ainda, a atribuição de notas geralmente tem efeito negativo, alimentando fortemente a crença de que erros são ruins e que alunos podem ser classificados e definidos por um número isolado.

Em se tratando de avaliação, portanto, estimula-se o uso da avaliação para aprendizagem (formativa) que, ao contrário de simples números, confere aos estudantes informações sobre o que sabem, o que ainda precisam aprender e de que forma podem mitigar a distância entre estes dois posicionamentos. O uso de auto avaliações, bilhetes de saída, momentos de reflexão sobre o que foi aprendido no fim das aulas e rubricas são formas de auxiliar o professor nesse processo que dá aos estudantes poder e conhecimento sobre seu aprendizado, incentivando a formação de cidadãos autônomos e conscientes de seu papel central como aprendizes.

Compreender as noções da TAD e da NC nos permitiu, assim, estabelecer conexões entre essas teorias o que se fez fundamental para a posterior análise dos documentos de referência da educação na modalidade Ensino Médio, feita no capítulo 2 e para a construção do MPDMA, apresentada no capítulo 3. A partir destas constatações, conseguimos identificar aproximações entre as propostas de ensino elucidadas na BNCC e as teorias apresentadas, possibilitando o apontamento de abordagens alternativas para um ensino de matemática sob as novas perspectivas, e ainda tendo em vista o uso de tarefas visuais e abertas, de praxeologia regional e global.

Embora existam muitos estudos publicados e, inclusive, uma popularização sobre ensino focado no aluno, professor como mediador e não transmissor de conhecimento e ensino de matemática baseado na resolução de problemas, ainda há carência de ferramentas acessíveis ao professor do ensino básico. Abrimos um parêntese aqui, para defender essa afirmação: certamente estes estudos podem sim ser encontrados e explorados por professores, especialmente devido às facilidades que a internet proporciona, entretanto, sabe-se que a realidade do professor de ensino básico se resume a muitas horas em sala de aula, às vezes com atuação em mais de uma escola, e, portanto, pouco tempo para planejamento e estudos aprofundados.

O MPDMA foi criado assim, frente à demanda de materiais de apoio aos docentes, com foco em dicas e informações práticas e claras a respeito de uma abordagem matemática embasada na multiplicidade, flexibilidade e profundidade, que utiliza tarefas matemáticas visuais e abertas e que elucidam possibilidades e estratégias didáticas capazes de proporcionar um ensino de matemática de qualidade, e com significado para o estudante.

O MPDMA, como produto principal de nosso trabalho, conta com infográficos que compilam as principais ideias defendidas neste texto, além de uma sugestão de organização curricular para a matemática do Ensino Médio, embasada em um ensino sob eixos centrais, de forma alinhada às expectativas da BNCC. Nosso modelo abre as portas para a criação de outros materiais que objetivem ajudar o professor no processo de organização e planejamento de aulas, escolha de tarefas e elaboração de avaliações formativas.

Senso assim, este trabalho traz contribuições teóricas e práticas para possíveis leitores docentes brasileiros, que buscam adequar-se aos objetivos e exigências da Educação Matemática contemporânea. Atrelando os estudos da Didática da Matemática, da Neurociência Cognitiva e da educação, fornece exemplos de estratégias simples, que podem ser melhor experimentadas por qualquer professor, em qualquer contexto de ensino, desde que o mesmo esteja aberto a incertezas e desafios que certamente surgirão durante as aulas.

As contribuições dessa pesquisa, entretanto, extrapolam o modelo por ela criado já que traz em pauta as aproximações entre a Didática da Matemática, a Neurociência Cognitiva e a Base Nacional Comum Curricular, temática pouco encontrada nas publicações brasileiras. De maneira especial, o estudo aprofundado e detalhado das chaves da aprendizagem de Jo Boaler, que mostrou-se primordial para a elaboração do MPDMA, também abre portas para a comunidade científica brasileira, levando-se em consideração que, embora o instituto Sidarta se dedique à tradução de materiais publicados no Youcubed, a difusão e adoção das mentalidades matemáticas ainda são tímidas no Brasil.

Sendo assim, fica o convite a pesquisadores, docentes e instituições de ensino, implementar as ideias apresentadas nesse trabalho e difundir essa nova perspectiva de ensino de matemática, a fim de verificar os resultados no cenário brasileiro, que se caracteriza por sua diversidade e pluralidade.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J.R.; SANTOS; M.C. Pensamento Algébrico: em busca de uma definição. *RPEM*, Campo Mourão, PR, v. 6, n.10, p. 34-60, 2017. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8650717/18882>. Acesso em 06 abr. 2020.

BAHIA. *Secretaria da Educação do Estado da Bahia.* Documento orientador de implementação do novo Ensino Médio, 2020. Disponível em: <http://jornadapedagogica.educacao.ba.gov.br/wp-content/uploads/2020/01/Documento-Orientador-Novo-Ensino-M%C3%A9dio-na-Bahia-Vers%C3%A3o-Final.pdf>. Acesso em 09 out. 2020.

BECKER, F. Construção do conhecimento matemático: natureza, transmissão e gênese. *Bolema,* Rio Claro, SP, v. 33, n. 65, p. 963-987, 2019. Disponível em: < https://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n65/1980-4415-bolema-33-65-0963.pdf>. Acesso em 10 out. 2020.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas:* estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. revisão técnica: Fernando Amaral Carnaúba, Isabele Veronese, Patrícia Cândido. - Porto Alegre: Penso, 2018.

BOALER, J. *Mente sem barreiras*: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem/ Jo Boaler; tradução: Daniel Bueno; revisão técnica: Eliane Reame, Walter Spinelli - Porto Alegre: Penso, 2020.

BOALER, J. Developing Mathematical Mindsets: The Need to Interact with Numbers Flexibly and Conceptually. *American Educator, [s. l.]*, v. 42, n. 4, p. 28–33, 2019a. Disponível em:< http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1200568&lang=pt-br&site=eds-live>. Acesso em: 25 mar. 2020.

BOALER, J. *Fluência sem Medo*: Pesquisas Mostram as Melhores Formas de Aprender Fatos Matemáticos, 2019b. Disponível em português em: <https://www.youcubed.org/pt-br/evidence/fluencia-sem-medo/>. Acesso em 14 abr. 2020.

BOALER, J. *Prove it to me! Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia, EUA: NCTM, vol. 24, no. 7, 2019c. Versão traduzida disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/09/Proveparamim_artigoJoBoaler_Revisado-youcubed.pdf>. Acesso em 15 abr. 2020.

BOALER, J. CHEN, L. WILLIAMS, C. CORDERO, M. Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics.* v.5, n. 5, p. 1-6, mar. 2016. Tradução por Instituto Sidarta. Versão em inglês disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2017/04/JACmaths-seeing-article.pdf>. Versão traduzida disponível em:

<https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/05/COD12_Seeing_as_Understanding_PORTUGUESE_logo_v2GA-_1_.pdf>. Acesso em 29 set. 2020.

BOALER, J. DEVLIN, K. *Palestra proferida em Stanford*, Califórnia, 2019. Disponível em:< https://www.YouCubed.org/pt-br/resources/the-nature-of-21st-century-mathematics/>. Acesso em 24 mar. 2020.

BOALER, J. MUNSON, J. WILLIAMS, C. *O que é a Beleza Matemática? Ensinando Por Meio de Grandes Ideias e Conexões.* Disponível em: <https://www.YouCubed.org/wp-content/uploads/2020/01/O-que-%C3%A9-a-Beleza-Matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em 30 mar. 2020.

BOALER, J.. LAMAR, T. *Valorizando a diferença e o crescimento*: uma perspectiva do YouCubed sobre a educação inclusiva. 2019. Disponível em:<https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/02/Valorizando-a-diferen%C3%A7a-e-o-crescimento-uma-perspectiva-do-youcubed-sobre-a-Educa%C3%A7%C3%A3o-Inclusiva-.pdf> Acesso em 25 mar. 2020.

BOALER, J. SELLING, S.K. *Psychological Imprisonment or Intellectual Freedom?* A Longitudinal Study of Contrasting School Mathematics Approaches and Their Impact on Adults' Lives. Versão resumida do artigo publicado na revista científica: Journal for Research in Mathematics Education, 2017, 48 (1), p. 78-105. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2017/03/JRME-short-final-1.pdf>. Acesso em 15 abr. 2020.

BRASIL. *Ministério da Educação.* Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 09 jun. 2020.

BRASIL. *Ministério da Educação.* Programa de apoio ao novo Ensino Médio - Documento Orientador da portaria nº 649/2018, 2018b. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 09 jun. 2020.

BRASIL. *Constituição da República Federativa do Brasil (1988)*. Brasília, DF: Senado Federal, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 30 set. 2020.

BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 30 set. 2020.

BROCKINGTON, G. *Neurociência e educação: investigando o papel da emoção na aquisição e uso do conhecimento científico*. Orientação Maurício Pietrocola. São Paulo: s.n., 2011. 199p.

CHEVALLARD,Y. Sobre a Teoria da Transposição Didática: algumas considerações introdutórias. *Revista de Educação, Ciências e Matemática.* v.3, n.2, mai/ago 2013.

DEVLIN, K. *Mathematics is a Way of thinking-how can we best teach it?* Devlin's Angle. Mathematical Association of America. Washington, D.C., julho 2019. Tradução nossa. Disponível em: <https://www.mathvalues.org/masterblog/2019/6/27/mathematics-is-a-way-of-thinking-how-can-we-best-teach-it >. Acesso em 25 mar 2020.

DEVLIN, K. *In Math You Have to Remember, In Other Subjects You Can Think About It.* Devlin's Angle. Mathematical Association of America. Washington, D.C., junho 2010. Disponível em: <https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_06_10.html>. Acesso em 25 mar 2020.

DEVLIN, K. *O instinto matemático:* Por que você é um gênio da matemática. Tradução Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record; 1 ed. 2009.

DIAS, N. M.; TREVISAN, B. T.; PRADO, J. M.. Funções executivas em crianças pré-escolares: Desenvolvimento da atenção seletiva medida pelo Teste de Atenção por Cancelamento. *Cad. psicopedag.*, São Paulo, 2012 . Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1676-10492011005000005&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 25 set. 2020.

ERTHAL, F. et al. Captura da atenção por estímulos emocionais. *Paidéia:* Ribeirão Preto, v. 14, n. 27, p. 35-44, abr. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-863X2004000100006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 23 set. 2020.

FONSECA, A.G. VILELA,D.S. Livros Didáticos e Apostilas: o currículo de matemática e a dualidade do Ensino Médio. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 28, n. 49, p. 557-579, abr. 2014.
FÓZ, A. Neurociência na Educação I. *Neurociência aplicada à aprendizagem*. São José dos Campos: Pulso, p. 169-184, 2009.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas/* EAESP /FGV. São Paulo, v. 35, n.3, p. 20-29 Mai./Jun. 1995. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/rae/v35n3/a04v35n3.pdf>. Acesso em 20 de jul. 2020.

GOULART, J. S. S. FARIAS, L. M. S. Uma Leitura Utilizando a Lente da Teoria Antropológica do Didático acerca de uma Aula sobre Expressões Numéricas. *Bolema,* Rio Claro (SP), v.33, n.65, p. 1570-1594, dez. 2019.

HENRIQUES, A. NAGAMINE, A. NAGAMINE, C. M. L.Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v.26, n.44, p.1261-1288, dez. 2012.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Relatório SAEB* [recurso eletrônico]. – Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2019. 162 p. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/RELAT%C3%93RIO+SAEB+2017/fef63936-8002-43b6-b741-4ac9ff39338f?version=1.0>.Acesso em 08 abr. 2020.

LIMA, R.F. Compreendendo os mecanismos atencionais. *Ciências & Cognição,* v. 6, p. 113-122, 2005. Disponível em: <

http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/548/319>. Acesso em 22 set. 2020.

LOBATO, A.S. Um sistema gerenciador de rubricas para apoiar a avaliação em ambientes de aprendizagem. Dissertação (mestrado) - UFPA / ICEN / PPGCC. Campus Universitário do Guamá. Belém, 2011.81f. Disponível em: <http://ppgcc.propesp.ufpa.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es_2011/Antonio%20Soares%20Lobato_Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em 06 nov. 2020.

LUCAS, C. FONSECA, C. GASCÓN, J. CASAS, J. O fenômeno didático institucional da rigidez e a atomização das organizações matemáticas escolares. *Bolema,* Rio Claro, SP, v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014.

MAIA, V. Funções neuropsicológicas e desempenho matemático: um estudo com crianças da 2ª série. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Porto Alegre, 2010. 70 f. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/25846>. Acesso em 25 set. 2020.

MEC. *Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil*. 03 dez. 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-Pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>. Acesso em 07 abr. 2020.

MEC. *Guia de Implementação do Novo Ensino Médio.* Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/documento-orientador.pdf>. Acesso em 09 jun. 2020. (MEC, a).

MELLO, C. B. Pensamento, inteligência e funções cognitivas. *Neurociência aplicada à aprendizagem*. São José dos Campos: Pulso, p. 81-104, 2009a.

MORELATTI, M. R. M. *et al.* Sequências didáticas descritas por professores de matemática e de ciências naturais da rede pública: possíveis padrões e implicações na formação pedagógica de professores. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 20, n.3, p. 639-652, 2014.

MOURA-SILVA, M.G. NETO, J.B.T. GONÇALVES, T.O. Bases Neurais da Ansiedade Matemática: implicações para o processo de ensino-aprendizagem. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 34, n. 66, p. 246-267, abr. 2020.

PANTANO, T. ASSENCIO-FERREIRA, V. J. Introdução às Neurociências. *Neurociência aplicada à aprendizagem*. São José dos Campos: Pulso, p. 11-22, 2009a.

PANTANO, T. ASSENCIO-FERREIRA, V. J. Atenção e Memória. *Neurociência aplicada à aprendizagem*. São José dos Campos: Pulso, p. 23-35, 2009b.

PINTO, A. H. A Base Nacional Comum e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 1045-1060, dez. 2017.

RODRIGUES, P. F. S. Processos Cognitivos Visuoespaciais e Ambiente Visual Circundante: Implicações Educacionais. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, Brasília, v. 32 n. 4, e32424, p. 1-

10, 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-37722016000400204&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 22 set. 2020.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1456/979>. Acesso em 08 set. 2020.

SHACKETON-JONES, N. Towards a Working Theory of Learning: The Affective Context Model. *Aconventional.com.* Maio 2010. Disponível em:<http://www.aconventional.com/2010/05/towards-working-theory-of-learning.htm> Acesso em: 02 abr. 2020.

SILVA, J. P. da. *Transposição didática ou ressignificação pedagógica:* O ensino de sociologia no Ensino Médio. Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Sociais e Humanas, Curso de Licenciatura em Ciências Sociais, RS, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/2630/silva_janderson_pereira_da.pdf?sequence=3&isAllowed=y>. Acesso em: 08 set. 2020.

SILVA, C. V. *A Noção de Ecologia do Didático Aplicada ao Conceito de Simetria Ortogonal.* XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, jul. 2016. Disponível em: <https://silo.tips/download/a-noao-de-ecologia-do-didatico-aplicada-ao-conceito-de-simetria-ortogonal>. Acesso em 11 set. 2020.

SILVA, L. P. et al. Habilidades visuoespaciais na aprendizagem matemática: o que revelam os estudos do cérebro? *EMR,* RS. v.1, n.20, p.110-119, 2019. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1898>. Acesso em 24 set. 2020.

SILVA, L. P. *Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas*: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da Neurociência Cognitiva. 2019. 209 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2019. Disponível em: <https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFS-2_919b8c024540a85ab0d71e9594c41610>. Acesso em 25 set. 2020.

VALLE, L. F. *Mathematical Mindsets (mentalidades matemáticas): uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das matemáticas.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP. São Paulo. 2019. 128f.

WAJNSZTEJN, R. ALESSI, R. Crescimento, Desenvolvimento e Envelhecimento do Sistema Nervoso. *Neurociência aplicada à aprendizagem*. São José dos Campos: Pulso, p. 37-59, 2009.

YIN, R.K. *Pesquisa qualitativa do início ao fim* [recurso eletrônico]. Tradução: Daniel Bueno; revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=AeafCwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT5&dq=pesquisa+qualitativa&ots=W5-

dGIaSAx&sig=LhsyJ3WYIdenBuN-
WI2hjP72_wI#v=onepage&q=pesquisa%20qualitativa&f=false>. Acesso em 15 ago. 2020.

LISTA DE APÊNDICES

As chaves para aprendizagem

CRESCIMENTO DO CÉREBRO

Há uma necessidade urgente de abandonar a ideia de rigidez do cérebro pois o cerne da aprendizagem está na modificação cerebral, mais especificamente, nas sinapses.
Otimizar o aprendizado requer a estimulação destas sinapses, sendo que a multiplicidade dos estímulos externos é que determinará a complexidade das ligações entre as células e como elas se comunicarão no sistema nervoso.

ESFORÇO

Acertar respostas não é um bom exercício mental: há muito mais em aprender errando do que simplesmente chegando ao resultado correto (BOALER, 2020).
Ao cometemos erros nosso cérebro é desafiado e cresce, independente de nossa consciência sobre eles. Os erros e o esforço, assim, são essenciais para a aprendizagem.

MENTALIDADES

Quando o aluno vê a matemática como um conjunto de ideias e relações e, ao mesmo tempo, consegue perceber seu papel de pensar e dar sentido a essas relações, neste momento ele está tendo mentalidade matemática.
Isso reflete uma abordagem ativa para conhecimentos de matemática, dando sentido aos números e às quantidades.

MULTIPLICIDADE

A matemáticas pode ser representada através de números, palavras, imagens, modelos, algoritmos, tabelas e gráficos, por meio de movimentos e do tato, etc.
Aprender matemática usando dois ou mais desses meios possibilita que diferentes áreas cerebrais sejam estimuladas e se comuniquem, permitindo uma maximização da experiência de aprendizagem.

FLEXIBILIDADE E PROFUNDIDADE

Utilizar os diversos registros de representações matemáticos de forma flexível, bem como, utilizar a flexibilidade na articulação sistemática de diferentes interpretações do mesmo objeto matemático são condições essenciais para a aprendizagem matemática (LUCAS et. al, 2014).
Além disso, a aprendizagem está intrinsecamente ligada à integração de conceitos e não a informações desconexas memorizadas, por isso há extrema importância de trabalhar com profundidade.

COLABORAÇÃO

Uma aula planejada para a colaboração, cria um ambiente de liberdade de expressão, permite que os alunos se abram às discussões e questionem-se uns aos outros sobre como estão pensando e como veem cada problema; não há distinções entre quem sabe mais ou menos e aqueles que muitas vezes estão inseguros, acabam sentindo-se incluídos, confiantes para expor suas ideias e investidos no trabalho em grupo.

EXPLORANDO AS CHAVES DA APRENDIZAGEM

1 Frequentemente, retome falas e apresente vídeos sobre a plasticidade cerebral e as mentalidades de crescimento.

2 Deixe claro o que você valoriza: profundidade, múltiplas representações, argumentação, erros e esforço.

Isso pode ser feito ao se estabelecer o contrato didático, onde serão decididas as normas das aulas de matemática e também do trabalho em grupo.

3 Cole cartazes na parede reforçando os papeis do trabalho em grupo e a importância da colaboração. Lembre-se de garantir o rodízio de papeis.

Os cartazes também podem conter mensagens de crescimento e incentivo.

4 Aceite desafios e mostre para os alunos que você também tem dificuldades, erra e precisa se esforçar.

5 Para trabalhar um conteúdo ou eixo central, selecione duas ou três tarefas abertas* ao invés de uma extensa lista de exercícios.

6 Quando possível, apresente a tarefa antes da técnica/método, buscando apoio em elementos visuais.

7 Sempre pergunte aos alunos como eles enxergam o problema; peça que desenhem, criem esquemas e utilizem cores e códigos.

8 Reserve um momento para exploração - pode iniciar individualmente e depois haver troca de experiências no grupo.

Circular entre os grupos fazendo anotações e utilizar rubricas e cartões de saída, podem ser excelentes ferramentas.

9 Abra um tempo para discussão coletiva, onde os grupos expõem suas ideias e argumentos.

Aproveite para problematizar as soluções incentivando a exploração dos problemas sob novas perspectivas.

10 Solicite a expansão das tarefas. Estimule a criação de problemas mais difíceis, com novos parâmetros, bem como a busca por aplicabilidade em situações reais.

11 Avalie o processo, não apenas o produto final.

*PARA QUE AS TAREFAS SEJAM ABERTAS, OBSERVE SE:

- CONTÉM MÚLTIPLOS PONTOS DE ENTRADA;
- ENCORAJAM DIFERENTES MANEIRAS DE SER ENXERGADAS;
- CONTÉM CAMINHOS E ESTRATÉGIAS VARIADAS PARA ENCONTRAR SOLUÇÕES;
- FAVORECEM O ESFORÇO PRODUTIVO COMO PARTE NATURAL E ESPERADA DO PROCESSO DE RESOLUÇÃO;
- POSSIBILITAM TROCA DE IDEIAS QUANDO TRABALHADAS EM GRUPOS;
- FAVORECEM CONEXÕES ENTRE DIFERENTES IDEIAS MATEMÁTICAS;
- ESTIMULAM A INVESTIGAÇÃO;
- SÃO DESAFIADORAS, MAS ACESSÍVEIS A TODOS;

ORGANIZANDO O TRABALHO EM GRUPO

Instrução complexa

Multi-dimensionalidade

Valorize todas as formas de ser matemático

"Ninguém é bom em todas as maneiras de trabalhar matemática, mas todos são bons em algumas delas"

Atribuição de competências

Elogie e eleve o status dos alunos

Dê um feedback público, intelectual e específico

Papéis

Facilitador

Repórter/ registrador

Monitor de recursos

Harmonizador

Responsabilidade compartilhada com os estudantes

Estabeleça um contrato didático onde os alunos deixem claro o que gostam e o que não gostam no trabalho em grupo

Atribua notas aos grupos (teste de participação)

Aplique provas de grupo

Selecione um aluno pra responder determinada pergunta

Saber trabalhar em grupo de forma colaborativa não é uma habilidade nata: os estudantes precisam ser preparados para a cooperação.

"Gastar" tempo de suas aulas para acentuar a importância da comunicação, da criação de boas perguntas, de dar voz a todos, de respeitar as diferentes opiniões e da responsabilidade perante o aprendizado dos demais colegas é essencial.

O trabalho do professor como mediador, enaltecendo boas perguntas feitas pelos alunos, incentivando a responsabilidade compartilhada (por meio das provas de grupo, por exemplo), ou a participação de todos através de anotações feitas no decorrer das aulas (que se transformam em notas) favorece a construção de uma cultura colaborativa.

Por fim, mas não menos importante, a escolha de tarefas abertas é a base para que o trabalho em grupo proporcione o desenvolvimento de habilidades de cooperação já que, através delas, todas as formas de ser matemático são valorizadas.

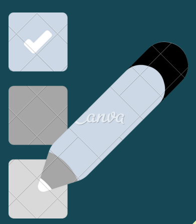
AVALIANDO PARA APRENDIZAGEM

ONDE OS ESTUDANTES ESTÃO AGORA?

Comunicar claramente os alunos sobre o que eles aprenderam.

ONDE OS ESTUDANTES PRECISAM ESTAR?

Ajudar os alunos a se conscientizarem sobre onde eles estão em sua jornada de aprendizagem e onde precisam chegar.

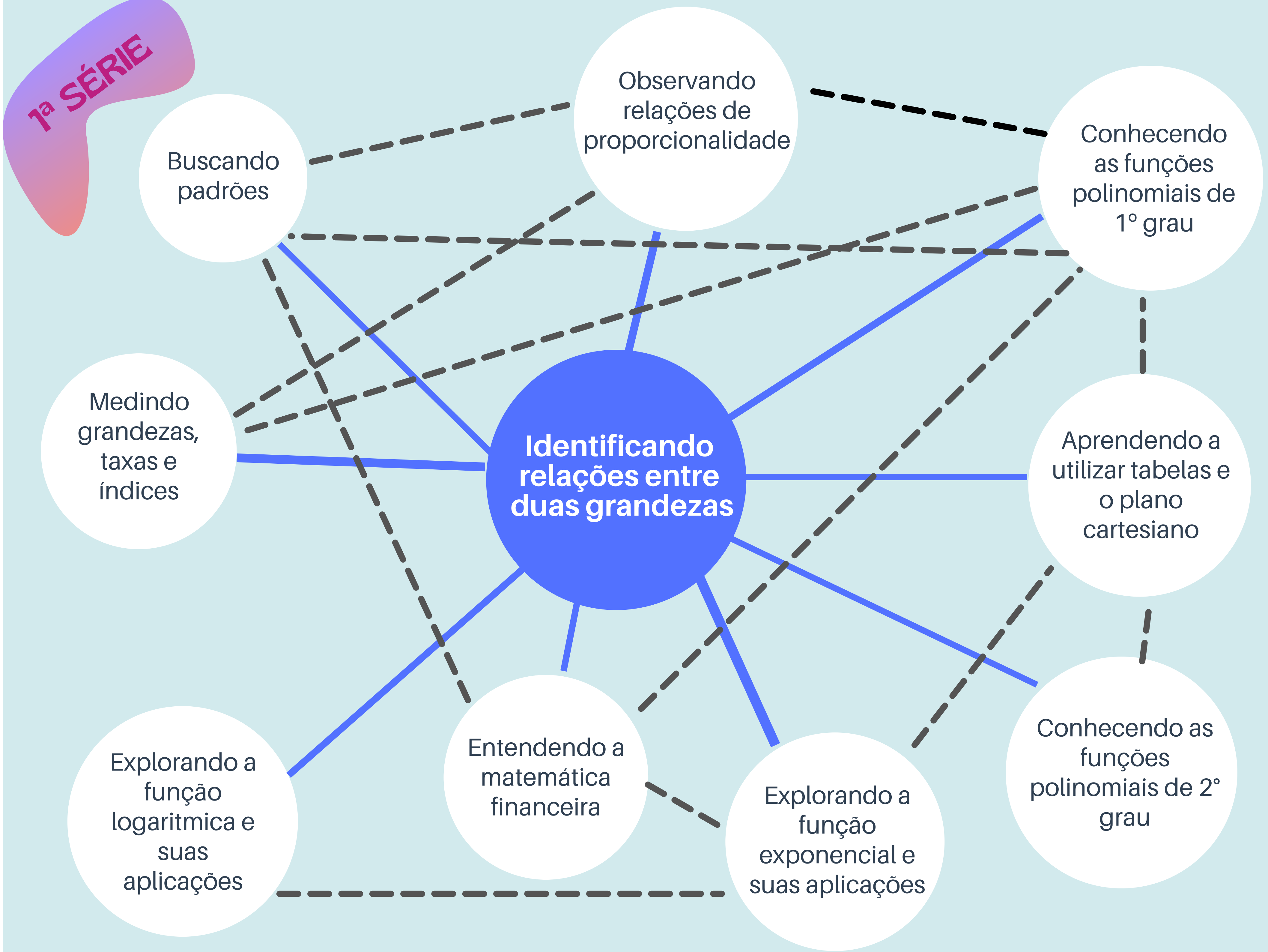


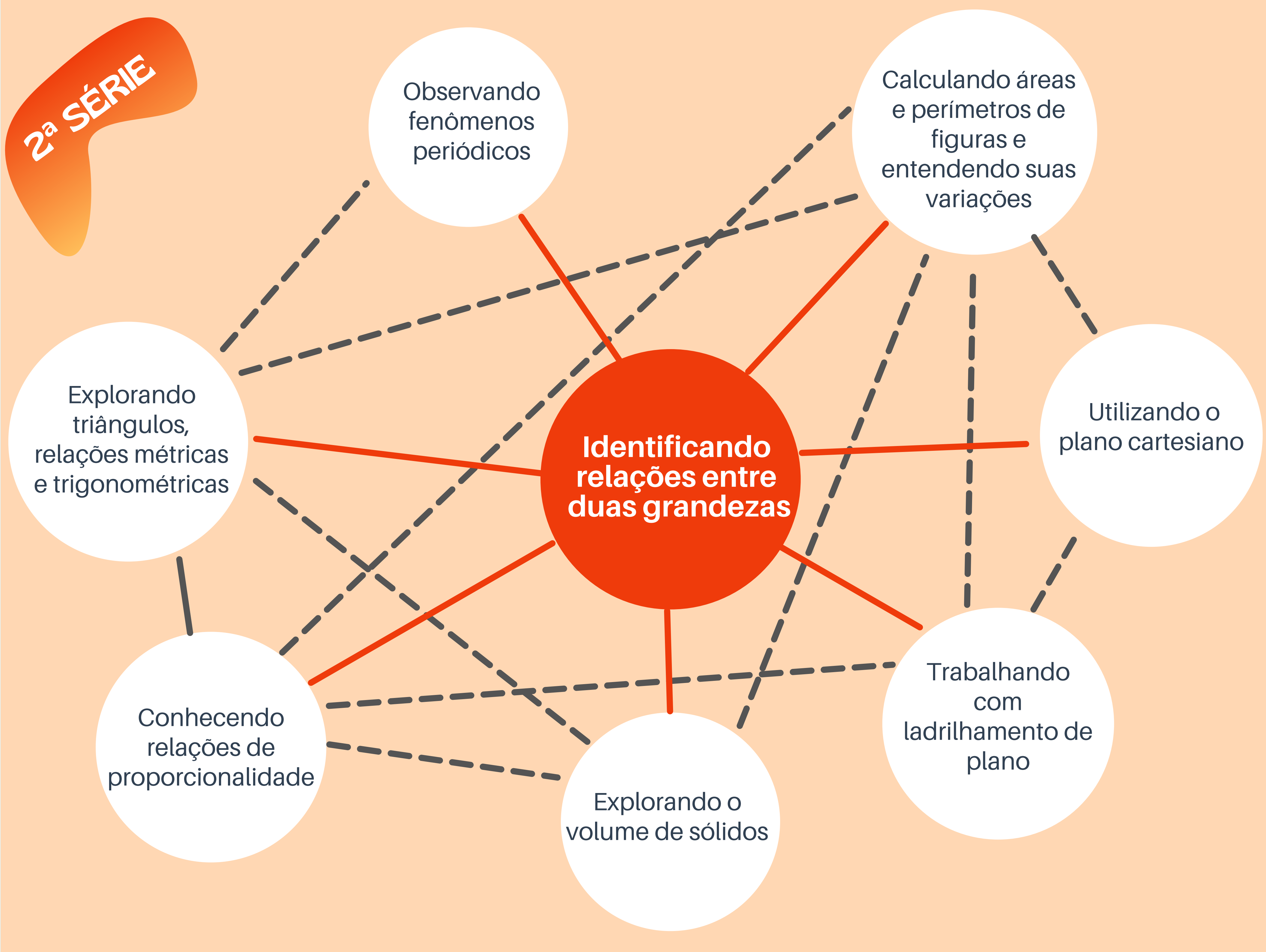
DE QUE FORMA AS LACUNAS ENTRE OS DOIS PODE SER REDUZIDA?

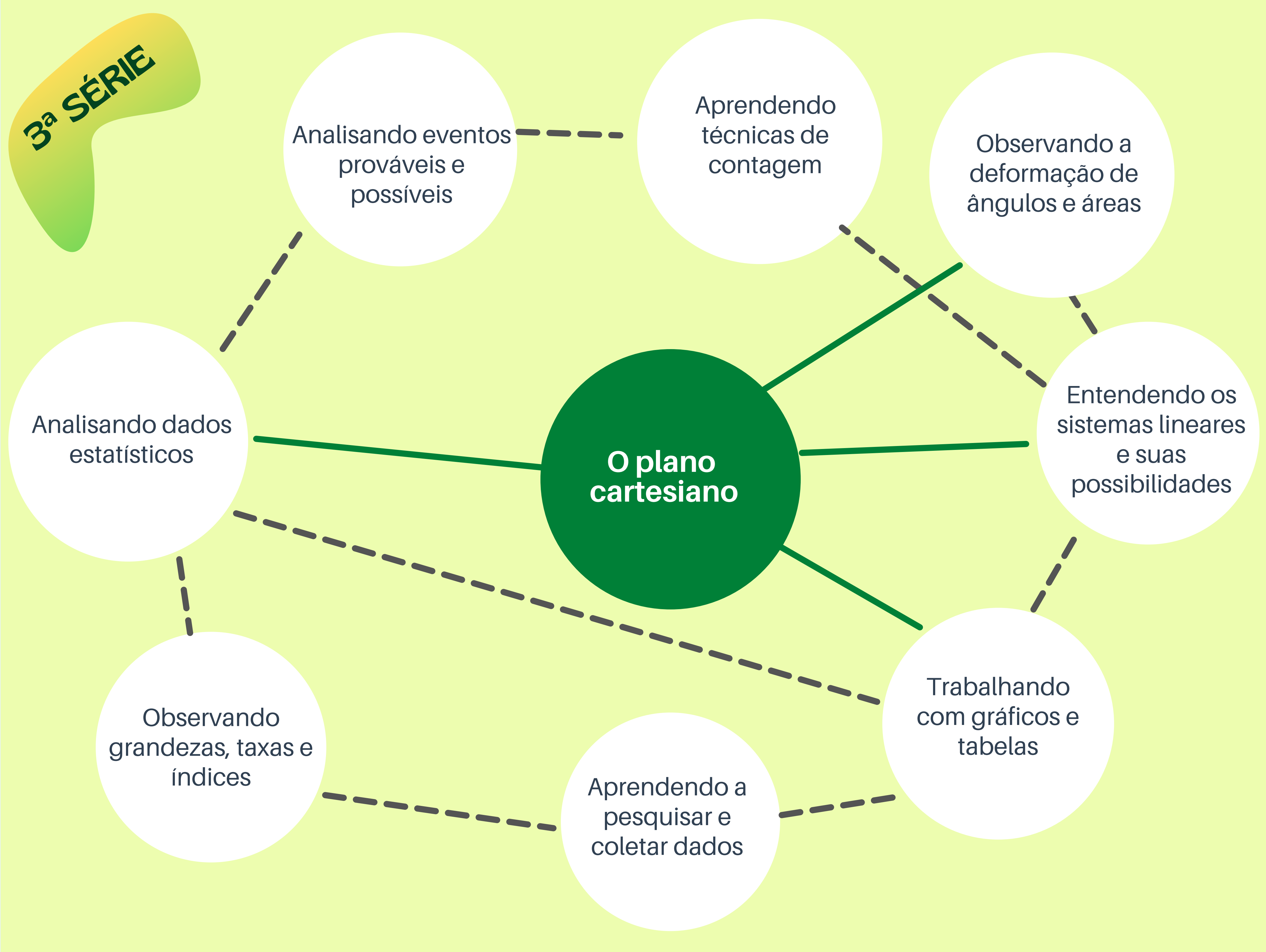
Dar aos alunos informações sobre maneiras de preencher a lacuna entre o ponto em que se encontram e o ponto em que precisam chegar.

SUGESTÕES

- ✓ Utilize **auto avaliações** (itens que devem comunicar conteúdos ou práticas matemáticas) ou **avaliações por pares** (os alunos avaliam o trabalho dos colegas - o método duas estrelas e um pedido é uma boa maneira de fazê-lo).
- ✓ Reserve um momento da aula para **reflexões** sobre o aprendizado (entregar pequenos cartões com perguntas reflexivas, bilhetes de saída ou até mesmo solicitar a criação de desenhos e esquemas sobre os aprendizados do dia ajudam na prática de metacognição).
- ✓ Permita que os estudantes sinalizem, em tempo real, **como estão se sentindo** sobre os novos conteúdos aprendidos (isso pode ser feito através da dinâmica do semáforo ou de formulários *on-line*).
- ✓ Proporcione momentos em que os alunos tornam-se **especialistas** e precisam **ensinar uns aos outros** (que tal usar a dinâmica dos grupos de quebra-cabeças?).
- ✓ Estimule os alunos a **elaborar suas próprias perguntas e testes**, permitindo que analisem o que é importante sobre cada tema/conteúdo, usem sua criatividade e, ao mesmo tempo, forneçam informações sobre o modo como estão enxergando a matemática aprendida.
- ✓ Use **rubricas** para explanar os objetivos de cada tarefa de forma nivelada, possibilitando ao estudante perceber e sinalizar em que nível ele se encontra e como ele pode proceder para maximizar sua aprendizagem.


1ª SÉRIE
Identificando relações entre duas grandezas
Buscando padrões
Observando relações de proporcionalidade
Conhecendo as funções polinomiais de 1° grau
Medindo grandezas, taxas e índices
Aprendendo a utilizar tabelas e o plano cartesiano
Explorando a função logaritmica e suas aplicações
Entendendo a matemática financeira
Explorando a função exponencial e suas aplicações
Conhecendo as funções polinomiais de 2° grau


2ª SÉRIE
Observando fenômenos periódicos
Calculando áreas e perímetros de figuras e entendendo suas variações
Explorando triângulos, relações métricas e trigonométricas
Identificando relações entre duas grandezas
Utilizando o plano cartesiano
Conhecendo relações de proporcionalidade
Trabalhando com ladrilhamento de plano
Explorando o volume de sólidos


3ª SÉRIE
Analisando eventos prováveis e possíveis
Aprendendo técnicas de contagem
Observando a deformação de ângulos e áreas
Analisando dados estatísticos
O plano cartesiano
Entendendo os sistemas lineares e suas possibilidades
Trabalhando com gráficos e tabelas
Observando grandezas, taxas e índices
Aprendendo a pesquisar e coletar dados