



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

HENRIQUE AUGUSTO SCHÜRMAN

CRIPTOGRAFIA MATRICIAL APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Londrina

2013

HENRIQUE AUGUSTO SCHÜRMAN

CRIPTOGRAFIA MATRICIAL APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo.

Londrina
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S394c Schürmann, Henrique Augusto.
Criptografia matricial aplicada ao ensino médio / Henrique Augusto Schürmann.
– Londrina, 2013.
76 f. : il.

Orientador: Eliandro Rodrigues Cirilo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de
Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática (Ensino médio) –
Teses. 3. Matrizes (Matemática) – Conceitos – Teses. 4. Criptografia – Teses. I. Cirilo,
Eliandro Rodrigues. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática.
IV. Título.

CDU 51:37.02

HENRIQUE AUGUSTO SCHÜRMAN

CRIPTOGRAFIA MATRICIAL APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná – Campus Londrina

Londrina, ____ de _____ de 2013.

*Aos meus pais, Ronaldo e Sônia, a minha irmã,
Janaina, ao meu cunhado, André, e ao meu
afilhado, Lucas Henrique, por me incentivarem
na busca da realização dos meus sonhos.*

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, fonte de inspiração, esperança e perseverança.

Aos meus pais, minha irmã, meu cunhado e meu afilhado, pelo apoio nos momentos de fraquezas e angústias.

Aos professores e colegas do PROFMAT, que compartilharam momentos de alegrias e tristezas enquanto estivemos juntos.

Em especial, ao professor Doutor Eliandro Rodrigues Cirilo, pela confiança, apoio, disposição, dedicação e paciência em me orientar neste trabalho.

Aos professores Doutor Paulo Laerte Natti e Doutor André Luis Trevisan, pelo auxílio com suas sugestões e críticas, fazendo com que este trabalho fosse finalizado.

Às amigas Ana Regina Zubiolo e Kelly Cheron Yamasaki Zechner, pelo auxílio e incentivo na finalização deste trabalho.

À amiga Claudia Santos Codato Segura, pela disposição e carinho demonstrado nos momentos de necessidade.

À grande amiga Karla Goessler, por estar sempre presente em minhas conquistas, nos momentos de alegrias, tristezas e dores compartilhadas.

Ao grande amigo Hugo Bizetto, por se fazer presente em minha vida mesmo à distância.

Aos amigos do Grupo de Oração para Jovens “Fonte de Vida”, pela oração e demonstração de verdadeira amizade nos momentos mais difíceis.

Aos amigos do Colégio Estadual “Professor Francisco Villanueva” e do Colégio Estadual “Presidente Kennedy”, pela compreensão e auxílio nos momentos de necessidade.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

*“A escada da Sabedoria tem
os degraus feitos de números!”*

Blavatsky

SCHÜRMAN, Henrique Augusto. **Criptografia Matricial Aplicada ao Ensino Médio**. 2013. 76 folhas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos o problema contextualizado como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, bem como algumas atividades relacionadas ao conceito de matrizes. Realizamos, inicialmente, algumas considerações sobre a Criptografia, que é o contexto gerador das atividades contextualizadas. Em seguida, procuramos discutir a importância do ensino de matrizes no Ensino Médio segundo documentos oficiais – os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Por fim, a partir da releitura do drama shakespeariano – *Romeu e Julieta*, desenvolvemos o estudo de matrizes e suas operações, apresentando cinco problemas contextualizados com a Criptografia.

Palavras-chaves: Contextualização, Criptografia, Matrizes.

SCHÜRMAN, Henrique Augusto. **Encryption with Matrices Applied to High School**. 2013. 76 sheets. Dissertation (Professional Master in Mathematics in National Network – PROFMAT) – Londrina State University, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this paper, we present the context of alternative pedagogical issues for teaching and learning of Mathematics in high school, as well as some activities related to the concept of matrix. We conducted initially some considerations about the encryption, which is the generative context of the contextualized activities. Next, we seek to discuss the importance of teaching about matrices in high school according to official documents – National Curriculum of High School and Basic Education Curriculum Guidelines of the Ministry of Education of Paraná. Finally, from the retelling of the Shakespearian drama – Romeo and Juliet –, we developed the study of matrices and their operations, featuring five contextualized problems with Encryption.

Keywords: Contextualization, Encryption, Matrices.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 – Cifra de Substituição	18
Quadro 2 – Quadro de Vigenère	20
Quadro 3 – Decodificação utilizando a Cifra de Vigenère	21
Quadro 4 – Mensagem decodificada utilizando a Cifra de Vigenère.....	21
Quadro 5 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2003.....	26
Quadro 6 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2004.....	27
Quadro 7 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2003 e 2004.....	27
Quadro 8 – Acréscimo/Decréscimo da Produção de Grãos (em toneladas) de 2003 para 2004, no Sul do Brasil	28
Quadro 9 - Informações Nutricionais dos Alimentos	29
Quadro 10 – Códigos utilizados por Romeu e Julieta	37
Figura 1 – Mensagem codificada por Julieta	37
Quadro 11 – Quadro organizado com os valores recebidos no bilhete de Julieta	38
Quadro 12 – Quadro utilizado para realizar a decodificação da mensagem	40
Quadro 13 – Quadro com os códigos originais da mensagem.....	41
Figura 2 – Mensagem decodificada por Romeu.....	42
Figura 3 – Mensagem que será codificada por Romeu.....	43
Figura 4 – Mensagem que será decodificada por Julieta	45
Figura 5 – Mensagem codificada por Julieta	48
Figura 6 – Mensagem decodificada por Romeu.....	51
Figura 7 – Mensagem que será codificada por Frei Lourenço	53
Figura 8 – Mensagem que será decodificada por Romeu.....	54
Figura 9 – Mensagem codificada por Romeu.....	57
Figura 10 – Mensagem decodificada por Frei Lourenço	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCE – **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática.

PCN+ – **Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio**: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

PCNEM – **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA.....	12
1.2	OBJETIVO DO TRABALHO	14
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	CRIPTOGRAFIA	15
2.1	A IMPORTÂNCIA DA CRIPTOGRAFIA.....	15
2.2	ESTEGANOGRAFIA E CRIPTOGRAFIA	16
2.3	CIFRA DE SUBSTITUIÇÃO MONOALFABÉTICA.....	18
2.4	CIFRA DE VIGENÈRE	19
2.5	CRIPTOGRAFIA RSA	21
3	CONSIDERAÇÕES ACERCA DAS MATRIZES	23
3.1	A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DE MATRIZES	23
3.2	SOBRE O CONCEITO DE MATRIZES.....	24
3.3	TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES	25
3.4	OPERAÇÕES COM MATRIZES	26
4	NOSSA PROPOSTA DE TRABALHO PARA O ESTUDO DE MATRIZES	33
4.1	ATIVIDADE 1: O PRIMEIRO ENCONTRO.....	33
4.2	ATIVIDADE 2: O MATRIMÔNIO.....	42
4.3	ATIVIDADE 3: A SEPARAÇÃO.....	46
4.4	ATIVIDADE 4: PLANOS PARA O REENCONTRO	52
4.5	ATIVIDADE 5: O ETERNO AMOR	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE	64
	APÊNDICE A – ATIVIDADE 1: O PRIMEIRO ENCONTRO	65

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: O MATRIMÔNIO.....	68
APÊNDICE C – ATIVIDADE 3: A SEPARAÇÃO	71
APÊNDICE D – ATIVIDADE 4: PLANOS PARA O REENCONTRO.....	73
APÊNDICE E – ATIVIDADE 5: O ETERNO AMOR	75

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA

Em nossa sociedade, a educação tem grande relevância na formação dos cidadãos, ou seja, é por meio da educação que formamos sujeitos ativos na sociedade. Para que se consiga atingir esse objetivo da Educação Básica – formar cidadãos para agir na sociedade e exercer a cidadania – é necessário que os educandos tenham um conhecimento matemático que será utilizado em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio apontam que

aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111)

Para Ferreira (2013) aprender Matemática de uma forma contextualizada, por meio de uma metodologia, proporciona no educando o desenvolvimento da criatividade e da autonomia; além disso, é possível perceber que esse tipo de abordagem do conteúdo faz com que haja um rompimento com o tradicionalismo, tão presente em nossas atividades cotidianas.

Sendo assim, para que as atividades desenvolvidas em sala de aula produzam aprendizado aos educandos, é necessário que o professor reavalie sua conduta e a importância dos conteúdos a serem trabalhados, pois, como afirma Demo (2000 apud FERREIRA, 2013, p.4),

[...] Enquanto professor e aula copiada forem sinônimos, está garantida a mediocridade [...]. Na verdade, nega-se frontalmente competência, já que meramente copiar é o contrário de inovar. Ensinar a copiar é precisamente destruir qualquer competência, pois

assassina-se o sujeito, restando somente a manipulação de objetos. Neste sentido, a aula copiada que apenas ensina a copiar corresponde, com perfeição inaudita, à condição de massa de manobra.

Por outro lado, assim como afirmam Messias, Sá e Fonseca (2013, p. 2), percebemos que

[...] poucos são os livros didáticos adequados para auxiliar o ensino de matemática, particularmente de matrizes, dado que muitos apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e exercícios repetitivos, o que prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos educandos.

Do mesmo modo, podemos perceber com relação ao ensino-aprendizagem do conceito de matrizes que esse se encontra estruturado na utilização de regras, totalmente desvinculadas com o cotidiano dos alunos, pois, como afirma Sanches (2002 apud MESSIAS; SÁ; FONSECA 2013, p. 2), o ensino de matrizes está em “total descompasso com os avanços tecnológicos e com os estudos já realizados pela Psicologia Educacional”.

Dessa forma, pensando nos problemas a serem enfrentados no ensino-aprendizagem do conceito de matrizes e na proposta de aprendizado matemático de forma contextualizada, defendida nos PCN+ Ensino Médio, iremos propor algumas atividades contextualizadas, que possam gerar um grande estímulo no desenvolvimento da curiosidade matemática e levem os alunos a ter uma “postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.” (BRASIL, 2002, p. 129).

Dessa maneira, nosso principal objetivo será realizar um convite aos educandos, de forma que desperte neles a indagação e/ou investigação. Paulo Freire (1998 apud BARBOSA, 2001, p. 6) indica-nos que o caminho para se constituir conhecimento é a indagação.

[...] O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário.

Buscar respostas às indagações por meio da seleção, organização e manipulação das informações é o que é chamado de investigação. Conseqüentemente, chegamos à conclusão de que a indagação e investigação são conceitos indissociáveis, pois no momento em que as indagações surgem é necessário que as investigações avancem.

Portanto, com vistas a tratar de um tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que possa trazer algum impacto nas práticas didáticas em sala de aula, decidimos trabalhar com a Criptografia aplicada aos conceitos matriciais, de forma que possamos contextualizar o ensino desse conteúdo.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho visa, a partir da proposta de atividades contextualizadas, apresentar uma sequência didática para trabalhar o conteúdo de matrizes com alunos do Ensino Médio.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura do trabalho compreende cinco capítulos. Neste primeiro capítulo fazemos uma introdução do trabalho, apresentando o tema, algumas justificativas, os objetivos e a estrutura do trabalho. No Capítulo 2, apresentamos algumas considerações sobre a Criptografia, que é o contexto gerador das atividades. Uma abordagem referente à importância do estudo de matrizes e seus conceitos são apresentados no Capítulo 3. Nossa proposta metodológica e seus procedimentos são descritos no Capítulo 4. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais de nosso trabalho. Por último, apresentamos as referências bibliográficas citadas.

2 CRIPTOGRAFIA

Neste capítulo relatamos alguns fatos históricos na evolução do conceito de Criptografia. Primeiro, mostramos a importância da Criptografia no passado e nos dias atuais. Em seguida, propomos a diferença entre esteganografia e Criptografia. Logo após, destacamos a evolução da Criptografia, iniciando o processo com a cifra de substituição monoalfabética, relatando posteriormente sua fragilidade devido à análise de frequência, sofrendo então um progresso por meio da cifra de Vigenère. Por fim, apresentamos a Criptografia RSA, como um dos modelos mais utilizados nos processos de codificação e decodificação.

2.1 A IMPORTÂNCIA DA CRIPTOGRAFIA

Engana-se aquele que pensa que a Criptografia é utilizada apenas para esconder mensagens importantes que serão encaminhadas a reis e rainhas, generais, militares, etc. As questões de encaminhamento de mensagens, em segredo, de forma segura, fazem parte do processo evolutivo da Criptografia.

A Criptografia, segundo Shokranian (2005 apud MEIRELES, 2011, p. 13) é,

[...] um dos tópicos mais antigos do conhecimento. Ela existia, não necessariamente como uma ciência, mas como um conhecimento, principalmente nos assuntos de natureza militar (guerras, armamentos) ou nos assuntos políticos para transmitir informações secretas, mantê-las em segredo e em segurança contra as fontes não autorizadas, como inimigos, espiões, espionagens, etc.

A necessidade de encaminhar mensagens, sem que as forças ou nações inimigas soubessem o que estava sendo tramado, fez com que se desenvolvesse o uso de técnicas para mascarar essas mensagens. Em contrapartida, ao mesmo tempo em que essas técnicas de cifragem eram criadas, as nações começaram a contratar estudiosos, hoje comumente conhecidos como criptoanalistas, de forma que esses pudessem pesquisar como quebrar as mensagens cifradas.

A importância de se conseguir decifrar uma mensagem da nação inimiga é de extrema valia. Singh (2003 apud SILVA; PAPANI, 2013, p. 2) afirma:

Já se falou que a Primeira Guerra Mundial foi a guerra dos químicos, devido ao emprego, pela primeira vez, do gás mostarda e do cloro, que a Segunda Guerra Mundial foi a guerra dos físicos devido à bomba atômica. De modo semelhante se fala que uma Terceira Guerra Mundial seria a guerra dos matemáticos, pois os matemáticos terão o controle sobre a próxima grande arma de guerra, a informação. Os matemáticos têm sido responsáveis pelo desenvolvimento dos códigos usados atualmente para a proteção das informações militares. E não nos surpreende que os matemáticos também estejam na linha de frente da batalha para tentar decifrar esses códigos.

Hoje, a Criptografia mostra-se de fundamental importância, por exemplo, para a construção do mercado digital. Além disso, Shokranian (2005 apud MEIRELES, 2011, p. 14) comenta que

A teoria moderna da Criptografia está sendo, também, utilizada na aplicação de tecnologia digital em nosso cotidiano e é um fenômeno recente, baseado no conceito de Criptografia de chave pública, no qual a maioria das transações bancárias e de cartões de crédito, ou cartões de identidade, é baseada nela, sendo que foi inventada há cerca de 25 anos.

Sendo assim, podemos perceber que a Criptografia é de extrema importância para os dias atuais, assim como foi no passado, principalmente nas transações financeiras, que ocorrem na internet e que exigem assinaturas eletrônicas protegidas por sistemas criptografados.

2.2 ESTEGANOGRAFIA E CRIPTOGRAFIA

A Esteganografia, que se desenvolveu em paralelo com a Criptografia, é definida segundo Singh (2003 apud MEIRELES, 2011, p. 15) da seguinte forma:

A comunicação secreta, quando é obtida através da ocultação da mensagem, é conhecida como esteganografia, nome derivado das palavras gregas *steganos*, que significa coberto, e *graphein*, que significa escrever. Nos dois mil anos que se passaram desde Heródoto, várias formas de esteganografia foram usadas no mundo.

Em “*As Histórias*” de Heródoto (484 – 425 a.C.), existem diversos relatos sobre a esteganografia. Um deles conta a respeito dos conflitos entre a

Grécia e a Pérsia, que ocorreram por volta do século V antes de Cristo, quando o rei da Pérsia, Rei Xerxes, que tinha por finalidade a conquista de toda a Grécia, iniciou a mobilização de um exército a fim de realizar um ataque surpresa. Seu objetivo foi frustrado, pois Demerato, um grego que vivia exilado em Susa, cidade Persa, escreveu uma mensagem aos gregos contando do ataque surpresa da Pérsia, em uma tabuleta de madeira, ocultando a mesma sob uma camada de cera. Outra história é a de Histaeu, que desejava encorajar Aristágora de Mileto a criar uma revolta contra o rei Persa. A fim de transmitir suas instruções de forma segura, Histaeu teve a ideia de esconder a mensagem no couro cabeludo de um mensageiro, raspando sua cabeça. Após crescer o cabelo do mensageiro, Histaeu pôde encaminhar sua mensagem sem maiores problemas, precisando apenas de um pouco de paciência.

Já a Criptografia é descrita por Singh (2003 apud MEIRELES, 2011, p. 13) como sendo “derivada da palavra grega *Kriptos*, significa oculto. O objetivo da Criptografia não é ocultar a existência de uma mensagem, e sim esconder o seu significado”.

Para que possamos trabalhar com a Criptografia é necessário que saibamos as linguagens técnicas que serão usadas durante o trabalho. Segundo Anton e Rorres (2001, p. 466), na

linguagem da Criptografia, os códigos são denominados cifras, as mensagens não codificadas são textos comuns e as mensagens codificadas são textos cifrados ou criptogramas. O processo de converter um texto comum em cifrado é chamado cifrar ou criptografar e o processo inverso de converter um texto cifrado em comum é chamado decifrar ou decodificar.

Apesar da grande fragilidade da Esteganografia, pois, como a mensagem era apenas ocultada, caso alguém interviesse, o mensageiro descobriria o conteúdo que estava escondido, essa acabou sendo utilizada durante um longo período de tempo.

Para aumentar a segurança no envio da mensagem, a Criptografia e a esteganografia podem ser utilizadas concomitantemente. Relatos da Segunda Guerra Mundial demonstram que esse processo foi bastante utilizado pelos alemães, que reduziam fotograficamente uma mensagem até torná-la um ponto, em seguida estes eram colocados como ponto final de cartas que eram aparentemente

inocentes. Descobertas pelo FBI, em 1941, muitas dessas cartas foram interceptadas e em algumas a mensagem estava criptografada, o que a manteve em segurança; em outras, a mensagem estava apenas oculta, o que tornou acessível o conteúdo.

Ainda hoje, a esteganografia é muito utilizada, por exemplo, nas marcas ocultas das cédulas de dinheiro, de forma a manter a segurança, impossibilitando que qualquer pessoa consiga realizar sua cópia; e também na proteção dos direitos autorais, pois, com o aumento da pirataria e dos *sites* da internet que disponibilizam obras em áudio e vídeo, artistas e gravadoras têm utilizado marca d'água para proteger suas obras.

2.3 CIFRA DE SUBSTITUIÇÃO MONOALFABÉTICA

Uma cifra de substituição monoalfabética é um tipo de codificação que consiste em substituir a letra da mensagem que se deseja codificar por uma letra do alfabeto cifrado. A história nos relata que o imperador romano Júlio César utilizava esse tipo de codificação, fazendo a alteração do alfabeto em três casas, ou seja, cada letra da mensagem era substituída por outra que se encontrava três casas a frente no alfabeto e as três últimas letras X, Y e Z eram substituídas, respectivamente, pelas letras A, B e C, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Cifra de Substituição

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fonte: o próprio autor

Dessa forma, a mensagem “AVE CÉSAR” poderia ser criptografada da seguinte maneira: “DYH FHVDU”. Esse tipo de cifra permaneceu seguro durante séculos, até que, no final do primeiro milênio, Al-Kindi, conhecido como “filósofo dos árabes”, inspirado nas técnicas utilizadas por teólogos que tentavam determinar a cronologia das revelações contidas no Corão, escreveu um tratado denominado “Um manuscrito sobre a decifração de mensagens criptografadas”, relatando o que chamamos de análise de frequência, sistema utilizado pela Criptoanálise. Esse sistema é de grande eficácia para algumas situações.

Um meio de se decifrar uma mensagem codificada, quando conhecemos seu idioma, é encontrar um texto diferente, na mesma língua, suficientemente longo para preencher uma página. Então contamos a frequência com que cada letra aparece. A letra que aparecer com maior frequência chamamos de primeira, enquanto a segunda mais freqüente recebe o nome de segunda, a terceira em ordem de frequência vira terceira e assim por diante, até contarmos todas as letras diferentes no texto. Em seguida examinamos o criptograma que desejamos decifrar e também classificamos os seus símbolos. Descobrimos qual o símbolo que aparece com maior frequência e o transformamos na primeira letra do texto que usamos como amostra. O segundo símbolo mais comum é transformado na segunda letra, enquanto o terceiro símbolo mais frequente vira a terceira letra e assim por diante, até convertermos todos os símbolos do criptograma que desejamos decifrar. (SINGH, 2003 apud MEIRELES, 2011, p. 18).

Apesar da cifra de substituição monoalfabética ser considerada como pouco segura, fomos capazes de perceber pelos fatos históricos que esta permaneceu invulnerável durante séculos, pois, como é definido no Princípio de Kerckhoff, “A segurança de um criptossistema não deve depender da manutenção de um criptoalgoritmo em segredo. A segurança depende apenas de se manter em segredo a chave” (SINGH, 2008 apud FINCATTI, 2010, p. 21).

2.4 CIFRA DE VIGENÈRE

Com a descoberta do segredo da cifra de substituição monoalfabética por meio da análise de frequência, em 1460, o italiano Leon Battista Alberti escreveu um ensaio no qual propunha a utilização alternada de dois ou mais alfabetos para codificar uma mensagem.

Alberti não conseguiu concluir a sua ideia de forma que criasse um novo sistema de Criptografia completo, mas o francês Blaise de Vigenère (1523 – 1596), inspirado nas ideias originais de Alberti e aperfeiçoando aquilo que já havia se desenvolvido pelas pesquisas de um grupo de intelectuais, o alemão Johannes Trithemius (1462 – 1516), depois o italiano Giovanni Porta (1541 – 1615), criou um sistema de Criptografia bastante eficiente, fundamentado na cifra de substituição, composto por 26 alfabetos cifrados, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Quadro de Vigenère

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Fonte: o próprio autor

Utilizando a cifra de Vigenère podemos decodificar a mensagem recebida, desde que saibamos a palavra-chave utilizada para fazer a codificação, pois ao receber a mensagem o decodificador terá que escrever o texto e abaixo do texto será repetida a palavra-chave a quantidade de vezes que seja necessário. Por

exemplo, a mensagem “HJCLGKPNFXCW ZWCNNUCWY“, que possui como palavra chave “Vigenère”, pode ser decodificada da seguinte maneira:

Quadro 3 – Decodificação utilizando a Cifra de Vigenère

H	J	C	L	G	K	P	N	F	X	C	W		Z	W	C	N	N	U	C	W	Y
V	I	G	E	N	E	R	E	V	I	G	E		N	E	R	E	V	I	G	E	N

Fonte: o próprio autor

Para encontrar o texto decodificado, basta encontrar no “Quadro 2 – Quadro de Vigenère” o encontro das duas informações, ou seja, para descobrir a primeira letra da mensagem, basta procurar o encontro da letra H (em destaque na primeira linha do quadro de Vigenère) com a letra V (em destaque na primeira coluna do quadro de Vigenère), a letra que estiver neste local será a primeira letra do texto que deseja ser lido, o que neste caso é a letra C. Após realizar a procura de todos estes cruzamentos encontramos a seguinte mensagem:

Quadro 4 – Mensagem decodificada utilizando a Cifra de Vigenère

H	J	C	L	G	K	P	N	F	X	C	W		Z	W	C	N	N	U	C	W	Y
V	I	G	E	N	E	R	E	V	I	G	E		N	E	R	E	V	I	G	E	N
C	R	I	P	T	O	G	R	A	F	I	A		M	A	T	R	I	C	I	A	L

Fonte: o próprio autor

Por ser imune à análise de frequência das letras, a cifra de Vigenère ficou conhecida por quase dois séculos como a “cifra indecifrável”. Anos mais tarde, o sistema ficou arcaico e, dessa forma, o inevitável aconteceu: por volta de 1850, Charles Babbage e Friedrich Kasinski desenvolveram um sistema de decodificação para a cifra de Vigenère por meio da análise de palavras, algo parecido com as análises feitas pelos teólogos mulçumanos no fim do primeiro século.

2.5 CRIPTOGRAFIA RSA

Vimos anteriormente, no princípio de Kerckhoff, que a segurança de um criptossistema depende exclusivamente “de se manter em segredo a chave”; logo, a grande fraqueza da Criptografia está no fato de termos de transmitir a chave ao destinatário da mensagem. Portanto, o que se pode fazer para que essa chave possa ser transmitida em segurança?

Pensando nessa questão, surge, na Califórnia, na década de 70, com Whitfield Diffie, Martin Hellman e Ralph Merkle, a ideia de uma cifra assimétrica,

na qual a chave utilizada para realizar a codificação não é a mesma que será utilizada para a decodificação, podendo assim a chave codificadora ser de domínio público.

Em 1975, Diffie publicou um resumo do seu pensamento a respeito do sistema de cifra assimétrica, em que haveria duas chaves: uma pública, que seria utilizada por todos que fossem enviar uma mensagem para alguma pessoa, e outra privada, que seria conhecida apenas pela pessoa que iria receber a mensagem. Após a publicação, juntaram-se a eles muitos outros cientistas que, apesar dos esforços, não conseguiam encontrar uma função matemática, de mão única, que atendesse os requisitos da cifra assimétrica.

Depois de muito trabalho, na costa Leste dos Estados Unidos, pesquisadores do MIT (Massachusetts Institute of Technology), em 1977, encontraram uma função que foi capaz de colocar em prática o sistema de chave pública. Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, foram os inventores do criptossistema de chave pública denominado RSA – em homenagem a seus criadores. Esse é o sistema mais utilizado atualmente.

A segurança da Criptografia RSA encontra-se na utilização de números primos com grande quantidade de algarismos, logo a dificuldade para decodificar a mensagem utilizando esse sistema está no fato de saber fatorar grandes números.

Por fim, vale lembrar que, assim como aconteceu com todos os outros sistemas de Criptografia que se originaram de grandes ideias e após o estudo dos criptoanalistas que obtiveram sucesso em seus trabalhos, com o RSA não é diferente, pois, hoje em dia, muito se discute sobre a sua provável extinção e o surgimento de novos sistemas de Criptografia.

3 CONSIDERAÇÕES ACERCA DAS MATRIZES

Neste capítulo abordamos o conteúdo matrizes. Inicialmente, apresentamos algumas considerações sobre a importância do conceito de matrizes no ensino de Matemática e, em seguida, relatamos sua definição e algumas operações.

3.1 A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DE MATRIZES

O conceito matrizes é amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento, tais como Economia, Engenharia, Tecnologia, etc., e, devido a essa grande utilização, podemos considerar como sendo um assunto de grande relevância para a Matemática.

Como nossa proposta está direcionada aos educandos do Ensino Médio, mais especificamente do Estado do Paraná, achamos pertinente buscar nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (DCE) alguma referência ao estudo da Matemática e de forma específica ao estudo de matrizes.

Os PCNEM afirmam que o ensino da Matemática no Ensino Médio deve possuir um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, ou seja, contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes. Porém, também desempenha um papel instrumental, em que deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento.

Assim, conforme nos indicam os PCNEM (BRASIL, 1998, p. 40), “é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la”.

Com relação ao estudo de matrizes, encontramos no documento intitulado Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Volume 2 a importância do conceito de matrizes na manipulação das planilhas eletrônicas:

As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. (BRASIL, 2006, p. 87).

Sendo assim, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (PARANÁ, 2008, p. 52), no Ensino Médio há necessidade de aprofundar o estudo dos números, de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que ao abordarmos o conteúdo matrizes “o aluno conceitue e interprete matrizes e suas operações”.

Portanto, mais do que entender o conceito de matrizes é preciso atribuir sentido a ele, pois com isso os alunos poderão perceber a necessidade de representação matricial nos diversos fenômenos que os cercam.

3.2 SOBRE O CONCEITO DE MATRIZES

Para nosso estudo consideramos a definição encontrada em Boldrini (1980, p.1), que afirma que “chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas”.

Ilustrando essa definição, Boldrini (1980, p.1) apresenta-nos o seguinte exemplo:

ao recolhermos os dados referentes à altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Com relação aos elementos das matrizes, Boldrini (1980, p. 2) afirma que esses “podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes”.

Para a representação de uma matriz de m linhas e n colunas utilizamos a seguinte notação:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Toda matriz será denotada com letras maiúsculas e, quando houver a necessidade de indicar a ordem da matriz, ou seja, a quantidade de linhas e colunas, vamos escrever $A_{m \times n}$.

A localização de um elemento da matriz será feita por meio do número da linha e da coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz que construímos com os dados da altura, peso e idade das quatro pessoas:

$$A_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

o elemento que se encontra na terceira linha e segunda coluna é o 52, ou seja, $a_{32} = 52$. Assim os outros elementos são: $a_{11} = 1,70$, $a_{12} = 70$, $a_{13} = 23$, $a_{21} = 1,75$, $a_{22} = 60$, $a_{23} = 45$, $a_{31} = 1,60$, $a_{33} = 25$, $a_{41} = 1,81$, $a_{42} = 72$ e $a_{43} = 30$.

3.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Existem algumas matrizes que possuem propriedades que as diferenciam das demais matrizes, seja pelo fato de apresentarem uma quantidade de linhas e colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos; por isso recebem nomes especiais.

Boldrini (1980, p. 3) cita 9 (nove) tipos de matrizes especiais: matriz quadrada, matriz nula, matriz coluna, matriz linha, matriz diagonal, matriz identidade quadrada, matriz triangular superior, matriz triangular inferior e matriz simétrica.

Em nosso trabalho, utilizamos duas dessas matrizes especiais: a matriz quadrada e a matriz identidade quadrada, definidas a seguir.

Considere uma matriz com m linhas e n colunas que denotamos por $A_{m \times n}$.

Definimos como **matriz quadrada** aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas ($m = n$), por exemplo:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \\ 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, quando temos matrizes quadradas $A_{m \times m}$ dizemos que **A** é uma matriz de ordem m .

Definimos **matriz identidade quadrada**, aquela em que $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, por exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Realizando o trabalho com matrizes, percebemos que algumas operações surgem naturalmente. Veja, por exemplo, o caso onde temos os seguintes quadros.

Quadro 5 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2003

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Soja	10 900	700	9 600
Milho	13 600	4 200	5 200
Arroz	200	1 040	4 600
Feijão	630	200	150

Fonte: CONAB – Levantamento: Janeiro/2006

Quadro 6 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2004

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Soja	10 000	670	5 500
Milho	5 000	2 600	4 000
Arroz	180	1 000	6 300
Feijão	670	150	140

Fonte: CONAB – Levantamento: Janeiro/2006

Para descobrirmos a quantidade produzida nos dois anos, em cada estado, basta somarmos os elementos correspondentes aos Quadros 5 e 6.

$$\begin{bmatrix} 10900 & 700 & 9600 \\ 13600 & 4200 & 5200 \\ 200 & 1040 & 4600 \\ 630 & 200 & 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10000 & 670 & 5500 \\ 5000 & 2600 & 4000 \\ 180 & 1000 & 6300 \\ 670 & 150 & 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20900 & 1370 & 15100 \\ 18600 & 6800 & 9200 \\ 380 & 2040 & 10900 \\ 1300 & 350 & 290 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, a produção de grãos no Sul do Brasil em 2003 e 2004 é dada pelo Quadro 7:

Quadro 7 – Produção de Grãos (em toneladas) no Sul do Brasil – 2003 e 2004

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Soja	20 900	1 370	15 100
Milho	18 600	6 800	9 200
Arroz	380	2 040	10 900
Feijão	1 300	350	290

Fonte: CONAB – Levantamento: Janeiro/2006

Na realização do nosso trabalho, vamos utilizar as operações de adição de matrizes, subtração de matrizes, transposição de matrizes, multiplicação de matrizes e matriz inversa, que serão definidas formalmente, segundo Boldrini (1980). Vejamos.

Adição de matrizes: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotamos $A + B$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B . Isto é, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 7 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)+7 & 4+(-9) \\ (-1)+(-3) & 7+2 \\ 8+6 & (-9)+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 9 \\ 14 & -13 \end{bmatrix}$$

Analisando os Quadros 5 e 6, que apresentam a produção de grãos (em toneladas) no Sul do Brasil em 2003 e 2004, respectivamente, poderíamos introduzir, de forma intuitiva, a operação de subtração de matrizes pensando no acréscimo/decrécimo da produção de grãos de 2003 para 2004, em cada estado, ou seja, basta subtrairmos os elementos correspondentes dos dois quadros.

$$\begin{bmatrix} 10900 & 700 & 9600 \\ 13600 & 4200 & 5200 \\ 200 & 1040 & 4600 \\ 630 & 200 & 150 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10000 & 670 & 5500 \\ 5000 & 2600 & 4000 \\ 180 & 1000 & 6300 \\ 670 & 150 & 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 30 & 4100 \\ 8600 & 1600 & 1200 \\ 20 & 40 & -1700 \\ -40 & 50 & 10 \end{bmatrix}$$

Dessa maneira, o acréscimo/decrécimo da produção de grãos de 2003 para 2004, no Sul do Brasil é dado pelo Quadro 8:

Quadro 8 – Acréscimo/Decréscimo da Produção de Grãos (em toneladas) de 2003 para 2004, no Sul do Brasil.

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Soja	900	30	4100
Milho	8600	1600	1200
Arroz	20	40	- 1700
Feijão	- 40	50	10

Fonte: CONAB – Levantamento: Janeiro/2006

Subtração de matrizes: A subtração de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotamos $A - B$, cujos elementos são subtrações dos elementos correspondentes de **A** e **B**. Isto é, $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 7 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)-7 & 4-(-9) \\ (-1)-(-3) & 7-2 \\ 8-6 & (-9)-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 13 \\ 2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Transposição de matrizes: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^t é denominada transposta de A. Veja o exemplo,

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, logo a sua transposta será

$$A^t = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

A operação de multiplicação de matrizes também é possível de ser introduzida de forma intuitiva, por exemplo, o Quadro 9 fornece as quantidades de proteínas, calorias e gorduras em cada 100g dos alimentos arroz, feijão e batata.

Quadro 9 - Informações Nutricionais dos Alimentos

	Proteínas	Calorias	Gorduras
100g de arroz	8,24 g	360 kcal	2 g
100g de feijão	23,80 g	322 kcal	2,1g
100g de batata	1,8 g	78 kcal	0,1g

Fonte: o próprio autor

Digamos que uma pessoa adulta deva ingerir mensalmente 3 kg de arroz, 2 kg de feijão e 4 kg de batatas. Para descobrirmos quanto essa pessoa terá consumido de proteínas, calorias e gorduras no final de um mês, ingerindo esses alimentos, teremos que realizar uma operação de multiplicação entre as quantidades de porções de 100g ingeridas e as informações nutricionais dos alimentos.

Sabemos que em 3 kg de arroz temos 30 porções de 100 g; em 2 kg de feijão são 20 porções de 100 g e em 4 kg de batatas existem 40 porções de 100 g, assim, temos:

$$[30 \times 8,24 + 20 \times 23,80 + 40 \times 1,8 \quad 30 \times 360 + 20 \times 322 + 40 \times 78 \quad 30 \times 2 + 20 \times 2,1 + 40 \times 0,1]$$

$$[30 \quad 20 \quad 40] \times \begin{bmatrix} 8,24 & 360 & 2 \\ 23,80 & 322 & 2,1 \\ 1,8 & 78 & 0,1 \end{bmatrix} = [795,20 \quad 20360 \quad 106]$$

Dessa forma, a quantidade de proteínas, calorias e gorduras ingeridas por essa pessoa ao final de um mês será, respectivamente, 795,20 g, 20360 kcal e 106 g.

Multiplicação de matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$

Definimos a multiplicação $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \dots + a_{un}b_{nv}$$

Observações:

- ✓ Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{l \times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n=l$. Além disso, a matriz resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.
- ✓ O elemento c_{ij} (i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz produto) é obtido multiplicando os elementos da i -ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna da segunda matriz e somando estes produtos.

Veja o exemplo:

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} (-2) \times (-1) + 5 \times 3 & (-2) \times 2 + 5 \times (-4) \\ 3 \times (-1) + (-6) \times 3 & 3 \times 2 + (-6) \times (-4) \\ (-4) \times (-1) + 7 \times 3 & (-4) \times 2 + 7 \times (-4) \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 17 & -24 \\ -21 & 30 \\ 25 & -36 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa: Dada uma matriz quadrada \mathbf{A} de ordem n , chamamos de inversa de \mathbf{A} a uma matriz \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n . Escrevemos \mathbf{A}^{-1} para a inversa de \mathbf{A} . Veja o exemplo,

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}, \text{ vamos procurar a sua inversa, ou seja, } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = I_2$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = I_2$.

Impondo a primeira condição, temos,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 1c = 1 \\ 11a + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4b + 1d = 0 \\ 11b + 3d = 1 \end{cases}$$

Isolando a incógnita c na segunda equação do primeiro sistema

teremos

$$11a + 3c = 0$$

$$3c = -11a$$

$$c = -\frac{11a}{3}$$

Substituindo o valor da incógnita c na primeira equação do primeiro sistema encontramos

$$4a + c = 1$$

$$4a + \left(-\frac{11a}{3}\right) = 1$$

$$\frac{12a}{3} - \frac{11a}{3} = 1$$

$$\frac{a}{3} = 1$$

$$a = 3$$

Substituindo o valor da incógnita a no valor da incógnita c , encontrada acima, teremos

$$c = -\frac{11a}{3}$$

$$c = -\frac{11 \cdot 3}{3}$$

$$c = -\frac{33}{3}$$

$$c = -11$$

Isolando a incógnita d na primeira equação do segundo sistema teremos

$$4b + d = 0$$

$$d = -4b$$

Substituindo o valor da incógnita d na segunda equação do segundo sistema encontramos

$$11b + 3d = 1$$

$$11b + 3 \cdot (-4b) = 1$$

$$11b - 12b = 1$$

$$-b = 1$$

$$b = -1$$

Substituindo o valor da incógnita b no valor da incógnita d , encontrada acima, teremos

$$d = -4b$$

$$d = (-4) \cdot (-1)$$

$$d = 4$$

Teremos, então,

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } A \cdot B = I_2. \text{ Também,}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } B \cdot A = I_2, \text{ e, portanto,}$$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A . ($B = A^{-1}$).

4 NOSSA PROPOSTA DE TRABALHO PARA O ESTUDO DE MATRIZES

Apresentamos neste capítulo algumas atividades de Criptografia relacionadas ao estudo de matrizes.

As atividades serão todas desenvolvidas fundamentadas na releitura Simplificada do Drama Shakespeariano – *Romeu e Julieta* –, extraído do site “Recanto das Letras”, de autoria da escritora Silvia Regina Costa Lima¹.

No início da atividade, apresentamos uma parte do texto que conta as aventuras dos personagens Romeu e Julieta e, em seguida, problematizamos a troca de mensagens que aconteceu na história por meio da Criptografia matricial.

Para que essa troca de mensagens ocorra de forma segura, todos os bilhetes serão codificados e/ou decodificados utilizando um quadro de códigos – Quadro 10 –, que servirá de base para todas as atividades desenvolvidas.

Com relação às atividades, as regras para codificação e/ou decodificação nem sempre serão as mesmas, portanto, em cada atividade estaremos fazendo um relato de como se procederá a codificação e/ou decodificação do bilhete.

Todas as atividades a serem apresentadas para os alunos estão relacionadas no apêndice deste trabalho, sendo que o drama Shakespeariano é algo integrante apenas da parte escrita do Capítulo 4, cabendo ao professor definir qual a melhor forma de repassar as histórias de Romeu e Julieta aos seus educandos, contextualizando assim a situação problema.

4.1 ATIVIDADE 1: O PRIMEIRO ENCONTRO

Esta primeira atividade tem como objetivo decodificar uma mensagem que foi encaminhada por Julieta para Romeu.

Durante a realização desta atividade, trabalhamos com o conceito de matriz quadrada, construção de matrizes seguindo uma regra e subtração de matrizes.

¹ Texto extraído de: www.silviareginalima.recantodasletras.com.br/visualizar.php?id=747453

Cena 1 – “Inimizade”

Ricos e influentes, Capuletos e Montecchios são as duas principais famílias de Verona. Contudo, há entre eles uma velha disputa – e chega a tal ponto esta inimizade – que se estende aos mais remotos parentes. Mesmo os criados não podem encontrar-se casualmente sem que troquem insultos e, por vezes, derramem sangue uns aos outros – perturbando as tranqüilas ruas de Verona.

Certa feita, a família Capuleto oferece uma magnífica festa para a qual convida todos os nobres fidalgos e as mais belas damas de Verona – com exceção dos Montecchios.

Entretanto, disfarçado entre os convidados, acha-se o jovem Romeu que, convencido por Benvólio, ali está para rever sua amada Rosalina. O amigo deseja curar Romeu daquela paixão não correspondida e provar que ela, Rosalina, não é uma moça tão bela assim. Mascarados, eles são muito bem recebidos pelo fidalgo Capuleto.

As danças e quadrilhas de salão começam e, de repente, o olhar de Romeu é atraído para uma jovem que, ao dançar, parece irradiar o brilho das estrelas, tamanha é a sua beleza!

Cena 2 – “O Primeiro Encontro”

Encantado com tanta formosura, Romeu faz um elogio em voz alta à moça, e é ouvido por Teobaldo – um parente do fidalgo Capuleto. Encolerizado com tal afronta, o primo de Julieta pensa matar o jovem ali mesmo, mas, ao ser consultado, o tio não dá autorização para a violência pretendida. Romeu é um jovem virtuoso e digno, e toda a sociedade local sabe muito bem disto.

Logo após a dança e protegido ainda pelo disfarce, Romeu pega a mão da moça e a conduz para o sacrário da família Capuleto. Pede que ela o perdoe caso o toque de sua mão a esteja perturbando, mas já em seguida oferece-lhe um suave beijo como recompensa...

Em doce conversação, ali ficam os dois jovens absolutamente enamorados um do outro, até que a mãe chama a moça, e ele, bem preocupado, descobre que a jovem dos seus mais belos sonhos é Julieta – filha e herdeira do fidalgo Capuleto!

Também Julieta se admira em sabê-lo um inimigo de seu pai. O coração da garota se enche de dor, pois começa, sem reservas, a amar intensamente aquele lindo e gentil jovem.

Cena 3 – “Um Balcão para os namorados”

Romeu vai embora com seus amigos no meio da noite, mas, apaixonado demais, volta sozinho logo depois. Ele pula o muro do pomar, que fica atrás da casa de Julieta, e aproxima-se da sacada do quarto da linda jovem. De repente, como se fosse o próprio sol da manhã a empalidecer a luz do luar, ela aparece no balcão. Julgando-se sozinha, a bela moça murmura:

– Ai de mim! Romeu, oh meu Romeu, por que és um Montecchio? Esquece teu nome por meu amor, mas se não puderes, apenas jure que me amas, e esquecerei que sou uma Capuleto!

Tentando se conter para não responder, ele continua ouvindo o monólogo da amada até o momento em que, já não suportando a paixão que incendia seu coração, aparece e pede que ela o chame apenas de "meu amor"!

Ela se assusta ao ouvir a voz de um homem nas sombras do seu jardim, porém, reconhecendo a voz do seu amado, censura-lhe a ousadia e o perigo a que, assim, ele se expunha. Poderia até ser morto por seus parentes!

– Há mais perigo em teus olhos, doce menina, que na espada dos meus inimigos e, contudo, basta que me olhes apenas um instante para que eu me torne invencível! – diz-lhe Romeu. E, saiba que prefiro o ódio de teus parentes, ter uma vida mais curta, do que viver sem teu amor!

– Como descobriste o caminho até aqui, meu adorado?

– Foi o amor que me trouxe. E, por ti, enfrentaria até o oceano mais bravio – ainda que não soubesse nadar!

Julieta não consegue mais seguir as convenções próprias de sua época, um pouco devido ao ódio que envolve o nome de ambos, mas principalmente porque Romeu agora já sabe que ela também o ama. Eles esquecem a "corte" tradicional que a etiqueta da boa sociedade local exigiria deles. Ela pede ao jovem que apenas não a considere uma moça leviana, uma conquista fácil.

Estão assim enlevados, trocando beijos e juras de amor eterno, quando a ama de Julieta, que dorme no quarto ao lado, avisa-a que é tarde e que o dia vai raiar.

Cena 4 – Um casamento selado no céu

Julieta atende ao pedido e entra, mas logo retorna dizendo a Romeu que se ele pretende mesmo casar, ela enviará um mensageiro para marcarem a data – afirmando, ainda uma vez, que o seguirá até o fim do mundo!

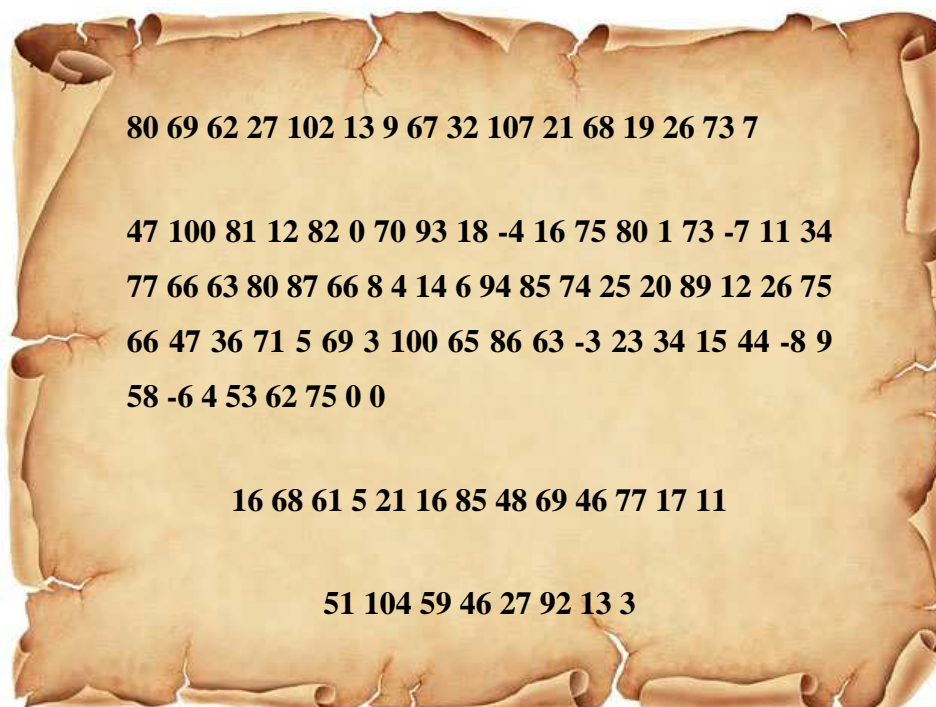
Depois de muito relutar, eles afinal se separaram, desejando-se mutuamente um sono suave e feliz. Tão feliz vai Romeu, que resolve procurar Frei Lourenço, uma espécie de confessor. Ao ver o rapaz chegar tão cedo, percebe que ele traz problemas de amor, apenas ainda não sabe que não é mais pela jovem Rosalina por quem o jovem suspira.

Depois de tudo ouvir sobre esta nova paixão de Romeu, o bondoso Frei comenta que os jovens não amam com a força serena do coração, mas apenas com a fatal atração dos olhos. Entanto, a apaixonada argumentação de Romeu convence o frade a casá-los ainda naquele dia.

Frei Lourenço lamenta sinceramente o ódio existente entre as famílias dos jovens e, sendo amigo de ambas, muitas vezes fizera-se mediador entre elas, pondo fim às suas constantes rixas. E também gosta bastante do jovem Romeu, a quem nada consegue negar.

Conforme combinado, no dia seguinte, pela manhã, Julieta envia sua ama a Romeu portando a seguinte mensagem:

Figura 1 – Mensagem codificada por Julieta



Fonte: o próprio autor

Nossa, mas o que quer dizer essa mensagem? Calma... Romeu e Julieta eram pessoas cultas da sociedade daquela época, portanto, resolveram utilizar de seus conhecimentos para escreverem suas mensagens em códigos, evitando, dessa maneira, que fossem descobertos pelos seus familiares.

No último encontro que tiveram, eles combinaram quais seriam os códigos utilizados e como fariam para desvendar as cartas encaminhadas. Primeiro, eles decidiram que os símbolos e letras seriam transformados em números primos, seguindo o Quadro 10:

Quadro 10 – Códigos utilizados por Romeu e Julieta

	?	!	,	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113

Fonte: o próprio autor

Vale ressaltar que, durante a resolução das atividades contextualizadas, ao realizarmos a codificação e/ou decodificação, os espaços entre uma palavra e outra serão representados pelo algarismo 2, conforme o Quadro 10.

Ao receber a mensagem, eles combinaram que deveriam organizar os elementos em linhas e colunas de forma que tivessem as mesmas quantidades em cada uma. Vamos ajudar Romeu a desvendar o mistério do bilhete encaminhado por sua amada?

Primeiro, precisamos contar quantos são os números que estão escritos na mensagem codificada. Ao realizarmos esta tarefa, encontramos o valor de 100 números, e, dessa forma, Romeu deverá organizar esses 100 valores em linhas e colunas com a mesma quantidade, ou seja, serão necessárias 10 linhas e 10 colunas ficando escrito o Quadro 11 da seguinte forma:

Quadro 11 – Quadro organizado com os valores recebidos no bilhete de Julieta

80	69	62	27	102	13	9	67	32	107
21	68	19	26	73	7	47	100	81	12
82	0	70	93	18	-4	16	75	80	1
73	-7	11	34	77	66	63	80	87	66
8	4	14	6	94	85	74	25	20	89
12	26	75	66	47	36	71	5	69	3
100	65	86	63	-3	23	34	15	44	-8
9	58	-6	4	53	62	75	0	0	16
68	61	5	21	16	85	48	69	46	77
17	11	51	104	59	46	27	92	13	3

Fonte: o próprio autor

Tabelas numéricas, compostas de certa quantidade de linhas (filas horizontais) e de colunas (filas verticais), são chamadas na Matemática de matrizes; logo, o Quadro 11 é uma matriz que possui 10 linhas e 10 colunas e será representada pela matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 69 & 62 & 27 & 102 & 13 & 9 & 67 & 32 & 107 \\ 21 & 68 & 19 & 26 & 73 & 7 & 47 & 100 & 81 & 12 \\ 82 & 0 & 70 & 93 & 18 & -4 & 16 & 75 & 80 & 1 \\ 73 & -7 & 11 & 34 & 77 & 66 & 63 & 80 & 87 & 66 \\ 8 & 4 & 14 & 6 & 94 & 85 & 74 & 25 & 20 & 89 \\ 12 & 26 & 75 & 66 & 47 & 36 & 71 & 5 & 69 & 3 \\ 100 & 65 & 86 & 63 & -3 & 23 & 34 & 15 & 44 & -8 \\ 9 & 58 & -6 & 4 & 53 & 62 & 75 & 0 & 0 & 16 \\ 68 & 61 & 5 & 21 & 16 & 85 & 48 & 69 & 46 & 77 \\ 17 & 11 & 51 & 104 & 59 & 46 & 27 & 92 & 13 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Uma segunda regra, combinada por Romeu e Julieta, para que façam a decodificação da mensagem, é que, ao descobrir a quantidade de linhas e colunas utilizadas para distribuir os números da mensagem codificada, será necessário organizar outro quadro com a mesma quantidade de elementos que o primeiro, no qual, na primeira linha, teremos valores positivos, consecutivos e crescentes, iniciando no número um; na segunda linha, encontraremos valores positivos, consecutivos e decrescentes, iniciando no valor do último número da primeira linha; na terceira linha, valores negativos, consecutivos e decrescentes, iniciando no número negativo um; na quarta linha, valores negativos, consecutivos e crescentes, iniciando no valor do último número da terceira linha; e as demais linhas obedecerão às regras estipuladas para as primeiras quatro linhas, respectivamente.

Desta maneira, vamos conseguir escrever um quadro numérico que será utilizado para realizar a decodificação, ficando representado na forma do Quadro 12.

Quadro 12 – Quadro utilizado para realizar a decodificação da mensagem

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fonte: o próprio autor

O Quadro 12 também é uma matriz que possui 10 linhas e 10 colunas e será representada por B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 \\ -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 \\ -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por fim, para desvendar a mensagem, eles combinaram que o receptor do bilhete deveria pegar as duas matrizes e subtrair a segunda da primeira, já que o autor do bilhete realizou a operação de adição entre as matrizes.

Ao subtrair (2) de (1), Romeu encontrará, portanto, os valores numéricos utilizados por Julieta ao codificar a mensagem. Vamos realizar essa operação e visualizar as respostas encontradas? Segue no Quadro 13 o resultado da subtração realizada por Romeu.

Quadro 13 – Quadro com os códigos originais da mensagem

79	67	59	23	97	7	2	59	23	97
11	59	11	19	67	2	43	97	79	11
83	2	73	97	23	2	23	83	89	11
83	2	19	41	83	71	67	83	89	67
7	2	11	2	89	79	67	17	11	79
2	17	67	59	41	31	67	2	67	2
101	67	89	67	2	29	41	23	53	2
19	67	2	11	59	67	79	3	2	17
67	59	2	17	11	79	41	61	37	67
7	2	43	97	53	41	23	89	11	2

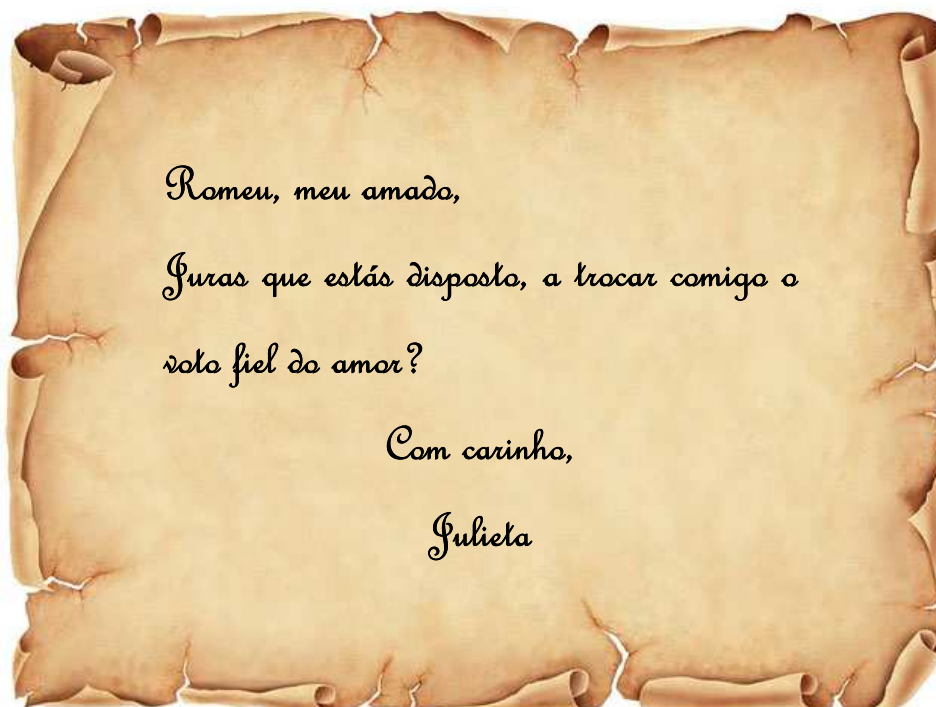
Fonte: o próprio autor

O Quadro 13 também é uma matriz que possui 10 linhas e 10 colunas e será representado por $A - B$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 79 & 67 & 59 & 23 & 97 & 7 & 2 & 59 & 23 & 97 \\ 11 & 59 & 11 & 19 & 67 & 2 & 43 & 97 & 79 & 11 \\ 83 & 2 & 73 & 97 & 23 & 2 & 23 & 83 & 89 & 11 \\ 83 & 2 & 19 & 41 & 83 & 71 & 67 & 83 & 89 & 67 \\ 7 & 2 & 11 & 2 & 89 & 79 & 67 & 17 & 11 & 79 \\ 2 & 17 & 67 & 59 & 41 & 31 & 67 & 2 & 67 & 2 \\ 101 & 67 & 89 & 67 & 2 & 29 & 41 & 23 & 53 & 2 \\ 19 & 67 & 2 & 11 & 59 & 67 & 79 & 3 & 2 & 17 \\ 67 & 59 & 2 & 17 & 11 & 79 & 41 & 61 & 37 & 67 \\ 7 & 2 & 43 & 97 & 53 & 41 & 23 & 89 & 11 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ao realizar a troca dos códigos pelas letras e símbolos, utilizando o Quadro 10, Romeu conseguiu ler a mensagem de sua amada Julieta, que dizia:

Figura 2 – Mensagem decodificada por Romeu



Fonte: o próprio autor

A atividade que acabamos de resolver encontra-se no Apêndice A – Atividade 1: O Primeiro Encontro, em que a estruturamos de forma que possa ser utilizada em sala de aula.

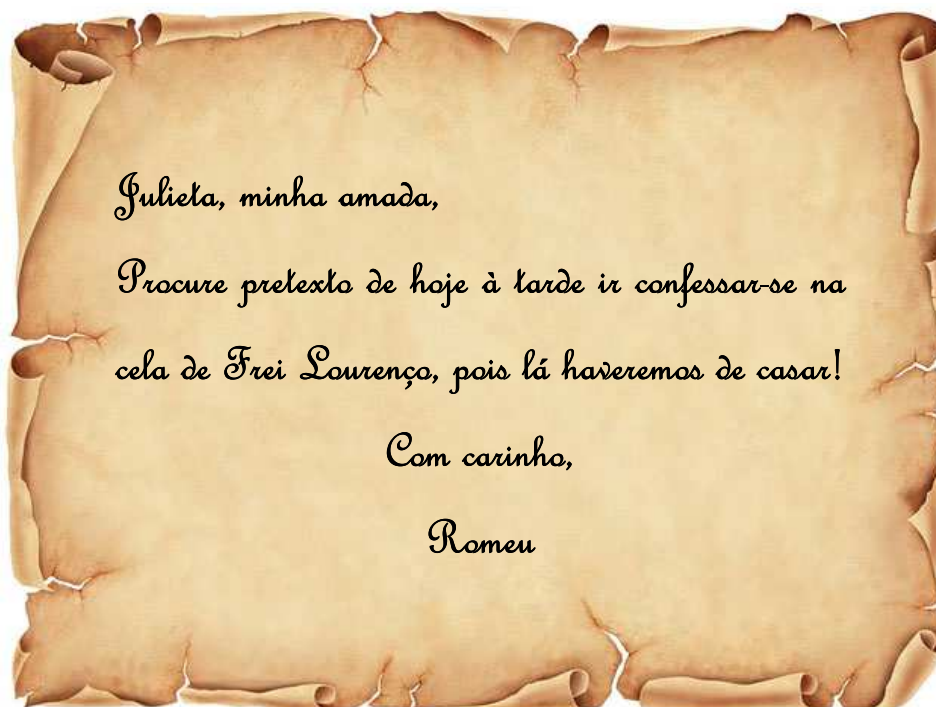
A próxima atividade tem como objetivo codificar uma mensagem que será encaminhada para Julieta, por Romeu.

Durante a realização desta atividade, trabalhamos com o conceito de matriz quadrada, construção de matrizes seguindo uma regra e adição de matrizes.

4.2 ATIVIDADE 2: O MATRIMÔNIO

Ao terminar a leitura, Romeu não teve dúvida de seu amor por Julieta; rapidamente escreveu um bilhete que seria entregue a sua amada.

Figura 3 – Mensagem que será codificada por Romeu.



Fonte: o próprio autor

Para que a ama não possa ler o recado, Romeu utilizará os códigos que havia combinado com Julieta e transcreverá o bilhete para esta linguagem. Vamos ajudar Romeu a fazer a codificação?

Analisando a mensagem de Romeu, teremos que contar quantos códigos ele utilizou para criar o seu bilhete. Lembre-se que os espaços entre uma palavra e outra fazem parte dos códigos.

Julieta, minha amada, Procure pretexto de hoje à tarde ir confessar-se na cela de Frei Lourenço, pois lá haveremos de casar! Com carinho, Romeu.

Ao realizarmos a contagem, conseguimos visualizar que Romeu utilizou 143 caracteres e símbolos, logo, uma matriz com 12 linhas e 12 colunas será suficiente para colocar todos os códigos utilizados por Romeu, sobrando apenas um espaço no fim da mensagem, que ficará, portanto ocupada por um espaço vazio.

Iremos, portanto, utilizar as regras acordadas com Julieta para que Romeu possa codificar o seu bilhete. Construindo uma matriz com os números utilizados na troca dos símbolos e caracteres pelos códigos da mensagem,

conseguimos uma matriz que possui 12 linhas e 12 colunas e será representada por A, ficando escrita da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 43 & 97 & 53 & 41 & 23 & 89 & 11 & 7 & 2 & 59 & 41 & 61 \\ 37 & 11 & 2 & 11 & 59 & 11 & 19 & 11 & 7 & 2 & 71 & 79 \\ 67 & 17 & 97 & 79 & 23 & 2 & 71 & 79 & 23 & 89 & 23 & 107 \\ 89 & 67 & 2 & 19 & 23 & 2 & 37 & 67 & 43 & 23 & 2 & 11 \\ 2 & 89 & 11 & 79 & 19 & 23 & 2 & 41 & 79 & 2 & 17 & 67 \\ 61 & 29 & 23 & 83 & 83 & 11 & 79 & 2 & 83 & 23 & 2 & 61 \\ 11 & 2 & 17 & 23 & 53 & 11 & 2 & 19 & 23 & 2 & 29 & 79 \\ 23 & 41 & 2 & 53 & 67 & 97 & 79 & 23 & 61 & 17 & 67 & 7 \\ 2 & 71 & 67 & 41 & 83 & 2 & 53 & 11 & 2 & 37 & 11 & 101 \\ 23 & 79 & 23 & 59 & 67 & 83 & 2 & 19 & 23 & 2 & 17 & 11 \\ 83 & 11 & 79 & 5 & 2 & 17 & 67 & 59 & 2 & 17 & 11 & 79 \\ 41 & 61 & 37 & 67 & 7 & 2 & 79 & 67 & 59 & 23 & 97 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A matriz utilizada para codificar a mensagem, de acordo com as regras estipuladas por Romeu e Julieta, deve ter 12 linhas e 12 colunas, visto que a matriz com os códigos possui essa quantidade. Assim a matriz codificadora, representada por B, ficou escrita da seguinte forma:

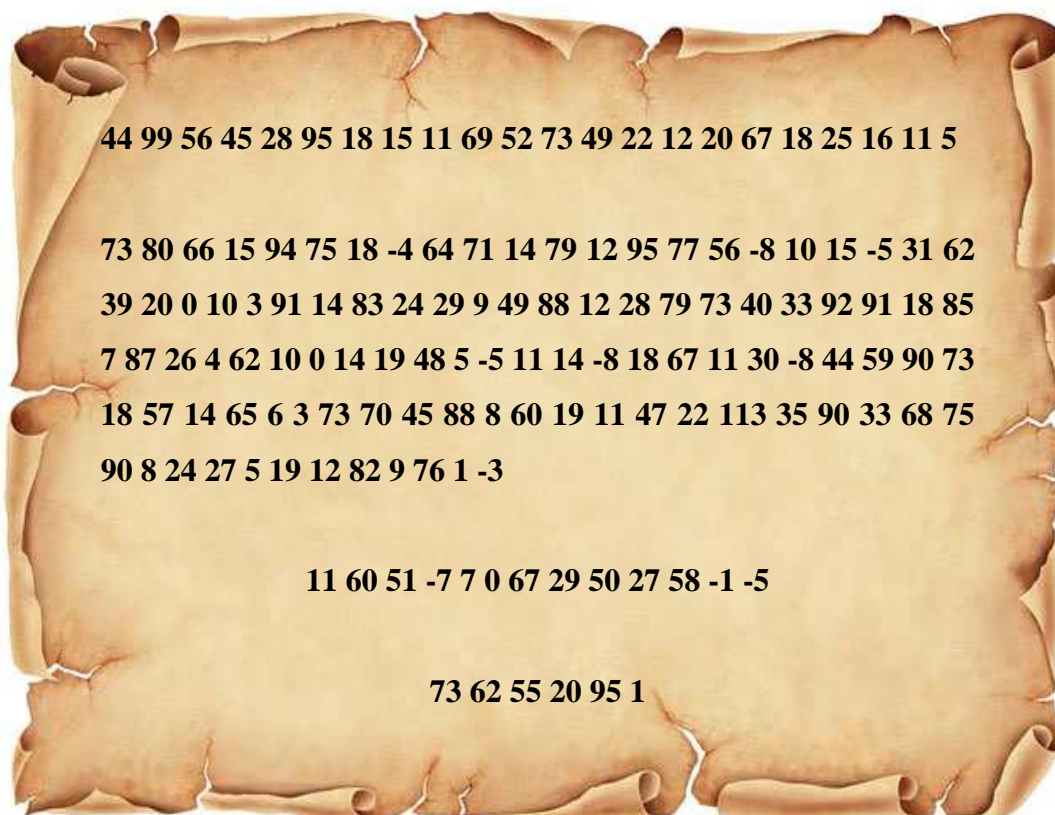
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & -12 \\ -12 & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & -12 \\ -12 & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & -12 \\ -12 & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para que possa codificar o texto da mensagem, Romeu deverá somar (4) com (5), encontrando o arranjo de números apresentado pela matriz que possui 12 linhas e 12 colunas e será representada por A + B:

$$A+B = \begin{bmatrix} 44 & 99 & 56 & 45 & 28 & 95 & 18 & 15 & 11 & 69 & 52 & 73 \\ 49 & 22 & 12 & 20 & 67 & 18 & 25 & 16 & 11 & 5 & 73 & 80 \\ 66 & 15 & 94 & 75 & 18 & -4 & 64 & 71 & 14 & 79 & 12 & 95 \\ 77 & 56 & -8 & 10 & 15 & -5 & 31 & 62 & 39 & 20 & 0 & 10 \\ 3 & 91 & 14 & 83 & 24 & 29 & 9 & 49 & 88 & 12 & 28 & 79 \\ 73 & 40 & 33 & 92 & 91 & 18 & 85 & 7 & 87 & 26 & 4 & 62 \\ 10 & 0 & 14 & 19 & 48 & 5 & -5 & 11 & 14 & -8 & 18 & 67 \\ 11 & 30 & -8 & 44 & 59 & 90 & 73 & 18 & 57 & 14 & 65 & 6 \\ 3 & 73 & 70 & 45 & 88 & 8 & 60 & 19 & 11 & 47 & 22 & 113 \\ 35 & 90 & 33 & 68 & 75 & 90 & 8 & 24 & 27 & 5 & 19 & 12 \\ 82 & 9 & 76 & 1 & -3 & 11 & 60 & 51 & -7 & 7 & 0 & 67 \\ 29 & 50 & 27 & 58 & -1 & -5 & 73 & 62 & 55 & 20 & 95 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Por fim, para que Romeu possa encaminhar a mensagem a sua amada sem que a ama de Julieta possa lê-lo, será necessário transcrever estes números para o bilhete que será levado, como apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Mensagem que será decodificada por Julieta



Fonte: o próprio autor

Julieta, ao decodificar a mensagem trazida por sua ama, vai até a cela do frei, que casa os dois numa secreta e singela cerimônia. Unindo as mãos

dos jovens, pede ao céu que abençoe aquela linda união, e que terminem de uma vez por todas aquelas terríveis desavenças familiares.

A sonhadora noiva volta para casa e, ansiosa, fica aguardando o fim do dia para poder encontrar-se com seu amado esposo.

A atividade que acabamos de resolver encontra-se no Apêndice B – Atividade 2: O Matrimônio, em que a estruturamos de forma que possa ser utilizada em sala de aula.

4.3 ATIVIDADE 3: A SEPARAÇÃO

Essa terceira atividade tem como objetivo, decodificar uma mensagem que foi encaminhada por Julieta para Romeu.

Durante a realização dessa atividade, trabalhamos com o conceito de matriz transposta, construção de matrizes seguindo uma regra e subtração de matrizes.

Cena 5 – “Quando o ódio fala mais alto”

Entretanto, estando o dia ainda em meio, Benvólio e Mercúrio passeiam pelas ruas ensolaradas de Verona quando se deparam com Teobaldo e seus amigos – que os provocam bastante. Mercúrio tem o gênio tão forte quanto o de Teobaldo e a briga vai se agravando até que Teobaldo vê Romeu se aproximando, e chama-o de patife.

De natureza calma e ajuizada, Romeu sempre procura evitar essas famosas brigas de rua. Agora mesmo é que não deseja discutir com Teobaldo, um primo a quem Julieta quer muito bem, e também por que deseja promover a paz com a família da amada.

Nem diante da nova cortesia de Romeu, Teobaldo consegue esquecer seu ódio e, tirando a espada da bainha, provoca Romeu. Vendo que o amigo não responde ao desafio, Mercúrio envergonha-se por Romeu, tira a própria espada e aceita a luta proposta. Romeu e Benvólio tentam em vão separá-los – até que Teobaldo fere mortalmente Mercúrio. Não suportando a visão do amigo morto, Romeu chama Teobaldo de patife e luta com ele, até que também termina por matá-lo.

A notícia da nova tragédia se espalha rapidamente por todos os cantos, e o centro de Verona se enche de curiosos, entre os quais encontram-se os senhores Montecchio e Capuleto com suas esposas, e o príncipe regente.

Este, cansado daquelas rixas sangrentas, resolve ouvir o que ambos os lados dizem sobre a trágica morte daqueles dois jovens. Cada família defende seu lado e exige um exemplar castigo para a família do oponente. O príncipe é parente de Mercúrio, mas diante da gravidade da situação, decide expulsar Romeu da cidade.

Cena 6 – “Conselhos de Frei Lourenço”

Julieta, recém-casada e já separada do marido, fica presa de sentimentos contraditórios, ora chamando Romeu de "amor", ora de "demônio" – às vezes de "meu anjo", outras de "lobo" – um sinal claro de sua luta interior entre o amor e o dever filial. Mas, quando se dá conta que poderia ter sido Romeu o morto, esquece a dor pelo primo e chora pelo banimento do amado esposo.

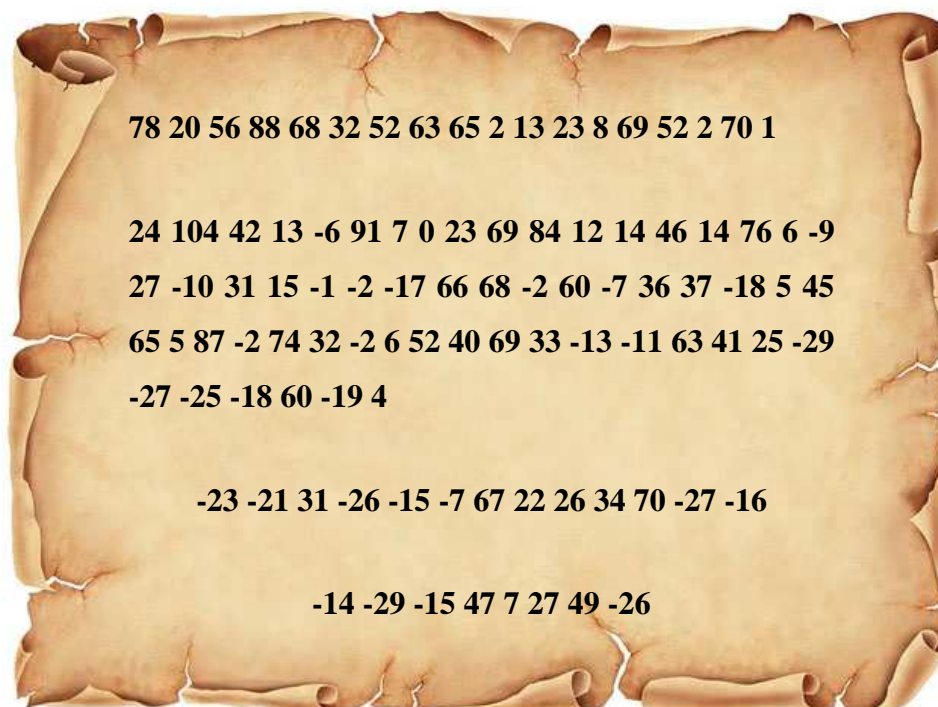
Romeu, após o conflito foge para a cela de Frei Lourenço e, quando é informado de sua triste sentença, passa a sofrer de uma inconsolável tristeza em seu grande amor por Julieta. Como viver longe dela? Impossível!

Entregue ao total desespero, Romeu mal ouve o sermão do Frei que tenta explicar-lhe a situação em que se colocou: – "Quando alguém mata outro homem deve ser punido". Entanto – continua o bondoso Frei –, que ficasse menos infeliz, pois além de não ter recebido a sentença de morte, ele não havia morrido como poderia ter-lhe acontecido e, além do mais, é agora casado com a linda Julieta. Que se comportasse como um homem, pois aquele desespero só o levaria a uma infelicidade ainda mais grave.

Frei Lourenço aconselha o jovem a procurar Julieta ao cair da noite, partindo para Mântua até que ele pudesse anunciar o casamento que ali realizara, e conseguir a reconciliação das famílias – com o perdão do príncipe. Só assim – afirma-lhe o Frei –, você poderá retornar à Verona e ser feliz com sua meiga Julieta.

Enquanto Frei Lourenço ainda estava aconselhando o jovem Romeu, eis que chega a ama de Julieta, trazendo uma mensagem da linda donzela, como apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Mensagem codificada por Julieta



Fonte: o próprio autor

Com medo de serem descobertos, novamente escreveram suas mensagens em códigos. Vamos ajudar Romeu a descobrir o que Julieta escreveu para ele?

Para decodificar esta mensagem, Romeu e Julieta combinaram algumas regras diferentes e a primeira ação que Romeu deve fazer é distribuir os números em linhas e colunas, em que o número de colunas será a quantidade de linhas que possui o bilhete. Portanto, ao analisarmos a Figura 5, percebemos que ela possui sete linhas, logo, a matriz que será criada deverá ter sete colunas e a distribuição de números nas sete colunas irá obedecer à ordem em que os números vão aparecendo na leitura do bilhete. Vejamos como irá ficar a matriz que será representada por A.

$$A = \begin{bmatrix} 78 & 20 & 56 & 88 & 68 & 32 & 52 \\ 63 & 65 & 2 & 13 & 23 & 8 & 69 \\ 52 & 2 & 70 & 1 & 24 & 104 & 42 \\ 13 & -6 & 91 & 7 & 0 & 23 & 69 \\ 84 & 12 & 14 & 46 & 14 & 76 & 6 \\ -9 & 27 & -10 & 31 & 15 & -1 & -2 \\ -17 & 66 & 68 & -2 & 60 & -7 & 36 \\ 37 & -18 & 5 & 45 & 65 & 5 & 87 \\ -2 & 74 & 32 & -2 & 6 & 52 & 40 \\ 69 & 33 & -13 & -11 & 63 & 41 & 25 \\ -29 & -27 & -25 & -18 & 60 & -19 & 4 \\ -23 & -21 & 31 & -26 & -15 & -7 & 67 \\ 22 & 26 & 34 & 70 & -27 & -16 & -14 \\ -29 & -15 & 47 & 7 & 27 & 49 & -26 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A próxima ação a ser realizada por Romeu será trocar as linhas e as colunas de posição, ou seja, o que era linha irá tornar-se coluna nesta nova matriz. Como será que iremos representar essa regra? Vejamos o que aconteceu.

$$A^t = \begin{bmatrix} 78 & 63 & 52 & 13 & 84 & -9 & -17 & 37 & -2 & 69 & -29 & -23 & 22 & -29 \\ 20 & 65 & 2 & -6 & 12 & 27 & 66 & -18 & 74 & 33 & -27 & -21 & 26 & -15 \\ 56 & 2 & 70 & 91 & 14 & -10 & 68 & 5 & 32 & -13 & -25 & 31 & 34 & 47 \\ 88 & 13 & 1 & 7 & 46 & 31 & -2 & 45 & -2 & -11 & -18 & -26 & 70 & 7 \\ 68 & 23 & 24 & 0 & 14 & 15 & 60 & 65 & 6 & 63 & 60 & -15 & -27 & 27 \\ 32 & 8 & 104 & 23 & 76 & -1 & -7 & 5 & 52 & 41 & -19 & -7 & -16 & 49 \\ 52 & 69 & 42 & 69 & 6 & -2 & 36 & 87 & 40 & 24 & 4 & 67 & -14 & -26 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A matriz (8) é a matriz transposta da matriz A (7) e será representada pela matriz A^t .

Pronto! Agora, teremos que criar a matriz utilizada para fazer a codificação da mensagem e para isso Julieta utilizou uma regra. Vejamos qual foi a regra utilizada por Julieta.

– Romeu, meu amado! Para criar a matriz decodificadora, que deverá ser do mesmo tamanho da matriz criada por meio da mensagem, utilizei a seguinte regra: todos os elementos estão localizados em algum lugar da matriz, logo, quando falamos o número da linha e da coluna, conseguimos encontrar de qual elemento estamos falando. Sendo assim, para descobrirmos os valores que farão parte desta matriz decodificadora, basta multiplicarmos o número da linha por

2 (dois) e o número da coluna por 3 (três) e, em seguida, subtrair os resultados encontrados.

Vejamos alguns exemplos de como resolver esse problema:

$$2 \times 1 - 3 \times 1 = 2 - 3 = -1 \text{ (elemento localizado na 1ª linha e 1ª coluna)}$$

$$2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4 \text{ (elemento localizado na 1ª linha e 2ª coluna)}$$

$$2 \times 1 - 3 \times 3 = 2 - 9 = -7 \text{ (elemento localizado na 1ª linha e 3ª coluna)}$$

...

$$2 \times 3 - 3 \times 4 = 6 - 12 = -6 \text{ (elemento localizado na 3ª linha e 4ª coluna)}$$

...

$$2 \times 7 - 3 \times 14 = 14 - 42 = -28 \text{ (elemento localizado na 7ª linha e 14ª coluna)}$$

Sendo assim, a matriz encontrada possuirá 7 linhas e 14 colunas e será representada por B, da seguinte forma:

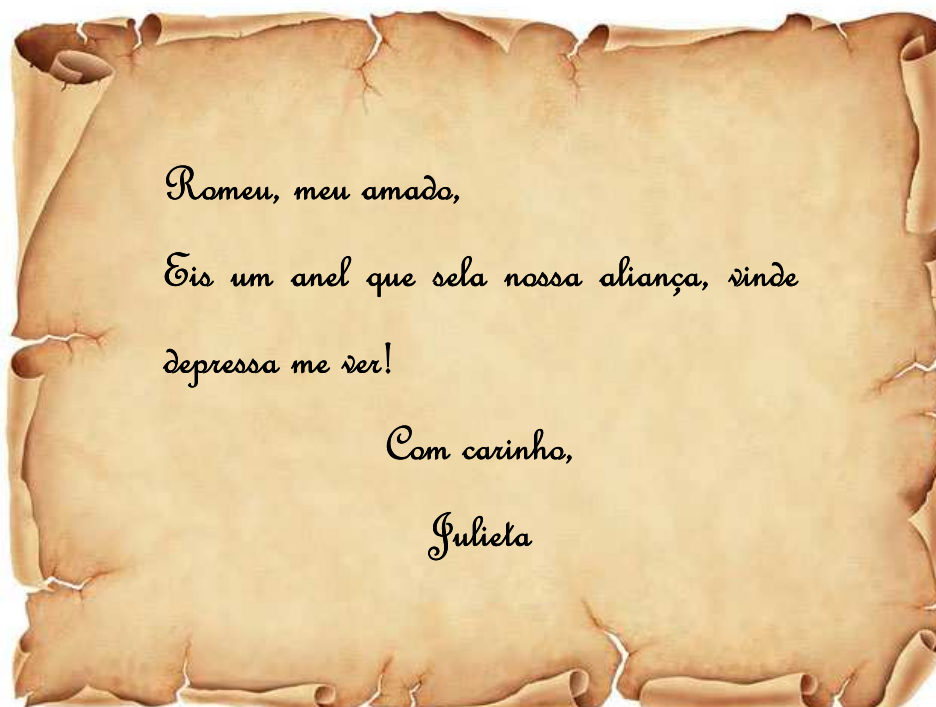
$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 & -10 & -13 & -16 & -19 & -22 & -25 & -28 & -31 & -34 & -37 & -40 \\ 1 & -2 & -5 & -8 & -11 & -14 & -17 & -20 & -23 & -26 & -29 & -32 & -35 & -38 \\ 3 & 0 & -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 & -21 & -24 & -27 & -30 & -33 & -36 \\ 5 & 2 & -1 & -4 & -7 & -10 & -13 & -16 & -19 & -22 & -25 & -28 & -31 & -34 \\ 7 & 4 & 1 & -2 & -5 & -8 & -11 & -14 & -17 & -20 & -23 & -26 & -29 & -32 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 & -21 & -24 & -27 & -30 \\ 11 & 8 & 5 & 2 & -1 & -4 & -7 & -10 & -13 & -16 & -19 & -22 & -25 & -28 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Por último, basta realizar a subtração da matriz encontrada na inversão das linhas pelas colunas (8) pela matriz criada para fazer a decodificação (9), pois para realizar a codificação Julieta utilizou-se da operação de adição de matrizes. Ao resolver a subtração, encontramos uma matriz que possui 7 linhas e 14 colunas e será representada por $A^t - B$.

$$A^t - B = \begin{bmatrix} 79 & 67 & 59 & 23 & 97 & 7 & 2 & 59 & 23 & 97 & 2 & 11 & 59 & 11 \\ 19 & 67 & 7 & 2 & 23 & 41 & 83 & 2 & 97 & 59 & 2 & 11 & 61 & 23 \\ 53 & 2 & 73 & 97 & 23 & 2 & 83 & 23 & 53 & 11 & 2 & 61 & 67 & 83 \\ 83 & 11 & 2 & 11 & 53 & 41 & 11 & 61 & 17 & 11 & 7 & 2 & 101 & 41 \\ 61 & 19 & 23 & 2 & 19 & 23 & 71 & 79 & 23 & 83 & 83 & 11 & 2 & 59 \\ 23 & 2 & 101 & 23 & 79 & 5 & 2 & 17 & 67 & 59 & 2 & 17 & 11 & 79 \\ 41 & 61 & 37 & 67 & 7 & 2 & 43 & 97 & 53 & 41 & 23 & 89 & 11 & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ao trocar os números da matriz (10), seguindo o Quadro 10 feito por Romeu e Julieta, encontramos a mensagem que Julieta encaminhou para Romeu!

Figura 6 – Mensagem decodificada por Romeu



Fonte: o próprio autor

Cena 7 – “Uma noite para este Amor”

Voltando ao pomar dos Capuletos, Romeu é recebido com muito amor por Julieta. Os jovens, belos e inocentes, permanecem juntos e se amam entre muitos beijos e promessas apaixonadas de um futuro lindo; entanto, também meio cientes de uma estranha adversidade que parece acompanhá-los e, dolorosamente, separá-los. A noite passa bem depressa e, em vez de ouvirem o doce rouxinol da noite, logo percebem o trinado áspero da cotovia, que os chama para a dura realidade: o dia raia e a hora triste da separação é chegada!

Com amargura e o coração cheio de maus presságios, os jovens prometem trocar constante correspondência. Romeu afasta-se apressado, pois teme ser descoberto e morto pelos parentes dela.

Mal sabiam eles que o destino já lhes reservava novos dissabores...

Poucos dias depois, o nobre Montecchio – desconhecendo o fato da filha já estar casada – aprova, com satisfação, um belo e digno pretendente à sua mão.

Julieta, desesperada, tenta argumentar com o pai que é jovem demais, que todos ainda estão de luto, que ela está abatida e triste com a morte do primo; mas o pai não só não aceita suas considerações, como marca o casamento deles já para a semana seguinte.

A atividade que acabamos de resolver encontra-se no Apêndice C – Atividade 3: A Separação, no qual a estruturamos de forma que possa ser utilizada em sala de aula.

4.4 ATIVIDADE 4: PLANOS PARA O REENCONTRO

Esta próxima atividade tem como objetivo codificar uma mensagem que será encaminhada para Romeu por Frei Lourenço.

Durante a realização desta atividade, trabalhamos com o conceito de multiplicação de matrizes.

Cena 8 – “Plano mal traçado – destino selado”

Diante desta nova calamidade, Julieta procura o Frei, dizendo-lhe que prefere ser enterrada viva a casar-se com outro – amando Romeu como ama. Vendo a gravidade de tudo, o frei ordena que ela volte para sua casa e finja aceitar o casamento imposto. Diante da surpresa da jovem, ele explica que na véspera da cerimônia de casamento, ela deverá tomar todo líquido do frasco que lhe entregará.

Comunica que ela ficará fria e parecerá sem vida por 42 horas. E, desta maneira ela será encontrada, considerada morta, e levada ao mausoléu da família em ataúde aberto – conforme o costume. Se ela tiver tal coragem será ali, em seguida, encontrada por Romeu. Logo que ela despertar daquele sonho paralisante, deverá fugir com seu esposo para Mântua.

Reunindo a audácia que só a juventude e o amor concedem, ela se despede do Frei, prometendo seguir fielmente as instruções recebidas. Em chegando à casa, Julieta diz ao pai que se casará conforme é do desejo dele. O pai fica muito satisfeito com aquela inesperada anuência da filha e, em meio à alegria geral, os preparativos da festa começam.

Em seus aposentos, naquela véspera de seu casamento com o nobre Páris, Julieta vence o terror de ingerir veneno e de despertar sozinha dentro

do mausoléu da família – onde o cadáver de seu primo já se decompunha sob uma mortalha ensangüentada –, e, por muito amor a Romeu, toma toda a poção caindo, em seguida, ao chão do quarto feito morta.

Enquanto isso, Frei Lourenço escreve uma mensagem para Romeu, contando-lhe que é necessário o seu retorno para Verona, de forma que seu plano possa ser executado.

Figura 7 – Mensagem que será codificada por Frei Lourenço



Fonte: o próprio autor

Vamos ajudar Frei Lourenço a codificar esta mensagem para que possa ser levada até Romeu? O primeiro passo será trocarmos os caracteres e símbolos pelos números que estão sendo utilizados nas mensagens (Quadro 10) e em seguida, contar a quantidade de números que serão encaminhados. Ao realizarmos a troca, percebemos que serão necessários 40 números para escrever o bilhete e que a matriz que será utilizada para codificar esta mensagem é 2x2 (lê-se: dois por dois); logo, teremos que distribuir os números do bilhete em duas linhas, ficando assim 20 números em cada uma das linhas da matriz.

Assim, a matriz numérica que encontramos na troca dos caracteres e símbolos pelos números é uma matriz que possui 2 linhas e 20 colunas e será representada por B.

$$B = \begin{bmatrix} 79 & 67 & 59 & 23 & 97 & 7 & 2 & 101 & 23 & 61 & 37 & 11 & 2 & 29 & 11 & 53 & 11 & 79 & 2 & 17 \\ 67 & 59 & 41 & 31 & 67 & 5 & 2 & 29 & 79 & 23 & 41 & 2 & 53 & 67 & 97 & 79 & 23 & 61 & 17 & 67 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Antes de partir em viagem para Mântua, Romeu e Frei Lourenço combinaram que a chave de codificação das mensagens que serão trocadas entre eles seria a seguinte matriz:

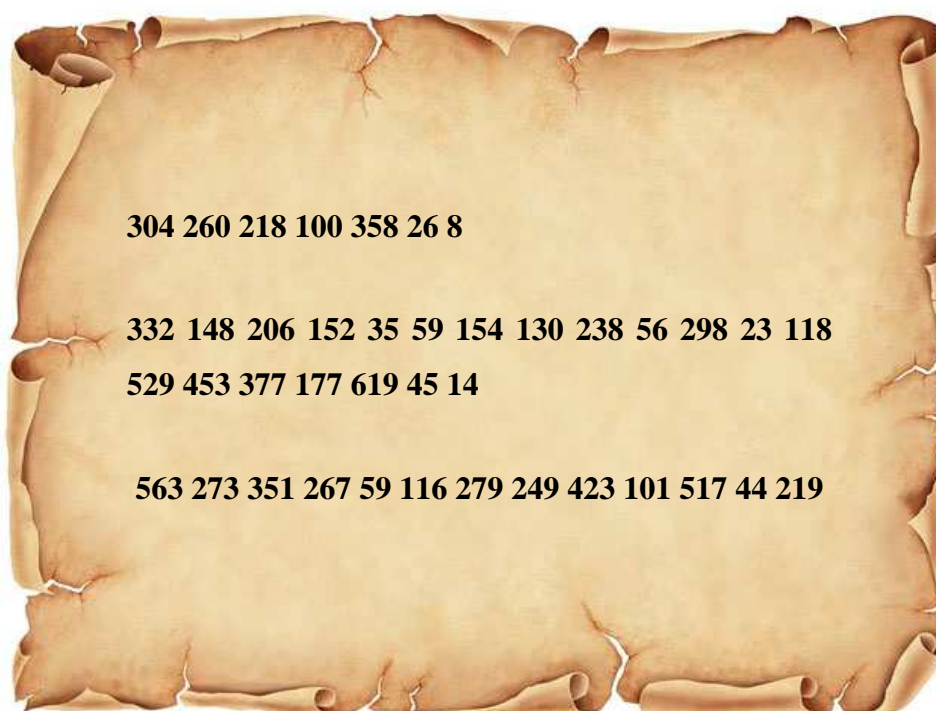
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Portanto, para que possamos codificar a mensagem que será encaminhada a Romeu será necessário multiplicarmos a matriz codificadora (12) pela matriz numérica da mensagem (11). E, ao realizar esta operação, encontramos uma matriz que possui 2 linhas e 20 colunas, que será representada por $A \times B$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 304 & 260 & 218 & 100 & 358 & 26 & 8 & 332 & 148 & 206 & 152 & 35 & 59 & 154 & 130 & 238 & 56 & 298 & 23 & 118 \\ 529 & 453 & 377 & 177 & 619 & 45 & 14 & 563 & 273 & 351 & 267 & 59 & 116 & 279 & 249 & 423 & 101 & 517 & 44 & 219 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Por fim, Frei Lourenço transcreveu os números de (13) para o bilhete e o entregou ao mensageiro para que pudesse levá-lo a Romeu.

Figura 8 – Mensagem que será decodificada por Romeu



Fonte: o próprio autor

A atividade que acabamos de resolver encontra-se no Apêndice D – Atividade 4: Planos para o Reencontro, em que a estruturamos de forma que possa ser utilizada em sala de aula.

4.5 ATIVIDADE 5: O ETERNO AMOR

Esta quinta atividade tem como objetivo, decodificar uma mensagem que foi encaminhada por Romeu para seu pai, o Sr. Montecchio.

Durante a realização desta atividade trabalhamos com o conceito de matriz inversa e multiplicação de matrizes.

Cena 9 – “Desencontros”

Na manhã seguinte, Páris vai com os músicos despertar a jovem, mas só encontra uma noiva morta. A tristeza e o desconsolo do rapaz logo alcançam os demais moradores da casa, especialmente os pais de Julieta. A repentina morte da única e amada filha transforma a festividade do casamento em triste preparativo para um velório:

Flores imaculadamente brancas, dobre de sinos, o lamento musical, pranto, preces, o jovem e lindo corpo sem vida sendo levado para a igreja –, o comentário sobre este lamentável desfecho se espalha bem rápido, chegando a Mântua e aos ouvidos de Romeu, provando que má notícia voa...

Ele, Romeu – que nada sabe do plano e da farsa em andamento, pois ainda não havia recebido a mensagem do Frei – teve um sonho muito estranho, em que se via morto ao lado de sua amada Julieta. Ali, como numa espécie de encantamento, ela o ressuscitava com seus beijos de amor e ele se transformava num imperador.

Entretanto, sentindo seus sonhos tristemente desfeitos, Romeu sela seu cavalo e parte para Verona, após comprar um veneno poderoso no caminho. Quis o destino que ele se desencontrasse do mensageiro que o frei lhe enviava. Assim, ao anoitecer, dirige-se ao túmulo dos Montecchio – para rever sua Julieta, ainda uma vez.

Mas eis que chegando à entrada do túmulo, Romeu é barrado pelo conde Páris, que ali ainda chora a morte da noiva. Discutem e o conde ameaça levá-lo preso. Os dois acabam duelando e Romeu mata o jovem sem saber ao certo quem era ele.

Entrando no túmulo, ele vê sua amada, ainda bela e fresca como se viva estivesse, e chora por seu perdido amor. Em seguida, pede perdão ao cadáver de Teobaldo, beija a jovem e bebe o veneno que traz atado à cinta, caindo morto ao lado dela.

Cena 10 – “Por Amor”

Frei Lourenço é informado que seu mensageiro não havia encontrado Romeu a tempo de entregar-lhe a carta com os detalhes do plano.

Preocupado, dirige-se rapidamente ao túmulo dos Capuleto a fim de retirar dali a jovem adormecida. Entretanto, quando ele chega, percebe a luz acesa e vislumbra, na entrada do túmulo, os corpos sem vida de Paris e de Romeu.

Julieta desperta, sonolenta, e pergunta ao frei onde está seu amado esposo. O frei, muito nervoso, tenta explicar à moça que tudo saíra errado e que o destino lhes preparara uma cilada, mas, assustado com os ruídos externos, ele foge acovardado, deixando a pobre moça sozinha e sem nada entender.

Julieta descobre o corpo de Romeu e, ao ver o frasco de veneno em sua mão, compreende o ato desesperado de seu amado – que ali se matara por acreditá-la para sempre perdida. Ela chora de uma dor atroz e lamenta tão triste sina.

Em vão ela procura um pouco de veneno nos lábios ainda quentes de Romeu. Ouvindo passos que se aproximam do túmulo, ela pega o punhal que traz consigo e, sem titubear, crava-o em seu coração – morrendo ao lado do esposo amado.

Os corpos são encontrados pela guarda e logo toda Verona passa a lamentar a morte de vidas tão jovens, inocentes e belas.

Os nobres de ambas as famílias são chamados, e o príncipe exige que o frei, preso minutos antes, conte o que sabe sobre aquela enorme tragédia.

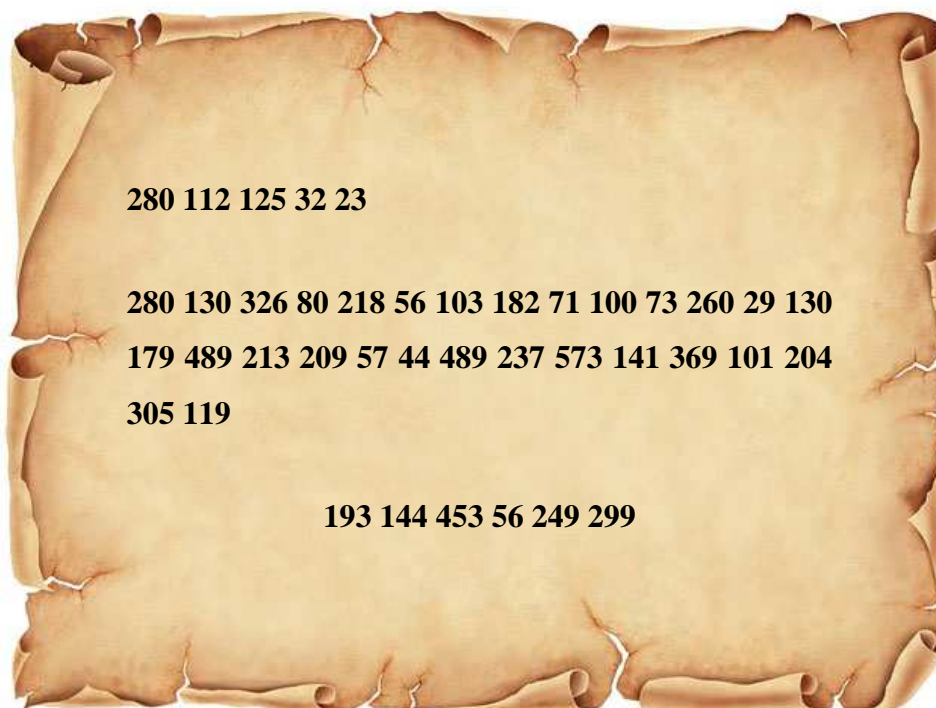
Final – “Um Amor para a Eternidade”

Frei Lourenço conta a infeliz história de amor daqueles jovens que se apaixonaram assim que se conheceram. Comovido, ele relata o intenso desejo de ficarem sempre juntos e sobre o casamento que ele mesmo realizara em sua cela, a fim de consagrar aquele lindo amor. Não esqueceu de acrescentar que esta união iria servir para aproximar as famílias rivais. Esclarece tudo sobre a morte de Teobaldo e de Mercúrio, que provocara o banimento de Romeu.

Explica a todos sobre a poção que Julieta tomara para parecer morta em virtude do casamento que o Sr. Montecchio lhe impunha; e da fatalidade de não ter conseguido avisar Romeu em tempo sobre o plano desesperado de ambos. Por fim, narra como havia encontrado o jovem já morto dentro do mausoléu. – 'Mais do que isto, garante ao príncipe, ele não sabia dizer, pois de lá se afastara rapidamente ao perceber os dois rapazes mortos.'

O pajem confirma ter assistido a luta dos jovens. Logo a seguir, encontram uma carta de Romeu dirigida a seu pai, o Sr. Montecchio.

Figura 9 – Mensagem codificada por Romeu



Fonte: o próprio autor

O que será que diz a carta? Mais uma vez a mensagem está codificada, e o único que poderia ajudar a solucionar e desvendar os escritos da mensagem é Frei Lourenço, que rapidamente, inicia a decodificação da mesma. Para que seja possível fazer a leitura deste bilhete, teremos que encontrar em primeiro lugar a inversa da chave que ficou combinada entre Romeu e Frei

Lourenço. Logo, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ será calculada da seguinte forma:

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b + d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

Isolando a incógnita c na segunda equação do primeiro sistema teremos:

$$5a + 2c = 0$$

$$2c = -5a$$

$$c = -\frac{5a}{2}$$

Substituindo o valor da incógnita c na primeira equação do primeiro sistema encontramos:

$$3a + c = 1$$

$$3a + \left(-\frac{5a}{2}\right) = 1$$

$$\frac{6a}{2} - \frac{5a}{2} = 1$$

$$\frac{a}{2} = 1$$

$$a = 2$$

Substituindo o valor da incógnita a no valor da incógnita c , encontrada acima, teremos:

$$c = -\frac{5a}{2}$$

$$c = -\frac{5 \cdot 2}{2}$$

$$c = -\frac{10}{2}$$

$$c = -5$$

Isolando a incógnita d na primeira equação do segundo sistema teremos:

$$3b + d = 0$$

$$d = -3b$$

Substituindo o valor da incógnita d na segunda equação do segundo sistema encontramos:

$$5b + 2d = 1$$

$$5b + 2 \cdot (-3b) = 1$$

$$5b - 6b = 1$$

$$-b = 1$$

$$b = -1$$

Substituindo o valor da incógnita b no valor da incógnita d , encontrada acima, teremos:

$$d = -3b$$

$$d = (-3) \cdot (-1)$$

$$d = 3$$

Logo, a matriz que será utilizada para realizar a decodificação da mensagem de Romeu para seu pai será:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Agora que já estamos de posse da matriz decodificadora (14), basta multiplicarmos esta matriz pela matriz que será criada com os números provenientes na mensagem escrita por Romeu, ou seja, uma matriz que possui 2 linhas e 20 colunas e será representada por B.

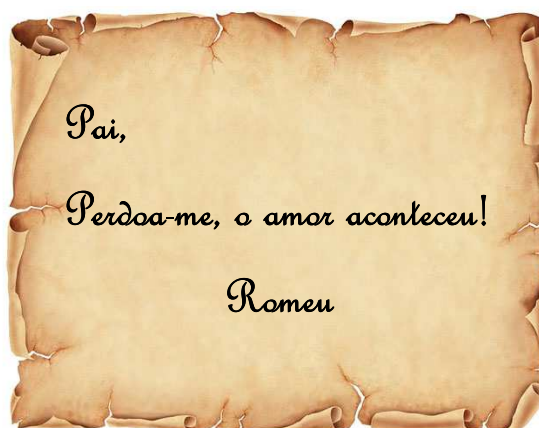
$$B = \begin{bmatrix} 280 & 112 & 125 & 32 & 23 & 280 & 130 & 326 & 80 & 218 & 56 & 103 & 182 & 71 & 100 & 73 & 260 & 29 & 130 & 179 \\ 489 & 213 & 209 & 57 & 44 & 489 & 237 & 573 & 141 & 369 & 101 & 204 & 305 & 119 & 193 & 144 & 453 & 56 & 249 & 299 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por fim, ao realizarmos a multiplicação de (14) por (15), encontramos uma matriz que possui 2 linhas e 20 colunas e será representada por $A^{-1} \times B$.

$$A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} 71 & 11 & 41 & 7 & 2 & 71 & 23 & 79 & 19 & 67 & 11 & 2 & 59 & 23 & 7 & 2 & 67 & 2 & 11 & 59 \\ 67 & 79 & 2 & 11 & 17 & 67 & 61 & 89 & 23 & 17 & 23 & 97 & 5 & 2 & 79 & 67 & 59 & 23 & 97 & 2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ao trocar os números acima, seguindo o Quadro 10, encontramos a mensagem que Romeu encaminhou ao seu pai, o Senhor Montecchio, pedindo perdão por desejar morrer e ficar junto da amada pela eternidade!

Figura 10 – Mensagem decodificada por Frei Lourenço



Fonte: o próprio autor

Tal achado livra o frade de ser diretamente acusado daquelas mortes, apesar das consequências funestas de seu perigoso plano, ainda que bem intencionado.

O príncipe aproveita tal tragédia, chama os velhos nobres de cada família, fala sobre aquele triste amor do jovem casal e do castigo que o céu mandara sobre aquele orgulho e ódio inúteis que passavam de geração a geração, e nunca morriam. Até onde iria aquilo? Que aprendessem agora sobre mais tolerância e respeito ao próximo.

Por fim, deixando a raiva de lado, os nobres dão-se as mãos prometendo erguer estátuas de Julieta e Romeu em ouro do mais puro para que ninguém jamais esquecesse o imenso amor de ambos.

A sábia decisão chegara tarde demais para Romeu e Julieta, entretanto, o sacrifício que ambos fizeram tornou-se o símbolo de um amor verdadeiro e eterno para toda a gente de Verona – e depois para o mundo.

A atividade que acabamos de resolver encontra-se no Apêndice E – Atividade 5: O Eterno Amor, no qual a estruturamos de forma que possa ser utilizada em sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os primeiros estímulos para a realização desta proposta de ensino surgiram com o interesse em desenvolver o conteúdo de matrizes para o Ensino Médio por meio de problemas contextualizados, visto que a ideia de aprender matemática de forma contextualizada possibilita o desenvolvimento da autonomia e da criatividade, sem dizer que uma pequena parcela dos livros didáticos trabalha este conceito de forma descontextualizada.

Alguns motivos nos levaram a pensar em uma estratégia de ensino diferenciada. Dentre eles, destacamos a falta de interesse pelo aprendizado e a falta de motivação dos alunos, pois o ensino-aprendizagem do conceito de matrizes geralmente é estruturado na utilização de regras sem conexão com o cotidiano do aluno, gerando, dessa forma, o desinteresse pelo conteúdo.

Sendo assim, escolhemos a Criptografia como contexto gerador de motivação no desenvolvimento das atividades contextualizadas, pois nossa principal finalidade ao trabalhar algum conteúdo matemático é levar o aprendizado com significado aos educandos, ou seja, desenvolvermos a inteligência crítica dos mesmos.

Vale ressaltar que este trabalho possui indícios de interdisciplinaridade ao trabalhar o drama shakespeariano – *Romeu e Julieta* –, pois poderíamos abordar neste contexto a Literatura, a História, o Teatro, entre outros assuntos, destacando assim a importância da interdisciplinaridade que, segundo Fortes (2013, p. 8), “aponta para a construção de uma escola participativa e decisiva na formação do sujeito social”, um dos objetivos da Educação Básica.

Portanto, o principal objetivo deste trabalho é apresentar aos professores de Matemática e demais interessados uma estratégia de ensino diferenciada para se ensinar Matemática de forma significativa. Acreditamos que essas atividades podem ser subsídio para o ensino de matrizes, podendo, por consequência, serem utilizadas com alunos da segunda série do Ensino Médio.

Esperamos que esse trabalho possa servir de contribuição para os que se interessam por problemas contextualizados e que as atividades dessa proposta possam ser utilizadas por professores em suas aulas de Matemática, uma vez que este trabalho é uma proposta de ensino, permanecendo em aberto para um posterior trabalho de investigação.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução Claus Ivo Doering. 8ª edição. Porto alegre: Bookman, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BOLDRINI, José Luis. **Álgebra linear**. 3ª edição. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Volume 2 – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio – PCNEM. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio**: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+. Brasília: MEC, 2002.

FERREIRA, Rosiney de Jesus. **Matemática e Arte um Diálogo Possível**: Trabalhando Atividades Contextualizadas em Sala de Aula. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/2359_546_ID.pdf> Acesso em: 25 ago. 2013.

FINCATTI, Camilla Ávila. **Criptografia como agente motivador na Aprendizagem da Matemática em sala de aula**. 2010. 82 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática – Licenciatura) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo. 2010.

FORTES, Clarissa Corrêa. **Interdisciplinaridade: Origem, Conceito e Valor**. Disponível em:

<<http://www3.mg.senac.br/NR/rdonlyres/eh3tcog37oi43nz654g3dswloqyejkbfxkjpbgehjepnlzyl4r3inoxahewtpql7drvx7t5hhxkic/Interdisciplinaridade.pdf>> Acesso em: 27 ago. 2013.

MEIRELES, Moisés Martins. **A Criptografia como Elemento Motivador para o Ensino das Operações Matriciais**. 2011. 60 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática – Licenciatura) – Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop. 2011.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio; SÁ, Pedro Franco de; FONSECA, Rubens Vilhena. **Um Estudo Diagnóstico sobre as Dificuldades em Matrizes**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO83969659272T.doc>. Acesso em: 29 ago. 2013.

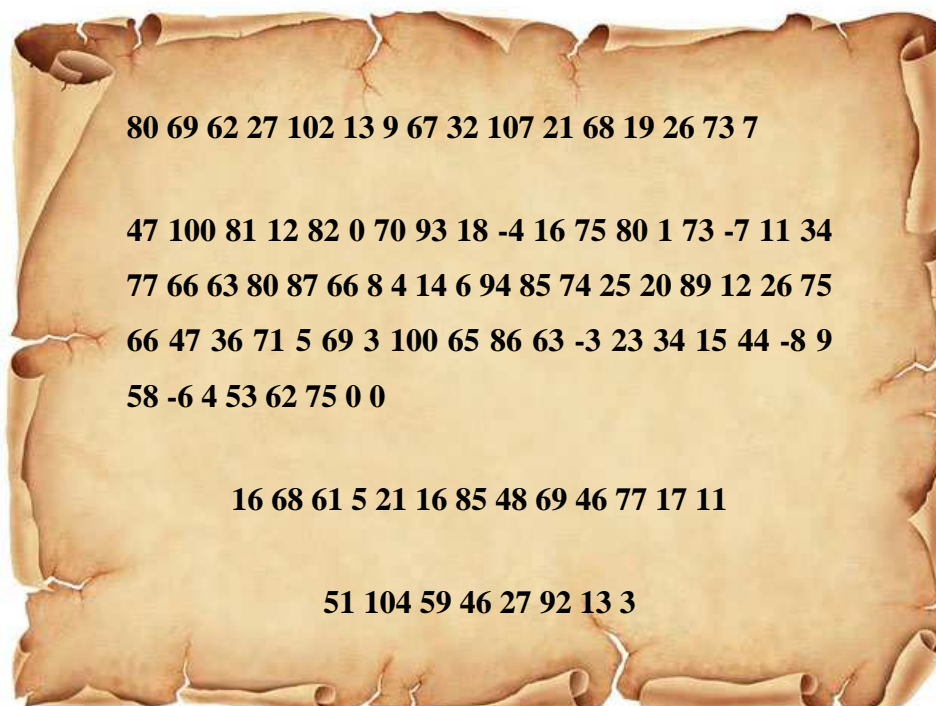
PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática** — DCE. Curitiba: SEED, 2008.

SILVA, Fernanda Taline da; PAPANI, Fabiana Garcia. **Um pouco da história da criptografia**. Disponível em: <<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/16.pdf>>. Acesso em: 21 abr. 2013

APÉNDICE

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1: O PRIMEIRO ENCONTRO

Essa é a mensagem que Julieta encaminhou a Romeu, por meio de sua ama. Vamos ajudar Romeu a desvendar o mistério do bilhete encaminhado por sua amada, seguindo os critérios que eles combinaram para codificar e decodificar suas mensagens?



- Conte quantos são os números que estão escritos na mensagem codificada.
- Vamos organizar um quadro com os números que estão na mensagem codificada, de forma que o número de linhas seja igual ao número de colunas. Quantas linhas e colunas deverá ter este quadro?
- Como são chamadas, na Matemática, as tabelas numéricas compostas de certa quantidade de linhas (filas horizontais) e de colunas (filas verticais)? Como elas são representadas?

- d) Vamos organizar a matriz decodificadora seguindo a regra que foi combinada por Romeu e Julieta e que está descrita abaixo:

“Ao descobrir a quantidade de linhas e colunas utilizadas para distribuir os números da mensagem codificada, será necessário organizar outro quadro com a mesma quantidade de elementos que o primeiro, no qual, na primeira linha, teremos valores positivos, consecutivos e crescentes, iniciando no número um; na segunda linha, serão valores positivos, consecutivos e decrescentes, iniciando no valor do último número da primeira linha; na terceira linha, colocarão valores negativos, consecutivos e decrescentes, iniciando no número negativo um; na quarta linha, serão valores negativos, consecutivos e crescentes, iniciando no valor do último número da terceira linha; e as demais linhas obedecerão às regras estipuladas para as primeiras quatro linhas, respectivamente.”

- e) Faça a seguinte operação: Subtraia a matriz B da matriz A.

- f) Romeu e Julieta organizaram um quadro de códigos para realizar a codificação e decodificação de suas mensagens. Para isso eles trocaram as letras e símbolos por números primos. Construa esse quadro.

	?	!	,	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	3	5												

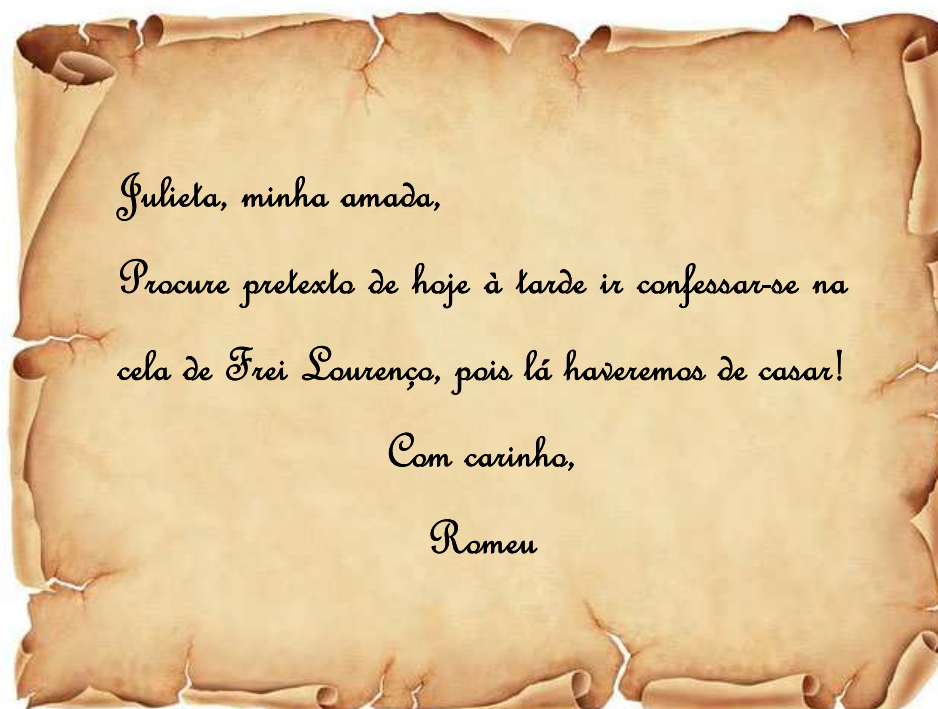
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

- g) Realize a troca dos códigos pelas letras e símbolos que foram combinados por Romeu e Julieta, para encontrar a mensagem escrita por Julieta:



APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: O MATRIMÔNIO

Ao terminar a leitura, Romeu não teve dúvida de seu amor por Julieta; rapidamente escreveu um bilhete que seria entregue a sua amada.



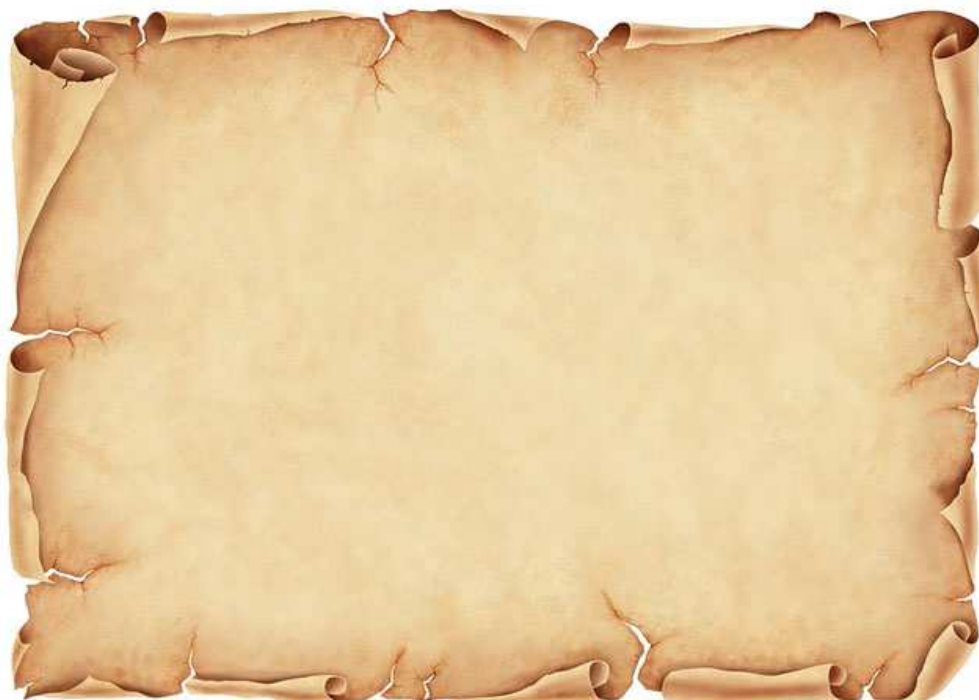
Para que a ama não possa ler o recado, Romeu utilizará os códigos que havia combinado com Julieta e transcreverá o bilhete para esta linguagem. Vamos ajudar Romeu a fazer a codificação seguindo os critérios que eles combinaram para codificar e decodificar suas mensagens?

- a) Conte quantos símbolos e caracteres Romeu utilizou para criar o bilhete; lembre-se que os espaços entre uma palavra e outra fazem parte dos códigos.

- b) Quantas linhas e colunas deverá ter o quadro de forma que a quantidade de símbolos e caracteres possa ser distribuída em uma matriz quadrada? Em seguida, organize-a.

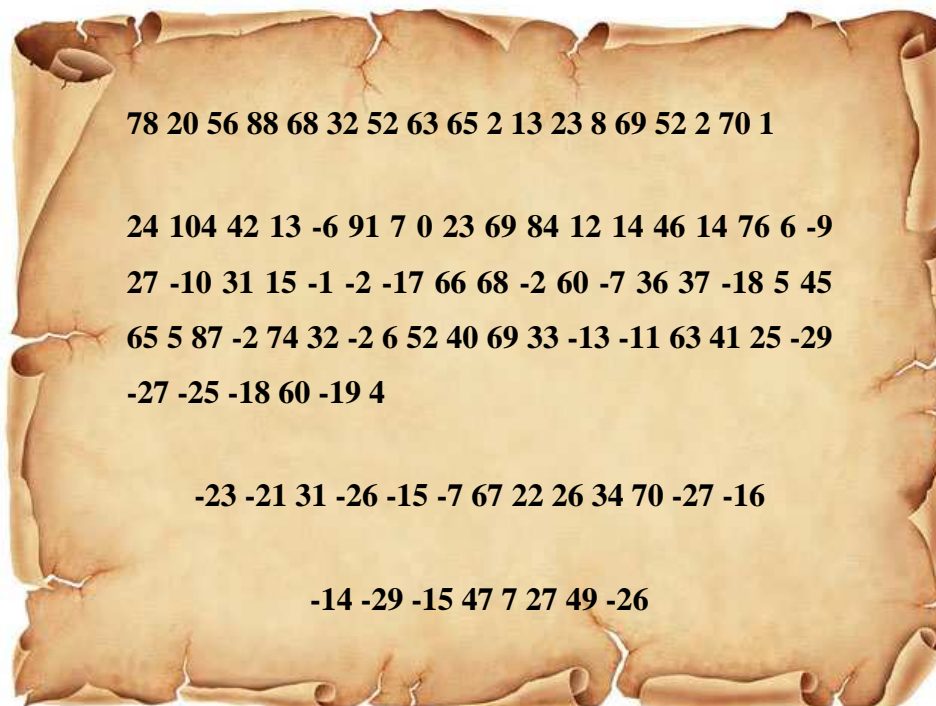
- c) Faça a troca dos símbolos e caracteres pelos códigos combinados por Romeu e Julieta construindo, assim, a matriz numérica da mensagem.
- d) Vamos organizar a matriz codificadora seguindo a regra que foi combinada por Romeu e Julieta e que está descrita abaixo:
“Ao descobrir a quantidade de linhas e colunas utilizadas para distribuir os números da mensagem codificada, será necessário organizar outro quadro com a mesma quantidade de elementos que o primeiro, no qual, na primeira linha, teremos valores positivos, consecutivos e crescentes, iniciando no número um; na segunda linha, serão valores positivos, consecutivos e decrescentes, iniciando no valor do último número da primeira linha; na terceira linha, colocarão valores negativos, consecutivos e decrescentes, iniciando no número negativo um; na quarta linha, serão valores negativos, consecutivos e crescentes, iniciando no valor do último número da terceira linha; e as demais linhas obedecerão às regras estipuladas para as primeiras quatro linhas, respectivamente.”
- e) Faça a seguinte operação: Some a matriz A com a matriz B.

- f) Transcreva os números encontrados para o bilhete que será levado a Julieta.



APÊNDICE C – ATIVIDADE 3: A SEPARAÇÃO

Enquanto Frei Lourenço ainda estava aconselhando o jovem Romeu, eis que chega a ama de Julieta trazendo uma mensagem da linda donzela.



Com medo de serem descobertos, novamente escreveram suas mensagens em códigos. Vamos ajudar Romeu a descobrir o que Julieta escreveu para ele seguindo os critérios que eles combinaram para codificar e decodificar suas mensagens?

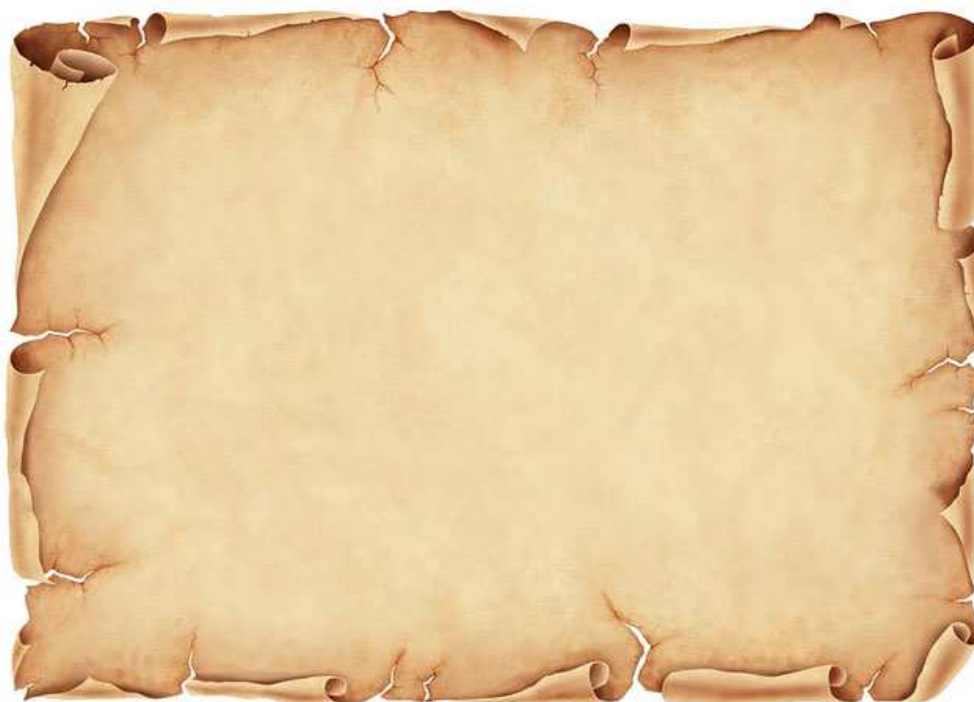
- Quantas linhas possui este bilhete que foi escrito por Julieta?
- Distribua os números em linhas e colunas, em que o número de colunas será a quantidade de linhas que possui o bilhete.
- Troque as linhas e as colunas de posição, ou seja, o que era linha irá tornar-se coluna nesta nova matriz. Qual o nome dessa matriz em relação à primeira matriz construída?

- d) Construa a matriz utilizada para fazer a codificação da mensagem utilizando a seguinte regra que foi utilizada por Julieta:

“Romeu, meu amado! Para criar a matriz decodificadora, que deverá ser do mesmo tamanho da matriz criada por meio da mensagem, utilizei a seguinte regra: todos os elementos estão localizados em algum lugar da matriz, logo, quando falamos o número da linha e da coluna, conseguimos encontrar de qual elemento estamos falando. Sendo assim, para descobrirmos os valores que farão parte desta matriz decodificadora, basta multiplicarmos o número da linha por 2 (dois) e o número da coluna por 3 (três) e, em seguida, subtrair os resultados encontrados.”

- e) Faça a seguinte operação: Subtraia a matriz B da matriz A.

- f) Realize a troca dos códigos pelas letras e símbolos que foram combinados por Romeu e Julieta para encontrar a mensagem escrita por Julieta:



APÊNDICE D – ATIVIDADE 4: PLANOS PARA O REENCONTRO

Enquanto isso, Frei Lourenço escreve uma mensagem para Romeu contando-lhe que é necessário o seu retorno para Verona de forma que seu plano possa ser executado.



Vamos ajudar Frei Lourenço a fazer a codificação da mensagem que será levada até Romeu seguindo os critérios que eles combinaram para codificar e decodificar suas mensagens?

- a) Faça a troca dos símbolos e caracteres pelos códigos combinados por Romeu e Julieta.

- b) Conte a quantidade de números que serão encaminhados.

- c) Distribua os números do bilhete em duas linhas. Quantos números ficarão em cada linha?

- d) Antes de partir em viagem para Mântua, Romeu e Frei Lourenço combinaram que a chave de codificação das mensagens que serão trocadas entre eles seria a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

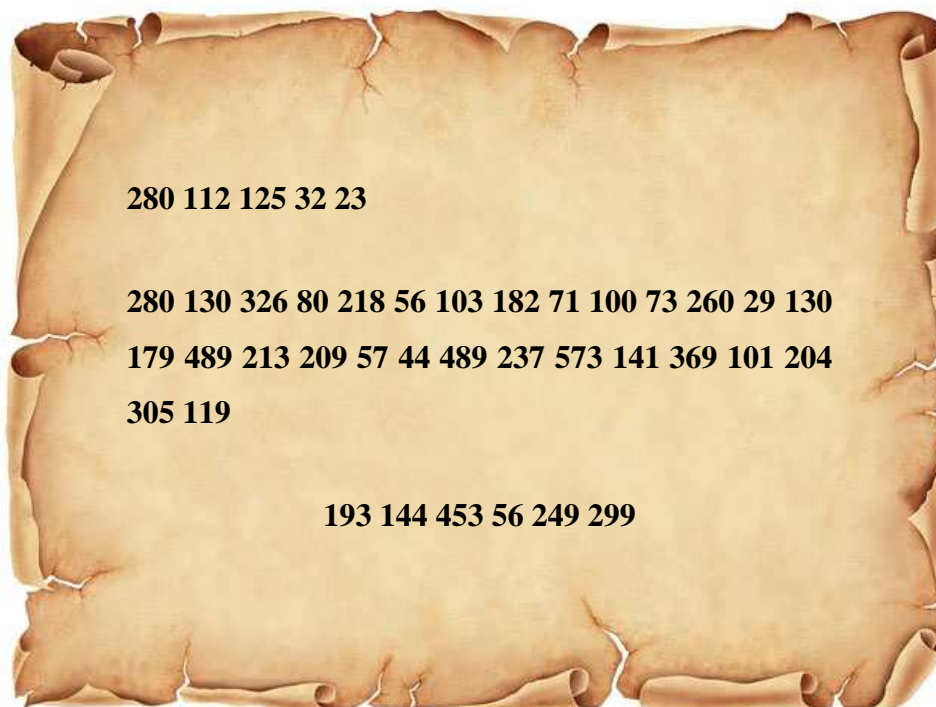
Multiplique a matriz codificadora pela matriz numérica da mensagem.

- e) Transcreva os números encontrados para o bilhete que será levado a Romeu.



APÊNDICE E – ATIVIDADE 5: O ETERNO AMOR

Antes de retornar a Verona, já sabendo do triste destino que aconteceu a sua linda Julieta, Romeu escreve uma carta dirigida a seu pai, o Sr. Montecchio.



Vamos ajudar o Frei Lourenço a fazer a decodificação da carta encaminhada por Romeu ao Sr. Montecchio seguindo os critérios que eles combinaram para codificar e decodificar suas mensagens?

- a) Distribua os números do bilhete em duas linhas. Quantos números ficarão em cada linha?
- b) Encontre a inversa da chave codificadora $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, que ficou combinado entre Romeu e Frei Lourenço.

- c) Multiplique a matriz decodificadora pela matriz que foi criada com os números provenientes na mensagem escrita por Romeu.

- d) Realize a troca dos códigos pelas letras e símbolos que foram combinados por Romeu e Julieta para encontrar a mensagem escrita por Romeu:

