



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CAMPUS MACAPÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

MARCELO FRANKYE AZEVEDO DA SILVA

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RECORRÊNCIAS
LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM, COM
COEFICIENTES CONSTANTES, UTILIZANDO A METODOLOGIA DA
ENGENHARIA DIDÁTICA**

MACAPÁ
2022



PROFMAT

MARCELO FRANKYE AZEVEDO DA SILVA

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RECORRÊNCIAS
LINEARES HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM, COM
COEFICIENTES CONSTANTES, UTILIZANDO A METODOLOGIA DA
ENGENHARIA DIDÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, da Universidade Federal
do Amapá – UNIFAP como requisito para
obtenção do título de Mestre em
Matemática sob a orientação do Prof. Dr.
Guzman Isla Chamilco

MACAPÁ
2022

S581s Silva, Marcelo Frankye Azevedo da.

Uma sequência didática para o ensino de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem, com coeficientes constantes, utilizando a metodologia da engenharia didática / Marcelo Frankye Azevedo da Silva. Macapá: Unifap, 2022.
1 recurso eletrônico. 44 folhas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá , Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Macapá, 2022.
Orientador: Guzman Eulálio Isla Chamilco.

Modo de acesso: World Wide Web.

Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

1. Engenharia didática . 2. Raciocínio recursivo . 3. Recorrências. I. Chamilco, Guzman Eulálio Isla, orientador. II. Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD 23. ed. – 510.07

SILVA, Marcelo Frankye Azevedo da. **Uma sequência didática para o ensino de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem, com coeficientes constantes, utilizando a metodologia da engenharia didática.** Orientador: Guzman Eulálio Isla Chamilco. 44 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Marcel Frankye Azevedo da Silva intitulada: “***Uma sequência didática para o ensino de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem, com coeficientes constantes, utilizando a metodologia da engenharia didática***”, após terem inquerido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 03 de novembro de 2022.



Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco

Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT-UNIFAP)



Dr. Ítalo Bruno Mendes Duarte

Avaliador Externo (UEAP)



Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Avaliador interno (PROFMAT-UNIFAP)

MACAPÁ/AP /2022

AGRADECIMENTOS

À CAPES pelo apoio e incentivo financeiro aos alunos do PROFMAT.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Agradeço à minha família, meu pai João Carlos Queiroz da Silva, minha mãe Maria de Belém da Silva Azevedo, minha esposa, amiga e companheira Diana de Souza baia e ao meu filho amado Pedro Queiroz Baía Silva, pessoas que sempre me encorajaram dando-me o apoio de que necessitei nos momentos mais difíceis, pela paciência que tiveram comigo durante este percurso.

Aos professores do colegiado do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Amapá, UNIFAP, em especial aos Professores que estiverem conosco, alunos da turma PROFMAT/2019 polo UNIFAP, nos cursos ofertados durante este período.

Aos colegas do curso PROFMAT/2019 polo UNIFAP.

A todos muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho apresenta de forma sistemática a utilização de uma sequência didática, baseada na metodologia da engenharia didática, no ensino de sequências definidas recursivamente, recorrências, em especial as do tipo linear, homogênea, de segunda ordem com coeficientes constantes à alunos da primeira série do ensino médio, sendo desenvolvido a aplicação no momento sugestivamente adequado, após ou alinhado ao contato dos alunos com o ensino de progressões aritméticas e geométricas, conteúdo este que já faz parte do currículo de ensino de matemática para esta série. Neste trabalho são apresentados os conceitos relacionados a metodologia da engenharia didática como fundamentalmente *concepção e análises à priori, experimentação, análise à posteriori e validação*, assim como são apresentados os dados relacionados a aplicação destes conceitos no ensino de recorrências. O trabalho traz a uma análise baseada em gráficos sobre as respostas apresentadas pelos alunos durante a execução de um questionário que fora respondido durante e após a experimentação da sequência didática proposta, na qual este questionário tem o objetivo uma autoavaliação de cada aluno sobre sua aprendizagem, dos conceitos apresentados em sala de aula sobre recorrências. Os resultados obtidos e apresentados neste trabalho, com a análise de gráficos e a percepção do desenvolvimento e entendimentos dos alunos sobre o tema, mostram se positivos e satisfatórios, pois compreendeu se que parcela maior dos alunos tiveram êxito na compreensão da parte teórica sobre recorrências e em maioria compreenderam a resolução dos exercícios propostos.

Palavras-chave: Engenharia didática; recorrências; sequência didática; raciocínio recursivo.

ABSTRACT

This work systematically presents the use of a didactic sequence, based on the methodology of didactic engineering, in the teaching of recursively defined sequences, recurrences, especially those of the linear, homogeneous, second order type with constant coefficients for students in the first year of high school, and the application was developed at a suggestively appropriate time, after or in line with the students' contact with the teaching of arithmetic and geometric progressions, content that is already part of the mathematics teaching curriculum for this grade. In this work, concepts related to the methodology of didactic engineering are presented, such as conception and a priori analyses, experimentation, a posteriori analysis and validation, as well as data related to the application of these concepts in the teaching of recurrences. The work brings an analysis based on graphics on the answers presented by the students during the execution of a questionnaire that was answered during and after the experimentation of the proposed didactic sequence, in which this questionnaire has the objective of a self-evaluation of each student about their learning, of the concepts presented in the classroom about recurrences. The results obtained and presented in this work, with the analysis of graphs and the perception of the development and understanding of the students on the subject, prove to be positive and satisfactory, since it was understood that a greater number of students were successful in understanding the theoretical part about recurrences and most understood the resolution of the proposed exercises.

Keywords: Didactic engineering; recurrences; didactic sequence; recursive; reasoning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Escola Estadual Igarapé da Fortaleza	31
Figura 2 Imagem 1 dos alunos durante a aula sobre recorrências e aplicação da sequência didática proposta	32
Figura 3 Imagem 2 dos alunos durante a aula sobre recorrências e aplicação da sequência didática proposta	32
Figura 4 Questionários respondidos e assinados pelos alunos.....	33
Figura 5 (Análise pergunta 1) Você aluno, compreende a importância da lei de formação para uma sequência numérica?.....	35
Figura 6 (Análise pergunta 2) Compreende a diferença entre a forma fechada de uma lei de formação e a forma recursiva de uma lei de formação?	36
Figura 7 (Análise pergunta 3) Conseguir distinguir a diferença entre recorrências de primeira ordem e recorrências de segunda ordem?	37
Figura 8 (Análise pergunta 4) Conseguir compreender a utilização de uma equação característica para a resolução de problemas envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes?	38
Figura 9 (Análise pergunta 5) Conseguir compreender o passo a passo das demonstrações feitas em aula, no decorrer do ensino de recorrências?.....	39

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	09
2 OBJETIVO GERAL.....	12
3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
4 METODOLOGIA ENGENHARIA DIDÁTICA.....	12
4.1 Conceitos, definições e citações.....	12
4.2 Análises preliminares	15
4.3 Concepção e análise a priori	16
4.3.1 Descrição de etapas em concepção e análise a priori.....	17
4.4 Experimentação	18
4.5 Análise a posteriori e validação	20
5 RECORRÊNCIAS	21
5.1 Conceitos, definições e exemplificação sobre sequências recursivas	21
5.2 Recorrências lineares de primeira ordem.....	24
5.3 Recorrências Homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes	25
6 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO/PESQUISA À ALUNOS.....	32
7 ANÁLISE EM GRÁFICOS DO QUESTIONÁRIO/PEQUISA.....	34
7.1 Análise pergunta 1	35
7.2 Análise pergunta 2	36
7.3 Análise pergunta 3	37
7.4 Análise pergunta 4	38
7.5 Análise pergunta 5	39
CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS	42
APÊNDICE QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS.....	43

1. INTRODUÇÃO

Tendo em vista a importância do conhecimento matemático, tanto na aplicação de seus conteúdos no dia-a-dia quanto para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, este trabalho apresenta conceitos relacionados a metodologia da engenharia didática, noções sobre recorrências e uma sequência didática voltada ao ensino de recorrências que pode auxiliar os professores e alunos nesta construção de conhecimento matemático, em especial ao estudo de sequências recursivas. Entre os significativos assuntos que podem ser abordados dentro da área da matemática, o raciocínio dedutivo é um tema que pode ser explorado junto aos alunos e este conhecimento pode ser relacionado diretamente à criatividade para buscar soluções de problemas, a partir disso temos assim a necessidade evidente de buscar estratégias metodológicas para que essa abordagem seja positiva.

Os questionamentos possíveis relacionados a importância de uma estratégia metodológica para o ensino da matemática é de fato válido, neste trabalho será apresentada uma sequência didática baseada na metodologia da engenharia didática, com o objetivo de aplicar no ensino de recorrências, ou seja, sequências recursivas, do tipo linear homogênea de segunda ordem e com coeficientes constantes à alunos da primeira série do ensino médio, sugestivamente no momento ideal, após ou em conjunto, ao contato dos alunos com o ensino de progressões. Sabendo que os conceitos sobre progressões, tanto aritméticas quanto geométricas já fazem parte do currículo de ensino destes alunos.

Notadamente fez-se necessário buscar o momento adequado para o ensino deste tema, visto que o estudo de progressões e de recorrências podem se relacionar.

Além do raciocínio dedutivo, uma área importante e interessante que pode ser trabalhada junto aos alunos como estratégia de ensino é o raciocínio matemático recursivo, e pode ser explorado tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio e superior. E tendo em vista que o tema recorrências não é tão bem esmiuçado quando relacionados a sequências numéricas do tipo progressões, e visto que o estudo de recorrências pode ajudar no processo de criação ou de observações de padrões em uma sequência através do raciocínio recursivo, buscando sua generalidade, tem-se aí a

oportunidade de associar a metodologia da engenharia didática, com o raciocínio dedutivo e recursivo no ensino do tema proposto.

Em específico ao tema recorrências, em que busca se, através do raciocínio dedutivo recursivo e com a utilização de ferramentas algébricas, as soluções gerais de problemas a partir de uma lei de formação associada a uma sequência numérica, percebemos o carecimento de conhecimentos algébricos prévios adquiridos pelos alunos nas séries anteriores, dessa forma tem-se a necessidade de fazermos uma análise previamente estabelecida sobre os conceitos matemáticos já adquiridos pelos mesmos, que irão auxiliá-los no processo de aprendizagem do estudo de recorrências. Esta análise prévia estará com mais detalhamento em *análises preliminares*, que é um dos conceitos trabalhados na metodologia da engenharia didática neste trabalho.

O estudo e ensino de sequências recorrentes, ou seja, sequências definidas recursivamente ou simplesmente recorrências com auxílio da utilização da metodologia da engenharia didática, pode possuir uma abordagem positiva, pois de fato é possível desenvolver junto com o aluno toda a construção matemática do conteúdo, da álgebra aplicada aos conceitos, nesse caso relacionados às sequências numéricas, e a busca por soluções ideais a cada problema. Por conhecimento que a matemática é uma ciência que estuda a partir de métodos dedutivos, objetos concretos e objetos abstratos como números, objetos geométricos, funções, sequências entre outros e possibilita a relação entre estes.

Logo temos assim uma oportunidade de apresentar uma sequência metodológica didática, como sugestão, com o intuito de proporcionar ao professor e ao aluno, após a sua execução, resultados positivos acerca do ensino e aprendizagem, e além disto o aluno ter contato com outros tipos de sequências não comumente estudados no ensino médio ou fundamental.

Este trabalho apresenta uma auto avaliação feita com os alunos através de um questionário/pesquisa, que foi aplicado no momento da execução da aula sobre recorrências, onde busca-se verificar a percepção dos alunos com relação ao tema abordado em aula, como definições, exemplificações e demonstrações além da percepção do aluno acerca da sua aprendizagem.

Através do questionário/pesquisa realizado com os alunos, este trabalho apresenta uma análise percentual sobre as respostas acerca de cada pergunta presente.

Importante salientar que o tópico RECORRÊNCIAS apresentado neste trabalho, trata se da parte teórica da execução e experimentação da sequência que foi apresentada aos alunos durante as aulas.

O estudo e aplicação dos conceitos e da sistemática da engenharia didática surge com esta proposta do planejamento, criação, experimentação e avaliação de uma sequência didática.

2. OBJETIVO GERAL

Este trabalho busca a utilização de conceitos ligados a metodologia da engenharia didática para propor e aplicar uma sequência didática no ensino de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Neste trabalho têm se como objetivos específicos poder estimular nos alunos a capacidade de identificar padrões em uma sequência numérica e compreender a generalização de fórmulas matemáticas construídas algebricamente, além de proporcionar ao aluno o contato com modelos de sequências recursivas e suas características além de dispor aos alunos ferramentas na qual ele consiga identificar e diferenciar os tipos de recorrências

Que o aluno consiga a compreensão da utilização de uma equação característica para a resolução de problemas envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constante e poder avaliar o aprendizado do aluno sobre o tema recorrências.

4. METODOLOGIA ENGENHARIA DIDÁTICA

4.1 Conceitos, definições e citações

A engenharia didática trata-se de uma metodologia de pesquisa e de teoria educacional, elaborada no início da década de 1980 para trabalhos em Educação Matemática, tendo como parte dos objetivos, analisar as situações didáticas decorrentes do ensino da matemática e as práticas metodológicas adotadas pelos professores de matemática em sala de aula. Além disso a engenharia didática propõe a sistematização de um processo de ensino através de uma sucessão de passos a serem tomados, buscando o melhor ensino/aprendizagem dos alunos.

A expressão *engenharia didática* é usada para designar a aplicação planejada, sistematizada de uma sequência didática em um grupo de alunos, esta sequência didática que será aplicada é estruturada a partir de alguns passos a serem adotados, determinados pela própria metodologia que são baseados nos seguintes aspectos: *análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.*

Entre os estudiosos do tema, se destacam os pesquisadores matemáticos franceses Guy Brosseau e Michèle Artigue.

Nas palavras de Michèle Artigue em *Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: Où en sommes-nous?*

[...]Também é comum hoje a considerar a engenharia didática como um membro da família de metodologias de pesquisa baseadas em design cujo uso se desenvolveu na educação matemática desde o início deste século. (ARTIGUE,página 30,2020)

E para Michèle Artigue é fundamental o professor buscar por metodologias que propiciem a participação do aluno no processo de construção do conhecimento:

No âmbito da sala de aula, as tarefas propostas devem ser projetadas de forma a tornarem-se situações de aprendizagem. Essa ação requer do(a) professor(a) menos intervenções e mais encorajamento à ação independente dos alunos na busca das soluções, fomentando-os a utilizar os conhecimentos prévios como ferramentas. (ARTIGUE, 1996).

Segundo Guy Brosseau:

Não se contente apenas com evidências, reproduzir sistematicamente, analisar para salvar experiências, aceitar apenas conceitos exógenos sob seu teste em engenharia didática. Esses têm sido os princípios orientadores da Didática. (BROUSSEAU, 2013).

A utilização do termo engenharia didática deve-se à comparação entre a metodologia e o trabalho de um engenheiro, que está relacionado ao planejamento e execução de ações que buscam como meta a construção de algo, neste caso em específico as ações se fundamentam em conhecimentos científicos matemáticos, e busca-se a construção de um determinado conhecimento nesta área.

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto específico, se apoia

sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1996).

É necessário compreender que a utilização da engenharia didática como metodologia de ensino propõe a utilização de um encadeamento de ações a serem tomadas sistematicamente, e as etapas de execução do plano de ações podem se deparar com situações não previstas, dessa forma é perceptível a necessidade de fazer possíveis novas escolhas e tomar novas decisões, tornando a execução do plano de ensino um processo dinâmico e que pode levar em conta as condições encontradas no contexto de sala de aula.

Para o matemático D'Ambrosio é de fundamental importância o professor em sua prática pedagógica levar em consideração as habilidades matemáticas de seus alunos não necessariamente adquiridas apenas na escola:

Os professores precisam aproximar a disciplina do que é espontâneo, deixar a criança à vontade, propor jogos, distribuir objetos, para que o aluno se sinta bem. A criança adquire habilidades para a matemática em casa, no meio em que vive. Cada um tem um modo próprio de aplicá-la. Só que na escola dizem que a matemática não se faz do jeito de casa. Rechaçam esse conhecimento que o aluno traz e isso cria conflito. (D'AMBROSIO,2003)

Além disso, engenharia didática como metodologia de ensino é caracterizada pela experimentação de um conjunto de procedimentos, que estão fundamentalmente ligados na concepção, na experimentação, na observação e na análise pós execução da sequência de ensino estabelecida previamente. Estas ações são traçadas e executadas com o objetivo de buscar o melhor possível aprendizado pelo aluno.

No que diz respeito as ações ou etapas utilizadas na aplicação da metodologia da engenharia didática, segue-se a sequência a ser observada: as *análises preliminares; Concepção e análises a priori; experimentação; análise a posteriori e validação.*

Desta forma nota-se que esta metodologia apresenta uma estruturação, uma sistematização no ensino do conhecimento matemático.

Segundo Artigue:

A engenharia didática é precisamente descrita ali com suas duas características essenciais: é baseado em realizações didáticas nas aulas, ou seja, no design, produção, observação e análise de sequências de ensino. (ARTIGUE,2020)

4.2 Análises preliminares

Em análises preliminares trata-se de um momento de observações críticas relacionadas ao conteúdo que será estudado ou ensinado aos alunos, a forma que será abordado em sala de aula, se o tema da sequência didática a ser aplicada já foi visto pelos alunos anteriormente, se há deficiência ou não de conhecimentos matemáticos prévios que podem auxiliar no avanço do entendimento do conteúdo que se planeja abordar junto aos alunos, entre outros em que o professor julgue de fundamental importância nesse início de tomadas de decisões.

Essas observações a serem feitas em análises preliminares são significativas pois a partir destas, serão tomadas decisões alinhadas com a metodologia da engenharia didática, buscando pré-estabelecer possíveis ações a serem executadas e posteriormente o aperfeiçoamento de como pode ser apresentado o conteúdo, neste caso em específico o ensino de sequências definidas recursivamente, as recorrências.

Indica-se que as análises preliminares geralmente incluem três dimensões: análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo, uma análise das condições e constrangimentos institucional, uma análise do que a pesquisa didática oferece para apoiar o modelo. (ARTIGUE,2020)

O tema escolhido para ser objeto de estudo neste trabalho foi recorrências, em especial recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Neste primeiro momento com tema definido, busca-se fazer alguns levantamentos que possam facilitar posteriormente a formulação da sequência didática que será aplicada. Logo foi estabelecido contato com o professor de matemática da turma de primeira série do ensino médio na qual será aplicada a sequência didática e verificou-se que os alunos tiveram contato com o estudo das sequências do tipo progressões aritméticas e geométricas, mas que não houve contato de forma evidente a sequências definidas recursivamente, assim sendo como já houve contato pelos alunos com o estudo de progressões acredita-se que este fato torna se um facilitador para o processo do ensino

de recorrências, já que estes conteúdos podem se relacionar. Verificou-se junto ao professor a possibilidade de aplicar a essa turma de alunos, uma sequência didática em que os alunos terão contato ao estudo de recorrências, houve o aceno positivo para a execução de ações.

Neste sentido fica como sugestão que antes do momento de execução da sequência didática proposta, que trata sobre sequências numéricas, possa-se identificar se o aluno já tenha tido contato anteriormente com o estudo das progressões, tanto aritmética quanto geométrica, pois identificando este fato, possivelmente seria algo importante a ser levado em consideração na formulação da continuidade de tomadas de ações.

Além disto, é feito levantamento de material de estudo que se tem disponível para pesquisa e ensino, neste caso em específico, o ensino de recorrências não é comum em livros didáticos para o ensino médio, mas já possuem inúmeras publicações acerca do tema em livros voltados ao Ensino superior ou em publicações voltadas aos estudos de sequências.

Para estudo e preparação de aulas e posteriormente a aplicação destas aulas sobre o tema recorrências, em *experimentação*, buscou se através da pesquisa epistemológica, material teórico que favoreceu a formulação de toda a parte teórica a ser trabalhada junto aos alunos, destacam se a utilização do livro: A matemática do ensino médio (volume 2) dos autores e pesquisadores matemáticos Elon Lages Lima, Carvalho, Wagner e Morgado.

Com essas e outras informações, começa-se vislumbrar possíveis ações que estarão presentes na sequência didática, na qual será aplicada aos alunos.

4.3 Concepção e análise a priori

A partir das análises preliminares feitas é necessário avançar para a próxima etapa que é apresentada na metodologia da engenharia didática como concepção e análise a priori.

Concepção e análise a priori é a etapa de descrição das ações que serão tomadas objetivando sistematizar a aplicação da sequência didática através de um plano de ações que serão executadas.

Segundo Michèle Artigue em *Ingénierie didactique en mathématiques* Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1990-1991, fascicule 5:

Nesta segunda fase, o pesquisador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas por suas restrições: variáveis de comando que assume serem variáveis relevantes em relação ao problema estudado. (ARTIGUE,90-91)

4.3.1 Descrição de etapas em concepção e análise a priori

Com o objetivo de explorar junto aos alunos os conceitos sobre recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, há a necessidade inicialmente de lembrarmos os conceitos relacionados a construções de sequências numéricas, apresentar aos alunos tanto sequências recorrentes quanto sequências não recorrentes, as do tipo recorrentes pode-se apresentar associadas a sequências do tipo progressões para que os alunos percebam a relação entre os temas, já que sugestivamente o ensino de recorrências deve ser abordado alinhado ou após o estudo de sequências do tipo progressões.

Em progressões aritméticas (P.A), é possível explorar a construção das equações algébricas, como a equação da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética e a equação do termo geral.

Além disso exemplificar sequências do tipo progressões geométricas (P.G), como aplicação das equações algébricas, como a equação da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e a equação do termo geral.

Apresentar aos alunos através de exemplos, recorrências do tipo primeira ordem associadas as do tipo que recaem em progressões aritméticas e geométricas citadas acima, posteriormente exemplificar recorrências do tipo segunda ordem, onde o aluno consiga identificar as diferenças entre estas.

Notadamente uma tomada de ação muito importante no ensino de sequências recursivas, na resolução de problemas, é a busca pela equação geral de uma recorrência, seja ela de primeira ordem ou de demais ordens. Este passo será de construção junto com os alunos, constata-se neste passo a necessidade de conhecimentos algébricos prévios pelos alunos para melhor entendimento durante o processo de busca pela equação geral. Essa construção deve ser de forma gradual, inicialmente recorrências de primeira ordem e posteriormente recorrências de segunda ordem.

Segundo Brousseau:

A concepção moderna de ensino vai demandar do professor a provocação nos estudantes de adaptações desejáveis. (BROSSEAU, 1986, p.297)

A partir destes conceitos bem estabelecidos, busca-se a apresentação dos conceitos e exemplificação de recorrências lineares de primeira ordem, exemplificação e construção algébrica da lei de formação, tanto na utilização de soma ou produto dos termos de uma sequência numérica.

Estabelecido os conceitos relacionados a recorrência linear homogênea de primeira ordem, busca-se estabelecer os conceitos relacionados a recorrência linear homogênea de segunda ordem, como sugestão inicialmente pode ser apresentar a sequência de *fibonacci*, uma sequência bem conhecida no meio acadêmico e posteriormente a construção de outras sequências recursivas.

Neste passo serão necessários mais técnicas para resolver estes tipos de sequências, e com essas técnicas posteriormente ajudarão a obter expressões gerais para recorrências de segunda ordem como a de *fibonacci*.

Em recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, será feita a relação entre a recorrência e a sua equação característica que é uma equação do segundo grau cujo os coeficientes são os coeficientes da recorrência que estará sendo exemplificada.

Busca-se que o aluno compreenda a conexão entre as raízes da equação característica e a expressão da solução geral da recorrência.

Sendo estabelecido o plano de ações é feita a experimentação que é o próximo passo descrito dentro da metodologia da engenharia didática.

4.4 Experimentação

A experimentação é a etapa de execução do plano de ações estabelecido através das análises preliminares e constituído em concepções e análises a priori.

A metodologia da engenharia didática traz como uma de suas orientações a sistematização da aplicação da sequência didática estabelecida, e todas as ações estabelecidas devem seguir esse processo.

A experimentação encara-se de fato como a sessão ou fase onde se faz presente a real participação do aluno, não só como ouvinte, mas por consequência dos conceitos desenvolvidos, requerem a participação dos mesmos na construção do conhecimento.

Nesse momento o aluno, ouvinte, torna-se peça fundamental para a aplicação da sequência didática a se executar.

É necessário compreender que o processo de ensino e aprendizagem é de fato dinâmico, durante a aplicação da sequência didática pode-se haver alguns ajustes que serão necessários para o melhor desenvolvimento do ensino do tema abordado.

Para Michéle Artigue em *Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ?*

[...]Por outro lado, o processo é a priori mais aberto: as escolhas, em particular, são ajustadas ao longo do processo de experimentação de acordo com observações com o objetivo de otimizar o projeto, e acima de tudo esta pesquisa tem um componente ciclo essencial, consistente com a ambição de produzir métodos de ensino que expressem a teoria local desenvolvido. (ARTIGUE,2020)

Objetivando coletar dados e informações que possam auxiliar na análise a posteriori e validação, durante e após a execução da experimentação que é a aplicação do plano de ações didáticas é feito um questionário/pesquisa junto aos alunos, sobre o entendimento que cada indivíduo teve no ensino de recorrências.

Logo durante a fase experimentação, além da aplicação das condutas didáticas, tem-se a oportunidade de poder medir de certa forma a aprendizagem dos alunos. Neste trabalho escolheu-se utilizar uma pesquisa que se trata de autoavaliação, no qual os alunos respondem objetivamente o nível de aprendizado que tiveram durante as aulas sobre recorrências, para cada aluno foi disponibilizado o questionário na qual estão dispostas cinco perguntas, todas envolvendo a visão do aluno sobre sua aprendizagem.

Para o pesquisador matemático D'Ámbrosio (2001, p.89), o objetivo da avaliação é a aprendizagem:

[...]avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente[...] (D'ÁMBROSIO,2001)

Através desta pesquisa que é feita a análise a posteriori, que faz parte da sistemática da metodologia da engenharia didática, onde neste trabalho é feito através das respostas objetivas dadas pelos alunos, esse levantamento é feito através de gráficos sobre cada pergunta individualmente, onde será mostrada a porcentagem para cada resposta a cada item, dadas pelos alunos participantes na execução da experimentação.

4.5 Análise a posteriori e validação

Em análise a posteriori e validação é o momento da investigação dos dados colhidos durante a experimentação buscando a validação da sequência didática estabelecida em decurso do ensino do tema proposto.

Deve se analisar criteriosamente todos os passos adotados durante a aplicação da sequência didática e as respostas objetivas para cada item estabelecido no questionário/pesquisa, e estes dados devem ser confrontados às análises feitas em análises a priori.

Para Michéle Artigue:

[...]fase de análise a posteriori, que se baseia em todos os dados coletados durante o experimento: observações feitas durante as sessões de ensino, mas também produções dos alunos em sala ou fora da sala de aula. Esses dados são frequentemente complementados com dados obtidos através do uso de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizado em vários momentos durante o curso ou no seu final. E, como temos já indicado, está no confronto das duas análises: análise a priori e análise a posteriori que se baseia essencialmente na validação dos pressupostos assumidos no pesquisar. (ARTIGUE,1991).

Neste aspecto deve ser observado se o aluno consegue compreender o tema abordado de forma satisfatória, se consegue distinguir os tipos de sequências diferentes apresentadas como as do tipo progressões, quando apresentadas as recorrências se o aluno consegue identificar as de primeira ordem ou de segunda ordem, quando são lineares ou não, ou homogêneas ou não, se o aluno consegue relacionar os temas como as progressões com as sequências definidas recursivamente durante a problematização dos conceitos, assim como se o aluno consegue resolver problemas propostos durante a experimentação.

Deve se buscar através desta análise, mecanismos metodológicos que melhorem a abordagem ou que possibilitem uma melhor execução da sequência didática previamente estabelecida, onde se alcance o melhor aprendizado do aluno.

Estas fases da sequência didática devem estar interligadas, ou seja, de forma sistemática.

5 IMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO DE RECORRÊNCIAS

5.1 Conceitos, definições e exemplificação sobre sequências recursivas

É de relevância fundamental que os alunos possam ter contato com definições matemáticas durante sua jornada educacional, pois dessa forma os conceitos matemáticos podem ser compreendidos com mais clareza.

Dessa forma, durante a execução da sequência didática que está sendo exposta neste trabalho e que foi desenvolvida junto aos alunos, inicialmente foi estabelecido as definições fundamentais para o desenvolver do trabalho e do contato dos alunos com o tema.

Precisamos estabelecer inicialmente os conceitos que definem sequências numéricas para compreendermos melhor as recorrências.

Sobre o estudo de sequências é muito importante compreendermos que, o que define uma sequência são seus elementos e as posições que cada elemento ocupa na estrutura da sequência.

Logo $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ e $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_3, X_2, X_1)$ são sequências diferentes, pois mesmo sendo os mesmos elementos que estão formando as duas sequências, as posições ocupadas por estes são diferentes.

Dessa forma se as posições dos termos de uma determinada sequência forem trocados, teremos uma nova sequência.

Neste estudo e na aplicação do ensino deste tema aos alunos, iremos nos interessar por sequências do tipo numéricas.

A primeira definição a ser apresentada aos alunos é a definição de sequências recursivas, visto que esta definição pode ser encarada como a base para melhor compreensão do tema deste trabalho.

Definição 1 Sequências definidas por leis de formação que permitem calcular qualquer termo em função de termos anteriores (ou do antecessor imediato ou de mais antecessores) são chamadas de sequências definidas recursivamente ou simplesmente recorrências.

Os exemplos são partes fundamentais para buscar-se alcançar com mais entendimento os temas abordados, dessa forma na utilização desta sequência didática, usou-se de forma significativa os exemplos adequados a cada conceito para melhor desenvolvimento e entendimento do ensino de sequências e recorrências.

Exemplo 1 Vamos criar uma sequência aleatória $(1, -8, \sqrt{2}, 0, 2/3, \dots)$ cada elemento desta sequência acima tem a posição bem definida, e como esta sequência foi criada aleatoriamente, diz se assim esta sequência numérica não foi criada a partir de uma regra ou a partir de uma lei de formação.

Vamos agora a uma sequência numérica que possui uma lei de formação.

Desta vez iremos escrever a sequência (X_n) dos múltiplos positivos do número natural 4 de forma recursiva.

Podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 4; (n \geq 0) n \in N. \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Onde N é o conjunto dos números naturais e os termos n e $n + 1$ referem-se as posições dos elementos da sequência.

Conseguimos construir a seguinte sequência $(0, 4, 8, 12, 16, \dots)$, que foi construída a partir de uma lei de formação.

Neste trabalho iremos abordar sequências numéricas que possuem lei de formação para seus elementos.

Algo bem importante que devemos compreender é que não podemos presumir os termos de uma sequência numérica sem que esteja estabelecida a sua lei de formação.

E como neste trabalho busca-se abordar recorrências, além de sequências numéricas que possuem uma lei de formação, serão abordadas sequências definidas recursivamente.

Exemplo 2 Dada a lei de formação

$$\begin{cases} T_{n+1} = 3 T_n + 2; (n \geq 0) n \in N. \\ T_0 = 0. \end{cases}$$

Os termos n e $n + 1$ referem-se as posições dos elementos da sequência.

Em $(2, 8, 26, \dots)$ nós conseguimos encontrar os próximos termos desta sequência utilizando esta lei de formação que está na forma recursiva.

Para evitar ambiguidade em uma lei de formação que busca estabelecer uma sequência única, além da lei formação é importante estabelecermos o(s) primeiro(s) termo(s) da sequência, esta quantidade de termos é equivalente a quantidade de elementos que a sequência depende para sua construção, logo se a dependência for de primeira ordem deve-se fornecer um termo, se a dependência for de segunda ordem logo deve-se fornecer os dois primeiros termos.

Exemplo 3 Sequência dos números naturais pares não nulos.

$$\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n; (n \geq 1) n \in N . \\ X_1 = 2 . \end{cases}$$

Com esta lei de formação conseguimos construir a sequência $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

Como parte do objetivo, durante a execução da sequência didática, é que o aluno consiga compreender as soluções de resolução de problemas que envolvam recorrências lineares, homogêneas e de segunda ordem com coeficientes constante, se fez necessário apresentar aos alunos a distinção entre as do tipo primeira ordem e do tipo segundo ordem em recorrências.

Há sequências recursivas que são formadas dependendo de um termo anterior, estas são chamadas recorrências de primeira ordem. E há sequências que dependem de mais de um termo anterior, em especial as sequências formadas a partir de dois termos anteriores que são chamadas recorrências de segunda ordem.

A sequência (F_n) de *Fibonacci*, no qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é um caso de recorrência de segunda ordem.

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; n \geq 1, n \in N . \\ F_1 = 1 . \\ F_2 = 1 . \end{cases}$$

Para melhor compreensão dos alunos sobre essas classificações de alguns tipos de modelos de recorrência, no processo de ensino do conteúdo é importante dividir em tópicos, distribuídos em recorrências lineares de primeira ordem e recorrências lineares de segunda ordem e assim o aluno possa conseguir acompanhar com mais clareza cada modelo de solução.

Vamos às recorrências lineares de primeira ordem.

5.2 Recorrências lineares de primeira ordem

Definição 2 Uma recorrência de primeira ordem expressa X_{n+1} em função de X_n .

É de fundamental importância que o educando compreenda durante o processo de construção deste modelo de recorrência, a dependência de um termo anterior a cada passo por definição. Além disso, compreender a linearidade de uma equação para que possa ser classificada como linear como definido abaixo, e poder classificar como homogênea ou não homogênea uma recorrência para que possa avançar com mais entendimento o tema proposto como definidos e exemplificados abaixo.

Uma recorrência X_{n+1} em função de X_n é dita linear se essa função for do primeiro grau.

As recorrências $X_{n+1} = 3X_n - n^3$ e $X_{n+1} = nX_n$ são lineares e de primeira ordem, já a recorrência $X_{n+1} = X_n^2$ não é linear.

As sequências definidas acima $X_{n+1} = nX_n$ e $X_{n+1} = X_n^2$ são ditas homogêneas, pois não possuem termo independente de X_n .

As recorrências lineares homogêneas podem ser de primeira ordem ou de demais ordens.

Vamos exemplificar uma recorrência linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes.

$$\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n; n \geq 1, n \in N. \\ X_1 = 7. \end{cases}$$

Dada uma recorrência, busca-se a sua possível solução, ou seja, a equação em X_n que não dependa de termo anterior, na qual poderemos encontrar qualquer termo desta sequência. Nos modelos trabalhados durante a aplicação do tema recorrências aos alunos, sugere-se a construção de forma clara e objetiva dos termos da sequência.

Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 7 \\
 x_2 &= 2x_1 \\
 x_3 &= 2x_2 \\
 x_4 &= 2x_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= 2x_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Fazendo a multiplicação das equações obtêm-se:

$$X_n = 7 \cdot 2^{n-1}.$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão 2.

$$X_n = x_1 \cdot q^{n-1}.$$

como começou em x_1 logo:

$$X_n = 7 \cdot 2^{n-1}.$$

Generalização do exemplo

$$\begin{cases}
 X_1 = a. \\
 X_{n+1} = b \cdot X_n; \quad n \geq 1 \quad n \in N.
 \end{cases}$$

Solução é do tipo:

$$X_n = a \cdot b^{n-1}.$$

Onde a é o termo de partida desta sequência.

Para recorrências lineares homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes a solução tem esse formato.

De fato, é essencial que o aluno ao se deparar com estes modelos acima, de recorrência, possa notar a relação que em alguns casos venha a acontecer entre recorrência e progressões, que é um tema previamente estudado pelos alunos, logo estratégias de resolução de problemas em progressões podem ser usadas em soluções de problemas que envolvam recorrências.

Desta vez conhecido o modelo de recorrências Lineares de primeira ordem, avança-se para o ensino do tema proposto neste trabalho que são as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, com foco na resolução de problemas que as envolvam.

5.3 Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes

Como não é comum no ensino básico regular alguns conceitos que são mais trabalhados em uma graduação na área da matemática, é de fato importante o professor durante o processo do ensino poder explicar com mais clareza alguns termos matemáticos como teorema e demonstração, visto que é de razoável compreensão o que tais conceitos significam.

Evidente que a abordagem em apresentar teoremas e demonstrações de teoremas no ensino médio regular deva ser diferente, mais clara e com mais detalhamento a cada passo a passo da demonstração, da abordagem em uma graduação, pois trata-se ambientes distintos e cada um com sua especificidade.

Dessa forma, apresentou-se os conceitos sobre recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes da seguinte forma.

Recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes são da forma $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$; com $q \neq 0$ (se $q = 0$, a recorrência, na verdade é de primeira ordem).

Para cada recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes da forma $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, associamos a equação característica $r^2 + pr + q = 0$, como $q \neq 0$ isso implica que q não é raiz da equação característica, e que as raízes desta equação característica são necessariamente não-nulas.

As raízes da equação característica desempenham um papel importantíssimo na expressão da solução geral para a recorrência.

A conexão entre a equação característica e a recorrência é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 1. Se r é tal que $r^2 + pr + q = 0$, então $X_n = r^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$.

Demonstração: Vamos substituir $X_n = r^n$ na recorrência, logo teremos $r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n = r^n(r^2 + pr + q) = r^n \cdot 0 = 0$

Temos como consequência deste teorema que:

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ são da forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, sendo C_1 e C_2 constantes quaisquer.

Demonstração: Vamos denotar $y_n = r_1^n$, $z_n = r_2^n$ e $x_n = C_1 y_n + C_2 z_n$.

Substituindo x_n na recorrência tem-se:

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = (C_1 y_{n+2} + C_2 z_{n+2}) + p(C_1 y_{n+1} + C_2 z_{n+1}) + q(C_1 y_n + C_2 z_n) = C_1(y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) + C_2(z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 .$$

Por consequência de que y_n e z_n são soluções da equação característica, logo dessa forma a soma $y_n + z_n$ também é solução.

Durante a experimentação da sequência didática, alguns teoremas que necessitam de alguma demonstração mais robusta e cheia de detalhes algébricos são citadas como informações, e ao decorrer das resoluções de problemas, os alunos farão a utilização destes teoremas.

Vamos a exemplificação:

Iremos determinar a solução da recorrência $X_{n+2} + 5X_{n+1} + 6X_n = 0$.

A equação característica é de $r^2 + 5r + 6 = 0$, e tem raízes $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$.

As soluções da recorrência são as sequências da forma $x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$.

Onde C_1 e C_2 são arbitrários.

Vamos aplicar estes conceitos à sequência de Fibonacci

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ; \text{ para } n \geq 0, n \in \mathbb{N} . \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, decidimos enumerar n a partir de 0, para facilitar os cálculos.

A equação característica é $r^2 - r - 1 = 0$; com raízes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Logo, as soluções da recorrência são sequências da forma:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Podemos utilizar $F_0 = F_1 = 1$ para determinar os valores de C_1 e C_2 através do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Substituindo em F_n tem-se

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} .$$

Teorema 3. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $X_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Sendo as raízes iguais, logo $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $X_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ temos

$$C_1 r^{n+2} + C_2 (n+2) r^{n+2} + p[C_1 r^{n+1} + C_2 n(n+1) r^{n+1}] + q(C_1 r^n + C_2 n r^n).$$

Agrupando de modo satisfatório obtemos,

$$C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p).$$

E como $r^2 + pr + q = 0$ e $r = -\frac{p}{2}$ logo temos:

$$= C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r 0 = 0 .$$

Além disso, todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ são da forma $C_1 r^n + C_2 n r^n$, com C_1 e C_2 constantes, quando $r_1 = r_2 = r$ sendo as raízes de $r^2 + pr + q = 0$.

Exemplificação:

Vamos determinar a solução da sequência definida pela recorrência

$$\begin{cases} X_{n+2} - 8X_{n+1} + 16X_n = 0; & (n \geq 0) \ n \in \mathbb{N} . \\ X_0 = 1 \\ X_1 = -2 \end{cases}$$

Solução: Tem-se a equação característica

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

$$(r - 4)^2 = 0$$

Logo $r_1 = r_2 = 4$.

Pelo teorema 4 acima:

$$\begin{cases} X_n = C_1 r^n + C_2 n r^n \\ X_n = C_1 4^n + C_2 n 4^n \end{cases}$$

Para $X_0 = 1$ têm-se:

$$1 = C_1 4^0 + C_2 0 4^0$$

$$1 = C_1 .$$

Para $X_1 = -2$ obtêm-se:

$$-2 = C_1 4^1 + C_2 1 \cdot 4^1$$

$$-2 = 4C_1 + 4C_2$$

$$-2 = 4C_1 + 4C_2 .$$

Como $1 = C_1$; Obtemos $C_2 = \frac{-3}{2}$

Substituindo em

$$X_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$$

obtemos a solução geral da recorrência

$$X_n = 4^n - \frac{3}{2} n 4^n ; (n \geq 0) n \in N .$$

Vamos a mais resolução de problema envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

Vamos determinar a solução da sequência definida pela recorrência

$$\begin{cases} X_{n+2} + 5X_{n+1} + 6X_n = 0 ; (n \geq 0) n \in N. \\ X_0 = 3 \\ X_1 = 6 \end{cases}$$

Solução: Tem-se a equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = 0.$$

Temos que $r_1 = -2$; $r_2 = -3$.

Como são raízes diferentes utilizaremos o teorema 3.

Dessa forma temos

$$x_n = C_1 (-2)^n + C_2 (-3)^n .$$

Utilizando $X_0 = 3$:

$$x_0 = 3 = C_1 (-2)^0 + C_2 (-3)^0$$

$$3 = C_1 + C_2$$

$$C_1 = 3 - C_2 \quad * (1)$$

Utilizando $X_1 = 6$:

$$x_1 = 6 = C_1 (-2)^1 + C_2 (-3)^1$$

$$6 = -2C_1 - 3C_2 \quad * (2)$$

Substituindo * (1) em *(2):

$$6 = -2(3 - C_2) - 3C_2$$

$$-6 + 2C_2 - 3C_2 = 6$$

$$C_2 = -12 \quad \text{*}(3)$$

Substituindo (3) em (1):

$$C_1 = 15 .$$

Dessa forma obtemos a solução geral da recorrência

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$$

$$\mathbf{x_n = 15(-2)^n - 12(-3)^n}$$

6 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO/PESQUISA À ALUNOS

Utilizou-se neste trabalho a técnica de investigação chamada questionário, visto que esta técnica pode auxiliar a análise acerca de um grupo de dados, arrecadados através de respostas dadas a um conjunto de perguntas feitas a um determinado grupo de pessoas, neste caso a um grupo de alunos.

O questionário/pesquisa foi aplicado a um grupo de 30 alunos da primeira série do ensino médio regular da Escola Estadual Igarapé da Fortaleza, INEP 16009290, localizada na cidade de Santana, Bairro Igarapé da Fortaleza, Travessa Rio Matapi 121 no Estado do Amapá, após a aplicação da sequência didática sobre recorrências.

Figura 1 Escola Estadual Igarapé da Fortaleza



<https://www.portal.ap.gov.br/noticia/2803/governo-do-amapa-entrega-nova-escola-de-gestao-compartilhada-militar-no-igarape-da-fortaleza>

Neste trabalho, solicitou-se ao grupo de alunos, respostas a perguntas estabelecidas no questionário, perguntas baseadas no entendimento do próprio aluno acerca do estudo de recorrências.

Figura 2 Imagem 1 dos alunos durante a aula sobre recorrências e aplicação da sequência didática proposta



Fonte: De autoria própria

Figura 3 Imagem 2 dos alunos durante a aula sobre recorrências e aplicação da sequência didática proposta



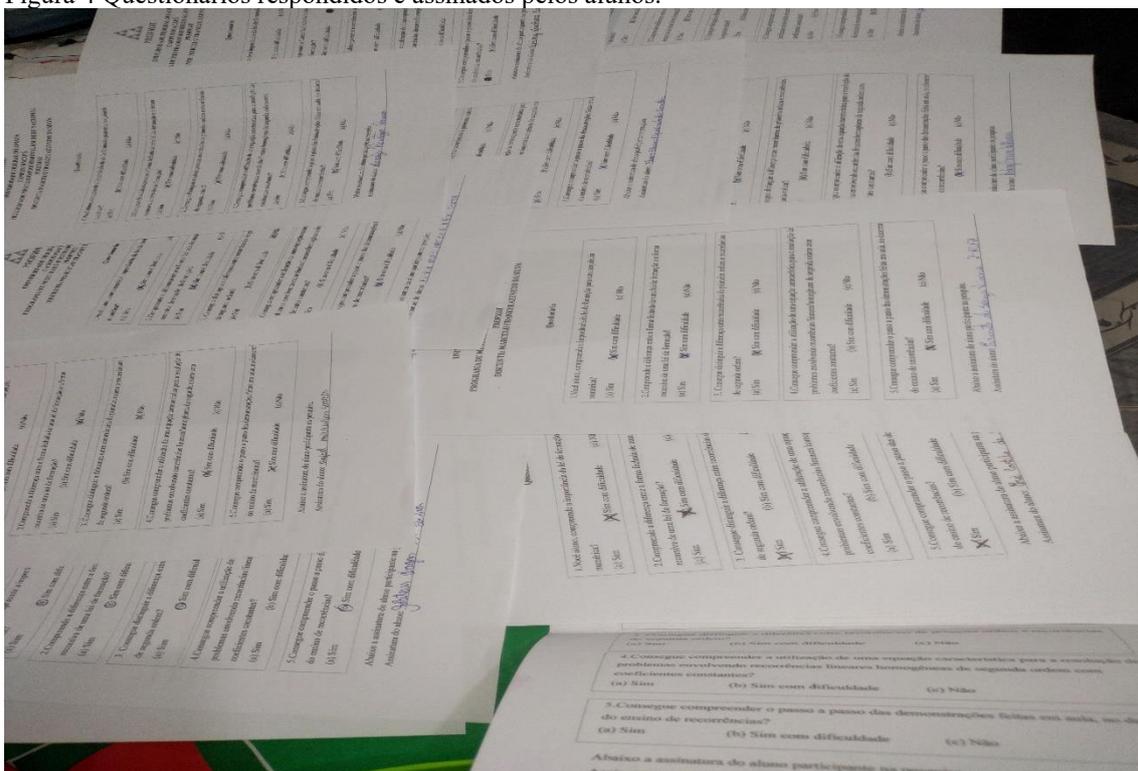
Fonte: De autoria própria

O questionário foi composto por 5 perguntas, a cada pergunta o aluno têm três opções de respostas objetivas, sim, sim com dificuldade e não, que estão baseadas na qualidade do conhecimento adquirido pelo próprio aluno, onde o educando possa fazer a reflexão sobre o seu entendimento acerca do tema trabalhado em sala de aula. Para cada

pergunta presente no questionário, é feita uma análise percentual baseada em gráficos de colunas, onde estarão expostas as porcentagens a cada resposta objetiva dada a cada pergunta solicitada, objetivando tornar a análise sobre a aprendizagem dos alunos, acerca do entendimento das informações sobre recorrências, de forma mais clara.

De modo geral os alunos mostraram-se interessados pelo tema proposto em sala de aula e a todos os alunos foi solicitado responder o questionário de acordo com seu aprendizado.

Figura 4 Questionários respondidos e assinados pelos alunos.



Fonte: De autoria própria.

Todos os resultados acerca das respostas estão expostos neste trabalho em *Análises de Gráficos*.



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

CAMPUS MACAPÁ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

PROFMAT

DISCENTE: MARCELO FRANKYE AZEVEDO DA SILVA

Questionário/Pesquisa Autoavaliação

1. Você aluno, compreende a importância da lei de formação para uma sequência numérica?

(a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

2. Compreende a diferença entre a forma fechada de uma lei de formação e a forma recursiva de uma lei de formação?

(a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

3. Consegue distinguir a diferença entre recorrências de primeira ordem e recorrências de segunda ordem?

(a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

4. Consegue compreender a utilização de uma equação característica para a resolução de problemas envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes?

(a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

5. Consegue compreender o passo a passo das demonstrações feitas em aula, no decorrer do ensino de recorrências?

(a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

Abaixo a assinatura do aluno participante na pesquisa.

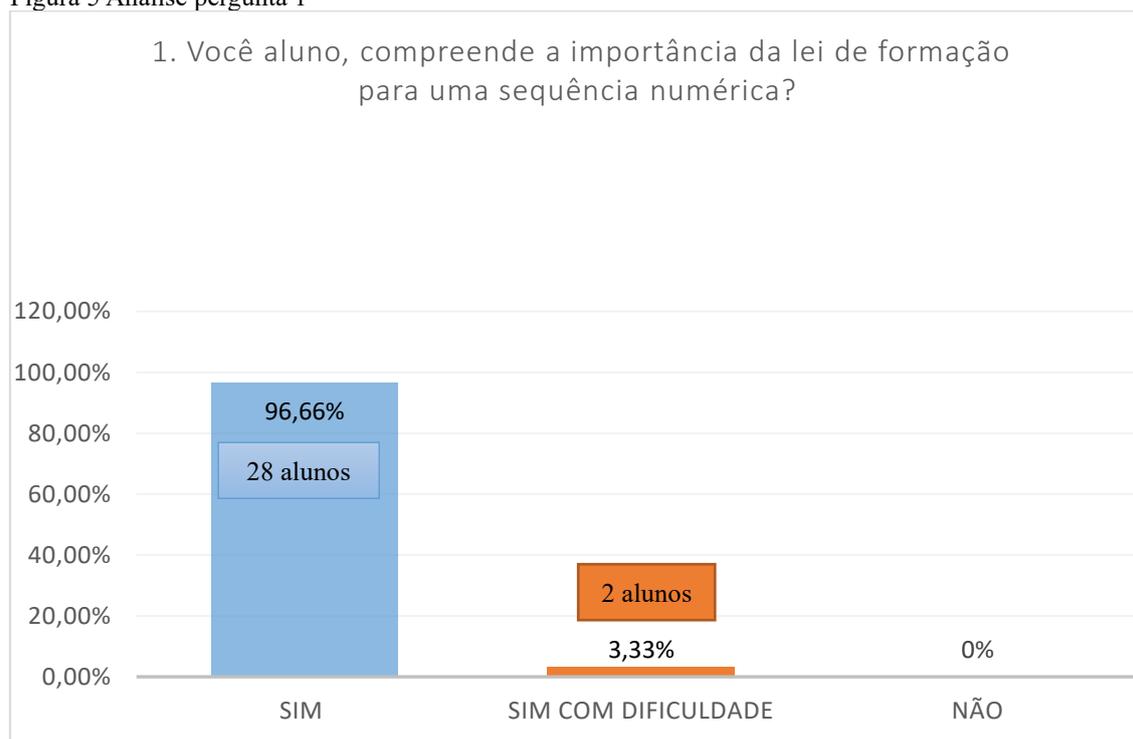
Assinatura do aluno:

7 ANÁLISE EM GRÁFICOS DO QUESTIONÁRIO/PEQUISA

Questionário/Pesquisa Autoavaliação

7.1 Análise pergunta 1 (Você aluno, compreende a importância da lei de formação para uma sequência numérica?)

Figura 5 Análise pergunta 1



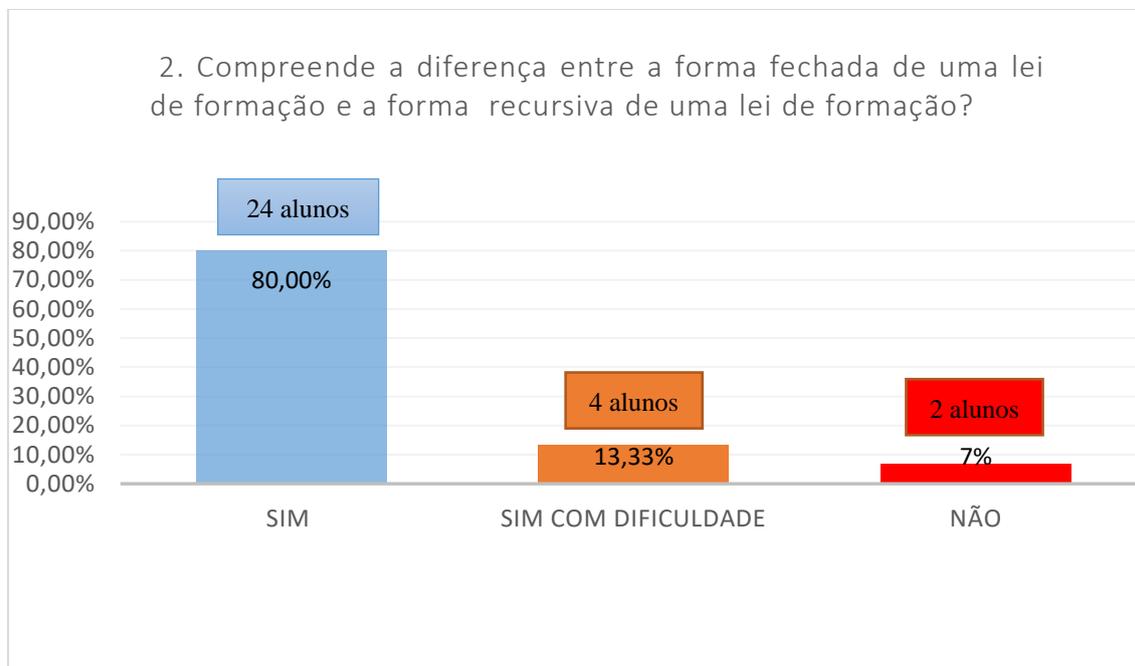
Fonte: De autoria própria.

Com a análise do gráfico da figura, notamos que maior parte dos alunos, notadamente 96,66%, conseguiram compreender a importância da lei de formação de uma sequência, um passo importantíssimo para compreensão do ensino de sequências recursivas, sinalizando positivamente para desempenho dos próximos tópicos a serem trabalhados.

Aos demais alunos que não conseguiram a compreensão, um maior número de exemplos que possam sanar possíveis dúvidas.

7.2 Análise pergunta 2 (Compreende a diferença entre a forma fechada de uma lei de formação e a forma recursiva de uma lei de formação?)

Figura 6 Análise pergunta 2



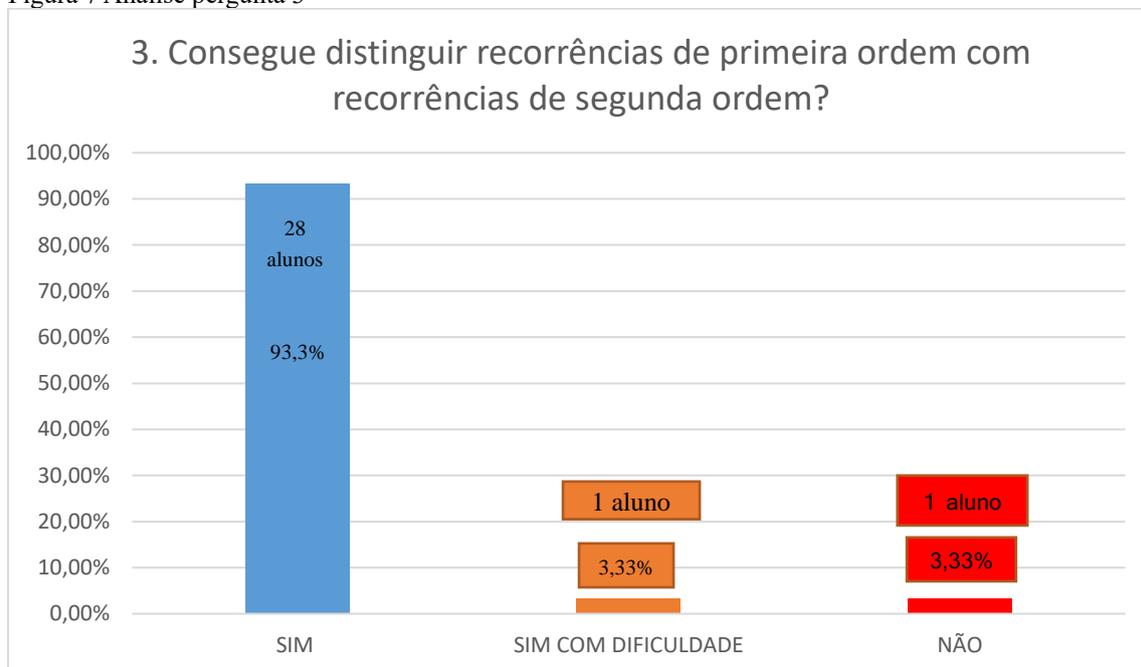
Fonte: De autoria própria

No gráfico da figura 6, conseguimos identificar possíveis dificuldades dos alunos no entendimento de leis de formação da forma fechada e da forma recursiva e em suas características, pois praticamente 20% dos alunos, ou tiveram dificuldade de compreender as diferenças ou nem compreenderam as diferenças.

De fato, é possível identificar que como os alunos no ensino regular já relacionam um modelo de progressão a uma fórmula pronta a ser usada, tanto na soma ou na busca de um termo da sequência, essa dificuldade em observar e construir a partir de uma lei de formação recursiva, uma sequência, esteja relacionada diretamente a esse primeiro contato com estes modelos de sequências, ou outras prováveis dificuldades.

7.3 Análise pergunta 3 (Consegue distinguir recorrências de primeira ordem com recorrências de segunda ordem?)

Figura 7 Análise pergunta 3



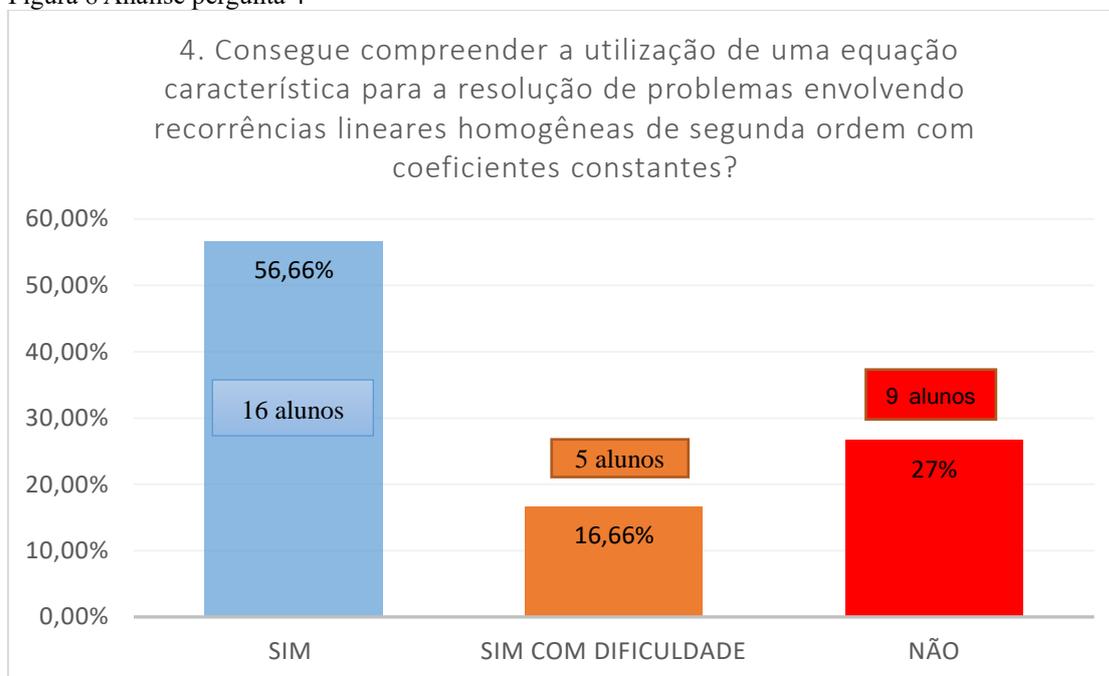
Fonte: De autoria própria

Para este tópico, em maioria, os alunos conseguem diferenciar recorrências de primeira ordem com recorrências de segunda ordem.

Acredita-se que como basicamente é possível fazer essa distinção apenas analisando a estrutura de recorrências, os alunos conseguiram compreender de forma mais clara esse tópico.

7.4 Análise pergunta 4 (Consegue compreender a utilização de uma equação característica para a resolução de problemas envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes?)

Figura 8 Análise pergunta 4



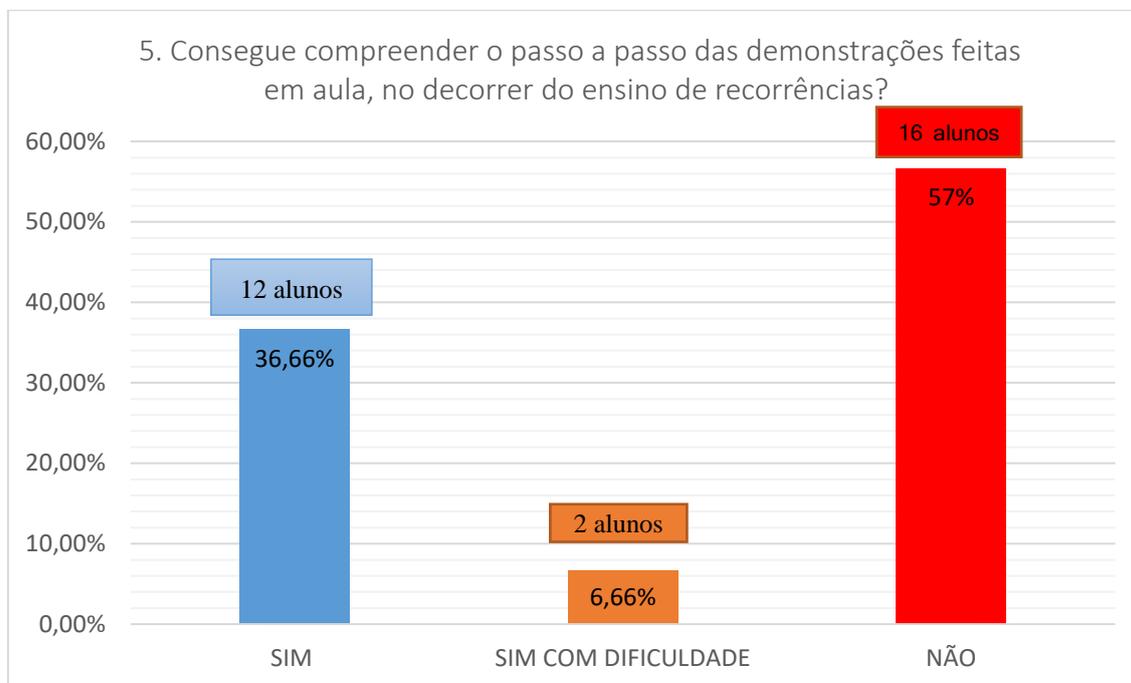
Fonte: De autoria própria.

Para uma pergunta longa como esta, utilizou-se a estratégia de exemplificar com resoluções de recorrências de segunda ordem utilizando a equação característica, logo após a exemplificação os alunos puderam responder o questionamento.

Podemos associar os resultados obtidos para este tópico com a dificuldade algébrica dos alunos, observa-se esta dificuldade no manuseio dos termos presentes na equação característica e na manipulação dos mesmos para obtenção das soluções esperadas, mesmo com esses contratempos, em maioria os alunos responderam positivamente acerca do aprendizado do tema.

7.5 Análise pergunta 5 (Consegue compreender o passo a passo das demonstrações feitas em aula, no decorrer do ensino de recorrências?)

Figura 9 Análise pergunta 5



Fonte de autoria própria.

Ao analisarmos o gráfico da pergunta 5, que corresponde basicamente ao entendimento do aluno acerca de cada passo tomado em uma demonstração matemática, das quais fizeram parte na aplicação da sequência didática, percebemos que em maioria os alunos sentiram dificuldade no entendimento, ligados diretamente a dificuldade individual de cada aluno em manejar termos e operações matemáticas em expressões algébricas.

Dessa forma, em maioria, os alunos não conseguiram acompanhar de forma clara, na totalidade, cada demonstração feita em sala de aula.

Mesmo com esses resultados acerca do entendimento dos alunos em compreender e acompanhar o passo a passo a cada demonstração, entende-se esse resultado de forma positiva, pois não é comum no ensino médio os alunos terem contato com demonstrações matemática e mesmo dessa forma tiveram alunos que conseguiram acompanhar os resultados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho iniciamos objetivando a construção e aplicação de uma sequência didática, voltada ao ensino de recorrências, utilizando a engenharia didática como suporte metodológico. Como temos assim um processo de experimentação de uma sequência de abordagens a serem tomadas durante a aula, fez se necessário especificarmos o tema central do conteúdo, logo dessa forma o trabalho focou principalmente em recorrências de segunda ordem e do tipo lineares homogêneas com coeficientes constantes.

Durante todas as fases que o processo de construção deste trabalho foi desenvolvido muitas experiências positivas foram adquiridas, principalmente conhecer uma metodologia na qual ainda não havia contato anteriormente, e poder utiliza-la como possível ferramenta no planejamento de aulas.

Muito importante citarmos a boa vontade do professor de matemática e dos alunos da turma na qual foi aplicada a sequência didática, pois aceitaram de pronto a solicitação de aplicação de uma aula de matemática, voltada a um conteúdo que não é visto comumente dentro do conteúdo de progressões e acima de tudo a dedicação que os alunos apresentaram nos dias de aula objetivando compreender o conteúdo, mesmo sabendo que os alunos passaram por praticamente dois anos sem aulas presenciais por conta da situação de pandemia de COVID-19 que se encontrava o momento os alunos conseguiram desenvolver em parte o entendimento do tema.

Dissertou se neste trabalho uma parte teórica sobre a metodologia engenharia, pois compreende sua importância para a formulação de uma sequência didática voltada ao ensino do tema proposto, além disso, todas as fases que fazem que são adotadas no processo de utilização da engenharia didática, análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação, estão descritos neste trabalho com a finalidade de ser expostos todas as características encontradas durante o percurso da pesquisa a ser feita.

Visto que o tema recorrências não faz parte comumente dentre os conteúdos trabalhados em sala de aula aos alunos da primeira série do ensino médio, basicamente para confrontar o avanço do aprendizado a partir da análise a priori e posteriormente análise a posteriori foi feito através do questionário pesquisa, onde pretendeu se verificar o nível de informações adquiridas durante a exposição da aula.

Os resultados obtidos e mostrados neste trabalho, através dos gráficos apresentados, demonstram ao final da abordagem resultados assertivos no que respeita ao ensino de recorrência a esse grupo de alunos, podendo assim deixar como sugestão que este tema pode sim ser trabalhado comumente e associado ao ensino de progressões.

Espera-se que esse trabalho possa auxiliar alunos e professores da área da matemática e de outras áreas que pretendem utilizar a metodologia da engenharia didática como apoio metodológico no ensino de recorrências ou de outros temas na qual se ache essencial. Para o ensino de recorrências, sugestivamente como apoio ao ensino de progressões e como o tema sequências recursivas se faz presente em problemas da OBMEP(Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), aos professores de matemática sugere-se trabalhar este tema associado com a metodologia da engenharia didática buscando o melhor aprendizado dos alunos.

REFERÊNCIAS

FERREIRA, R. **O estudo de logaritmo por meio de uma sequência de ensino: A engenharia didática como apoio metodológico.** Santa Maria, 2016.

CAVALCANTE, L. H. **Uma sequência didática para o ensino do conceito de parábola.** Manaus: Universidade Federal do Amazonas, 2017.

SILVA, T.A. **Engenharia didática como instrumento metodológico no estudo e no ensino da sequência de Jacobsthal.** Tear, revista de Educação, ciência e tecnológico, 2018.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E.; MORGADO, A. **Matemática do Ensino Médio (volume 2):** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2004.
D'AMBROSIO, U. **Educação pra uma sociedade em transição.** 2. ed. Campinas: Papyrus, 2001. 89 p.

D'AMBROSIO, U. **Educação pra uma sociedade em transição.** 2. ed. Campinas: Papyrus, 2001. 197 p.

BARQUERO, B; BOSCH, M. **Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths.** University of Barcelona, 2015.

ARTIGUE, M. **Ingénierie didactique en mathématiques:** Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1990-1991, fascicule 5.

BROSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques** (Thèse de doctorat), Université Bordeaux, 1986, 905 f.

BROUSSEAU, G. **Le contrat didactique: le milieu. Recherche en Didactiques des Mathématiques,** p. 297, 1986.

BROUSSEAU, G. **Le contrat didactique: le milieu. Recherche en Didactiques des Mathématiques,** v. 9, n. 2, p. 309-336, 1988.

ENGENHARIA DIDÁTICA. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Engenharia_did%C3%A1tica. Acesso: 08 Jul. 2022.

UVA, Marcelo. Ensino da matemática: Por que é tão importante e quais os desafios?. *In:* UVA, Marcelo. **Ensino da matemática: Por que é tão importante e quais os desafios?.** Disponível em: <https://www.marcelouva.com.br/ensino-da-matematica/>. Acesso em: 1 set. 2022.



PROFMAT
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CAMPUS MACAPÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT
DISCENTE: MARCELO FRANKYE AZEVEDO DA SILVA

Questionário/Pesquisa Autoavaliação

1. Você aluno, compreende a importância da lei de formação para uma sequência numérica?

- (a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

2. Compreende a diferença entre a forma fechada de uma lei de formação e a forma recursiva de uma lei de formação?

- (a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

3. Consegue distinguir a diferença entre recorrências de primeira ordem e recorrências de segunda ordem?

- (a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

4. Consegue compreender a utilização de uma equação característica para a resolução de problemas envolvendo recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes?

- (a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

5. Consegue compreender o passo a passo das demonstrações feitas em aula, no decorrer do ensino de recorrências?

- (a) Sim (b) Sim com dificuldade (c) Não

Abaixo a assinatura do aluno participante na pesquisa.

Assinatura do aluno: