



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE- FURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

**Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula Invertida: Uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática**

Rafael Barbosa da Silva

Rio Grande  
Julho, 2021

Rafael Barbosa da Silva

**Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula  
Invertida: Uma proposta de elaboração de material didático para alunos de  
Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Rafael Barbosa da Silva junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE- FURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Orientador: Dra. Luciele Rodrigues Nunes

Rio Grande  
Julho, 2021

### Ficha Catalográfica

S586m Silva, Rafael Barbosa da.

Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula Invertida: uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática / Rafael Barbosa da Silva. – 2021.

111 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Rio Grande/RS, 2021.

Orientadora: Dra. Luciele Rodrigues Nunes.

1. Matemática 2. Rascunhos 3. Ensino à Distância 4. Sala de Aula Invertida 5. Elaboração de Material Didático I. Nunes, Luciele Rodrigues II. Título.

CDU 51:37

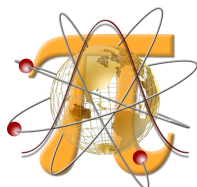
Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



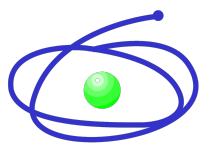
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

---

**“Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula Invertida: Uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática.”**

Rafael Barbosa da Silva

Orientadora:

Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:



---

Profa. Dra. Fabiola Aiub Sperotto



---

Profa. Dra. Denise Nascimento Silveira



---

Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes

Rio Grande  
Julho de 2021

*À minha mãe, que foi e será  
baliza em tudo que me rege*

# Agradecimentos

Primeiramente, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, por seu processo seletivo de mérito e pela oportunidade ímpar de formação profissional.

Em segundo lugar, à Universidade Federal do Rio Grande - FURG, por adotar o PROFMAT e oferecer as infraestruturas física e pessoal que, sem elas, esse curso não teria o menor sentido.

Aos professores incríveis com que tive a oportunidade de trabalhar no decorrer do curso. Em particular, à minha orientadora, Luciele Rodrigues Nunes, que sempre me empurrou no rumo dos *por quês*, dos *poréms*, e que sem a sua entrega, paciência e pulso firme eu teria apresentado muito menos do que sei que sou capaz.

Também, às minhas colegas de curso, Mila e Márcia, que evoluíram para amizades tão lindas, com uma conexão tão intensa... Maratonas de estudos, muito stress. Muitas gargalhas, companheirismo. Tantas coisas que, sem as quais, eu certamente não teria a mesma motivação para seguir adiante.

Aos meus amigos, que se fizeram presença em meio ao abismo que a pandemia de COVID-19 nos deixou, em especial os meus *xarás*.

Ao Jonatas, que sem o seu apoio eu jamais teria chegado tão longe, no curso e na vida.

Às minhas mães, Lidu e Maria, que me educaram, me deram todo o suporte, sempre me apoiaram a seguir com os estudos e sempre me encheram de orgulho com suas vidas balizadas na verdade, na humildade, na caridade, no carinho e atenção ao outro, e incondicionalmente, no amor.

Ao Júnior, que veio trazer luz pra minha vida.

Àqueles que produziram ciência da mais alta qualidade, que me guiaram até este ponto como luzes em meio à escuridão. Sem seus aportes teóricos, ideias, inspirações, eu não teria evoluído tanto quanto desejara, bem como aos autores citados na bibliografia desse trabalho e aos não citados, mas igualmente inspiradores.

E a ti, que está lendo agora, a quem aproveito para deixar meu desejo de que esse trabalho possa te ajudar, alumiar tuas ideias e trazer alguma contribuição pra tua curiosidade, tua pesquisa ou tua prática profissional.

*"Ser obrigado a trabalhar, e obrigado a fazer o melhor possível, cria em você moderação e autocontrole, diligência e força de vontade, ânimo e satisfação, e cem outras virtudes que o preguiçoso nunca conhecerá."*

*Charles Kingsley*



# Resumo

Esse trabalho visa analisar o impacto de uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática, abordando a construção do Conjunto de Cantor e suas propriedades. O material foi elaborado para uso em metodologias de ensino à distância, com base nos princípios da metodologia da *Sala de Aula Invertida*. O foco do material está num *sistema de rascunhos* proposto que aparece antes de cada demonstração, a fim de detalhar todos os passos das mesmas, utilizando-se de diversos recursos visuais e linguagem menos formal. Após o estudo do material, os estudantes puderam responder à um questionário, do qual foram extraídas as informações sobre o impacto geral da atividade na compreensão do conteúdo estudado, bem como a relação entre esse resultado, as escolhas visuais e o sistema de rascunhos. Em seguida, prosseguimos à coleta e análise dos dados obtidos.

**Palavras-chaves:** Matemática. Rascunhos. Ensino à Distância. Sala de Aula Invertida. Elaboração de Material Didático.

# Abstract

This paper aims to analyze the impact of a proposal for the elaboration of didactic material for undergraduate students in Mathematics, addressing the construction of the Singer Ensemble and its properties. The material was designed for use in distance learning methodologies, based on the principles of the *Flipped Classroom* methodology. The focus of the material is on a proposed *draft system* that appears before each demonstration, in order to detail all the steps of the demonstrations, using different visual aids and less formal language. After studying the material, students were able to answer a questionnaire, from which information about the general impact of the activity on the comprehension of the studied content were extracted, as well as the relationship between this result, visual choices and the draft system. Then, we proceed to the collection and analysis of the obtained data.

**Keywords:** math. draft. distance learning. flipped classroom. didactic material elaboration.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Ensino Híbrido . . . . .	27
Figura 2 – Modelo de <b>Rotação por Estações</b> . . . . .	28
Figura 3 – Modelo de <b>Laboratório Rotacional</b> . . . . .	29
Figura 4 – Modelo de <b>Sala de Aula Invertida</b> . . . . .	30
Figura 5 – Modelo de <b>Rotação Individual</b> . . . . .	31
Figura 6 – Modelo <i>Flex</i> . . . . .	32
Figura 7 – Modelo <i>à la carte</i> . . . . .	33
Figura 8 – Modelo <b>virtual enriquecido</b> . . . . .	34
Figura 9 – Padrão de escolhas nas Respostas às Questões Objetivas . . . . .	56

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Respostas às Questões Objetivas . . . . .	55
--	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Paradigmas Educacionais</b>	<b>16</b>
2.1.1	O paradigma tradicional	17
2.1.2	Ruptura do paradigma tradicional	19
2.1.3	Um paradigma emergente	21
<b>2.2</b>	<b>Modelos e Metodologias Educacionais</b>	<b>23</b>
2.2.1	Modelo Tradicional de Educação	23
2.2.2	Metodologias Ativas	25
2.2.3	Ensino Híbrido	26
2.2.4	Sala de Aula Invertida - <i>Flipped Classroom</i>	35
<b>2.3</b>	<b>Demonstrações Matemáticas</b>	<b>37</b>
2.3.1	Origens das Demonstrações Matemáticas	37
2.3.2	Evolução das Demonstrações Matemáticas	39
2.3.3	O papel das demonstrações matemáticas	41
<b>2.4</b>	<b>Língua e Linguagem</b>	<b>43</b>
2.4.1	Sobre a Linguagem	43
2.4.2	Sobre a Língua	44
2.4.3	A Língua Materna e a Matemática	46
<b>3</b>	<b>ATIVIDADE PROPOSTA: O CONJUNTO DE CANTOR</b>	<b>50</b>
<b>3.1</b>	<b>Aspectos metodológicos da Pesquisa</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Objetivos da Pesquisa</b>	<b>51</b>
<b>3.3</b>	<b>Etapas da Atividade</b>	<b>52</b>
<b>3.4</b>	<b>Material da Atividade</b>	<b>52</b>
<b>3.5</b>	<b>Questionário</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>62</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>64</b>
	<b>APÊNDICE A – APORTE TEÓRICO PRÉVIO DA ATIVIDADE</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE B – ATIVIDADE: MATERIAL ADAPTADO</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE C – FORMULÁRIO DADO AOS PARTICIPANTES</b>	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE D – RESPOSTAS AO FORMULÁRIO</b>	<b>100</b>

# 1 Introdução

Um sentimento que pode ser desconcertante durante o estudo de um objeto matemático é ler a demonstração de um teorema e ficar completamente atônito diante de tão simples, porém ininteligível texto. Uma demonstração matemática carrega, dentro de sua simplicidade, uma grande gama de conhecimentos embutidos ali, e aquele que não domina algumas especificidades dos processos de demonstração ou tenha alguma lacuna nos conhecimentos básicos relativos à área estudada, pode acabar por entender muito pouco ou quase nada do processo inteiro. Esse pode ser um divisor de águas entre o aluno que tem sucesso nesse estudo e o que irá sucumbir ao esgotamento pela frustração em não compreender, e conseqüentemente não conseguirá avançar nos seus estudos.

Geralmente isso se apresenta quando o aluno precisa estudar sozinho, apenas através de consulta ao seu material didático. Mesmo tentando recorrer à pesquisa em materiais variados, em *sites* da internet, fóruns, grupos de discussão, muitas vezes o aluno não terá sua dúvida sanada e a compreensão continuará pela metade, pois a maioria das vezes um resultado matemático é de fácil aplicação, porém difícil (ou complicada) demonstração.

Uma das possíveis razões para a ocorrência desse fenômeno é que o autor do material base para o estudo muitas vezes não explicita os pormenores do seu próprio pensamento ao escrever uma demonstração, informação que por vezes fica apenas no seu próprio rascunho. Sem acesso a essas informações, o aluno por vezes não entende a conexão lógica dos passos de uma demonstração e fica com a sensação de "não saber de onde o autor tirou aquilo", o que reforça sentimentos como o de que "eu jamais seria capaz de pensar nisso", elevando o grau de frustração no estudo.

Provavelmente se o professor intervir, for ao quadro e explicar os detalhes desse processo, há uma chance bem maior de que o estudante compreenda o processo, pois ali ele terá oportunidade de fazer perguntas, poderá pedir para o professor voltar alguns passos e esclarecer um pouco mais, aumentando as chances de sucesso na apropriação adequada daquele conhecimento.

Mas como lidar com isso em situações em que o aluno precise estudar sozinho? Ou caso o professor não esteja disponível? Como aumentar as chances de que um aluno consiga compreender, por conta própria, um resultado matemático apenas com o estudo do material didático? Uma possível solução está numa elaboração mais cuidadosa desse material, onde o aluno possa ler e compreender com clareza todos os passos do processo de demonstração e talvez assim desenvolver as habilidades necessárias para reproduzir esse processo de forma similar em outros estudos posteriormente.

Dentro da nossa experiência com matemática na sala de aula, muitas vezes nos deparamos com alunos desmotivados, com lacunas nos pré-requisitos necessários àquela etapa do processo educativo, que de alguma forma confundem, desestimulam e frustram tanto estudantes quanto educadores. A força da estrutura tradicionalmente instaurada no sistema de ensino pode, além de limitar o trabalho do educador, se tornar um obstáculo para o aluno que não consegue agir de forma ativa na aquisição do seu conhecimento.

Nessa trajetória, numa experiência em uma escola na cidade de Pelotas, tivemos a oportunidade de trabalhar numa instituição que tinha adotado uma metodologia ativa, completamente voltada à ascensão do aluno ao posto de protagonista no processo de ensino/aprendizagem. Nessa escola, as avaliações não eram do tipo "dar uma nota ao final do processo", e para mensurar a evolução dos estudantes o professor precisava, além de conhecer cada aluno individualmente, compará-lo com o seu próprio desempenho desde o início daquela etapa.

Conhecer e avaliar cada aluno dessa forma era uma atividade árdua, porém extremamente regozijante pois, sem o aporte de uma nota, a flexibilidade da avaliação era muito maior e o professor se colocava numa posição ativa nesse processo. Nos referimos a *ativo* em referência ao seu antagonista, o *passivo*, no sentido de que num sistema de notas o professor apenas confere, *passivamente*, se o aluno atingiu ou não à média esperada, padronizada, igual para todos. Já com um modo *ativo*, o professor precisa observar, elaborar, analisar, ajustar, coordenar, estimular, orientar e auxiliar o aluno durante todas as etapas na construção do conhecimento, pois só assim ele estará apto a comparar a evolução desse aluno em relação ao início desse processo.

Além disso, o professor precisava promover o processo de autonomia dos alunos. Não haviam sirenes, portas fechadas ou lugares marcados nas salas de aula. Cada aluno sabia do seu cronograma e deveria se esforçar para cumpri-los nos horários e prazos estabelecidos. Em matemática, sempre dávamos mais prioridade às atividades práticas, envolvendo medições, aferições, testes empíricos, análises e, fatalmente, demonstrações. Estas últimas eram as mais exaustivas, pois os estudantes demonstravam pouco (ou nenhum) interesse por esse método.

Mesmo com uma infraestrutura toda adaptada e uma equipe extremamente dedicada a fazer a escola funcionar adequadamente dentro dessa metodologia, também enfrentávamos nossas dificuldades, principalmente por se tratar de uma escola de ensino médio, e os alunos ingressantes na escola serem provenientes do ensino fundamental de outras escolas que não trabalhavam com metodologias ativas. Mas o fato de a escola estar viva e atuante, ano após ano, já nos deu uma perspectiva de que é possível se adaptar, acreditar em um processo mais inclusivo e focado no educando. Por isso decidimos investigar os aspectos da tradição educacional no sistema vigente, tentando compreender suas origens e buscando visões que esclareçam e corroborem a ideia de que é possível remodelarmos a educação no futuro, de forma factível e justa. Mesmo sabendo que é possível, ficava ali uma questão primordial pairando no ar: *quais aspectos educativos tornam o aluno autônomo, ativo no seu processo de aprendizagem?*

Outra grande motivação foi o próprio do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do qual este trabalho faz parte. Durante esta trajetória, pudemos revisitamos vários conceitos e sistematizações dentro de demonstrações conhecidas e novas para o grupo de estudantes do PROFMAT, que reagiu de diversas maneiras nesse percurso. De forma mais direta, no contato com os colegas observamos que, com certa frequência, os estudantes compreendiam as demonstrações propostas na sala de aula, conseguiam reescrevê-las com suas próprias palavras, porém não conseguiam fazer as suas próprias demonstrações em atividades desse tipo.

Dentro dos grupos de estudos, depois de muito debate, leitura e exercícios, conseguíamos chegar num meio termo em que todos estavam "mais ou menos" aptos a reescrever suas próprias versões das demonstrações, mas sempre acompanhadas de constatações do tipo: "consegui, *mas* eu nunca conseguiria fazer isso sozinho".

Ficamos, então, com a questão: *como é possível que a compreensão tenha sido efetiva tanto na sala de aula - sob a tutoria de um professor - quanto numa discussão em grupo, mas ao ler os materiais e tentar entendê-los, por conta própria, a atividade se mostrava difícil, e algumas vezes até inviável?*

Essa questão nos motivou a tentar investigar quais processos estavam envolvidos na construção de uma demonstração. Sob a suspeita de que, em ambas as situações (sala de aula e debate em grupo), havia a variável da *conversa*, do *diálogo*, decidimos que seria relevante buscar compreensão sobre quais as relações entre a Língua Materna e a Matemática permitem uma maior compreensão de uma demonstração matemática.

Em razão disso, esse trabalho visa tentar trazer alguma luz ao processo de demonstração, tentando esclarecer esse processo como um todo, usando para isso um caso específico: o Conjunto de Cantor. Para tanto, dentro do contexto da Análise Real, foi proposta uma atividade: a construção do Conjunto de Cantor. Ela foi apresentada de uma maneira mais detalhada, onde os alunos participantes tiveram acesso a um texto pensado para detalhar os processos envolvidos na construção desse conjunto, de maneira mais clara e menos objetiva. O principal objetivo desse processo é o de familiarizar o leitor com a linguagem citada, com a proposta de um *sistema de rascunhos* que detalha as motivações e a estruturação dos passos dessa demonstração e, por fim, reorganizar as ideias desse rascunho na forma final da escrita - sempre prezando pela importância na estruturação do mesmo - para deixar clara a conexão entre os passos desse processo e a sua conclusão.

Em seguida, aplicamos um questionário, no formato de formulário, enviado de forma virtual para os participantes, onde eles expressariam suas opiniões sobre a atividade. O questionário possuía dez afirmações sobre a atividade que poderiam ser avaliadas numa escala de cinco valores, onde 1 equivalia a "Discordo Totalmente" e 5 equivalia a "Concordo Totalmente", e estas eram seguidas de três perguntas subjetivas sobre o material.

Na estruturação desse trabalho, buscamos organizar o nosso pensamento em três principais etapas: primeiramente apresentamos a Fundamentação Teórica, que apresenta o aporte teórico que inspira e ajuda a estruturar esse trabalho; em seguida, um detalhamento da Atividade Proposta, em que descrevemos os detalhes sobre a

estrutura metodológica e os pormenores do objeto necessário à pesquisa; e por fim, analisamos os resultados obtidos com a Atividade Proposta.

No capítulo *Fundamentação Teórica*, nos debruçamos sobre os principais aspectos relevantes aos conceitos de *paradigma*, analisando o paradigma tradicional da ciência e seu impacto sobre o paradigma educacional. Buscamos as razões que levam à uma (necessária) ruptura desse paradigma e propomos, sob a ótica de vários pesquisadores, uma proposta de paradigma emergente, sob a reflexão em cima do novo paradigma da ciência pós teorias da relatividade e quântica. Seguimos com uma análise dos Métodos e Modelos Educacionais, começando pelo chamado *Modelo Tradicional de Educação*, em seus aspectos importantes e apresentando o *Ensino Híbrido* e suas várias vertentes como alternativas ao modelo tradicional, com uma ênfase especial para a *Sala de Aula Invertida*, que foi a metodologia ativa que escolhemos para dar suporte à Atividade Proposta.

Dentre as diversas formas de ensino híbrido, nossa atividade opta por se basear nos conceitos de *Sala de Aula Invertida*, onde o professor atua enquanto mediador no processo de ensino aprendizagem e centraliza esse processo no aluno, enquanto disponibiliza várias fontes para que este pesquise, estude e se aproprie do conhecimento por conta própria, dentro de sua própria rotina, da maneira mais eficiente possível e possa desenvolver as habilidades e competências necessárias para uma compreensão eficaz do conhecimento objetivado. O nome deriva de *flipped classroom* do inglês que se traduz em *sala de aula invertida*. A palavra *invertida* se dá pelo fato de que nesse processo, o professor não dará a aula da maneira tradicional. Sendo o modo tradicional com o aluno tendo acesso ao conteúdo na aula, em coletivo e sob tutoria, e usando os momentos de construção individual para reforçar o conhecimento adquirido, a inversão de sala de aula visa dar ao aluno acesso antecipado ao conteúdo, tendo acesso prévio à diversos materiais e construindo o conhecimento no seu momento de construção individual, sendo o momento da aula utilizado para reforçar e aprofundar os conhecimentos já adquiridos em coletivo e com a ajuda da tutoria.

Em seguida, buscamos dar um amparo teórico às demonstrações matemáticas, tentando remontar em que ponto da história da matemática elas se tornaram tão presentes e necessárias, bem como analisar que fatores influenciaram para que elas evoluíssem e se reestruturassem com a forma que conhecemos hoje, e discutimos o papel das demonstrações matemáticas dentro do contexto educacional. Por fim, propomos uma discussão sobre Língua e Linguagem, onde visamos estabelecer as razões que conectam, de forma intrínseca, Língua Materna e Matemática.

No capítulo *Atividade Proposta*, apresentamos os aspectos motivacionais e metodológicos da pesquisa aplicada. Discorremos sobre os objetivos com a atividade, suas etapas e descrevemos, com detalhes, o material que foi apresentado aos alunos. Os materiais, em sua íntegra, estão presentes nos apêndices desse trabalho. Também, damos maiores esclarecimentos sobre o questionário repassado aos participantes, no qual foi feita a obtenção e análise dos dados a serem processados no capítulo seguinte.

No capítulo *Resultados Obtidos*, apresentamos a análise dos dados obtidos com os questionários, e em seguida, concluímos com as *Considerações Finais*. Ainda, disponibilizamos nos apêndices desse trabalho: o aporte teórico matemático disponibilizado aos participantes relativo à atividade aplicada; o próprio material completo da atividade aplicada; o formulário dado aos participantes da pesquisa e o relatório das respostas obtidas com o formulário.



## 2 Fundamentação Teórica

A busca fundamental desse trabalho pode ser resumida em única palavra: *compreender*. Buscamos compreensão, não só a compreensão *intelectual*, mas a compreensão *humana, intersubjetiva*. Para Morin (2000), há duas formas de compreensão: a compreensão intelectual ou objetiva e a compreensão humana intersubjetiva. Segundo o autor, *compreender* significa apreender em conjunto, *comprehendere*, abraçar junto (o texto e seu contexto, as partes e o todo, o múltiplo e o uno). Mas, é preciso pontuar que a comunicação não garante a compreensão. Uma informação, se bem transmitida e compreendida, traz *inteligibilidade*, que é uma condição necessária - mas não suficiente - para a compreensão. A compreensão intelectual passa pela inteligibilidade e pela explicação. Para Morin (2000) explicar é considerar o que é preciso conhecer como objeto e aplicar-lhe todos os meios objetivos de conhecimento. A explicação é necessária para a compreensão intelectual. Mas:

A compreensão humana vai além da explicação. A explicação é bastante para a compreensão intelectual ou objetiva das coisas anônimas ou materiais. É insuficiente para a compreensão humana.

Esta comporta um conhecimento de sujeito a sujeito. Por conseguinte, se vejo uma criança chorando, vou compreendê-la, não por medir o grau de salinidade de suas lágrimas, mas por buscar em mim minhas aflições infantis, identificando-a comigo e identificando-me com ela. O outro não apenas é percebido objetivamente, é percebido como outro sujeito com o qual nos identificamos e que identificamos conosco, o ego alter que se torna alter ego. Compreender inclui, necessariamente, um processo de empatia, de identificação e de projeção. Sempre intersubjetiva, a compreensão pede abertura, simpatia e generosidade. (MORIN, 2000, p.94-95)

Queremos construir um caminho que permita a compreensão de fatores importantes para responder à questão: *como é possível que a compreensão de um conhecimento matemático seja efetiva tanto numa situação de sala de aula - sob a tutoria de um professor - quanto numa discussão em grupo com outros sujeitos que também estão buscando o mesmo conhecimento, mas num momento de construção individual, ao ler os materiais e tentar entendê-los por conta própria, tal atividade se mostre difícil, e algumas vezes até inviável?*

Nesse caminho, precisamos buscar primeiramente entender a estrutura maior que movimenta o sistema educacional, aquela que está na raiz, no âmago dos processos de ensino.

### 2.1 Paradigmas Educacionais

A palavra *paradigma*, segundo o dicionário MICHAELIS (2015), é:

1. Algo que serve de exemplo ou modelo; padrão;
2. GRAM. Modelo de conjugação ou de declinação de uma palavra;
3. LING. Conjunto de termos comutáveis entre si, em uma mesma posição, numa estrutura;
4. FILO. Segundo o filósofo americano *Thomas Kuhn* (1922-1996), qualquer campo de investigação e de experiência que está na origem da evolução científica. (MICHAELIS, 2015)

O dicionário consultado já deixa claro, dentro da própria definição atual desse léxico, a influência de Thomas Kuhn ao termo. Amorim e Neto (2011), em um artigo onde tentam elucidar o conceito e as origens do termo *paradigma* dentro do vocabulário das ciências humanas, nos traz a relevante contribuição do filósofo Thomas Kuhn, esclarecendo-nos que:

Para Kuhn, o conhecimento científico é definido basicamente pela adoção de um paradigma, e um paradigma nada mais é do que uma estrutura mental – composta por teorias, experiências, métodos e instrumentos – que serve para o pensamento organizar, de determinado modo, a realidade e os seus eventos. Essa estrutura, que comporta fatores também psicológicos e filosóficos, é assumida e partilhada pelo conjunto dos membros da comunidade científica e, por causa disso, necessariamente, emerge dali uma unidade social fundada numa visão de mundo consensual: “Um paradigma é aquilo que os membros de uma comunidade partilham e, inversamente, uma comunidade científica consiste em homens que partilham um paradigma” (KUHN, 1998 apud AMORIM; NETO, 2011, p. 219). Em suma, apelando para uma metáfora, os paradigmas são algo como as lentes dos óculos – assim como as lentes corretivas, que clareiam

o caminho para a visão turva e confusa do míope, o paradigma é um horizonte estruturante que põe em ordem os fenômenos e permite à comunidade dos cientistas se situar na realidade, compreendê-la e comunicá-la (AMORIM; NETO, 2011, p.347).

Moraes (1999), em outra tentativa de elucidar a compreensão de paradigma por Kuhn, coloca-nos que paradigma faz referência a modelos, padrões compartilhados que permitem a explicação de certos aspectos da realidade, sendo muito mais que uma teoria: implica em uma estrutura que gera teorias (MORAES, 1999, p.31).

Amorim e Neto (2011) analisam a transformação do termo *paradigma* indo do estabelecido por Kuhn em direção ao que aborda o filósofo Edgar Morin, ressaltando que Morin difere-se de Kuhn pela extensão do uso de paradigma, mas conserva um ponto crucial no que diz respeito ao paradigma também ser uma estrutura mental que organiza e dá coerência aos fenômenos experimentados, que encontra problemas e propõe soluções, bem como o paradigma é tido como uma construção coletiva e construtora de coletividade, pois está fundamentada no acordo dos indivíduos sobre o sentido.

Morin (2000) afirma que todo conhecimento envolve o risco do erro e da ilusão. Para o autor, o papel da educação é mostrar que não há conhecimento que não esteja numa posição de ameaça pelo erro e pela ilusão, em algum nível. O conhecimento, escrito ou no campo das ideias e/ou teorias, é fruto de um processo de tradução/reconstrução por meio da linguagem e do pensamento e, por conseguinte, está sujeito ao erro, em virtude da subjetividade da interpretação do conhecedor. Reconhece que o sentimento (a afetividade) pode nos cegar, mas também reconhece que sobretudo, no mundo humano, o desenvolvimento da inteligência é inseparável do mundo da afetividade, da curiosidade, da paixão, que são essenciais à pesquisa filosófica ou científica. (MORIN, 2000, p.19-21).

Para Morin (2000), a educação deve se dedicar à identificação da origem desses erros, ilusões e cegueiras. Especificamente, quando discute as "cegueiras paradigmáticas", Morin descreve que o paradigma instaura relações primordiais que constituem axiomas, determina conceitos, comanda discursos e/ou teorias. Organiza a organização deles e gera a geração ou a regeneração. Que um paradigma pode ao mesmo tempo elucidar e cegar, revelar e ocultar. É no seu seio que se esconde o problema-chave do jogo da verdade e do erro. (MORIN, 2000, p.26).

O paradigma científico sempre exerceu influência sobre o paradigma educacional. Para Moraes (1999), existe um diálogo interativo entre o modelo científico, as teorias de aprendizagem e as práticas pedagógicas. Acreditamos também nessa premissa. Precisamos de uma compreensão mais profunda da estrutura do atual paradigma da educação e compará-lo com o paradigma mais recente da ciência, a fim de tentarmos traçar um caminho que nos ajude a construir e trabalhar num paradigma educacional compatível com as necessidades da nossa sociedade na atualidade. Como pensava Heródoto de Halicarnasso (485 a.C. – 425 a.C.), precisamos “pensar o passado para compreender o presente e idealizar o futuro”.

### 2.1.1 O paradigma tradicional

Para Moraes (1999), a origem desse *paradigma* tem influências da Revolução Científica, do Iluminismo e da Revolução Industrial. Após a Idade Média, com o abandono do teocentrismo, o Renascimento recoloca o homem no centro do significado histórico, abraçando o racionalismo, que colocava a natureza como objeto a se entender, transformar e explorar à mercê do desejo e das necessidades do homem. René Descartes (1596-1650) foi o precursor da ciência moderna, pai do racionalismo moderno. Descartes se fundamentava na razão como única base segura para compreender tanto o homem quanto a natureza.

Segundo Moraes (1999), Descartes coloca-se diante da visão de dois mundos: o mundo dos objetos, com relevância ao conhecimento científico objetivo, e o mundo do sujeito, intuitivo, reflexivo, que conhece de outra forma.

O pensamento cartesiano, exposto no *Discurso do método*, afirmava que era preciso decompor uma questão em outras mais fáceis até chegar a um grau de simplicidade suficiente para que a resposta ficasse evidente. Na realidade, o método cartesiano nos marcou a todos fortemente, e devemos também a ele e a Galileu a idéia de que a natureza é governada por leis, cujas fórmulas são matemáticas. Daí a matematização do pensamento humano, que constitui a herança mais importante de Descartes. (MORAES, 1999, p.37)

Para Descartes, tudo na natureza e no universo seria explicável dentro das leis matemáticas e através da compreensão de suas partes, e esse pensamento orientou a observação científica e a formulação das teorias e fenômenos naturais até o início do século XX, quando a teoria da relatividade e a física quântica provocaram radicais transformações.

Em complementação à influência de Descartes, Isaac Newton (1642-1727), ao descobrir a influência da força gravitacional, apresentou-nos o *determinismo universal*, onde tudo funcionaria como uma grande máquina controlada por leis imutáveis, e tudo funciona sempre da mesma maneira. Isso originou a ideia de que, *para compreender o real, era preciso dominar e transformar o mundo, manipulá-lo pela técnica* (MORAES, 1999, p.39).

Essa mesma *técnica* moldaria o pensamento que levaria à Revolução Industrial, que substituiu a força motriz do trabalho da matriz humana para outras formas de energia, com o suporte da ciência. Nesse ponto surge o projeto iluminista, que se caracteriza na centralidade da ciência e da racionalidade crítica (ou radical) no questionamento filosófico, implicando na recusa a todas as formas de dogmatismo. Onde o conhecimento é um ato que possui tanto dimensões empíricas quanto teóricas, significando que a experiência sensível do sujeito era tão importante quanto a estruturação lógica dessas experiências. Aqui também nasce o conceito de *trabalho*, que para Moraes (1999):

Trabalho, sob o ponto de vista cartesiano, significa rigidez, conformismo, hierarquização, decisões de cima para baixo, objetivos impostos, fragmentação e compartimentalização, ênfase nas tarefas especializadas, na separação entre trabalho e lazer e nas operações centralizadas. Como sociedade, estamos um pouco longe de compreender que o trabalho possa ser um meio de satisfação pessoal, gratificação e auto-realização, e que o processo é tão importante quanto o produto. (MORAES, 1999, p.49)

Esses movimentos deram origem a um modelo, segundo Moraes (1999), fechado, fragmentado, autoritário, desconectado do contexto, que concebe o sistema educacional e o ser humano como máquinas que reagem a estímulos externos (MORAES, 1999, p.54). Segundo a autora, esse modelo segue um enfoque na gerência da produção de conhecimento para consumo, por parte de uma população homogeneizada; define comportamentos de *entrada e saída* como uma verdadeira *linha de montagem*, com sequência, hierarquia, estruturada por quem a organizou (professor, planejador...) e completamente alienada do contexto sociocultural dos indivíduos; onde o *erro* é elemento de punição e de controle do sistema.

Para Moraes (1999), as influências do paradigma tradicional da ciência nos processos educacionais são muitas. Para a autora, a escola tem uma estrutura submetida a um controle rígido, a um sistema paternalista, hierárquico, dogmático, que não percebe as mudanças do entorno e, na maioria das vezes, resiste à essas mudanças. O sistema educacional continua dividindo o conhecimento em assuntos, especialidades, subespecialidades, fragmentações do todo em partes. Ainda coloca o professor como o único responsável pela *transmissão* do conhecimento, o que coloca o estudante/aprendiz numa posição de *tabula rasa*, de depósito dos conhecimentos, destituindo suas habilidades criativas e de expressão.

Essa visão de educação coloca o conteúdo do conhecimento como o mais importante, em detrimento do processo de construção desse conhecimento. A educação é puramente instrução, e fica completamente vinculada à ação da vida escolar, priorizando a memória e a expressão do conhecimento *acumulado*. Outra consequência importante desse paradigma é o advento de uma *pedagogia tecnicista*. Para Saviani (2012):

Buscou-se planejar a educação de modo a dotá-la de uma organização racional capaz de minimizar as interferências subjetivas que pudessem pôr em risco sua eficiência. Para tanto, era mister operacionalizar os objetivos e, pelo menos em certos aspectos, mecanizar o processo. Daí a proliferação de propostas pedagógicas tais como o enfoque sistêmico, o microensino, o telensino, a instrução programada, as máquinas de ensinar etc. Daí também o parcelamento do trabalho pedagógico com a especialização de funções, postulando-se a introdução no sistema de ensino de técnicos dos mais diferentes matizes. Daí, enfim, a padronização do sistema de ensino a partir de esquemas de planejamento previamente formulados aos quais devem ajustar-se as diferentes modalidades de disciplinas e práticas pedagógicas.

[...] na pedagogia tecnicista, o elemento principal passa a ser a organização racional dos meios, ocupando o professor e o aluno posição secundária, relegados que são à condição de executores de um processo cuja concepção, planejamento, coordenação e controle ficam a cargo

de especialistas supostamente habilitados, neutros, objetivos, imparciais. A organização do processo converte-se na garantia da eficiência, compensando e corrigindo as deficiências do professor e maximizando os efeitos de sua intervenção. (SAVIANI, 2012, p.12-13)

Nesse sentido, Saviani (2012) explicita que essa *pedagogia tecnicista* acaba por sufocar as relações entre educadores e educandos, visto que o processo que define o quê, quando e como os educadores e educando devem fazer, ou melhor, que o realmente importa na educação é *aprender a fazer*.

### 2.1.2 Ruptura do paradigma tradicional

Pelo final do século XIX, com o advento de novas discussões e descobertas que nos conduziram às teorias da relatividade e quântica, ocorre uma ruptura no paradigma cartesiano-newtoniano, levando a humanidade a um caminho de transformação conceitual. Segundo Moraes (1999), todas as descobertas vinculadas à essas teorias desconstruíram os principais conceitos da visão de mundo cartesiana e da mecânica newtoniana relacionados às noções de espaço e tempo absolutos, às partículas sólidas elementares, à objetividade científica, à casualidade, à separatividade, fazendo com que nenhum desses conceitos sobrevivessem à essas novas descobertas (MORAES, 1999, p.59).

Para Moraes (1999), os aspectos mais relevantes dessas teorias que devem ser levados em conta para a melhoria do sistema educacional vigente são:

1. **Totalidade Indivisa:** Relativo ao pensamento proposto pelo físico David Bohm (1917-1992), que estudou por toda sua vida a física quântica. Para Bohm, as teorias da relatividade e quântica parecem sugerir que a realidade é como um todo indivisível, onde todas as partes do universo, incluindo o observador e seus mecanismos, se juntam e se fundem numa única totalidade, o que Bohm chama de *totalidade indivisa*. Para Moraes (1999), o fato de não haver separação entre as coisas induz à conclusão que, em última análise, não existem partes, e o que chamamos de partes são fios de uma teia inseparável de relações, sendo o universo, portanto, *relacional*;
2. **O pensamento sistêmico:** O pensamento clássico, vinculado ao paradigma tradicional da ciência, nos traz três pressupostos: o da simplicidade - compreender as partes para compreender o todo; o da estabilidade - o mundo é estável e os fenômenos são previsíveis e controláveis e, portanto, determináveis e reversíveis; e o da objetividade - é possível conhecer o mundo tal como ele o é na realidade. Sob as influências das teorias da relatividade e quântica, surge o *pensamento sistêmico*, que segundo Vasconcellos (2002, p.101-102) transforma:
  - o pressuposto da simplicidade no pressuposto da *complexidade*, onde há o reconhecimento de que a simplificação obscurece as inter-relações existentes entre todos os fenômenos do universo e de que é imprescindível ver e lidar com a complexidade do mundo em todos os seus níveis;
  - o pressuposto da estabilidade no pressuposto da *instabilidade*, onde há o reconhecimento de que "o mundo está em processo de tornar-se" (VASCONCELLOS, 2002, p.101, grifo da autora). Decorre disso uma necessária consideração da indeterminação, com a consequente imprevisibilidade de alguns fenômenos, e da sua irreversibilidade, com a consequente incontrolabilidade desses fenômenos;
  - o pressuposto da objetividade no pressuposto da *intersubjetividade*, onde há o reconhecimento de que "não existe uma realidade independente de um observador" e de que o conhecimento científico do mundo é uma construção social, em espaços consensuais, por diferentes sujeitos/observadores. Assim, o cientista coloca a "objetividade entre parênteses" e trabalha admitindo autenticamente o *multi-versa*: múltiplas versões da realidade, em diferentes domínios linguísticos de explicações (VASCONCELLOS, 2002, p.101-102, todos os grifos são da autora).

Para Moraes (1999), o *pensamento sistêmico* nos leva a compreender o mundo físico como uma rede de relações, de conexões, e não mais como uma entidade fragmentada, uma coleção de coisas separadas;

3. **Um mundo em holomovimento:** Comparando o universo a um rio, Bohm (1992 apud MORAES, 1999) exemplifica que tudo está envolvido numa totalidade intacta em movimento fluente, como a correnteza de um rio, chamada de *ordem implicada*, envolvida, dobrada dentro de si; já os redemoinhos, as pedras os pedaços de pau ou as correntes subaquáticas constituiriam a *ordem explicada*, desdobrada, relativamente separada ou autônoma, mas que fazem parte da ordem maior que é implicada, que nessa analogia do universo como um rio e sua ordem implicada, a ordem explicada inclui o próprio ser humano, com seu corpo e sua mente. Esse movimento da *ordem implicada* é chamado por Bohm de *holomovimento*, um movimento contínuo, indefinível e imensurável. Moraes (1999) considera que essa consciência de que tudo no universo está em movimento tem implicações educacionais importantes;
4. **O pensamento em processo:** Segundo Bohm (1992 apud MORAES, 1999), o pensamento é uma atividade real, é um processo material, em essência, uma resposta ativa da memória em cada fase da vida. O pensamento é um processo, ele está continuamente mudando dentro do próprio processo. Nesse sentido, o conteúdo do pensamento não pode ser tratado como uma realidade final, essencialmente estática e independente. Ainda, segundo Morin (1996 apud MORAES, 1999), "o pensamento é uma aventura contraditória porque é necessário, ao mesmo tempo, analisar e sintetizar, re-analisar e re-sintetizar", exemplificando o movimento recursivo do pensamento. Nesse sentido, a autora considera que o conhecimento, como o pensamento, deve ser também compreendido como algo estando em processo;
5. **O conhecimento em rede:** Segundo Capra (1994 apud MORAES, 1999), o *conhecimento como rede* surge na teoria *Bootstrap* do físico teórico estadunidense Geoffrey Chew (1924-2019). De acordo com essa teoria, a natureza não pode ser reduzida a entidades fundamentais como blocos de construção básicos, mas tem que ser entendida inteiramente pela autoconsistência. O universo material é visto como uma teia dinâmica de eventos inter-relacionados e nenhuma das propriedades de qualquer parte dessa teia é fundamental, todas resultam das propriedades das outras partes, e a consistência global de suas inter-relações determina a estrutura de toda a teia.  
  
Nesse sentido, Morin (2000) nos traz a ideia de *conhecimento complexo*, onde *Complexus* significa *o que foi tecido junto*, ressaltando que há complexidade quando elementos diferentes são inseparáveis constitutivos do todo (como o econômico, o político, o sociológico, o psicológico, o afetivo, o mitológico), e há um tecido interdependente, interativo e inter-retroativo entre o objeto de conhecimento e seu contexto, as partes e o todo, o todo e as partes, as partes entre si. A complexidade é a união entre a unidade e a multiplicidade;
6. **A unidade do conhecimento:** O paradigma tradicional da ciência excluía o sujeito do objeto estudado, mas a mecânica quântica estabeleceu que o ato de observar altera a natureza do objeto, tornando portanto sujeito e objeto indissociáveis, mudando a *ciência objetiva* para a *ciência epistêmica*<sup>1</sup>;
7. **Teorias transitórias:** A pesquisa científica tem suas bases em teorias, e Bohm (1992 apud MORAES, 1999) considera essas teorias como *insights*<sup>2</sup>, significando um modo de *olhar* para o mundo, e não uma forma de *conhecer* o mundo. Para Bohm, não existe nenhum *insight* definitivo, não existe conhecimento absoluto sobre as coisas são, apenas um ciclo interminável de *insights*, gerando novas teorias;
8. **Auto-organização recursiva:** No processo de desenvolvimento, um estágio depende da contribuição parcial do anterior. Um sistema auto-organizado precisa trabalhar para a constante reconstrução da autonomia, e sem a energia necessária internamente para a transformação, o sistema precisa interagir com o seu meio, através de perturbações, turbulências que estimulam uma reação do sistema em relação ao seu meio, extraindo energia do exterior para a própria auto-organização;

<sup>1</sup> Aqui, entendemos por *epistêmico* como aquilo que se refere à epistemologia, à teoria do conhecimento, reflexão sobre a natureza, o conhecimento e suas relações entre o sujeito e o objeto; epistemológico. Sendo a *ciência objetiva* outra forma de descrever o paradigma tradicional da ciência, a *ciência epistêmica* é outra forma de descrever o paradigma da ciência após a ruptura do paradigma tradicional.

<sup>2</sup> *insight* vem do inglês (podemos ler como **insáit**) e significa *entendimento*. Na língua inglesa, está relacionada à ideia de se obter, de súbito, uma clareza na mente, no intelecto de um indivíduo; uma compreensão - inesperada, repentina - de uma causa e efeito específicos dentro de um contexto particular.

9. **Integração do qualitativo ao quantificável:** O paradigma tradicional está baseado no uso da matemática como instrumento que possibilita a análise, com base na premissa de que é preciso "quantificar" para se conhecer um objeto. Aqui os aspectos qualitativos do objeto não possuem validade científica. Essas regras metodológicas se estenderam às ciências sociais, mas acabaram provocando algumas reduções ou distorções, pois os fenômenos sociais são historicamente condicionados e culturalmente determinados, e o ser humano muda seu comportamento à medida em que ganha conhecimento sobre ele, impossibilitando previsões confiáveis. Para Moraes (1999), o fato de o cientista social não poder libertar do ato de observação, dos valores que prevalecem em sua prática geral, faz com que os fenômenos sociais possuam natureza subjetiva, o que indica a necessidade de compreendê-los com base nas atitudes mentais e no sentido que os sujeitos conferem às suas ações. Tais fatos requerem métodos de investigação e critérios epistemológicos diferentes das ciências naturais, exigem métodos qualitativos em vez de quantitativos, visando a obtenção de um conhecimento intersubjetivo, descritivo, compreensivo, em vez de um conhecimento objetivo e explicativo.

### 2.1.3 Um paradigma emergente

Diante da ruptura no paradigma cartesiano-newtoniano, se faz necessária a busca por um paradigma educacional que seja coerente ao paradigma científico pós teoria da relatividade e quântica. Para Moraes (1999), a escola continua oferecendo uma educação dissociada da vida, desconectada da realidade do indivíduo, descontextualizada, sem reconhecer a educação como um sistema aberto, tampouco o ser humano na sua multidimensionalidade, dotado de múltiplas inteligências e com diferentes estilos cognitivos.

Moraes (1999) descreve alguns princípios do atual modelo científico que podem ajudar a melhorar a nossa percepção do mundo, da realidade, do ser humano e colaborar para a transformação do processo educacional:

1. **A interconectividade dos problemas educacionais:** É preciso deixar a compartimentação, a desarticulação e a descontinuidade das nossas práticas teóricas e educacionais e adotar uma visão integrada, articulada e contínua, a fim de trazer à tona uma percepção global da realidade a ser transformada. Também, é importante perceber que as relações entre os fenômenos são inerentemente dinâmicas e que o pensamento sistêmico é um pensamento de processo, e que nossas estratégias de planejamento precisam ser dinâmicas, encarando os fenômenos socioeconômicos e culturais como processos vivos, com energia própria, em transformação;
2. **A reintegração do sujeito:** É preciso reconhecer que o indivíduo participa da construção do conhecimento não apenas com o uso predominante do raciocínio e da percepção, mas também usando as sensações, os sentimentos, as emoções e a intuição para aprender. Sob o referencial das relações pedagógicas, Moraes (1999) considera que a epistemologia construtivista apresenta um modelo que resgata a importâncias dos polos da relação pedagógica e conquista uma dinâmica própria do processo de conhecimento. O suporte para esse modelo pode ser encontrado na psicologia genética de Piaget, na obra de Paulo Freire, na psicologia do desenvolvimento de Vygotsky, dentre outros;
3. **O conhecimento em processo:** É preciso reconhecer que o conhecimento está em processo, que é uma abstração extraída de um fluxo total e único, que já não constitui um conjunto de verdades fixas, imutáveis, mas sim partes de uma forma abstraída de um processo de *vir-a-ser*, que faz com que não haja elemento do conhecimento que seja absolutamente invariante (MORAES, 1999, p.91-92);
4. **A percepção das conexões e do significado do contexto:** Para Moraes (1999), de acordo com Bohm existe uma interdependência entre o nosso ambiente em geral e o processo de pensamento. Por exemplo, o ambiente é transformado pela atividade do trabalho humano, que é guiado e transformado pelo pensamento, e por outro lado tudo que está no ambiente, seja por um processo natural ou por uma atividade humana, flui para dentro do indivíduo por meio da percepção, pelas impressões deixadas na memória pelos órgãos sensoriais, e assim configuram o pensamento posterior;

5. **Redes de conhecimento:** Não há conhecimento em hierarquias, todos os conhecimentos estão *interconectados*, e a busca por um ponto de encontro entre as diferentes disciplinas do conhecimento humano encaminha da interdisciplinaridade para a *transdisciplinaridade*, termo cunhado por Piaget para falar do aparecimento de um estágio superior em que as disciplinas situariam as interações entre as pesquisas especializadas no interior de um sistema total sem fronteiras entre essas disciplinas;
6. **Educação como um sistema aberto:** A educação compreendida como um sistema aberto implica a existência de processos transformadores que decorrem da experiência, algo inerte a cada sujeito e que depende da ação, da interação e da transação entre sujeito, objeto e meio. Um sistema aberto significa que tudo está em movimento, é algo que não tem fim, em que início e fim não são predeterminados, exigindo um movimento contínuo e onde cada ação completa é insumo para um novo começo (MORAES, 1999, p.99). Com isso, o currículo seria algo em constante movimento, sempre em processo de negociação e renegociação entre os alunos, professores, realidades e instâncias administrativas. Assim, o professor aceita que a indeterminação e as incertezas são necessárias e precisa aprender a conviver com elas;
7. **"Verdade" absoluta e teorias transitórias:** Nossas afirmações são sempre limitadas e aproximadas, pois estamos lidando sempre com uma rede de relações, com teorias transitórias, levando em conta algumas conexões e não todas. Não há, portanto, uma *verdade científica*;
8. **Educação para a compreensão do ser em sua inteireza:** A visão do indivíduo como um ser indiviso, que constrói conhecimentos usando não apenas a razão, mas também a intuição, as sensações e as emoções, resulta, como foi dito anteriormente, da visão sistêmica, da interconectividade existente entre as entidades e os fenômenos da natureza, bem como da visão ecológica. Para Howard Gardner (1994 apud Moraes (1999)), cada indivíduo é uma forma de expressão de um conjunto de inteligências que cooperam harmoniosamente entre si no desenvolvimento de tarefas simples e complexas. Cada inteligência tem diferentes gradientes de importância no desenvolvimento do todo, mas não pode ser vista isoladamente;
9. **Evolução criativa:** Acreditando que os sistemas vivos são sistemas abertos, complexos organizacionais sem equilíbrio, ou quase sem equilíbrio, em constante interação com o meio ambiente, trocando energia num fluxo dinâmico e infundável, podemos compreender que a criatividade é uma constante da natureza, que o universo organiza a si mesmo e, portanto, é auto-criador;
10. **Ciência e mística em busca da unidade:** Para Weber (1991 apud MORAES, 1999), "a ciência busca os limites da natureza, e o misticismo, a sua infinitude". Tanto a física quanto a mística mostram que o mundo exterior e interior são apenas dois lados de um mesmo tecido, no qual todos as forças e eventos, todas as formas de consciência e todos os objetos estão entrelaçados numa rede inseparável de relações interdependentes (MORAES, 1999, p.108);
11. **Além da dimensão individual:** A evolução é e será sempre coletiva. Para Capra (1993 apud MORAES, 1999) essa nova visão de mundo implica numa necessária e coerente mudança de valores, abandonando a competição, a quantidade, a dominação e o consumismo, e em seus lugares adotando a cooperação, a qualidade, a parceria e a conservação.

Esses onze princípios nos ajudam a delinear um novo paradigma para a educação sob a luz do novo paradigma da ciência. Para Moraes (1999), um paradigma *construtivista, interacionista, sociocultural e transcendente* nos coloca no caminho para uma educação com foco na aprendizagem, onde o aluno aprende, aprende a pensar, descobre como construir a sua própria linguagem e se comunicar, ganha domínio sobre os instrumentos eletrônicos e adquire a informação e o conhecimento para ser capaz de viver e conviver num mundo em transformação.

*Construtivista* no sentido de que o pensamento não tem fronteiras, que ele se constrói, se desconstrói e se reconstrói, segundo Freitag (1993 apud MORAES, 1999). É uma proposta construtivista porque implica em um processo progressivo de reflexão sobre si mesma, de correção constante, que supõe que o indivíduo possui uma capacidade plástica de renovação, como em tudo na natureza (MORAES, 1999, p.199).

*Interacionista* por compreender que sujeito e objeto são organismos vivos, naturais, abertos, estruturas dissipadoras de energia, que envolvem interações e as interdependências de suas partes e estruturas específicas e que possuem uma natureza intrinsecamente dinâmica.

*Sociocultural* porque, segundo a autora, compreende que o "ser" se faz na relação, que o conhecimento é produzido na interação com o mundo físico e social com base no contato do indivíduo com a sua realidade, com os outros, incluindo aqui sua dimensão social, dialógica, inerente à própria construção do pensamento que não poderia existir sem o diálogo do homem consigo mesmo e com o mundo que o cerca (MORAES, 1999, p.25). Em respeito ao que diz a física, a realidade é uma rede de relações interconectadas, que representa os fenômenos observados e, se desvincularmos a aprendizagem do social, estaremos provocando a fragmentação e perpetuando a compartimentação (MORAES, 1999, p.203). Também, é por meio da cultura, dos valores por ela expressos, que somos capazes de examinar as nossas contradições individuais e coletivas, as frases, as palavras, as teorias e as histórias (MORAES, 1999, p.204).

*Transcendente* na própria razão de *transcender*, de ir mais além, ultrapassar, superar.

Compreender que a ciência não é apenas uma mediadora das interações entre os raciocínios concreto e abstrato, dos métodos dedutivos e indutivos, dos sentidos que registram os dados observáveis e que os ordenam em esquemas de ações significativos. Mas que vai além, que busca compreender a natureza não como uma simples coleção de objetos isolados, mas como uma realidade única, cuja grandeza e beleza podem ser experimentadas em múltiplos níveis. Uma ciência que almeja conhecer os limites da natureza, que tenta explicar o mistério do ser buscando a verdade fundamental a respeito da matéria e de sua origem. Uma ciência que se une à espiritualidade com base na compreensão na unidade e na interligação de todos os seres. Uma unidade que está no cerne de nosso mundo, mas que também pode ser detectada e experimentada pelo indivíduo a partir do momento em que ele aprende a se soltar e liberar sua energia, abrindo um canal para a ilimitada energia do universo. A vivência desses aspectos nos traz não apenas força interior, mas também serenidade e paz de espírito. Existindo paz dentro de nós, podemos então potencializar nossa energia e fazer um uso mais construtivo dela e da capacidade humana em prol da coletividade. (MORAES, 1999, p.206)

Moraes (1999) entende que, ao criarmos ambientes educacionais que privilegiem a formação do ser complexo, com suas múltiplas inteligências, estamos construindo futuros ambientes sociais, culturais e ecológicos que podem satisfazer as nossas necessidades sem reduzir as chances das gerações futuras.

Por isso, a educação deveria mostrar e ilustrar o Destino multifacetado do humano: o destino da espécie humana, o destino individual, o destino social, o destino histórico, todos entrelaçados e inseparáveis. Assim, uma das vocações essenciais da educação do futuro será o exame e o estudo da complexidade humana. Conduziria à tomada de conhecimento, por conseguinte, de consciência, da condição comum a todos os humanos e da muito rica e necessária diversidade dos indivíduos, dos povos, das culturas, sobre nosso enraizamento como cidadãos da Terra... (MORIN, 2000, p.62)

Após esses apontamentos, iremos nos debruçar sobre as implicações dos paradigmas tradicional e emergente sobre os modelos educacionais.

## 2.2 Modelos e Metodologias Educacionais

### 2.2.1 Modelo Tradicional de Educação

Para Bergmann e Sams (2018):

O atual modelo de educação reflete a era em que foi concebido: a revolução industrial. Os alunos são educados como em linha de montagem, para tornar eficiente a educação padronizada. Sentam-se em fileiras de carteiras bem arrumadas, devem ouvir um "especialista" na exposição de um tema e ainda precisam se lembrar das informações recebidas através de um teste avaliativo. De alguma maneira, nesse ambiente, todos os alunos devem receber uma mesma educação. (BERGMANN; SAMS, 2018, p.6)

Talbert (2019) esclarece que, no modelo tradicional, a aula é usada principalmente para apresentar pela primeira vez um novo material, e o trabalho mais importante é feito individualmente, após a aula. O autor ressalta que esse modelo pode, nas mãos certas, criar um ambiente de aprendizagem que facilite a aprendizagem



profunda, mas ressalva que o método tradicional pode criar dependências intelectuais indesejadas dos alunos em relação aos professores (TALBERT, 2019, p.7).

Ainda de acordo com Talbert (2019), as principais características do *modelo tradicional* são:

- A aula é usada principalmente para apresentar aos alunos um novo material pela primeira vez e disseminar material adicional relacionado (frequentemente na forma de uma aula expositiva);
- o trabalho de mais alto nível, que foca na aplicação, síntese, avaliação e criatividade, é feito depois da aula pelos alunos, individualmente. Os estudantes *podem* ter permissão para trabalhar em grupos ou podem trabalhar em grupos mesmo que não seja permitido, ou sozinhos, mesmo que os grupos sejam permitidos. Não há muita regulação ou supervisão por parte de um especialista (i.e., o professor ou seu assistente) nessa fase individual, e, se o aluno quiser auxílio, ele terá que contar com seus colegas (presumindo que a colaboração seja permitida) ou com a interação com o professor, que possivelmente ocorre mais tarde. (TALBERT, 2019, p.5, grifos do autor)

Para o autor, o que constitui o *modelo tradicional* não é uma pedagogia específica, mas a forma como o horário da aula é projetado (TALBERT, 2019, p.5). Nesse sentido podemos estabelecer que, de modo geral, a aula tradicional se dá com as seguintes etapas:

- Um primeiro momento onde o professor apresenta o conteúdo para os alunos e passa algumas atividades de fixação;
- Um segundo momento onde o professor tira as dúvidas da atividade de fixação, aproveitando para rediscutir os conceitos que não ficaram bem esclarecidos na etapa anterior, fazendo uma análise diagnóstica sobre quais precisam de maior discussão com base nas dúvidas dos alunos, e posteriormente passa novas atividades complementares;
- Um terceiro momento onde o professor discute e corrige as atividades complementares.

Esses momentos podem ocorrer em um, dois ou até mais encontros presenciais. A elaboração de um plano de aula nos modelos da aula tradicional é um exercício de agilidade, paciência e gestão criteriosa do tempo, pois o professor deve dividir adequadamente o tempo que precisará passar "dando conteúdo no quadro" com o tempo dedicado para as discussões sobre o conteúdo. O tempo que o professor fica "no quadro" é geralmente um momento de conversa quase unilateral e geralmente só se flexibiliza ao final, quanto se abre às perguntas pertinentes sobre o que foi discutido, seguido de um momento onde o professor dá tempo e espaço para os alunos testarem suas compreensões do que foi discutido.

No modelo tradicional o material didático, além do livro didático, geralmente é composto pelas notas de aula que os alunos tomam do que "foi posto no quadro" e do que "foi dito pelo professor", e por vezes acaba sendo a fonte primária de consulta no caso de dúvidas durante os exercícios de fixação. Geralmente as notas de aula são diretas, objetivas, e os pormenores dos processos envolvidos são discutidos de forma oral, nas interações entre o professor e os alunos. Esse modo de aula torna a aula presencial imprescindível, e o aluno que ocasionalmente precise faltar ao encontro terá que dar o melhor de si para compreender as notas de aula de outro aluno ou buscar materiais alternativos para tentar compreender melhor o que foi dado em aula.

Talbert (2019) enumera que o modelo tradicional pode:

- **Criar uma relação inversa entre a dificuldade cognitiva do trabalho do aluno e o acesso do aluno a suporte:** O momento onde o aluno mais sente dificuldade é quando ele tem menos suporte, pois o tempo em que o estudante está sob o aporte do orientador, em sua maior parte, é utilizado para ouvir e fazer anotações;
- **Roubar tempo da exploração social guiada da aprendizagem mais profunda:** O tempo para discussão, processamento e aprendizagem significativa acabam ficando limitados a uma fração da aula, que teve sua maior parte tomada por ações expositivas;
- **Não promover comportamentos de aprendizagem autorregulados:** a aprendizagem autorregulada refere-se à aprendizagem que "abrange plena atenção e concentração, autoconsciência e introspecção, autoavaliação honesta, abertura à mudança, autodisciplina genuína e aceitação da responsabilidade pela

própria aprendizagem" (NILSON, 2013 apud TALBERT, 2019). Esses comportamentos listados podem ser desenvolvidos no modelo tradicional, mas não fazem parte, de modo *explícito*, desse modelo;

- **Criar dependências intelectuais indesejadas dos alunos em relação aos professores:** o estudante pode criar uma relação contraditória com o seu professor, pois sempre que há dúvidas ou não se sente capaz de revisar o seu próprio trabalho, ele deve procurar àquele que é o "guardião do conhecimento" mas que pode vir a "tirar pontos", e isso cria um ambiente de insegurança.

Dentro do modelo tradicional de educação, a técnica de ensino mais presente é a chamada *instrução direta*. Para Talbert (2019), instrução direta é qualquer técnica de ensino na qual a informação que está sendo ensinada é apresentada de uma forma sequenciada e organizada por um professor (TALBERT, 2019, p.12). O autor ressalta não confundir com o um programa pedagógico homônimo fundado por Siegfried Engelmann e Wesley Becker.

É importante observar que instrução direta não faz referência a uma forma específica de ensino, mas sim a uma ampla gama de pedagogias que têm contextos nos quais elas podem apoiar a aprendizagem e outros nos quais outros métodos seriam melhores (TALBERT, 2019, p.12-13). De um modo mais amplo, sempre que um indivíduo intervém no processo de aprendizagem do outro, ali está se dando uma instrução direta. Esse método é intrínseco ao processo de ensino-aprendizagem e é impossível que ele não ocorra em algum momento.

Em contrapartida à instrução direta se apresenta a *aprendizagem ativa*.

### 2.2.2 Metodologias Ativas

Segundo Bacich e Moran (2018), Metodologias Ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada e híbrida (BACICH; MORAN, 2018, p.4). Ainda, segundo o autor, essas metodologias tem foco no protagonismo do aluno, considerando o seu envolvimento direto em todas as etapas do processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Valente Bacich e Moran (2018), considerar uma metodologia como ativa está relacionado com a realização de práticas pedagógicas para envolver os alunos, engajá-los em atividades práticas nas quais ele seja o principal agente na sua aprendizagem. Cita também, dentre as diversas estratégias adotadas para implementar metodologias ativas, principalmente a *aprendizagem baseada em projetos*, a *aprendizagem por meio de jogos*, o *método de caso ou discussão e solução de casos* e a *aprendizagem em equipe* (BACICH; MORAN, 2018, p.28).

Para Talbert (2019) uma *aprendizagem ativa* é qualquer método didático que engaje os estudantes no processo de ensino-aprendizagem de forma ativa, como parte das atividades do espaço grupal (TALBERT, 2019, p.13).

Para Oliveira Debaldo (2020), as pedagogias ativas pressupõem uma mudança pedagógica, desde a própria estrutura física da escola até os modos de ser, agir e se relacionar dos sujeitos envolvidos no processo pedagógico (DEBALDO, 2020, p.13). Com isso, eleva-se o conceito de espaço escolar, o que leva não só à mudança da estrutura do ambiente de estudos, também muda a postura do docente: sai de cena o professor detentor de todo o conhecimento e entra o pesquisador experiente, pronto a dar as orientações e guiar o aluno no seu próprio processo. Para Priess Debaldo (2020), o docente dentro das metodologias ativas, tem papel estratégico, cabendo-lhe a organização e a condução do processo, mais no sentido de ser um guia do que ser a única fonte do saber.

Bacich e Moran (2018) propõem que a aprendizagem se constrói, de forma complexa e equilibrada, em três movimentos ativos híbridos principais:

- **Construção Individual:** cada aluno percorre e escolhe seu caminho;
- **Construção Grupal:** o aluno amplia sua aprendizagem por meio de envolvimento, interação e compartilhamento de saberes, atividades e produções com seus pares em diferentes grupos e com diferentes níveis de supervisão docente;
- **Construção Tutorial:** o aluno aprende com a orientação de pessoas mais experientes em diferentes campos e atividades (curadoria, mediação, mentoria).

Dentre esses três momentos ativos, o momento de Construção Individual é onde o aluno sente mais dificuldade, pois é o momento em que ele deve ter contato, criticar, analisar e sintetizar todo o conhecimento com que teve contato, e ele faz isso sem a participação de um orientador/tutor. Nesse modelo, o educador tem um papel elementar na disponibilização de materiais de aprendizagem adequados às necessidades do aluno. Esse processo é chamado de *personalização do ensino* por Bacich e Moran (2018). Para os autores, a personalização, do ponto de vista dos alunos, é o movimento de construção de trilhas que façam sentido para cada um, que os motivem a aprender, que ampliem seus horizontes e levem-nos ao processo de serem mais livres e autônomos. Já do ponto de vista do educador e da escola, a personalização é o movimento de ir ao encontro das necessidades e interesses do estudante e de ajudá-los a desenvolver todo o seu potencial, motivá-los, engajá-los em projetos significativos, na construção de conhecimentos mais profundos e no desenvolvimento de competências mais amplas.

Para os autores, o processo de personalização carece de educadores com muita maturidade e de uma autonomia crescente dos estudantes, bem como docentes muito bem preparados e remunerados, além de um bom apoio institucional e infraestrutura tecnológica. É papel do educador descobrir quais são as motivações profundas de cada estudante, o que os mobiliza a aprender, os percursos, técnicas e tecnologias mais adequados para cada situação, seguindo com uma combinação equilibrada de atividades individuais e grupais, presenciais e *online*.

Segundo José Armando Valente, em Bacich e Moran (2018), a personalização é muito difícil de ser implementada, e para justificar cita Fullan (2009 apud BACICH; MORAN, 2018), que apresentou diversas razões que justificam esse modelo de aprendizagem ainda não ter se disseminado em larga escala. Dentre eles:

- A rigidez da escola e do sistema educacional;
- Políticas que são implantadas para reformar a escola no sentido de adequá-las a certos padrões internacionais que acabam reduzindo a latitude das decisões pedagógicas do professor;
- O receio na dificuldade de implantação devido à um número grande demais de alunos e ao pouco tempo disponível para acomodar uma quantidade cada vez maior de informações a serem trabalhadas pelo educador;
- A dificuldade do educador em conseguir informações sobre o que o aluno "sabe" e é "capaz";
- A formação dos educadores não previa esse tipo de atuação.

Segundo Bacich e Moran (2018), há várias formas e modelos de personalização. Elas serão discutidas em maiores detalhes nas propostas de ensino híbrido.

### 2.2.3 Ensino Híbrido

Bacich, Neto e Trevisani (2015) descreve o Ensino Híbrido como:

O ensino híbrido, da maneira que vem sendo utilizado em escolas de educação básica nos Estados Unidos, na América Latina e na Europa, difere das definições de *blended learning* voltadas para o ensino superior e entendidas como aquele modelo em que o método tradicional, presencial, se mistura com o ensino a distância e, em alguns casos, determinadas disciplinas são ministradas na forma presencial, enquanto, outras, apenas *online*. Esse seria o uso original do termo, que evoluiu para abarcar um conjunto muito mais rico de estratégias ou dimensões de aprendizagem [...] A expressão *ensino híbrido* está enraizada em uma ideia de educação híbrida, em que não existe uma forma única de aprender e na qual a aprendizagem é um processo contínuo, que ocorre de diferentes formas, em diferentes espaços. (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p.74)

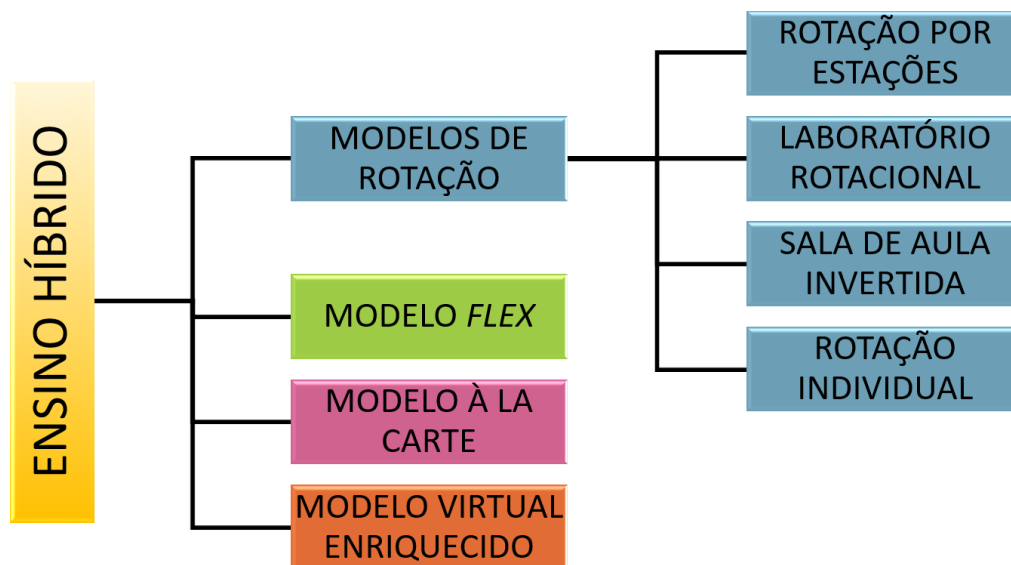
Decorre disso que o ensino híbrido se coloca como ponto de convergência entre os espaços das salas de aula e os ambientes de aprendizagem *online*, estes utilizando-se das tecnologias digitais para promover o processo de ensino-aprendizagem, colocando esses dois espaços como complementares dentro desse processo.

Segundo Christensen, Horn e Staker (2013), em muitas escolas, o ensino híbrido está emergindo como uma inovação sustentada em relação à sala de aula tradicional. Esta forma híbrida é uma tentativa de oferecer “o

melhor de dois mundos”, ou seja, as vantagens da educação online combinadas com todos os benefícios da sala de aula tradicional. Por outro lado, outros modelos de ensino híbrido parecem ser disruptivos em relação às salas de aula tradicionais. Eles não incluem a sala de aula tradicional em sua forma plena, oferecem benefícios de acordo com uma nova definição do que é bom e tendem a ser mais difíceis para adotar e operar (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p.3).

Tanto Bacich, Neto e Trevisani (2015) quanto Christensen, Horn e Staker (2013) concordam que é possível organizar as propostas de ensino híbrido como o esquema na Figura 1.

Figura 1 – Ensino Híbrido



Fonte: o autor

Para Christensen, Horn e Staker (2013), os modelos de Ensino Híbrido são programas de educação formal que combinam o ensino *online* com as escolas tradicionais. Com base nessa descrição, os autores discordam de Bacich, Neto e Trevisani (2015) em um único ponto: consideram que as propostas *Rotação por Estações*, *Laboratório Rotacional* e *Sala de Aula Invertida* são as únicas que são verdadeiramente *híbridas*, no sentido de que uma forma híbrida é uma tentativa de oferecer “o melhor de dois mundos”, isto é, as vantagens da educação online combinadas com todos os benefícios da sala de aula tradicional. Elas seguem o modelo de *inovações híbridas sustentadas*, pois incorporam as principais características tanto da sala de aula tradicional quanto do ensino *online*. Para os autores, os modelos de *Rotação Individual*, *Flex*, *À La Carte* e *Virtual Enriquecido*, por outro lado, estão se desenvolvendo de modo mais *disruptivo* em relação ao sistema tradicional. Aqui a palavra *disruptivo* é usada para conceituar modelos que não incluem a sala de aula tradicional em sua forma plena. Modelos disruptivos frequentemente se formam entre pessoas que estão fora do sistema de ensino. São modelos que oferecem benefícios de acordo com uma nova definição do que é bom, mas que tendem a ser mais difíceis para adotar e operar.

Para Christensen, Horn e Staker (2013), os modelos mais disruptivos estão colocados de modo a transformar a estrutura das salas de aula e tornarem-se motores para uma mudança no longo prazo, e nesse caminho quaisquer variedades de ensino híbrido devem se tornar obsoleta conforme a disrupção pura se torna suficientemente boa. E quando isto ocorrer, o papel fundamental das escolas tradicionais vai se alterar dramaticamente. As escolas irão focar mais, por exemplo, em oferecer instalações bem cuidadas e com um grande suporte presencial, refeições de alta qualidade e uma variedade de programas atléticos, musicais e artísticos para que os estudantes queiram estar ali, além de alavancar o uso educacional da Internet (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p.4).

Christensen, Horn e Staker (2013) comentam que, embora as salas de aula tradicionais e híbridas estejam à beira da disrupção, não conseguem visualizar as escolas tradicionais tornando-se obsoletas num futuro próximo. Os autores preveem que as escolas híbridas, que combinam as escolas existentes com novos modelos de sala de

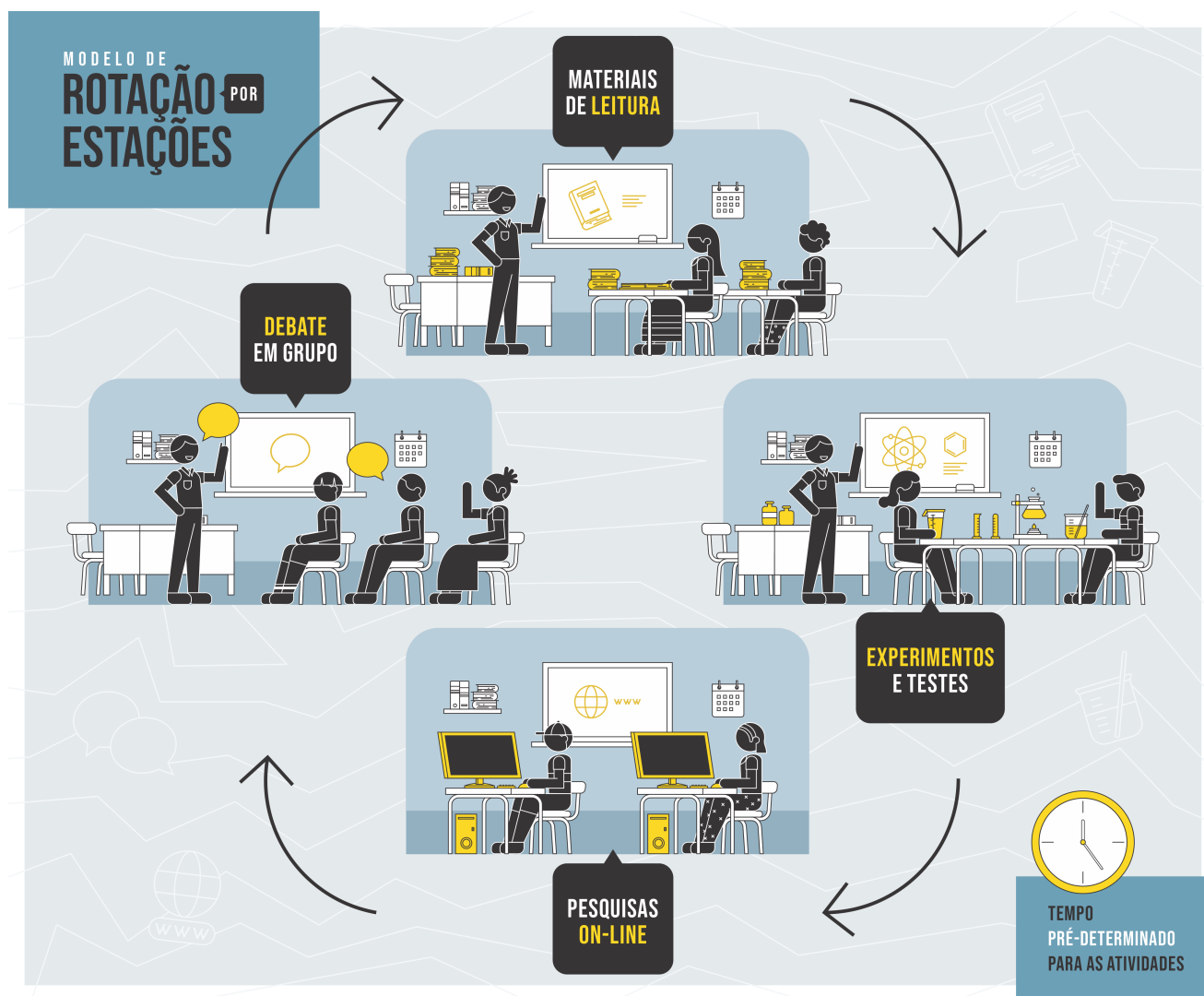
aula, serão o modelo dominante de educação do futuro. Consideram que os modelos que são mais disruptivos estão posicionados para transformar o modelo de sala de aula no longo prazo, mas provavelmente não para o primeiro ciclo do Ensino Fundamental.

Agora vamos detalhar um pouco mais cada um desses modelos:

1. **Modelos de Rotação:** onde os estudantes revezam as atividades realizadas seguindo com um horário pré-fixado ou orientação do professor, podendo envolver discussões em grupo (com ou sem a presença do orientador) atividades escritas, leituras e, necessariamente, uma atividade *online*. Nesse modelo, há as seguintes propostas:

- **Rotação por estações:** Indicado na Figura 2. Os estudantes são organizados em grupos, cada grupo com uma tarefa pré-determinada, conforme os objetivos do orientador para o encontro, podendo serem realizados experimentos, pesquisas investigativas, leituras e discussões de textos, atividades escritas, entre outras. Um dos grupos estará envolvido com propostas *online* que, de certa forma, independem do acompanhamento direto do orientador. É importante valorizar momentos em que os estudantes possam trabalhar de forma colaborativa e aqueles em que possam fazê-lo individualmente. Após um determinado tempo, previamente combinado com os estudantes, eles trocam de grupo, e esse revezamento continua até todos terem passado por todos os grupos;

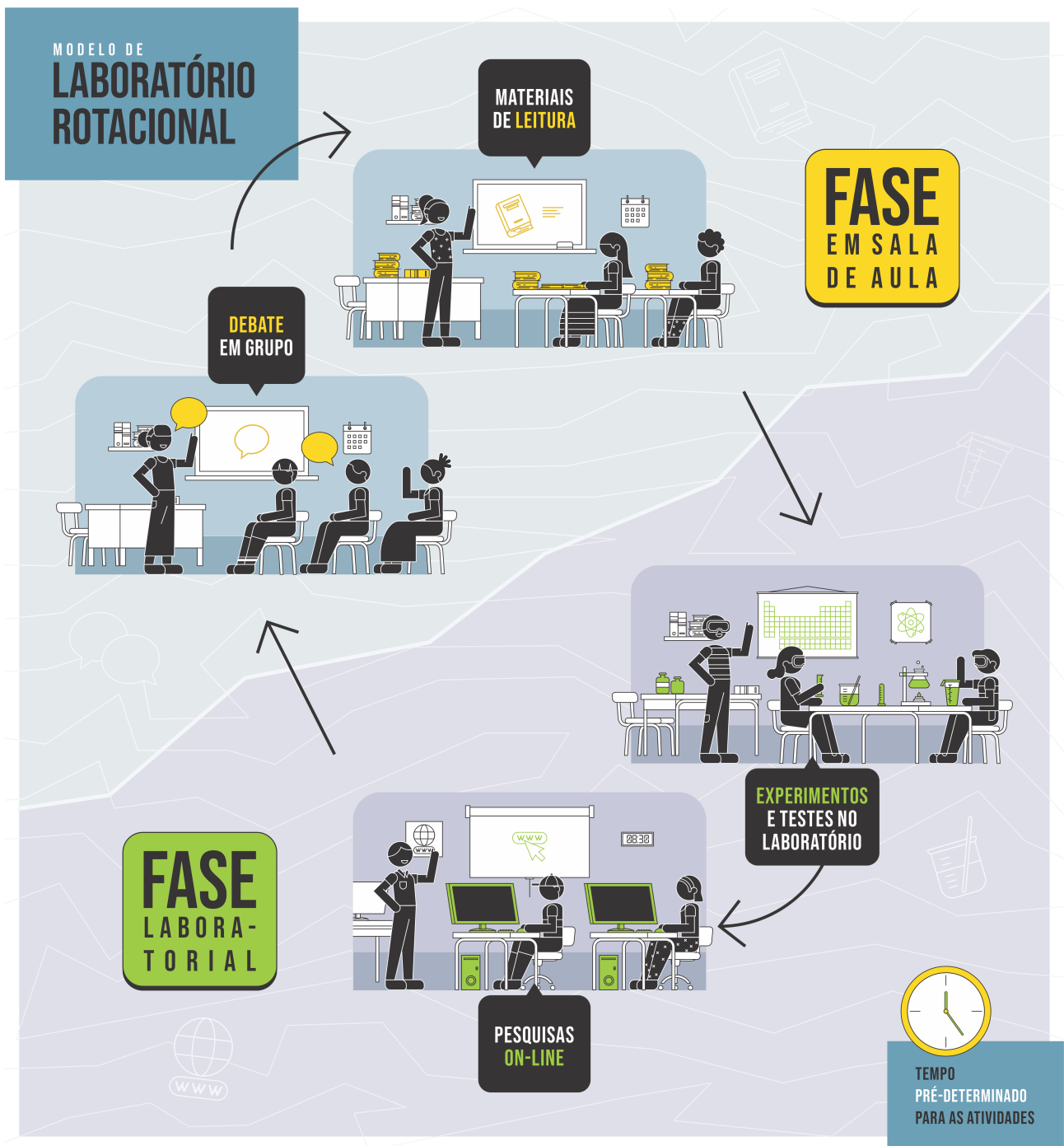
Figura 2 – Modelo de Rotação por Estações



Fonte: o autor

- Laboratório rotacional:** Indicado na Figura 3. Similar à rotação por estações, aqui também os estudantes são organizados em grupos, cada grupo com uma tarefa pré-determinada, conforme os objetivos do orientador para o encontro, podendo serem realizados experimentos, pesquisas investigativas, leituras e discussões de textos, atividades escritas, entre outras. Mas, em algumas etapas, os estudantes devem se dirigir aos laboratórios de ensino, onde trabalharão individualmente nos computadores ou em experimentos laboratoriais, acompanhados por um professor tutor, que pode ser diferente do responsável pelas fases de sala de aula. Tem principal foco no complemento às aulas tradicionais. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013), os Laboratórios Rotacionais frequentemente aumentam a eficiência operacional e facilitam o aprendizado personalizado, mas não substituem o foco nas lições tradicionais em sala de aula;

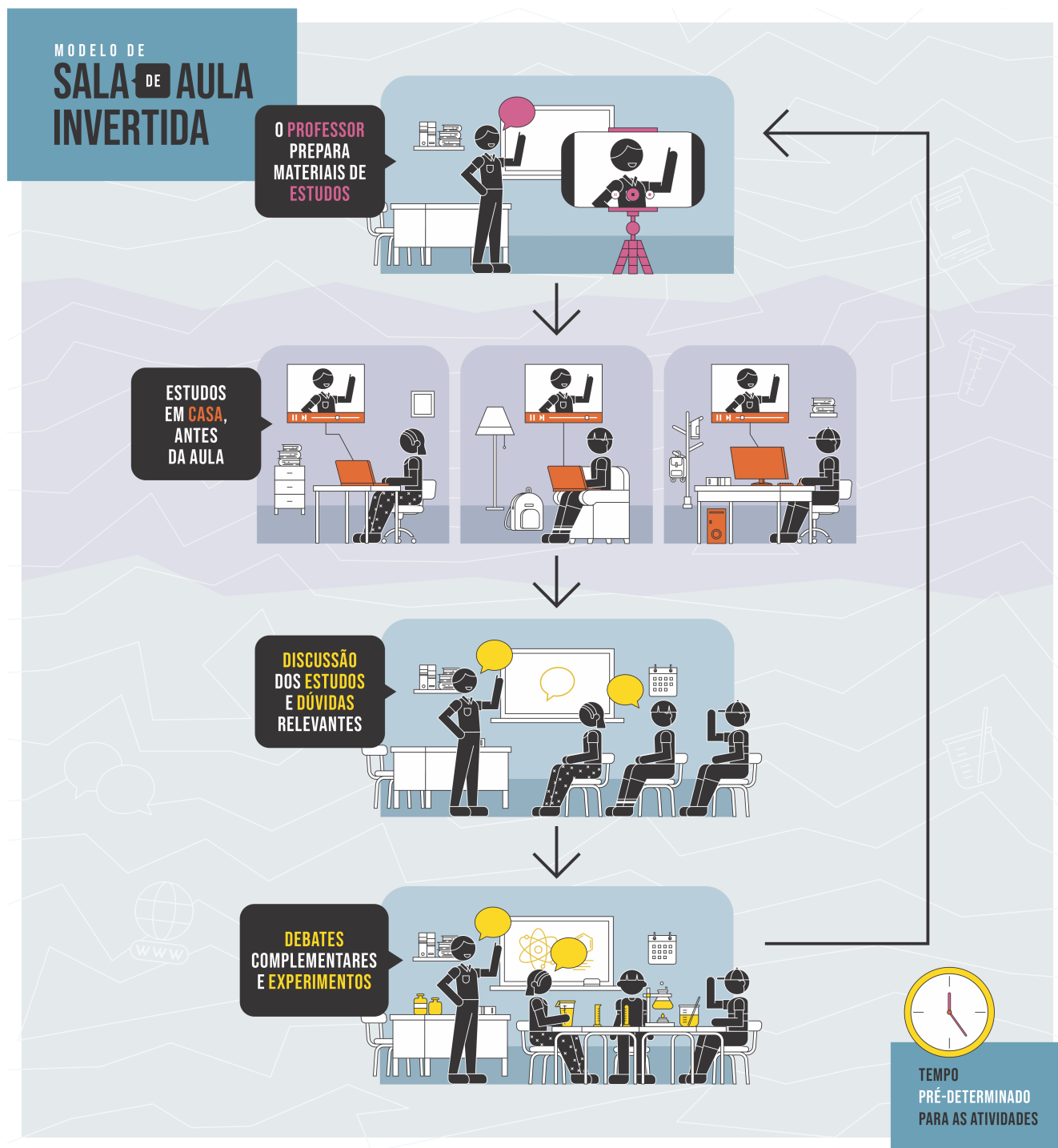
Figura 3 – Modelo de Laboratório Rotacional



Fonte: o autor

- Sala de aula invertida:** Indicado na Figura 4. O estudante deve estudar os conteúdos em sua casa, anteriormente ao encontro (presencial ou síncrono *online*). Para tanto, o estudante tem acesso antecipado a diversos materiais que serão disponibilizados pelo orientador, e que compõem fontes aos conceitos a serem estudados, como vídeos, livros, artigos, textos, *podcasts*, programas de televisão, apresentações em *slides*, entre inúmeras outras. Essas fontes não se limitam às disponibilizadas pelo orientador, pois o estudante tem liberdade para pesquisar outras fontes de seu interesse. O encontro será a mediação do orientador com foco para que o estudante, em posse de suas anotações, estudos e conhecimentos adquiridos, possa discutir com o grupo e com o orientador a fim de esclarecer eventuais dúvidas e revisar as aprendizagens consolidadas;

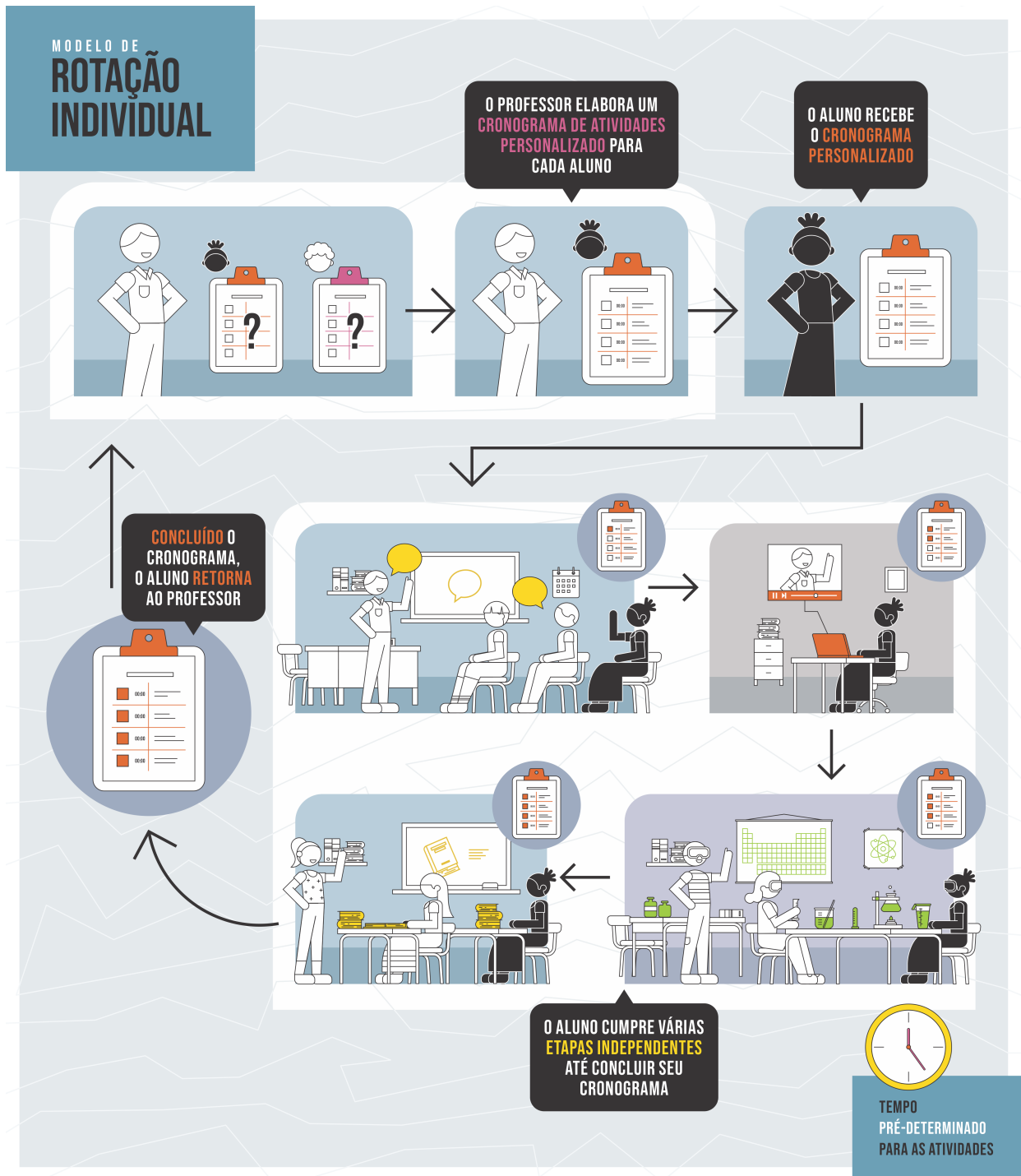
Figura 4 – Modelo de Sala de Aula Invertida



Fonte: o autor

- Rotação individual:** Indicado na Figura 5. Nesse modelo, cada estudante tem um plano de estudos individualizado, com uma rotina a ser cumprida e elaborada especificamente para cada estudante individualmente, focando nas dificuldades a serem superadas e nas necessidades desse aluno. A rotação se conclui após o estudante acenar positivamente que cumpriu toda sua rotina e está pronto para ser avaliado. Após o sucesso ou não nessa avaliação, o aluno recebe uma nova rotina e segue para a próxima rotação. Os alunos podem mudar de etapas em tempos diferentes, mas todas as atividades tem um prazo pré-determinado para serem cumpridos. De acordo com Christensen, Horn e Staker (2013), os programas de rotação individual ainda são raros;

Figura 5 – Modelo de **Rotação Individual**

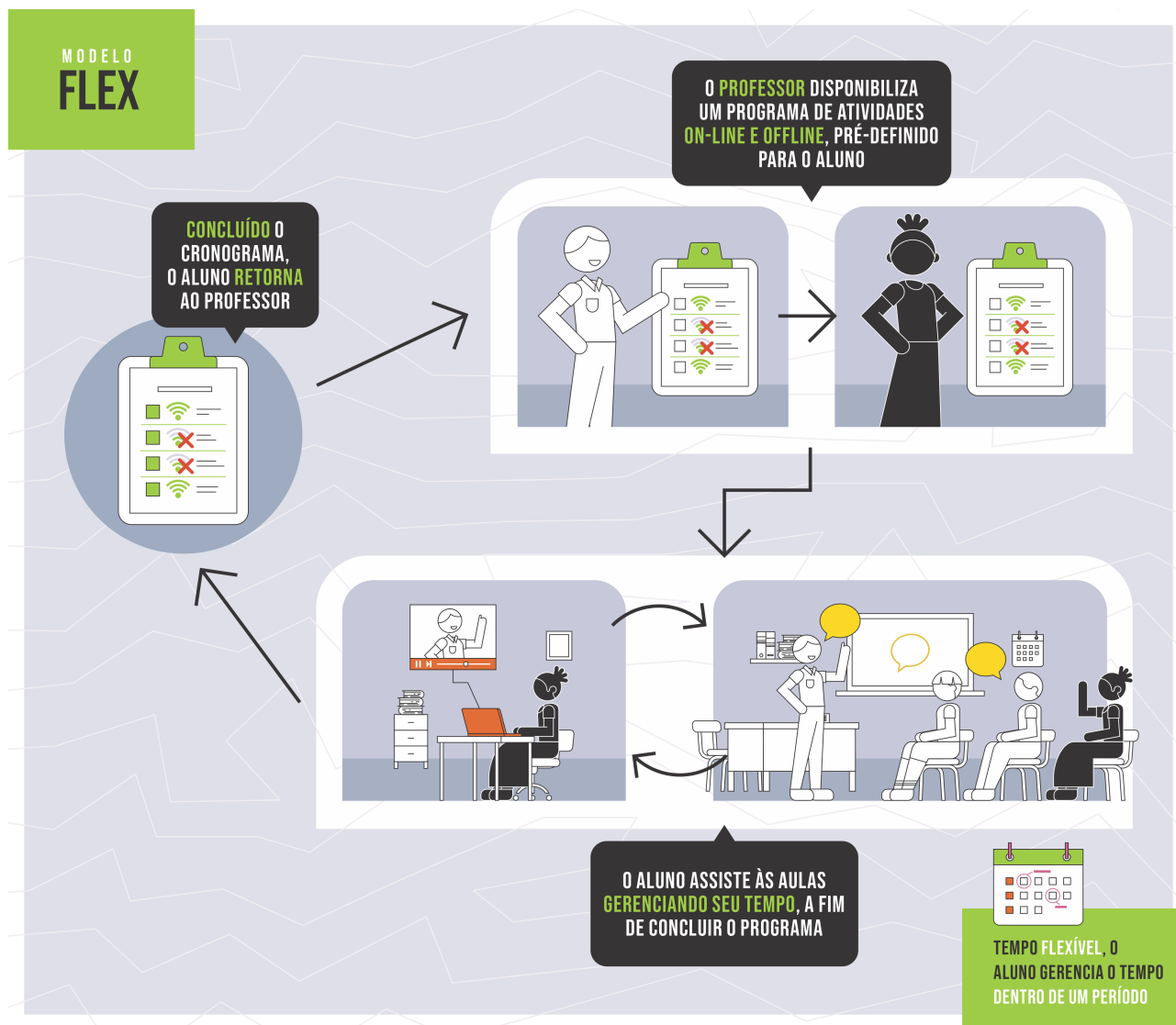


Fonte: o autor



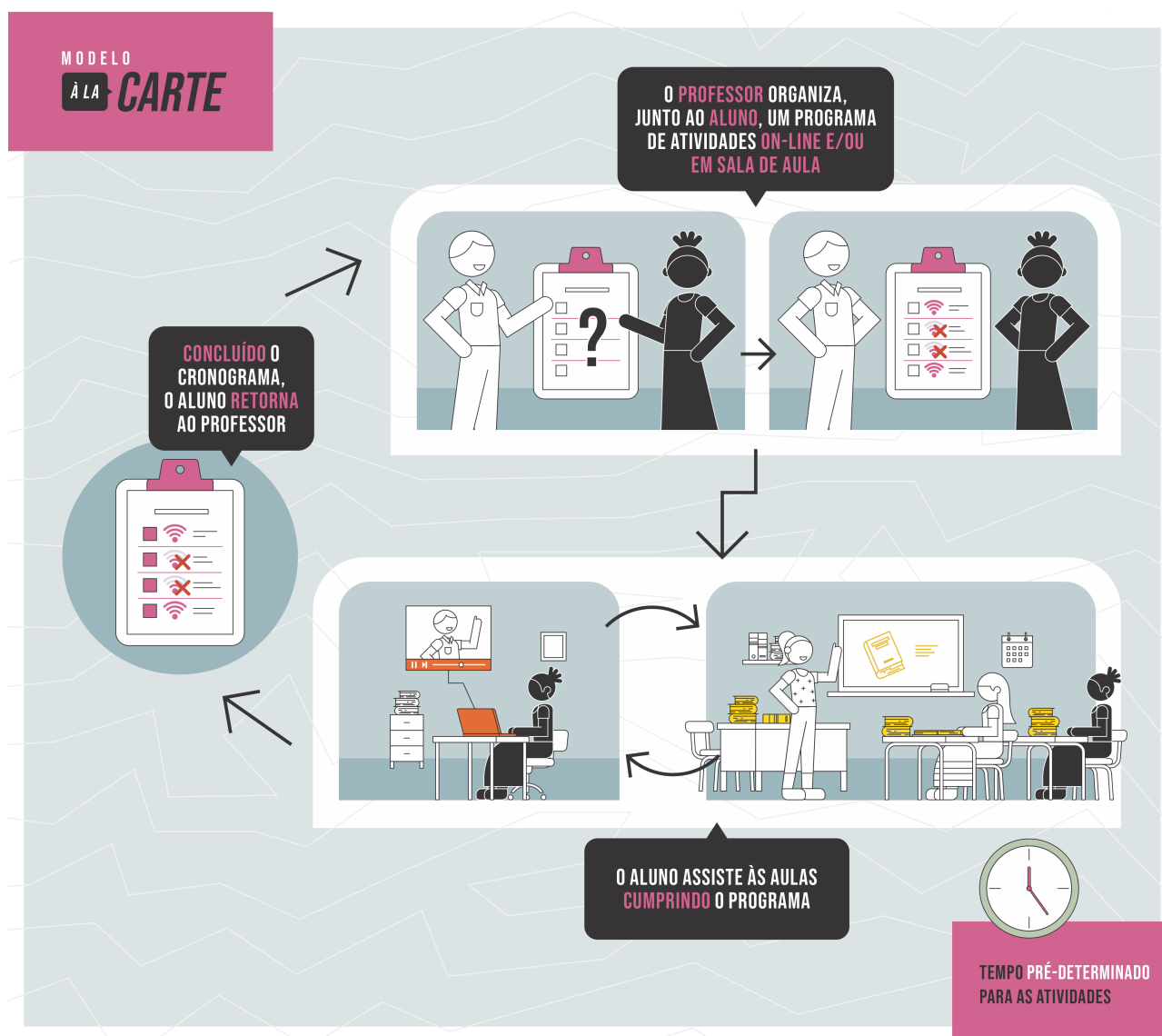
2. **Modelo flex:** Indicado na Figura 6. Para Christensen, Horn e Staker (2013), é um modelo onde os estudantes seguem um roteiro fluido e adaptado individualmente nas diferentes modalidades de ensino (*online* ou *offline*). Os estudantes também têm uma rotina de atividades a ser vencida, mas os prazos são flexíveis e cada estudante pode definir o seu próprio ritmo. Tem como foco principal no ensino *online*, mas segundo Christensen, Horn e Staker (2013), mesmo sendo o modelo *flex* aquele no qual o ensino *online* é a espinha dorsal do aprendizado do aluno, é possível que o aluno se direcione para mais atividades *offline* em alguns momentos. Os estudantes em programas Flex não necessitam de grupos definidos por idade porque todos se movimentam por cursos e módulos em seu próprio ritmo e em seu próprio planejamento. Os estudantes avançam pelo conteúdo em seu próprio ritmo, e os professores presenciais intervêm quando necessário. Como ritmo de cada estudante é personalizado, o orientador precisa frequentemente se colocar à disposição para esclarecer dúvidas. O professor responsável deve oferecer apoio presencial, de um modo flexível e adaptativo e conforme a necessidade, por meio de atividades como lições em pequenos grupos, e tutoria individual. Algumas implementações possuem um forte apoio interpessoal, enquanto em outras este apoio é mínimo. Ainda, Christensen, Horn e Staker (2013) afirma que muitos dos primeiros programas no modelo *flex* eram focados inicialmente nas pessoas que abandonavam os estudos e na recuperação de créditos;

Figura 6 – Modelo *Flex*



Fonte: o autor

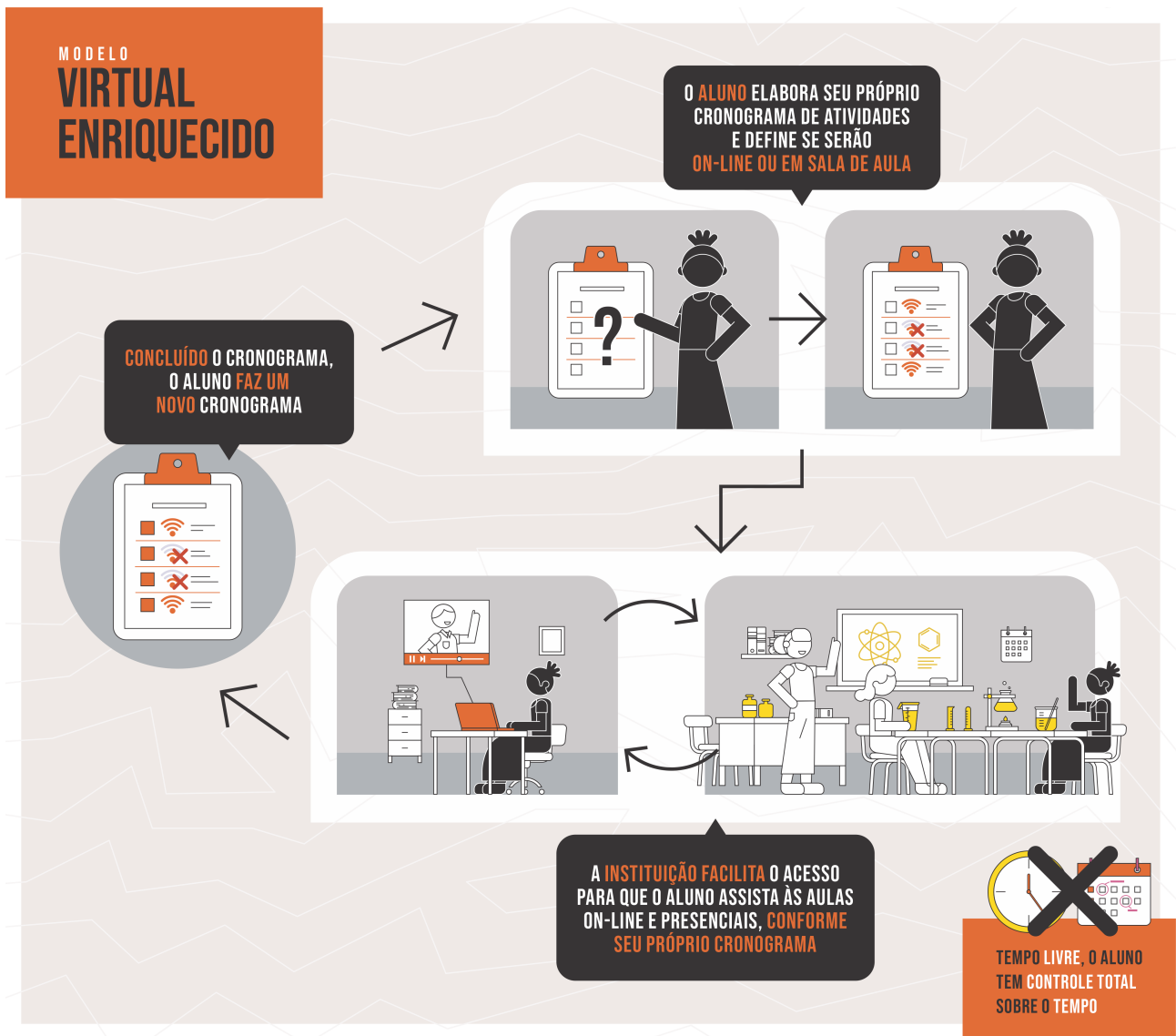
3. **Modelo à la carte:** Indicado na Figura 7. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013), esse é um modelo no qual os alunos participam de um ou mais cursos inteiramente online, com um professor online, e ao mesmo tempo continuam a ter experiências educacionais em escolas tradicionais. Os alunos podem participar das aulas *online* tanto no espaço físico como em outros lugares. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015), os cursos são oferecidos em parte de forma presencial e em outra parte de forma *online*, e o estudante é responsável pela organização de suas atividades dentro dessas formas e pela organização de seus estudos, de acordo com os objetivos gerais a serem atingidos, planejados em parceria com o orientador. A parte *online* pode ocorrer no ambiente escolar, em casa ou em outros locais em que o aluno possa ter acesso aos materiais disponibilizado de forma *online*. Cada instituição escolar escolhe como irá ofertar os cursos. Algumas optam por focar na forma presencial para disciplinas consideradas essenciais e disponibilizam de forma *online* apenas o que consideram complementar à formação do estudante, enquanto outras instituições oferecem as duas formas simultaneamente, sendo do estudante a tarefa de optar, no início de cada etapa, a que mais lhe convier, mas sendo esta definitiva até a conclusão daquela etapa. As atividades possuem prazos pré-definidos para suas conclusões. Christensen, Horn e Staker (2013) cita que a maioria das oportunidades *à la carte* teve como característica principal, no seu início, um esforço para oferecer cursos que de outra forma não estariam disponíveis aos alunos;

Figura 7 – Modelo *à la carte*

Fonte: o autor

4. **Modelo virtual enriquecido (ou virtualmente aprimorado)**: Indicado na Figura 8. Trata-se de uma experiência disruptiva em que, em cada disciplina, os estudantes dividem seu tempo entre a aprendizagem *online* e a presencial. Os estudantes dispõem, no ambiente presencial de ensino, de uma quantidade limitada de encontros pré-definidos, sendo a maior parte dos estudos se dando de forma *online*. Para Christensen, Horn e Staker (2013), os programas no modelo virtuais enriquecido apareceram principalmente para oferecer mais apoio a estudantes matriculados em escolas integralmente virtuais, bem como para encaixar famílias que desejavam escolas inteiramente virtuais, mas que viviam em estados que as proibiam. Segundo os autores, a maioria deles começou quando as escolas completamente virtuais precisaram adicionar um componente físico para melhorar seus serviços para estudantes online que estudavam de casa e que precisavam de mais apoio presencial. Ainda, considerando a diferenciação proposta por Christensen, Horn e Staker (2013) entre *híbridos* e *disruptivos*, enquanto os híbridos começam tentando fazer o trabalho da tecnologia original, mas de maneira melhorada, os programas que aplicam esse modelo geralmente começam como um esforço para melhorar os serviços da tecnologia disruptiva — o ensino *online*. Os autores também consideram que programas que adotem esse modelo ainda são raros;

Figura 8 – Modelo virtual enriquecido



Fonte: o autor

Como, nesse trabalho, a atividade proposta está diretamente vinculada ao conceito de *Sala de Aula Invertida*, nos aprofundaremos nesse modelo.

### 2.2.4 Sala de Aula Invertida - *Flipped Classroom*

Talbert (2019) apresenta a sala de aula invertida como:

A aprendizagem invertida é uma abordagem pedagógica na qual o primeiro contato com conceitos novos se desloca do espaço de aprendizagem grupal para o individual, na forma de atividade estruturada, e o espaço grupal resultante é transformado em um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, no qual o educador guia os alunos enquanto eles aplicam os conceitos e se engajam criativamente no assunto. (TALBERT, 2019, p.21)

Na Sala de Aula Invertida, o processo característico da versão tradicional se inverte. O primeiro momento é feito pelo aluno, onde ele consulta o próprio material, estudando e analisando todo o conhecimento discutido dentro do material, resolvendo exercícios e testando a sua própria compreensão do conteúdo, e o segundo momento já servirá para tirar as dúvidas e discutir sobre o que não ficou totalmente compreendido. Essa inversão pode ser benéfica pois ela permite que, ao liberar o professor da discussão inicial com a explicação do conteúdo, ela dê mais tempo para que o professor possa, já no início do primeiro encontro, diagnosticar e focar a discussão nos aspectos que ficaram mal compreendidos, deixando o professor com uma aula menos sobrecarregada de conteúdo e tornando o planejamento da aula mais flexível e voltado para o contato entre o professor e os alunos.

Isso posto, essa flexibilidade permitirá que se utilize todo o tempo do encontro (presencial ou virtual) com o professor para esclarecer suas dúvidas e discutir juntos o objeto estudado, descaracterizando o conceito de aula tradicional, onde o professor centraliza o conhecimento e o expõe apenas na sala de aula, deixando o material de apoio apenas para complementação.

Há uma dúvida sobre o fato de "inverter" a sala de aula ter a ver com uma dialética entre o *online* e o presencial, no seguinte sentido: com o primeiro momento ser uma atividade de construção individual, que se dá com o acesso ao material *online* e, *posteriormente*, o segundo momento - o encontro para a discussão dos temas estudados individualmente - se dar de forma presencial. Sobre esse aspecto, Bacich e Moran (2018) nos informam que os momentos *posteriores* podem ser híbridos, presenciais, e *online*, combinados (BACICH; MORAN, 2018, p.13).

Nesse processo, o material é de extrema importância, visto que o aluno terá o primeiro contato com o objeto estudado por conta própria, estudando e analisando o material disponibilizado. A importância do material didático é muito maior e a relevância da escrita desse material é primordial para se obter bons resultados, pois será a fonte primária da aquisição desse conhecimento. Para tanto, ela deve ser clara, prezar pelo esclarecimento e detalhamento dos processos, apresentar exemplos e ser de agradável leitura, para que o leitor possa sentir prazer nesse processo.

Talbert (2019) considera que as origens da aprendizagem invertida estão ligadas a três fontes principais. A primeira é o método *peer instruction*, utilizada na Universidade de Harvard, criada pelo professor de Física Eric Mazur. Em meados dos anos 90, o professor observou que os alunos eram capazes de enunciar alguns conceitos, mas não os compreendiam. Decidiu aplicar uma nova ideia: o método tem como foco usar o tempo de aula para expor e corrigir concepções equivocadas dos alunos sobre as ideias importantes de uma determinada lição. Segundo Talbert (2019), o professor prepara uma aula com três a cinco conceitos essenciais e, para cada um, uma mini aula expositiva ou alguma demonstração que apresente esse conceito. Em seguida, é passada uma pergunta conceitual sobre os temas expostos e é feita uma votação secreta. Após apurar as respostas, se houver uma porcentagem significativa de acerto, a resposta correta é revelada e o tempo restante é utilizado para explicações complementares. Se a maioria das respostas não corresponde à correta, o professor separa os alunos em grupos (duplas, em geral) e cada grupo tem um tempo limitado para defender suas respostas. Após as defesas, uma nova votação é tomada e apurada. No caso de a resposta se manter divergente, o processo é repetido. Assim, os conceitos eram cada vez mais bem explorados, em suas raízes, e a aprendizagem desses conceitos era mais aprofundada.

A segunda fonte teria origem na Universidade de Cedarville, em 1995, pelo professor J. Wesley Baker. O professor estava frustrado por não ter tempo de aplicar e praticar os experimentos de Design que trazia para suas aulas e, em um momento de epifania enquanto passava *slides* para seus alunos durante uma aula, conjecturou que aquilo não poderia estar certo, que "os textos estavam passando diretamente dos *slides* para os cadernos,

sem passar pelos cérebros dos alunos". Desde então, o professor começou a disponibilizar o material para a aula com antecedência. Com isso, sobrava mais tempo para aplicar e experimentar dentro do conceito do Design.

A terceira fonte teria origem na Universidade de Miami, também em 1995, pelos professores Maureen Lage, Glenn Platt e Michael Treglia. Basicamente os professores começaram a disponibilizar o material antecipadamente à aula e usariam parte do tempo de aula para esclarecer dúvidas, e a outra parte para apresentar atividades dinâmicas, incluindo experimentos e atividades de laboratório.

Para Talbert (2019), essas três abordagens compartilham elementos comuns que são a essência da aprendizagem invertida. Todas foram motivadas por problemas pedagógicos concretos que surgiram nas práticas cotidianas do método tradicional; também tem como fator comum a falta de tempo para discussões mais aprofundadas e atividades mais práticas; ainda, todas tem como motor a utilização de recursos tecnológicos.

Posteriormente, em 2007, os professores Jon Bergmann e Aaron Sams, de uma escola de ensino médio em Woodland Park, no estado do Colorado, preocupados com os alunos que, por quaisquer razões, precisassem faltar às aulas e acabassem por perder o conteúdo trabalhado, e fazendo com o que os professores tivesse que reensinar os conteúdos, decidiram criar materiais para disponibilizar para os alunos de forma digital. Eles foram os primeiros a utilizarem o termo *instrução invertida*, e só em 2012 os autores publicaram um livro onde o termo *flipped classroom*, ou em português, *sala de aula invertida*, apareceu.

Para Bergmann e Sams (2018), são várias as razões para as quais a inversão da sala de aula é benéfica. Dentre elas:

- A inversão fala a língua dos estudantes de hoje: os alunos de hoje estão imersos no meio digital e é melhor adotar os recursos digitais ao invés de combatê-los. Inclusive, os autores estimulam os estudantes a trazerem seus próprios recursos tecnológicos para a escola, por considerarem mais sofisticados que os da própria escola;
- A inversão ajuda os estudantes ocupados: os alunos têm muitas ocupações, podem necessitar faltar aos encontros presenciais, e com a inversão eles podem adiantar o próprio ritmo, desenvolvendo a capacidade e a responsabilidade em gerenciar seu próprio tempo;
- A inversão ajuda os estudantes que enfrentam dificuldades: a atenção do orientador na sala de aula fica voltada, a maior parte do tempo, para os alunos que estão tendo dificuldades. No modelo tradicional, esse tempo era ocupado pelas perguntas e observações dos alunos mais aplicados, e a inversão ajudou os alunos com mais dificuldade a agir de forma mais ativa na sala de aula, a trazerem suas dúvidas e expressá-las de forma mais natural;
- A inversão ajuda alunos com diferentes habilidades a se superarem: com a liberdade de gerenciar o seu próprio tempo, o aluno consegue escolher o melhor lugar e momento para seus estudos, e com isso não precisam ficar passivamente ouvindo e tomando notas de forma apressada;
- A inversão intensifica as interações aluno-professor e aluno-aluno: o contato, por meio digital, facilita que os alunos expressem suas dúvidas e anseios no momento em que elas ocorrem, o que é benéfico para todos. Os alunos tem mais tempo e oportunidade de interagir com seus colegas e podem enviar questões pontuais aos professores, que podem verificar a possibilidade de organizar os alunos de forma que as dúvidas sejam complementares e, talvez, o próprio grupo consiga elucidar;
- A inversão melhora a relação com os pais: para o autor, os pais deixam de priorizar questões como falta de atenção, conversas paralelas, e focam na aprendizagem, pois essas são as questões dos pais que mais emergiram desde a adesão ao método. Os pais também tem se relacionado melhor com os materiais, utilizando-os até para suas próprias consultas, deixando a relação dos pais com a escola ainda mais transparente;
- A inversão é uma ótima ferramenta na ausência de professores: como os materiais são disponibilizados previamente, os alunos terão muitas atividades e bastante material para se ocuparem numa ocasional

ausência do professor. Ainda, como o material é variado, então os professores podem elaborar uma gama imensa de materiais e deixá-los disponível aos alunos em uma eventual ausência prolongada.

## 2.3 Demonstrações Matemáticas

Segundo Stefanowicz (2014), ao citar Houston (2009), uma demonstração matemática é como

... uma pequena "batalha" entre o leitor e o escritor. No início de um estudo matemático você será frequentemente o leitor, aprendendo as demonstrações dadas pelos seus professores ou encontradas no material didático. Você deve ter uma postura ativa, que significa trabalhar na demonstração com papel e caneta. Ler demonstrações não é fácil e pode ser até entediante se você tentar lê-la como um romance, confortavelmente sentado no sofá em um nível de semi-concentração. Provavelmente a parte mais importante é questionar tudo, o que quer que o autor esteja dizendo. Trate isso como um debate entre você e o autor da demonstração e o pergunte o porquê a cada passo da argumentação (Tradução nossa)(STEFANOWICZ, 2014, p.10).<sup>3</sup>

Nesse sentido, por vezes o estudante se encontrará numa posição em que não conseguirá se autorresponder, pois o autor não está presente e a argumentação se resumirá ao que está escrito. Essa sensação de impotência por vezes leva a uma frustração em não conseguir compreender um resultado matemático, o que desmotiva e pode levar ao abandono daquele estudo. Essas dúvidas podem ser sanadas em um encontro na sala de aula, com uma conversa com o seu professor, mas que em algumas situações pode não ser possível, especialmente nos momentos de construção individual.

### 2.3.1 Origens das Demonstrações Matemáticas

Pietropaolo (2005), em sua pesquisa, buscava compreensões sobre a necessidade e a acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica, bem como investigar as implicações que essa inovação traz aos currículos de formação inicial de professores. Entre suas conclusões, identificou um consenso entre os participantes de que a “prova” colocava-se como um conteúdo e recurso pedagógico importante em Matemática no Ensino Fundamental e Médio, contanto que se explore um sentido mais amplo para essa palavra. Isso significa que não adiantaria simplesmente reproduzir (aluno ou professor) as demonstrações presentes nos livros, mas sim o “fazer matemática” em sala de aula, envolvendo argumentações, conjecturas, experimentações. Mas, para isso, o professor necessita de uma formação que leve conta esse fator.

De acordo com Pietropaolo (2005), no âmbito exclusivo da Matemática, prova e demonstração são, em geral, sinônimas e não precisariam de adjetivações: se uma prova foi plenamente aceita pela comunidade de matemáticos, então ela teria adquirido o status de rigorosa, embora a noção de rigor tenha sofrido algumas adaptações no decorrer do tempo (PIETROPAOLO, 2005, p.49). Para o autor, não há uma noção clara sobre quando se originou a noção de prova matemática, mas assume que os Gregos deram os primeiros passos relevantes nesse processo. Ainda:

O desconhecimento do percurso histórico da prova pode ser explicado por vários motivos. Garnica (1995) indica razões da existência de poucos trabalhos históricos sobre o desenvolvimento da prova: a forma natural com que os matemáticos encaram a prova, não problematizando a priori essa questão; um certo preconceito da noção de história, alimentado por matemáticos e por cientistas da natureza; as dificuldades inerentes às pesquisas históricas como essas, um trabalho “quase arqueológico”; “o argumento de que, no caso de rigor, não há uma história de mudanças, mas sim de adaptações que ditam as leis da lógica” (GARNICA, 1995 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 15). (PIETROPAOLO, 2005, p.51)

<sup>3</sup> No original, em inglês: ... a proof like a small "battle" between the reader and the writer. At the beginning of mathematics studies you will often be the reader, learning the proofs given by your lecturers or found in textbooks. You should then take the active attitude, which means working through the given proof with pen and paper. Reading proofs is not easy and may get boring if you just try to read it like a novel, comfortable on your sofa with the half-concentration level. Probably the most important part is to question everything, what the writer is telling you. Treat it as the argument between yourself and the author of the proof and ask them "why?" at each step of their reasoning.

Balacheff (1987) esclarece que, as expressões *explicação*, *prova*, *demonstração* e *raciocínio*, muitas vezes consideradas sinônimas pelos matemáticos, pode constituir obstáculo às pesquisas sobre essas questões. Então propõe, sob a ótica da didática que:

Chamamos de **explicação** um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo falante, de uma proposição ou de um resultado. Os argumentos apresentados podem ser discutidos, refutados ou aceitos.

Chamamos de **prova** uma explicação aceita por uma determinada comunidade em um determinado momento. Esta decisão pode ser objeto de debate, cujo significado é a exigência de se determinar um sistema de validação comum para os interlocutores.

Dentro da comunidade matemática podem ser aceitas como prova apenas explicações que adotem uma forma particular. Elas são uma série de enunciados organizados de acordo com regras determinadas: um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos essas provas de **demonstrações**.

Reservamos a palavra **raciocínio** para designar a atividade intelectual, muitas vezes não explícita, de manipulação de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. (Tradução nossa) (BALACHEFF, 1987, p.2) <sup>4</sup>

Arsac (1987-1988), que também se dedicou a compreender as origens históricas relativas às demonstrações, concorda que há escassez de fontes históricas sobre o assunto. O autor cita que o mais provável é que a história aponte os primeiros registros de métodos de demonstrações manifestados na Grécia, no século V antes de Cristo, mas que os documentos do período são praticamente inexistentes, e a história da matemática desse período é conhecida por nós, acima de tudo, por comentaristas gregos tardios e por raros fragmentos de textos originais que eles citam, e por textos contemporâneos ou apenas posteriores. Para sua análise, o autor utiliza-se das distinções cuidadosamente citadas anteriormente das palavras validação, prova e demonstração, de significados precisos que designam diferentes tipos de argumentação empregados pelo emissor a fim de convencer um interlocutor da verdade de uma afirmação. Considera que essa distinção é essencial para a busca de respostas à pergunta: "quando a demonstração apareceu na matemática?", pois caso contrário, esta questão não problemática é muito vaga e o historiador acredita muito facilmente ver demonstrações aparecerem na matemática pré-helênica (ARSAC, 1987-1988, p.2-3).

Assim, a história dificilmente fornece uma resposta à questão do "como" do aparecimento da demonstração, e ainda mais difícil à questão do "por quê". A importância do problema obriga a fazer um balanço, a travar um diálogo entre o historiador e o educador, no qual este não seja apenas um cliente <sup>5</sup>. Esperamos, de fato, mostrar a seguir que algumas das ferramentas desenvolvidas para a análise didática, podem trazer um novo ponto de vista sobre problemas históricos, esclarecer dúvidas e até sugerir certas respostas. (ARSAC, 1987-1988, p.2, tradução e grifos nossos) <sup>6</sup>

Tentando trazer luz à essas questões de "como" e "por quê" surgiram as demonstrações, Arsac (1987-1988) avalia dois autores em sua análise. Ele atribui à Szabo (1977 apud ARSAC, 1987-1988) uma visão externalista, no sentido de que a aparição da demonstração matemática é de influência externa da sociedade grega. Para Szabo, a escola eleática de Parmênides e Zenão originam uma transformação radical da matemática que simultaneamente esclarece os objetos dessa ciência, definindo-os axiomáticamente como idealidades, objetos de pensamento e as

<sup>4</sup> no original, em francês:

*Nous appelons **explication** un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.*

*Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.*

*Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves.*

*Nous réservons le mot **raisonnement** pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, partir de données, produire de nouvelles informations.* (grifos do autor)

<sup>5</sup> Aqui a palavra *cliente* surge no sentido de clientelismo, prática que visa a troca de bens, favores ou serviços por alguma natureza de apoio, independente se de forma explícita ou implícita.

<sup>6</sup> no original, em francês: *Ainsi l'histoire apporte difficilement une réponse à la question du comment de l'apparition de la démonstration, et encore plus difficilement à la question du pourquoi. Cependant, l'importance du problème oblige à faire le point, à engager un dialogue entre l'historien et le didacticien, dans lequel ce dernier ne soit pas seulement un client. Nous espérons en effet montrer dans ce qui suit que certains des outils développés pour l'analyse didactique, peuvent apporter un point de vue nouveau sur les problèmes historiques, préciser les questions, et même suggérer certaines réponses.*

regras de sua manipulação. Em particular, a prova que torna possível distinguir as afirmações verdadeiras. Trata-se, digamos, de uma tese essencialmente externalista sobre a origem da demonstração, no sentido de que busca essa origem não primeiro nas necessidades internas do desenvolvimento da matemática, mas nas influências externas (ARSAC, 1987-1988, p.4).

Em seguida, Arzac (1987-1988) atribui a Caveing (1979 apud ARSAC, 1987-1988) uma visão internalista para a aparição da demonstração matemática, no sentido de que o problema da incomensurabilidade, ao qual também atribui um papel crucial, está na origem da criação de idealidades matemáticas que teriam servido de modelo para os filósofos, principalmente Platão e Aristóteles ou seja, é a matemática que informa a filosofia sendo portanto um problema interno que estimula o desenvolvimento do processo das demonstrações matemáticas.

Segundo Eves (2011), a principal fonte de informações sobre os primeiros passos da matemática na história é o documento chamado de *Sumário Eudemiano*, do filósofo neoplantônico grego Proclo, do século V d.C.. Esse documento é dado como as páginas de abertura do *Comentário sobre Euclides, Livro I* de Proclo, e trata-se de um resumo do desenvolvimento da geometria grega desde os primeiros registros até os trabalhos de Euclides. Apesar de Proclo ter vivido muitos séculos depois do advento da matemática grega, ele teve acesso a inúmeros trabalhos que ficaram perdidos pelo tempo, com ressalva a alguns fragmentos preservados por ele e por outros filósofos. Dentre esses, um trabalho perdido de Eudemo, um dos discípulos de Aristóteles, tratava da história da geometria grega cobrindo um período anterior a 335 a.C., e é de Eudemo que deriva o nome do documento.

De acordo com Domingues (2015), o *Sumário Eudemiano* trata, entre outras, das contribuições de Pitágoras de Samos (C. 532 a .C.) e de sua escola à matemática. Segundo esse relato, essa escola teria sido a responsável pela criação da matemática pura, movida por razões intelectuais e na esteira do estudo de problemas abstratos. Em Eves (2011), a filosofia pitagórica tem como base a suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros (EVES, 2011, p.97), (DOMINGUES, 2015, p.4).

Segundo Domingues (2015):

Quanto a isso o mais razoável, em face do pouco que se conhece com certeza a respeito, é admitir que na maior parte da vida da escola seus membros limitaram-se a estabelecer resultados a partir de casos particulares, tanto na geometria como na aritmética. Todavia, na época dos últimos pitagóricos, isto é, por volta do ano 400 a.C, em função de outros desenvolvimentos, a irmandade pode efetivamente ter dado um grande salto à frente no que se refere à dedução matemática. Mesmo assim, porém, sem nenhuma base axiomática pré-estabelecida. Muito provavelmente, o máximo que fizeram em seus trabalhos foi encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria, que privilegiavam em função de suas doutrinas, como por exemplo o estudo dos polígonos e poliedros regulares. (DOMINGUES, 2015, p.97)

Devido a essa ausência de base axiomática, também à crença de que os números inteiros seriam capazes de explicar todos os fenômenos do universo e por ter vínculo forte aos estudos de problemas abstratos, podemos inferir que a Escola Pitagórica tinha um caráter internalista.

Porém, no século V a.C, o pitagórico Hipaso de Metaponto demonstrou a falsidade dessa crença, mas não há registro de qual foi o método utilizado. Aristóteles (séc. IV a.C.) diz que foi por redução ao absurdo e apresenta uma demonstração usando esse método, de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis, que pode ser a mesma encontrada por Hipaso. Trata-se essencialmente da que hoje em dia utilizamos para demonstrar que  $\sqrt{2}$  é irracional. A visão de Hipaso e Aristóteles apresentam um aspecto externalista.

Esses eventos são complementares e marcam a provável origem dos processos de demonstrações e o nascimento do método dedutivo. Nesse aspecto, Arzac (1987-1988) conclui que as origens dos processos de demonstração se dão tanto por questões internalistas quanto externalistas, pois com base nos dados históricos não é possível determinar que uma exclui a outra.

### 2.3.2 Evolução das Demonstrações Matemáticas

Segundo Eves (2011), os primeiros três séculos da matemática grega, desde Tales e sua busca por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.), culminando com os *Elementos de Euclides* (por volta de 300 a.C.), são uma época de grandes realizações.



Após o ano 480 a.C., quando Xerxes tentou invadir a Grécia e não obteve sucesso, Atenas viveu uma hegemonia e gozou de grande progresso democrático e intelectual por anos, o que atraiu matemáticos de todas as partes do mundo grego. Em seguida, em razão da Guerra do Peloponeso e de suas consequências para Atenas, houve pouco desenvolvimento na matemática grega. Após esse período, Atenas retomou sua liderança cultural. Segundo Eves (2011):

Podem-se notar três importantes e distintas linhas de desenvolvimento durante os primeiros 300 anos da matemática grega. Primeiro temos o desenvolvimento do material que acabou se organizando nos *Elementos*, iniciado habilmente pelos pitagóricos e acrescido depois por Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e outros. [...] Em segundo lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos e processos somatórios que só foram esclarecidos de vez com a invenção do cálculo nos tempos modernos. Os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Antífon e Eudoxo e a teoria atomística associada ao nome de Demócrito inserem-se nesta segunda linha de desenvolvimento. [...] A terceira linha de desenvolvimento é a da geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. (EVES, 2011, p.132-133)

A obra mais importante a ser considerada para o desenvolvimento das demonstrações matemáticas são os *Elementos*. Nesse trabalho, Euclides estabeleceu o modelo dedutivo, possivelmente inspirado em Aristóteles, onde não haviam conceitos primitivos e todos os objetos geométricos a se estudar teriam de ser definidos de forma explícita. Assim, as primeiras definições tinham que ser dadas em termos de conceitos abstratos. Por exemplo, Euclides definiu ponto como "aquilo que não tem partes". Segundo Domingues (2015), o objetivo de Euclides não era apenas apresentar formalmente os objetos iniciais de seu discurso, mas também garantir que eles correspondiam a uma realidade ligada à experiência e expectativa do leitor. Os postulados que se seguiam, por sua vez, tinham um caráter de auto-evidência. Por essas razões, as axiomáticas como a usada por Euclides nos *Elementos*, calcadas de alguma maneira na evidência e na experiência, vieram a ser conhecida como *axiomáticas materiais* (DOMINGUES, 2015, p.5).

Segundo Domingues (2015), os *Elementos* foram muito importantes para o desenvolvimento matemático grego e para a sociedade que seguiria nos próximos dois mil anos, mas ressalta que grandes trabalhos como *Aritmética*, de Diofanto, não seguiam a axiomática usada por Euclides. Tarski (2007) cita que até próximo do final do século XIX, as demonstrações matemáticas tinham um caráter grandemente material, e se tratava de uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição (TARSKI, 2007, p.224-225). Mas segundo Pietropaolo (2005), diante do desenvolvimento mais profundo de determinados assuntos – como o cálculo –, os raciocínios heurísticos e a intuição já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais, que fugiam da lógica. Em decorrência dessas questões, o modelo de demonstração que se tinha foi abandonado (PIETROPAOLO, 2005, p.54).

Segundo Tarski (2007), em algum momento surgiu a necessidade de submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, que acarretasse em uma restrição de recorrer-se a evidências intuitivas. Para o autor, a análise feita por lógicos, a começar por Gottlob Frege, levou à introdução de uma nova noção: a *demonstração formal*. Tarski (2007) esclarece que, em seu trabalho, *sentença* é um objeto linguístico com certas sequências de sons ou signos escritos, além de que serão tratadas apenas as sentenças ditas *afirmativas*, em distinção gramatical às sentenças interrogativas e imperativas.

Sobre *demonstração formal*, Tarski (2007) cita que:

Uma demonstração formal de uma sentença dada consiste em construir uma sequência finita de sentenças tal que (1) a primeira sentença na sequência é um axioma, (2) cada uma das sentenças seguinte ou é um axioma ou, então, é derivável diretamente de algumas sentenças que a precedem através de uma das regras de demonstração, e (3) a última sentença na sequência é aquela que deve ser demonstrada. [...] Uma teoria axiomática cuja linguagem tenha sido formalizada e para a qual tenha sido fornecida a noção de demonstração formal é chamada de teoria formalizada. (TARSKI, 2007, p.226)

De forma sintética, pressuposta a existência de alguns axiomas que caracterizem verdades numa teoria, Pietropaolo (2005) cita que as deduções seriam realizadas assim por simples regras de inferência e todas as proposições obtidas poderiam não constituir necessariamente verdades dessa teoria, mas sim consequências lógicas desses axiomas (PIETROPAOLO, 2005, p.55).

Ao fim do séc. XIX, a axiomatização de sistemas matemáticos expandiu-se com o alvorecer das geometrias não-euclidianas e das álgebras não convencionais. Esse processo permitiu a desvinculação do homem de sua inspiração no espaço físico, fazendo-o reexaminar o paradigma euclidiano, a exemplo do trabalho de G. Cantor (1845-1918) com a *teoria dos conjuntos*, bem como de D. Hilbert (1852-1943) em sua obra *Fundamentos da Geometria*, de 1899. Hilbert concebe que, aceitos três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), é possível definir as relações mútuas entre esses objetos única e exclusivamente por meio de axiomas, sem nenhuma intuição geométrica envolvida nem nessa etapa, nem nas demonstrações.

Essa inspiração levou Hilbert à liderar o chamado *formalismo*, um movimento filosófico que, segundo Domingues (2015), objetivava transformar a matemática na ciência das deduções formais, o que pressupunha, entre outras coisas, destituí-la de toda e qualquer conotação material, mas que foi desacreditado por K. Gödel (1906-1978).

### 2.3.3 O papel das demonstrações matemáticas

De modo convencional, o papel das demonstrações matemáticas tem sido quase essencialmente o de verificar se uma afirmação é verdadeira, se ela está correta dentro do seu contexto. Há uma grande crítica a esse ponto de vista por parte de De Villiers (1990), pois para o autor há pelo menos cinco diferentes funções para a demonstração no estudo de matemática. Propondo a questão: "qual é o papel da demonstração dentro do ensino de matemática que pode potencializar seu uso em sala de aula, tornando a demonstração uma atividade significativa?", De Villiers (1990) propõe em sua meta-análise como papéis fundamentais da demonstração:

1. **A verificação da veracidade de uma afirmação:** Mesmo que seja possível aumentar o grau de *confiança* de que um resultado está corretamente elaborado, através de várias tentativas empíricas de aplicação deste, levando à uma possível *convicção* de que o resultado é verdadeiro, a demonstração apresenta um papel importante, no sentido de trazer luz à lacuna deixada pelas tentativas empíricas. O autor nos coloca que, após várias verificações, o aluno desenvolve a convicção da veracidade da afirmação, sendo naturalmente conduzido à verificação pela demonstração, fechando um ciclo de tentativas que seria infinito;
2. **O esclarecimento de uma afirmação:** Mesmo testando exaustivamente uma afirmação matemática, não podemos agregar valor de verdade a ela, em razão de sempre haver a possibilidade de um contraexemplo específico ter sido deixado de fora das verificações. Em outras palavras, as verificações não explicam a veracidade de uma afirmação, apenas confirmam seu resultado. Nesse sentido, a demonstração traz *esclarecimento* sobre o resultado, colocando fim às dúvidas sobre possíveis situações deixadas de lado dentro dos testes feitos;
3. **Apresentar um caminho de sistematização:** Nenhuma quantidade de testes ou intuição será suficiente para expor as relações lógicas implícitas à uma afirmação. A demonstração é, portanto, uma ferramenta indispensável na sistematização de vários resultados conhecidos em um sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas. Uma sistematização dedutiva pode:
  - Ajudar a identificar inconsistências, argumentos circulares e alguma suposição implícita ou não descrita claramente;
  - Unificar e simplificar ideias, teoremas, conceitos matemáticos que, à priori, não estavam relacionados, tornando portanto a apresentação dos resultados de forma mais concisa;
  - Fornecer uma visão panorâmica de um tópico, por expôr a estrutura axiomática subjacente à um tópico, de onde outras propriedades podem derivar;
  - Ser útil para aplicações dentro e fora da matemática, uma vez que ajuda a verificar a aplicabilidade de toda uma estrutura ou teoria complexa simplesmente avaliando a adequação de seus axiomas e definições;
  - Pode levar à sistemas dedutivos alternativos que podem fornecer novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Embora alguns elementos de *verificação* também estejam obviamente presentes aqui, o objetivo principal claramente não é "verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras", mas organizar afirmações individuais logicamente não relacionadas, que já são conhecidas como verdadeiras, em "um todo coerente e unificado". Devido à perspectiva ampla fornecida por tal simplificação e unificação, é claro que há também um elemento distinto de *esclarecimento* presente quando a prova é usada como meio de sistematização;

4. **Apresentar um caminho de descoberta:** Muitas vezes é dito pelos críticos da quantidade de rigor dedutivo no nível escolar, que as demonstrações em geral não são um dispositivo heurístico particularmente útil na descoberta real de novos resultados matemáticos. Essas pessoas parecem ingenuamente acreditar que os teoremas são quase sempre descobertos pela primeira vez por meio da intuição e/ou métodos *quase empíricos*, antes de serem verificados pela produção de provas. Talvez esta percepção se deva também em parte à forma estereotipada como a demonstração é normalmente ensinada (primeiro o resultado é apresentado seguido pela demonstração). No entanto, essa visão é completamente falsa, visto que há numerosos exemplos na história da matemática em que novos resultados foram descobertos/inventados de maneira puramente dedutiva; na verdade, é completamente improvável que alguns resultados (por exemplo, as geometrias não euclidianas) pudessem ter sido encontrados apenas por intuição e/ou apenas usando métodos *quase-empíricos*. Mesmo dentro do contexto de processos dedutivos formais como axiomatização e definição a priori, a demonstração pode frequentemente levar a novos resultados;
5. **Representar uma forma de comunicação:** Um dos papéis reais das demonstrações é que elas criam espaços para o debate crítico. De acordo com essa visão, a prova é uma forma única de comunicar resultados entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, bem como entre os próprios alunos. A ênfase, portanto, recai sobre o processo social de relatar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade. A demonstração como forma de interação social, portanto, também envolve a negociação subjetiva não apenas dos significados dos conceitos em questão, mas também implicitamente dos critérios para um argumento aceitável. Por sua vez, essa filtragem social de uma demonstração em várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como, por vezes, para a sua rejeição pela descoberta de um contra-exemplo, e é precisamente essa influência reguladora do processo social que tem garantido até agora a prevenção de erros catastróficos reais que poderiam ter levado toda a comunidade matemática ao erro por um tempo indefinido. Ainda, este processo social é geralmente muito mais importante na aceitação de um resultado particular e sua prova por matemáticos praticantes do que a mera aplicação de certos critérios formais no julgamento da lógica rigorosa do argumento dado.

Para De Villiers (1990), a *convicção* não se ganha exclusivamente com a demonstração, bem como a única função da demonstração seja a de verificar ou dar *convicção*. Essa abordagem não apenas representaria desonestidade intelectual, mas também não faria sentido para os alunos, especialmente quando se tratam de declarações autoevidentes ou facilmente verificáveis. Em vez de focar unilateralmente apenas na demonstração como meio de verificação, a função mais fundamental da explicação deve ser explorada para apresentá-la como uma atividade significativa para os alunos. Ao mesmo tempo, deve-se dar atenção à sua função de descoberta, bem como aos seus aspectos comunicativos, negociando de fato com os alunos a crítica de evidências, explicações e/ou argumentos aceitáveis. Mas, em relação ao sentido de apresentar um caminho de sistematização, na rotina da maioria dos professores e alunos nos estudos de matemática a função puramente sistemática da demonstração vem à tona apenas em um estágio muito avançado desses estudos e, portanto, pode ser explorada no momento mais oportuno, com mais significatividade para a presença e a necessidade dessa sistematização.

## 2.4 Língua e Linguagem

### 2.4.1 Sobre a Linguagem

Segundo Chaui (2000, p.177-178), a linguagem é um sistema de signos ou sinais usados para indicar coisas, para a comunicação entre pessoas e para a expressão de ideias, valores e sentimentos. Para a autora, a linguagem é um sistema de sinais com função indicativa, comunicativa, expressiva e conotativa. Em pormenores:

- *Sistema* no sentido de que possui uma estrutura com princípios e leis próprias. Possui um conjunto de sinais (ou signos) que são um tipo especial de objetos formadores da totalidade linguística que servem para indicar ou designar outros objetos;
- *Indicativa* em razão de que a linguagem *indica* coisas, ou seja, os signos linguísticos (as palavras) possuem uma função indicativa ou denotativa, pois como que *apontam* para as coisas às quais elas dão significado;
- *Comunicativa* diz respeito ao papel das palavras, de por meio delas sermos capazes de nos relacionarmos com os outros e de expressarmos o que sentimos ou pensamos. Por exemplo: dialogamos, argumentamos, persuadimos, relatamos, discutimos, amamos e odiamos, ensinamos e aprendemos, etc.;
- *Expressiva* diz respeito ao papel das palavras, de por meio delas sermos capazes de expressarmos o que sentimos ou pensamos;
- *Conotativa* pois numa linguagem, uma mesma palavra pode exprimir sentidos ou significados diferentes, dependendo do sujeito que a emprega, do sujeito que a ouve e lê, das condições ou circunstâncias em que foi empregada ou do contexto em que é usada.

Para Chaui (2000), a linguagem, em sentido amplo, é constituída por quatro fatores fundamentais:

1. fatores físicos (anatômicos, neurológicos, sensoriais), que determinam para nós a possibilidade de falar, escutar, escrever e ler;
2. fatores socioculturais, que determinam a diferença entre as línguas e entre as línguas dos indivíduos. Assim, o português e o inglês correspondem a sociedades e culturas diferentes, bem como a linguagem de Machado de Assis e de Guimarães Rosa correspondem a momentos diferentes da cultura no Brasil;
3. fatores psicológicos (emocionais, afetivos, perceptivos, imaginativos, lembranças, inteligência) que criam em nós a necessidade e o desejo da informação e da comunicação, bem como criam nossa capacidade para a performance linguística, seja ela cotidiana, artística, científica ou filosófica;
4. fatores lingüísticos propriamente ditos, isto é, a estrutura e o funcionamento da linguagem que determinam nossa competência e nossa performance enquanto seres capazes de criar e compreender significações. (CHAUI, 2000, p.189)

Esses fatores nos dizem por que existe linguagem e como ela funciona, mas não nos dizem o que é a linguagem. A evolução e uma conceituação mais profunda do conceito de *linguagem* escapa aos objetivos desse trabalho. Nesse sentido, trataremos de *linguagem* como um sistema de sinais com função indicativa, comunicativa, expressiva e conotativa, tal como Chaui (2000), bem como iremos nos focar em um importante movimento no estudo das linguagens. A *Virada Linguística* foi um movimento na filosofia e nas ciências humanas que basicamente visava analisar as relações entre as palavras e as coisas, ou melhor, sobre o pensamento e a linguagem. Aqui trazemos a figura de Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951), nascido em Viena e naturalizado britânico, um filósofo e uma das figuras mais importantes na *Virada Linguística*.

Uma analogia interessante é dada por Gottschalk (2007) para ilustrar uma das principais questões desse movimento:

No pragmatismo americano, por exemplo, o conceito de *cadeira* só seria passível de ser aprendido depois que a criança tivesse experimentado e usado o objeto cadeira. Nesse sentido, o conhecimento não seria transmitido diretamente pela palavra. No máximo, esta levaria a compreender todos os outros móveis com fins idênticos que não estejam ao alcance do conhecimento direto pelo uso ou experiência. Assim, no melhor dos casos, a linguagem teria a função de *ampliadora* da experiência. A palavra apenas representaria, condensadamente, tudo aquilo que significam as experiências de cada um com relação a esse objeto. [...] Entretanto,

será que, de fato, é assim que atribuímos significados às nossas experiências? A linguagem teria apenas a função de resumi-las e no máximo de ampliá-las? (GOTTSCHALK, 2007, p.463-464)

Esse exemplo ilustra uma das reflexões sobre a linguagem que impulsionaram a *Virada Linguística*. Ludwig Wittgenstein, Israel Scheffler, Gilbert Ryle, Michael Oakshott dentre muitos outros foram impelidos, sob essa nova perspectiva da linguagem, a retomar as reflexões filosóficas sobre a educação.

Para Gottschalk (2007), Wittgenstein contribuiu para essa retomada de forma significativa, principalmente sugerindo que não *pensemos* sobre o fato de utilizarmos a nossa linguagem, mas que *olhemos* para esse uso. Segundo a autora, para Wittgenstein o significado de uma palavra está no uso que fazemos dela em um determinado contexto ou jogo de linguagem. Wittgenstein utiliza essa expressão para enfatizar que não há significados fixos e imutáveis que seriam apenas etiquetados por meio das palavras. Estas estão imersas em diferentes atividades e é apenas quando as aplicamos em um determinado contexto que adquirem significado (GOTTSCHALK, 2007, p.464).

Usando uma analogia simples, Gottschalk (2007) comenta que da mesma forma que uma peça de tabuleiro em um jogo de xadrez difere de uma mera peça de madeira em virtude de seu papel no jogo, as palavras só adquirem sentido ao serem empregadas dentro de um *jogo de linguagem*.

Ao aplicarmos uma palavra, estamos seguindo regras tácitas na linguagem, do mesmo modo que ao movermos uma peça qualquer do jogo de xadrez estamos agindo de acordo com as regras do xadrez. Não podemos mover a torre do mesmo modo que movemos o cavalo ou um peão. As regras que seguimos para mover a torre são diferentes das que seguimos ao mover o cavalo ou um peão. São essas regras que orientam o movimento dessas peças, ou melhor, ao jogarmos xadrez, movimentamos as peças guiados por suas regras. São elas que dão sentido aos movimentos que fazemos com as peças do jogo. Segundo Wittgenstein, ao empregarmos nossos conceitos, não somos determinados pela regra, como que a distância, e tampouco se trata de estados subjetivos ou generalizações empíricas que possibilitam a formulação dessas regras. Estas têm como função apenas orientar nossa atividade, como o fazem as placas de trânsito ou outros sinais que indicam direção. São as condições de sentido para as nossas ações empíricas. Agimos em uma instituição segundo o que se espera ou o que faz sentido no seu interior. (GOTTSCHALK, 2007, p.465)

Reforçando o conceito de *jogos de linguagem*, Gottschalk (2007) retoma a analogia da cadeira, onde o significado da palavra "cadeira" não será não dado por uma experiência que seja extraída do objeto empírico, mas será tomado pela regra ou conjunto de regras que se está seguindo para o emprego dessa palavra em determinado contexto. Quando usamos a palavra *cadeira*, seguimos algumas regras: existem, podem ser empurradas ou levantadas, tem quatro pernas (em geral), serve para sentar, tem estabilidade (não desestrutura nem desaparece ao sentarmos)... E são essas regras que dão sentido a qualquer experiência que se tenha com o objeto empírico *cadeira*, em distinção à ideia de que o conceito de cadeira é um produto final de todas as experiências individuais com o objeto cadeira. Como se essa palavra tivesse apenas a função de englobar todas essas sucessivas experiências que levariam ao verdadeiro significado dessa palavra ou, ainda, como se houvesse um significado comum a todas essas experiências expressas linguisticamente por essa palavra. De acordo com o autor, as regras que utilizamos dentro de uma linguagem não se confundem com as nossas experiências empíricas, pois essas regras decorrem de modo natural das nossas ações sobre a realidade e são essas mesmas regras que instituem os objetos sobre os quais falamos (GOTTSCHALK, 2007, p.465).

Para Wittgenstein, segundo (GOTTSCHALK, 2007), existe uma ideia de *semelhança de família* que permite que se utilize uma palavra de diversas formas, sem haver nada em comum com todas elas. No momento em que se utiliza a palavra *cadeira*, não se está pensando no contexto de toda o conjunto das cadeiras, mas que só farão sentido dentro de um determinado contexto. E são as diversas aplicações dessa palavra que vão permitir, a partir de um momento não previsível, que eu tenha o conceito de cadeira, a saber, que eu seja capaz de aplicar essa palavra a situações novas e até mesmo inusitadas (GOTTSCHALK, 2007, p.465).

## 2.4.2 Sobre a Língua

Segundo Barata (2017), apesar das variações linguísticas advindas de experiências sociais e historicamente construídas, a língua é o lado formal; enquanto que a gramática é componente constituinte da língua. Independentemente da língua, elas são constituídas por signos e funcionam sobre determinadas regras. Para Granger

(2013 apud BARATA, 2017), *língua* é um conjunto de componentes científico, ou seja, funciona como conceito regulador que determina um domínio de conhecimento. É um objeto da ciência que possui relações diretas com os sistemas formais, e conceitua o *sistema simbólico* como um conjunto de signos efetivamente dados e efetivamente construtíveis, sendo assim, esse conjunto pode ser construído por novos signos, ou pelo menos uma regra, por limitação que deixam sua realização parcialmente arbitrária.

Ainda nessa perspectiva, Granger caracteriza que a classe de sistemas simbólicos é

a) composto por regras, explícitas ou não, permitindo dissociar na matéria do signo os aspectos pertinentes, isto é, necessários para significar; b) conjunto de seus **significantes** pode ser transferido por decomposição a um léxico finito de **significantes** elementares; c) regras cuja natureza constitui o terceiro caráter distintivo dos **sistemas formais**. Elas devem poder relacionar-se a simples condições de concatenação dos elementos do léxico, condições cujo respeito determina as “expressões bem formadas” do sistema (GRANGER, 2013 apud BARATA, 2017, p.133, grifos do autor).

Barata (2017) compreende que nesse sentido a língua é formada por todo um prelúdio teórico, uma relação entre significantes e significados. Segundo Granger (2013, p.136 apud BARATA,2017) “As línguas são sistemas simbólicos, por excelência, em razão de sua complexidade estrutural e funcional, e não pelo caráter fundamental e elementar dos traços do simbolismo que elas ilustram”. Com isso, Barata (2017) conclui que todas as línguas são articulações de um sistema formal.

De modo geral, a *língua* está mais próxima do que consideramos como *linguagem natural*. A *linguagem natural* é aquela que falamos no dia-a-dia, aquela que aprendemos muito antes de irmos à escola, na qual nossas ideias tomam forma muito mesmo antes de serem oralizadas ou escritas. Para Machado (1991), a *linguagem natural* está diretamente associada à Língua Materna, e aprendê-la está associado à construção de um sistema de representação e mapeamento da realidade.

Para Gottschalk (2013), para Wittgenstein, toda ação linguística é articulada por regras, no entanto, isso não representa que somos *determinados* por elas. Utilizamos palavras e proposições linguísticas nos mais diversos sentidos, dependendo do uso e contexto em que ocorrem. Uma proposição, por exemplo, não se limita a um amontoado de palavras, pois está envolvida com atividades que são constitutivas da significação. Nesse sentido, Wittgenstein utiliza o termo *jogos de linguagem*, para dar ênfase à importância das atividades que operam como regras constitutivas do sentido de nossos enunciados (GOTTSCHALK, 2013, p.668).

No nosso paradoxo era: uma regra não poderia determinar um modo de agir, pois cada modo de agir deveria estar em conformidade com a regra. A resposta era: se cada modo de agir deve estar em conformidade com a regra, pode também contradizê-la. Disto resultaria não haver aqui nem conformidade nem contradições. (WITTGENSTEIN, 1999, p.93)

Para Barata (2017), Wittgenstein mostrava-se interessado em entender como alguém compreende e segue regras; como uma regra (ou ordem) poderia implicar sua aplicação, pois qualquer modo de agir poderia, de alguma forma, ser interpretado de acordo com a regra.

"Como pode uma regra ensinar-me o que fazer neste momento? Seja o que for que faça, deverá estar em conformidade com a regra por meio de uma interpretação qualquer." - Não, não deveria ser deste modo, mas sim deste: cada interpretação, juntamente com o interpretado, paira no ar; ela não pode servir de apoio a este. As interpretações não determinam sozinhas a significação. (WITTGENSTEIN, 1999, p.92)

Ainda, Barata (2017) cita que, segundo o filósofo, estamos inclinados a pensar que uma regra contém, em si mesma, todas suas possibilidades de aplicação, como se uma expressão linguística possuísse seu uso de forma intrínseca, independente da aplicação feita pelos seres humanos (BARATA, 2017, p.30). Acrescenta: Todo signo *sozinho* parece morto. O *que* lhe dá vida? - No uso, ele *vive*. Tem então a viva respiração em si? - Ou o *uso* é sua respiração? (WITTGENSTEIN, 2012 apud BARATA, 2017, p. 129, ênfases em itálico do autor)

Eis porque há uma tendência para afirmar: todo agir segundo a regra é uma interpretação. Mas deveríamos chamar de "interpretação" apenas a substituição de uma expressão da regra por uma outra. (WITTGENSTEIN, 1999, p.93)

As regras desempenham um papel fundamental no discurso de Wittgenstein. As regras servem para "constituir de sentido os nossos enunciados (GOTTSCHALK, 2013, p.668). Nesse sentido, Gottschalk (2013) utiliza uma analogia que apresenta um elefante a alguém que não o conhece. Basta levá-lo a um zoológico e mostrar um elefante, e a partir desse momento, o animal apontado torna-se um paradigma de "elefante", ou melhor, a ser uma "regra" do que é ser elefante. Regras desse tipo são carregadas por todos nós em nossos processos de internalização, e guiarão nossos processos e ações.

A grande questão que emerge nesse ponto é: como boa parte dessas regras assumimos reais e verdadeiras quando aquele que as emite tem credibilidade (seja um livro, professor, pessoa de confiança), ao aprendermos uma nova regra, há aprendizado ou apenas uma transmissão de conhecimento?

A esses respeito, Gottschalk (2013) cita que:

Neste sentido, o conhecimento que vai sendo "armazenado" pelo aluno não é homogêneo. Parte deste saber tem uma função descritiva, suas proposições dizem *como* as coisas são, enquanto que outra parte deste saber tem uma função *constitutiva* dos significados que atribuímos às nossas experiências em geral, dizem o *quê* as coisas são. E é este saber com função normativa, transmitido pelo professor ou através dos livros, que será a condição de crescimento do conhecimento no indivíduo. É nesta porção do conhecimento transmitida pelo professor que diversos elementos atuam como *regras* na constituição dos significados: palavras envolvidas com gestos, ações, objetos empíricos, sensações etc. Compreender algo, portanto, pressupõe o domínio destas regras, o que envolve um certo *treino*, pois estas regras são *aprendidas*, não são extraídas do empírico e tampouco são inatas. São de natureza convencional. Fazem parte de uma *forma de vida*.(GOTTSCHALK, 2013, p.672, grifos da autora)

Wittgenstein (1999) comenta:

"Mas então o emprego da palavra não está regulamentado; o 'jogo' que jogamos com ela não está regulamentado." Ele não está inteiramente limitado por regras; mas também não há nenhuma regra no tênis que prescreva até que altura é permitido lançar a bola nem com quanta força; mas o tênis é um jogo e também tem regras. (WITTGENSTEIN, 1999, p.63)

Para Gottschalk (2013), temos pontos de vistas, perspectivas públicas que nos orientam se estamos agindo de acordo com a regra, ou se a estamos transgredindo. Na passagem acima, Wittgenstein sugere que é o modo de agir comum que fornece o sistema de referência para a sua interpretação (GOTTSCHALK, 2013, p.673).

A partir do momento que "constituímos sentido" ao que estamos aprendendo, passamos a "entender", a "compreender". Ou seja, somos capazes de "seguir uma regra". Para Wittgenstein (1999), seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são hábitos (costumes, instituições). Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica (WITTGENSTEIN, 1999, p.92). Com isso, sermos capazes de "seguir uma regra" significa que nos consideramos aptos em uma técnica, a desenvolver uma atividade.

### 2.4.3 A Língua Materna e a Matemática

Traduzir de uma língua para outra é um exercício matemático, e a tradução de um poema lírico, por exemplo, para uma língua estrangeira, é análoga a um problema matemático. Porque se pode formular o problema "como se deve traduzir (isto é, substituir) esta piada (por exemplo) para uma piada na outra língua?" e este problema pode ser resolvido; mas não houve um método sistemático de o resolver (WITTGENSTEIN, 2009 apud SIVEIRA, 2014, § 698)

Todo o processo de compreensão de um texto matemático passa, inevitavelmente, por uma tradução para outra linguagem, certamente a da Língua Materna. Muitas vezes, professores tentam traduzir uma expressão matemática apenas de modo direto, imediato, palavra por palavra para a Língua Materna, e mesmo assim o aluno não consegue atingir uma compreensão mais madura, mais completa e complexa do significado daquela expressão.

Para Fiorentini e Moraes (2003), o leitor de um texto qualquer elabora uma representação de seu significado a partir de seus conhecimentos prévios, de suas experiências anteriores com textos, das características do texto em si e da compreensão e memória sobre os conhecimentos abordados nos textos. Esse modo de pensar supõe um papel ativo do sujeito na apreensão dos conhecimentos e, por coerência, o impacto da familiaridade com padrões

organizativos de textos sobre a elaboração e aperfeiçoamento de estratégias de processamento da informação e, conseqüentemente, sobre a compreensão e construção de conhecimento por meio deles, na representação do que neles se descreve e de seu significado, e de suas possíveis relações com o mundo e circunstância do sujeito que o lê: leitor/aprendiz (FIORENTINI; MORAES, 2003, p.21-22).

Para construir a representação do conhecimento ao ler um texto, segundo Fiorentini e Moraes (2003, p.21-22), o sujeito utiliza:

- Seus conhecimentos linguísticos sobre as letras e os vocábulos, alcançando seu significado léxico;
- Seu conhecimento sobre o mundo, que lhe permite reduzir a ambigüidade das orações e períodos e realizar inferências;
- Seu conhecimento prévio que tem sobre o tema, que lhe permite distinguir ideias principais das acessórias, além do conhecimento de como estão organizados os textos (com narrações, descrições, exposições, artigos científicos, textos didáticos etc.), ativando seus recursos cognitivos para processá-los e compreendê-los.

Para a autora, uma das formas de facilitar esse trabalho é intervir sobre o texto que se elabora para favorecer a aprendizagem, sem querer, entretanto, aplicar literalmente um modelo, porque cada professor-autor é único, as possibilidades são muitas, assim como complexo é o processo de decisão e elaboração (FIORENTINI; MORAES, 2003, p.22). Em outras palavras, o professor-autor, ao escrever um texto, está convidando o leitor/aprendiz a participar de um *jogo de linguagem*.

O processo de tradução de um texto matemático é, sem dúvidas, um *jogo de linguagem*. Para Siveira (2014), tradução como significação interlingüística deve respeitar as leis lógicas, mas deve também respeitar as diferenças culturais. A comunicação recobre uma diversidade subjetiva e a experiência de sensações já objetivada em um universo interpessoal/intersubjetivo da realidade, por outro lado, a linguagem natural é autorizada a trabalhar com um texto que é difícil atribuímos valor de verdade determinado. Para a autora, em situações de ensino e de aprendizagem, não basta uma mera tradução de palavras ou de símbolos da linguagem codificada para a linguagem natural, pois esta última é polissêmica e não garante a necessidade lógica da matemática (SIVEIRA, 2014, p.70).

Para Machado (1991), as chamadas *linguagens formais* foram concebidas sob a hipótese de que as línguas naturais (como a Língua Materna) tem imperfeições, pois permitem ambigüidades, além de que suas gramáticas são, muitas vezes, destituídas de lógica. Em virtude disso, muitos filósofos se debruçaram sobre a ideia de uma língua adequada ao "exercício da razão", uma "língua dos cálculos" (MACHADO, 1991, p.105), cuja gramática teria características plenamente lógicas, possibilitando uma expressão precisa, livre de atritos de qualquer natureza. Mas o autor concorda que, mesmo tendo sido, por um longo tempo, acreditado que essas linguagens formais satisfariam essas demandas, atualmente parece que isso é um grande mal-entendido. A principal razão disso é o fato de que tais linguagens não possuem uma oralidade própria.

Voltemo-nos, agora, mais diretamente, para as funções da Matemática. Aqui, de modo mais inequívoco ainda, não parece possível interpretar a aprendizagem como a de um código de transcrição, como a construção de um sistema de representação alternativo, a partir de um sistema conhecido *a priori*. Um tal sistema, que seria o correlato da língua falada na aprendizagem da escrita, simplesmente inexistente. A Matemática erige-se, desde os primórdios, como um sistema de representação original; aprendê-lo tem o significado de um mapeamento da realidade, como no caso da Língua. Muito mais do que a aprendizagem de técnicas para operar com símbolos, a Matemática relaciona-se de modo visceral com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolar, projetar. (MACHADO, 1991, p.96, grifos do autor)

Segundo Martinet (1975 apud MACHADO, 1991) a Língua é um instrumento de comunicação duplamente articulado. Para entender esse raciocínio, o autor elabora:

- A *primeira articulação* se dá entre os signos e a experiência comum a todos os membros de uma comunidade linguística. Por ela, as mensagens que se devem transmitir são organizadas e classificadas em unidades que possuem significado e forma vocal, chamadas de *monemas* (que podemos considerar, a *grosso modo*, como



as palavras nesse contexto. Os *monemas* não podem ser decompostos em partes menores que possuam significado, mas podem ser decompostas em partes menores com natureza fônica, os *fonemas*, partes essas em número reduzido.

- A *segunda articulação* é uma articulação interna, e diz respeito à capacidade dos membros de uma comunidade linguística combinarem e articularem os *fonemas* a fim de compor a forma vocal de uma grande quantidade e variedade de *monemas*, as unidades da primeira articulação.

É nesse sentido que Machado (1991) explicita que as linguagens formais não possuem uma oralidade própria, pois essas linguagens não possuem uma segunda articulação. Para ser enunciada de forma oral, uma linguagem formal depende diretamente da Língua Materna, que lhes "empresta" sua dimensão oral. Em outras palavras, se no ensino da Língua Materna a fala é o que dá suporte às significações dos signos escritos, servindo de intermediária entre o pensamento e a escrita, no caso da Matemática a falta de uma oralidade própria torna imprescindível uma comunhão com a Língua Materna, compartilhando sua oralidade, ficando impregnada a ela de forma essencial (MACHADO, 1991, p.107-108). Portanto, o aprendizado de Matemática não deve ser pensado restritamente como a aquisição de uma língua formal, pois a *segunda articulação* só é possível por meio da Língua Materna, fazendo da relação de impregnação entre as duas línguas uma necessidade.

Mas essa não é uma relação de *dependência* da Matemática à Língua Materna, é uma *dependência mútua*, como aponta Machado (1991):

De modo geral, a linguagem ordinária e a Matemática utilizam-se de tantos termos "anfíbios", ora com origem em uma, ora com origem em outra, que às vezes não percebemos a importância desta relação de troca, minimizando seu significado. [...] Quando, por exemplo, em meio a uma discussão surge a conclamação para que se chegue a um "denominador comum", está claro que as partes em disputa não são exatamente frações, mas a força retórica decorrente do fato de que, só reduzindo ao mesmo denominador é possível somar frações, é grande o suficiente para valorizar tal metáfora, tornando a expressão quase tão frequente no discurso político, quanto nas aulas sobre adição de frações. Por outro lado, no próprio caso da nomenclatura utilizada para os elementos constituintes de uma fração - numerador e denominador -, podemos perceber que é a Matemática que recorre à Língua Materna para uma expressão conveniente: a denominação de uma fração (quintos, sétimos, décimos etc.) é determinada pelo seu denominador, naturalmente, enquanto o numerador apenas fornece o número de partes iguais em que a unidade foi dividida (2 quintos, 5 sétimos, 3 décimos etc.). (MACHADO, 1991, p.98-99)

Essa é apenas uma amostra da relação de extrema reciprocidade entre a Matemática e a Língua Materna, poderíamos nos debruçar sobre "dar as *coordenadas*", "aparar as *arestas*", "sair pela *tangente*", "ver por um outro *ângulo*", "ter *retidão* de caráter", "o *xis* da questão", "meu *círculo* íntimo", "*esferas* de poder", "possibilidades *infinitas*", "perdas *incalculáveis*", "numa *fração* de segundo", "no *meio* do caminho" (MACHADO, 1991, p.97-98), mas o objetivo aqui é apenas exemplificar a complexidade e o caráter essencial dessa relação, ressaltando a importância da oralidade como suporte de significações para o aprendizado a escrita e a ausência de uma oralidade endógena nas linguagens formais (MACHADO, 1991, p.127).

[...] ao considerarem-se os papéis da Matemática e da Língua pudemos perceber [...], em ambos os sistemas estão presentes tantos aspectos qualitativos quanto aspectos quantitativos da realidade, tanto o sentido da análise quanto o da síntese, não passando de uma simplificação inaceitável a caracterização da Língua como o lugar da diversidade ou do qualitativo e a Matemática como o lugar da unidade ou do quantitativo. Em vez disso, é possível reconhecer em ambos os casos um processo de natureza cíclica, "um permanente ir-e-vir entre as duas colunas que suportam o mundo", a unidade e a variedade, conforme assinalou Hesse no texto em epígrafe <sup>7</sup>. Para a apreensão desse fecundo processo de ir-e-vir, é fundamental o reconhecimento de que, ainda que a Matemática pareça sempre orientar-se no sentido da unidade, tal unidade é sempre operada a partir de uma diversidade e caminha inevitavelmente no sentido de diversidades posteriores. No caso da Língua, a permanente aparência de análise não pode elidir o fato de que a realidade já se apresenta ao sujeito do conhecimento como o resultado de uma visão sintética, como um feixe de relações determinantes de seu significado, e que se as análises se processassem indefinidamente, não conduzindo, a cada passo, a novas

<sup>7</sup> A epígrafe do capítulo ao qual o autor faz referência é a que segue: *Gostaria de encontrar uma expressão para a dualidade. Gostaria de escrever parágrafos e capítulos inteiros, onde aparecessem simultaneamente acorde e desacordes, onde à variedade se unisse à unidade, e à seriedade o humor. Pois exatamente aí é que para mim reside a vida: no flutuar entre dois pólos, no ir-e-vir por entre as duas colunas que suportam o mundo. Gostaria de sempre apontar a imensa variedade do mundo e de lembrar que esta variedade repousa sobre a unidade.* (HERMANN HESSE, *Para ler e guardar*, Rio de Janeiro, Record, 1975, p.111 apud MACHADO, 1991)

sínteses, em bem poucos passos atingir-se-ia uma dispersão tal que a própria possibilidade do conhecimento deixaria de existir. (MACHADO, 1991, p.128)

Nesse sentido, Machado (1991) nos deixa algumas recomendações para as situações de ensino em Matemática. São elas:

- é fundamental a mediação da oralidade, emprestada da Língua Materna e que funciona como um degrau natural na aprendizagem da escrita;
- é importante que os objetos matemáticos, como as palavras que utilizamos ordinariamente, sejam aprendidos prenes de significações e não como meras formas vazias, destinadas a interpretações posteriores;
- é necessária uma articulação mais consistente entre os papéis da análise e da síntese na construção do conhecimento matemático, de modo a harmonizar-se uma visão global, sintética, em cada tema com uma postura analítica, capaz de esmiuçar, enriquecer, aprofundar;
- é essencial o reconhecimento da importância dos resultados aproximados, das estimativas, das questões em aberto ou impossíveis de responder no seio de problemas caracteristicamente matemáticos;
- é imprescindível a aceitação do fato de que não se deve fugir das abstrações, hipertrofiando a importância do concreto, bem como de que lidar com abstrações não é característica exclusiva da Matemática, estando presente de modo igualmente marcante na constituição da Língua Materna.

### 3 Atividade Proposta: O Conjunto de Cantor

Dentro da nossa trajetória acadêmica, sempre tivemos uma grande vontade de estudar sozinhos. Muitas vezes, pelas mais diversas razões como trabalho, stress, dificuldades de locomoção ou até mesmo questões de saúde, era difícil e algumas vezes impossível ir para uma aula presencial. Então, era necessário recuperar o conteúdo referente àquela aula, dessa vez sozinhos. Sempre apelávamos para notas de aula e comentários de colegas e, por muitas vezes, para um livro didático, a fim de se atualizar no conteúdo perdido e, quem sabe, até mesmo para se adiantar um pouco, dependendo do quão interessante o assunto fosse.

Mas, por muitas vezes, acabamos nos deparando com dificuldades em compreender o material didático. Em Matemática, muitos livros didáticos possuem uma escrita que pode gerar confusão, ser de difícil interpretação ou até mesmo deixar lacunas para o estudante preencher. Um dos mais notórios exemplos são demonstrações de propriedades ou teoremas em que o autor apenas cita que "é óbvio", que "é evidente" o resultado, ou ainda que "deixamos a demonstração à cargo do leitor". Esses exemplos não só podem atrapalhar o estudante que está se sentindo desorientado nos estudos, como também funcionar de maneira oposta no seguinte sentido: esses exemplos visam dar mais liberdade ao estudante, deixando algumas etapas para que ele próprio as desenvolva, a fim de estimulá-lo a treinar suas habilidades de demonstração, tanto na parte escrita quanto na parte sistemática, mas acabam por desestimular o estudante que não está conseguindo compreender minimamente àquele conteúdo e, conseqüentemente, acaba por não conseguir preencher essa lacuna deixada pelo autor no texto.

Esse tipo de situação sempre nos gerou grande desconforto, e essa insatisfação funcionou como gatilho para estimular a origem dessa pesquisa. Para estruturarmos esse trabalho, precisávamos definir primeiramente qual seria o objeto dessa pesquisa, e foi nesse ponto que decidimos que a premissa básica da nossa pesquisa seria buscar e analisar quais detalhes que, dentro de uma demonstração matemática, pudessem ajudar ao leitor ter uma compreensão mais clara e profunda de um resultado a ser mostrado, tentando aumentar as chances de que, além de compreendê-lo, o leitor pudesse se apropriar desses resultados e conseguisse refletir sobre os mesmos, sendo capaz de responder com mais segurança se o compreendeu ou não.

Decidido o nosso objeto, precisávamos encontrar um público alvo para a nossa pesquisa. Em virtude da situação de pandemia em que nos encontrávamos, ficamos à procura de um grupo que pudesse participar da pesquisa, a fim de coletar dados para dar corpo à nossa proposta. Como a orientadora desse trabalho ministrava a disciplina de Análise Real do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, convidamos os alunos dessa disciplina a participarem da nossa pesquisa. Essa situação era ideal em razão de que, por conta da pandemia em que nos encontrávamos, os alunos estavam estudando de forma virtual, através de uma plataforma de ensino da instituição, e isso facilitaria o envio de material de forma *online*.

Nessa plataforma, os alunos não tinham aulas síncronas, apenas era enviados materiais contendo os conteúdos, que poderiam ser materiais escritos, videoaulas, dentre outros. Também eram enviadas listas de exercícios, às quais eles precisavam apresentar um retorno visando concluir aquela etapa. Mesmo não havendo aulas síncronas, os professores disponibilizavam horários para encontros *online* em que apenas eram discutidas as dúvidas referentes ao material enviado naquela etapa. Assim, como os alunos precisavam estudar sozinhos, apenas com o aporte de um material mais limitado que era enviado periodicamente, vimos que essa seria uma oportunidade ímpar de testarmos um material escrito oferecendo um tratamento diferenciado, objetivando mostrar algumas demonstrações matemáticas com uma quantidade maior de detalhamento e, em seguida, analisar o impacto desse material sobre a compreensão dos participantes.

Alinhavamos qual seria o melhor momento para introduzir uma atividade e um questionário que servissem de base para a nossa proposta e, levando em consideração o tempo necessário para elaboração, aplicação, coleta e análise dos dados obtidos, decidimos que o melhor momento seria em outubro de 2020. Com base no calendário já estabelecido da disciplina de Análise Real, adotamos o conteúdo específico para as semanas 9 e 10 do curso de Análise: Topologia na Reta. Dentre os temas principais a serem estudados pelos alunos àquelas semanas estavam: Conjuntos abertos; Conjuntos fechados; Pontos de acumulação; Conjuntos Compactos e, por fim, o

Conjuntos de Cantor.

Mesmo que a construção do Conjunto de Cantor seja feita de maneira intuitiva, por muitas vezes pode ser de difícil compreensão. As propriedades e as demonstrações envolvidas com esse conjunto são consequências de todos os outros temas estudados nessa etapa, mas essas demonstrações não são nada triviais. Normalmente, as bibliografias sobre o assunto, no que tangem a esse conjunto, o trazem de forma bastante resumida ou com sua escrita apresentada de forma muito direta, omitindo etapas e demonstrações consideradas "triviais" pelos autores. Nesse sentido, esse tema se apresentava de forma bem alinhada à proposta do nosso trabalho, e por isso pensamos e elaboramos a nossa atividade sobre o tema do Conjunto de Cantor.

Previamente à aplicação da atividade, trabalhamos em conjunto para elaborar o material usado na aula que precederia a aplicação da atividade, a fim de descrever todos as proposições, teoremas e demais resultados que fossem importantes saber previamente à atividade. Esse material de aula que elaboramos encontra-se no *Apêndice A* desse trabalho. Então, enviamos o material para os alunos estudarem naquela semana.

No encontro seguinte, enviamos a atividade para a apreciação dos participantes. Esta se encontra como o *Apêndice B* desse trabalho. Uma semana depois enviamos um questionário para que os participantes pudessem dar suas opiniões sobre a atividade. O questionário pode ser consultado no *Apêndice C* desse trabalho. Por fim, prosseguimos com a análise dos resultados obtidos nas respostas ao questionário, que podem ser vistas, na íntegra, no *Apêndice D* desse trabalho. Os detalhes específicos de cada ponto da nossa pesquisa serão discutidos nas seções que seguem.

### 3.1 Aspectos metodológicos da Pesquisa

A fim de esclarecer a metodologia utilizada, para Dmitruk (2004), uma *pesquisa descritiva* estuda fatos e fenômenos físicos e humanos sem que o pesquisador interfira, usando técnicas de observação, registro, análise, e correlação de fatos sem manipulá-los. Dentre suas subdivisões, estão os estudos exploratórios, estudos descritivos, estudo de caso, pesquisa de opinião e a pesquisa documental.

Segundo Lakatos e Marconi (2003), *pesquisas exploratórias* são investigações de pesquisa empírica cujo objetivo é a formulação de questões ou de um problema, com tripla finalidade: desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno, para a realização de uma pesquisa futura mais precisa ou modificar e clarificar conceitos (LAKATOS; MARCONI, 2003, p.188).

Para Kripka, Scheller e Bonotto (2015), citando Bogdan e Bilen (1994), os estudos qualitativos se caracterizam como aqueles que buscam compreender um fenômeno em seu ambiente natural, onde esses ocorrem e do qual faz parte. Para tanto o investigador é o instrumento principal por captar as informações, interessando-se mais pelo processo do que pelo produto (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015, p.1).

Tomamos a decisão de adotar uma atividade exploratória de abordagem tanto quantitativa quanto qualitativa, que contou com a coleta de um questionário ao final da atividade, e uma análise posterior dos dados coletados.

### 3.2 Objetivos da Pesquisa

O objetivo geral da atividade proposta é pensar sobre critérios importantes para a elaboração de material didático, na forma escrita, voltado para o estudo individualizado. Para isso, utilizamos um material previamente elaborado com a discussão do objeto estudado e as estratégias envolvidas na estruturação do mesmo.

Dentre os objetivos específicos, listamos:

- Estabelecer alguns critérios relevantes na análise de objetos matemáticos através de um material escrito, para uso em modalidades de estudo à distância;
- Entender o impacto das informações, em forma de rascunho, dos pensamentos e processos envolvidos na construção e no embasamento de objetos matemáticos, na elaboração de materiais didáticos para uso em modalidades de estudo à distância;

- Determinar a relevância dos aspectos visuais na elaboração de materiais didáticos para uso em modalidades de estudo à distância;
- Analisar a importância do uso de linguagem menos formal dentro dos rascunhos na estruturação de uma demonstração matemática.

A atividade teve a duração de uma semana para estudo do material e mais 5 dias para responder ao questionário. Ao final da atividade, era esperado que o estudante fosse capaz de compreender a construção do Conjunto de Cantor e os resultados que envolvem esse conjunto, utilizando apenas o material didático fornecido nessa atividade.

### 3.3 Etapas da Atividade

A atividade foi estruturada nas seguintes etapas:

- **Etapa 1:** Apresentar um material adaptado, apresentando o Conjunto de Cantor e suas propriedades, com uma descrição detalhada sobre a sua construção e as demonstrações de todas as suas propriedades. A cada demonstração será apresentado um rascunho onde são detalhadas todas as etapas do processo de sua elaboração, para que o leitor consiga compreender com mais clareza os detalhes importantes que conectam essas etapas do pensamento envolvido, desde as premissas até o resultado da demonstração;
- **Etapa 2:** Entregar aos alunos um questionário que busca mapear o impacto da atividade, em relação à sua organização, aspectos visuais e sobre o sistema de rascunhos;
- **Etapa 3:** Analisar o questionário e apurar dos aspectos qualitativos e quantitativos sobre os dados obtidos.

### 3.4 Material da Atividade

O material usado como principal referência sobre o Conjunto de Cantor foi o livro *Análise Real, Volume 1: Funções de Uma Variável*, de Elon Lages Lima, 8ª edição, 2006. Essa escolha foi feita em razão desse ser um dos principais livros de referência em Análise Real, frequentemente presente nas bibliografias da área.

É importante ressaltar que o material adaptado apresenta essencialmente o mostrado em sua versão original, mas utiliza uma estratégia diferente. Durante a elaboração, a construção e análise do Conjunto de Cantor se apresenta em várias etapas, divididas e organizadas como subseções, com um tratamento visual diferenciado, ressaltando em quadros destacados os resultados mais importantes, bem como incluindo imagens que ilustram, geometricamente, algumas ideias importantes no processo.

Essas remodelações visam trazer à tona uma linha de raciocínio mais clara entre as ideias apresentadas nas premissas e algumas ideias importantes sobre o objeto em análise que não se apresentam no texto original, mas que provavelmente o autor as utilizou. Também, para a demonstração dos resultados nesse trabalho, foram escolhidos caminhos mais relacionados aos tópicos do capítulo onde o assunto é discutido do que os abordados no texto original.

Durante o processo de elaboração do material adaptado, dentro de algumas etapas são apresentados seus rascunhos e uma versão final para as demonstrações. Essa estrutura objetiva mostrar ao aluno como resumir um raciocínio deveras longo de forma sucinta e direta, ajudando na escrita do produto final a ser apresentado como solução.

Esse detalhamento exposto no rascunho pode ser de grande importância para o estudante por esclarecer os passos a serem tomados, os raciocínios envolvidos e as relações de causa-efeito entre o que se tem de informação e o que ela nos permite afirmar dentro do que já foi analisado. Dessa forma, a escrita da demonstração fica com uma compreensão mais clara, pois no processo o leitor tem acesso a todos os passos necessários para a demonstração e conseqüentemente poderá reproduzir esse modo de pensar em outro momento, quando oportuno.

O sistema de rascunhos proposto nesse trabalho vinha ao encontro da ideia de constituir um *jogo de linguagem*, na perspectiva de Wittgenstein (1999), entre o leitor e o material. Numa busca por trazer luz aos significados

intrínsecos nas complexas linhas dos textos de uma linguagem formal, foi buscada um "empréstimo" da dimensão oral da nossa Língua Materna em todo o contexto do *rascunho*, como em um processo de *tradução*. Posteriormente, buscamos uma *retradução*, um retorno à linguagem matemática, de forma a escolher os signos e expressões linguísticas mais importantes que resumissem o complexo, longo e amplo raciocínio do *rascunho* em algumas poucas linhas em linguagem formal.

A ideia de mostrar todos esses detalhes pode parecer demasiadamente grande ou supérflua, mas para o aluno que estuda sozinho pode ser um grande diferencial. Principalmente em relação à interação que este teria dentro da sala de aula, onde poderia anotar algumas partes importantes das observações orais dadas pelo professor que o ajudariam a compreender todo o processo de modo mais claro, que fatalmente não são possíveis quando se estuda sozinho. Inspirado nas ideias de metodologias ativas e ensino híbrido, consideramos que esse material pode (e deve) ser disponibilizado de maneira digital, reduzindo radicalmente os possíveis custos com impressão e distribuição, tornando-o mais acessível para o aluno que estuda em alguma das mais variadas modalidades educativas voltadas ao ensino à distância.

Foi também elaborado um apêndice com toda a fundamentação matemática que inclui todos os conhecimentos prévios importantes para a construção proposta, com o objetivo de oferecer um material complementar para que o aluno possa consultar e/ou revisar resultados importantes sempre que sentir necessidade. O material completo dessa atividade estará nos apêndices do trabalho.

### 3.5 Questionário

De modo geral, a pergunta central que norteia a elaboração do questionário é a seguinte: *Como elaborar um material escrito que seja adequado para que, um estudante de matemática, que estuda individualmente apenas pelo seu material didático, possa compreender a maior parte das demonstrações envolvidas?* Para conseguirmos esclarecer essa questão, preparamos um questionário com treze questões que, após analisadas em seu conjunto, poderão fornecer informações importantes à respeito da nossa pergunta central.

O questionário foi montado com dez questões objetivas, escritas no formato de afirmações, a serem respondidas pelos participantes atribuindo um valor de 1 a 5, onde 1 significa "Discordo Totalmente", 3 significa "Neutro" e 5 significa "Concordo Totalmente". Em seguida, foram adicionadas três perguntas adicionais a serem respondidas de modo subjetivo.

As afirmações a serem analisadas são:

1. O material está apresentado de forma que a leitura se tornou mais interessante, mais clara;
2. O material ajudou em uma melhor compreensão sobre os conteúdos abordados;
3. Os **elementos visuais** estavam agradáveis e ajudaram a tornar a leitura mais interessante;
4. As **figuras** estavam adequadas e foi possível conectá-las com a parte do texto às quais essas figuras se referiam;
5. As **figuras** ajudaram a compreender melhor os textos e demonstrações às quais elas se referiam
6. A fonte escolhida é agradável aos olhos e ajudou a tornar a leitura mais interessante;
7. O espaçamento entre os parágrafos (bem como entre as tabelas, figuras, imagens, fórmulas...) é adequado e ajudou a tornar a leitura mais interessante;
8. As cores utilizadas na edição do texto são adequadas e ajudaram a tornar a leitura mais interessante;
9. O **sistema de rascunhos** ajudou a tornar mais clara a compreensão dos passos envolvidos nas demonstrações;
10. O **sistema de rascunhos** ajudou a entender o texto da demonstração final com mais clareza.

Adicionalmente, há um espaço para que o indivíduo possa deixar algum comentário que considere pertinente em cada uma das questões, para que ele possa expressar alguma ideia, complementar ou esclarecer a sua escolha. As questões subjetivas são:

1. Quando você estuda apenas com o apoio de um livro didático, o que você mais sente falta? Ou quais são suas maiores dificuldades?
2. De modo geral, você considera que é possível estudar apenas com a utilização de material escrito? Se não, quais outros materiais você considera importantes nos seus estudos?
3. Qual sua opinião sobre esse sistema proposto que mostra os rascunhos antes de apresentar a demonstração final? Ele ajudou a melhorar a sua compreensão do resultado final? Gostaria de sugerir algum ajuste ou alteração?

Essas questões visam complementar os resultados a serem obtidos com as perguntas objetivas, trazendo mais luz aos aspectos importantes em relação ao estudo com a utilização de material escrito.

Para fins de clareza e referência aos termos utilizados nas questões, optamos por informar ao participante na apresentação do questionário que o material foi elaborado com o intuito de apresentar uma explicação mais aprofundada de algumas demonstrações matemáticas usando um **sistema de rascunhos**, e justificar que esses rascunhos objetivam pormenorizar os detalhes envolvidos nas demonstrações, a fim de deixar claro para o estudante todos os passos utilizados nas demonstrações. Informamos também que tabelas, quadros, espaçamento do texto, fonte, cores e figuras foram pensados e inseridos visando ilustrar algumas etapas e tornar a leitura mais fluida e agradável.

O questionário foi disponibilizado pela internet através da plataforma de *Formulários Google* e pode ser acessado através do seguinte link: [Material didático p/ o Ens. Superior c/ a metodologia da Sala de Aula Invertida.](#)

## 4 Resultados Obtidos

A atividade foi aplicada na turma da disciplina de Análise Real, do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Essa disciplina foi oferecida na modalidade de ensino remoto, de acordo com o plano de contingência da FURG para a pandemia, através da plataforma de ensino à distância AVA FURG. A turma tinha um total de onze alunos matriculados, sendo que desse total há um grupo de oito alunos que estão participando das atividades remotas, destes sete responderam ao questionário.

Vamos retomar as dez afirmações iniciais, onde os participantes escolheriam em uma escala com cinco itens, indo de "Discordo totalmente" à "Concordo Totalmente":

1. O material está apresentado de forma que a leitura se tornou mais interessante, mais clara;
2. O material ajudou em uma melhor compreensão sobre os conteúdos abordados;
3. Os **elementos visuais** estavam agradáveis e ajudaram a tornar a leitura mais interessante;
4. As **figuras** estavam adequadas e foi possível conectá-las com a parte do texto às quais essas figuras se referiam;
5. As **figuras** ajudaram a compreender melhor os textos e demonstrações às quais elas se referiam
6. A fonte escolhida é agradável aos olhos e ajudou a tornar a leitura mais interessante;
7. O espaçamento entre os parágrafos (bem como entre as tabelas, figuras, imagens, fórmulas...) é adequado e ajudou a tornar a leitura mais interessante;
8. As cores utilizadas na edição do texto são adequadas e ajudaram a tornar a leitura mais interessante;
9. O **sistema de rascunhos** ajudou a tornar mais clara a compreensão dos passos envolvidos nas demonstrações;
10. O **sistema de rascunhos** ajudou a entender o texto da demonstração final com mais clareza.

Apresentamos a seguir uma tabela com o resumo das respostas obtidas para as questões objetivas.

Tabela 1 – Respostas às Questões Objetivas

Questões	Opinião dos participantes				
	Discordam		Neutro	Concordam	
	Totalmente	Parcialmente		Parcialmente	Totalmente
Questão 01	-	-	-	42,9%	57,1%
Questão 02	-	-	-	57,1%	42,9%
Questão 03	-	-	-	-	100%
Questão 04	-	-	-	28,6%	71,4%
Questão 05	-	-	-	14,3%	85,7%
Questão 06	-	-	-	57,1%	42,9%
Questão 07	-	-	-	14,3%	85,7%
Questão 08	-	-	14,3%	28,6%	57,1%
Questão 09	-	-	-	14,3%	85,7%
Questão 10	-	-	-	14,3%	85,7%

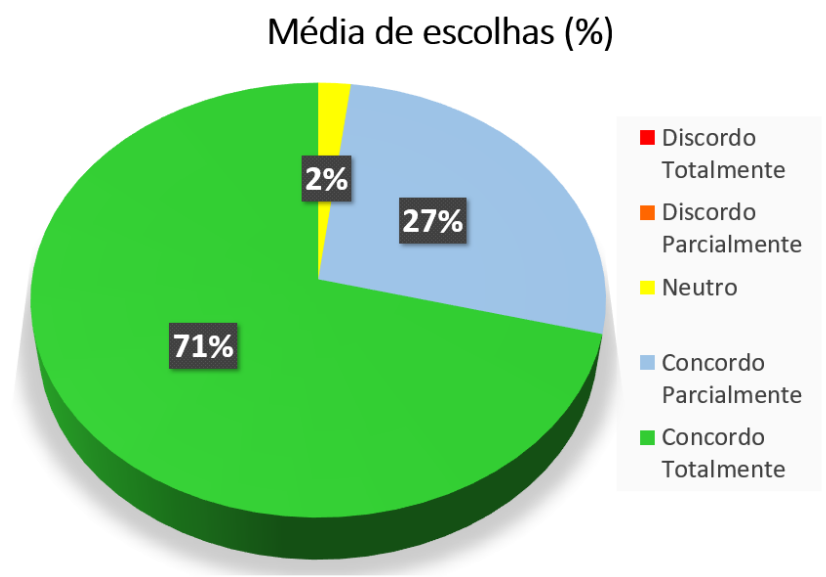
Fonte: o autor

Podemos observar que a maioria dos participantes concorda com as afirmações, e apenas na questão que dizia respeito à cor do texto há uma incidência de 14,3% em respostas do tipo neutra. Isso indica que talvez alguns participantes não se importem com esse aspecto ou não se sintam à vontade para estabelecer uma crítica



maior nem propôr soluções às cores do material. No quadro geral, os dados indicam fortemente que o material foi bem aceito, atendeu ao esperado, que houve compreensão e que a qualidade geral do material estava boa. A questão 3, que discorria sobre os elementos visuais, foi a única em que houve unanimidade de total concordância.

Figura 9 – Padrão de escolhas nas Respostas às Questões Objetivas



Fonte: o autor

Em relação às escolhas, de forma geral a maioria dos participantes tendeu à concordância, conforme evidenciado na Figura 9. Esse resultado mostra um alto nível de aceitação do material.

As questões podem ser classificadas em três grandes categorias:

- leitura e compreensão;
- edição e elementos visuais;
- sistema de rascunho.

Sobre a leitura e a compreensão, um participante comentou que: "o material estava claro para o entendimento e muito bem detalhado, proporcionando assim que o discente tenha autonomia de compreender os conteúdos ali inseridos sem muitas dúvidas", enquanto outro participante comenta que: "mesmo sem nunca ter ouvido falar desse conteúdo, consegui ter uma noção de como compreender o conteúdo devido ao material elaborado".

Em relação aos elementos visuais, seguem alguns comentários:

*Claro, todos os elementos visuais do material encontravam-se em harmonia com o texto o que proporcionou uma leitura maravilhosa e atenta do materia. [sic]*

*Sim! As figuras foram cruciais para visualizar o que o texto da demonstração dizia (claro que apenas o texto já supria isso, mas com a figura torna-se mais interessante por ser algo visual que acaba fazendo conexões cognitivas entre o conteúdo aprendido e nosso cérebro).*

*Como o material estava em pdf eu podia dar zoom no computador, então estava bom, mas caso fosse impresso eu preferiria com a fonte um pouco maior para não cansar durante a leitura.*

Esse último comentário ressalta a importância da disponibilização de material em meio digital, pois proporciona maior flexibilidade para o leitor utilizar mecanismos de acessibilidade (como a ferramenta de *zoom*, citada no comentário); além disso, esse comentário apresenta uma das poucas críticas ao material, em relação ao tamanho da fonte.

Sobre o sistema de rascunhos, um participante comentou que "entender o raciocínio de quem está elaborando o texto é muito interessante", enquanto outro comentou que "o rascunho trabalha nossa mente pra receber a demonstração". Nesse sentido, tornam-se presentes os pensamentos de Machado (1991), onde a função de mediação da oralidade emprestada da Língua Materna aparece, bem como os de Wittgenstein (1999) no sentido de que foi possível atender às expectativas iniciais de constituir sentido ao que estava sendo descrito.

Dentre os poucos comentários que aparentam não concordar com a qualidade do material (apesar da resposta objetiva ser de concordância) houve o que segue:

*no meu ponto de vista poderia ter um espaçamento maior entre linhas, como eu já [sic] tenho um pouco de dificuldade em ler achei que eu demorava muito em uma página [sic].*

Aqui fica evidenciado que, em se tratando de leitura, é importante destacar que o autor pode não saber quais os graus de dificuldade (físicas ou de concentração) que o leitor poderá ter, então deve sempre levar esses aspectos em consideração. É importante admitir e pensar, ao criar materiais escritos, que estes possam ser adaptados às mais diversas limitações (visuais e/ou auditivas, por exemplo), bem como a escrita deve ser elaborada de maneira fluida e que se comunique bem com o leitor, para envolvê-lo e manter o interesse durante o processo. Também, é importante manter algum grau de independência entre as partes do texto, para tornar possível que o leitor possa parar e retomar a leitura em outro momento sem maiores prejuízos à compreensão.

Em relação às perguntas subjetivas, vamos analisar cada pergunta individualmente.

A primeira pergunta foi: *Quando você estuda apenas com o apoio de um livro didático, o que você mais sente falta? Ou quais são suas maiores dificuldades?*

Algumas respostas:

*Gosto mesmo de explicação pelo professor ao vivo, pois a leitura não é meu forte, ainda mais se tenho dificuldade no conteúdo;*

*Minha única queixa sobre os livros didáticos é a escassez/carência de exemplos que possam auxiliar os alunos na compreensão de definições ou até mesmo de resultados;*

*Alguns livros não possuem exemplos claros ou algumas vezes possuem exemplos claros mas fáceis, que não auxiliam muitas vezes quando você possui questões mais elaboradas para resolver;*

*Quando eu estudo apenas pelo livro didático eu sinto dificuldade de entender as demonstrações, pois não mostra de onde veio;*

*Quando o autor diz que a demonstração é imediata ou óbvia;*

*Quando sai de um passo e pula para outro sem ligação com o anterior;*

*Atrapalha quando resolvem pulando passos deixando confuso para quem tenta compreender a lógica do conteúdo.*

Esses comentários trazem à tona uma prática muito comum em materiais didáticos de matemática: pular etapas em uma demonstração. Muitas vezes o autor considera que a demonstração é deveras simples e opta por omitir alguns passos, senão a demonstração inteira. Isso atrapalha o processo de compreensão do estudante que está sozinho com o seu material, sem a influência de um tutor ou professor pois, por mais importante que seja considerar que o leitor já detenha alguns conhecimentos prévios sobre o assunto, é ainda mais importante deixar todas as etapas com o maior grau de clareza possível. Isso é relevante pois, após a apresentação da versão formal e final da demonstração, o aluno pode ter se perdido no meio do caminho, tanto na leitura como no entendimento, em razão da escrita matemática ser, por muitas vezes, revestida de excessiva formalidade.

Nesse sentido, o sistema de rascunhos proposto cumpre esse papel enquanto jogo de linguagem, como um mecanismo facilitador na tradução e estruturação do conhecimento sob o aporte da Língua Materna. Ao contornar barreiras, com o fim de deixar o leitor seguro de como se procede a demonstração, nesse modelo proposto o autor apresenta o texto final, resumido e formalizado de sua demonstração, mas pode deixar o leitor à vontade

para reescrevê-la como achar melhor, onde este terá a liberdade de omitir passos que considerar triviais ou incluir passos que considerar importantes. O leitor tem mais chances de se sentir capaz de fazê-lo após uma compreensão mais profunda e completa do resultado.

Ao apresentar uma demonstração matemática, é sempre importante ressaltar quais são as hipóteses e as teses do resultado a ser demonstrado, bem como mostrar com clareza em que momento do raciocínio essas informações são utilizadas, além de citar e indicar teoremas e/ou resultados anteriores que são utilizados para chegar à conclusão da demonstração. Muitas vezes esse processo, se reduzido ou simplificado demais, pode afetar a compreensão, não cumprindo seu papel didático. Nessa atividade que aplicamos, os comentários mostram que o sistema de rascunhos se propôs a acrescentar nesse sentido.

A segunda pergunta foi: *De modo geral, você considera que é possível estudar apenas com a utilização de material escrito? Se não, quais outros materiais você considera importantes nos seus estudos?*

Algumas respostas:

*Não, pois gosto de explicação ao vivo pelo professor e a realização de exemplos;*

*Sim! Para isto, basta interesse em querer compreender cada palavra escrita no material porque assim você realmente está estudando e entendendo ele;*

*Não, hoje sem as mídias digitais e a interação professor, alunos e colegas de aula, é difícil estudar e compreender o conteúdo sozinho;*

*Sim, se for um material bem explicando e conter bastante exemplos que seja explicados de forma clara e tranquilo, claro que se o professor disponibilizar vídeos explicando alguns exemplos nos ajuda bastante, pois ver e escutar a resolução de um exemplo nos faz refletir melhor;*

*Sim é possível estudar só com material escrito, mas eu prefiro estudar através de vídeo aulas;*

*Eu geralmente estudo somente com material escrito;*

*Eu estudo a maioria das vezes com material escrito.*

Aqui as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) aparecem em quase todos os comentários. A realidade do estudante do século XXI é permeada pela tecnologia, e os processos de educação não poderia percorrer um caminho diferente. Mas o que emerge desses comentários é o papel do professor/educador/tutor. Os alunos estruturam, dentro de toda sua experiência escolar, uma relação muito estreita entre o processo de ensino/aprendizagem e o professor. A maioria prefere algum nível de contato com o professor, mesmo que por uma vídeo-aula previamente gravada. Isso mostra que o papel do professor ainda é considerado imprescindível para o aprendizado dos alunos, mas esse pode ser um sintoma de que os alunos tem um grau ainda baixo de independência/autonomia, um indício de que pode ser necessário estimular os alunos a serem mais ativos na busca pelo conhecimento, aprendendo "como estudar" e se apropriando das mais diversas formas de aquisição do conhecimento.

A terceira e última pergunta: *Qual sua opinião sobre esse sistema proposto que mostra os rascunhos antes de apresentar a demonstração final? Ele ajudou a melhorar a sua compreensão do resultado final? Gostaria de sugerir algum ajuste ou alteração?*

Algumas respostas:

*Devido a ter uma dificuldade de entender algumas demonstrações, os rascunhos ajudam;*

*Acho que propor o sistema de rascunhos antes de apresentar a demonstração do resultado é algo muito importante, pois ajuda o cérebro a realizar conexões entre as hipóteses e as definições e/ou resultados já estudados. Com certeza tal sistema de rascunhos auxiliou-me na compreensão das demonstrações formais dos resultados;*

*Ajudou sim na compreensão;*

*Eu gostei bastante, pois agente [sic] trabalha melhor nosso pensamento pra quando for demonstrar;*

*Sim, achei muito útil para facilitar na aprendizagem;*

*Sim, ajudou bastante, eu gostei muito.*

Já aqui, o que se sobressai na sua maioria é que o sistema de rascunhos foi bem sucedido, pois 100% das respostas foram favoráveis ao sistema proposto. Esse é um método pouco utilizado e essas respostas, quando associadas às respostas das perguntas anteriores, deixam claro que os alunos consideraram relevante a sua presença nos materiais didáticos.

## 5 Considerações Finais

Esse trabalho visava buscar alguns detalhes que, dentro de uma demonstração matemática, pudessem ajudar o leitor a compreender com mais clareza e profundidade o resultado a ser mostrado, tentando aumentar as chances de que, além de compreendê-lo, o leitor pudesse se apropriar desses resultados e consiga refletir sobre os mesmos, sendo capaz de responder com mais segurança se o compreendeu ou não.

Para tal, elaboramos um material adaptado sobre a construção e discussão das propriedades do Conjunto de Cantor, aplicado a uma turma do curso de Matemática da FURG na qual, após apresentarmos a atividade, pedimos aos participantes que respondesse a um questionário que visava avaliar a qualidade e analisar alguns aspectos importantes adotados na elaboração do material, como formatação, detalhamento, organização textual e associação de imagens, tabelas, quadros de destaque, entre outros recursos visuais. Foi também apresentado um *sistema de rascunhos*, onde os resultados a serem demonstrados vinham com um rascunho antes da demonstração oficial, descrevendo detalhadamente os passos envolvidos e mostrando, detalhando e conectando de modo mais minucioso quais etapas o autor adotou no seu raciocínio para atingir o resultado esperado.

Temos ciência da força que o paradigma tradicional exerce sobre o nosso sistema de ensino, tornando muitas práticas que se proponham mais *disruptivas* de difícil aplicação. Após uma análise mais aprofundada, conseguimos montar um panorama que nos mostra que há uma necessária ruptura a esse paradigma conforme aferida por Moraes (1999), influenciada pelas teorias da relatividade e quântica. Em Matemática, esses avanços educacionais passam por árduas dificuldades, talvez em virtude de sua natureza tão intrínseca com sua estrutura de linguagem formal, sendo preteridas as habilidades e competências mais vinculadas à criatividade e à expressão e dando prioridade às voltadas para o *aprender a fazer*, como colocado por Saviani (2012).

Como educadores, pudemos vislumbrar uma iminente transformação no sistema educacional se tornando possível com a emergência das metodologias ativas, sendo discutidas, experimentadas e em ampla expansão. Educadores no mundo inteiro tem tentado fazer uso de metodologias ativas ainda dentro do sistema tradicional, e essas tentativas revelam que as abordagens tecnicistas sufocam esses educadores, e tornam iminentes às escolas adotarem espaços e políticas mais alinhadas às metodologias ativas, criando um modelo *transitório* entre as metodologias atual e a emergente. Desde o *peer instruction* no formato proposto pelo professor Eric Mazur, de Harvard, em meados dos anos 90, a *sala de aula invertida* vem se transformando em um modelo de ensino mais facilmente executável e absorvível por esse modelo transitório entre o tradicional e o ativo. Com a popularização das tecnologias, a produção de vídeos, debates, *podcasts*, entre outros, tem colaborado enormemente para a expansão no uso da *sala de aula invertida*. Mas nem todos os educadores possuem a técnica ou as ferramentas necessárias para a produção desse tipo de material. E é ainda mais grave a dificuldade de acesso a um percentual muito grande dos alunos, principalmente dentro da rede pública de ensino. A grande questão que fica, para os educadores, é: *se os alunos não possuem acesso às tecnologias, como podemos ajudar esses alunos?*

Sempre mantivemos nossa fé no material escrito. Além de um hábito saudável, a leitura é um processo de exercício das capacidades de tradução, de articulação da própria linguagem, em um processo contínuo de tradução, interpretação e conclusão. É um exercício que carece de permanente análise e síntese das significações, bem como de redução de ambiguidades possíveis dentro do processo intersubjetivo na compreensão. Apesar disso, o texto escrito demanda muito trabalho ao autor, que além de ter domínio sobre o conteúdo específico do qual se propõe a tratar, precisa procurar descobrir qual a melhor forma de se comunicar com o leitor. Diferente de produções paradidáticas, em que o leitor pode ter interpretações diferentes da intenção inicial do autor, numa demonstração matemática o autor tem um objetivo direto e ele precisa ser atingido.

É preciso então, alinhar todos os conceitos iniciais que são necessários à construção do resultado, propôr um caminho lógico a ser traçado entre as afirmações iniciais e o resultado final e, por fim, estabelecer qual a melhor rota mental para prosseguir nesse caminho, como essas informações se entrelaçam de forma a constituírem sentido. Nesse aspecto, a proposta do *sistema de rascunhos* aproxima tanto a Língua Materna quanto a Matemática de um lugar de diversidade, onde os caminhos são variados e a escolha pela melhor forma de traduzir essas

conexões sempre é deixada à cargo do leitor, mas não sem antes ter acesso à pelo menos um caminho completo e detalhado para ajudar a guiar a mente do leitor nessa trajetória.

Mesmo não se tratando de uma ideia nova ou tão original, o *sistema de rascunhos* mostrou-se muito relevante por seu papel na análise e na síntese, dando suporte à uma formação, estruturação e fixação do conhecimento matemático estudado. As demonstrações propostas, com o apoio da Língua Materna, dentro do sistema proposto funcionou muito bem como *segunda articulação*, no sentido proposto por Martinet (1975 apud MACHADO, 1991), mostrando com clareza as pontes entre as premissas e os objetos finais a serem demonstrados, funcionando como intermediária adequada entre o pensamento e a escrita, dando fluidez à tradução linguística dentro do *jogo de linguagem* que envolve uma demonstração matemática. Ajudou no processo de "constituir sentido", de "compreender", no sentido proposto por Wittgenstein (1999).

Os resultados foram extremamente positivos, com um alto índice de aprovação do material por parte dos entrevistados, o que torna transparente o anseio por parte dos estudantes de matemática por materiais com um grau maior de detalhamento, com explicações mais claras e até menos objetivas, além de uma linguagem menos formal (em algum momento do texto) a fim de usar os recursos da nossa língua pátria para traduzir mensagens que possam ser mais difíceis de compreender com o uso de linguagem mais formal.

Esperamos que esses resultados promissores sirvam de inspiração aos educadores de matemática para produzir seus próprios materiais, pensando nas peculiaridades dos seus alunos e em como ajudá-los a adquirir certo grau de independência em seus estudos, os estimulando a buscar conhecimento de maneira mais independente, e deixando à sua disposição materiais de qualidade, pensados especialmente para facilitar o processo de aprendizagem. Nesse âmbito, aprofundar-se nas metodologias que envolvem o processo de Sala de Aula Invertida são um ponto chave a ser pesquisado e estudado, bem como dar o primeiro passo e começar a testar materiais autorais com seus alunos. É um processo gratificante, mas de tentativa e erro, pois cada aluno possui suas dificuldades e peculiaridades, o que pode gerar inúmeras respostas diferentes aos materiais.

Esperamos também poder, após esse período excepcional de pandemia, aplicar atividades similares a grupos maiores, a fim de buscar mais respostas sobre as questões propostas e amadurecer mais os processos envolvidos na elaboração de materiais para estudo individual. Ficamos extremamente gratos por termos tido a oportunidade de, no meio desse momento pandêmico, aplicar a atividade e conseguir alguns resultados para trazer substância à essa pesquisa. Sigamos na busca pela aproximação da Matemática à um paradigma educacional *construtivista, interacionista, sociocultural e transcendente*, em todos os níveis de ensino.

## Referências

- AMORIM, S. de; NETO, S. O que é um paradigma? *Revista de Ciências Humanas*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2011. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revistacfh/article/view/2178-4582.2011v45n2p345>>.
- ARSAC, G. L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, Département de Mathématiques et Informatique, Université de Rennes, n. 5, 1987–1988. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item/PSMIR\\_1987-1988\\_\\_5\\_A7\\_0/](http://www.numdam.org/item/PSMIR_1987-1988__5_A7_0/)>.
- BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias Ativas para uma educação inovadora*. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.
- BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M. *Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação*. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.
- BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Springer Verlag, 1987. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264>>.
- BARATA, R. C. *A compreensão de expressões algébricas sob a perspectiva da filosofia de Wittgenstein*. Belém: Universidade Federal do Pará, 2017.
- BERGMANN, J.; SAMS, A. *Sala de Aula Invertida: Uma metodologia ativa de aprendizagem*. Porto Alegre: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 2018.
- BOGDAN, R. C.; BILEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora, 1994.
- CHAU, M. *Convite à Filosofia*. São Paulo: Editora Ática, 2000.
- CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. *Ensino Híbrido: uma Inovação Disruptiva? - Uma introdução à teoria dos híbridos*. Clayton Christensen Institute, 2013. Disponível em: <[https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido\\_uma-inovacao-disruptiva.pdf](https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf)>. Acesso em: 10.06.2021.
- DE VILLIERS, M. The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, AOSIS OpenJournals, 1990. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/264784642\\_The\\_Role\\_and\\_Function\\_of\\_Proof\\_in\\_Mathematics](https://www.researchgate.net/publication/264784642_The_Role_and_Function_of_Proof_in_Mathematics)>.
- DEBALD, B. *Metodologias Ativas no Ensino Superior*. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.
- DMITRUK, H. B. *Cadernos Metodológicos: diretrizes do trabalho científico, 6ª edição*. Chapecó: Argos, 2004.
- DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. *BOLEMA*, UNESP - Rio Claro, 2015. Disponível em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10593>>.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5a ed.* Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FIORENTINI, L. M. R.; MORAES, R. de A. *Linguagens e Interatividade na Educação à Distância*. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2003.
- GOTTSCHALK, C. M. C. Uma concepção pragmática de ensino e aprendizagem. *Educação e Pesquisa*, USP, 2007. Disponível em: <<https://www.revistas.usp.br/ep/article/view/28060>>.
- GOTTSCHALK, C. M. C. O paradoxo do ensino da perspectiva de uma epistemologia do uso. *Educação e Filosofia*, EDUFU, 2013. Disponível em: <<http://www.seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/14866>>.
- HOUSTON, K. *How to Think Like a Mathematician. A Companion to Undergraduate Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. de L. Pesquisa documental: considerações sobre conceitos e características na pesquisa qualitativa. *Atas CIAIQ2015 – Investigação Qualitativa na Educação*, v. 2, 2015.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Fundamentos de Metodologia Científica - 5ª Edição*. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

- MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua)*. São Paulo: Cortez Editora, 1991.
- MICHAELIS, M. D. da L. P. *paradigma (s.m.)*. Editora Melhoramentos, 2015. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/paradigma>>. Acesso em: 22.04.2021.
- MORAES, M. C. *O paradigma educacional emergente*. Campinas: Papirus Editora, 1999.
- MORIN, E. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. Brasília: Cortez Editora (original: UNESCO), 2000.
- PIETROPAOLO, R. C. *(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, 2005.
- SAVIANI, D. *Escola e Democracia*. Campinas: Autores Associados, 2012.
- SIVEIRA, M. R. A. da. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 2014. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/15338>>.
- STEFANOWICZ, A. *Proofs and Mathematical Reasoning*. Birmingham: University of Birmingham, 2014.
- TALBERT, R. *Guia para a utilização da Aprendizagem Invertida no Ensino Superior*. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.
- TARSKI, A. 'Verdade e Demonstração', In: C. Mortari e L.H. Dutra orgs. *A Concepção Semântica da Verdade. Textos clássicos*. São Paulo: Ed. UNESP, 2007.
- VASCONCELLOS, M. J. E. de. *Pensamento Sistêmico: O novo paradigma da ciência, 5ª edição*. Campinas, SP: Papirus, 2002.
- WITTGENSTEIN, L. *Investigações Filosóficas - Trad: José Carlos Bruni*. [S.l.]: Editora Nova Cultura, 1999.



## Apêndices

## APÊNDICE A – Aporte teórico prévio da atividade

# Topologia na Reta

Luciele Nunes e Rafael B. Silva

## Antes de tudo...

Quando estudamos os números reais, imaginamos sempre esses números nas suas formas escritas, com os algarismos ordenados, e quando pensamos neles enquanto um conjunto, a forma mais comum em que eles são apresentados é na forma de uma reta infinita, com uma origem (que chamamos de 0) e duas direções a partir dela, geralmente com uma seta para a direita indicando o sentido positivo da reta, e todos os pontos que compõem essa reta representam números reais.

Essa forma geométrica de visualização é muito importante, pois ela nos dá a ideia de infinidade, de continuidade (no sentido de a reta ser ininterrupta), e nos permite enxergar os intervalos como "pedaços" dessa reta entre dois pontos fixados.

Esses intervalos, enquanto "pedaços da reta", podem ser considerados abertos ou fechados. Para isso, basta imaginar que, se os dois extremos do intervalo fizerem parte do "pedaço", então ele é fechado, e se o "pedaço" não incluir os extremos então o chamamos de aberto.

Mas, se os analisarmos sob o ponto de vista topológico os conjuntos de números reais também podem receber essa classificação, porém os critérios são descritos de maneira similar mas com um pouco mais de formalidade (como tudo em matemática, com a devida escrita e organização). Para isso, vamos entender alguns conceitos primeiramente.

### OBSERVAÇÃO:

É importante frisar que não podemos confundir *intervalo aberto ou fechado* com *conjunto aberto ou fechado*, pois são conceitos diferentes, apesar de serem facilmente confundidos um com o outro.

## 1 Conjuntos Abertos

### 1.1 Ponto interior a um conjunto

**Definição 1.1** (Ponto Interior). *Seja  $X$  um subconjunto dos reais. Dizemos que um ponto  $a$  é interior a  $X$  sempre que existir um número  $\epsilon > 0$  tal que o intervalo*

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X.$$

**Exemplo 1.1.** *Seja  $X = [2, 5]$ , o número  $a_1 = \frac{21}{6}$  é interior à  $X$ ? E o número  $a_2 = 5$ ?*

Observe que, tomando  $\epsilon = \frac{3}{6}$ , o intervalo

$$\left(\frac{21}{6} - \frac{3}{6}, \frac{21}{6} + \frac{3}{6}\right) = \left(\frac{18}{6}, \frac{24}{6}\right) = (3, 4) \subset [2, 5],$$

logo  $a_1$  é interior a  $X$ .

Já o número  $a_2$  não pode ser interior à  $X$ , uma vez que qualquer  $\epsilon > 0$  que tomarmos, o intervalo  $(5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$  não estará contido em  $X$ .

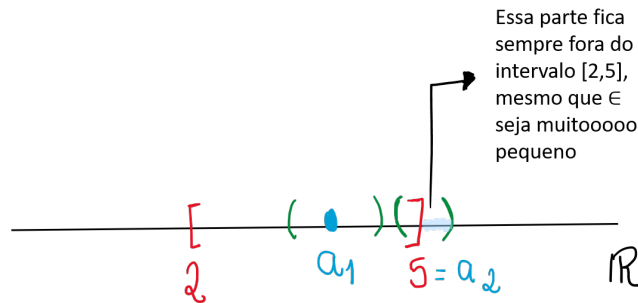


Figura 1: Ilustração do Exemplo 1.1

Dado  $\epsilon > 0$  dizemos que  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é uma **vizinhança** do ponto  $a$ . Assim podemos dizer que: um ponto  $a$  é um ponto interior do conjunto  $X$  se existe uma vizinhança de  $a$  contida em  $X$ .

Há alguns resultados importantes que precisamos levar em consideração:

**Proposição 1.1.** Se  $X$  é um intervalo fechado  $[a, b]$ , então nenhum dos extremos  $a$  ou  $b$  podem ser interiores.

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$  qualquer. Observe que tanto o intervalo

$$Y_1 = (a - \epsilon, a + \epsilon) \text{ quanto } Y_2 = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

não estarão contidos em  $X$ , visto que as partes

$$(a - \epsilon, a] \subset Y_1 \text{ e } [b, b + \epsilon) \subset Y_2$$

estão fora do intervalo  $[a, b]$ . □

Com isso, podemos dizer que se  $X = [a, b]$  então  $X$  não é uma vizinhança de  $a$  nem de  $b$ .

**Proposição 1.2.** Seja  $X$  é um intervalo aberto  $(a, b)$ , então todos os seus pontos são interiores.

*Demonstração.* Seja  $c \in X$  qualquer. Então  $a < c < b$ , e tomando

$$\epsilon < \min\{(c - a), (b - c)\},$$

tanto o intervalo

$$Y_1 = (a - \epsilon, a + \epsilon) \text{ quanto } Y_2 = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

estarão contidos em  $X$ , visto que  $\epsilon$  é menor do que a distância de  $c$  a qualquer um dos extremos do intervalo. □

**Definição 1.2** (Conjunto Interior). Chamamos o conjunto dos pontos interiores a  $X$  de **interior de  $X$**  e representamos esse conjunto por  $\text{int}X$ .

**Exemplo 1.2.** Dos resultados anteriores concluímos que

$$\text{int}[a, b] = (a, b).$$

Uma vez que os seus pontos extremos não são interiores.

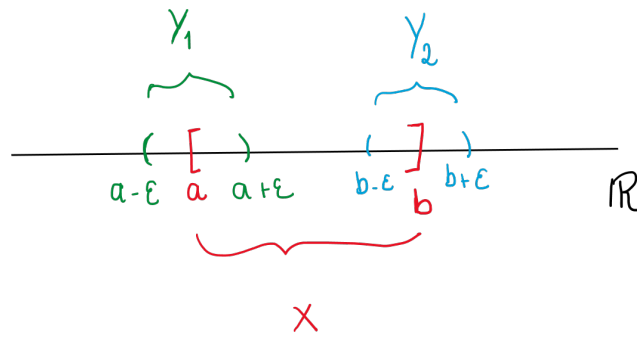


Figura 2: Ilustração dos intervalos citados na Proposição 1.1

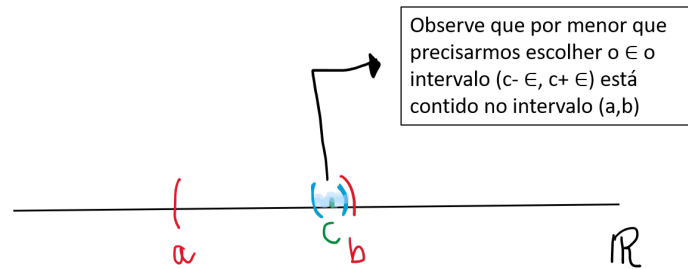


Figura 3: Ilustração dos intervalos citados na Proposição 1.2

## 1.2 Conjunto Aberto

**Definição 1.3.** Dizemos que um conjunto é **aberto** quando todos os seus pontos são interiores. Em outros termos, dizer que  $X$  é aberto significa que  $X = \text{int}X$ .

### OBSERVAÇÃO:

Sempre temos que  $\text{int}X \subset X$ , assim para mostrar que  $X = \text{int}X$  é suficiente mostrar que  $X \subset \text{int}X$ .

**Exemplo 1.3.** Assim, o conjunto  $X = (a, b)$  é um conjunto aberto, pois pela Proposição 1.2 todos os pontos são interiores, e com isso,  $X = \text{int}X$ .

**Exemplo 1.4.** Por sua vez o conjunto  $X = [a, b]$  não é um conjunto aberto, pois pelo Exemplo 1.2 temos  $\text{int}X = (a, b)$ , logo  $X \neq \text{int}X$ .

### OBSERVAÇÃO:

Um conjunto unitário só pode ser representado como um intervalo fechado degenerado. Ou seja,

$$\{a\} = [a, a]$$

e com isso

$$\text{int}\{a\} = (a, a) = \emptyset.$$

Portanto, o interior de um conjunto unitário é vazio.

Uma das principais consequências desse estudo é que, se observarmos os conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ , podemos afirmar que esses conjuntos tem apenas intervalos fechados degenerados. Por exemplo,

$$\mathbb{N} = [1, 1] \cup [2, 2] \cup [3, 3] \cup \dots,$$

e isso significa que esses conjuntos não possuem intervalos (pelo fato de que não faz sentido falar em  $[1, 2]$  em nenhum desses três conjuntos, visto que não há nenhum número natural entre 1 e 2). Com isso,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  são conjuntos de interior vazio.

Um resultado importante sobre os conjuntos abertos:

**Proposição 1.3.**

a) Se dois conjuntos são abertos, a sua interseção é um conjunto aberto;

b) Se  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma quantidade enumerável de conjuntos abertos, então  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  é um conjunto aberto.

(O item b) vale mais ainda, vale para a união de uma família qualquer de conjuntos abertos, não necessariamente enumerável.)

*Demonstração.*

a) Sejam  $X_1$  e  $X_2$  conjuntos abertos e  $a \in X_1 \cap X_2$ . Então,  $a \in X_1$ , e como  $X_1$  é um conjunto aberto, então todos seus pontos são interiores, e com isso existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que o intervalo

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \subset X_1.$$

De modo análogo,  $a \in X_2$ , e como  $X_2$  é um conjunto aberto, então todos seus pontos são interiores, e com isso existe  $\epsilon_2 > 0$  tal que o intervalo

$$(a - \epsilon_2, a + \epsilon_2) \subset X_2.$$

Se tomarmos  $\epsilon$  como sendo o menor dos valores entre  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , ou seja,

$$\epsilon = \min \{ \epsilon_1, \epsilon_2 \},$$

então o intervalo

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset (a - \epsilon_1, a + \epsilon_1)$$

e

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset (a - \epsilon_2, a + \epsilon_2).$$

Com isso

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X_1 \text{ e } (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X_2,$$

logo

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X_1 \cap X_2.$$

Assim concluímos que, se  $a \in X_1 \cap X_2$ , então  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset (X_1 \cap X_2)$ , que é o mesmo que afirmar que todos os pontos de  $X_1 \cap X_2$  são interiores, ou seja, que  $X_1 \cap X_2$  é um conjunto aberto.

b) Tome um ponto  $a \in X$  qualquer. Então existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a \in X_n$ . Como  $X_n$  é aberto, todos seus pontos são interiores, ou seja, existe  $\epsilon > 0$  tal que o intervalo

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X_n.$$

Mas como  $X_n \subset X$ , então

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset X.$$

Logo,  $a$  é interior a  $X$ , e como  $a$  é genérico, todos os pontos de  $X$  são interiores, portanto  $X$  é aberto.

□

**OBSERVAÇÃO:**

Resulta direto do item a) do teorema anterior que a interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Porém a interseção infinita de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto, ver exemplo abaixo.

**Exemplo 1.5.** *Sejam  $X_1 = (-1, 1)$ ,  $X_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $X_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $\dots$ ,  $X_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ . Então*

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ não é aberto.}$$

*Demonstração.* Observamos primeiramente que

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \{0\}.$$

De fato,  $0 \in X_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $0 \in X$ . Vamos mostrar agora que o conjunto  $X$  contém apenas o elemento 0. Para isso, seja  $x \neq 0$  (veremos que esse elemento não está em  $X$ ) então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x| > \frac{1}{n_0}$$

(caso contrário,  $|x| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou ainda,  $n \leq \frac{1}{|x|}$ , assim  $\mathbb{N}$  seria limitado, o que é absurdo), logo  $x \notin X_{n_0}$  e assim  $x \notin X$ .

Portanto como  $X = \{0\}$  então  $X$  não é um conjunto aberto. Pois é um conjunto formado por um único ponto. □

Outra informação importante de lembrar:

Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  converge para um número real  $a$  se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , for possível encontrar um índice  $n_0$  tal que  $|a - x_n| < \epsilon$  para todo  $n > n_0$ . Chamamos ao número  $a$  de *limite da sequência* e denotamos como  $a = \lim x_n$ .

Observe que  $|a - x_n| < \epsilon \Rightarrow \begin{cases} a - x_n < \epsilon & \Rightarrow x_n > a - \epsilon \\ a - x_n > -\epsilon & \Rightarrow x_n < a + \epsilon \end{cases}$ , então  $(a - \epsilon) < x_n < (a + \epsilon)$ , que é o mesmo que afirmar que  $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ , ou seja,  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é uma *vizinhança* de  $x_n$ .

Então, podemos reescrever o limite de uma sequência em termos de conjuntos abertos:

**Limites por conjuntos abertos:**

Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  converge para um número real  $a$  se, para todo intervalo aberto  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ , for possível encontrar um índice  $n_0$  tal que  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é uma *vizinhança* de  $x_n$ , para todo  $n > n_0$ . Chamamos ao número  $a$  de *limite da sequência* e denotamos como  $a = \lim x_n$ .

## 2 Conjuntos Fechados

### 2.1 Pontos Aderentes

**Definição 2.1.** *Seja um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ . Se existir uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $X$  tal que  $\lim x_n = a$ , então dizemos que  $a$  é **aderente** ao conjunto  $X$ .*

### OBSERVAÇÃO:

Uma *sequência*  $(x_n)$  de pontos de  $X$  não significa que  $(x_n)$  mapeia todos os pontos de  $X$ . Essa sequência apenas precisa ser formada por elementos de  $X$ . Por exemplo, se  $X = \mathbb{Z}$  e  $(x_n) : x_n = 2n, n \in \mathbb{N}$ , então  $(x_n)$  representa todos os números pares positivos, e portanto é uma sequência de elementos de  $X$ , mas  $(x_n) \neq X$ .

**Exemplo 2.1.** *Qualquer ponto que está dentro de um conjunto  $X$  é um ponto aderente. Ou seja, se  $a \in X$ , então  $a$  é ponto aderente a  $X$ .*

Para mostrar isso basta definir a sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$(x_n) = (a, a, \dots, a, \dots).$$

Com isso  $\lim x_n = a$ , logo  $a$  é aderente à  $X$ .

Uma pergunta importante: *um ponto precisa estar dentro de um conjunto para ser considerado aderente a ele?* A resposta é não. Vejamos o exemplo abaixo.

**Exemplo 2.2.** *Tome o conjunto  $X = (0, 1)$  e defina a sequência  $(x_n)$  tal que*

$$x_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$(x_n) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right).$$

Observe que, como  $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $(x_n)$  é uma sequência de elementos de  $X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ainda,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , então podemos afirmar que  $0$  é aderente à  $X$ , mas  $0 \notin X$ .

A proposição seguinte caracteriza um ponto aderente em termos de vizinhança.

**Proposição 2.1.** *Um ponto  $a$  é aderente a um conjunto  $X$  se, e somente se, toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$ .*

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Ora, se  $a$  é aderente a um conjunto  $X$ , então por definição existe uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $X$  tal que  $\lim x_n = a$ , que pela definição de **Limites por conjuntos abertos**, para todo intervalo aberto  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ , é possível encontrar um índice  $n_0$  (suficientemente grande) tal que  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é uma *vizinhança* de  $x_n$ , para todo  $n > n_0$ , ou seja,

$$x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon), \forall n > n_0.$$

O que é equivalente a afirmar que toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$ .

$\Leftarrow$  Agora, se toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$ , então para todo  $\epsilon > 0$  o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  contém algum ponto de  $X$ . Assim, dado  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $\epsilon = \frac{1}{n}$  e com isso existe  $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ . Logo,

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e aplicando o Teorema do Sanduiche, como  $\lim \frac{1}{n} = 0$  concluímos que  $\lim x_n = a$ .

Portanto,  $a$  é aderente a um conjunto  $X$ . □



Com isso, sempre que precisarmos mostrar que um ponto  $a$  é aderente a um conjunto, ao invés de procurar uma sequência de elementos do conjunto que tenha limite igual a  $a$ , basta verificarmos se toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto do conjunto.

Em outras palavras, um ponto  $a$  é aderente a um conjunto  $X$  se, e só se, sempre que um intervalo aberto  $I$  contiver  $a$  então  $I \cap X \neq \emptyset$ . A contrapositiva desse resultado é a seguinte:

Um ponto  $a$  não é aderente a um conjunto  $X$  se, e só se, existir um intervalo aberto  $I$  contendo  $a$  tal que  $I \cap X = \emptyset$ .

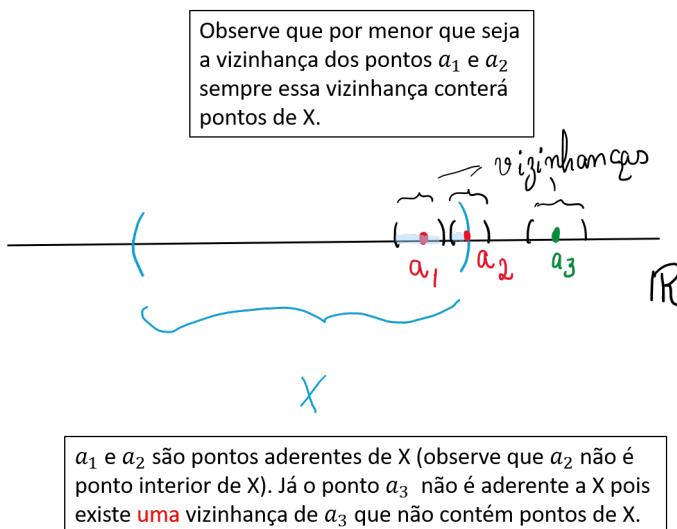


Figura 4: Ilustração da Proposição 2.1

### OBSERVAÇÃO:

Todo ponto interior é ponto aderente.

## 2.2 Fecho de um conjunto

**Definição 2.2.** O **fecho** de um conjunto  $X$ , denotado por  $\bar{X}$ , é o conjunto de todos os pontos que são aderentes à  $X$ .

### OBSERVAÇÃO:

Como todos os pontos de um conjunto são aderentes à ele, então  $X \subset \bar{X}$ . Logo para mostrar que  $X = \bar{X}$  é suficiente mostrar que  $\bar{X} \subset X$

**Proposição 2.2.** Se  $X \subset Y$ , então  $\bar{X} \subset \bar{Y}$ .

*Demonstração.* Se  $a \in \bar{X}$ , então  $a$  é ponto de aderência de  $X$ . Logo, toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $X$  (Proposição 2.1). Mas como  $X \subset Y$ , então toda vizinhança de  $a$  contém algum ponto de  $Y$ . Logo,  $a$  é ponto de aderência de  $Y$ , e com isso  $a \in \bar{Y}$ . Portanto,  $\bar{X} \subset \bar{Y}$ .  $\square$

## 2.3 Conjunto Fechado

**Definição 2.3.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . O conjunto  $X$  é dito **fechado** quando  $X = \bar{X}$ . Ou seja, um conjunto é fechado quando todos os seus pontos são aderentes.

**Exemplo 2.3.** O conjunto  $[a, b]$  é fechado, pois todos os seus pontos são aderentes.

**Exemplo 2.4.** O conjunto  $X = (a, b)$  não é fechado, pois  $\bar{X} = [a, b]$ .

De fato, já mostramos que o conjunto  $(a, b)$  é aberto, e com isso todos os seus pontos são interiores, logo todos os seus pontos são aderentes. Agora observe que  $a$  e  $b$  são pontos aderentes de  $X$ , pois qualquer vizinhança de  $a$  contém o próprio  $a$  e  $a \in X$ , analogamente para  $b$ . Assim,

$$\bar{X} = [a, b].$$

Logo,  $X = (a, b)$  não é um conjunto aberto.

De modo análogo, podemos mostrar que  $\overline{(a, b]} = \overline{[a, b)} = \overline{[a, b]} = [a, b]$ .

Ainda, podemos mostrar que  $\overline{(a, +\infty)} = \overline{[a, +\infty)} = [a, +\infty)$  e  $\overline{(-\infty, b)} = \overline{(-\infty, b]} = (-\infty, b]$ .

A proposição seguinte relaciona a definição de conjunto fechado com a de conjunto aberto e é comumente utilizada para definir conjunto aberto.

**Proposição 2.3.** Um conjunto  $X \in \mathbb{R}$  é fechado se, e somente se, o seu complementar é aberto.

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Seja  $X$  um conjunto fechado. Então  $X = \bar{X}$ . Tome  $a \in X^C$  qualquer, assim

$$a \in X^C \Rightarrow a \notin X \Rightarrow a \notin \bar{X},$$

logo  $a$  não é aderente à  $X$ , o que nos permite afirmar pela Proposição 2.1 que existe uma vizinhança  $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  de  $a$  tal que  $I \cap X = \emptyset$ , ou seja,

$$I \subset X^C \Rightarrow a \in \text{int}X^C \text{ (pela definição de ponto interior).}$$

Como  $a$  é qualquer, podemos concluir que  $X^C \subset \text{int}X^C$ . Assim,  $X^C$  é um conjunto aberto (ver observação logo abaixo a definição de conjunto aberto).

$\Leftarrow$  Agora seja  $X^C$  um conjunto aberto. Logo  $X^C = \text{int}X^C$ . Tome um ponto  $a \in \bar{X}$ . Pela Proposição 2.1, existe um intervalo aberto  $I \ni a$  tal que  $I \cap X \neq \emptyset$ , o que equivale a afirmar que há pontos de  $I$  que estão em  $X$ . Como  $X \cap X^C = \emptyset$ , então  $I \not\subset X^C$ . Com isso,  $a$  não pode ser um ponto interior de  $X^C$ , e como  $X^C$  é aberto, então  $a \in X$ . Logo

$$a \in \bar{X} \Rightarrow a \in X$$

ou seja  $\bar{X} \subset X$ . Como  $X \subset \bar{X}$  (observação do fecho de um conjunto), então  $X = \bar{X}$ , ou seja,  $X$  é fechado. □

**Exemplo 2.5.** O conjunto  $\emptyset$  e a reta  $\mathbb{R}$  inteira são conjuntos abertos e fechados ao mesmo tempo.

De fato, vamos primeiramente observar que  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$  são abertos. Temos que um conjunto  $X$  só pode deixar de ser aberto se existir em  $X$  um ponto que não seja interior, assim como  $\emptyset$  não possui pontos admitimos que  $\emptyset$  é aberto. E o conjunto  $\mathbb{R}$  é aberto, pois dado um ponto  $a \in \mathbb{R}$ , toda vizinhança  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  de  $a$  está contida em  $\mathbb{R}$ , logo  $\mathbb{R}$  é aberto.

Agora observamos que:

$$\mathbb{R}^C = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset \text{ que é aberto}$$

então  $\mathbb{R}$  é também fechado.

Além disso,

$$\emptyset^C = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R} \text{ que é aberto}$$

então  $\emptyset$  é fechado.

Portando,  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$  são abertos e fechados. Na verdade conseguimos mostrar mais ainda, conseguimos mostrar que esses são os únicos subconjunto da reta que são abertos e fechados ao mesmo tempo, porém para mostrar isso precisamos definir o que é uma cisão de um conjunto e não vamos aqui entrar nesse detalhe (fica a dica para quem quiser estudar um pouco mais). Análogo ao resultado que temos para conjuntos abertos temos para conjuntos fechados.

### Proposição 2.4.

a) Se dois conjuntos são fechados, a sua união é um conjunto fechado;

b) Se  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma quantidade enumerável de conjuntos fechados, então  $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$  é um conjunto fechado.

(Observe que o que valia para união no resultado de conjuntos abertos, Proposição 1.3, vale para intersecção de conjuntos fechados e vice-versa.)

*Demonstração.* Será omitida, porém usamos a Proposição 1.3 e a seguinte relação:

$$\left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \right)^C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n^C$$

□

## 2.4 Ponto de acumulação

**Definição 2.4.** Um ponto  $a \in X$  é dito **ponto de acumulação** se toda vizinhança de  $a$  contém algum outro ponto de  $X$ , exceto o próprio  $a$ .

Isso equivale a afirmar que: para todo  $\epsilon > 0$  temos que

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset.$$

O conjunto formado por todos os pontos de acumulação de  $X$  é denotado por  $X'$ .

Se um ponto  $b$  não é ponto de acumulação de  $X$ , então dizemos que  $b$  é um **ponto isolado** de  $X$ . Em outras palavras, se **existe algum**  $\epsilon > 0$  tal que

$$(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap (X - \{b\}) = \emptyset,$$

então  $b \notin X'$ .

Se todos os pontos de um conjunto são isolados, dizemos que esse conjunto é **discreto**.

A seguinte proposição caracteriza um ponto de acumulação por sequência, anunciaremos ela, porém não demonstraremos.

**Proposição 2.5.** O ponto  $a$  é ponto de acumulação de  $X$  se, e somente se,  $a$  é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in X - \{a\}$ .

**Exemplo 2.6.** Seja  $X = (a, b)$  então  $X' = [a, b]$ .

Observe que nesse caso  $X' = \bar{X}$ , porém isso nem sempre acontece, o que temos é o seguinte:

**OBSERVAÇÃO:**

Se um ponto é ponto de acumulação então esse ponto também é ponto aderente, porém se um ponto é aderente não significa que é ponto de acumulação. Simbolicamente:

$$X' \subset \bar{X}.$$

Veja exemplo abaixo.

**Exemplo 2.7.** Seja  $X = \{1, 2, 3\}$  temos que  $X' = \emptyset$ , porém  $\bar{X} = \{1, 2, 3\}$

Para justificar esse exemplo, observe a ilustração seguinte:

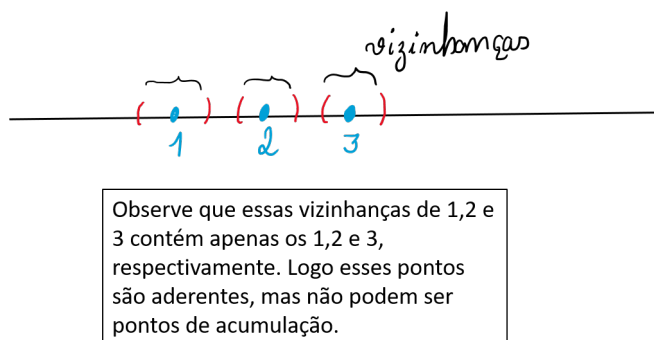


Figura 5: Ilustração do Exemplo 2.7

### 3 Conjuntos Compactos

**Definição 3.1.** Um conjunto é dito **compacto** se é limitado e fechado.

**Exemplo 3.1.** Nessas condições, um exemplo fácil é ver que um intervalo fechado qualquer  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  é um conjunto compacto.

De fato,,  $[a, b]$  é limitado superiormente por  $b$  e inferiormente por  $a$ , logo é um conjunto limitado, e como todos os seus pontos são aderentes, então  $[a, b]$  é fechado, e com isso podemos concluir que  $[a, b]$  é compacto.

Podemos também caracterizar conjuntos compactos através de sequências, como segue na proposição abaixo.

**Proposição 3.1.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em  $X$  possui uma subsequência que converge para um ponto de  $X$ .

*Demonstração.*

$\Rightarrow$  Suponhamos primeiramente que  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto compacto e seja  $(x_n)$  uma sequência de pontos de  $X$ . Queremos mostrar que  $(x_n)$  possui uma subsequência convergente.

Como  $X$  é compacto então em particular é limitado, logo como  $\{x_n\} \subset X$  então  $(x_n)$  é limitada e assim pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência convergente, digamos  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , assim  $a$  é aderente a  $X$ , ou seja,  $a \in \overline{X}$  e utilizando o fato de  $X$  ser fechado então  $a \in X$  ( $X = \overline{X}$ ).

$\Leftarrow$  Agora, seja  $X$  um conjunto tal que **toda sequência de  $X$  possui uma subsequência convergindo para um ponto em  $X$** . Vamos mostrar que  $X$  é compacto, ou seja, é limitado e fechado.

Suponhamos por absurdo que  $X$  não é limitado, então para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe um número  $x_n \in X$  tal que  $|x_n| > n$ , assim obtemos uma sequência  $(x_n)$ , essa sequência não pode possuir uma subsequência limitada, logo não pode possuir uma subsequência convergente (lembre que: toda sequência convergente é limitada). O que contradiz a hipótese do conjunto (frase em negrito), portanto  $X$  é limitado.

Agora suponhamos por absurdo que  $X$  não é fechado, logo  $X \neq \overline{X}$ , então existe um ponto  $a \in \overline{X}$  tal que  $a \notin X$ , ou seja,  $a = \lim x_n$ , com cada  $x_n \in X$ , porém essa subsequência não pode possuir uma subsequência convergindo para um ponto de  $X$  pois toda subsequência convergente de  $(x_n)$  deve convergir para o mesmo limite de  $(x_n)$ , ou seja, para  $a$ . O que também contradiz a hipótese do conjunto  $X$ , portanto  $X$  é fechado.

Logo  $X$  é limitado e fechado e portanto é compacto.

□

## APÊNDICE B – Atividade: material adaptado

# O CONJUNTO DE CANTOR $\mathcal{C}$

Rafael B. Silva

Esse material foi criado para ajudar o leitor a compreender os detalhes de uma demonstração matemática, aqueles que muitas vezes não estão descritos e que não conseguimos compreender como o autor chegou nesse raciocínio. Esse texto foi escrito para ajudar a entender o que esse autor pensou na hora de escrever as demonstrações. Foram incluídos rascunhos, em caixas destacadas em vermelho, para mostrar o raciocínio envolvido nas demonstrações mais complicadas. Vamos lá!

## 1 Descrição geométrica da construção

Antes de discutirmos o conjunto de Cantor, vamos apresentar uma descrição geométrica do seu processo de criação.

Imagine um pedaço de cordão esticado em uma mesa. Com uma tesoura, divida-o em três pedaços de mesmo tamanho e descarte o terço médio (dos três pedaços, o que fica no meio). Ficamos com dois pedaços separados por um espaço. Agora dividimos cada um desses dois pedaços em três partes, e retiramos o terço médio de cada uma, ficando com quatro pedaços. Em seguida, repetiremos esse processo com os pedaços restantes tantas vezes quanto for possível. Devemos ficar com uma imagem mais ou menos como na figura 1.

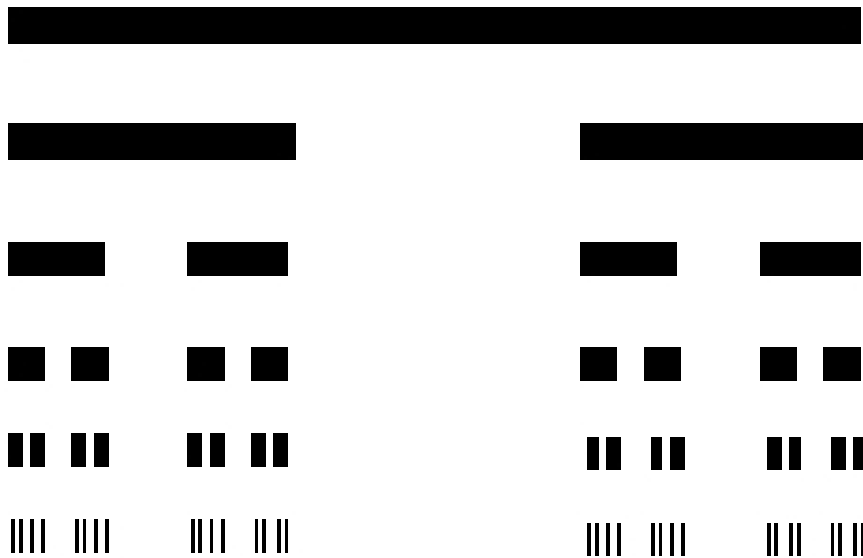


Figura 1: Divisão e retirada dos terços médios

Observe que, a cada passo, retiramos uma parte do cordão, mas sempre deixamos duas outras partes de mesma medida. Então, por mais que repitamos esse processo, nunca retiraremos todas as partes. Com isso já podemos conjecturar que o conjunto formado pelos pedaços que sobraram não será vazio.

O *Conjunto de Cantor*, que denotaremos por  $\mathcal{C}$ , é um conjunto criado com essas mesmas diretrizes, onde essas divisões e eliminações dos terços médios são feitas sobre o intervalo  $[0, 1]$ .

## 2 Construindo o Conjunto de Cantor

Usando a mesma técnica recursiva utilizada no exemplo do cordão, mas como se tratam de intervalos, quando formarmos o intervalo do meio iremos representá-lo como um intervalo

aberto. Vamos fazer passo a passo.

## 2.1 Primeira iteração

- Dividimos o intervalo  $[0, 1]$ , que tem comprimento 1, em três partes de comprimento  $1/3$ , são elas  $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ;
- Descartamos o terço médio aberto, que chamaremos de  $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ;
- Os intervalos que sobram formam o conjunto  $\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , conforme ilustrado na figura 2.

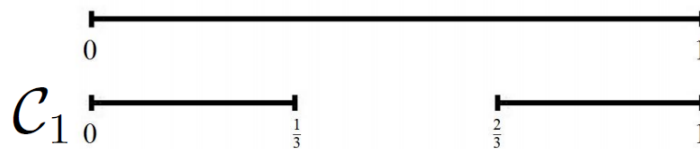


Figura 2: 1ª iteração

Observe que  $\mathcal{C}_1 \cup I_1 = [0, 1]$ .

## 2.2 Segunda iteração

- Dividimos os intervalos (de comprimento  $1/3$ ) que restaram em  $\mathcal{C}_1$  em três partes, cada uma com comprimento  $1/9$ . Assim, o intervalo  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  fica dividido como  $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ , e o intervalo  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  fica dividido como  $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ ;
- Descartamos os terços médios  $I_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $I_3 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ;
- Os intervalos que sobram formam o conjunto  $\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ , conforme ilustrado na figura 3.

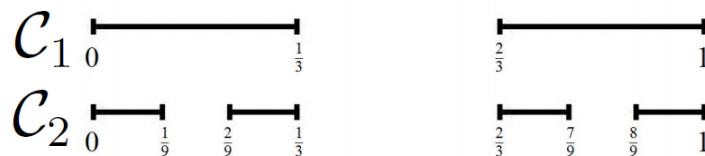


Figura 3: Transformação da 1ª iteração para a 2ª iteração

Observe que  $\mathcal{C}_2 \cup I_2 \cup I_3 = [0, 1]$ .



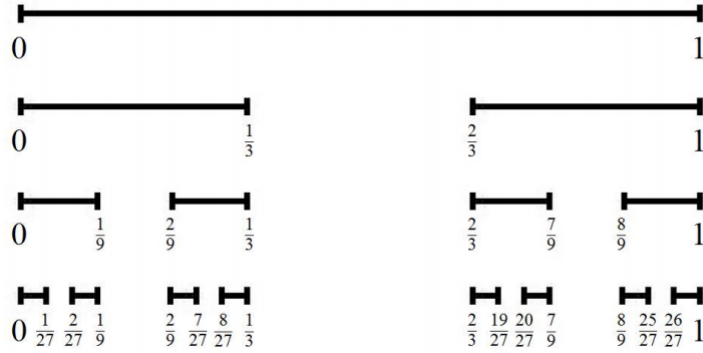


Figura 4: Três primeiros passos iterativos da construção do conjunto de Cantor

### 3 Demais Interações

Analogamente podemos construir a terceira interação, como mostra a figura 4.

Se seguimos repetindo esses passos indefinidamente, teremos a construção completa do conjunto.

O conjunto de Cantor fica definido como a interseção dos conjuntos obtidos a cada interação, o que podemos escrever como:  $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$ , com  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ .

Chamemos cada intervalo aberto removido de  $I_n$ . Assim, o conjunto  $I = \bigcup I_n$  formado pela união de todos os intervalos abertos removidos é tal que  $\mathcal{C} \cup I = [0, 1]$  e  $\mathcal{C} \cap I = \emptyset$ , o que significa que  $\mathcal{C}$  e  $I$  são disjuntos, ou seja, um é o complementar do outro. Portanto  $\mathcal{C} = I^c$ .

#### OBSERVAÇÃO 1:

Observe que os extremos de cada intervalo são números do tipo  $\frac{p}{3^n}$ , com  $p = 0, 1, 2, \dots, 9$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Veja por exemplo, na segunda interação, que

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

pode ser reescrito, da forma  $\frac{p}{3^n}$ , como:

$$\mathcal{C}_2 = \left[\frac{0}{3^0}, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3^1}\right] \cup \left[\frac{2}{3^1}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, \frac{1}{3^0}\right].$$

### 4 Características do Conjunto de Cantor

As iterações para essa construção são infinitas. Mas se nós pararmos em uma  $k$ -ésima interação específica, a interseção dos conjuntos será apenas o próprio  $\mathcal{C}_k$ , podemos observar o conjunto de Cantor por um outro ângulo: nessa interação, ele é uma união de intervalos fechados com comprimentos iguais.

Na primeira interação  $\mathcal{C}_1$ , temos dois subintervalos de comprimento  $\frac{1}{3}$ . Na segunda  $\mathcal{C}_2$ , temos quatro subintervalos de comprimento  $\frac{1}{9}$ . Na terceira  $\mathcal{C}_3$ , teremos oito subintervalos de medida

$\frac{1}{27}$ . Generalizando, em uma  $n$ -ésima iteração, teremos  $2^n$  subintervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ .

### OBSERVAÇÃO 2:

Quando estamos construindo o conjunto  $\mathcal{C}$ , podemos ver que os conjuntos  $\mathcal{C}_i$ 's estão encaixados. Ou seja, que  $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \supset \dots$ . Se pararmos o processo de construção numa  $k$ -ésima iteração qualquer, como  $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \supset \dots \supset \mathcal{C}_k$ , então a interseção desses conjuntos será apenas o próprio  $\mathcal{C}_k$ .

**Pergunta:** Mas não seria mais fácil dizer que o Conjunto de Cantor é formado apenas pela última iteração?

**Resposta:** Não seria correto, pois não há uma "última" iteração, porque essas iterações ocorrem infinitamente.

Ainda, vamos reforçar que  $\mathcal{C}_k$  é formado pela união de vários subintervalos fechados, num total de  $2^k$  subintervalos de comprimento  $\frac{1}{3^k}$  nessa iteração.

## 5 Outros resultados importantes

Essa é uma leitura complementar que vai nos ajudar a demonstrar facilmente um dos resultados importantes sobre o Conjunto de Cantor.

### 5.1 Sistema de Numeração de Base 3

Sabemos que, no sistema decimal (ou seja, de base 10), os números são representados por algarismos de 0 a 9 (num total de dez algarismos disponíveis), posicionados de forma a cada um representar um múltiplo de uma potência de 10. Quando vamos indiciar um número numa base específica, colocamos o número entre parênteses e indicamos, com um subscrito, a base na qual o número está representado. Também, reescrevemos esses números por meio de uma soma de múltiplos das potências da base dada. Por exemplo:

$$(934)_{10} = 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$(713.429)_{10} = 7 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Números decimais seguem uma ordem similar:

$$(3,27)_{10} = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$$

Na base 3, só dispomos de três algarismos (0, 1 e 2). Então:

$$(5)_{10} = (12)_3 \text{ pois } (12)_3 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

$$(326)_{10} = (110002)_3 \text{ pois } (110002)_3 = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

O nosso problema se dará em virtude de que, na base 3, números decimais são difíceis de escrever por várias razões. Por exemplo, o número:

$$(0,4)_{10} = (0,101121012\dots)_3,$$

é obtido por um processo longo e trabalhoso, demandando muito esforço manual, que não nos ajudaria descrevê-lo. Ao invés disso, vamos tentar generalizar algumas propriedades dos números na base 3, a fim de facilitar nosso entendimento desses números.

Seja  $x$  um número no intervalo  $[0, 1]$  na base 3. Então, esse número pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}(x)_3 &= (0, x_1x_2x_3x_4\dots x_n\dots)_3 = \\ &= 0 \cdot 3^0 + x_1 \cdot 3^{-1} + x_2 \cdot 3^{-2} + x_3 \cdot 3^{-3} + x_4 \cdot 3^{-4} + \dots + x_n \cdot 3^{-n} + \dots = \\ &= \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots, \text{ com } x_n \in \{0, 1, 2\}.\end{aligned}$$

Essa é uma forma mais genérica para escrevermos os números decimais entre 0 e 1 na base 3. Reforçando que todos os dígitos são 0, 1 ou 2 e que cada dígito está dividido por uma potência de 3. Vamos provar uma propriedade importante dos números desse tipo.

**Proposição 5.1.** *Seja um número  $k = \frac{p}{q}$ ,  $q \neq 0$ ,  $p < q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , na base 10 é uma fração irredutível. Se  $q$  é uma potência de 3, então  $k$  tem representação finita na base 3.*

*Demonstração.* Se  $q$  é uma potência de 3, então existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $q = 3^n$ . Assim  $k = \frac{p}{3^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $p = p_m 3^m + p_{m-1} 3^{m-1} + \dots + p_1 3^1 + p_0 3^0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $p_i \in \{0, 1, 2\}$  a representação de  $p$  na base 3. Então:

$$k = \frac{p_m 3^m + p_{m-1} 3^{m-1} + \dots + p_1 3^1 + p_0 3^0}{3^n} = p_m 3^{m-n} + p_{m-1} 3^{(m-1)-n} + \dots + p_1 3^{1-n} + p_0 3^{-n}$$

Como  $p < q \Rightarrow m < n \Rightarrow m - n < 0$ , então:

$$k = \frac{p_m}{3^{n-m}} + \frac{p_{m-1}}{3^{n-(m-1)}} + \dots + \frac{p_1}{3^{n-1}} + \frac{p_0}{3^n}.$$

Portanto  $k$  tem uma representação finita na base 3. □

Pensando na forma contrapositiva, se um número  $k = \frac{p}{q}$  tem representação infinita na base 3, então  $q$  não é uma potência de 3.

É importante ressaltar que, quando dizemos na proposição anterior que  $p < q$ , com  $p$  e  $q$  naturais, garantimos que o número  $k = \frac{p}{q}$  é maior do que zero e menor do que 1. Isso nos garante que  $k \in [0, 1]$ .

## 5.2 Elementos do Conjunto de Cantor na base 3

Outra característica importante sobre o conjunto de Cantor necessita que possamos compreender como escrever um número em outra base, no caso a base 3.

Observe que, nas etapas da construção do conjunto de Cantor, quando consideramos a **OBSERVAÇÃO 1**, todos os extremos dos intervalos são números do tipo  $\frac{p}{3^n}$ . Então, pela **Proposição 5.1**, todos tem representação finita na base 3. Com isso, todos os extremos de intervalos das iterações do Conjunto de Cantor tem representação finita na base 3!

Na primeira iteração, excluimos o intervalo  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Como  $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$  e  $\frac{2}{3} = (0, 2)_3$ , então isso quer dizer que excluimos, na base 3, todos os números entre 0, 1 e 0, 2. Logo excluimos todos os números do tipo  $0, 1x_2x_3\dots$ .

Na segunda iteração, excluimos os intervalos  $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$  e  $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ . Como  $\frac{1}{9} = (0,01)_3$ ,  $\frac{2}{9} = (0,02)_3$ ,  $\frac{7}{9} = (0,21)_3$  e  $\frac{8}{9} = (0,22)_3$ , então isso quer dizer que excluimos, na base 3, todos os números entre 0,01 e 0,02, bem como os números entre 0,21 e 0,22. Logo, excluimos todos os números dos tipos  $0,01x_3x_4\dots$  e  $0,21x_3x_4\dots$ .

Repetindo essa análise infinitas vezes, acabamos excluindo quase todos os números que possuem algarismos 1 em sua estrutura.

Mas ainda há um problema aqui: ainda restam números que possuem algarismos 1 em sua estrutura, como 0,1, 0,01, 0,21, que são os próprios extremos dos intervalos!

A nossa saída é simples:

Na base 10, podemos dizer que 0,999... é equivalente a 1, dizemos que na base 3 o número 0,2222... também é equivalente a 1, bem como os números  $0,1 = 0,0222\dots$ ,  $0,01 = 0,002222\dots$ ,  $0,001 = 0,0002222\dots$ , etc.

Então 0,1, 0,01, 0,21 podem ser reescritos como 0,0222..., 0,00222... e 0,20222..., respectivamente. Desse modo, conseguimos eliminar todos os números com o algarismo 1.

Conclusão:

**BASE 3**

**Se um número pertence ao conjunto de Cantor, ele certamente só possui os algarismos 0 e 2 na sua escrita na base 3.**

Isso nos ajudará mais adiante.

### 5.3 Método Diagonal de Cantor

O próprio Cantor desenvolveu um método chamado *argumento diagonal de Cantor*, ou simplesmente *método diagonal*. Publicado no *Relatório anual da Associação Alemã de Matemático* em 1891, em que visava mostrar que existem conjuntos infinitos que não há uma função bijetiva entre ele e o conjunto dos naturais, criando o conceito de conjuntos não-enumeráveis.

Em seu trabalho, Cantor considera o conjunto  $M$  de todas as seqüências infinitas  $E$  formadas apenas por dois *bits*, no caso representaremos como os números binários 0 e 1. Sequências como:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 11111111\dots && \text{(apenas 1's)} \\
 E_2 &= 00000000\dots && \text{(apenas 0's)} \\
 E_3 &= 10101010\dots && \text{(repetindo 10)} \\
 E_4 &= 01010101\dots && \text{(repetindo 01)} \\
 E_5 &= 10110110\dots && \text{(repetindo 101)} \\
 E_6 &= 11011011\dots && \text{(repetindo 110)} \\
 E_7 &= 00100100\dots && \text{(repetindo 001)} \\
 E_8 &= 01001001\dots && \text{(repetindo 010)} \\
 &\dots && \dots
 \end{aligned}$$

Suponha que seja possível contar o número de elementos do conjunto  $M$ . Ou seja, vamos afirmar que, por exemplo,  $M$  tenha um total de  $n$  seqüências  $E$ .

Assim  $M = \{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$ . Cantor afirma que existe um outro conjunto  $M$  que não possui o "sopro" da série  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , significando que  $M$  tem um tamanho diferente da soma de cada seqüência  $E_n$ , ou seja, mesmo que  $M$  seja construído de todas as seqüências infinitas dos números binários 0 e 1, podemos construir uma nova seqüência  $E_0$  que "é um elemento de  $M$  e não é um elemento de  $M$ ". Essa nova seqüência  $E_0$  é construída usando os

*complementos binários* de um *bit* de cada sequência  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , o que parece estranho mas vai fazer sentido.

Um *complemento de um número binário* é definido como o valor obtido pela inversão dos bits na representação do número (ou seja, trocando 0 por 1 e vice-versa). Assim,  $E_0$  é composto do complemento do primeiro dígito da sequência  $E_1$  (1), o complemento do segundo dígito da sequência  $E_2$  (0), o complemento do terceiro dígito da sequência  $E_3$  (1) e assim sucessivamente, até finalmente para o complemento do  $n$ -ésimo dígito da sequência  $E_n$ .

A partir das sequências acima, a nova sequência  $E_0$  seria então:  $E_0 = 010010\dots$ . Esse elemento certamente está em  $M$  pois é formado por zeros e uns, mas ao mesmo tempo não está em  $M$ , pois seu primeiro bit é diferente do primeiro bit de  $E_1$  então  $E_0 \neq E_1$ , seu segundo bit é diferente do segundo bit de  $E_2$  então  $E_0 \neq E_2$ , seu terceiro bit é diferente do terceiro bit de  $E_3$  então  $E_0 \neq E_3$ , e assim cada bit é diferente de todos os outros  $E_i$ 's de  $M$ . Logo,  $M$  não pode ter apenas  $n$  sequências  $E$ .

Se incluirmos  $E_0$  na contagem, teremos que  $M = \{E_0, E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$ , com um total de  $n + 1$  sequências. Então, se repetirmos o mesmo processo mais uma vez, criando um  $E'_0$  que tem todos os bits trocados posição a posição com todos as sequências de  $M$ , veremos que chegaremos novamente à conclusão de que não é possível contar as sequências de  $M$ . Assim,  $M$  é um conjunto que não pode ser enumerado, o que é o mesmo que afirmar que  $M$  possui infinitos elementos.

Essa estratégia é muito útil e já foi utilizada em algumas demonstrações importantes envolvendo enumerabilidade ao longo da história da matemática.

Agora podemos demonstrar algumas propriedades importantes sobre o conjunto de Cantor.

## 6 Propriedades do Conjunto de Cantor

A cada resultado que será mostrado a seguir, teremos um rascunho descrevendo um passo-a-passo dos raciocínios envolvidos da demonstração, seguido da escrita final da mesma, mais elegante, compacta e omitindo alguns passos que envolvem a interpretação da demonstração. A ideia é compreender quais são os passos que conectam as afirmações e conclusões dentro da demonstração.

### 6.1 O conjunto de Cantor é fechado.

#### RASCUNHO

Definimos o conjunto de Cantor como  $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$ , onde a cada iteração  $\mathcal{C}_i$  removemos seu terço médio aberto e chamamos cada intervalo aberto removido de  $I_n$ . Sob o ponto de vista dos intervalos abertos  $I_n$ , sabemos que:

- Um intervalo aberto é um conjunto aberto, logo cada  $I_n$  é um conjunto aberto;
- A união de uma família de conjuntos abertos é um conjunto aberto, então  $I = \bigcup I_n$  é um conjunto aberto;
- O complementar de um conjunto aberto é um conjunto fechado. Como  $I$  é um conjunto aberto, logo  $I^C$  é um conjunto fechado.

E como  $\mathcal{C} = I^C$ , então  $\mathcal{C}$  é um conjunto fechado.

Reorganizando essas ideias do rascunho, podemos escrever a demonstração como:

*Demonstração.* Sendo  $I = \bigcup I_n$  o conjunto dos terços médios abertos retirados a cada iteração na construção de  $\mathcal{C}$ , como os intervalos retirados são abertos então  $I$  é um conjunto aberto, logo  $\mathcal{C} = I^C$  é um conjunto fechado.  $\square$

### 6.2 O conjunto de Cantor é compacto.

#### RASCUNHO

Essa vem de imediato da definição de Conjunto Compacto. A **Definição 3.1** da aula anterior afirma que:

**Definição 3.1:** *Um conjunto é dito **compacto** se é limitado e fechado.*

Como mostramos no item anterior,  $\mathcal{C}$  é fechado. E como o intervalo  $[0, 1]$  é um conjunto limitado (pois todo intervalo fechado é um conjunto limitado), então qualquer subconjunto de  $[0, 1]$  será limitado inferiormente por 0 e superiormente por 1, sendo com isso também um conjunto limitado. Como  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ , então,  $\mathcal{C}$  é fechado e limitado, e portanto compacto.

*Demonstração.* Como  $[0, 1]$  é limitado e  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ , então  $\mathcal{C}$  também é limitado. E como  $\mathcal{C}$  é fechado, então  $\mathcal{C}$  é compacto, por definição.  $\square$

### 6.3 O conjunto de Cantor tem interior vazio.

#### RASCUNHO

É de se imaginar que o interior de  $\mathcal{C}$  não seja vazio, afinal sabemos que existem pontos que estão em  $\mathcal{C}$ , como  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  e  $1$ , entre outros, por exemplo. Mas esses pontos estão nos extremos dos subintervalos, então será que há pontos interiores?

Vamos supor que haja pontos interiores a  $\mathcal{C}$ . Ou seja, **HIPÓTESE:**  $\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ .

Se o interior não é vazio, então um ponto  $a \in \text{int}\mathcal{C}$ , o que por definição significa que existe um  $\epsilon > 0$  tal que o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \in \mathcal{C}$ . Ora, mas se esse intervalo está em  $\mathcal{C}$ , ele terá que estar em todas as iterações, o que pode ser escrito matematicamente

como  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$ .

Mas, como cada  $\mathcal{C}_i$  é a união de inúmeros subintervalos fechados, então podemos afirmar que o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  deve estar em algum desses subintervalos de  $\mathcal{C}_i$ , em toda e qualquer iteração.

Ao invés de continuar infinitamente as iterações, vamos para numa  $n$ -ésima iteração qualquer. Sabemos, pela **OBSERVAÇÃO 2**, que nessa iteração  $\mathcal{C}_n$ , cada subintervalo tem comprimento  $\frac{1}{3^n}$ . Mas se continuarmos as iterações, teremos que  $n$  tende ao infinito,

logo o comprimento desses subintervalos tenderão a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ .

Usando a definição de limite, podemos afirmar que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$  então

$$\left| \frac{1}{3^n} - 0 \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \epsilon \quad (\text{i})$$

. Isso é o mesmo que afirmar que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que o comprimento desses subintervalos é menor do que  $\epsilon$ .

Mas como o comprimento do intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  é  $a + \epsilon - (a - \epsilon) = a + \epsilon - a + \epsilon = 2\epsilon$ , na  $n$ -ésima iteração, com  $n > n_0$ , o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  tem comprimento  $2\epsilon$  que é maior do que  $\epsilon$ , e que por sua vez, pelo resultado (i), é maior do que  $\frac{1}{3^{n_0}}$ , então esse intervalo não pode pertencer a nenhum dos subintervalos de  $\mathcal{C}_{n_0}$  (porque o comprimento dele é maior que o comprimento dos subintervalos de  $\mathcal{C}_{n_0}$ ), o que contradiz o fato de que  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  pertence a algum dos subintervalos de  $\mathcal{C}_i$ , em toda e qualquer iteração.

Portanto nossa hipótese estava equivocada. Logo  $\text{int}\mathcal{C} = \emptyset$ .

Reorganizando essas ideias do rascunho, podemos escrever a demonstração como:

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que  $\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Com isso, seja  $a \in \text{int}\mathcal{C}$ . Então, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \in \mathcal{C}$ . Segue-se que  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i$ , ou seja,  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \in \mathcal{C}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Haja visto que  $\mathcal{C}_n$  é a união de  $2^n$  intervalos disjuntos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ , o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  deverá estar contido em um dos subintervalos de  $\mathcal{C}_n$ . Como  $\frac{1}{3^n} \rightarrow 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^{n_0}} < \epsilon$ .

Mas o intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  tem comprimento  $2\epsilon > \epsilon > \frac{1}{3^{n_0}}$ . Desta forma, não pode estar contido em nenhum dos subintervalos de  $\mathcal{C}_{n_0}$ . Logo,  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \notin \mathcal{C}_{n_0}$ , o que contradiz a nossa hipótese. Portanto,  $\text{int}\mathcal{C} = \emptyset$ .  $\square$

## 6.4 O conjunto de Cantor é não enumerável.

### RASCUNHO

Aqui vamos usar o Método Diagonal de Cantor discutido anteriormente para contornar essa resolução.

Como sabemos que, na base 3, os elementos do conjunto de Cantor são escritos usando apenas os algarismos 0 e 2, e com isso são "binários", logo esse método é aplicável nessa situação. Portanto, vamos usar esse mesmo método para mostrar que  $\mathcal{C}$  não é enumerável.

**HIPÓTESE:**  $\mathcal{C}$  é um conjunto enumerável.

Como sabemos pela conclusão do nosso estudo da **BASE 3**, se  $x \in \mathcal{C}$ , então  $x$  pode ser escrito na base 3 como  $0, x_1x_2x_3\dots x_n\dots$ , onde cada  $x_i$  é um dos dígitos 0 ou 2. Então, vamos propor uma lista que enumere esse conjunto. Digamos que  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}\dots \\ a_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}x_{25}\dots \\ a_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}x_{35}\dots \\ a_4 &= 0, x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}x_{45}\dots \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Cada  $x_{ij}$  assume os valores 0 ou 2, para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ . (Ex: Observe que  $x_{ij}$  é escrito de forma que  $j$  indica que ele é o  $j$ -ésimo dígito do elemento  $a_i$  do Conjunto de Cantor. Por exemplo,  $x_{47}$  indica o sétimo dígito do quarto elemento do Conjunto de Cantor.)

Vamos criar um elemento, escrito na base 3,  $b_k = b_{k1}b_{k2}b_{k3}b_{k4}\dots$ , onde todo  $b_{kj}$  assume os valores 0 ou 2, para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Então, pelo que estudamos sobre a **BASE 3**, certamente  $b_k$  é um elemento do Conjunto de Cantor. Se  $b_k$  é tal que cada  $b_{kj} \neq x_{jj}$ . Isso quer dizer que:

- $b_k \neq x_1$ , pois  $b_{k1} \neq x_{11}$ ;
- $b_k \neq x_2$ , pois  $b_{k2} \neq x_{22}$ ;
- $b_k \neq x_3$ , pois  $b_{k3} \neq x_{33}$ ;
- $b_k \neq x_4$ , pois  $b_{k4} \neq x_{44}$ ;

E assim sucessivamente. Logo,  $b_k \neq x_i$  para todo  $i$  natural. Portanto,  $b_k$  é um elemento do conjunto de Cantor que não está presente nessa lista. Logo, essa lista não enumera todos os elementos de  $\mathcal{C}$ , o que significa que nossa hipótese estava errada, portanto  $\mathcal{C}$  não pode ser enumerável.

Reorganizando essas ideias do rascunho, podemos escrever a demonstração como:

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $\mathcal{C}$  seja enumerável.

Como sabemos, se  $x \in \mathcal{C}$ , então  $x$  pode ser escrito na base 3 como  $0, x_1x_2x_3\dots x_n\dots$ , onde cada  $x_i \in \{0, 2\}$ . Então, vamos propor uma lista que enumere esse conjunto. Digamos que  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}\dots \\ a_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}x_{25}\dots \\ a_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}x_{35}\dots \\ a_4 &= 0, x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}x_{45}\dots \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Cada  $a_{ij}$  assume os valores 0 ou 2, para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ .



Tome um  $b_k$  escrito na base 3 tal que  $b_k = b_{k1}b_{k2}b_{k3}b_{k4}\dots$ , onde todo  $b_{kj}$  assume os valores 0 ou 2, para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Assim, certamente  $b_k \in \mathcal{C}$ . Se  $b_k$  é tal que cada  $b_{kj} \neq a_{jj}$ , então  $b_k \neq a_1$ , pois  $b_{k1} \neq a_{11}$ ;  $b_k \neq a_2$ , pois  $b_{k2} \neq a_{22}$ ;  $b_k \neq a_3$ , pois  $b_{k3} \neq a_{33}$ ;  $b_k \neq a_4$ , pois  $b_{k4} \neq a_{44}$ ; assim sucessivamente. Logo,  $b_k \neq a_i, \forall i \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $b_k$  é um elemento do conjunto de Cantor que não está presente nessa lista. Então nossa hipótese é falsa, e portanto  $\mathcal{C}$  não pode ser enumerável.  $\square$

## 6.5 O conjunto de Cantor não possui pontos isolados.

### RASCUNHO

Essa é a última e talvez a mais difícil de visualizar das cinco propriedades do Conjunto de Cantor. Então, vamos fazer essa demonstração em duas partes (vamos respirar bem fundo que aqui a explicação é longa...). Pensando num ponto  $c \in \mathcal{C}$  qualquer, há duas possibilidades: ou  $c$  está na extremidade de algum subintervalo de uma iteração  $\mathcal{C}_n$  ou  $c$  está dentro de algum subintervalo de uma iteração  $\mathcal{C}_n$ .

**Primeiro caso:** Suponha que  $c$  está na extremidade de algum subintervalo.

Para irmos da  $n-1$ -ésima para a  $n$ -ésima iteração, vamos extrair os terços médios abertos dos subintervalos de  $\mathcal{C}_{n-1}$ . Seja  $[a, b]$  um dos  $2^{n-1}$  subintervalos de  $\mathcal{C}_{n-1}$ . Assim, se o terço médio aberto de  $[a, b]$  for o intervalo  $(c, d)$ , então ao removê-lo restarão apenas o primeiro terço  $[a, c]$  pela esquerda e o terceiro terço  $[d, b]$  pela direita para  $\mathcal{C}_n$ , conforme ilustrado na figura 5.

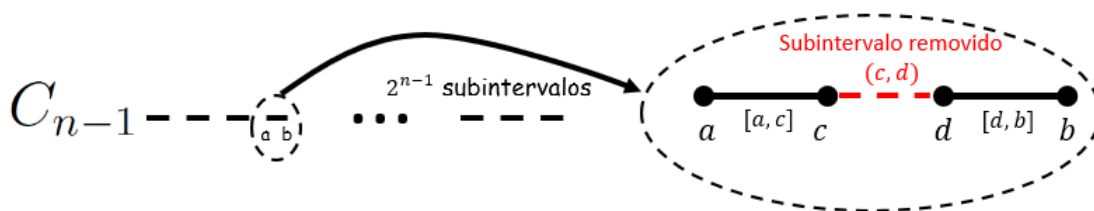


Figura 5: Passo em  $\mathcal{C}_{n-1}$

Focando no ponto  $c$ , que é a extremidade esquerda do intervalo retirado (mas também é a extremidade direita de um dos intervalos que ficaram, no caso o intervalo  $[a, c]$ ), para ir da  $n$ -ésima para a  $n+1$ -ésima iteração, devemos retirar o terço médio aberto do intervalo  $[a, c]$  de  $\mathcal{C}_n$ , que definiremos  $(c_1, d_1)$ . Assim, restarão apenas os intervalos  $[a, c_1]$  e  $[d_1, c]$  para os subintervalos de  $\mathcal{C}_{n+1}$ , conforme ilustrado na figura 6.

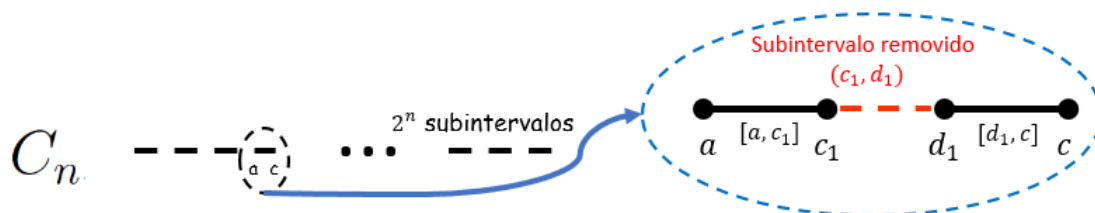


Figura 6: Passo em  $\mathcal{C}_n$

Para passarmos à  $n + 2$ -ésima iteração, fazendo o mesmo, retiramos o terço médio aberto de  $[d_1, c]$ , que chamaremos de  $(c_2, d_2)$ , nos restarão os terços  $[d_1, c_2]$  e  $[d_2, c]$ . Generalizando, com as iterações seguintes, sempre restarão terços finais do tipo  $[d_k, c]$ , com  $d_k \in \mathcal{C}$ .

Observe que, se  $n$  tende ao infinito, então o comprimento do subintervalo  $[d_k, c]$ , dado por  $c - d_k$  tende a zero, ou seja,  $d_k$  está cada vez mais próximo de  $c$ . Em outras palavras,  $\lim d_k = c$ , e isso equivale a afirmar que  $d_k \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$ , para todo  $\epsilon > 0$ .

Logo, toda vizinhança de  $c$  conterá um ponto  $d_k \in \mathcal{C}$  diferente dele mesmo, que é o mesmo que afirmar que  $c$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{C}$ . Como  $c$  é genérico, podemos concluir que todos os pontos que são extremos de intervalos retirados de  $\mathcal{C}$  são pontos de acumulação de  $\mathcal{C}$ . Com isso concluímos a primeira parte.

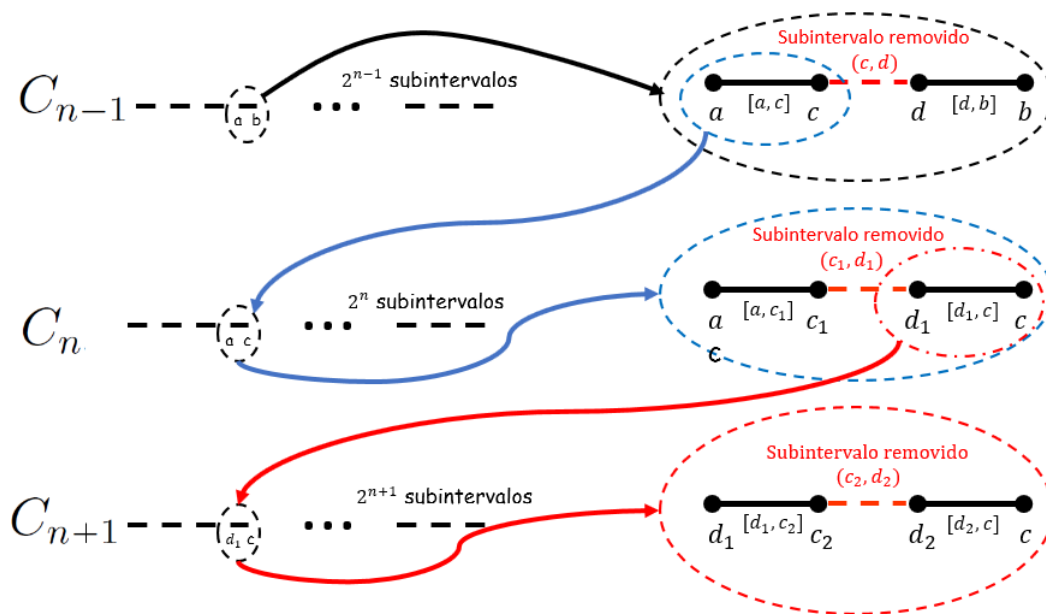


Figura 7: Passos entre  $\mathcal{C}_{n-1}$ ,  $\mathcal{C}_n$  e  $\mathcal{C}_{n+1}$

**Segundo caso:** Agora supor  $c \in \mathcal{C}$  tal que  $c$  não seja extremo de nenhum dos subintervalos de  $\mathcal{C}$ . Como  $c$  está no Conjunto de Cantor então, a cada iteração, ele deve estar em algum dos subintervalos que as formam, conforme figura 8.

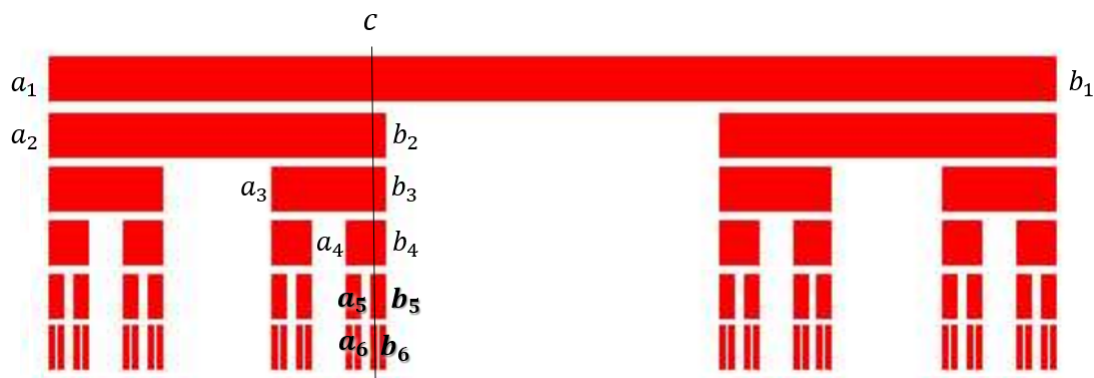


Figura 8: Um exemplo de uma posição de  $c$  em alguns intervalos  $[a_n, b_n]$

Então, numa  $n$ -ésima iteração,  $c$  estará em algum subintervalo  $[a_k, b_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  qualquer de  $\mathcal{C}_n$ . Como o subintervalo  $[a_k, b_k]$  é um conjunto fechado, então todos seus pontos são aderentes. Logo,  $c$  é um ponto aderente à  $\mathcal{C}$ . O subintervalo  $[a_k, b_k]$  tem comprimento  $b_k - a_k = \frac{1}{3^k}$ , e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3^k} = 0$ . Logo, a cada iteração,  $a_k$  e  $b_k$  se aproximam cada vez mais de  $c$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c$ .

Nessas condições, mesmo se removermos o ponto  $c$  do Conjunto de Cantor, essas séries  $(a_k)$  e  $(b_k)$ , geradas a cada iteração, continuam tendo seu limite tendendo a  $c$ . Isso significa que, a medida que vamos passando as iterações, os subintervalos  $[a_k, b_k]$  vão se encolhendo em comprimento, quase se "apertando" cada vez mais em direção a  $c$ , e no infinito tanto  $a_k$  quanto  $b_k$  tendem a  $c$ .

Agora devemos nos lembrar da **Proposição 2.5** da aula anterior, que diz:

**Proposição 2.5:** O ponto  $a$  é ponto de acumulação de  $X$  se, e somente se,  $a$  é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in X - \{a\}$ .

Com isso, podemos usar essa proposição, pois existem sequências  $x_n \in (\mathcal{C} - \{c\})$  tais que  $\lim x_n = c$  (por exemplo, a sequência  $(x_n) : x_n = a_n, n \in \mathbb{N}$ ), e portanto,  $c$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{C}$ . Como  $c$  é genérico, então todo ponto  $c \in \mathcal{C}$  que não é extremo de um subintervalo de  $\mathcal{C}$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{C}$ . Isso conclui a segunda parte.

Isto posto, se considerarmos o primeiro e o segundo caso, independentemente de um elemento do Conjunto de Cantor ser ou não ser extremidade de algum intervalo omitido em alguma etapa da construção do conjunto de Cantor, ele é ponto de acumulação.

Podemos concluir, portanto, que  $\mathcal{C}$  não possui pontos isolados, ou seja, todos os seus pontos são de acumulação.

**Um ponto abstrato, mas importante:** A rigor, matematicamente precisaríamos comprovar que há pelo menos um ponto em  $\mathcal{C}$ . Isso se dá em razão de  $\mathcal{C}$  ser um conjunto compacto (fechado e limitado), e com isso pelo *Teorema do Valor Intermediário* (algo que será visto posteriormente no curso), de fato existe  $c$  em qualquer subintervalo  $[a_n, b_n]$  de uma iteração  $\mathcal{C}_n$ .

Ufa! Depois de todo esse raciocínio, podemos reorganizar e condensar essas ideias do rascunho para escrever a demonstração como segue:

*Demonstração.* Seja  $c \in \mathcal{C}$  extremidade de algum intervalo, por exemplo  $(c, d)$ , omitido em alguma etapa do intervalo  $[0, 1]$  para a construção do conjunto de Cantor. Quando  $(c, d)$  foi retirado, restou um certo intervalo  $[a, c]$ . Note que nas etapas seguintes da construção de  $\mathcal{C}$ , restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo  $[d_n, c]$ . Sendo assim, perceba que o comprimento  $c - d_n$  tende a zero, logo  $d_n \rightarrow c$ . Portanto,  $c$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{C}$ , ou seja,  $\mathcal{C}$  não é ponto isolado.

Seja  $c \in \mathcal{C}$ , tal que  $c$  não seja extremo de intervalo retirado de  $[0, 1]$  para formar  $\mathcal{C}$ . Logo, se  $c \in [a_n, b_n]$ , então  $c$  é aderente à  $[a_n, b_n]$ . Veja que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , depois da  $n$ -ésima etapa da construção de  $\mathcal{C}$ , temos que  $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$ . Assim  $\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim b_n$ , e como  $a_n \leq c \leq b_n$ , então  $c = \lim b_n = \lim a_n$ , o que significa que  $c$  é ponto de acumulação de  $\mathcal{C}$ .

Portanto no conjunto de Cantor todos os pontos são de acumulação, ou seja,  $\mathcal{C}$  não possui pontos isolados.  $\square$

Bom, essas são as principais características do Conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ :

- É um conjunto fechado;
- É um conjunto compacto;
- Tem interior vazio;
- É não enumerável;
- Todos os seus pontos são de acumulação (não possui pontos isolados);

## 7 Para refletir...

Fica uma questão para que possamos pensar sobre o comprimento de  $\mathcal{C}$ . Vamos abstrair: Se pudéssemos passar por todas as infinitas iterações da construção, ao final, qual será o comprimento de  $\mathcal{C}$ ?

Para responder a essa questão, pense sobre a questão a seguir:

1. Seja  $I = \bigcup I_n$  o conjunto formado pela união de todos os intervalos abertos removidos a cada iteração na construção do conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$ . Assim
  - a) Qual é o comprimento de  $I$ ? (Já falamos sobre o comprimento de cada um dos subintervalos em cada iteração. Ainda, é importante lembrar como se faz a soma dos termos de uma PG infinita.)
  - b) Qual é o comprimento de  $\mathcal{C}$ ? (Pense que, se você descobrir o comprimento de  $I$ , como o comprimento de  $[0, 1]$  é 1, então o comprimento de  $\mathcal{C}$  deve ser o que falta do comprimento de  $I$  para completar 1!)

Espero que esse material tenha ajudado a entender esse conjunto peculiar e ajudado a reforçar a compreensão sobre os aspectos topológicos estudados anteriormente (conjuntos abertos, fechados, compactos, ponto de acumulação, ...).

Após essa leitura, espero que possa responder à nossa pesquisa, que será disponibilizada na plataforma de estudo.

Um grande abraço!

## APÊNDICE C – Formulário dado aos participantes

# Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula Invertida: Uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática

Esse formulário está vinculado à atividade na disciplina MA40, no curso Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, e visa obter respostas acerca do material disponibilizado à turma de Análise Real do curso de Matemática na FURG, relativo ao **Conjunto de Cantor**.

A ideia principal nessa atividade é responder à questão: *Como elaborar um material escrito que seja adequado para que, um estudante de matemática, que estuda individualmente apenas pelo seu material didático, possa compreender a maior parte das demonstrações envolvidas?*

Isso diminuiria a relação de dependência entre aluno e professor, e com isso estimularíamos a autonomia dos estudantes.

Esse material foi elaborado com o intuito de apresentar uma explicação mais aprofundada de algumas demonstrações matemáticas usando um **sistema de rascunhos**. Esses rascunhos servem para pormenorizar os detalhes envolvidos nas demonstrações, a fim de deixar claro para o estudante todos os passos utilizado nas demonstrações. Depois de discutida a demonstração no rascunho, é elaborada e apresentada a versão final da demonstração.

Também foram desenvolvidos com carinho os **elementos visuais** (tabelas, quadros, espaçamento do texto, fonte, cores) a fim de tornar a leitura mais fluida e agradável.

Além disso, foram inseridas **figuras** a fim de ilustrar geometricamente algumas situações.

As questões serão frases afirmativas e você poderá concordar ou discordar, bem como comentar sobre a sua resposta (opcional). Os comentários não são obrigatórios, mas certamente todos serão bem vindos. As últimas perguntas são subjetivas e podem ficar à vontade para expressar suas opiniões.

Desde já agradeço a tod@s pela atenção e pela participação.

**\*Obrigatório**

1. O material está apresentado de forma que a leitura se tornou mais interessante, mais clara. \*

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Concordo totalmente

2. Comentários sobre esse item:

---

---

---

---

---

3. O material ajudou em uma melhor compreensão sobre os conteúdos abordados. \*

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Concordo totalmente

4. Comentários sobre esse item:

---





10. Comentários sobre esse item:

---

11. A fonte escolhida é agradável aos olhos e ajudou a tornar a leitura mais interessante. \*

*Marcar apenas uma oval.*

1      2      3      4      5

---

Discordo totalmente      Concordo totalmente

---

12. Comentários sobre esse item:

---

13. O espaçamento entre os parágrafos (bem como entre as tabelas, figuras, imagens, fórmulas...) é adequado e ajudou a tornar a leitura mais interessante. \*

*Marcar apenas uma oval.*

1      2      3      4      5

---

Discordo totalmente      Concordo totalmente

---

14. Comentários sobre esse item:

---



20. Comentários sobre esse item:

---

**## Perguntas adicionais: Essas perguntas são relativas à utilização de material escrito (livros, apostilas, pdf's de materiais...) para os estudos, levando em consideração um estudo que disponha apenas desse tipo de material. ##**

21. Quando você estuda apenas com o apoio de um livro didático, o que você mais sente falta? Ou quais são suas maiores dificuldades?

---

---

---

---

---

22. De modo geral, você considera que é possível estudar apenas com a utilização de material escrito? Se não, quais outros materiais você considera importantes nos seus estudos?

---

---

---

---

---

23. Qual sua opinião sobre esse sistema proposto que mostra os rascunhos antes de apresentar a demonstração final? Ele ajudou a melhorar a sua compreensão do resultado final? Gostaria de sugerir algum ajuste ou alteração?

---

---

---

---

---

---

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

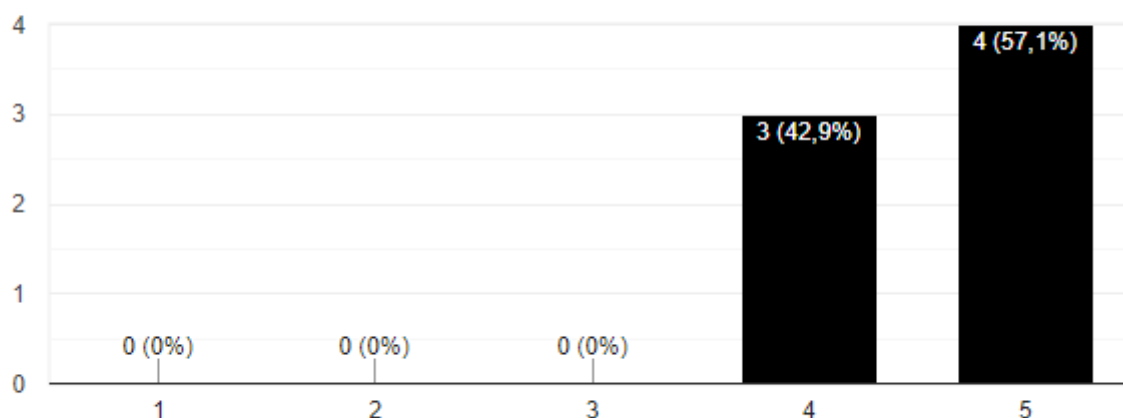
## APÊNDICE D – Respostas ao formulário

# Material didático para o Ensino Superior com a metodologia da Sala de Aula Invertida: Uma proposta de elaboração de material didático para alunos de Licenciatura em Matemática

7 respostas

O material está apresentado de forma que a leitura se tornou mais interessante, mais clara.

7 respostas



Comentários sobre esse item:4 respostas

Prefiro materiais que possuam exemplos detalhados que se misturem ao conteúdo e facilitem o entendimento o que esta escrito

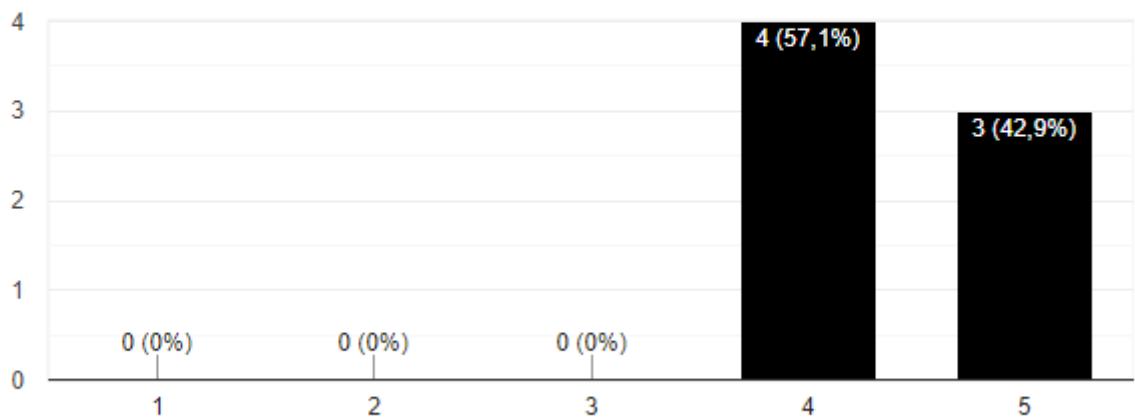
O material estava com uma leitura clara, facilitando o estudo.

O material estava claro para o entendimento e muito bem detalhado, proporcionando assim que o discente tenha autonomia de compreender os conteúdos ali inseridos sem muitas dúvidas.

Eu gostei muito

O material ajudou em uma melhor compreensão sobre os conteúdos abordados.

7 respostas



Comentários sobre esse item:3 respostas

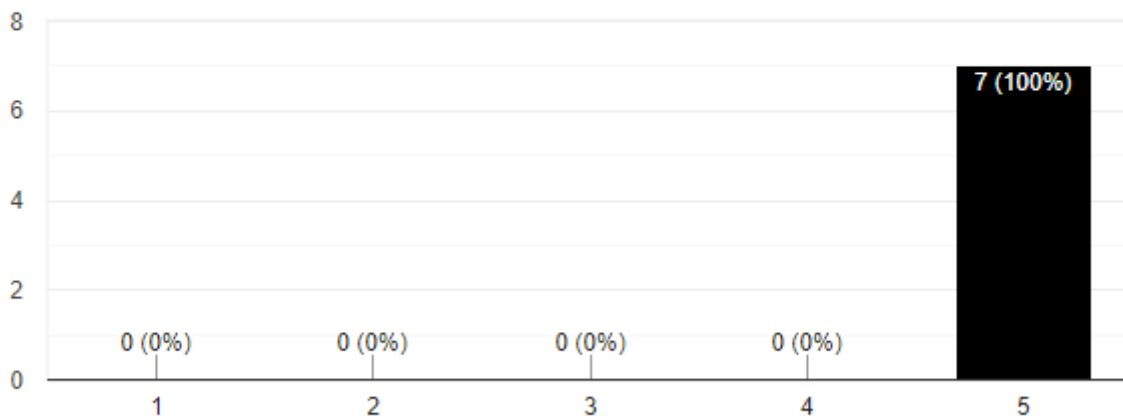
Mesmo sem nunca ter ouvido falar desse conteúdo, consegui ter uma noção de como compreender o conteúdo devido ao material elaborado.

Com toda certeza! O material estava bem elaborado e permitiu entender os assuntos ali inseridos de forma tranquila e sem gerar muitas dúvidas.

sim

Os **elementos visuais** estavam agradáveis e ajudaram a tornar a leitura mais interessante.

7 respostas



Comentários sobre esse item: 4 respostas

Os elementos visuais ajudaram na compreensão do que estava sendo explicado

As figuras trazidas no material foram bem didáticas.

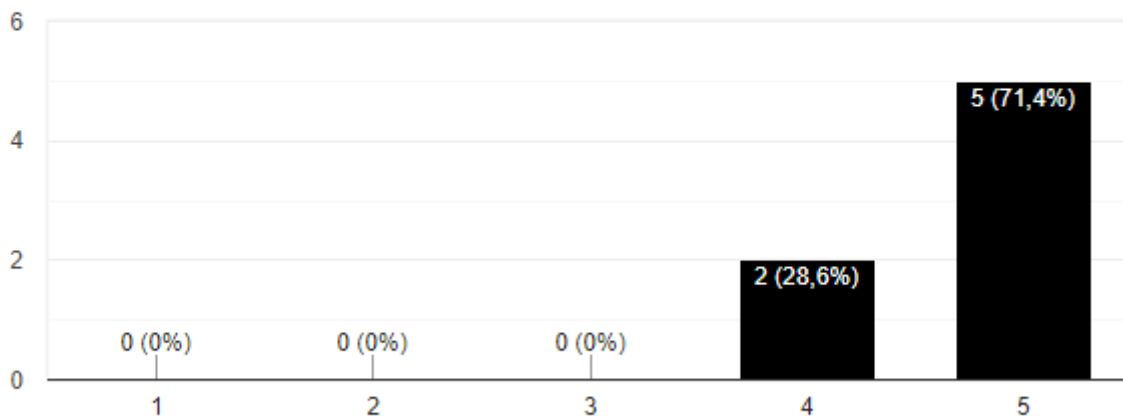
Claro, todos os elementos visuais do material encontravam-se em harmonia com o texto o que proporcionou uma leitura maravilhosa e atenta do materia.

sim



As **figuras** estavam adequadas e foi possível conectá-las com a parte do texto às quais essas figuras se referiam.

7 respostas



Comentários sobre esse item: 3 respostas

As figuras eram exemplos práticos que auxiliavam na compreensão do conteúdo

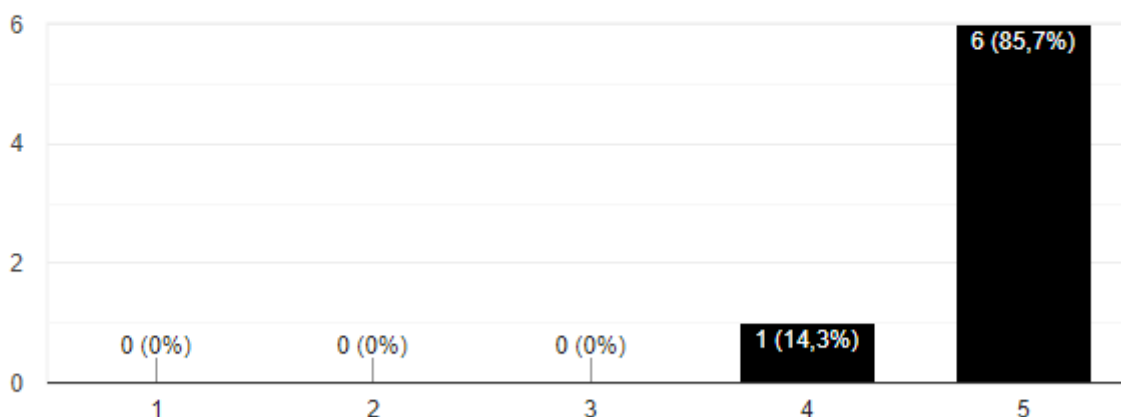
Totalmente

Claro, as figuras ajudaram a entender algumas passagens do texto, tornando mais simples o entendimento (não que o texto não estivesse simples, mas ajuda a compreender de forma mais visual mesmo).

As **figuras** ajudaram a compreender melhor os textos e demonstrações às quais elas se referiam.



7 respostas



Comentários sobre esse item:3 respostas

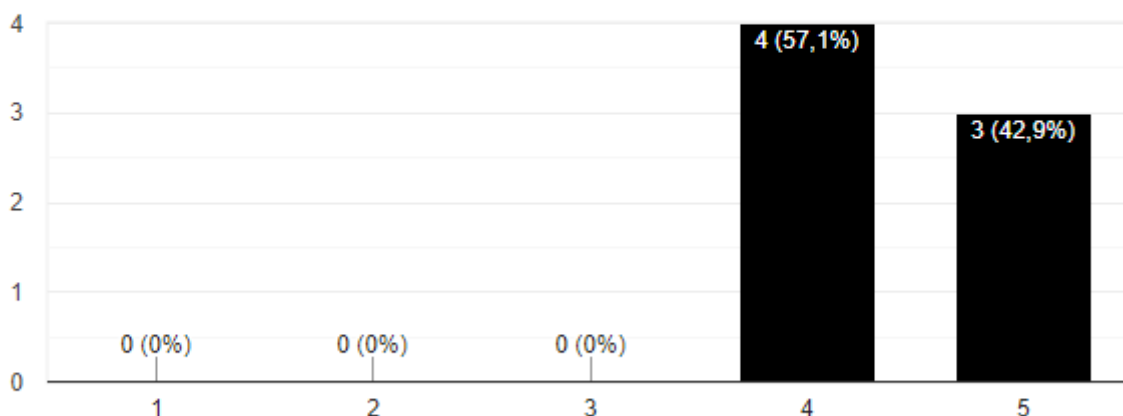
As figuras eram exemplos práticos que auxiliavam na compreensão do conteúdo

Sim! As figuras foram cruciais para visualizar o que o texto da demonstração dizia (claro que apenas o texto já supria isso, mas com a figura torna-se mais interessante por ser algo visual que acaba fazendo conexões cognitivas entre o conteúdo aprendido e nosso cérebro).

sim, pois a parte que tinha que tirar a parte do meio se não tivesse o desenho seria bem complicada de entender.

A fonte escolhida é agradável aos olhos e ajudou a tornar a leitura mais interessante.

7 respostas



Comentários sobre esse item:2 respostas

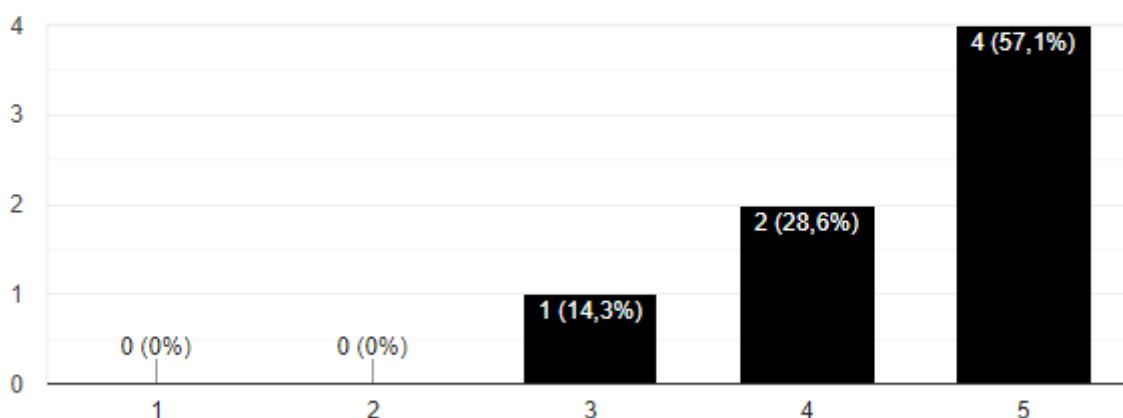
Prefiro fontes limpas, claras, como a dos texto, facilitam a leitura

Como o material estava em pdf eu podia dar zoom no computador, então estava bom, mas caso fosse impresso eu preferiria com a fonte um pouco maior para não cansar durante a leitura.

As cores utilizadas na edição do texto são adequadas e ajudaram a tornar a leitura mais interessante.



7 respostas

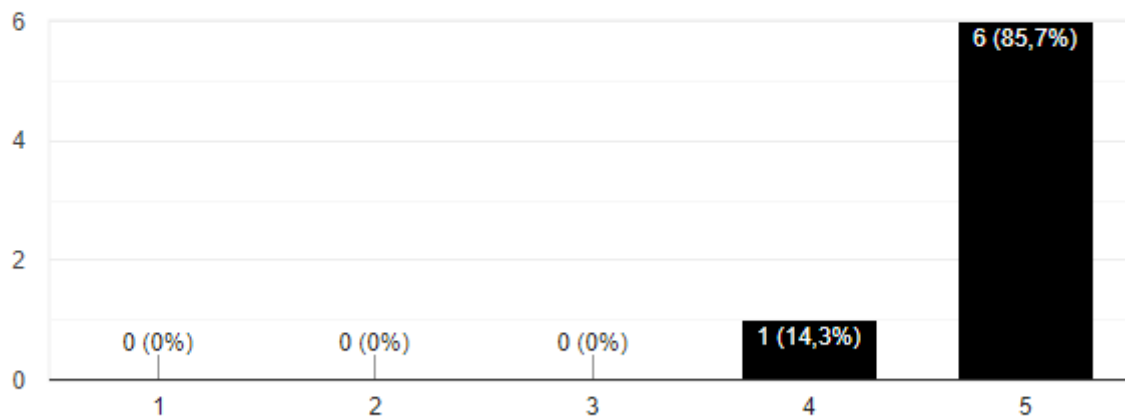


Comentários sobre esse item:1 resposta

Gosto quando os textos possuem partes "chaves" em outras cores, que ressaltem assim a importância do que se está lendo no momento

O **sistema de rascunhos** ajudou a tornar mais clara a compreensão dos passos envolvidos nas demonstrações.

7 respostas



Comentários sobre esse item: 4 respostas

Gostei dos rascunhos, entender o raciocínio de quem está elaborando o texto é muito interessante

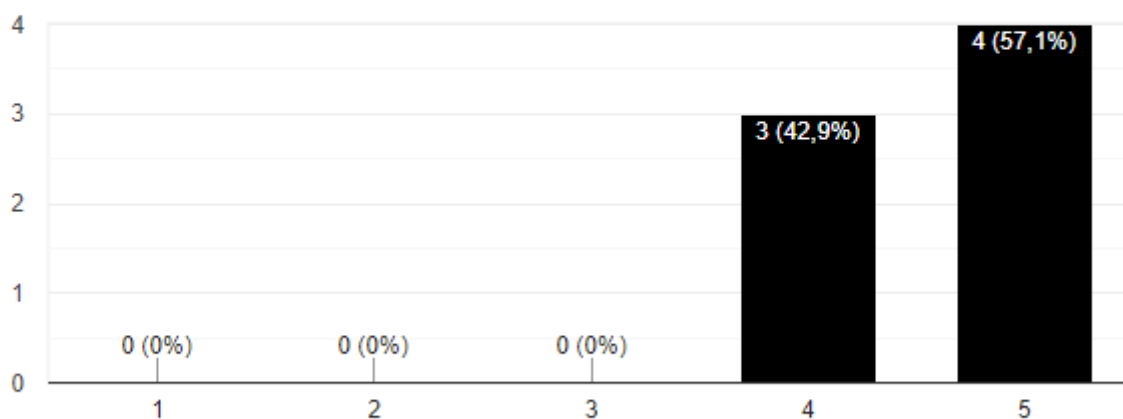
Sim, ficaram bem explicados.

Sim! A partir do rascunho, pude perceber e realizar conexões entre as hipóteses dos resultados que culminaram no entendimento da demonstração (modo mais formal da mesma).

o rascunho trabalha nossa mente pra receber a demonstração

O **sistema de rascunhos** ajudou a entender o texto da demonstração final com mais clareza.

7 respostas



Comentários sobre esse item: 1 resposta

Gostei dos rascunhos, entender o raciocínio de quem está elaborando o texto é muito interessante

**## Perguntas adicionais: Essas perguntas são relativas à utilização de material escrito (livros, apostilas, pdf's de materiais...) para os estudos, levando em consideração um estudo que disponha apenas desse tipo de material. ##**

Quando você estuda apenas com o apoio de um livro didático, o que você mais sente falta? Ou quais são suas maiores dificuldades?

7 respostas

Quando sai de um passo e pula para outro sem ligação com o anterior

Alguns livros não possuem exemplos claros ou algumas vezes possuem exemplos claros mas fáceis, que não auxiliam muitas vezes quando você possui questões mais elaboradas para resolver

Gosto mesmo é de explicação pelo professor ao vivo, pois a leitura não é meu forte, ainda mais se tenho dificuldade no conteúdo.

Quando o autor diz que a demonstração é imediata ou óbvia.

Minha única queixa sobre os livros didáticos é a escassez/carência de exemplos que possam auxiliar os alunos na compreensão de definições ou até mesmo de resultados.

quando eu estudo apenas pelo livro didático eu sinto dificuldade de entender as demonstrações, pois não mostra de onde veio.

Atrapalha quando resolvem pulando passos deixando confuso para quem tenta compreender a logica do conteúdo

De modo geral, você considera que é possível estudar apenas com a utilização de material escrito? Se não, quais outros materiais você considera importantes nos seus estudos?

7 respostas

Eu geralmente estudo somente com material escrito.

Não, hoje sem as mídias digitais e a interação professor, alunos e colegas de aula, é difícil estudar e compreender o conteúdo sozinho

Não, pois gosto de explicação ao vivo pelo professor e a realização de exemplos.

Sim é possível estudar só com material escrito, mas eu prefiro estudar através de vídeo aulas.

Sim! Para isto, basta interesse em querer compreender cada palavra escrita no material porque assim você realmente está estudando e entendendo ele.

sim, se for um material bem explicando e conter bastante exemplos que seja explicados de forma clara e tranquilo, claro que se o professor disponibilizar vídeos explicando alguns exemplos nos ajuda bastante, pois ver e escutar a resolução de um exemplo nos faz refletir melhor.

Eu estudo a maioria das vezes com material escrito

Qual sua opinião sobre esse sistema proposto que mostra os rascunhos antes de apresentar a demonstração final? Ele ajudou a melhorar a sua compreensão do resultado final? Gostaria de sugerir algum ajuste ou alteração?

6 respostas

Ajudou sim na compreensão

Devido a ter uma dificuldade de entender algumas demonstrações, os rascunhos ajudam.

Sim, achei muito útil para facilitar na aprendizagem.

Acho que propor o sistema de rascunhos antes de apresentar a demonstração do resultado é algo muito importante, pois ajuda o cérebro a realizar conexões entre as hipóteses e as definições e/ou resultados já estudados. Com certeza tal sistema de rascunhos auxiliou-me na compreensão das demonstrações formais dos resultados. Sugiro apenas acrescentar na página 2 (bem no finalzinho) o intervalo I1 que faltou na união dos conjuntos  $C2 \cup I2 \cup I3$ ; e na página 10 (também no finalzinho) mudar o  $a_{ij}$  para  $x_{ij}$ . Foram pequenos erros de digitação que sempre passam despercebidos quando trabalhamos com o Latex. De forma geral, o material encontra-se em perfeito estado e com grande potencial para o ensino e aprendizagem individual de cada discente!

eu gostei bastante, pois agente trabalha melhor nosso pensamento pra quando for demonstrar.

Sim, ajudou bastante, eu gostei muito.