

Maria Emília da Silva Valente

**CORONAVÍRUS: CURVAS QUE APROXIMAM  
O NÚMERO DE CONTAGIADOS NA CIDADE  
DE RIO GRANDE - RS**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

JULHO, 2021

Maria Emília da Silva Valente

# **CORONAVÍRUS: CURVAS QUE APROXIMAM O NÚMERO DE CONTAGIADOS NA CIDADE DE RIO GRANDE - RS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por MARIA EMÍLIA DA SILVA VALENTE junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Fabiana Travessini De Cezaro

Coorientador: Dra. Daiane Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

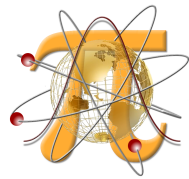
JULHO, 2021

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



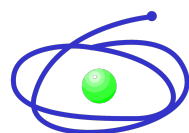
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

---

### Ficha Catalográfica

V154c Valente, Maria Emília da Silva.

Coronavírus: curvas que aproximam o número de contagiados na cidade de Rio Grande - RS / Maria Emília da Silva Valente. – 2021. 61 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Rio Grande/RS, 2021.

Orientadora: Dra. Fabiana Travessini De Cezaro.

Coorientadora: Dra. Daiane Freitas.

1. Pandemia 2. Coronavírus 3. Crescimento Exponencial  
4. Crescimento Logístico I. Cezaro, Fabiana Travessini De II. Freitas, Daiane III. Título.

CDU 578.834

Catálogo na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

**“CORONAVÍRUS: CURVAS QUE APROXIMAM O NÚMERO DE  
CONTAGIADOS NA CIDADE DE RIO GRANDE - RS”**

Dissertação submetida por **MARIA EMÍLIA DA SILVA VALENTE** como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre, pelo curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - junto ao Instituto de Matemática, Física e Estatística (IMEF) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Trabalho aprovado por:

*Fabiana T. De Cezaro*

---

Profa. Dra. Fabiana Travessini De Cezaro (FURG)  
(Orientadora)

*Daiane Freitas*

---

Profa. Dra. Daiane Silva de Freitas (FURG)  
(Co-orientadora)

*Fabiola Aiub Sperotto*

---

Profa. Dra. Fabiola Aiub Sperotto (FURG)  
(Membro Interno)

*Stefânia Glaeser*

---

Profa. Dra. Stefânia Glaeser (IFSUL)  
(Membro Externo)

Rio Grande, 02 de julho de 2021.

*Dedico este trabalho a minha amiga Beatriz de Carvalho Dettman que me impulsionou a realizar um sonho esquecido por mais de 30 anos.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por aqui estar e por vencer mais esse desafio.

A minha família, especialmente a minha filha Amélia e ao meu irmão Ernani, pela paciência, força e apoio, suportando meus momentos mais difíceis e me motivando a continuar.

Aos queridos amigos e colegas Rafael Barbosa da Silva e Márcia Falek Rocha pelo apoio e incentivo durante todo o curso. Sentirei muita saudade de recebê-los em casa para nossos encontros semanais de muito estudo, os quais tornaram-se momentos repletos de parceria, cumplicidade e confraternização.

Um agradecimento especial as minhas orientadoras Prof<sup>a</sup> Dra. Fabiana Travessini e Prof<sup>a</sup> Dra. Daiane Freitas pela paciência e apoio incansáveis para me conduzir na realização deste trabalho. Reconheço o empenho e a dedicação envolvidos nesse processo, e a força e motivação que me impulsionaram em todos os momentos, principalmente naqueles de desânimo.

A FURG e aos professores e professoras do PROFMAT por propiciarem e colaborarem na construção deste Mestrado.

A realização dessa dissertação envolveu a participação de muitas pessoas que contribuíram de forma direta e indireta, a todos sou muito grata.

# Resumo

Em nosso trabalho, queremos mostrar algumas curvas simples, estudadas no Ensino Básico, que descrevem ou melhor aproximam o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul. Estas curvas são dadas pela função exponencial e logística. Mostramos que ambas as curvas fornecem uma boa aproximação para o número de contagiados até um determinado tempo. Além disso, exploramos as características principais dos gráficos de cada curva.

**Palavras-chaves:** Pandemia, coronavírus, crescimento exponencial, crescimento logístico.



# Abstract

In our work, we want to show some simple curves, studied in Basic Education, that describe or better approximate the number of infected by the coronavirus in the city of Rio Grande, state of Rio Grande do Sul. These curves are given by the exponential and logistic function. We show that both curves provide a good approximation for the number of infected up to a given time. In addition, we explore the main characteristics of the graphs for each curve.

**Key-words:** Pandemic, coronavirus, exponential growth, logistical growth

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>13</b>
1.1	Objetivos Gerais	13
1.2	Objetivos Específicos	13
<b>2</b>	<b>PANDEMIAS E MATEMÁTICA</b>	<b>15</b>
2.1	Algumas pandemias	15
2.2	A matemática e as pandemias	20
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>24</b>
<b>3.1</b>	<b>Algumas funções elementares</b>	<b>24</b>
3.1.1	Funções Afins	25
3.1.2	Funções exponenciais	27
3.1.3	Funções Logarítmicas	33
<b>3.2</b>	<b>Equações de Diferenças</b>	<b>36</b>
<b>3.3</b>	<b>Modelos matemáticos</b>	<b>38</b>
3.3.1	Modelo Maltusiano Discreto	38
3.3.2	Modelo Logístico Discreto	39
<b>3.4</b>	<b>Modelo SIR</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>ETAPAS DA PROPOSTA DE ATIVIDADE</b>	<b>44</b>
4.1	Plano de atividade	44
<b>5</b>	<b>RELATO DA APLICAÇÃO DA ATIVIDADE</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>

# INTRODUÇÃO

No ano de 2020 o mundo começou a enfrentar uma pandemia disseminada por um vírus da família SARS, sigla inglesa de "síndrome respiratória aguda grave", o SARS-CoV-2 que foi chamado de coronavírus. Este vírus é causador da doença conhecida como Covid-19 e se propagou pelo planeta com alta velocidade de contágio, afetando drasticamente a vida das pessoas. Foi primeiramente identificado na província de Wuhan na China em dezembro de 2019. Transmitido de pessoa a pessoa, se espalhou pelo mundo rapidamente. No Brasil, o primeiro caso registrado de contagiado pelo coronavírus foi em 26 de fevereiro de 2020 na cidade de São Paulo, confirmado pelo Ministério da Saúde, (BRASIL, 2020). Já no Rio Grande do Sul, o primeiro caso confirmado pela Secretaria de Saúde do Estado, por meio do Centro de Vigilância em Saúde, foi datado em 10 de março de 2020, (RS, 2020). Na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul, segundo informações obtidas pelo site da prefeitura, o primeiro caso de contaminação ocorreu em 23 de março de 2020, (GRANDE, 2020b).

Desde o início da pandemia, em várias mídias ouvimos uma enxurrada de explicações e informações sobre a rápida propagação deste vírus. Muitas destas explicações foram associadas a alguns conceitos matemáticos para responder perguntas sobre o aspecto geral da pandemia. Por exemplo, se conseguimos encontrar padrões segundo os quais o contágio acontecerá. No Blog do IMPA, o autor R. Takahashi diz que

Entender os padrões segundo os quais os acontecimentos se organizam, recorrer a esse entendimento para imaginar o futuro e para planejar ações que permitam escolher futuros melhores, são parte daquilo que caracteriza a espécie humana, (TAKAHASHI, 2020).

Nesta identificação de padrões, a expressão "crescimento exponencial" ganhou força e foi associada ao contágio ter acontecido de forma muito rápida no mundo, pelo menos no início. Isto se deu porque o número de novos contagiados, aproximadamente, foi proporcional ao número de contagiados do dia anterior com a constante de proporcionalidade maior que um.

Em termos matemáticos, para o crescimento exponencial temos uma sequência de números em que cada número é igual ao anterior multiplicado por uma constante maior que um, mas muitas pessoas tem dificuldades de entender estas implicações na propagação de muitas doenças. Neste trabalho, estamos focados em comparar algumas curvas que melhor descrevem, ou aproximam, o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande. Escolhemos para tal, curvas de estrutura e características simples, conhecidas pelos estudantes de Ensino Básico. Pretendemos mostrar que a curva de uma função afim

não é uma boa aproximação para o número de contagiados pelo coronavírus. Também, observar que nem todo crescimento rápido é exponencial e que pode existir outra curva que melhor descreve o número de contagiados pelo coronavírus, a curva logística, visto que a população é finita.

Após o estudo, propomos uma atividade, em que mostramos os dados coletados do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande até 15 novembro de 2020. A aplicação da atividade foi realizada, no formato online, no dia 19 de novembro de 2020, podendo fazer a comparação dos dados reais obtidos até esta data com os dados calculados por duas equações de diferenças aplicadas à dinâmica populacional do coronavírus.

Outro fator relevante da proposta de atividade está no fato de auxiliar os alunos a interpretar as informações relacionadas ao contágio do coronavírus por meio de gráficos. O entendimento destes gráficos auxilia os alunos a compreender as informações divulgadas e realizar a correlação entre dados tabelados e o gráfico correspondente. Ainda, buscar atividades que auxiliem os alunos a desenvolver relações entre números expressos em tabelas, expressões algébricas e gráficos, ajudam no desenvolvimento de habilidades importantes na construção do conhecimento matemático e compreensão da realidade.

A importância de estudos como este está em contribuir para o entendimento do comportamento da disseminação da pandemia a nível local (cidade), estudando modelos que expressam as características da situação-problema e que podem ajudar na tomada de decisão por parte dos órgãos públicos. Além disso, considerando a aplicabilidade dessa dissertação no cotidiano escolar e a contribuição que ele poderá ter, vale ressaltar que esse trabalho poderá ajudar os professores a complementar o ensino de funções afins, exponenciais e logarítmicas. Estas funções costumam fazer parte do plano de ensino do primeiro ano do ensino médio e a análise das curvas do número de contagiados por Covid-19 é um dos temas possíveis nesse caso.

O trabalho está dividido em:

- No Capítulo 1 descrevemos nossos objetivos gerais e específicos.
- No Capítulo 2 apresentamos um breve histórico de algumas pandemias que assolaram a história da humanidade na Seção 2.1 e falamos da relação entre matemática e pandemias na Seção 2.2.
- Capítulo 3 revisamos alguns conceitos de matemática básica. Na Seção 3.1 trabalhamos com algumas funções elementares: afim, exponenciais e logarítmicas e suas caracterizações principais. Na Seção 3.2 introduzimos as equações de diferenças e alguns exemplos. Na Seção 3.3 apresentamos dois modelos matemáticos discretos que descrevem a dinâmica de populações. Na Seção 3.4 introduzimos o modelo SIR de forma simplificada.

- Capítulo 4 apresentamos a atividade proposta.
- Capítulo 5 apresentamos o relato da aplicação da atividade.

# 1 Objetivos

## 1.1 Objetivos Gerais

O homem, através da necessidade para resolução de problemas práticos, busca na matemática modelos para auxiliá-lo.

De acordo com a BNCC, (BNCC, 2018), a competência geral do Ensino Básico que melhor expressa a nossa proposta é:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas, página 09 de (BNCC, 2018).

Com base nesta competência geral, este trabalho tem como objetivos gerais levar o estudante a:

- utilizar estratégias e conceitos matemáticos para resolver e interpretar situações do cotidiano;
- articular e compreender os conceitos matemáticos divulgados no mundo contemporâneo;
- verificar qual é a melhor curva que representa a solução de uma situação real representada por um modelo matemático;
- analisar a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas;
- observar padrões e propriedades matemáticas;
- fazer experimentações e conjecturas para obter padrões em situações apresentadas no cotidiano.

## 1.2 Objetivos Específicos

Ainda, de acordo com a BNCC, (BNCC, 2018), algumas habilidades específicas, as quais nos interessam, são elas:

- (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números, página 533.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros, página 536.
- (EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas, página 539.
- (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, página 541.

Com base nestas habilidades, elaboramos os objetivos específicos deste trabalho:

- Verificar qual curva entre afim, exponencial e logística, fornece a melhor aproximação do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande.
- Interpretar as características dos gráficos das funções afim, exponencial e logística.
- Discutir qual delas fornece uma melhor aproximação para o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande num determinado tempo.
- Investigar relações entre números expressos em tabelas e representá-los no plano cartesiano.
- Auxiliar na interpretação de informações de dados reais por meio de gráficos.
- Realizar a correlação entre dados tabelados e o gráfico correspondente.
- Estudar taxas de crescimento e decrescimento.

## 2 Pandemias e Matemática

### 2.1 Algumas pandemias

A pandemia gerada pelo coronavírus causou pânico no mundo. Com taxas de contágio altas, se espalhou por todos os países rapidamente. Cenários semelhantes já aconteceram em outros momentos da história. A Peste de Atenas, que se alastrou no norte da África chegando a Grécia, entre 436 e 426 a.C, e a Peste Antonina, em Roma 166 a.C., são exemplos de pandemias desde os primórdios da humanidade, (GOMES; ROCHA; MONTEIRO, 2020). Ainda, a varíola, doença causada pelo vírus *Orthopoxvirus variolae*, era transmitida de pessoa para pessoa por meio das vias respiratórias, assolou a humanidade por mais de 3.000 anos, (GALILEU, 2020). No século 14, a Peste Bubônica, também conhecida como Peste Negra, gerada pela bactéria *Yersinia Pestis* e que podia ser disseminada de animais (como roedores e pulgas) para humanos, assolou a Europa dizimando milhões de pessoas, é estimado que matou um terço dos europeus entre 1334 e 1372. Os médicos que cuidavam dos doentes da peste usavam uma máscara perfumada, veja a Figura 1, com um bico semelhante ao bico de pássaro. Enchiam estas máscaras com composto de ervas e acreditavam que era suficiente uma pessoa respirar um ar com estes aromas e ervas para se proteger da peste, (NATGEO, 2021).



Figura 1 – Máscara usada por médicos durante a Peste Negra, (GALILEU, 2020)

Em 1817, a Colera, dissiminada pela bactéria *Vibrio cholerae*, sendo transmitida através do consumo de água e alimentos contaminados, matou centenas de milhares de pessoas e continua até hoje, principalmente em países subdesenvolvidos, através de mutações da bactéria. Em 1918, mais de um quarto da população da época foi infectada por um vírus do tipo influenza e é estimado que tenha morrido entre 40 e 50 milhões de pessoas na pandemia conhecida por Gripe Espanhola. A doença chegou ao Brasil através



do navio Demerara, Figura 2, que fez desembarques no Recife, Salvador e Rio de Janeiro. Os sintomas eram muito parecidos com os do Sars-CoV-2 e, na época, não tinha cura, (GALILEU, 2020).



Figura 2 – Navio Demerara, aportou no porto de Recife em 09 de setembro de 1918, (BBC, 2020)

No século 21, a primeira pandemia foi gerada pelo vírus H1N1, transmitido pelo contágio através das vias respiratórias. Este vírus é um tipo de influenza e matou 16 mil pessoas ao redor do mundo, sendo que o primeiro caso de contagiado no Brasil foi registrado em maio de 2009, (GALILEU, 2020). A H1N1 foi, inicialmente, mais intensa nos Estados do Sul e Sudeste, mas se espalhou por todo o Brasil. Em 2009, o Brasil teve, aproximadamente, 60.000 casos da doença com 2.146 óbitos. Após a vacinação, as mortes caíram para 100 em 2010 e a vacinação continua sendo realizada até os dias de hoje, (FIOCRUZ, 2021).

Em 11 de março de 2020, a Organização Mundial da Saúde, OMS, representada pelo seu diretor geral Tedros Adhanom Ghebreyesus, declarou que a dissiminação do SARS-CoV-2, um tipo de coronavírus, Figura 3, alcançou o nível de pandemia, que é quando uma doença se espalha pelo mundo e impacta a sociedade, (OMS, 2020). Neste anúncio, o diretor disse:

A OMS tem avaliado este surto vinte e quatro horas por dia e estamos preocupados, tanto com os níveis alarmantes de propagação e gravidade, quanto com os níveis alarmantes de inação. Traduzido de (OMS, 2020).

Também, disse que de duas semanas atrás até o dia desta declaração, o número de casos de covid-19 fora da China tinha aumentado em 13 vezes e triplicado o número de países que registraram a doença, chegando, naquele momento, a 114 países. Ainda, que a OMS esperava o crescimento no número de casos, mortes e países atingidos e

que isso caracteriza a avaliação de ser pandemia, a primeira pandemia provocada por um coronavírus. Solicitou a todos os países que tomassem medidas urgentes para controlar o espalhamento do vírus.

Deste então, muitas perguntas foram feitas em relação ao surgimento do vírus. No artigo da revista *Nature Medicine*, (ANDERSEN et al., 2020), são mostradas algumas características essenciais do SARS-CoV-2 e discutidos dois cenários em que ele pode ter aparecido. O primeiro cenário é a seleção natural em hospedeiro animal e depois transmitido para os seres humanos. Dada a semelhança do SARS-CoV-2 com o SARS-CoV de morcegos, é possível que os morcegos sirvam de hospedeiros para seu progenitor. Outros animais suspeitos são os Pangolins Malaios, pois possuem coronavírus semelhantes ao SARS-CoV-2. O segundo cenário é que ocorreu uma seleção natural em humanos seguindo de transferência zoonótica entre humanos. Diante de todas as análises realizadas neste artigo, os pesquisadores não acreditam que o SARS-CoV-2 seja um vírus manipulado manualmente e criado em laboratório.

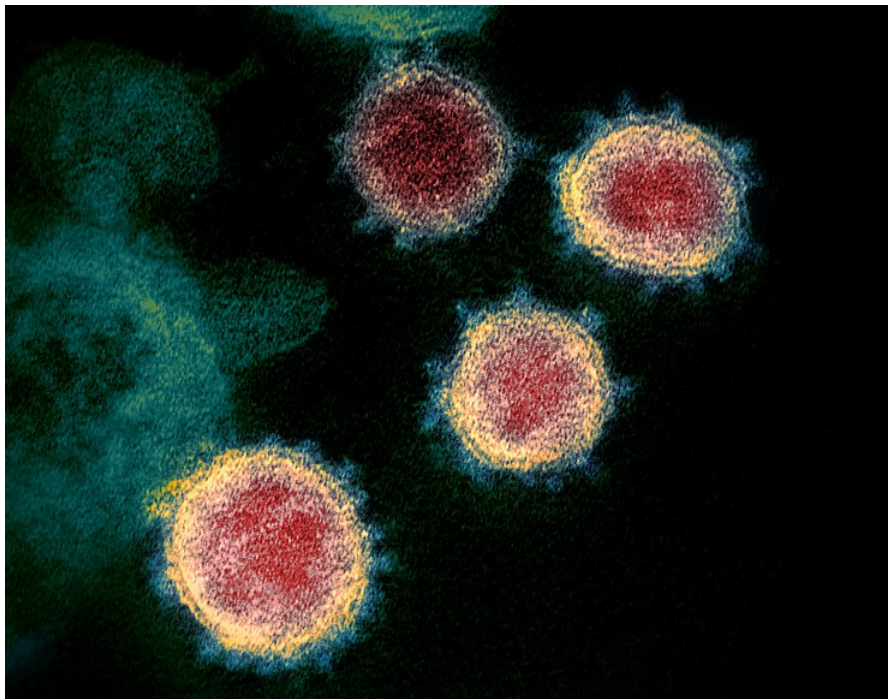


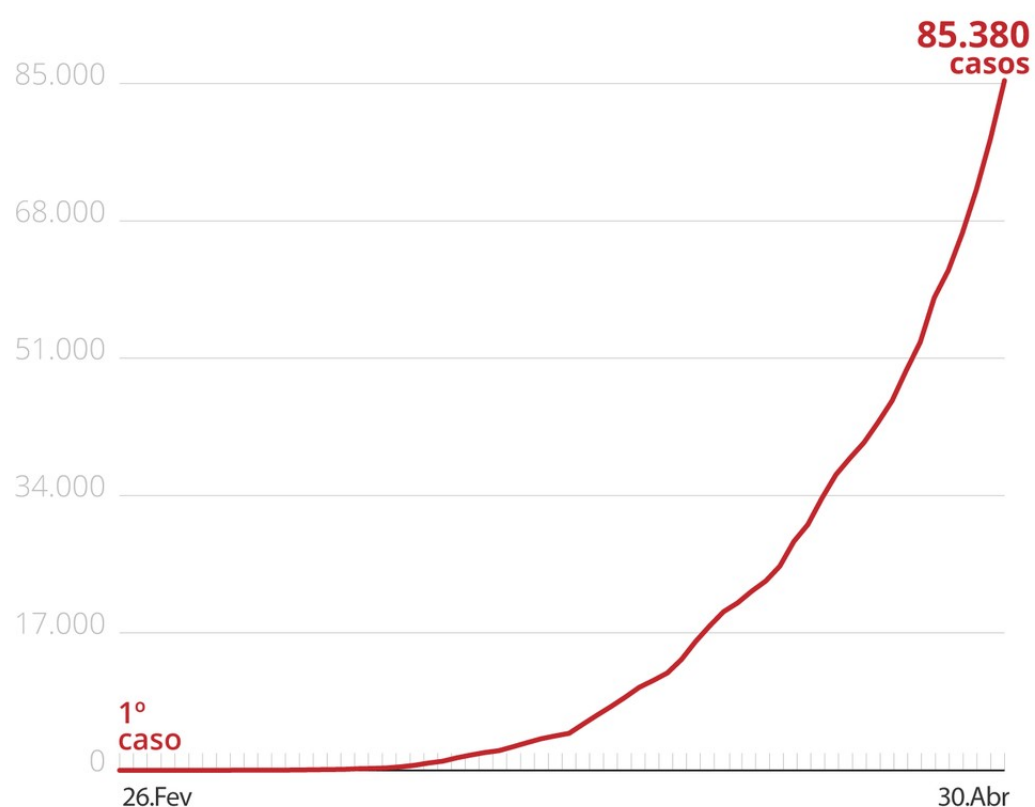
Figura 3 – Imagem microscópica do SARS-CoV-2, vírus que causa a Covid-19 (WIKIPEDIA, 2020)

Em termos gerais, faremos um breve histórico do espalhamento da pandemia gerada pelo coronavírus. No início do mês de dezembro de 2019 foi registrado o primeiro caso de pneumonia em um hospital de Wuhan, província de Hubei na China e, logo após, foi divulgado o sequenciamento genético deste vírus. A Organização Mundial da Saúde (OMS) divulgou que se tratava de casos de uma "pneumonia desconhecida". Em janeiro de 2020, já havia 44 casos desta "pneumonia desconhecida" relacionada ao mercado de Fru-

tos do Mar de Wuhan. Em janeiro de 2020, após o vírus ser identificado, a Organização Mundial da Saúde emitiu um boletim alertando para o risco moderado de pandemia e o Comitê de Operações de Emergência (COE) foi ativado com o nível 1 de alerta. Cinco dias depois, foi alterado para nível 2 e, imediatamente, a OMS reconheceu o "erro" e elevou o risco para nível "alto". Em 30 de janeiro de 2020, a OMS declarou Emergência de Saúde Pública em âmbito Internacional. No início de fevereiro de 2020, o Brasil declarou Emergência de Saúde Pública de Importância Nacional (ESPIN) e o Congresso Nacional aprovou Projeto de Lei sobre quarentena, que foi sancionada pelo Presidente da República. Em 26 de fevereiro de 2020 foi confirmado o primeiro caso de coronavírus no Brasil em São Paulo, (SAÚDE, 2020). Veja a Figura 4.

## Casos de coronavírus no Brasil

Total de infecções causadas pelo coronavírus Sars-Cov-2, segundo o Ministério da Saúde



Fonte: Ministério da Saúde



Infográfico atualizado em: 30/04/2020

Figura 4 – Casos de coronavírus no Brasil até 30.04.2020 (G1, 2020a)

Na cidade de Rio Grande, estado do Rio Grande do Sul, os primeiros casos foram registrados no mês de abril de 2020, como mostrado nas Figuras 5 e 6.



Figura 5 – Boletim epidemiológico Covid-19 em Rio Grande em 30.04.2020 (GRANDE, 2020a)



Figura 6 – Gráfico do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande até 16.12.2020, (GRANDE, 2020a)

## 2.2 A matemática e as pandemias

A pergunta agora a ser feita é: e onde entra a matemática numa pandemia? A matemática procura fazer estimativas, previsões futuras, caso o padrão se mantenha. Por exemplo, podemos prever o número de contagiados pelo coronavírus e o número de óbitos num determinado tempo futuro. É importante termos a capacidade de fazer estas previsões para auxiliar, por exemplo, na tomada de decisões para combater o espalhamento do vírus, diminuir a mortalidade e, quem sabe, evitar novos surtos da doença. De acordo com o autor Rodney Bassanezi, página 328, (BASSANEZI, 2002),

A previsão do crescimento populacional de um país é fundamental para avaliar a sua capacidade de desenvolvimento e estabelecer mecanismos que sustentem uma produção compatível com o bem estar social e, naturalmente, quando maior o grau de precisão exigido nas previsões mais complexo deve ser o modelo matemático, (BASSANEZI, 2002).

Segundo (ZANATA, 2018), a matemática, de forma exata ou aproximada, pode ser definida como uma das ciências que explica fenômenos naturais. Muitos destes fenômenos são compreendidos e previstos através dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas. Estes dois conceitos matemáticos são o alicerce na resolução de alguns problemas específicos. Por exemplo, problemas envolvendo crescimento e decréscimo, taxa de variação, terremotos, juros (matemática financeira), doenças, nível de intensidade sonora, tratamentos médicos, entre outros.

Em especial, nesta pandemia gerada pelo coronavírus, frequentemente, ouvimos falar sobre o aumento rápido do número de contagiados. Surgiu uma enxurrada de informações com alguns conceitos, pouco familiares à população em geral, como "crescimento exponencial", (G1, 2020b; AÇORES, 2020; VOL, 2021; VEJA, 2020). Na reportagem realizada em (G1, 2020b), um professor de matemática afirma que é possível fazer estas estimativas, pois o número de contagiados em relação ao tempo segue um padrão, denominado função exponencial. Ou seja, temos um número inicial de contagiados e uma taxa de contágio. O número de contagiados do dia seguinte é multiplicado novamente pela taxa de contágio e, assim, sucessivamente no decorrer do tempo.

No entanto, fazendo estes cálculos, podemos alcançar valores exorbitantes, o que não é real numa pandemia. Geralmente, a transmissão do vírus ocorre em um ciclo epidêmico, no qual podemos prever a evolução da doença, que ocorre em três momentos. No primeiro momento, no início da pandemia, temos um "crescimento exponencial", que é quando a taxa de contágio é alta, ou seja, ela é maior que um e muitas pessoas são contaminadas. No segundo momento, ocorre uma estabilização, chamada de platô, que é quando a pandemia alcança o pico de casos, pois há muitos contagiados e a população é finita e, sendo assim, o número de contagiados não pode crescer indefinidamente. No terceiro momento, há um decaimento exponencial, pois há mais recuperados que contagi-

ados, ou seja, o número de pessoas infectadas no dia seguinte é menor que no dia anterior (considerando que neste período não há reinfecção).

Em outras palavras, no início da pandemia, a evolução inicia de forma lenta, mas acelera rapidamente. Esta parte é descrita como crescimento exponencial, veja a Figura 7. Em seguida, a pandemia desacelera, pois boa parte da população já foi contagiada e estabiliza. Este é o momento descrito como crescimento logístico, veja a Figura 8. Depois que muitos membros da população foram infectados, a curva começa a decrescer, momento conhecido como decaimento exponencial, veja a Figura 9. Essa curva do ciclo epidêmico, ou curva epidêmica, toma a forma de um sino ou um "s" e é conhecida como Gaussiana.

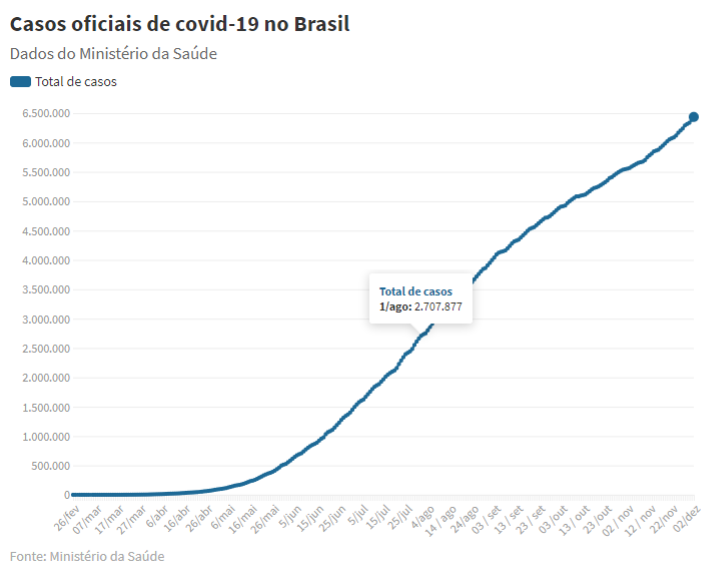


Figura 7 – Primeiro momento, crescimento exponencial, (VOL, 2021)

Observamos ainda que, na Figura 9, os autores (CEZARO; LAZO, 2021) propuseram a iteração, sob certas hipóteses, de  $n$  populações distintas e descreveram o espalhamento do coronavírus entre estas populações através de um modelo matemático. Mostraram que o modelo conduz a uma solução (curva) com um platô mais "longo" dependendo do número de populações envolvidas.

As equações de diferenças são uma ferramenta simples mas importantes e que podem ajudar para descrição de alguns ciclos epidêmicos, pois mostram mudanças em cada intervalo de tempo. Vários trabalhos foram realizados sobre equações de diferenças no âmbito do PROFMAT. A autora (NOVAKI, 2017) apresentou os modelos de crescimento exponencial e o crescimento logístico descritos por Malthus e Verhulst, respectivamente, avaliando o crescimento populacional na cidade de Curitiba. O autor (CAPILUPE, 2017) aplicou os conceitos de equações de diferenças em alguns conteúdos do Ensino Médio e apresentou o modelo logístico de Verhulst, com foco no crescimento de células e crescimento tumoral. Já (OLIVEIRA, 2017) aplicou as equações de diferenças na economia

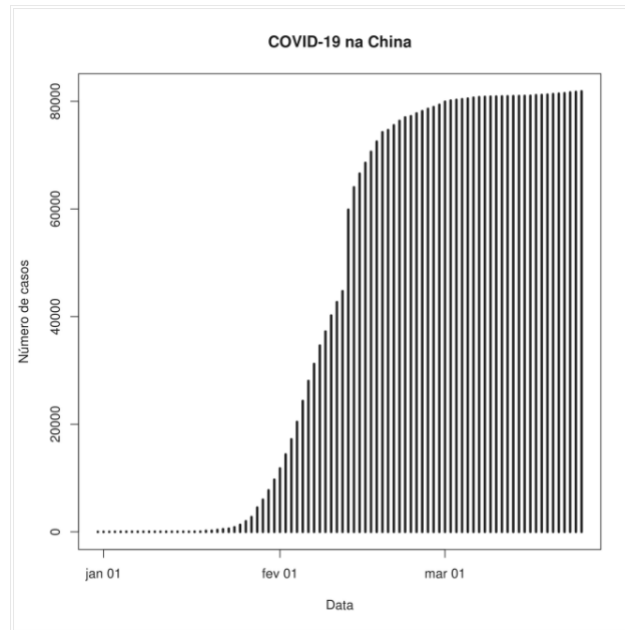


Figura 8 – Crescimento logístico, figura retirada de (DODONOV, 2020)

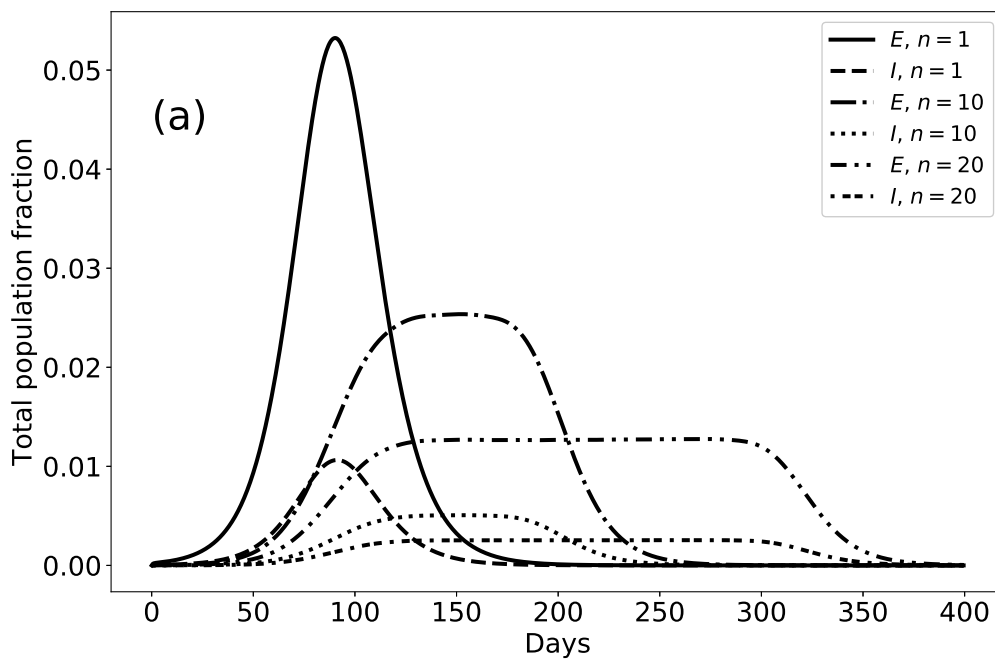


Figura 9 – Ciclo epidêmico em várias populações distintas interagindo entre si, (CEZARO; LAZO, 2021)

para auxiliar no planejamento financeiro familiar como, por exemplo, o uso racional de água e energia elétrica. (MARTINS, 2014) trabalhou com equações de diferenças utili-

---

zando planilhas eletrônicas para apresentar a atividade de juros compostos, regiões do plano através de retas, diagonais de um polígono, velocidade, movimento harmônico simples e leis de Newton. São muitos os trabalhos na literatura que envolvem equações de diferenças discretas. Ainda podemos citar (PACHECO, 2013) que mostra a recursividade pode ser aplicada em vários conteúdos da matemática e outras áreas.



## 3 Fundamentação Matemática

Neste capítulo, serão revisados alguns conceitos de matemática básica que foram utilizados na atividade proposta, descrita no Capítulo 4. Apresentaremos algumas características das principais funções utilizadas neste trabalho.

### 3.1 Algumas funções elementares

As funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos. Podemos nos referir a uma função não especificada sem ter qualquer fórmula particular em mente. Esta seção foi baseada em (LIMA et al., 2005).

**Definição 1.** Uma função é um tipo especial de relação entre dois conjuntos. Mais precisamente, sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma função de  $A$  em  $B$  é uma relação que a cada elemento de  $A$  associa um único elemento de  $B$ .

Em geral, escrevemos

$$f : A \longrightarrow B$$

$$y = f(x).$$

Nessa notação, o símbolo  $f$  representa a função,  $x$  representa a variável independente e  $y$  é dita a variável dependente e representa o valor de  $f$  em  $x$ . O conjunto  $A$  de todos os possíveis valores de entrada é chamado de domínio da função. O conjunto  $B$  é chamado de contra-domínio.

**Definição 2.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. O gráfico de  $f$  é o conjunto dado por  $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)); x \in A\}$ .

**Definição 3.** Sejam a função  $f : A \rightarrow B$  e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo, tal que  $I \subset A$ . Assim,  $f$  é dita:

1) **Crescente** em  $I$  (respectivamente, estritamente crescente em  $I$ ) se, para quaisquer  $x_1 < x_2$  em  $I$ , tivermos  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (respectivamente,  $f(x_1) < f(x_2)$ ).

2) **Decrescente** em  $I$  (respectivamente, estritamente decrescente em  $I$ ) se, para quaisquer  $x_1 < x_2$  em  $I$ , tivermos  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , (respectivamente,  $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Em ambos os casos, a função é dita monótona.

Um dos nossos principais interesses, nas funções apresentadas a seguir, esta em algumas características do gráfico, como crescimento ou decrescimento, valores máximos

ou mínimos, platôs. O gráfico pode ser visto, empiricamente, como o "retrato" de uma função.

### 3.1.1 Funções Afins

**Definição 4.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de afim quando existem constantes  $m$  e  $b$  tais que  $f(x) = mx + b$ , para qualquer  $x$  real.

O valor  $m$  é chamado de taxa de crescimento da função e, como,  $f(0) = b$ , o coeficiente  $b$  pode ser chamado de valor inicial da função  $f$ .

Observamos alguns casos particulares. Se o coeficiente  $b$  for igual a zero,  $b = 0$ , temos que  $f(x) = mx$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Estas funções são chamadas de lineares. O gráfico de uma função linear passará na origem  $(0,0)$ , pois  $f(0) = 0$ . São funções associadas a problemas matemáticos que envolvem proporcionalidade.

Se  $m = 0$ , temos que  $f(x) = b$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Estas funções são chamadas de funções constantes. O gráfico da uma função constante é o conjunto de pontos  $\text{Graf}(f) = \{(x, b); x \in \mathbb{R}\}$  e será uma reta paralela ao eixo das abscissas.

No geral, o gráfico de uma função afim é uma reta. De fato, consideramos  $m \neq 0$ . Sejam  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  e  $R(x_3, y_3)$  pontos genéricos do gráfico de  $y = f(x) = mx + b$ . Então, temos que  $y_1 = mx_1 + b$ ,  $y_2 = mx_2 + b$  e  $y_3 = mx_3 + b$ .

Observamos a figura 10.

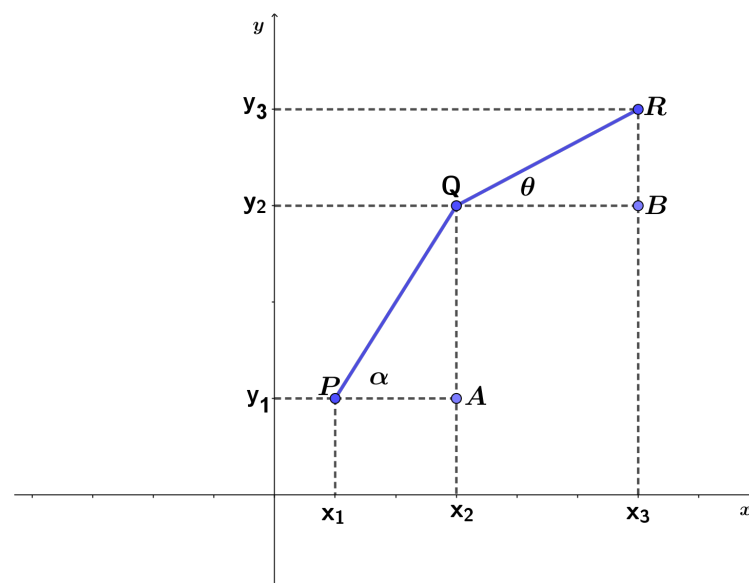


Figura 10 –  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos do gráfico de  $f$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + b - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = m.$$

$$\text{Analogamente, } \frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{mx_3 + b - (mx_2 + b)}{x_3 - x_2} = m.$$

Portanto, temos que  $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BQ}}$ . Como os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos retos, segue que os triângulos  $PAQ$  e  $QBR$  são semelhantes e, assim, os ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  são iguais. Concluimos que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estão alinhados. Por serem pontos quaisquer do gráfico, mostramos que a curva do gráfico de uma função afim é uma reta.

Reciprocamente, toda reta não vertical  $r$  é o gráfico de uma função afim. Vamos demonstrar esta afirmação.

Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  pontos sobre a reta  $r$ . Como  $r$  é não vertical,  $x_1 \neq x_2$ .

Afirmamos que por estes dois pontos do plano cartesiano  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , existe uma única função afim tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Ou seja, queremos encontrar uma função na forma  $f(x) = mx + b$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Equivalentemente, isto consiste em resolver o sistema  $\begin{cases} mx_1 + b = y_1 \\ mx_2 + b = y_2 \end{cases}$  que possui solução única dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \quad (3.1)$$

Portanto, o gráfico de  $f(x) = mx + b$ , com os valores  $m$  e  $b$  dados por (3.1), é uma reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$  e, logo, esta reta coincide com  $r$ .

Uma outra característica importante das funções afins é que se o coeficiente angular é maior que zero,  $m > 0$ , a função afim é crescente. De fato, sejam  $x_1$  e  $x_2$  números reais tais que  $x_1 < x_2$ . Então,  $f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1) > 0$ . Isto implica que  $f(x_2) > f(x_1)$  e  $f$  é crescente de acordo com a Definição 3. Por outro lado, se o coeficiente angular  $m < 0$ , a função afim é decrescente. A demonstração deste fato é análoga.

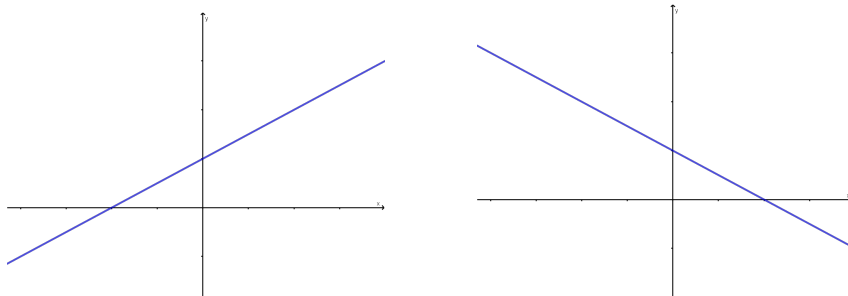


Figura 11 – Gráfico do lado esquerdo de uma função afim crescente e do lado direito, uma função afim decrescente

Ainda, nas funções afins é observada no acréscimo definido por  $f(x + h) - f(x) = mh$ , ou seja, o acréscimo depende apenas de  $h$ , não depende de  $x$ . Podemos ler esta

propriedade como acréscimos iguais em  $x$ , geram acréscimos iguais em  $f(x)$ . Esta propriedade e a monotonicidade dizem quando um problema matemático pode ser descrito por uma função afim. Além disso, observamos que no intervalo com extremos  $x$  e  $x + h$ , a taxa de variação neste intervalo,  $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  é sempre constante.

### 3.1.2 Funções exponenciais

A funções exponenciais têm aplicações em vários contextos, como citados na Seção 2.2.

Seja  $a$  um número real positivo.

**Definição 5.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , a potência de base  $a$  e expoente  $n$ , denotada por  $a^n$ , é definida como o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ .

Por definição, para  $n = 1$ , temos  $a^1 = a$ . Indutivamente,  $a^{n+1} = a \cdot a^n$ .

Uma importante característica da potência é que para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (3.2)$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de  $m + n$  fatores iguais a  $a$ . Da mesma forma,  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ .

Ainda, se  $a > 1$ , então multiplicando ambos os lados desta desigualdade por  $a^n$ , segue que

$$a^{n+1} > a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

A desigualdade (3.3) mostra que a sequência de potências de  $a$ , representada por  $(a^n)$  é crescente. Ainda, esta sequência não é limitada superiormente, podendo atingir valores muito grandes. Com efeito, seja  $C > 0$ . Como  $a > 1$ , escrevemos  $a = 1 + d$  e seja  $n > \frac{C-1}{d}$ . Pela desigualdade de Bernoulli, segue que

$$a^n = (1 + d)^n > 1 + nd > 1 + \frac{C-1}{d} \cdot d > C.$$

Ainda, com base em (3.3), para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais, se  $m < n$ , temos

$$a^m < a^n. \quad (3.4)$$

Se  $0 < a < 1$ , analogamente, multiplicando ambos os lados desta desigualdade por  $a^n$ ,

$$a^{n+1} < a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Esta desigualdade (3.5) diz que a sequência de potências de  $a$ ,  $(a^n)$ , é decrescente e limitada inferiormente. Ainda, para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais, se  $m < n$ , temos

$$a^n < a^m. \quad (3.6)$$

Assim, podemos definir uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(n) = a^n$ , com a propriedade (3.2), ou seja,  $f(n+m) = f(n) \cdot f(m)$ , para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais. Esta função  $f$ , pela desigualdade (3.3), é crescente para  $a > 1$  e  $f$  é decrescente para  $0 < a < 1$ , pela desigualdade (3.5).

Vamos estender esta função com domínio nos números inteiros e manter as propriedades citadas acima.

**Definição 6.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , a potência de base  $a$  e expoente  $n$ , denotada por  $a^n$ , é definida como:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(n) = a^n$ , sendo válida a propriedade (3.2), ou seja,  $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$ , para quaisquer  $m$  e  $n$  inteiros. Para  $a > 1$ ,  $f$  é crescente e quando  $0 < a < 1$ ,  $f$  é decrescente.

A ideia agora é, novamente, estender esta função com domínio nos números racionais.

**Definição 7.** Para  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = \frac{n}{m}$ , com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , a potência de base  $a$  e expoente  $r$ , denotada por  $a^r$ , é definida por:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Assim, definimos  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(r) = a^r$ , sendo válida a propriedade (3.2), ou seja,  $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ , para quaisquer  $r$  e  $s$  números racionais. Para  $a > 1$ ,  $f$  é crescente e quando  $0 < a < 1$ ,  $f$  é decrescente.

Observamos que as funções  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definidas por  $f(r) = a^r$  não são sobrejetivas. Ou seja, para  $a > 0$  fixo, nem todo número real positivo é da forma  $a^r$  com  $r$  racional. Felizmente, potências da forma  $a^r$  estão espalhadas por toda a reta real positiva, para  $a \neq 1$ , como diz o próximo Lema.

**Lema 1.** Fixado  $a > 0$  número real,  $a \neq 1$ . Em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$  existe uma potência  $a^r$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ .

Demonstração: Sejam  $\alpha, \beta$  números reais com  $0 < \alpha < \beta$  devemos achar  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $\alpha \leq a^r \leq \beta$ . Suponhamos que  $a > 1$  e  $\alpha > 1$ , os outros casos são demonstrados de

maneira análoga. Como as potências crescem acima de qualquer cota pré fixada, podemos obter números naturais  $M$  e  $n$  tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad e \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Desta última relação temos que, elevando todos os membros da desigualdade a potência  $1/n$ ,

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}.$$

Somamos o valor  $-1$  em todos os membros da desigualdade acima,

$$0 < (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \frac{\beta - \alpha}{a^M}.$$

Como  $a^M > 0$ , segue que

$$0 < a^M \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Como  $a > 1$ , então para  $\frac{m}{n} \leq M$ , temos  $a^{\frac{m}{n}} \leq a^M$ , segue que

$$0 < a^{\frac{m}{n}} \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha,$$

o que é equivalente a  $0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} \leq \beta - \alpha$ .

Assim, as potências  $a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, \dots, a^M$  são extremos de intervalo consecutivos, todos de comprimento menor do que  $\beta - \alpha$ . Como  $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$ , pelo menos um destes extremos está contido no intervalo  $[\alpha, \beta]$ , o que prova este Lema.

Vamos definir a função exponencial com domínio nos números inteiros.

**Definição 8.** Seja  $a > 0$  um número real,  $a \neq 1$ . Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = a^x$ . Estas funções são chamadas de funções exponenciais de base  $a$ .

Temos as seguintes propriedades.

1. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$ , está bem definida e, para quaisquer  $x$  e  $y$  números reais, temos que  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ . Além disso,  $f$  não assume o valor zero e é sempre positiva.
2.  $f(1) = a$ .
3. Seja  $x < y$  em que  $x$  e  $y$  são números reais. Se  $a > 1$ , temos que  $a^x < a^y$  e se  $0 < a < 1$ , temos que  $a^y < a^x$ .
4.  $f$  não é limitada superiormente.

5.  $f$  é uma função contínua.
6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é sobrejetiva.

Vamos demonstrar a propriedade 1), as demais podem ser encontradas em (LIMA et al., 2005). Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem que a propriedade  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  ela não pode assumir o valor zero, visto que ela não a função identicamente nula. De fato, suponha que existe  $x_o \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_o) = 0$ . Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e usando esta propriedade,

$$f(x) = f(x - x_o + x_o) = f(x_o + (x - x_o)) = f(x_o) \cdot f(x - x_o) = 0 \cdot f(x - x_o) = 0.$$

Ou seja, isto implica que  $f(x) = 0$ , contradição. Logo,  $f(x) \neq 0$  para qualquer  $x$  número real. Ainda,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

A função  $f$  com domínio nos reais está bem definida. De fato,  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $f(r) = a^r$  é a única função tal que  $f(r + s) = f(r) \cdot f(s)$ , para qualquer  $r$  e  $s$  racionais e  $f(1) = a$ . Ainda, esta função é crescente quando  $a > 1$  e decrescente quando  $0 < a < 1$ , o que resulta na existência de uma única maneira de definir  $a^x$  quando  $x$  é irracional. Com efeito, suponhamos  $a > 1$ , o outro caso é demonstrado de forma análoga. Seja  $x$  um número irracional, então  $r < x < s$ , com  $r, s \in \mathbb{Q}$ . O número real positivo  $a^x$  é o único número real cujas aproximações por falta são  $a^r$ , com  $r < x$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  e cujas aproximações por excesso são  $a^s$ , com  $x < s$ ,  $s \in \mathbb{Q}$ . Não pode existir dois números reais diferentes, digamos  $A < B$ , com esta propriedade. Supondo que existisse tais  $A$  e  $B$ , teríamos  $r < x < s$ , com  $r, s \in \mathbb{Q}$  então  $a^r < A < B < a^s$  e então o intervalo  $[A, B]$  não conteria potências de  $a$  com expoente racional e isto contradiz o Lema 1.  $\square$

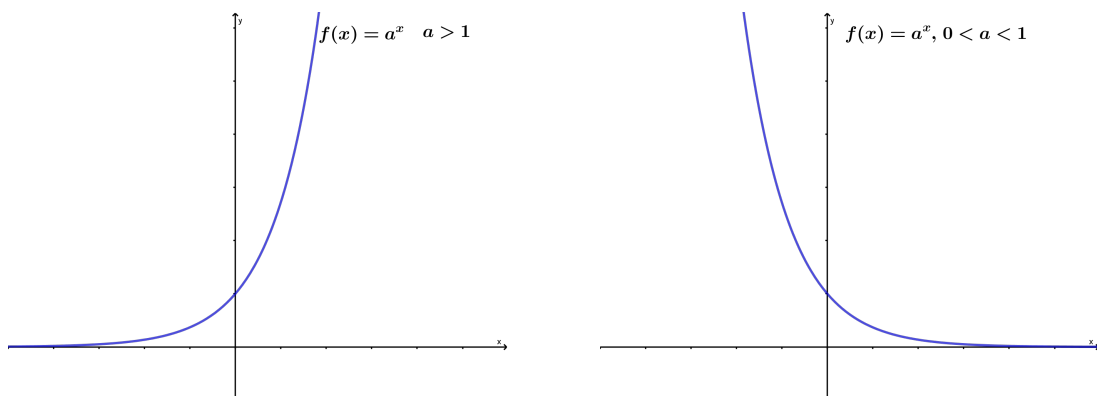


Figura 12 – Gráfico do lado esquerdo de uma função exponencial crescente e do lado direito, uma função exponencial decrescente

A propriedade 3 diz que uma função exponencial é crescente quando  $a > 1$  e decrescente quando  $0 < a < 1$ , veja os gráficos na Figura 12. Ainda, no caso em que

$a > 1$ , quando  $x$  é negativo, mas com valor em módulo muito grande, observamos um crescimento lento. Para valores de  $x$  positivos, a função exponencial cresce aceleradamente a medida que  $x$  aumenta.

Observamos que como  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é injetiva (pois é crescente ou decrescente) e sobrejetiva, então ela é uma função bijetiva com a propriedade adicional de  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ . Esta última propriedade diz que transformamos a soma num produto. O Teorema abaixo diz que as funções exponenciais são as únicas funções que têm esta propriedade.

**Teorema 1.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $f(nx) = (f(x))^n$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = a^x$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(1) = a$ .
3.  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Iniciamos mostrando que a afirmação (1) implica em (2). Suponhamos que é válida a igualdade  $f(nx) = (f(x))^n$  para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $r \in \mathbb{Q}$  com  $r = \frac{m}{n}$ , com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então, usando a hipótese

$$(f(rx))^n = f(nrx) = f(mx) = (f(x))^m.$$

Logo,  $f(rx) = (f(x))^{\frac{m}{n}} = (f(x))^r$ . Assim, se  $f(1) = a$ , teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = (f(1))^r = a^r, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Faremos o caso que  $f$  é crescente, o caso em que  $f$  é decrescente é análogo. Temos que  $1 = f(0) < f(1) = a$ . Suponhamos que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \neq a^x$ . Digamos que  $f(x) < a^x$ . Então, pelo Lema 1, existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $f(x) < a^r < a^x$ , ou seja,  $f(x) < f(r) < a^x$ . Como  $f$  é crescente, concluímos que  $x < r$ . Por outro lado,  $a^r < a^x$  e a base é maior que um, segue que  $r < x$ . Contradição. Isto implica que para todo  $x$  número real temos que  $f(x) = a^x$ .

Vamos mostrar que (2) implica em (3). Seja  $f(x) = a^x$ . Sejam  $x$  e  $y$  números reais quaisquer. Então,  $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$ , pois esta propriedade está estabelecida para funções exponenciais.

Agora, a afirmação (3) implica em (1). Seja  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Pela hipótese, aplicada  $n$  vezes,  $f(nx) = f(x + \dots + x) = f(x) \cdot \dots \cdot f(x) = (f(x))^n$ , e isto completa a demonstração deste Teorema.  $\square$

**Definição 9.** A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é do tipo exponencial quando  $g(x) = b \cdot a^x$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais positivas.



Observamos que se  $a > 1$ , então  $g$  é crescente e se  $0 < a < 1$ , a função  $g$  é decrescente.

Temos o seguinte Teorema que caracteriza as funções do tipo exponenciais.

**Teorema 2.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que para  $x$  e  $h$  números reais, o acréscimo relativo  $\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$  dependa apenas de  $h$ , mas não dependa de  $x$ . Então, se  $b = g(0)$  e  $a = \frac{g(1)}{g(0)}$  temos que  $g(x) = b \cdot a^x$  para qualquer  $x$  número real.

Demonstração. Por hipótese, a função  $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$  independe do valor de  $x$ . Vamos reescalonar definindo  $f(x) = \frac{g(x)}{b}$  onde  $b = g(0)$ . Observamos que  $f$  é monótona, injetiva e  $f(0) = 1$ .

Então,  $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$  continua independentemente do valor de  $x$ . Assim, para  $x = 0$ , segue que  $\varphi(h) = \frac{f(0+h)}{f(0)} = f(h)$  para qualquer  $h \in \mathbb{R}$ .

Logo, para qualquer  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+h) = \varphi(h) \cdot f(x) = f(h) \cdot f(x)$ . Ou seja, para quaisquer  $x, y$  números reais,  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ . Segue do Teorema 1, que  $f(x) = a^x$ , logo,  $g(x) = b \cdot f(x)$ , ou seja,  $g(x) = b \cdot a^x$ .  $\square$

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b \cdot a^x$  do tipo exponencial. Seja  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  uma progressão aritmética de razão  $h$ , ou seja,  $x_{n+1} = x_n + h$ . Então,  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$  forma uma progressão geométrica de razão  $a^h$ , pois

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n+h} = b \cdot a^{x_n} \cdot a^h = (b \cdot a^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h$$

Como o  $(n+1)$ -ésimo termo de uma progressão aritmética é dada por  $x_{n+1} = x_1 + n h$ , segue que  $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$ , com  $A = a^h$ .

O Teorema abaixo nos dará uma segunda caracterização das funções tipo exponenciais através das progressões.

**Teorema 3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  monótona injetiva que transforma uma progressão aritmética  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  em uma progressão geométrica  $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$  com  $f(x_n) = y_n$ . Se  $f(0) = b$  e  $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ , teremos que  $f(x) = b \cdot a^x$  para qualquer  $x$  número real.

Demonstração. Seja  $b = f(0) > 0$ . Definimos a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com  $g(x) = \frac{f(x)}{b}$ . Observamos que  $g$  é monótona, injetiva, também transforma progressões aritméticas em progressões geométricas e  $g(0) = 1$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$ , a sequência  $x, 0, -x$  está em progressão aritmética. Logo,  $g(x), 1, g(-x)$  é uma progressão geométrica de razão  $g(-x)$ . Ainda,

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}. \quad (3.7)$$

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . A sequência  $0, x, 2x, \dots, nx$  é uma progressão aritmética. Então,  $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$  é uma progressão geométrica com razão  $g(x)$ . Então, seu  $(n+1)$ -ésimo termo é dado por

$$g(nx) = (g(x))^n. \quad (3.8)$$

Agora,  $-n$  é um inteiro negativo, então, de (3.7) e (3.8), segue que

$$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{(g(x))^n} = (g(x))^{-n} \quad (3.9)$$

Portanto, de (3.8) e (3.9), vale que  $g(nx) = (g(x))^n$  para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Do Teorema 1, sendo  $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$ , temos que  $g(x) = a^x$ , ou seja,  $f(x) = b \cdot a^x$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### 3.1.3 Funções Logarítmicas

São funções ligadas a um grande número de aplicações, principalmente onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade existente da mesma naquele instante dado.

Seja  $a$  um número real positivo,  $a \neq 1$ . Como  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com  $f(x) = a^x$  é uma bijeção, segue que  $f$  possui uma inversa.

**Definição 10.** A inversa da função exponencial de base  $a$ , chamada de função logarítmica, é a função  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada número real positivo  $x$ , o número real  $\log_a x$ .

Por definição,

$$a^{\log_a(x)} = x \quad e \quad \log_a(a^x) = x.$$

Assim,  $\log_a(x)$  é o expoente a qual se deve elevar a base  $a$  para obtermos o número  $x$ , ou seja,

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x. \quad (3.10)$$

Vamos mostrar algumas propriedades dos logarítmos, que são consequência da definição acima.

- (I)  $\log_a 1 = 0$ .

- (II)  $\log_a a = 1$ .
- (III)  $\log_a a^k = k$ .
- (IV)  $a^{\log_a b} = b$ .
- (V) Logarítmo do produto:  $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ .
- (VI) Logarítmo do quociente:  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ .
- (VII) Logarítmo da potência:  $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ .
- (VIII) Mudança de base:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

Demonstração. (I) Pela definição, temos que

$$\log_a 1 = x \iff a^x = 1 \iff a^x = a^0 \iff x = 0.$$

(II) Pela definição, temos que

$$\log_a a = x \iff a^x = a \iff a^x = a^1 \iff x = 1.$$

(III) Pela definição temos que

$$\log_a a^k = x \iff a^x = a^k \iff x = k.$$

(IV) Ainda pela definição, temos

$$a^x = b \iff x = \log_a b \implies a^x = a^{\log_a b} = b.$$

(V) Sejam  $\log_a b = p$ ,  $\log_a c = q$  e  $\log_a(bc) = r$ . Pela definição temos que  $a^p = b$ ,  $a^q = c$  e  $a^r = bc$ . Assim,  $a^r = a^p \cdot a^q$ . Pela propriedade da potenciação temos

$$a^r = a^p \cdot a^q = a^{p+q} \iff r = p + q \implies \log_a(bc) = r = \log_a b + \log_a c.$$

(VI) Sejam  $\log_a b = p$ ,  $\log_a c = q$  e  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = r$ . Pela definição, temos  $a^p = b$ ,  $a^q = c$  e  $a^r = \frac{b}{c}$ . Assim,  $a^r = \frac{a^p}{a^q}$ . Pela potenciação temos que

$$a^r = a^{p-q} \iff r = p - q \implies \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = r = \log_a b - \log_a c.$$

(VII) Sejam  $\log_a b = p$ ,  $\log_a b^k = q$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Pela definição, temos  $a^p = b$  e  $a^q = b^k$ . Assim  $a^q = (a^p)^k$ . Da potenciação, temos

$$a^q = a^{pk} \iff q = p \cdot k \implies \log_a b^k = pk = k \cdot \log_a b.$$

(VIII) Sejam  $\log_a b = p$  e  $\log_c b = q$ . Pela definição temos que  $a^p = b$  e  $c^q = b$ , logo  $a^p = c^q$ .

Assim,  $\log_c a^p = \log_c c^q$ . Por (VII) e (II), temos

$$p \cdot \log_c a = q \cdot \log_c c = q \cdot 1 = q \implies \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \implies \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

A função  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente quando  $a > 1$  e decrescente quando  $0 < a < 1$ , veja a Figura 13.

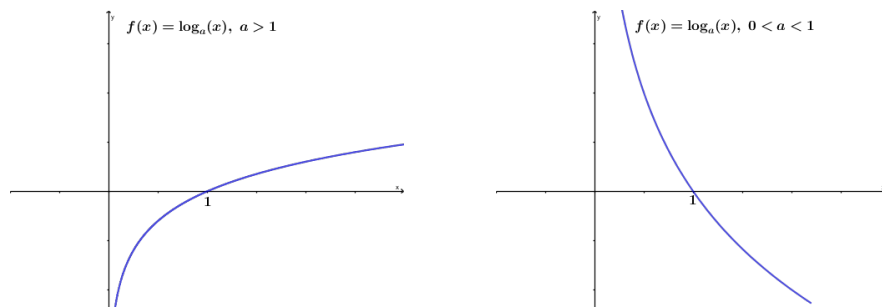


Figura 13 – Gráfico do lado esquerdo de uma função logarítmica crescente e do lado direito, uma função logarítmica decrescente.

O Teorema abaixo nos dá uma característica de quando um problema matemático pode ser modelado por uma função logarítmica.

**Teorema 4.** Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , para quaisquer  $x$  e  $y$  números reais. Então, existe  $a > 0$  tal que  $f(x) = \log_a(x)$  para  $x \in \mathbb{R}^+$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  seja crescente, o caso decrescente é demonstrado de forma análoga. Temos que

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1),$$

o que implica em  $f(1) = 0$ .

Inicialmente, suponhamos que exista  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que  $f(a) = 1$  (depois, mostraremos que isso sempre acontece, logo não é uma hipótese inicial). Como  $f$  é crescente,  $f(a) = 1 > 0 = f(1)$ , então  $a > 1$ .

Seja  $m \in \mathbb{N}$ , pela hipótese inicial aplicada  $m$  vezes,

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = m. \quad (3.11)$$

Ainda, de (3.11), segue que

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}).$$

Então,  $f(a^{-m}) = -m$ .

Seja  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , sendo  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então  $rn = m$ ,

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = nf(a^r)$$

e, então

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r. \quad (3.12)$$

Seja  $x \in \mathbb{I}$ , para  $r$  e  $s$  racionais com  $r < x < s$ , temos  $a^r < a^x < a^s$ . Então, como  $f$  é crescente,  $f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$ . Agora, por (3.12), temos que  $r < f(a^x) < s$ . Ou seja, todo número racional  $r$ , menor que  $x$ , é também menor que  $f(a^x)$  e todo número racional  $s$ , maior que  $x$ , é também maior que  $f(a^x)$ , segue que  $f(a^x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sendo  $y = a^x$ , temos que  $f(y) = \log_a y$  para todo  $y > 0$ .

Agora, veremos o caso geral em que se tem uma função  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  crescente, com a propriedade  $g(xy) = g(x) + g(y)$  e sem mais hipóteses adicionais.

Observamos que  $g(1) = 0$  e, como  $1 < 2$  e  $g$  crescente,  $g(2) = b > 0$ . Definimos uma nova função

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{b}$$

com a propriedade  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , crescente e  $f(2) = 1$ .

Logo, da primeira parte da demonstração aplicada a esta função  $f$ , temos que  $f(x) = \log_2(x)$  para qualquer  $x > 0$ .

Isto significa que, para qualquer  $x > 0$ ,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)} = a^{g(x)}$$

com  $a = 2^{1/b}$ . Tomando  $\log_a$  em ambos os lados da identidade acima, segue que  $g(x) = \log_a x$  para  $x > 0$ .  $\square$

## 3.2 Equações de Diferenças

As equações de diferenças são muito usadas em fenômenos naturais como, por exemplo, dinâmicas populacionais ao longo do tempo, em meses, semanas, dias, horas, etc..., não de forma contínua, mas discreta, tentando modelar situações e o comportamento de fenômenos naturais que se aproximam da realidade. Para mais detalhes, ver (OLIVEIRA, 2017).

**Definição 11.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , definimos uma equação de diferenças como

$$Q(n+1) = f(Q(n))$$

em que  $Q$  é uma função discreta, ou seja,  $Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em palavras gerais, uma equação de diferenças é uma fórmula expressando valores de uma quantidade  $Q$  em termos de valores prévios de  $Q$ .

Surtem duas perguntas, como encontrar as equações de diferenças apropriadas para modelar uma determinada situação proposta e, na sequência, como entender o comportamento deste modelo, se este nos fornece as características procuradas. Ambas as perguntas são difíceis de serem respondidas. Modelamos algo por equação de diferenças observando o que já tem sido feito e, após tentando melhorar e adequar as hipóteses, (ALLMAN; RHODES, 2004). Algumas equações de diferenças possuem fórmulas explícitas e de outras apenas conseguimos desenvolver técnicas para alcançar algumas informações e características do modelo proposto.

**Exemplo 1.** Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Considere a condição inicial da equação de diferenças dado por  $x(0) = x_0$ . Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim,

$$n = 0 : \quad x(1) = f(x(0)) = f(x_0)$$

$$n = 1 : \quad x(2) = f(x(1)) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) = f^2(x_0)$$

$$n = 2 : \quad x(3) = f(x(2)) = f(f^2(x_0)) = (f \circ f^2)(x_0) = f^3(x_0)$$

...

$$n = k - 1 : \quad x(k) = f(x(k-1)) = f(f^{k-1}(x_0)) = (f \circ f^{k-1})(x_0) = f^k(x_0)$$

Portanto, a solução de  $x(n+1) = f(x(n))$ , é dada por

$$x(n) = f^n(x_0)$$

**Exemplo 2.** Seja a equação diferencial  $x(n+1) = (x(n))^2$ , com  $x(0) = x_0$ . Observamos que  $f(x) = x^2$ . Então,

$$n = 0 : \quad x(1) = f(x(0)) = f(x_0) = x_0^2 = x_0^2$$

$$n = 1 : \quad x(2) = f(x(1)) = f(x_0^2) = (x_0^2)^2 = x_0^4$$

$$n = 2 : \quad x(3) = f(x(2)) = f(x_0^4) = (x_0^4)^2 = x_0^8$$

...

$$n = k - 1 : \quad x(k) = f(x(k-1)) = f(x_0^{2^{k-1}}) = x_0^{2^k}$$

Logo, a solução é dada por

$$x(n) = x_0^{2^n}.$$

**Exemplo 3.** Vamos buscar a equação geral de uma progressão geométrica por meio de equações de diferenças. Sabemos que uma (PG) progressão geométrica é uma sequência

de números, não nulo, em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado de razão da progressão. Considerando o primeiro termo como  $a_1 \neq 0$  e a razão  $q \neq 0$ , a progressão geométrica fica definida como:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n, \text{ com } n \geq 1.$$

Assim, temos que, para  $n \geq 2$ ,

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_{n-1} \cdot a_n = qa_1 \cdot qa_2 \cdot qa_3 \cdot qa_{n-2} \cdot qa_{n-1}.$$

Usando o cancelamento da multiplicação, escrevemos a equação geral da progressão geométrica como

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

### 3.3 Modelos matemáticos

Na literatura, os modelos matemáticos que representam a dinâmica das populações são extremamente importantes. Eles podem apontar mudanças nas populações bem como comportamentos futuros. Perguntamos por que as populações crescem ou declinam ou se há alguma estabilização. Vamos analisar dois modelos matemáticos discretos que descrevem o comportamento de várias populações. Para derivar estes dois modelos, nos baseamos no livro (ALLMAN; RHODES, 2004).

#### 3.3.1 Modelo Maltusiano Discreto

Para derivar este modelo, uma hipótese aceitável é que, em um certo dia, a população mudará devido a novos nascimentos e óbitos. Denotaremos por  $f$  a adição de um certo número múltiplo da população existente, também chamada de taxa de fecundidade, e por  $d$ , chamada de taxa de óbito, a fração da população que morrerá. Para rastrear a população  $P$ , focamos em  $\Delta P$ , que é a mudança da população em um único dia. Temos que

$$\Delta P = f P - d P = (f - d) P. \quad (3.13)$$

Ou seja, a equação (3.13) mostra que a variação da população é proporcional ao múltiplo de nascimentos menos o múltiplo de óbitos da população num único dia.

Algumas notações são mais simples. Seja  $P_t = P(t)$  o tamanho da população medida no dia  $t$ . Então, podemos reescrever a equação (3.13) como

$$\Delta P = P_{t+1} - P_t \quad (3.14)$$

que é a diferença ou a mudança na população em dois dias consecutivos.

Substituimos a equação (3.13) na equação (3.14), obtemos que

$$P_{t+1} = P_t + \Delta P = P_t + (f - d)P_t = (1 + f - d)P_t. \quad (3.15)$$

Seja  $\lambda = 1 + f - d$  na equação (3.15), nosso modelo de crescimento populacional é dado por

$$P_{t+1} = \lambda P_t \quad (3.16)$$

em que  $\lambda$  é referenciada na literatura como taxa de crescimento finito da população e a equação (3.15) é conhecida como uma equação de diferenças.

Ainda, se sabemos a população inicial, denotada por  $P_0$ , temos que

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= \lambda P_t \\ P_0 &= P_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

e após iterar  $t$  vezes em (3.17), segue que

$$P_t = P_0 \lambda^t \quad (3.18)$$

ou seja, para este modelo, podemos prever a população em qualquer momento de tempo no futuro. A equação de diferenças (3.18) é, as vezes, também chamada de exponencial ou geométrica.

O modelo em (3.17) ou (3.18) é conhecido como modelo Maltusiano, pois o modelo resulta em crescimento exponencial (caso  $\lambda > 1$ ) ou decaimento exponencial (caso  $0 < \lambda < 1$ ). Entretanto, observamos que tal previsão, para tempos longos, pode não ser precisa, pois as funções exponenciais crescem rapidamente e sem limites. Com este modelo, cedo ou tarde, teríamos mais organismos do que os átomos do universo.

### 3.3.2 Modelo Logístico Discreto

Para sermos mais realísticos no nosso modelo, precisamos reexaminar as hipóteses que foram assumidas no modelo Maltusiano. A principal falha é que assumimos que as taxas de fecundidade e morte da nossa população são as mesmas, independentemente do tamanho da população. De fato, quando a população é grande, é razoável esperar uma taxa de mortalidade mais alta e menor taxa de fecundidade, (ALLMAN; RHODES, 2004). Precisamos modificar o nosso modelo de forma que a taxa de crescimento dependa também do tamanho da população.

Vamos focar na  $\frac{\Delta P}{P}$  que é a variação na população por indivíduos, ou chamada na literatura de taxa de crescimento per capita sobre uma simples etapa do tempo. Para pequenos valores de  $P$ , a taxa de crescimento per capita deve ser grande, pois imaginamos



uma população com muitos recursos disponíveis no ambiente para suportar o seu futuro crescimento. Para grandes valores de  $P$ , entretanto, a taxa de crescimento per capita deve ser menor, pois os recursos no ambiente já estão comprometidos. É razoável assumir que  $\frac{\Delta P}{P}$  como uma função de  $P$ , como o gráfico da Figura 14.

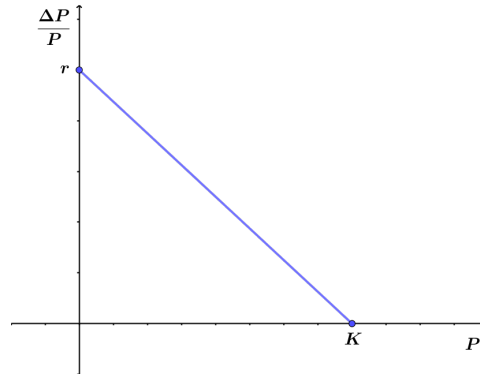


Figura 14 – Taxa de crescimento per capita como função do tamanho da população

Este pode ser um dos gráficos que representa a ideia de quando a população é pequena a taxa per capita é grande, mas quando a população aumenta, a taxa per capita diminui. Observando o gráfico na Figura 14, um modelo melhorado conduz a fórmula

$$\frac{\Delta P}{P} = m P + b$$

para algum  $m < 0$  e  $b > 0$ , ou seja, uma reta decrescente que passa pelo ponto  $(K, 0)$  e  $(0, r)$ , para  $K > 0$  é ponto que intercepta a linha horizontal e  $r > 0$  o ponto que intercepta a linha vertical. É mais claro escrever isso da forma:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-r}{K} P + r = r \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (3.19)$$

Como sabemos que  $P_{t+1} = P_t + \Delta P$ , pela equação (3.19), segue que

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t + \Delta P = P_t + P_t \left( r \left(1 - \frac{P_t}{K}\right) \right) \\ &= P_t \left( 1 + r \left(1 - \frac{P_t}{K}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Este modelo dado em (3.20) é conhecido como modelo logístico discreto.

Os parâmetros  $K$  e  $r$  no modelo (3.20) têm interpretações diretas. Primeiro, se  $P < K$ , então temos que  $\frac{P}{K} < 1$  o que implica que  $1 - \frac{P}{K} > 0$ . Como  $\frac{\Delta P}{P} = r \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ , segue que a taxa de crescimento per capita é positiva, ou seja,  $\frac{\Delta P}{P} > 0$ , e a população crescerá. Por outro lado, se  $P > K$ , então  $\frac{\Delta P}{P} < 0$ , a taxa per capita é negativa e a população decrescerá. A constante  $K$  é chamada de capacidade de carga do meio

ambiente, pois ela representa o número máximo de indivíduos que podem ser suportados sobre um longo período.

Quando a população é pequena, ou seja,  $P$  é muito menor que  $K$ , o fator  $\left(1 - \frac{P}{K}\right)$  na taxa per capita deve ser próximo do número um. Para pequenos valores de  $P$ , nosso modelo é aproximadamente

$$P_{t+1} \approx (1 + r) P_t,$$

em outras palavras, temos um crescimento exponencial no início. Observamos que  $r$  faz o papel de  $f - d$ , a taxa de fecundidade menos a taxa de mortalidade no modelo Maltusiano.

A equação (3.20) pode resultar em um número não inteiro, mas, mesmo assim, ainda faz sentido. Se a população tem muitos indivíduos, mesmo que o número calculado seja não inteiro, estamos tentando descrever aproximadamente o tamanho da população, podemos tomar a parte inteira e ignorar a parte fracionária sem uma perda significativa.

### 3.4 Modelo SIR

Exporemos, brevemente, um modelo matemático simples, que pode fazer previsões sobre o futuro de uma epidemia, que é o modelo SIR. Nossa ideia não é deduzir este modelo, mas apenas mostrar algumas de suas características essenciais. Também não vamos apresentar as equações diferenciais ordinárias que representam este modelo, pois fogem ao escopo deste trabalho. Alguns estudos recentes na literatura, inclusive de outros modelos, podem ser encontrados em (GAMMAITONI, 2020; CEZARO; LAZO, 2021; GOMES; ROCHA; MONTEIRO, 2020).

O modelo SIR, também chamado de modelo compartimental, divide a população em três compartimentos:  $S$ ,  $I$ ,  $R$ , iniciais que dão o nome ao modelo. O compartimento  $S$  representa os SUSCETÍVEIS, que são as pessoas saudáveis, sujeitas à infecção do vírus. O segundo compartimento, denotado pela letra  $I$ , representa os INFECTADOS, ou seja, o número de pessoas já infectadas. O terceiro compartimento, denotado por  $R$  representa os REMOVIDOS. Neste último estão os indivíduos curados, imunizados ou mortos.

A passagem de um compartimento para o outro se dá por probabilidades, veja a Figura 15. O parâmetro da passagem do primeiro compartimento (suscetível) para o segundo (infectados) é dado por  $K$ . O valor  $K$  diz qual a probabilidade de uma pessoa saudável ficar infectada e adoecer, num determinado período de tempo. Geralmente,  $K$  é dado pelo produto do percentual de pessoas que entram em contato com uma pessoa saudável durante esse tempo, denotado por  $s$ , e a probabilidade de transmissão do vírus de pessoa a pessoa, denotada por  $p$ . Ou seja,  $K = s \cdot p$ . Quanto maior o valor de  $K$ , mais rápido o vírus se espalhará. A passagem do segundo compartimento (I) para o terceiro (R) também ocorre com uma probabilidade  $r$ . A evolução da pandemia é dada



Figura 15 – Esquema compartimental do modelo SIR, (GAMMAITONI, 2020).

pelo número de pessoas em cada um dos compartimentos num determinado tempo e sua soma,  $(S + I + R)$ , é dada pelo número de indivíduos existentes. Estas três quantidades estão relacionadas por um sistema de equações diferenciais ordinárias ou no sistema de equações na forma discreta dado na página 28 em (SABETI, 2011).

A curva é em formato de sino, que fornece o número de infectados no decorrer do tempo, veja a Figura 16. Observamos que há um crescimento rápido inicialmente de pessoas infectadas que pode ser reproduzido por uma função exponencial. No centro, teremos o pico de contagiados e, por fim, esse número começa a cair até desaparecer por completo. A forma específica da curva depende diretamente dos parâmetros  $K$  (probabilidade de adoecer) e  $r$  probabilidade de ser removido do grupo de doentes (curados, imunes ou mortos).

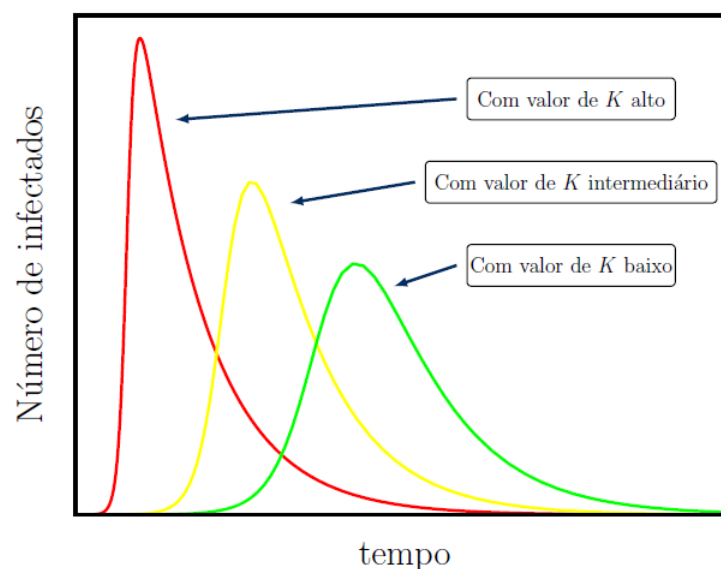


Figura 16 – Curvas do modelo matemático SIR, (GAMMAITONI, 2020).

Importante observarmos que para valores menores de  $K$ , a pandemia evolui mais lentamente, empurrando o pico para frente. Isso ajuda, a ganhar tempo, por exemplo,

para os governantes criarem protocolos de segurança para o combate ao espalhamento do vírus e aos cientistas para a procura de vacinas eficazes. Para diminuirmos o valor de  $K$ , precisamos olhar diretamente para os fatores que ele é composto, ou seja, diminuir a probabilidade de transmissão do vírus, isto é, reduzir  $s$ . Isto pode ser feito, por exemplo, reduzindo o contato entre as pessoas. Além disso, devemos reduzir  $p$ . Esta redução pode ser feita seguindo os protocolos de segurança, higienização das mãos, uso de álcool em gel, máscaras, etc.

## 4 Etapas da Proposta de Atividade

Esta atividade foi adaptada para o ensino presencial de (DESMOS, 2020), mas também pode ser aplicada de forma online (como veremos no próximo Capítulo).

Com foco no número de contagiados pela COVID-19, na cidade de Rio Grande, no Rio Grande do Sul, com aproximadamente 210.000 habitantes, a atividade inclui sete etapas, nas quais pretendemos levar os alunos à:

- Verificar qual curva entre afim, exponencial e logística, fornece a melhor aproximação do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande;
- Interpretar as características dos gráficos das funções afim, exponencial e logística;
- Discutir qual delas fornece uma melhor aproximação para o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande num determinado tempo;
- Estudar taxas de crescimento e decrescimento.

### 4.1 Plano de atividade

#### **Público Alvo:**

Alunos do primeiro ano do Ensino Médio, onde são estudadas as funções afins, exponenciais e logarítmicas.

#### **Pré-requisitos:**

O domínio, a imagem e os gráficos das funções afim e exponencial são os pré-requisitos desta atividade.

#### **Duração Prevista:**

Aproximadamente noventa minutos, o que equivale a dois períodos consecutivos de aula.

#### **Recursos Necessários:**

Papel, lápis, borracha, régua, calculadora, quadro e giz.

#### **Organização da Turma:**

A atividade será realizada individualmente.

#### **Atividade Proposta**

Seguem os passos da atividade proposta que o professor deve pensar antes da execução.

#### **Etapas 1:**

A etapa 1 consiste em apresentar a situação problema de forma contextualizada, realizando uma apresentação sobre os fatos históricos a respeito do número de contagiados pelo coronavírus e que a atividade será aplicada a estudar o número de contagiados na cidade de Rio Grande, que possui aproximadamente 210.000 habitantes.

### Etapa 2:

Depois da contextualização do problema, vem a interpretação dos dados coletados. Nesta etapa será entregue aos alunos uma tabela com dois valores reais de contágio na cidade e suas respectivas quinzenas, veja a Tabela 1.

Tabela 1 – Dois valores reais do número de contagiados dados pelo professor

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
⋮	⋮	⋮
30/10	12	?

Neste momento será solicitado aos alunos que cada um faça uma previsão do número de contagiados na última quinzena de outubro, que corresponde ao tempo  $t = 12$ . É importante o professor verificar se os alunos estimaram valores inteiros. Caso contrário, explicará para turma que esses valores representam pessoas contagiadas e devem assumir apenas valores inteiros positivos.

### Etapa 3

A etapa 3 consiste na construção do esboço do gráfico a partir dos dados da Tabela 1, onde o eixo  $X$  representa o tempo (será contado a cada quinze dias) e o eixo  $Y$  representa o número de contaminados.

Observando os esboços individualmente, o professor fará a pergunta: *Qual a função que melhor representa o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande?* O professor pedirá aos alunos que interpretem os números em palavras, explicando o motivo da escolha de tal função. Em seguida, o professor solicitará que alguns alunos, dará preferência aos que tenham gráficos diferentes, façam o esboço de seus gráficos no quadro. Poderão haver respostas de alunos que entendam que a melhor função para aproximar o crescimento do número de contagiados é a função linear e outros que entendam que a melhor função é a exponencial. Poderá haver falta de consenso entre os estudantes, isto é esperado e será discutido no momento da visualização dos gráficos no quadro.

### Etapa 4:

Na etapa 4 será fornecido aos alunos mais um valor real, correspondente ao tempo  $t = 2$ , veja a Tabela 2. Os alunos devem verificar qual gráfico que melhor representa o

crescimento do contágio.

Tabela 2 – Dado real no tempo  $t=2$  do número de contagiados

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33

Com estes pontos, é esperado que os alunos visualizem o gráfico e concluam que a função que melhor aproxima o número de contagiados é a exponencial, onde a taxa de crescimento não é constante.

Após a conclusão da turma, o professor pode conduzir a obtenção da taxa de crescimento exponencial, usando uma progressão geométrica, onde a razão é dada pelo quociente do termo seguinte pelo anterior. Na sequência (5, 12, ..... ) a razão será  $r = \frac{12}{5} = 2,4$ . Com isso a função que representará o número de contagiados é dada por

$$y(t) = 5 \cdot (2,4)^t \quad (4.1)$$

em que  $t$  é um número inteiro positivo e representa o tempo dado em quinzenas e  $y$  representa o número de contagiados.

Com a equação (4.1), será solicitado aos alunos que determinem o número de contagiados em  $t = 5$  e, que comparem com a previsão feita por eles em  $t=12$ . Caso julgue necessário, o professor poderá solicitar aos alunos o número de contagiados em outro tempo e, novamente, comparar com a previsão feita inicialmente. Neste momento, o professor poderá questionar a turma se eles irão manter ou trocar suas previsões.

### Etapa 5

A partir deste momento, com o auxílio de uma calculadora, o professor poderá solicitar aos alunos que completem a tabela até a primeira quinzena de novembro, ou seja, até  $t = 13$ , usando a função exponencial dada em (4.1), veja a Tabela 3. Com isso os alunos perceberão se sua estimativa estava de acordo ou não.

Nesta fase da **Etapa 5** poderão surgir alguns questionamentos, visto que a população de Rio Grande é de 210.000 habitantes e que, na primeira quinzena de novembro, teríamos aproximadamente o dobro da população contagiada. Então, o professor poderá mostrar que a função exponencial é a que mais se aproxima do número de contagiados até determinado tempo, levando os estudantes a concluírem que o crescimento exponencial se dá apenas no início, mas que depois não fornece uma boa aproximação.

Tabela 3 – Número de contagiados calculados através da exponencial discreta

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	29
15/06	3	69
30/06	4	166
15/07	5	398
30/07	6	956
15/08	7	2.293
30/08	8	5.504
15/09	9	13.209
30/09	10	31.702
15/10	11	76.084
30/10	12	180.602
15/11	13	438.244

**Etapa 6:**

Nesta etapa é o momento do professor apresentar uma outra função que melhor possa representar o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande, a função logística discreta, dada pela equação:

$$P_{t+1} = P_t \left( 1 + r \left( 1 - \frac{P_t}{K} \right) \right) \quad (4.2)$$

O professor solicitará aos alunos o cálculo do número aproximado de contagiados através da função logística discreta dada em (4.2), veja a Tabela 4. Esta curva logística discreta possui um gráfico em formato de "S" comum chamada de sigmóide. Neste momento, o professor poderá comparar a curva logística com a exponencial, mostrando que a curva logística tem um crescimento de forma exponencial até um certo tempo, depois a curva continuará, mas com taxa de contágio reduzida e se estabilizará. É aconselhável que o professor explique como obter um valor aproximado para a taxa de crescimento  $r$  e que  $K$  representa a capacidade total do meio, que para este caso,  $K = 210.000$ , o número de aproximado de habitantes da cidade de Rio Grande.



Tabela 4 – Número de contagiados calculados através da logística discreta

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	31
15/06	3	81
30/06	4	210
15/07	5	546
30/07	6	1417
15/08	7	3669
30/08	8	9436
15/09	9	23855
30/09	10	57687
15/10	11	124632
30/10	12	205696
15/11	13	212441

**Etapa 7:**

Esta última etapa consiste em apresentar a tabela que contém o número real de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande, veja a Tabela 5.

Tabela 5 – Número real de contagiados pelo coronavírus

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33
15/06	3	79
30/06	4	197
15/07	5	557
30/07	6	1464
15/08	7	1940
30/08	8	2468
15/09	9	3127
30/09	10	3934
15/10	11	4341
30/10	12	4661
15/11	13	.....

Na sequência, o professor solicitará aos alunos que comparem a Tabela 5 com as Tabelas da exponencial discreta, Tabela 3, e logística discreta, Tabela 4. Os alunos deverão concluir, entre estas curvas, qual é a melhor que aproxima o número de contagiados.

## 5 Relato da Aplicação da Atividade

Na noite de 19 de novembro de 2020, a atividade foi aplicada para 5 alunos da disciplina de código 01469 - Números e Funções, turma única, do primeiro semestre do curso de Matemática Licenciatura, na sala online [https://conerenciaweb.rnp.br/events/numeros e funções](https://conerenciaweb.rnp.br/events/numeros-e-funcoes), turma que foi cedida pela titular, professora Daiane Freitas.

Neste capítulo será apresentado um relato da aplicação da atividade proposta no Capítulo 4. Devido ao tempo de aula online, restringimos os cálculos até o tempo  $t = 7$ .

### 1) Introdução

Após as apresentações, a professora Daiane Freitas se retirou da sala online para deixar os alunos mais a vontade. Foi feito um breve relato sobre a origem e evolução do contágio do coronavírus, onde foi identificado pela primeira vez e como se espalhou rapidamente pelo mundo. O foco da atividade foi na cidade de Rio Grande, no Estado Rio Grande do Sul, com aproximadamente 210.000 habitantes, cidade a qual está localizada a Universidade em que curso o PROFMAT.

Breve histórico apresentado: "Em dezembro de 2019, foi identificado em Wuhan, na China, o Coronavírus ou Covid 19. Transmitido de pessoa a pessoa, se espalhou pelo mundo em alta velocidade, chegou ao Brasil em fevereiro de 2020. Na cidade de Rio Grande, RS, com aproximadamente 210.000 habitantes, em abril já tinha 5 pessoas contaminadas."

2) Foi apresentada a Tabela 6, com o tempo em quinzenas, e dois valores reais do número de contagiados pelo coronavírus em Rio Grande em suas respectivas quinzenas. Foi solicitado aos alunos que estimassem o número de contagiados no tempo  $t = 7$ , que corresponde à primeira quinzena do mês de agosto. As respostas de valores estimados foram: 54, 59, 62, 108 e 120.

Tabela 6 – Apresentação dos dados reais até o tempo  $t = 2$

Quinzena	Tempo	Número de contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	
15/06	3	
30/06	4	
15/07	5	
30/07	6	
15/08	7	?

3) Em seguida, os alunos fizeram o esboço de um gráfico com os pontos dados, veja a Figura 17, usando o eixo  $X$  para o tempo em quinzenas e o eixo  $Y$  para o número de contagiados.

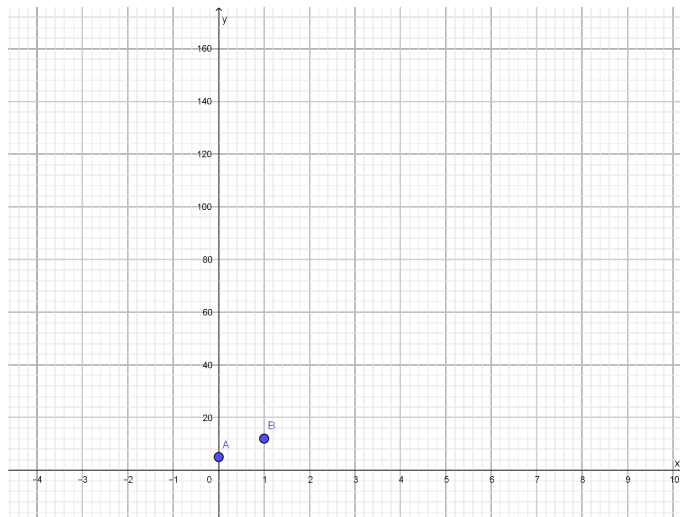


Figura 17 – Dois pontos reais

4) Alguns minutos depois, quando todos já haviam concluído o esboço de seu gráfico, por exemplo o gráfico da Figura 18, foi feita a pergunta: Qual a função que melhor representa este gráfico?

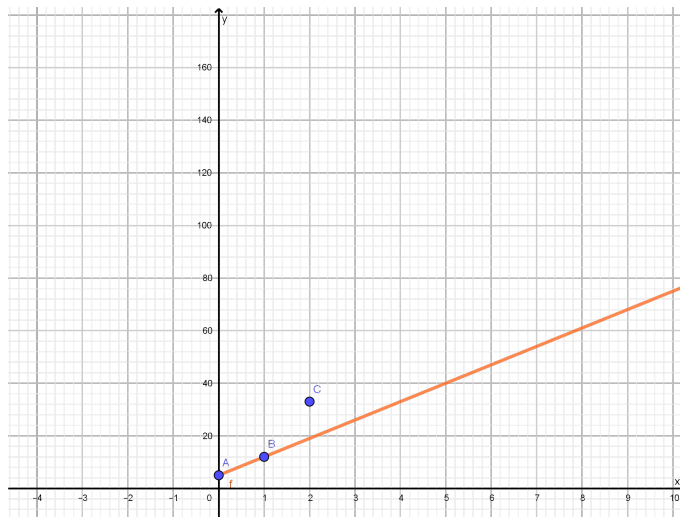


Figura 18 – Reta que passa pelos dois pontos reais

Um aluno somente marcou os dois pontos dados,  $(0, 5)$  e  $(1, 12)$ , mas logo após respondeu que seria uma função afim ou linear. Outro disse ser uma parábola e outro uma reta. Um dos alunos respondeu que precisava de mais pontos para dizer qual seria a função e outro disse ser uma exponencial.

5) Foi neste momento que mostramos para o tempo  $t = 2$  o valor de 33 contagiados, como na Figura 19, e foi questionado se alguém mudaria sua resposta referente ao tipo de função escolhida anteriormente, pedindo que fosse explicado.

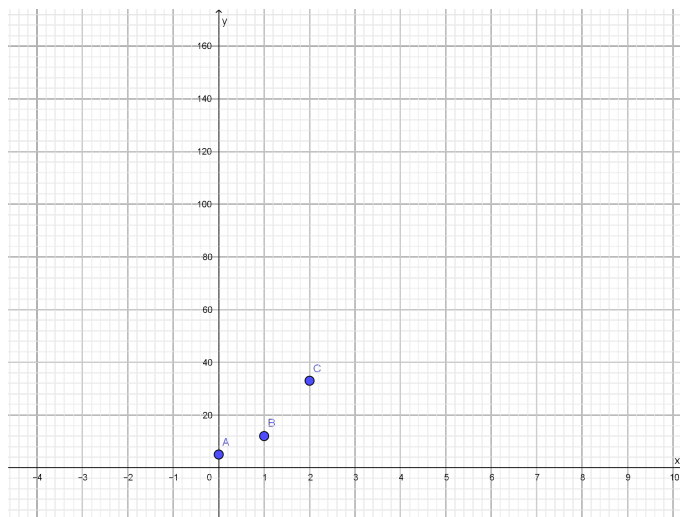


Figura 19 – Três pontos reais

Após a marcação do ponto  $(2, 33)$  no gráfico, um dos alunos manteve seu gráfico, a parábola, argumentando que o ponto não ficou na reta. Dois alunos disseram ser uma função exponencial, pois houve um aumento rápido, de 12 para 33 naquela quinzena. Um aluno não respondeu.

6) Comentando suas respostas, foi questionado: O que você entende por crescimento exponencial? Obtivemos duas respostas, um aluno disse "que era um crescimento incontrolável indefinidamente" e outro disse "que tende ao infinito".

7) Na sequência, foi solicitado que preenchessem a tabela inicial usando a função exponencial  $y(t) = 5 \cdot (2,4)^t$ . No momento da escrita da função foi explicado cada termo, a partir dos valores reais, iniciais, falamos sobre uma progressão geométrica, explicando como calcular a razão, pois um aluno disse não ter estudado no ensino médio. Como a exponencial é um produto de fatores e a razão é dada pelo quociente do termo subsequente pelo anterior, calculamos  $r = \frac{12}{5} = 2,4$ .

Os alunos completaram a Tabela 7, tempo a tempo. Um aluno errou um cálculo, corrigindo logo em seguida. Foi discutido o arredondamento do número de contagiados, uma vez que estamos tratando de pessoas. Todos os alunos presentes participaram do preenchimento da tabela. Um aluno deixou a sala, talvez por problemas na conexão de internet. Após todos terminarem de preencher a tabela com os valores inteiros, nos tempos de 1 até 7, foi apresentado aos alunos o gráfico desta função exponencial, conforme a Figura 20.

Tabela 7 – Valores de contagiados calculados pela exponencial discreta

Quinzena	Tempo ( $t$ )	Contagiados $5 \cdot (2,4)^t$
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	29
15/06	3	69
30/06	4	166
15/07	5	398
30/07	6	956
15/08	7	2.293

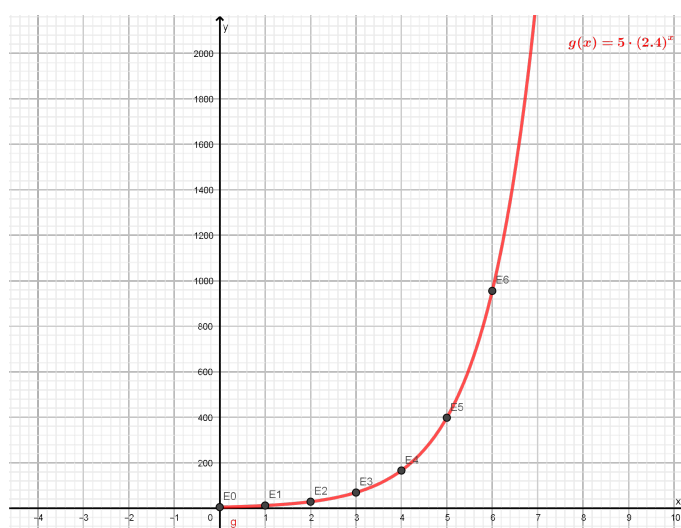


Figura 20 – Função exponencial discreta

8) Neste momento foi questionado se alguém havia acertado a estimativa? Todos responderam que NÃO, visto que o valor calculado pela função exponencial foi de 2.293 e o menor e o maior valor estimados por eles, respectivamente, era de 54 e 120. Houve um aluno que ainda disse: "BEM LONGE".

9) Continuando, foi perguntado se haveria outro tipo de função que melhor representasse o número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande em função do tempo e qual seria esta função. Depois de um pequeno período de silêncio, um aluno insistiu na parábola e outro manteve a função exponencial. Foi então argumentado que tanto a parábola como a exponencial eram ilimitadas, o que não poderia acontecer numa situação em que a população é finita.

Neste momento foi apresentado a eles a função logística, explicando cada termo, onde o número de contagiados  $P_{t+1}$  depende do número de contagiados do tempo anterior  $P_t$ , do  $r$  (que é a média dos razões calculadas de dois em dois tempos dos valores reais) e do  $k$ , total da população estudada que é 210.000 habitantes. Sendo assim, a função

logística discreta é limitada, pois não ultrapassa o total da população estudada. Ou seja, o termo  $P_{t+1}$  é dado por:

$$P_{t+1} = P_t \cdot \left(1 + r \cdot \left(1 - \frac{P_t}{k}\right)\right)$$

Na sequência, apresentamos a Tabela 8 com o número de contagiados calculados pela função logística discreta e seu respectivo gráfico, veja a Figura 21. Mostramos que assim como a exponencial, o número de contagiados pelo coronavírus se aproxima dos valores reais, com certa margem de erro, até determinado tempo.

Tabela 8 – Valores dos contagiados calculados pela logística discreta

Quinzena	Tempo - ( $t$ )	Contagiados - $P_{t+1}$
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	31
15/06	3	81
30/06	4	210
15/07	5	546
30/07	6	1.417
15/08	7	3.669
....	....	....
....	....	210.000

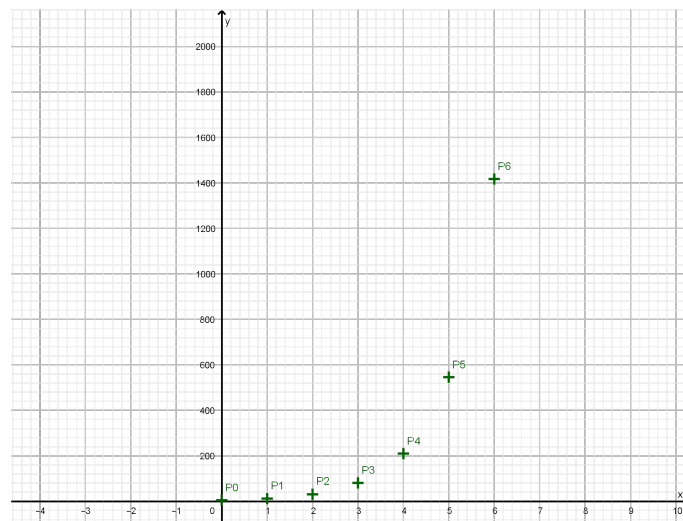


Figura 21 – Função logística discreta

10) Seguindo a aplicação da atividade, foi apresentado aos alunos a Tabela 9 e o gráfico com os valores reais do número de contagiados pelo coronavírus na cidade de Rio Grande, veja a Figura 22. E comentado que pode não condizer com a realidade, uma vez que os dados reais podem ser subestimados, pois pode não ter sido feita uma testagem adequada, podendo haver mais pessoas contagiadas.

Tabela 9 – Valores reais de contagiados na cidade de Rio Grande

Quinzena	Tempo	Número Real de Contagiados
30/04	0	5
15/05	1	12
30/05	2	33
15/06	3	79
30/06	4	197
15/07	5	557
30/07	6	1.464
15/08	7	1.940

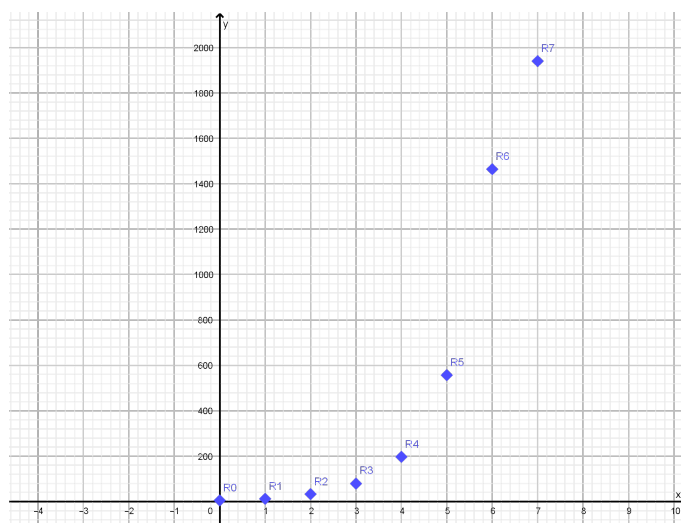


Figura 22 – Dados reais

11) Na Tabela 10, foi feita a comparação dos valores de contagiados calculados pelas funções exponencial e logística com o número real de contagiados. Foram realizadas algumas observações sobre as aproximações no gráfico, veja a Figura 23. Por exemplo, a função exponencial e a função logística se aproximam da realidade até certo tempo, visto que a exponencial tem crescimento ilimitado, ultrapassando a população existente e a logística cresce até atingir a totalidade da população. Ainda, observando o que ocorreu na primeira quinzena de junho,  $t = 3$ , em que na função exponencial, estimamos 69 contagiados, na logística 81 contagiados e o número real de contagiados nesta quinzena é de 79. Na última quinzena de julho,  $t = 6$ , com a exponencial estimamos 956 contagiados, na

função logística 1.417 contagiados enquanto o número real de contagiados nesta quinzena é de 1.464. Verificamos, neste momento, que a função logística era a que mais se aproximava da realidade até determinado tempo. Foi aberto um momento para novos questionamentos e comentários sobre a atividade, mas a turma não questionou e apenas um aluno fez o comentário: "LEGAL".

Agradecemos a participação dos quatro alunos que permaneceram até o final da aplicação da atividade e a oportunidade foi dada pela professora Daiane Freitas.

Tabela 10 – Comparação entre o número de contagiados calculados pela função exponencial e logística e o número real

Tempo	C. exponencial	C. logística	C. real
0	5	5	5
1	12	12	12
2	29	31	33
3	69	81	79
4	166	210	197
5	398	546	557
6	956	1.417	1.464
7	2.293	3.669	1.940
...	...	...	....
?	?	210.000	....

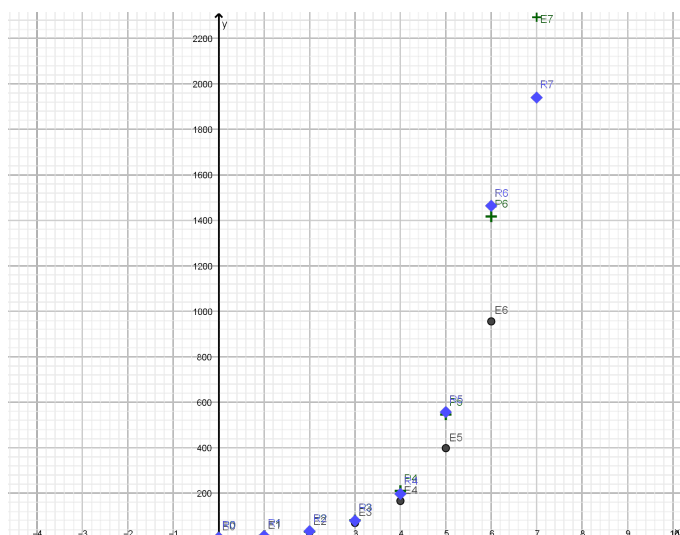


Figura 23 – Dados reais comparados com as aproximações da exponencial e da logística

12) Comentários finais em relação a atividade aplicada. Ministrei a minha primeira aula no modo remoto. Senti muito a necessidade do contato físico e visual dos alunos, pois todos estavam de câmera desligada. Achei satisfatória a aplicação da atividade. Gostaria que houvesse mais participantes, o que deixaria a aula mais rica de idéias e respostas.



Mas este pequeno grupo presente participou dos questionamentos através do chat, também algo novo para mim. No final quando abrimos para comentários e questionamentos sobre a aplicação, não houve uma participação efetiva. Uma vez que a pandemia estava assustando não só o Brasil mas o mundo, esperava vários comentários e questionamentos. Obtive um "LEGAL" que valeu muito.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho foi verificada qual a melhor curva que fornece o número de contagiados pelo coronavírus, na cidade de Rio Grande -RS, num determinado tempo. Comparamos as curvas das funções afim, exponencial e logística com intenção de verificar qual delas está mais próxima do número real de pessoas contagiadas nesta cidade e estudamos taxas de crescimento e decrescimento.

Os resultados deste estudo permitiram constatar que nenhuma das curvas representa perfeitamente a curva real do número de casos de coronavírus na cidade de Rio Grande - RS. Todavia, identificamos que a curva da função logística é mais fiel à realidade do contágio até determinado tempo, ou seja, embora não descreva perfeitamente, ela mostrou ser a melhor aproximação até determinado tempo.

A aplicação da atividade proposta é para o primeiro ano do Ensino Médio, onde são estudadas as funções afim, exponencial e logarítmica. Estas funções são de grande importância na identificação e resolução de problemas do cotidiano. Isto pode possibilitar a construção e o entendimento dos gráficos associados a situações reais. No nosso trabalho, ressaltamos a importância do aluno entender o comportamento da propagação coronavírus, de contextualizar e os conceitos matemáticos envolvidos.

## Referências

- ALLMAN, E.; RHODES, J. *Mathematical models in Biology: an introduction*. New York: Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- ANDERSEN, K. G. et al. The proximal origin of sars-cov-2. *Nature Medicine*, v. 26, n. 1, p. 450–455, 2020. Citado na página 17.
- AÇORES, C. dos. *Crescimento exponencial vs crescimento logístico*. 2020. Disponível em: <<http://correiodosacores.pt/NewsDetail/ArtMID/383/ArticleID/21262/Crescimento-exponencial-vs-crescimento-log237stico>>. Acesso em: 28.04.2021. Citado na página 20.
- BASSANEZI, R. *Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática*. Campinas: Editora Contexto, 2002. Citado na página 20.
- BBC. *Gripe espanhola: a viagem em que o 'navio da morte' Demerara venceu bombardeios alemães e trouxe a doença ao Brasil*. Público, 2020. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/internacional-54907997>>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 16.
- BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 600 p. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)>. Citado na página 13.
- BRASIL, G. *Ministério da Saúde*. 2020. Disponível em: <<https://www.saude.gov.br>>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 10.
- CAPILUPE, A. R. *Equações de diferenças: aplicações em conteúdos do ensino médio e em modelos populacionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del Rei, abril 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=07381835630&d=20210427154837&h=41fcc9f01d1257dc7a3ef09272f282e6c7c22495](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=07381835630&d=20210427154837&h=41fcc9f01d1257dc7a3ef09272f282e6c7c22495)>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 21.
- CEZARO, A. D.; LAZO, M. Why can we observe a plateau even in an out of control epidemic outbreak? a seir model with the interaction of n distinct populations for covid-19 in brazil. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 109–123, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 41.
- DESMOS. *Mocha Modeling: Starbucks Locations*. 2020. Disponível em: <<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/564d37a2895eb8280b0bfe0d>>. Acesso em: 13.10.2020. Citado na página 44.
- DODONOV, P. *Mais Um Blog de Ecologia e Estatística*. 2020. Disponível em: <<https://anothercoblog.wordpress.com/2020/03/26/covid-19-crescimento-exponencial-e-crescimento-logistico/>>. Acesso em: 13.10.2020. Citado na página 22.

FIOCRUZ. *Combate à epidemia de H1N1: um histórico de sucesso*. 2021. Disponível em: <<https://cee.fiocruz.br/?q=node/1314>>. Acesso em: 28.04.2021. Citado na página 16.

G1. *Brasil tem 5.901 mortes e 85.380 casos confirmados por coronavírus*. 2020. Disponível em: <<https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/30/brasil-tem-5901-mortes-por-coronavirus.ghtml>>. Acesso em: 25.05.2021. Citado na página 18.

G1. *Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus*. 2020. Disponível em: <<https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidematica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explicam-a-pandemia-de-coronavirus.ghtml>>. Acesso em: 23.03.2021. Citado na página 20.

GALILEU, R. *Conheça as 5 maiores pandemias da história*. Público, 2020. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Saude/noticia/2020/03/conheca-5-maiores-pandemias-da-historia.html>>. Acesso em: 25.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

GAMMAITONI, L. Prevendo o futuro da epidemia. *L'Osservatore*, v. 1, n. 1, p. 1–3, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

GOMES, S.; ROCHA, C. R.; MONTEIRO, I. *Modelagem dinâmica aplicada à COVID*. Rio Grande: FURG, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 41.

GRANDE, P. de R. *Cenário Covid-19 em Rio Grande*. Público, 2020. Disponível em: <<https://www.riogrande.rs.gov.br/pagina/cenario-covid>>. Acesso em: 16.12.2020. Citado na página 19.

GRANDE, P. de R. *Secretária Municipal da Saúde*. 2020. Disponível em: <<http://www.riogrande.rs.gov.br>>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 10.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio, volume 1*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 30.

MARTINS, T. E. *Equações de recorrência na Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, julho 2014. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=01077844085&d=20210427161225&h=4efa7e35cb0d6a1f9c527de97af05b996660338a](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=01077844085&d=20210427161225&h=4efa7e35cb0d6a1f9c527de97af05b996660338a)>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 22.

NATGEO. *Os Médicos da Peste Usavam Máscaras com Bicos Estranhos – Porquê?* Público, 2021. Disponível em: <<https://www.natgeo.pt/historia/2020/03/os-medicos-da-pestes-usavam-mascaras-com-bicos-estranhos-porque>>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 15.

NOVAKI, C. *Equação de diferenças na projeção de populações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, janeiro 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=03605813909&d=](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=03605813909&d=)

20210427150458&h=ec1c8f6c5b4ce48333058a497adbd642a80d8a03>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 21.

OLIVEIRA, I. P. de. *Equações de recorrência: uma análise e proposta para o orçamento familiar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Tecnológica do Paraná, setembro 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=40632424800&d=20210427160503&h=8c3b2d72040f2ce8c7554f0b80e16eae4db3d4bd](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=40632424800&d=20210427160503&h=8c3b2d72040f2ce8c7554f0b80e16eae4db3d4bd)>. Acesso em: 27.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 36.

OMS. *WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19*. 2020. Disponível em: <<https://www.who.int/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020>>. Acesso em: 24.05.2021. Citado na página 16.

PACHECO, A. M. *Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, abril 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=00633213942&d=20210427161843&h=4b1cb3177015c4c2465cdaea705c0f9ae411cffb](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=00633213942&d=20210427161843&h=4b1cb3177015c4c2465cdaea705c0f9ae411cffb)>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 23.

RS, G. *Secretária do Estado do Rio Grande do Sul*. 2020. Disponível em: <<https://www.sauders.gov.br>>. Acesso em: 21.09.2020. Citado na página 10.

SABETI, M. *Discrete epidemic study SIR with age structure and application of pulse and constant vaccination*. Recife: Tese de Doutorado, UFPE, 2011. Citado na página 42.

SAÚDE, M. da. *Linha do tempo*. 2020. Disponível em: <<https://coronavirus.saude.gov.br/linha-do-tempo/#fev2020>>. Acesso em: 25.04.2021. Citado na página 18.

TAKAHASHI, R. *No Blog de O Globo, a história da epidemiologia matemática*. 2020. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/no-jornal-o-globo-a-historia-da-epidemiologia-matematica/>>. Acesso em: 08.06.2021. Citado na página 10.

VEJA. *A matemática para conter o avanço explosivo do novo coronavírus*. 2020. Disponível em: <<https://saude.abril.com.br/medicina/a-matematica-para-conter-o-avanco-explosivo-do-novo-coronavirus/>>. Acesso em: 25.05.2021. Citado na página 20.

VOL. *O que é uma curva exponencial de uma pandemia?* 2021. Disponível em: <<https://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/atualidades/o-que-e-curva-exponencial-de-uma-pandemia---entenda-o-ritmo-do-crescimento-das-infeccoes-do-coronavirus.htm>>. Acesso em: 13.04.2021. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

WIKIPEDIA. *Coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2*. 2020. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/CoronavC3ADrus\\_da\\_sC3ADndrome\\_respiratC3B3ria\\_aguda\\_grave\\_2](https://pt.wikipedia.org/wiki/CoronavC3ADrus_da_sC3ADndrome_respiratC3B3ria_aguda_grave_2)>. Acesso em: 24.05.2021. Citado na página 17.

ZANATA, A. *Modelagem matemática com exponencial e logaritmo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, abril 2018. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?cpf=02965923152&d=20210427152855&h=f64dc10356686e930fd0bb8ad4bb808d0b6ac6e0](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=02965923152&d=20210427152855&h=f64dc10356686e930fd0bb8ad4bb808d0b6ac6e0)>. Acesso em: 27.04.2021. Citado na página 20.