

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL



PROFMAT

ANA PAULA DA SILVA MAFFESSONI

MATRIZES: ENSINO E APLICAÇÕES

Uberaba-MG

2013

ANA PAULA DA SILVA MAFFESSIONI

MATRIZES: ENSINO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, Departamento de Matemática.

Uberaba

2013

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

M162m Maffessoni, Ana Paula da Silva
Matrizes: ensino e aplicações / Ana Paula da Silva Maffessoni. --
2013.
76 f. : il., fig., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba,
MG, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Osmar Aléssio

1. Matrizes (Matemática). 2. Determinantes (Matemática). 3. Teo-
ria das estruturas-Métodos matriciais. I. Aléssio, Osmar. II. Universi-
dade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

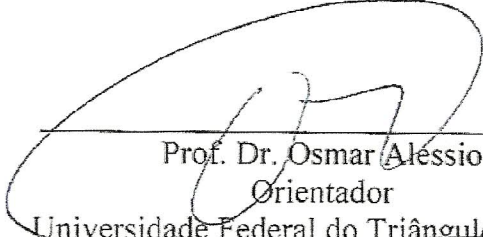
CDU 512.643

ANA PAULA DA SILVA MAFESSONI MATRIZES: ENSINO E APLICAÇÕES

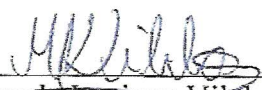
Dissertação apresentada ao curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Uberaba, 28 de agosto de 2013

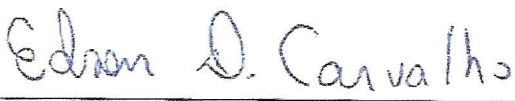
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Osmar Aléssio
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Profª Drª Marcela Luciano Vilela de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho
Universidade Estadual Paulisa (UNESP)

*Às pessoas que sempre estiveram ao meu lado dando apoio,
incentivando, orando e torcendo por mim...
À minha família.*

Agradecimentos

A minha gratidão a todos aqueles que colaboraram para a concretização desse ideal:

- Agradeço a Deus por me reerguer todas as vezes que eu achava que iria esmorecer. Por não deixar que minha fé se abalasse.
- Agradeço aos meus pais, Jaime e Aparecida, que são o alicerce da minha educação; que não mediram esforços para que eu me tornasse uma pessoa do bem; que muitas vezes se privaram de suas vontades para atender às minhas.
- Agradeço a meu marido, Milton, por ter vivenciado comigo momentos bons e momentos difíceis desse estágio de minha vida, por ter me dado apoio, carinho e ter tido paciência durante esse período.
- Agradeço ao meu irmão, meus amigos, meus familiares, enfim, a todos que estiveram presentes. Obrigada pelas palavras, pelo sorriso e pelo abraço todas as vezes que precisei.
- Agradeço a todos os envolvidos neste projeto de melhoria do ensino de matemática - PROFMAT e à CAPES pelo auxílio financeiro, por possibilitarem o avanço de mais um degrau em minha vida.
- Agradeço aos meus colegas de curso pela amizade e companheirismo.
- Agradeço a todo corpo docente e funcionários dessa Instituição, por realizarem seus trabalhos com tanta dedicação, profissionalismo, sem deixar o sorriso de lado.
- Agradeço por fim ao meu orientador Prof. Dr. Osmar Aléssio, que disponibilizou seu tempo, com muita paciência, atenção, compromisso e dedicação, a me orientar em cada passo deste trabalho.

*Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades
para a sua própria produção ou a sua construção.*

Paulo Freire

Resumo

O estudo de matrizes e determinantes é, em geral, limitado ao aluno apenas com foco nas operações elementares, de forma mecânica, sem aplicações práticas ou correlacionado a situações cotidianas. Neste trabalho é apresentado um breve histórico de matrizes e determinantes, definições, representações, tipos e principais conceitos e operações; porém, o principal objetivo deste trabalho é apresentar aplicações para as operações matriciais de forma contextualizada, onde o aluno possa associar o conteúdo a situações vivenciadas por ele e outras situações onde são utilizadas definições e operações de matrizes, mas que muitas vezes o aluno desconhece a relação com o conteúdo, como processamento de imagens digitais, translação, rotação e criptografia.

Palavras-chave: Matriz. Determinante. Aplicações. Operações.

Abstract

The study of matrices and determinants is generally limited to students only focus on elementary operations, mechanically, without correlating or practical applications to everyday situations. This paper presents a brief history of matrices and determinants, definitions, representations, types and main concepts and operations, but the main objective of this paper is to present applications to matrix operations in context where the student can associate the content to situations experienced by him and other situations where are used definitions and matrix operations but often the students are unaware of the relationship with the content, as digital image processing, translation, rotation and encryption.

Keywords: Matrix. Determinant. Applications. Operations.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

1	INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	12
2	BREVE HISTÓRICO	14
3	CONCEITOS BÁSICOS	18
3.1	Matriz	18
3.2	Representação de uma Matriz	18
3.3	Tipos de Matrizes	19
3.4	Igualdade de Matrizes	23
3.5	Operações com Matrizes	23
3.6	Operações Elementares sobre Linhas	27
3.7	Determinantes	32
3.7.1	Permutações	32
3.7.2	Determinante	34
3.7.3	Dispositivos Práticos para o Cálculo de Determinantes de Ordem $n \leq 3$	35
4	MATRIZES NO ENSINO MÉDIO	43
4.1	Apresentação de Matrizes	43
4.2	Adição de Matrizes	45
4.3	Multiplicação de Matriz por Escalar	48
4.4	Multiplicação de Matrizes	49
4.5	Matriz Inversa	52

4.6	Determinantes	54
5	APLICAÇÕES DE MATRIZES EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS	61
5.1	Operações de Matrizes	66
5.1.1	Adição	66
5.1.2	Subtração	67
5.1.3	Multiplicação por um Escalar	68
5.1.4	Combinação Linear	69
5.1.5	Transposta de uma Imagem	70
5.1.6	Transformações Geométricas	71
5.1.6.1	Translação	71
5.1.6.2	Reflexão	71
5.1.6.3	Rotação	72
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
	Referências	75

Lista de Tabelas

1	Alimentos comprados semanalmente para as creches municipais	44
2	Alimentos comprados semanalmente para os berçários municipais	44
3	Campeonato brasileiro - julho/2013	44
4	Filial A	45
5	Filial B	45
6	Filiais A e B	45
7	Produção no primeiro ano	46
8	Produção no segundo ano	46
9	Produção nos dois anos	46
10	Notas do 1º bimestre	47
11	Notas do 2º bimestre	47
12	Notas do 3º bimestre	47
13	Pontuação mínima para garantir aprovação	48
14	Vendas de carros em janeiro de 2008	49
15	Peso das notas por bimestre	50
16	Notas por bimestre	50
17	Pontuação em cada colégio	51
18	Número de brinquedos a serem doados	51
19	Preço dos brinquedos	51
20	Código	53
21	Número de medalhas / pontuação	55

Lista de Figuras

1	Foto Digital da Ana Paula	61
2	Primeira Imagem Digital	62
3	Figura Binária do Gato	63
4	Figura Ana Paula Binária	63
5	Figura Lenna na Escala de Cinza- Trecho da Matriz 30×30 no canto superior esquerdo	64
6	Figura Ana Paula Colorida e Matriz 10×10 recorte da imagem	65
7	Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna	67
8	Figura Ana Paula subtraída da Figura da Lenna	67
9	Figura gato binário menos a matriz de 1 (uns)	68
10	Figura da Lenna em níveis de cinza normalizado para 1 e subtraída de uma matriz com todas as entradas iguais a 1	68
11	Figura da Ana Paula multiplicada por escalares	69
12	Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(0) = 1 * A + 0 * B = A$	69
13	Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(0.5) = 0.5 * A + 0.5 * B$	70
14	Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(1) = 0.A + 1.B = B$	70
15	Figura Ana Paula=A e Ana Paula Transposta = A^t	70
16	Figura Ana Paula=A e Ana Paula Transladada para cima e para a direita	71
17	Figura Ana Paula refletida sobre o eixo x, eixo y e a reta $y = -x$	72
18	Figura Ana Paula=A e Ana Paula Rotacionada: 0, 20, 45, 60 e 90 graus respectivamente.	73

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Este trabalho inicia-se com um breve histórico sobre o surgimento de matrizes, algumas propriedades e transformações lineares sobre matrizes, determinantes, já contendo algumas aplicações desde aquela época.

Em seguida, são apresentados ao leitor conceitos fundamentais de matrizes e determinantes tais como as principais propriedades, operações, definições e métodos para cálculo desses conteúdos.

No capítulo 4 são expostos alguns exemplos simples, onde o aluno pode associar o conteúdo de matrizes e determinantes à situações práticas encontradas no seu dia a dia.

O último capítulo destaca ainda aplicações do ensino de matrizes e operações elementares, porém com o uso de tecnologia. O conteúdo é associado ao processamento digital de imagens, fazendo demonstrações visuais de algumas operações com matrizes.

De acordo com os PCNs,

A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem.

Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade.

Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráfica. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos.

Tendo em vista a importância de que todos os conteúdos sejam aplicados de forma contex-

tualizada, o objetivo desse trabalho é oferecer aos alunos uma relação direta do conteúdo de matrizes e determinantes com a realidade em que vivem, contestando as suas várias tentativas de afirmarem que os conteúdos do Ensino Médio não são úteis em situações cotidianas, como também colocar conceitos e operações matriciais de maneira natural na resolução de problemas corriqueiros.

2 BREVE HISTÓRICO

Neste capítulo será descrito historicamente como se deu o desenvolvimento do conceito de matrizes e demais tópicos associados, tal como determinante. Os textos desta seção foram extraídos dos livros (BOYER, 2010) e (EVES, 2004).

Matrizes

A álgebra das matrizes foi descoberta em 1857, pelo matemático inglês Arthur Cayley. As matrizes surgiram para Cayley ligadas a transformações lineares do tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

onde a , b , c e d são números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x,y) no ponto (x',y') . Evidentemente, a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a , b , c , d , de modo que ela pode ser simbolizada pelo quadro

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que leva o nome de matriz (quadrada, de ordem 2). Duas transformações da espécie consideradas são iguais se, e somente se, elas possuem os mesmos coeficientes, ou seja, duas matrizes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

são iguais se, e somente se, $a = e$, $b = f$, $c = g$ e $d = h$. Se a transformação dada for seguida por:

$$\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$$

pode-se mostrar que o resultado é a transformação composta

$$\begin{cases} x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases}$$

No ano de 1812 foi publicado um artigo de Cauchy onde se encontrava a primeira demonstração do teorema que afirma que se A e B são duas matrizes de ordem $n \times n$, então $|AB| = |A||B|$. Em 1840 Cauchy introduziu a palavra “característica” na teoria de matrizes, chamando a equação $|A - \lambda I| = 0$ de equação característica associada à matriz A .

Determinantes

A primeira citação sobre a teoria de determinantes foi conferida a Leibniz, em 1693, embora, há dez anos antes, considerações semelhantes já haviam sido feitas por Seki Kowa, no Japão. Leibniz, em cartas a L'Hospital, relata que eventualmente representava com números, linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas, onde

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 & 1_0 + 1_1x + 1_2y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 & \text{ou } 2_0 + 2_1x + 2_2y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 & 3_0 + 3_1x + 3_2y &= 0 \end{aligned}$$

$$a_1 + b_1x + c_1y = 0$$

O que hoje seria escrito como $a_2 + b_2x + c_2y = 0$ corresponde hoje a

$$a_3 + b_3x + c_3y = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Só em 1850 foi publicada essa antecipação de Leibniz por determinantes, e meio século depois foi redescoberta. Porém, em 1812 começaram as contribuições de Cauchy à teoria dos determinantes, com uma extensa memória de oitenta e quatro páginas, o que colocou Cauchy como o matemático que mais contribuiu com o assunto. Cauchy descreveu determinantes como uma classe de funções simétricas alternadas do tipo $a_1b_2 - b_1a_2$.

Atualmente, para apresentar determinantes, começa-se com o dispositivo quadrado, para depois associar um significado ou valor a este por uma expansão de termos de transposições ou permutações. Ao contrário, Cauchy começou com n elementos ou números a_1, a_2, \dots, a_n , e formou o produto deles por todas as diferenças de elementos distintos $a_1a_2 \dots a_n : (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$. Definindo então o determinante como a expressão obtida transformando toda potência indicada em um segundo índice, de modo que a_r^s fica a_{rs} ; escreveu isto como $(\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3} \dots a_{n.n})$.

Então, ele dispôs as n^2 diferentes quantidades neste determinante num quadrado que se assemelha ao usado hoje:

$$\begin{array}{cccccc} a_{1.1}, & a_{1.2}, & a_{1.3}, & \cdots, & a_{1.n} \\ a_{2.1}, & a_{2.2}, & a_{2.3}, & \cdots, & a_{2.n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n.1}, & a_{n.2}, & a_{n.3}, & \cdots & a_{n.n} \end{array}$$

Ordenando dessa forma, dizia-se que as n^2 quantidades neste determinante formavam “um sistema simétrico de ordem n ”. Estabeleceu termos conjugados como sendo elementos em que as ordens dos índices estão invertidos, e termos autoconjugados como termos principais. Denominou de produto principal o que se conhece hoje como diagonal principal e citou outras regras para determinar o sinal de um termo na expansão, usando substituições cíclicas.

Num artigo de 1815, na qual Cauchy abordava propagação de ondas, aplicou a linguagem de determinantes a um problema de geometria e a outro de física.

Somente em 1829 Jacobi usou pela primeira vez o determinante funcional, por esse motivo, Sylvester o chamou de Jacobiano. Jacobi também provou que o determinante de uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar é igual a zero.

Regra de Cramer

Gabriel Cramer publicou em 1750 a obra intitulada *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques* onde encontrava-se a regra de Cramer. Contudo, desde 1729, quando Maclaurin estava escrevendo uma álgebra a título de comentário da *Arithmetica universalis* de Newton, mostrava conhecer essa regra. O *Treatise of Algebra* de Maclaurin foi publicado em 1748, dois anos após sua morte, e nele constava a regra para resolver equações simultâneas por determinantes. A solução para y , no sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \text{ é dada como } y = \frac{af - dc}{ae - db};$$

e a solução para z , no sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases} \text{ é expressa como } z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

No primeiro sistema, Maclaurin explicava que o denominador consiste da “Diferença dos Produtos dos Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem as duas Quanti-

dades incógnitas”, e, no segundo sistema, “todos os Produtos que podem ser formados de três Coeficientes opostos tirados das Ordens que envolvem as três Quantidades desconhecidas”. (Ele explicara antes que chamaria quantidades “de mesma ordem as que são ligadas às mesmas Quantidades desconhecidas nas diferentes equações e aquelas que não afetam Quantidades desconhecidas. Mas são chamados Coeficientes opostos os que são tomados cada um de uma Equação diferente, e de uma Ordem diferente de Coeficientes”.) Nesse esquema que Maclaurin propunha, os numeradores se diferem dos denominadores somente substituindo os coeficientes dos termos na incógnita procurada pelos termos constantes. Maclaurin também explicava como poderia solucionar de maneira semelhante um sistema de quatro equações e quatro incógnitas “antepondo sinais contrários aos que envolvem os Produtos de dois Coeficientes opostos”. Essa alternância de sinais proposta por Maclaurin é análoga à descrita em termos do princípio de inversão, usada atualmente.

Lagrange e Determinantes

A Lagrange são atribuídas, embora expressas diferentemente, formas compactas que foram publicadas no artigo “Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires”, entregues em 1773 e publicadas em 1775, como:

$$\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

usadas para calcular área de um triângulo e volume de um tetraedro, respectivamente.

3 CONCEITOS BÁSICOS

O desenvolvimento deste capítulo foi baseado nas referências (BOLDRINI; COSTA; FIGUEIREDO, WETZLER, 1980), (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2000) (SANTOS) e (SOUZA, 2010).

3.1 Matriz

Definição 3.1.1. *Uma matriz é uma tabela retangular de números, ou outro tipo de objetos matemáticos, dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais). Diz-se assim que a matriz possui ordem $m \times n$. (lê-se: ordem m por n).*

3.2 Representação de uma Matriz

Representa-se uma matriz colocando os dados da tabela entre parênteses ou colchetes.

Exemplo 3.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 10 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A é uma matriz de três linhas e três colunas (matriz ordem 3×3).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

B é uma matriz de duas linhas e três colunas (matriz ordem 2×3).

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C é uma matriz de uma linha e quatro colunas (matriz ordem 1×4).

Uma matriz A de ordem $m \times n$, pode ser indicada como $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, em que a_{ij} é o elemento da linha i e da coluna j da matriz A . Dessa

forma podemos generalizar uma matriz $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ por uma tabela da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.2.2. A matriz $M_{2 \times 4} = [m_{ij}]_{2 \times 4}$ definida por $m_{ij} = 2i + j$, é uma matriz real, representada por 2 linhas e 4 colunas. Assim,

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 & m_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4 & m_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5 & m_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6 \\ m_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5 & m_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6 & m_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7 & m_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3.3 Tipos de Matrizes

Existem matrizes que, por apresentarem características notáveis, merecem destaque. Veja algumas delas:

Matriz coluna

A matriz $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ de ordem $m \times 1$ é chamada matriz coluna.

Matriz Linha

A matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ de ordem $1 \times n$ é chamada matriz linha.

Matriz Quadrada

Chama-se matriz quadrada, toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. A ordem da matriz quadrada é $n \times n$ ou, simplesmente, n .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n , os elementos a_{ij} , em que $i = j$, constituem a diagonal principal. Assim, dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n , os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ constituem a diagonal principal.

Denomina-se *traço* da matriz A , a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A , o qual indicamos por $tr(A)$.

Diagonal Secundária

Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n , os elementos a_{ij} , em que $i + j = n + 1$, constituem a diagonal secundária da matriz. Assim, dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n , os elementos $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ constituem a diagonal secundária.

Exemplo 3.3.1. Na matriz $M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 \\ 6 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, quadrada de ordem 3, sua diagonal principal é $\{8, 4, 2\}$, sua diagonal secundária é $\{-1, 4, -2\}$ e o traço da matriz M é dado por $tr(M) = 8 + 4 + 2 = 14$.

Matriz Diagonal

A matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n e que tem os elementos $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$, é chamada matriz diagonal, ou seja, é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{44} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

É toda matriz em que todos os elementos são iguais a zero.

Exemplo 3.3.2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula de ordem 3×2 .

Matriz Identidade ou Unidade

A matriz diagonal de qualquer ordem na qual os elementos da sua diagonal principal são constituídos apenas pelo número 1 é chamada *matriz identidade*. Denota-se a matriz identidade de ordem n por I_n , ou simplesmente por I .

Exemplo 3.3.3. São matrizes identidade:

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

Matriz Transposta

Chama-se *transposta* de $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ a matriz $A^t = [a'_{ij}]_{m \times n}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j , ou seja, a transposta de A é a matriz obtida de A , trocando-se “ordenadamente”, suas linhas por colunas (ou, suas colunas por linhas).

Exemplo 3.3.4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é dita simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$.

Observe que:

(a) A é simétrica se $A^t = A$;

(b) No caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma “reflexão” da parte inferior, em relação à diagonal principal.

Exemplo 3.3.5. *São simétricas as matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Antissimétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ diz-se *antissimétrica* quando $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Assim, os elementos da diagonal principal são todos nulos e os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Observe que a matriz quadrada A é antissimétrica de ordem n se, e somente se, $A^t = -A$.

Exemplo 3.3.6. *São antissimétricas as matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i > j$, é chamada de *triangular superior*, ou seja, quando todos elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

$$\text{Exemplo 3.3.7. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$, para $i < j$, é chamada de *triangular inferior*, ou seja, quando todos elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$\text{Exemplo 3.3.8. } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

De outro modo, a definição anterior nos diz que A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Indica-se $A = B$.

Exemplo 3.4.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

é igual a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix},$$

pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

A igualdade entre matrizes goza das seguintes propriedades:

- Reflexiva: $A = A$;
- Simétrica: Se $A = B$, então $B = A$;
- Transitiva: Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

3.5 Operações com Matrizes

Adição de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chama-se soma $A + B$, a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j .

Isto significa que a soma de duas matrizes A e B , de mesma ordem $m \times n$, é uma matriz C , e mesma ordem, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B .

Exemplo 3.5.1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -3 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -6 \\ -8 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 2+(-2) \\ 7+5 & -3+(-6) \\ 0+(-8) & 5+4 \\ -2+9 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -9 \\ -8 & 9 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5.1. *A operação de adição definida nas matrizes do tipo $m \times n$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- *é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$, quaisquer que sejam A , B e C do tipo $m \times n$;*
- *é comutativa: $A + B = B + A$, quaisquer que sejam A e B , do tipo $m \times n$;*
- *tem elemento neutro: $\exists M$ tal que $A + M = A$, qualquer que seja A do tipo $m \times n$;*
- *todo elemento tem simétrico: para toda A de ordem $m \times n$: $\exists A'$ tal que $A + A' = M$.*

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se *oposta de A* (indica-se $-A$) a matriz A' , tal que $A + A' = 0$.

Exemplo 3.5.2. Se $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ então $-A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Produto de uma Matriz por um Número Real

Dado um número real k e uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se o produto $k.A$ a matriz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ na qual os elementos b_{ij} são dados por $b_{ij} = k.a_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número real k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A , onde todas entradas são multiplicadas por k .

Exemplo 3.5.3.

$$a) -3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -18 & 6 \\ 3 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$b) \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5.2. *O produto de um número por uma matriz satisfaz as seguintes propriedades:*

- $a.(b.A) = (a.b).A$;
- $a.(A + B) = a.A + a.B$;

- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$;
- $1 \cdot A = A$;

Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, chama-se o produto $A \cdot B$ a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$, tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

e todo $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

A definição dada garante a existência do produto $A \cdot B$ se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B , pois, A é de ordem $m \times n$ e B , $n \times p$. E o produto $A \cdot B$ é uma matriz que tem número de linhas de A e o número de colunas de B , pois, $C = A \cdot B$ é do tipo $m \times p$.

Um elemento c_{ik} da matriz $C = A \cdot B$ deve ser obtido pelo procedimento a seguir:

- toma-se a linha i da matriz A : $a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in}$ (n elementos)
- toma-se a coluna k da matriz B :

$$\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \text{ (} n \text{ elementos)} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array}$$

- calcula-se os n produtos dos elementos (conforme o esquema):

$$\begin{array}{c} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{array}$$

- soma-se esses n produtos, obtendo c_{ik} .

Exemplo 3.5.4. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $A \cdot B$.

Sendo A de ordem 2×3 e B de ordem 3×1 , decorre que existe $A \cdot B$ e é de ordem 2×1 . Fazendo $A \cdot B = C$, deve-se calcular c_{11} e c_{21} :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B \\ 2^{\text{a}} \text{ linha de } A \cdot 1^{\text{a}} \text{ coluna de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 + 2.0 + 3.1 \\ 0.4 + (-1).0 + 6.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto de Matrizes

O produto de matrizes, desde que sejam possíveis as operações, apresenta as seguintes propriedades:

- $A \cdot I = I \cdot A = A$ (isto justifica o nome matriz identidade);
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributividade à esquerda em relação à soma);
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à soma);
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$, em que 0 é a matriz nula.

Observe que $A \cdot B = 0$, sem que, necessariamente, $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemplo 3.5.5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No início deste capítulo, foi mencionado um tipo de matriz chamada **matriz transposta**. Esse tipo de matriz apresenta as seguintes propriedades:

- $(A^t)^t = A$, para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.
- Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.
- Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, então $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

3.6 Operações Elementares sobre Linhas

Denomina-se *operações elementares sobre linhas* de uma matriz os procedimentos (1), (2) e (3) descritos a seguir:

1- Permutação de linhas;

2- Multiplicação de todos elementos de uma linha por um escalar não-nulo;

3- Substituição dos elementos de uma linha pela soma dos mesmos com os elementos correspondentes de outra linha previamente multiplicados por um escalar não-nulo.

Se A é uma matriz $m \times n$, cujas linhas são L_1, L_2, \dots, L_m , indica-se as operações acima com os seguintes símbolos:

1- $L_r \leftrightarrow L_s$, que significa permutar as linhas r e s .

2- $L_r \rightarrow k \cdot L_r$, significa que a r -ésima linha foi substituída por ela própria multiplicada pela constante não nula k .

3- $L_r \rightarrow L_r + k \cdot L_s$, ou seja, a r -ésima linha foi substituída por ela mais k vezes a s -ésima linha.

Observação: As mesmas operações podem ser realizadas sobre colunas.

Exemplo 3.6.1. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao realizar a operação $L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1$ tem-

se como resultado a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Efetuando a operação $L_2 \rightarrow L_2 + (-3)L_1$ a

matriz resultante é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, e, realizando a operação $L_3 \rightarrow L_3 + (-4)L_1$,

resulta a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix}$.

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz possuem as propriedades: **reflexiva, simétrica e transitiva.**

Sejam $A, B \in M_{m \times n}$, ou seja, de ordem $m \times n$. Diz-se que B é linha equivalente a matriz A , quando B pode ser obtida de A por uma sequência finita de operações

elementares sobre as linhas de A .

Exemplo 3.6.2. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A seqüência de operações elementares a seguir mostra que B é linha equivalente de A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \Rightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{4}L_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Matriz Linha Reduzida Escalonada

Uma matriz $M_{m \times n}$ é dita linha reduzida escalonada ou reduzida à forma de escada se $M = 0$ ou satisfaz as seguintes condições:

- 1- Primeiro elemento não-nulo de cada linha deve ser igual a 1.
- 2- Toda coluna que contém o primeiro elemento não-nulo de uma determinada linha deve ter todos os outros elementos dessa coluna nulos.
- 3- Toda linha nula deve ficar abaixo das linhas não-nulas.
- 4- Se L_1, L_2, \dots, L_r são linhas não-nulas de M , e se o primeiro elemento não-nulo da linha L_i ocorre na coluna k_i então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de uma linha, aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver. Essa condição impõe a forma escalonada da matriz.

Exemplo 3.6.3. Matrizes linha reduzida escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.6.4. São matrizes não reduzidas escalonadas:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposição 3.6.1. *Toda matriz $A \in M_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida escalonada.*

Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha reduzida escalonada linha equivalente a A . Chama-se *posto* (ou característica) de A o número de linhas não-nulas da matriz B e é denotado $P(A)$.

Chamamos de *nulidade* (ou grau de liberdade) de uma matriz A o número $N(A) = [n - P(A)]$, onde n é o número de colunas da matriz A .

Exemplo 3.6.5. Na matriz linha reduzida escalonada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ observa-se que o número de linhas não nulas é igual a 2. Então, $P(A) = 2$ e a nulidade $N(A) = [4 - 2] = 2$.

Matrizes Inversíveis

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Diz-se que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema 3.6.1. *Se A é inversível, então é **única** a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.*

Dada uma matriz inversível A , chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Assim, A^{-1} deve ser também de ordem n , pois, A^{-1} comuta com A .

Exemplo 3.6.6. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, pois

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.6.7. Encontrar a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A = I_2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 5b & 7a + 11b \\ 3c + 5d & 7c + 11d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos: $\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ 7a + 11b = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ 7c + 11d = 1 \end{cases}$

Logo, $a = -\frac{11}{2}$, $b = \frac{7}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$, isto é, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Note que $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Teorema 3.6.2. Se A é inversível, sua matriz linha reduzida escalonada é a identidade.

Exemplo 3.6.8. Com base no teorema acima, verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ é inversível.

Deve-se verificar, portanto, se a matriz linha reduzida escalonada de A é a identidade.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow \frac{1}{4}L_1 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow L_2 + (-2L_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{5}L_2 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_1 + (-2L_2) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como a matriz linha reduzida escalonada de A é a identidade, tem-se que A é inversível.

Exemplo 3.6.9. Encontre a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, caso seja possível.

Primeiramente coloca-se a matriz identidade ao lado direito da matriz A .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Em seguida, efetua-se operações elementares de modo que a matriz A possa se transformar na matriz identidade.

$$L_3 \rightarrow L_3 + (-L_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \rightarrow \frac{1}{3}L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 + (-L_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Note que as operações elementares aplicadas na matriz A também foram aplicadas na matriz identidade. E, ao transformar a matriz A em matriz identidade, a matriz identidade que se tinha anteriormente tornou-se a inversa da matriz A . Logo A é inversível e

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

Matrizes Elementares

Uma matriz elementar de ordem n é uma matriz E obtida de I_n (matriz identidade) por meio de uma só operação elementar.

Exemplo 3.6.10. As matrizes $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ são elementares. A primeira se obtém de I_3 multiplicando-se a segunda linha por 2 ($L_2 \rightarrow 2L_2$). A segunda é obtida de I_3 subtraindo à segunda linha desta matriz e sua primeira linha multiplicada por 3 ($L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1$).

Proposição: Toda matriz elementar E é inversível.

3.7 Determinantes

A toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ está associada um elemento de \mathbb{R} chamado **determinante** de A , usualmente representado por $\det(A)$ ou $|A|$.

3.7.1 Permutações

Seja $n \geq 1$ um número natural. Considere o conjunto $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 3.7.1. Toda aplicação bijetora $\sigma : J_n \rightarrow J_n$ chama-se *permutação do conjunto J_n* .

Se σ e φ são permutações de J_n , então $\sigma \circ \varphi : J_n \rightarrow J_n$ também é uma permutação. A aplicação idêntica de J_n (indica-se por Id) é obviamente uma permutação. Além disso, a inversa σ^{-1} de uma permutação σ de J_n também é permutação de J_n .

Indica-se abreviadamente uma permutação σ de J_n por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Como σ é injetora e sobrejetora, a sequência $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ é simplesmente um rearranjo dos números $1, 2, \dots, n$. O número de tais permutações é $n!$ e o conjunto delas é, usualmente, representado por S_n .

Exemplo 3.7.1. Se $n = 2$, existem duas ($2!$) permutações do conjunto $J_2 = \{1, 2\}$ que são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou, de outra maneira, pode-se dizer que existem $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutações em $S_2 : (1\ 2)$ e $(2\ 1)$.

Exemplo 3.7.2. Existem 6 ($3!$) permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

É o mesmo que dizer que existem $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutações em

$$S_3: (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1).$$

Definição 3.7.2. Considere uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ de } I_n.$$

Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se sinal ou paridade da permutação σ o número inteiro representado por $\text{sgn}(\sigma)$, que é

- $\text{sgn}(\sigma) = 1$, se r é par;
- $\text{sgn}(\sigma) = -1$, se r é ímpar.

Exemplo 3.7.3. Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. O único par (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ é $(2, 3)$. Logo $r = 1$ e $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

Definição 3.7.3. Uma permutação σ é par (respectivamente ímpar) se $\text{sgn}(\sigma) = 1$ (respectivamente $\text{sgn}(\sigma) = -1$).

Definição 3.7.4. Chama-se transposição uma permutação ψ em que existe apenas um par (i, j) de maneira que $i < j$ e $\psi(i) > \psi(j)$ e que deixa os demais elementos fixos, isto é, $\psi(k) = k$, $k \neq i, j$. Essa transposição é indicada por $(i\ j)$.

Exemplo 3.7.4. Transposições de permutações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (} i = 1 \text{ e } j = 2 \text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ (} i = 3 \text{ e } j = 6 \text{)}$$

As transposições são permutações ímpares muito simples pois $n - 2$ elementos de $I_n = \{1, \dots, n\}$ são inalterados por elas e, logicamente, os outros dois são invertidos ou transpostos.

Teorema 3.7.1. *Toda permutação σ do conjunto J_n pode ser fatorada na forma $\sigma = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_s$, onde ψ_i são transposições. Se $\sigma = \psi'_1 \circ \psi'_2 \circ \dots \circ \psi'_t$ é outra decomposição de σ em transposições, então s e t são ambos pares ou ambos ímpares. Além disso, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^s$.*

Decorre desse teorema que $\text{sgn}(\sigma \circ \varphi) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\varphi)$, onde σ e φ são permutações quaisquer do conjunto J_n . Em particular, para toda transposição ψ , $\text{sgn}(\sigma \circ \psi) = -\text{sgn}(\sigma)$.

3.7.2 Determinante

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem n . Considere um produto da forma

$$a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} * \dots * a_{n\sigma(n)},$$

em que σ é uma permutação do conjunto I_n . Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A (pois os primeiros índices não se repetem) e apenas um elemento de cada coluna de A (pois os segundos índices também não se repetem, já que σ é bijetora). Multiplicando esse produto pelo sinal de σ que é 1 ou -1 :

$$\text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} * \dots * a_{n\sigma(n)}.$$

Somando todos os elementos assim obtidos, de maneira que σ percorra o conjunto de todas as permutações de J_n , serão, assim, $n!$ parcelas no somatório

$$\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} * \dots * a_{n\sigma(n)}.$$

Definição 3.7.5. *Chama-se determinante da matriz A de ordem n o número real*

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} * \dots * a_{n\sigma(n)}$$

ou $|A| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} * \dots * a_{n\sigma(n)}.$

É, frequentemente, representado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposição 3.7.1. Se $A = [a_{11}]$, então $\det(A) = a_{11}$.

Proposição 3.7.2. Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Então, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Proposição 3.7.3. Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Então $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Note que, como o número de parcelas de $\det(A)$ é $n!$, então o cálculo de determinantes através da definição se torna trabalhoso em demasia à medida que cresce o n . Portanto, pode-se usar métodos indiretos para calcular determinantes, em vez da definição. Através da demonstração de propriedades sobre determinantes permite encurtar consideravelmente este cálculo. Será mostrado que um determinante de ordem n é igual a uma combinação linear de determinantes de ordem $n - 1$.

Para as matrizes de ordem $n = 2$ e $n \leq 3$ existem dispositivos práticos para o cálculo dos respectivos determinantes, tomando a filosofia de que, uma vez dominada a teoria que fundamenta os determinantes, estes dispositivos serão utilizados como ferramenta prática de cálculo dos mesmos.

3.7.3 Dispositivos Práticos para o Cálculo de Determinantes de Ordem $n \leq 3$

- Se A é de ordem $n = 1$, então $\det(A)$ é o único elemento de A .

$$A = [a_{11}] \text{ então, } \det(A) = a_{11}$$

- Se A é de ordem 2, $\det(A)$ é o produto dos elementos da diagonal principal subtraído do produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ então, o } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 3.7.5. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, então $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4(-3) = 14$.

• **Regra de Sarrus:** Se A é de ordem $n = 3$, isto é, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ define-se:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Essa definição pode ser assim memorizada:

a) Repete-se, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

b) Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}; a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}; a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$$

c) Os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}; -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}; -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Exemplo 3.7.6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$

Menor Complementar e Complemento Algébrico

Definição 3.7.6. Considere uma matriz A de ordem $n \geq 2$ e seja a_{ij} um elemento de A . Define-se menor complementar do elemento a_{ij} e indica-se D_{ij} , como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A .

Exemplo 3.7.7. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$.

Definição 3.7.7. Considere uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A . Define-se complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}) e indica-se A_{ij} , como sendo o número resultante do produto $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

Teorema 3.7.2. O determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ é igual à soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos de qualquer linha (coluna) pelos seus respectivos cofatores:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

e

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

As fórmulas acima, chamadas desenvolvimento de **Laplace** do determinante de A (teorema de Laplace) segundo a i -ésima linha e j -ésima coluna, respectivamente, oferecem um método de simplificar o cálculo de $|A|$, isto é, adicionando um múltiplo de uma linha (coluna) a outra linha (coluna), pode-se reduzir A a uma matriz contendo uma linha ou uma coluna com um elemento 1 e os outros elementos 0. Desenvolvendo segundo esta linha ou coluna, reduz o cálculo de um determinante de ordem uma unidade inferior à ordem de $|A|$.

Teorema de Jacobi: Ao adicionar a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A , outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número real, obtem-se uma matriz B tal que $\det A = \det B$.

Exemplo 3.7.8. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 28 + 0 + 6 + 0 + 28 = 14$$

Ao adicionar à 2ª linha da matriz A a 3ª linha multiplicada por 2, obtem-se a matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, sendo: $\det B = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 56 + 0 + 6 + 0 + 0 = 14$.

Note que a matriz B foi obtida a partir da matriz A de acordo com o teorema de Jacobi e, portanto, $\det A = \det B = 14$.

Teorema de Binet: Dadas as matrizes quadradas A e B de mesma ordem, tem-se $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exemplo 3.7.9. Dadas as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 16 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 16 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 108 - 256 - 24 + 192 - 96 = -60$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 4 + 0 - 2 - 8 = -10$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 12 - 5 - 16 + 10 - 3 = 6$$

$$\det A \cdot \det B = -10 \cdot 6 = -60$$

Portanto, de acordo com o teorema de Binet, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = -60$.

Regra de Chió:

A regra de Chió é um artifício utilizado para reduzir a ordem de uma matriz sem alterar o valor do determinante. Essa regra pode ser utilizada em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem $n \geq 2$, em que $a_{11} = 1$, por meio dos seguintes procedimentos:

- suprime-se a 1ª linha e a 1ª coluna de A ;
- de cada elemento a_{ij} restante subtrai-se o produto dos elementos suprimidos da mesma coluna e linha de a_{ij} , ou seja, $a_{1j} \cdot a_{i1}$.
- a matriz B obtida, de ordem $n - 1$, tem determinante igual o de A , ou seja, $\det A = \det B$.

Exemplo 3.7.10. Para calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pode-se utilizar a regra de Chió. Nesse caso, obtém-se uma}$$

matriz B de ordem 3, tal que $\det A = \det B$.

- Inicialmente suprime-se a 1ª linha e 1ª coluna de A : $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- Subtrai-se de cada elemento restante a_{ij} o produto dos elementos suprimidos a_{1j} e

$$a_{i1}: A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Do elemento 5, por exemplo, subtrai-se o produto de -2 por 0 (-2 é o elemento suprimido da linha que 5 pertence e 0 o elemento suprimido da coluna a qual 5 pertence).

Assim fazendo com todos os elementos, resulta a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{pmatrix}$

Pela regra de Chió, para um matriz de ordem 4, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} & a_{24} - a_{14} \cdot a_{21} \\ a_{32} - a_{12} \cdot a_{31} & a_{33} - a_{13} \cdot a_{31} & a_{34} - a_{14} \cdot a_{31} \\ a_{42} - a_{12} \cdot a_{41} & a_{43} - a_{13} \cdot a_{41} & a_{44} - a_{14} \cdot a_{41} \end{pmatrix}$$

- Como pela regra de Chió os determinantes das matrizes A e $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{pmatrix}$

são iguais, aplicando a regra de Sarrus resulta em:

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & -10 & -8 \end{vmatrix} = -40 - 90 - 630 + 27 + 150 + 560 = -23$$

Portanto, $\det A = -23$.

Observação: Só se pode aplicar a regra de Chió a matrizes quadradas A em que $a_{11} = 1$, caso contrário deve-se primeiramente aplicar o teorema de Jacobi para se obter uma matriz B , de mesma ordem de A em que $b_{11} = 1$.

Propriedades dos Determinantes

A definição de determinante e o Teorema de Laplace permite o cálculo de qualquer determinante. Contudo, é possível simplificar este cálculo empregando-se certas propriedades.

P₁. O determinante de uma matriz A e o de sua transposta A^t são iguais, isto é, $\det(A) = \det(A^t)$. Através desta propriedade, qualquer outra propriedade envolvendo determinante de uma matriz A e suas linhas é válida para $\det(A)$ e suas colunas.

P₂. Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha (coluna) de zeros, então $\det(A) = 0$.

P₃. Seja A uma matriz quadrada. Se A tem duas linhas (colunas) idênticas, então $\det(A) = 0$.

P₄. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . Se A é triangular inferior ou superior, então $\det(A)$ é produto dos elementos diagonais [$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$]. Assim, em particular, $\det(I_n) = 1$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

P₅. Se uma matriz A de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então $\det(A) = 0$.

P₆. Seja B uma matriz obtida da multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por um escalar k . Então $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

P₇. Troca entre si de duas linhas (respectivamente, colunas) de A então $|B| = -|A|$.

P₈. Adicionando a uma linha ou coluna de uma matriz A , de ordem n , uma outra linha ou coluna paralela, previamente multiplicada por uma constante, obtém-se uma nova matriz B tal que $|B| = |A|$.

A importância desta propriedade reside no fato de que pode-se “introduzir zeros” numa fila de uma matriz, sem alterar seu determinante. Com isso pode-se facilitar bastante seu cálculo através do teorema de Laplace.

P₉. Se uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n , tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então $\det(A) = 0$.

P₁₀. Teorema de Binet: Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Como consequência decorre de P_{10} que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. De fato, se existe A^{-1} , então: $A \cdot A^{-1} = I_n$. Assim, $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n)$. Logo, $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, ou seja, $\det(A) \neq 0$. Portanto,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Matriz Adjunta

Definição: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n , A_{ij} o cofator de a_{ij} e A' a matriz dos cofatores de A . Chama-se matriz adjunta de A e indica-se $\text{adj}(A)$, a transposta da matriz A' , isto é, $\text{adj}(A) = (A')^t$.

$$\text{Em resumo: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} \text{ em que } B_{ij} = A_{ji}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, então $A' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, pois

$$A_{11} = (-1)^2 |4| = 4$$

$$A_{12} = (-1)^3 |3| = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 |2| = -2$$

$$A_{22} = (-1)^4 |1| = 1$$

$$\text{e } \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo da Inversa da Matriz Quadrada

Teorema 3.7.3. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $\det(A) \neq 0$, então a inversa de A é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Corolário 3.7.1. Seja A é uma matriz quadrada de ordem n . A inversa da matriz A

existe, se e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Exemplo 3.7.11. Determine a inversa, se possível, da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Como $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, temos que A é inversível. Segue que $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4 MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

No atual contexto pedagógico escolar, não se cobram mais apenas teorias e teoremas, mas conhecimento prático-teórico dos alunos. Faz-se necessário incluir em todos os níveis de ensino, novos recursos e tecnologias que propiciem aos discentes um nível maior de conhecimento teórico voltado para a prática laboral. No entanto, quando se estuda matrizes e determinantes, é limitado ao aluno apenas um foco nas operações elementares para se resolver determinantes e aplicá-los na resolução de sistemas lineares, embora nem sempre haja uma associação do sistema linear com sua forma matricial. Isso pode dar ao aluno uma concepção errônea de que há poucas aplicações de matrizes no nosso cotidiano.

Muitos livros didáticos exibem em seu conteúdo as operações com matrizes apenas como operações mecânicas, onde elementos são multiplicados e/ou adicionados sem nenhum exemplo de situação habitual. Isso faz com que muitos professores também só transmitam o conteúdo dessa maneira para o aluno, o que o distancia da correlação conteúdo - dia a dia.

Aqui serão apresentadas algumas sugestões de aplicação de matrizes no ensino médio através de situações práticas.

4.1 Apresentação de Matrizes

Matrizes são tabelas que aparecem naturalmente em várias situações do dia a dia. Em livros de ensino médio, é comum, e muito importante que a introdução de matrizes seja através de alguma tabela extraída de situações corriqueiras e que essa tabela seja transformada em matriz, pois assim os alunos poderão entender o sentido do conteúdo, podendo relacioná-lo a situações práticas, entender melhor a teoria ou até mesmo construir conhecimento, ao invés de apenas aprender a teoria formal.

Exemplo 4.1.1. *O município de Ibiá possui três creches para crianças de 2 a 14 anos e dois berçários, para crianças de 6 meses a 2 anos, mantidos pelo poder municipal. Nas tabelas abaixo, está disposta a relação dos alimentos comprados semanalmente, por serem perecíveis, para cada uma das instituições:*

Instituição	Carne (kg)	Verduras (kg)	Frutas(kg)
Creche Isaura Silva	60	45	12,5
Creche Canuta Maria	67,5	52,5	15
Creche Dona Tereza	75	55	17,5

Tabela 1: Alimentos comprados semanalmente para as creches municipais

Instituição	Carne (kg)	Verduras (kg)	Frutas (kg)
Berçário Agda Borges	15	12	8
Berçário São Dimas	25	16	10

Tabela 2: Alimentos comprados semanalmente para os berçários municipais

Essas tabelas podem ser representadas matricialmente considerando apenas os números dispostos em linhas e colunas, porém colocados entre parênteses ou colchetes, da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 45 & 12,5 \\ 67,5 & 52,5 & 15 \\ 75 & 55 & 17,5 \end{pmatrix}, \text{ matriz quadrada de ordem } 3.$$

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 8 \\ 25 & 16 & 10 \end{pmatrix}, \text{ matriz de ordem } 2 \times 3.$$

A matriz A corresponde aos dados da tabela 1 e a matriz B aos dados da tabela 2.

Exemplo 4.1.2. *Tabela dos cinco primeiros colocados no campeonato brasileiro em 28 de julho de 2013, durante a nona rodada:*

	Pontos	Jogos	Vitórias	Empates	Derrotas
Internacional	18	9	5	3	1
Botafogo	16	8	5	1	2
Coritiba	16	8	4	4	0
Cruzeiro	15	8	4	3	1
Vitória	14	8	4	2	2

Tabela 3: Campeonato brasileiro - julho/2013

Que pode ser representada pela matriz quadrada

$$\begin{pmatrix} 18 & 9 & 5 & 3 & 1 \\ 16 & 8 & 5 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 4 & 0 \\ 15 & 8 & 4 & 3 & 1 \\ 14 & 8 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ de ordem } 5.$$

4.2 Adição de Matrizes

Em muitos livros didáticos a adição de matrizes só é ensinada, de forma mecânica, como uma operação que consiste em adicionar elementos que ocupam a mesma posição em matrizes de mesma ordem.

Hoje, alguns livros apresentam exemplos simples, como os exibidos a seguir, onde o aluno entende, de forma clara e evidente, o fundamento de se somar esses elementos correspondentes das matrizes.

Exemplo 4.2.1. (PAIVA, 2009) *Uma indústria de televisores possui duas filiais, A e B. Cada uma delas produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisor. As tabelas abaixo apresentam as produções de filiais nos três primeiros dias do mês de fevereiro:*

Produção da filial A			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	49	60	70
Modelo 2	90	48	73

Tabela 4: Filial A

Produção da filial B			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	76	80	45
Modelo 2	93	60	50

Tabela 5: Filial B

Para descrever o número de televisores vendidos de cada modelo conjuntamente, basta adicionar elementos equivalentes das tabelas.

Produção das filias A e B			
	Dia 1	Dia 2	Dia 3
Modelo 1	125	140	115
Modelo 2	183	108	123

Tabela 6: Filiais A e B

Pode-se representar essa situação por uma adição de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 49 & 60 & 70 \\ 90 & 48 & 73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76 & 80 & 45 \\ 93 & 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.2.2. (*BOLDRINI et al., 1980*) Considere as tabelas que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o primeiro ano				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Tabela 7: Produção no primeiro ano

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o segundo ano				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	5000	50	200	0
Região B	2000	100	300	300
Região C	2000	100	600	600

Tabela 8: Produção no segundo ano

Para representar a quantidade de grãos produzidos por região no biênio, deve-se somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores.

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Tabela 9: Produção nos dois anos

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.2.3. Um grupo de amigos, Paulo, Ricardo, Marina e Débora resolveram construir tabelas contendo as notas das disciplinas que tinham maior dificuldade para poderem analisar seus desempenhos ao longo dos três primeiros bimestres do ano. Em cada bimestre foram distribuídos 25 pontos e o mínimo para aprovação é de 60 pontos em cada disciplina ao final do ano letivo.

1º Bimestre				
	Português	Matemática	Física	Química
Paulo	20	20	19	16
Ricardo	15	21	22	19
Marina	19	12,5	20	21
Débora	21	20	15	18

Tabela 10: Notas do 1º bimestre

2º Bimestre				
	Português	Matemática	Física	Química
Paulo	18	20	18	14
Ricardo	12	20,5	19,5	20
Marina	21	13,5	19	20
Débora	18	17,5	14	22

Tabela 11: Notas do 2º bimestre

3º Bimestre				
	Português	Matemática	Física	Química
Paulo	18	19	18,5	15
Ricardo	11,5	18	18	20
Marina	17	13,5	21	19
Débora	20	21	15,5	20

Tabela 12: Notas do 3º bimestre

Colocando em forma de matriz, sendo A a matriz correspondente às notas do 1º bimestre, B a matriz correspondente às notas do 2º bimestre e C a do 3º bimestre:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 19 & 16 \\ 15 & 21 & 22 & 19 \\ 19 & 12,5 & 20 & 21 \\ 21 & 20 & 15 & 18 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 18 & 20 & 18 & 14 \\ 12 & 20,5 & 19,5 & 20 \\ 21 & 13,5 & 19 & 20 \\ 18 & 17,5 & 14 & 22 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 18,5 & 15 \\ 11,5 & 18 & 18 & 20 \\ 17 & 13,5 & 21 & 19 \\ 20 & 21 & 15,5 & 20 \end{pmatrix}$$

Para saber o total de pontos obtidos por cada aluno até o 3º bimestre, basta realizar a adição matricial.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 19 & 16 \\ 15 & 21 & 22 & 19 \\ 19 & 12,5 & 20 & 21 \\ 21 & 20 & 15 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 20 & 18 & 14 \\ 12 & 20,5 & 19,5 & 20 \\ 21 & 13,5 & 19 & 20 \\ 18 & 17,5 & 14 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 19 & 18,5 & 15 \\ 11,5 & 18 & 18 & 20 \\ 17 & 13,5 & 21 & 19 \\ 20 & 21 & 15,5 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 56 & 59 & 55,5 & 45 \\ 38,5 & 59,5 & 59,5 & 59 \\ 57 & 39,5 & 60 & 60 \\ 59 & 58,5 & 44,5 & 60 \end{pmatrix}$$

Este é um bom exemplo para ilustrar **subtração de matrizes**.

Se o mínimo para aprovação é 60 pontos em cada disciplina, para que os alunos possam descobrir quantos pontos em cada uma dessas disciplinas ainda faltam para que eles sejam aprovados basta fazer a seguinte operação:

$$\begin{pmatrix} 60 & 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 60 & 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 56 & 59 & 55,5 & 45 \\ 38,5 & 59,5 & 59,5 & 59 \\ 57 & 39,5 & 60 & 60 \\ 59 & 58,5 & 44,5 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4,5 & 5 \\ 21,5 & 0,5 & 0,5 & 1 \\ 3 & 20,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1,5 & 15,5 & 0 \end{pmatrix}$$

A primeira matriz representa a quantidade mínima de pontos que deve ser obtida para garantir aprovação e a segunda matriz é a quantidade de pontos que eles obtiveram até o 3º bimestre. Assim, o mínimo de pontos que cada aluno deve conseguir para que seja aprovado pode ser representado por:

4º Bimestre				
	Português	Matemática	Física	Química
Paulo	4	1	4,5	5
Ricardo	21,5	0,5	0,5	1
Marina	3	20,5	0	0
Débora	1	1,5	15,5	0

Tabela 13: Pontuação mínima para garantir aprovação

4.3 Multiplicação de Matriz por Escalar

Assim como acontece na adição de matrizes, a maior parte dos livros didáticos só apresenta a operação multiplicando o escalar por cada elemento da matriz. Através de exemplos simples como os apresentados abaixo, pode-se contextualizar a operação, tornando-a de fácil entendimento para os alunos.

Voltando à análise do exemplo 4.2.2, considere a situação: Existem muitos incentivos para se incrementar a produção, condições climáticas, etc; de tal forma que a previsão para a safra do terceiro ano seja o triplo da produção do primeiro. Assim, a estimativa de produção deste ano será:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 & 600 & 1200 & 1800 \\ 2100 & 1050 & 2100 & 300 \\ 3000 & 300 & 1500 & 2400 \end{pmatrix}$$

Utilizando agora o exemplo 4.2.3, pode-se utilizar multiplicação de escalar por matriz para encontrar a média dos pontos obtidos até o terceiro bimestre. Como já foi obtida a matriz que representa o total de pontos, basta multiplicá-la por $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 56 & 59 & 55,5 & 45 \\ 38,5 & 59,5 & 59,5 & 59 \\ 57 & 39,5 & 60 & 60 \\ 59 & 58,5 & 44,5 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,67 & 19,67 & 18,5 & 15 \\ 12,83 & 19,83 & 19,83 & 19,67 \\ 19 & 13,17 & 20 & 20 \\ 19,67 & 19,5 & 14,83 & 20 \end{pmatrix}$$

Exemplo 4.3.1. A venda de carros de uma determinada rede de concessionárias em janeiro de 2008 está representada na tabela abaixo:

	Gol	Fox	Voyage
Loja 1	87	69	58
Loja 2	92	71	59
Loja 3	89	68	58

Tabela 14: Vendas de carros em janeiro de 2008

Que pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 87 & 69 & 58 \\ 92 & 71 & 59 \\ 89 & 68 & 58 \end{pmatrix}$$

Devido à redução de IPI, em 2009 o número de vendas dobrou. Logo, para calcular as vendas de 2009 basta realizar a multiplicação:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 87 & 69 & 58 \\ 92 & 71 & 59 \\ 89 & 68 & 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 174 & 138 & 116 \\ 184 & 142 & 118 \\ 178 & 136 & 116 \end{pmatrix}$$

4.4 Multiplicação de Matrizes

Para os alunos, essa é uma das operações mais complexas em se tratando de álgebra de matrizes. A maioria dos livros didáticos apresenta multiplicação de matrizes apenas

de maneira teórica, sem utilizar exemplos práticos, como os seguintes.

Exemplo 4.4.1. (RUBIÓ; FREITAS, 2005.) *O colégio Tales e o colégio Platão distribuem, em cada bimestre letivo, um total de 10 pontos por matéria. No entanto, os pesos em cada bimestre diferem nos dois colégios. Veja o quadro a seguir:*

Peso por bimestre em cada colégio				
	1ºB	2ºB	3ºB	4ºB
Tales	1	2	3	4
Platão	2	2	3	3

Tabela 15: Peso das notas por bimestre

Nos dois colégios, a soma dos pesos é 10. Portanto, o total de pontos é 100. No final do ano passado, três alunos das duas escolas, que eram amigos, resolveram comparar a soma dos pontos obtidos em Matemática no seu colégio com a que teriam obtido, caso estudassem no outro colégio.

Nota de cada aluno por bimestre			
	André	Pedro	Marta
1º bimestre	6	7	9
2º bimestre	5	6	8
3º bimestre	7	9	6
4º bimestre	8	8	5

Tabela 16: Notas por bimestre

Veja o total de pontos que cada um teria feito, estudando no colégio Tales:

$$\text{André: } 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 69 \text{ pontos}$$

$$\text{Pedro: } 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 78 \text{ pontos}$$

$$\text{Marta: } 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 63 \text{ pontos}$$

Veja, agora, o total de pontos que cada um teria feito, estudando no colégio Platão:

$$\text{André: } 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 67 \text{ pontos}$$

$$\text{Pedro: } 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 77 \text{ pontos}$$

$$\text{Marta: } 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 67 \text{ pontos}$$

O quadro a seguir sintetiza esses resultados:

Pontos de cada aluno por colégio			
	André	Pedro	Marta
Tales	69	78	63
Platão	67	77	67

Tabela 17: Pontuação em cada colégio

Escrevendo essa situação matricialmente tem-se:

- Matriz dos pesos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

- Matriz das notas: $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 6 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

- Matriz dos pontos: $C = \begin{pmatrix} 69 & 78 & 63 \\ 67 & 77 & 67 \end{pmatrix}$

Cada elemento da matriz C foi obtido, tomando-se uma linha de A e uma coluna de B . Calcula-se o produto dos elementos de mesma ordem posicional e adiciona-se os resultados.

Exemplo 4.4.2. *No dia das crianças, Márcia e Marina decidiram ajudar um orfanato doando alguns brinquedos para crianças da entidade. Abaixo estão dispostos os quadros que indicam a quantidade de cada brinquedo que cada uma doaria e o preço, em reais, em duas lojas da cidade.*

	Bonecas	Carrinhos	Bolas
Márcia	5	4	6
Marina	4	3	8

Tabela 18: Número de brinquedos a serem doados

	Loja 1	Loja 2
Boneca	6,30	6,20
Carrinho	5,25	4,80
Bola	2,50	2,80

Tabela 19: Preço dos brinquedos

Para calcular o valor que cada uma gastaria em cada uma das lojas, pode ser feita uma multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6,30 & 6,20 \\ 5,25 & 4,80 \\ 2,50 & 2,80 \end{pmatrix}$$

Se comprassem na Loja 1, Márcia e Marina teriam os seguintes gastos:

$$\text{Márcia: } 5 \cdot 6,30 + 4 \cdot 5,25 + 6 \cdot 2,50 = 31,50 + 21 + 15 = 67,50$$

$$\text{Marina: } 4 \cdot 6,30 + 3 \cdot 5,25 + 8 \cdot 2,50 = 25,20 + 15,75 + 20 = 60,95$$

Comprando na Loja 2, a despesa seria:

$$\text{Márcia: } 5 \cdot 6,20 + 4 \cdot 4,80 + 6 \cdot 2,80 = 31 + 19,20 + 16,80 = 67,00$$

$$\text{Marina: } 4 \cdot 6,20 + 3 \cdot 4,80 + 8 \cdot 2,80 = 24,80 + 14,40 + 22,40 = 61,60$$

O que se resume com a matriz:

$$\begin{pmatrix} 67,50 & 67,00 \\ 60,95 & 61,60 \end{pmatrix}$$

4.5 Matriz Inversa

Grande ênfase é dada em todos os livros didáticos para o cálculo de matrizes inversas, porém são raros os exemplos de aplicações a esse tipo de operação. Abaixo será apresentado um interessante exemplo de utilização de inversa de matrizes aos olhos dos alunos mais curiosos.

Exemplo 4.5.1. (SOUZA, 2010) *A criptografia é um dos grandes temas debatidos atualmente. Transações eletrônicas, como serviços disponíveis na internet e movimentações bancárias dependem dela para manter o sigilo dos dados.*

A palavra criptografia é derivada de kriptos, que em grego significa oculto, escondido. Contudo, a criptografia não tem como objetivo ocultar a existência de uma mensagem, mas esconder seu significado.

De acordo com um protocolo específico, denominado chave, estabelecendo previamente pelo receptor e pelo transmissor, o texto é codificado para tornar a mensagem incompreensível a terceiros. O receptor torna a mensagem compreensível ao decodificá-la por meio de chave.

Um dos métodos utilizados para criptografar mensagens é por meio de matrizes. Para isso, pode-se, por exemplo, relacionar as letras do alfabeto e o símbolo #, que representa um espaço em branco, a números primos da seguinte maneira:

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Tabela 20: Código

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica mostrada nos quadros acima, obtém-se:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 C & O & D & I & G & O & \# & S & E & C & R & E & T & O \\
 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 & 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53
 \end{array}$$

Suponha que a chave utilizada seja uma matriz quadrada invertível $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organiza-se a sequência de números como elementos de uma matriz B com duas linhas, ou seja:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{pmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação $A \cdot B$, obtém-se a matriz C, que será enviada ao receptor. Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave C, ou seja, realiza a operação $A^{-1} \cdot C = B$. Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, poderá obter a mensagem original.

Para determinar a matriz C enviada ao receptor, tem-se que $C = A \cdot B$, ou seja,

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{pmatrix}.$$

Agora, para mostrar que decodificando a mensagem codificada (matriz C) é gerada a mensagem original, tem-se:

$$A^{-1} \cdot C = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = I_2 \cdot B = B$$

4.6 Determinantes

Abaixo serão listadas algumas aplicações para determinantes.

- **Obtenção matriz adjunta**, assunto esse já abordado no capítulo 3.
- **Resolução de sistemas lineares**

Para a resolução de sistemas lineares (onde o número de equações é igual ao número de incógnitas) através de determinantes, é utilizada a regra de Cramer - recebe este nome em homenagem a Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Seja o sistema linear de n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde os coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ são números reais ou complexos, os termos independentes b_1, b_2, \dots, b_n , são números reais ou complexos e x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas do sistema $n \times n$.

Seja Δ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Seja Δx_i o determinante da matriz que se obtém do sistema dado, substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita x_i , com $i \in 1, 2, 3, \dots, n$, pelos termos independentes b_1, b_2, \dots, b_n .

Pela regra de Cramer, para encontrar o valor das incógnitas de um sistema linear, basta dividir o determinante Δx_i da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes

pelos termos independentes pelo determinante Δ formado pelos coeficientes das incógnitas. Ou seja,

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$$

Exemplo 4.6.1. *Ao final dos jogos intercolegiais em Ibiá, os três primeiros colocados obtiveram o número de medalhas e a pontuação que estão dispostos na tabela abaixo:*

	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Pontuação
1º lugar	6	8	6	40
2º lugar	6	7	7	39
3º lugar	4	9	8	38

Tabela 21: Número de medalhas / pontuação

Calcule quantos pontos são atribuídos às medalhas de ouro, prata e bronze.

A situação pode ser representada através do sistema:

$$\begin{cases} 6x + 8y + 6z = 40 \\ 6x + 7y + 7z = 39 \\ 4x + 9y + 8z = 38 \end{cases}$$

Colocando o sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 39 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Cramer, tem-se:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 8 & 6 \\ 39 & 7 & 7 \\ 38 & 9 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2240 + 2128 + 2106 - 1596 - 2520 - 2496}{336 + 224 + 324 - 168 - 378 - 384} = \frac{-138}{-46} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 40 & 6 \\ 6 & 39 & 7 \\ 4 & 38 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1872 + 1120 + 1368 - 936 - 1596 - 1920}{336 + 224 + 324 - 168 - 378 - 384} = \frac{-92}{-46} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 8 & 40 \\ 6 & 7 & 39 \\ 4 & 9 & 38 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1596 + 1248 + 2160 - 1120 - 2106 - 1824}{336 + 224 + 324 - 168 - 378 - 384} = \frac{-46}{-46} = 1$$

Logo $(3,2,1)$ é a solução do sistema, ou seja, a medalha de ouro vale 3 pontos, a de prata 2 pontos e a de bronze 1 ponto.

Em geometria analítica, pode-se usar determinantes com as seguintes finalidades:

- **Determinar a equação da reta que passa por dois pontos**

Exemplo: Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(1, -2)$ e $B(-1, 5)$.

Para determinar a equação geral da reta, basta aplicar definição de determinantes, utilizando os dois pontos e um ponto genérico $P(x, y)$ e igualar esse determinante a zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$5 - 2x - y - 5x - y - 2 = 0$$

$$-2y - 7x + 3 = 0$$

• **Interseção entre duas retas**

Exemplo 4.6.2. *Encontrar a interseção entre as retas $r : x - y + 1$ e $s : x + 3y - 11$.*

Assim, como no exemplo, pode ser utilizada a regra de Cramer para encontrar a interseção das retas.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{4} = 3$$

Logo, a interseção entre r e s é $(2, 3)$.

• **Posição relativa entre duas retas**

Considere o sistema linear $\begin{cases} ax + by = m \\ dx + cy = n \end{cases}$ e a matriz incompleta formada pelos

coeficientes das variáveis x e y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ e a matriz completa $B = \begin{pmatrix} a & b & m \\ d & c & n \end{pmatrix}$.

Temos duas situações para o determinante de A ($\det A$):

- $\det A \neq 0$, as duas retas se intersectam em um único ponto, retas concorrentes, (caso em que o sistema linear é possível e determinado);
- $\det A = 0$, as duas retas são coincidentes ou são paralelas (caso em que o sistema é possível e indeterminado ou sistema é linear impossível).

Exemplo 4.6.3. Dadas as retas $r : x + 2y + 3 = 0$, $s : 2x + 3y + 4 = 0$, $t : 3x + 6y + 1 = 0$ e $w : 2x + 4y + 6 = 0$, qual é a posição relativa entre:

a) r e s ?

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1. \text{ Como determinante é } -1 \text{ (diferente de zero), as retas } r \text{ e } s \text{ se}$$

intersectam num único ponto, ou seja, são concorrentes.

b) r e t ?

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Como o determinante é igual a zero, as retas podem ser concorrentes ou paralelas.

$$\text{Já que } x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-18 + 2}{6 - 6} = -\frac{16}{0}, \text{ o que é impossível, o sistema é impossível,}$$

logo as retas são paralelas.

$$c) r \text{ e } w? \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Como o determinante é igual a zero, as retas podem ser concorrentes ou paralelas.

$$\text{Já que } x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-12 + 12}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\text{e } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (infinitas soluções), assim, r e w são coincidentes.

• Área do triângulo

A área do triângulo de vértices $A(a, b)$, $B(c, d)$ e $C(e, f)$, pode ser determinada pelo módulo de:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.6.4. Calcular a área de um triângulo cujos vértices são $A(-2, 5)$, $B(4, 0)$ e $C(1, -6)$.

$$A = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot (0 - 5 - 24 + 0 - 12 - 20) \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot (-61) \right| = 30,5.$$

Determinar o volume do tetraedro

Para encontrar o volume de um tetraedro de vértices $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ e $D(x_4, y_4, z_4)$, primeiramente deve-se encontrar os vetores correspondentes aos vértices, ou seja:

$$V_1 = B - A = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$V_2 = C - A = (x_3, y_3, z_3) - (x_1, y_1, z_1) = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$V_3 = D - A = (x_4, y_4, z_4) - (x_1, y_1, z_1) = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$$

Daí, o volume é determinado pelo módulo de:

$$Volume = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 4.6.5. Determinar o volume do tetraedro de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(2, 7, 4)$, $C(3, 2, 3)$ e $D(1, -2, 3)$.

$$B - A = (2, 7, 4) - (2, 1, 3) = (0, 6, 1)$$

$$C - A = (3, 2, 3) - (2, 1, 3) = (1, 1, 0)$$

$$D - A = (1, -2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, -3, 0)$$

$$V = \left| \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} \cdot (0 + 0 - 3 + 1 + 0 + 0) \right| = \left| \frac{1}{6} \cdot -2 \right| = \frac{1}{3}.$$

Exemplos como esses são de linguagem acessível a todos os alunos e fazem com que o conteúdo seja melhor compreendido, sem a necessidade de apenas memorizar fórmulas e regras.

5 APLICAÇÕES DE MATRIZES EM PROCESSAMENTO DE IMAGENS

A elaboração deste capítulo foi baseado na referência (GONZALES; WOODS, 2010).

No contexto da Guerra Fria e da exploração espacial, os cientistas desenvolveram a imagem digital, para que pudessem enviar para os centros de pesquisa as imagens captadas nos mais diferentes e distantes locais. E com o surgimento da computação e da necessidade de guardar cada vez mais informações, as matrizes assumiram uma grande importância. Como exemplo dessa importância, temos na tela de um computador uma ampla matriz.

Para compor a imagem digital, é usado um pequeno elemento denominado pixel, abreviatura de picture element - que significa elemento de imagem. Para constituir uma imagem, os pixels são ordenados em linhas e colunas (matrizes), arranjados ordenadamente com diferentes intensidades de cor. A posição de um pixel na imagem permite que ele seja codificado por uma descrição exata e minuciosa de sua localização e uma intensidade de cor, permitindo que sejam realizados vários processos na imagem, como por exemplo, alterações e reconhecimentos de padrões.



Figura 1: Foto Digital da Ana Paula

A primeira imagem digital foi feita pelo norte-americano Russell Kirsch, em 1957,

no National Bureau of Standards (NBS, atualmente conhecido por National Institute of Standards and Technology, ou NIST). Com seus colegas, Kirsch desenvolveu um scanner com tambor rotativo, por meio do qual digitalizou uma foto do seu filho Walden, de apenas três meses. Kirsch criou uma imagem digital de 176×176 pixels empregando um dispositivo que transformava as imagens em matrizes de zeros e uns, ou seja, em preto e branco.

Essa imagem é considerada precursora para a manipulação digital. Em 2003 essa imagem foi escolhida para estar entre as “100 fotografias que mudaram o mundo”.



Figura 2: Primeira Imagem Digital

Com relação às cores, três representações são frequentemente utilizadas para um pixel. Uma delas é o sistema RGB (do inglês Red, Green, Blue - vermelho, verde e azul), cuja combinação em diferentes intensidades resulta em outras cores do espectro luminoso, com variações entre o preto (ausência de cor) e o branco (intensidade máxima). As imagens em níveis de cinza e imagens binárias são as outras representações.

Imagens Binárias

- São imagens digitais onde cada pixel corresponde apenas a um bit;
- Bit 0 preto;
- Bit 1 branco;

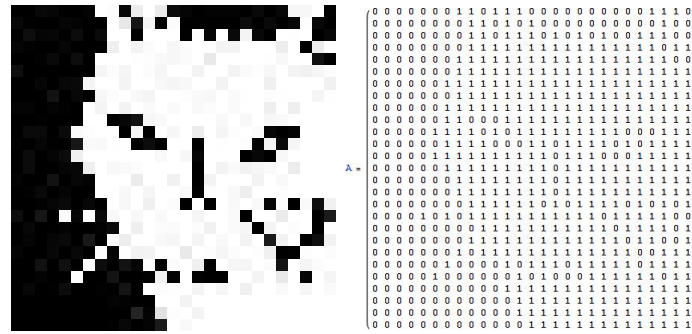


Figura 3: Figura Binária do Gato

- São denominadas de imagens binárias;
- Não possuem cor (monocromáticas);
- São adequadas para representações de figuras contendo gráficos simples ou texto.

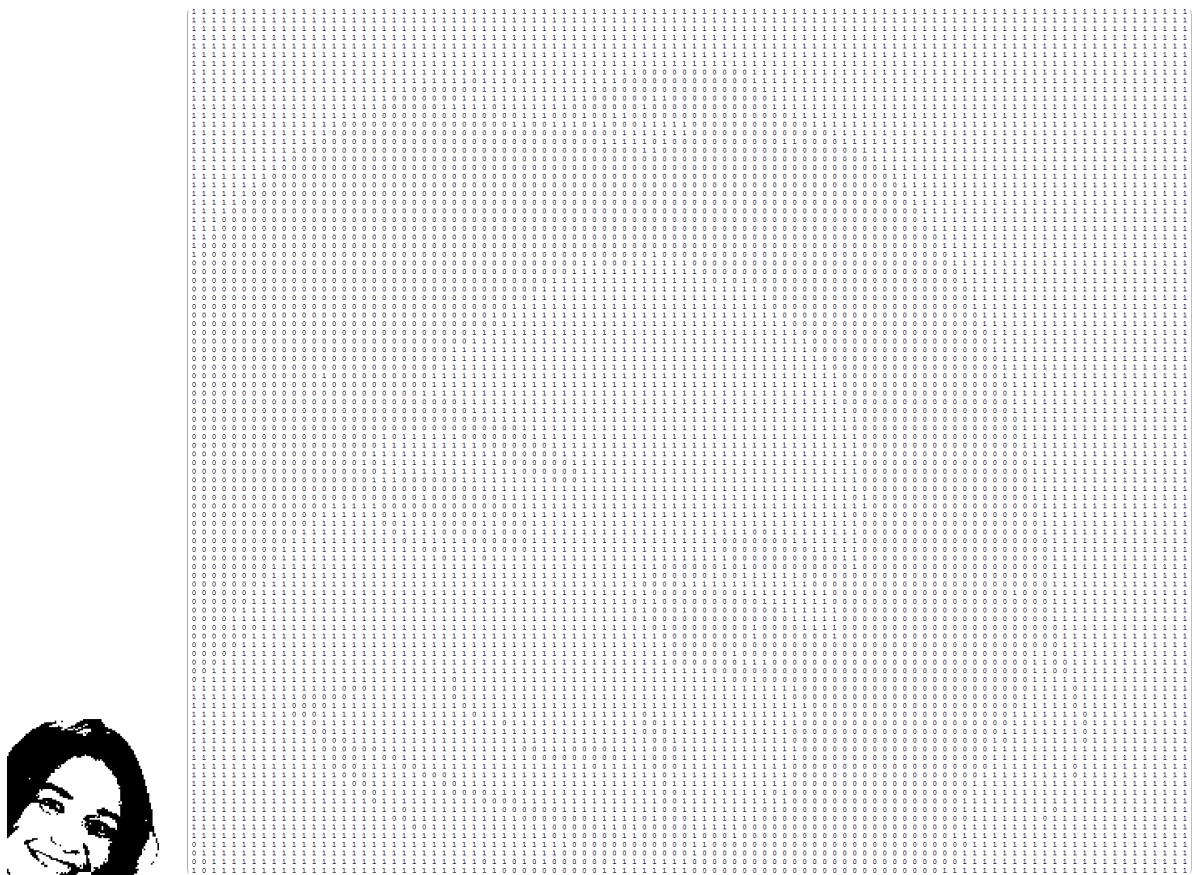


Figura 4: Figura Ana Paula Binária

Imagens em Níveis Cinza

- São imagens onde o valor de cada pixel é representado por um inteiro (um byte) entre o intervalo $[0, 255]$;
- Valor 0 preto;
- Valor 255 branco;
- Valores intermediários graduações na escala de cinza.

Tanto nas imagens em níveis de cinza quanto nas imagens coloridas, a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255. Na escala de cinza, o código 0 representa cor preta enquanto 255 é utilizado para a cor branca, sendo os demais números inteiros pertencentes a esse intervalo todos correspondentes a tons de cinza.



```

162. 167. 169. 167. 168. 166. 160. 164. 167. 167. 174. 184. 192. 192. 189. 185. 183. 188. 187. 184. 175. 175. 181. 184. 177. 173. 170. 168. 167. 162.
167. 170. 174. 169. 172. 172. 164. 165. 166. 168. 175. 186. 192. 189. 187. 185. 184. 189. 187. 183. 177. 179. 179. 180. 178. 180. 171. 157. 155. 157.
174. 171. 177. 178. 174. 167. 167. 165. 163. 169. 177. 186. 190. 188. 186. 186. 188. 191. 187. 182. 182. 181. 181. 182. 175. 156. 143. 131. 141. 146.
176. 176. 180. 179. 172. 168. 162. 159. 165. 167. 178. 186. 190. 190. 189. 189. 194. 190. 187. 186. 184. 181. 187. 169. 133. 110. 109. 118. 137. 135.
177. 181. 183. 179. 172. 166. 159. 159. 162. 165. 179. 187. 189. 195. 193. 194. 199. 192. 187. 188. 188. 180. 154. 117. 91. 92. 98. 111. 125. 126.
179. 186. 185. 184. 171. 161. 161. 160. 159. 168. 183. 188. 193. 196. 196. 197. 198. 190. 190. 189. 174. 138. 102. 90. 93. 101. 108. 109. 113. 120.
182. 188. 191. 183. 165. 158. 159. 161. 162. 178. 188. 190. 191. 192. 199. 198. 194. 191. 194. 169. 137. 111. 107. 114. 119. 121. 123. 122. 120. 115.
188. 192. 193. 180. 163. 160. 160. 163. 170. 180. 188. 190. 188. 195. 196. 191. 193. 188. 166. 137. 127. 130. 136. 144. 146. 144. 146. 141. 136. 127.
193. 197. 189. 173. 161. 160. 160. 167. 175. 182. 188. 186. 193. 196. 193. 190. 188. 160. 138. 138. 142. 145. 153. 164. 162. 158. 160. 157. 155. 151.
198. 193. 178. 166. 156. 156. 163. 171. 179. 185. 187. 189. 198. 194. 190. 181. 157. 134. 136. 146. 151. 157. 159. 163. 166. 164. 161. 165. 167. 166.
199. 186. 173. 164. 157. 161. 167. 174. 185. 187. 193. 198. 197. 195. 175. 145. 134. 135. 142. 148. 150. 158. 162. 161. 162. 162. 148. 157. 169. 168.
194. 182. 164. 156. 159. 162. 171. 182. 189. 190. 198. 197. 191. 170. 136. 128. 135. 144. 146. 148. 147. 153. 161. 158. 154. 153. 140. 138. 157. 172.
189. 179. 164. 161. 162. 168. 181. 188. 196. 195. 199. 193. 161. 131. 123. 130. 135. 144. 142. 139. 146. 149. 150. 149. 148. 148. 140. 111. 129. 161.
184. 174. 167. 166. 169. 177. 184. 190. 198. 201. 190. 150. 121. 116. 125. 131. 131. 135. 136. 134. 136. 138. 136. 136. 142. 136. 119. 87. 98. 139.
185. 174. 170. 171. 171. 183. 187. 191. 201. 187. 141. 104. 110. 117. 122. 126. 126. 121. 115. 113. 119. 119. 118. 121. 121. 112. 92. 71. 83. 120.
182. 179. 174. 175. 181. 187. 195. 202. 185. 130. 99. 98. 114. 115. 113. 115. 119. 117. 108. 94. 97. 93. 94. 94. 94. 88. 78. 69. 74. 93.
183. 181. 176. 180. 187. 192. 201. 181. 124. 95. 98. 100. 110. 106. 98. 90. 91. 102. 96. 83. 81. 81. 80. 78. 75. 73. 74. 67. 67. 72.
185. 185. 181. 184. 193. 200. 175. 119. 90. 93. 102. 98. 97. 94. 92. 79. 72. 79. 80. 75. 75. 76. 72. 72. 69. 70. 73. 69. 72. 72.
184. 185. 183. 190. 201. 173. 114. 84. 87. 95. 94. 89. 88. 84. 78. 75. 70. 72. 71. 70. 72. 70. 70. 71. 68. 68. 68. 68. 74. 70.
188. 186. 185. 197. 180. 118. 88. 86. 86. 94. 87. 79. 78. 76. 71. 70. 74. 72. 71. 77. 67. 69. 70. 69. 67. 67. 67. 67. 74. 75.
193. 191. 195. 175. 121. 89. 92. 87. 82. 87. 81. 74. 71. 67. 68. 71. 71. 71. 73. 73. 71. 71. 65. 65. 66. 63. 65. 70. 85. 89.
193. 200. 181. 121. 85. 92. 99. 93. 85. 84. 74. 65. 67. 68. 68. 67. 67. 70. 72. 65. 71. 68. 68. 65. 68. 73. 75. 81. 91. 113.
194. 186. 130. 94. 93. 101. 101. 97. 89. 80. 67. 65. 66. 70. 69. 72. 81. 78. 64. 68. 74. 70. 67. 61. 59. 86. 97. 87. 104. 134.
186. 134. 98. 97. 103. 103. 98. 89. 78. 73. 66. 63. 65. 70. 76. 89. 99. 89. 66. 77. 90. 79. 60. 57. 53. 72. 99. 89. 82. 103.
145. 96. 100. 106. 104. 99. 89. 81. 72. 72. 66. 64. 70. 73. 87. 103. 111. 97. 69. 84. 107. 96. 72. 58. 55. 64. 106. 103. 76. 75.
108. 106. 117. 113. 107. 99. 88. 75. 76. 72. 66. 67. 70. 80. 92. 109. 121. 109. 76. 79. 113. 109. 94. 77. 71. 84. 116. 109. 75. 82.
108. 120. 130. 121. 115. 105. 98. 89. 83. 76. 69. 67. 70. 88. 94. 112. 131. 126. 99. 77. 92. 109. 107. 93. 97. 102. 103. 91. 73. 114.
118. 129. 135. 133. 127. 117. 111. 110. 103. 94. 80. 68. 72. 94. 99. 106. 124. 135. 120. 90. 72. 91. 103. 101. 102. 98. 85. 77. 104. 164.
129. 135. 139. 142. 135. 131. 131. 127. 118. 113. 97. 75. 68. 81. 93. 108. 120. 129. 132. 115. 88. 73. 75. 82. 83. 82. 85. 104. 149. 194.
133. 136. 143. 146. 143. 142. 144. 140. 133. 125. 108. 91. 70. 68. 92. 117. 129. 130. 132. 130. 118. 101. 85. 79. 85. 94. 121. 155. 184. 204.

```

Figura 5: Figura Lenna na Escala de Cinza- Trecho da Matriz 30×30 no canto superior esquerdo

Imagens Coloridas

No sistema RGB, a cor verde, por exemplo, é codificada por três números (0, 255, 0), indicando intensidade máxima da cor verde e não havendo contribuição alguma das cores vermelha e azul. A cor branca é representada pelo código (255, 255, 255) e cor preta por (0,0,0).



$$\begin{pmatrix}
 (219.) & (218.) & (218.) & (216.) & (215.) & (214.) & (214.) & (217.) & (218.) & (214.) \\
 (220.) & (222.) & (222.) & (220.) & (219.) & (218.) & (218.) & (216.) & (217.) & (213.) \\
 (222.) & (223.) & (223.) & (221.) & (222.) & (221.) & (221.) & (221.) & (222.) & (218.) \\
 (243.) & (241.) & (239.) & (240.) & (241.) & (240.) & (240.) & (233.) & (242.) & (244.) \\
 (244.) & (242.) & (240.) & (241.) & (242.) & (244.) & (244.) & (232.) & (241.) & (243.) \\
 (246.) & (244.) & (242.) & (243.) & (246.) & (247.) & (247.) & (237.) & (246.) & (248.) \\
 (225.) & (225.) & (227.) & (229.) & (230.) & (228.) & (226.) & (240.) & (234.) & (228.) \\
 (225.) & (225.) & (227.) & (228.) & (229.) & (229.) & (227.) & (238.) & (232.) & (226.) \\
 (227.) & (227.) & (229.) & (233.) & (234.) & (233.) & (231.) & (243.) & (237.) & (231.) \\
 (255.) & (255.) & (255.) & (254.) & (255.) & (255.) & (255.) & (249.) & (252.) & (252.) \\
 (254.) & (254.) & (253.) & (252.) & (253.) & (254.) & (254.) & (247.) & (250.) & (250.) \\
 (255.) & (255.) & (255.) & (255.) & (255.) & (255.) & (255.) & (252.) & (255.) & (255.) \\
 (224.) & (216.) & (207.) & (203.) & (206.) & (212.) & (219.) & (223.) & (247.) & (253.) \\
 (217.) & (209.) & (200.) & (196.) & (199.) & (207.) & (214.) & (218.) & (242.) & (248.) \\
 (224.) & (216.) & (207.) & (203.) & (206.) & (213.) & (220.) & (224.) & (248.) & (254.) \\
 (194.) & (191.) & (189.) & (188.) & (191.) & (195.) & (199.) & (204.) & (221.) & (236.) \\
 (183.) & (181.) & (179.) & (178.) & (181.) & (185.) & (189.) & (199.) & (216.) & (231.) \\
 (191.) & (189.) & (187.) & (186.) & (189.) & (194.) & (198.) & (206.) & (223.) & (237.) \\
 (146.) & (146.) & (150.) & (154.) & (157.) & (156.) & (154.) & (170.) & (174.) & (193.) \\
 (133.) & (133.) & (137.) & (141.) & (144.) & (143.) & (141.) & (163.) & (167.) & (186.) \\
 (142.) & (142.) & (147.) & (151.) & (154.) & (153.) & (151.) & (171.) & (175.) & (194.) \\
 (139.) & (127.) & (123.) & (129.) & (135.) & (137.) & (136.) & (129.) & (129.) & (122.) \\
 (123.) & (111.) & (107.) & (113.) & (119.) & (121.) & (120.) & (119.) & (119.) & (112.) \\
 (134.) & (122.) & (118.) & (124.) & (130.) & (132.) & (131.) & (128.) & (128.) & (121.) \\
 (136.) & (120.) & (113.) & (124.) & (126.) & (128.) & (131.) & (117.) & (118.) & (120.) \\
 (118.) & (102.) & (95.) & (106.) & (108.) & (110.) & (113.) & (105.) & (106.) & (110.) \\
 (130.) & (114.) & (107.) & (118.) & (120.) & (124.) & (127.) & (117.) & (118.) & (119.) \\
 (123.) & (126.) & (141.) & (140.) & (124.) & (119.) & (111.) & (98.) & (106.) & (113.) \\
 (103.) & (106.) & (123.) & (122.) & (106.) & (101.) & (93.) & (86.) & (94.) & (101.) \\
 (115.) & (118.) & (137.) & (136.) & (120.) & (115.) & (107.) & (98.) & (106.) & (113.)
 \end{pmatrix}$$

Figura 6: Figura Ana Paula Colorida e Matriz 10×10 recorte da imagem

5.1 Operações de Matrizes

Basicamente, as operações aritméticas são as seguintes: adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes. A habilidade para executar estes tipos de operações é uma das principais vantagens do processamento digital de imagens sobre a fotografia convencional. Estas operações são essenciais para ajustar e suavizar imagens em certas aplicações, particularmente em aplicações que têm um baixo sinal ou imagens muito ruidosas. Todas as operações aritméticas em imagens digitais são executadas pixel a pixel.

5.1.1 Adição

A adição é usada em um conjunto de imagens para criar uma nova imagem composta deste conjunto. A operação é executada pixel a pixel, sendo que cada imagem seja considerada como matriz de números reais. Na adição, cada elemento de uma matriz é adicionado ao elemento correspondente da segunda matriz produzindo, dessa forma, uma terceira matriz que armazena o resultado da adição dos elementos. Esta nova imagem composta de várias outras pode ser uma combinação de duas imagens totalmente diferentes, ou uma adição de várias imagens semelhantes tiradas em tempos distintos.

Nas operações de adição deve-se considerar o resultado, pois trata-se de imagens que são armazenadas em memória. Por exemplo, tendo duas imagens de 8 bit (com valores de intensidade variando de 0-255 para cada pixel), pode-se ter como resultado da adição valores na faixa de 0 a 510. Isto excede a capacidade de memória da imagem. Uma possibilidade é simplesmente dividir o resultado por dois, obtendo uma imagem resultante que está escalonado na faixa de 0-255. Geralmente esta é a forma aplicada nas operações com imagens. Em geral, quando tem-se N imagens, faz-se a adição destas imagens e logo após divide o resultado por N . Outra possibilidade, é encontrar o maior e menor valor na imagem somada, e então dinamicamente reescalonar o resultado para estes valores, assim para cada pixel é determinado um novo valor $B = \text{faixa} * (\text{somatório} - \text{menor valor}) / (\text{maior valor} - \text{menor valor})$, onde faixa é a capacidade de memória da imagem, tipicamente 255. Quando o resultado da divisão der um valor fracionário, este é truncado e alguma informação pode ser perdida.

```
In[39]: Image [ (A + B) / 2 ]
```



Figura 7: Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna

5.1.2 Subtração

A operação de subtração é mais amplamente utilizada e mais interessante que a adição. Esta operação é similar a adição. Assim, pode-se fazer a diferença de duas imagens, pixel a pixel, na qual a faixa de valores das intensidades pode variar de -255 a +255. Os valores das intensidades dos pixels podem ser reescalados para dentro de um byte, trocando a imagem original por uma imagem na qual adiciona-se 255 e divide por dois cada pixel, ou o método de auto-escalamento descrito na operação de adição.

Um dos objetivos da subtração é encontrar diferenças entre duas imagens. Subtrair uma imagem de outra, efetivamente remove da imagem diferente todas as características que não mudaram, realçando assim os detalhes da imagem.

Mesmo na presença de algum ruído, subtrair duas imagens pode ser um caminho para identificar pequenas diferenças que são impreceptíveis, como realce de detalhes em duas imagens.

```
In[9]: Image [ (A - B) / 2 ]
```



Figura 8: Figura Ana Paula subtraída da Figura da Lenna

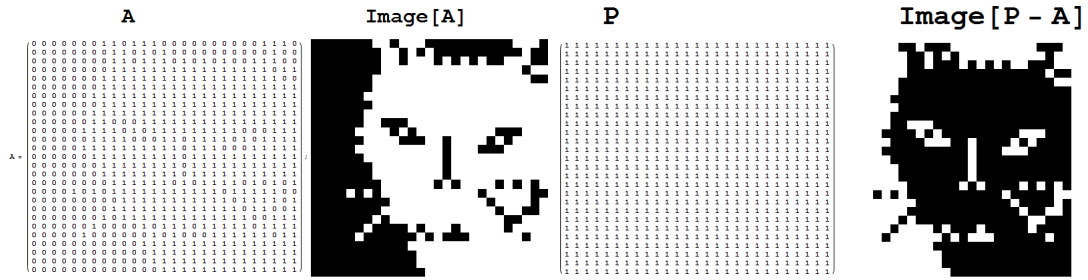


Figura 9: Figura gato binário menos a matriz de 1 (uns)

In[35]: **Image [C1 - B] Image [B]**



Figura 10: Figura da Lenna em níveis de cinza normalizado para 1 e subtraída de uma matriz com todas as entradas iguais a 1

5.1.3 Multiplicação por um Escalar

Para realçar mais os tons escuros do que os tons claros de uma imagem em tons de cinza ou realçar os tons mais claros do que os tons escuros de uma imagem, pode-se multiplicar uma imagem por um escalar para tornar a imagem mais clara ou escura conforme o interesse. Ao multiplicar uma imagem por um escalar ela é automaticamente escalonada para a faixa de níveis cinza (0-255) ou quando estes níveis estão escalonados entre 0-1.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}; 3 * A = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.4 \\ 1.8 & 2.1 \end{bmatrix}$$
 que é escalonado (dividido pelo maior 2.4) para ficar entre na faixa 0-1.

$$3 * A = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
. A imagem $3*A$ fica mais clara do que a original A .

No exemplo a seguir foi multiplicada a imagem original da Ana Paula pelos escalares 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 1.2 e 2, respectivamente.



Figura 11: Figura da Ana Paula multiplicada por escalares

5.1.4 Combinação Linear

Usando-se as operações de multiplicação por escalar e soma de matrizes, é possível criar um efeito de transição entre duas imagens de mesmo tamanho. Considere, por exemplo, duas imagens em tons de cinza de mesmo tamanho representadas pelas matrizes A e B (que, portanto, terão as mesmas dimensões). Para cada escalar (número real) t no intervalo $[0, 1]$, defina a matriz $C(t) = (1 - t)A + tB$.

Note que $C(0) = A$, $C(1) = B$ e, para $0 < t < 1$, as entradas da matriz $C(t)$ estão entre as respectivas entradas das matrizes A e B . Portanto, quando t varia de 0 a 1, a matriz $C(t)$ varia de A a B .



Figura 12: Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(0) = 1 * A + 0 * B = A$



Figura 13: Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(0.5) = 0.5 * A + 0.5 * B$



Figura 14: Figura Ana Paula somada com a Figura da Lenna. $C(1) = 0.A + 1.B = B$

5.1.5 Transposta de uma Imagem

Pela definição de matriz transposta, se A é uma matriz $p \times q$ qualquer, então a transposta de A , denotada por A^t , é definida como a matriz $q \times p$ que resulta da permutação das linhas com as colunas de A ; ou seja, a primeira coluna de A^t é a primeira linha de A , a segunda coluna de A^t é a segunda linha de A , e assim por diante. Portanto, a transposta de A é obtida trocando-se as linhas de A por suas colunas e vice-versa.

A matriz A que representa a imagem da Ana Paula tem a dimensão 160×246 , então a transposta A^t é de 246×160 . As imagens seguem abaixo.



Figura 15: Figura Ana Paula= A e Ana Paula Transposta = A^t

5.1.6 Transformações Geométricas

As alterações em uma imagem processada por computador são realizadas por meio de funções matemáticas chamadas de **transformações geométricas**, entre as quais serão apresentadas três, no plano cartesiano: a translação, a reflexão e a rotação.

5.1.6.1 Translação

A translação de uma imagem consiste basicamente no deslocamento linear de cada pixel de coordenadas (X, Y) na horizontal e/ou na vertical, mapeando para o ponto de coordenadas (X', Y') , calculadas como: $(X', Y') = (X + \Delta X, Y + \Delta Y)$, onde ΔX é o deslocamento vertical e ΔY é o deslocamento horizontal (em pixels).

A primeira imagem da Ana Paula é uma submatriz 120×120 da matriz de 1 (uns) 240×240 que está centrada na posição $(60, 60)$. A translação que leva os pixels na posição $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (x_{ij} + 120, y_{ij} + 120)$ centraliza a imagem da Ana Paula em $(180, 180)$. As translações feitas abaixo foram $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (x_{ij} + 0, y_{ij} + 120)$; $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (x_{ij} + 120, y_{ij} + 0)$; $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (x_{ij} + 120, y_{ij} + 120)$, respectivamente.



Figura 16: Figura Ana Paula=A e Ana Paula Transladada para cima e para a direita

5.1.6.2 Reflexão

A reflexão de uma imagem consiste basicamente em refletir a imagem em relação à alguma reta. A reflexão em relação ao eixo y é levar cada pixel de coordenadas (X, Y) mapeando para o ponto de coordenadas $(X', Y') = (-X, Y)$. A reflexão em relação ao eixo x é levar cada pixel de coordenadas (X, Y) mapeando para o ponto de coordenadas $(X', Y') = (X, -Y)$. A reflexão em relação a uma reta $y = x$ é levar cada pixel de coordenadas (X, Y) mapeando para o ponto de coordenadas $(X', Y') = (-X, -Y)$.

A primeira imagem da Ana Paula é uma submatriz 120×120 da matriz de 1 (uns) 240×240 que está centrada na posição $(180, 180)$. A reflexão que leva os pixels na

posição $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (x_{ij}, -y_{ij})$ centraliza a imagem da Ana Paula em $(180, 60)$. A reflexão em torno do eixo y leva os pixels na posição $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (-x_{ij}, y_{ij})$ centraliza a imagem da Ana Paula em $(60, 180)$. A reflexão em torno da reta $y = -x$ leva os pixels na posição $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (-x_{ij}, -y_{ij})$ centraliza a imagem da Ana Paula em $(60, 60)$.



Figura 17: Figura Ana Paula refletida sobre o eixo x , eixo y e a reta $y = -x$.

5.1.6.3 Rotação

A rotação gira a imagem em torno de um referencial. Para rotacionar um ponto $P = (x_{ij}, y_{ij})$ de um ângulo α , no sentido anti-horário, em torno da origem O , efetua-se a seguinte multiplicação de matrizes:
$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{bmatrix}$$

A primeira imagem da Ana Paula é uma submatriz 120×120 da matriz de 0 (zeros-cor-preta) 170×170 que está centrada na posição $(85, 85)$. A rotação será feita com o centro $(85, 85)$. Tem-se que este centro passa a ser a origem $(0, 0)$ e qualquer pixel da matriz passa a ser $(x_{ij}, y_{ij}) = (x_{ij} - 85, y_{ij} - 85)$. Por exemplo, o pixel que está no canto esquerdo embaixo da figura Ana Paula é $(25 - 85, 25 - 85) = (-60, -60)$ para a rotação. Então os pixels na posição $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (\cos(\alpha)x_{ij} - \text{sen}(\alpha)y_{ij}, \text{sen}(\alpha)x_{ij} + \cos(\alpha)y_{ij})$. Por exemplo, na rotação de 45° , o pixel que está na posição $(-60, -60)$ será levado para $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}) = (\cos(45^\circ)(-60) - \text{sen}(45^\circ)(-60), \text{sen}(45^\circ)(-60) + \cos(45^\circ)(-60)) = (0, -85)$, que corresponde na matriz 170×170 a posição $(85, 0)$.



Figura 18: Figura Ana Paula=A e Ana Paula Rotacionada: 0, 20, 45, 60 e 90 graus respectivamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Professores de matemática, principalmente no ensino médio, sempre se deparam com perguntas como “para que serve isto?” ou “onde vou usar isto?” e muitos desses professores não estão preparados para esse tipo de questionamento. Por outro lado, esses mesmos professores não se sentem estimulados a se capacitarem ou buscarem novas técnicas de ensino.

Com o aparecimento de novas tecnologias, tantos atrativos, o aluno hoje em dia não se interessa apenas em memorizar fórmulas ou resolver exercícios mecanicamente, sem saber a real utilidade do conteúdo a ser estudado. E não relacionar esse conteúdo a situações práticas ou não desenvolvê-lo de forma interessante, significa desestimular o aluno à aprendizagem efetiva do assunto.

É importante que os conteúdos escolares sejam relacionados com o cotidiano dos educandos. E, no ensino de Matemática, é imprescindível que o professor pesquise, se atualize, não se apegue apenas aos livros didáticos, mesmo que livros didáticos atuais estejam mais contextualizados que os usados há alguns anos. É preciso disponibilizar certo tempo para pesquisar novas abordagens, novos métodos de ensino, tecnologias que possam ser usadas a favor da aprendizagem.

Este trabalho apresentou algumas aplicações para o ensino de matrizes, mas são inúmeros os temas que precisam ser abordados e aplicados no cotidiano dos alunos.

Espera-se que este trabalho possa ser empregado no dia a dia nas escolas e sirva como estímulo à novas pesquisas que busquem melhorar o nível da aprendizagem de conteúdos matemáticos, principalmente no ensino médio, com novas propostas que tragam de volta o prazer em aprender.

Referências

- 1 BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2010.
- 2 EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas: UNICAMP, 2004.
- 3 CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES H. H.; COSTA R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2000.
- 4 BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- 5 ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- 6 IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.
- 7 LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. E. **Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- 8 SOUZA, J. **Matemática - Coleção Novo Olhar**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.
- 9 DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.
- 10 RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2011.
- 11 PAIVA, M. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.
- 12 RUBIÓ, A. P.; FREITAS, L. M. T. **Matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: IBEP, 2005.
- 13 SANTOS, T. J. P. **Licenciatura em Matemática - Álgebra Linear**. São Paulo: FTC-EAD. Disponível em: <http://www.ead.ftc.br/portal/upload/mat/4p/04-AlgebraLinear.pdf>. Acesso em 5 maio 2013.
- 14 Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília : MEC /SEF, 1998.
- 15 LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC editora, 1999.
- 16 GONZALEZ, R. C. ; WOODS, R. E. **Processamento Digital De Imagens**. 3 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.