UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Jones Ueder Casarin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: AÇÕES E APLICAÇÕES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Santa Maria, RS
2023

Jones Ueder Casarin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: AÇÕES E APLICAÇÕES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Profa. Dra. Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Santa Maria, RS
2023

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001

Casarin, Jones Ueder
Transformações Geométricas: Ações e Aplicações nos Anos Finais do Ensino Fundamental / Jones Ueder Casarin.- 2023.
75 p.; 30 cm

Orientador: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2023

1. Transformações 2. Geometria 3. Rotação 4. Reflexão 5. Translação I. Brum, Valéria de Fátima Maciel Cardoso II. Título.

sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, JONES UEDER CASARIN, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Jones Ueder Casarin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: AÇÕES E APLICAÇÕES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — ProfMat da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 06 de janeiro de 2023

____

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra.
(UFSM)(Presidente/Orientadora)

____

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

____

Cinthya Maria Schneider Meneghetti, Dra. (FURG)
(videoconferência)

____

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2023

RESUMO

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: AÇÕES E APLICAÇÕES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTOR: Jones Ueder Casarin
ORIENTADORA: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

O presente estudo trata do conteúdo matemático de transformações geométricas, trazendo como fonte de inspiração o fato de ser pouco explorado, muitas vezes devido às lacunas existentes no conhecimento do professor em relação a este tema. Diante disso, tem-se como principal objetivo investigar a importância do conteúdo de transformações geométricas dentro do desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, com a finalidade de identificar práticas que melhor atendam os fundamentos teóricos relacionados ao assunto. Além de pesquisas bibliográficas, também serão aplicadas e elaboradas atividades com tecnologias digitais e obras de arte, para trabalhar a homotetia e as isometrias, como a rotação, translação e a reflexão, de modo a contemplar as habilidades exigidas pela atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os participantes das aplicações são 37 alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal no interior do Rio Grande do Sul. Conclui-se que a partir da aplicação das atividades, objetos propostos pelas diretrizes curriculares foram atingidos, além de obter interação extraordinária dos alunos nas atividades com o uso de ferramentas computacionais. Espera-se, que o presente trabalho possa servir de apoio aos colegas professores de matemática e inspirá-los a seguir criando atividades e aceitar a temática como considerável para o desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes.

Palavras-chave: Transformações. Geometria. Rotação. Translação. Reflexão.

ABSTRACT

GEOMETRIC TRANSFORMATIONS: ACTIONS AND APPLICATIONS IN THE FINAL YEARS OF ELEMENTARY EDUCATION

AUTHOR: Jones Ueder Casarin
ADVISOR: Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

The present study deals with the mathematical content of geometric transformations, taking as a source of inspiration the fact that it is little explored, often due to gaps in the teacher's knowledge in relation to this topic. Therefore, the main objective is to investigate the importance of the content of geometric transformations within the development of students' geometric thinking, in order to identify practices that best meet the theoretical foundations related to the subject. In addition to bibliographical research, activities will also be applied and elaborated with digital technologies and works of art, to work with homothety and isometries, such as rotation, translation and reflection, in order to contemplate the skills required by the current National Common Curricular Base (BNCC). The participants of the applications are 37 students from the 6th and 7th years of elementary school in a municipal public school in the interior of Rio Grande do Sul. It is concluded that from the application of the activities, objects proposed by the curricular guidelines were reached, in addition to obtaining extraordinary interaction of the students in the activities with the use of computational tools. It is hoped that this work can support fellow mathematics teachers and inspire them to continue creating activities and accept the theme as important for the development of student learning.

Keywords: Transformations. Geometry. Rotation. Translation . Reflection.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Cumprir tem um significado bem amplo, sendo assim um sinônimo de executar, satisfazer, realizar, completar, entre outros. Para um professor dentro do planejamento escolar, o cumprir significa muito mais que aplicar todos os conteúdos estabelecidos, é necessário que o aluno aprenda, compreenda, estabeleça relações e saiba aplicar no seu cotidiano. Conciliar essas tarefas traz um conflito no tempo em que cada tópico é abordado. É comum observar professores de matemática de um mesmo espaço educativo que ensinam turmas diferentes, mas de mesma seriação, abordando temas em tempos diferentes.

Essa discrepância temporal ocorre por diversos fatores, mas os principais são a falta de conhecimento do assunto, falta de preparação ou a não relevância no conteúdo segundo critérios estabelecidos pelo docente, mas muitas vezes, não apoiado por uma bibliografia, um estudo.

Nesse cenário e na experiência docente do autor, observa-se assuntos como transformações geométricas como um conteúdo pouco explorado e muitas vezes, não dominado por professores. Desde muitos anos temos a geometria, em geral, como um eixo de preocupação e sendo o seu estudo caracterizado conforme é apresentado:

> O abandono do ensino de geometria deve, portanto, ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação. Pode-se questionar as verdadeiras intenções e compromissos que elas revelam em relação ao oferecimento de condições que impliquem em reais oportunidades educacionais a todos os segmentos da educação brasileira.(PAVANELLO, 1993, p.16)

Diante disso, o interesse em investigar o assunto ocorre para que se evidencie a sua reelevante importância, fundamentada nos objetivos traçados por diretrizes curriculares nacional e estadual, como Parâmentros Curriculares Nacional (PCN), a BNCC e também o Referencial Curricular Gaúcho (RCG). Esses documentos sempre tiveram o conteúdo de transformações geométricas presentes e a cada atualização, reforçam o seu uso e o colocam como alicerce, visando conceitos de congruência e semelhança.

Conhecer a estrutura do conteúdo também trará ao docente a confiança de que está ensinando algo que é necessário no processo de aprendizado do aluno, para a sua vivência e para sua futura atuação profissional.

Estar bem preparado, tendo ciência das intenções de um conteúdo é extremamente importante, vendo que muitos desafios são encontrados na prática do professor em sala de aula e afetam o trabalho e a eficácia da aprendizagem.

O objetivo geral do estudo é investigar a importância do conteúdo de transformações geométricas dentro do desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Importância essa que é destacada no próprio RCG:

> A unidade temática Geometria, preocupa-se com o estudo de posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais o que leva ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. Destaca-se o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da geometria, mais especificamente as transformações geométricas (simetria) (RGS, 2019, p. 8)

Tem também como objetivos específicos:

- Identificar os propósitos apresentados pelas diretrizes curriculares nacionais dentro do tema de transformações geométricas;
- Utilizar o software GeoGebra na execução de atividades práticas para melhorar a compreensão das transformações geométricas como a rotação, a translação e a reflexão;
- Aplicar atividades práticas com GeoGebra e materiais didáticos manipuláveis no conteúdo de transformações geométricas;
- Analisar as simetrias nas obras de Escher, como uma possibilidade de ensino por meio da arte;
- Apresentar as definições e propriedades das transformações geométricas;
- Identificar práticas que melhor atendam os fundamentos teóricos relacionados ao assunto.

Ao identificar práticas sobre o tema de transformações geométricas nas séries finais do ensino fundamental, visando entender a sua importância dentro dos conteúdos escolares, o presente trabalho foi seccionado em seis capítulos. Na primeira parte está a introdução, tendo na sequência, como segundo capítulo, uma observação e análise do que as diretrizes curriculares apresentam sobre o conteúdo, tanto o PCN quanto a BNCC que é o novo referencial de orientação docente e até mesmo o RCG, que complementa a BNCC. O terceiro capítulo aspira na definição dos conteúdos de transformações geométricas e suas propriedades, trazendo as definições gerais de isometria, simetria, reflexão, translação e rotação e também da homotetia. O quarto capítulo traz a metodologia nas quais foram aplicadas as atividades. O quinto capítulo compreenderá atividades práticas com a utilização do GeoGebra e materiais manipulados, relacionando também as obras de Escher, bem como suas aplicações. No último item discorre sobre o resultado do emprego desse assunto com os discentes.

2. BREVE HISTÓRICO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Muitos são os fatos que podem ser destacados se tratando de transformações geométricas, pois é um assunto milenar e global. Por onde foi estudado ou traduzido em artes deixou um significado para a humanidade. Trata-se de um importante conectivo entre a matemática, a arte e a engenharia. Entender o processo da sua evolução é um ponto de partida para compreender o quanto significativo é esse assunto dentro das nossas escolas.

2.1 A HISTÓRIA DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA CIVILIZAÇÃO

A cronologia das transformações geométricas é muito antiga e foi revelado através de várias descobertas até chegar atualmente nas escolas como um conteúdo escolar. A seguir tem-se um breve resumo do que apresenta (COSTA e RODRIGUES, 2012) sobre a história das transformações geométricas.

Pode-se começar retratando uma das primeiras obras encontradas, do período pré-histórico, uma pintura rupreste do sítio de EL Buey, divisa de Cochabamba e Santa Cruz, na Bolívia. Local que apresenta inúmeras pinturas, com a maioria delas pintadas em vermelho escuro, conforme apresentada pela Figura 1, onde tem a presença de simetrias na sua composição.

Figura 1: Pintura rupreste na Bolívia

Fonte: (COSTA e RODRIGUES, 2012)

Já na região oriental do planeta, foi encontrado uma cerâmica toda decorada de formas geométricas em transformações, conforme apresentação da Figura 2. Data-se essa peça como criação do período neolítico, à cerca de 3000 a. C..

Figura 2: Peça de cerâmica do período neolítico

Fonte: (COSTA e RODRIGUES, 2012)

Próximo da China, mais precisamente na Sibéria, o tapete de Pazynyk, na Figura 3, era formado por simetrias e padrões geométricos na sua ornamentação, isso no século V a.C.. Ele foi encontrado em uma escavação arqueológica em um cômoro de sepultamento real.

Figura 3: Tapete de Pazynyk

Fonte: (COSTA e RODRIGUES, 2012)

No Brasil, uma cerâmica marajoara também tinha em sua decoração simetrias e reflexões. Conforme a Figura 4, esta obra de arte era criação de tribos indígenas em um período pré-colonial. A sofisticada arte teve uma fase de ocupação na região próxima da foz do rio Amazonas, onde hoje fica a cidade de Belém, no estado do Pará.

Figura 4: Cerâmica marajoara, no Brasil

Fonte: (COSTA e RODRIGUES, 2012)

Mais recentemente três personagens se destacaram no estudo e arte da geometria das transformações, Félix Klein (1849-1925) classificou as homotetias e as semelhanças como principal grupo da geometria euclediana e as isometrias como uma subdivisão das semelhanças, pois apresentavam transformações geométricas que interferiam nas propriedades das figuras. Evgraf Fedorov (1853-1919) fez estudos em outro grupo de padrões chamados de cristatográficos, que estuda a disposição dos átomo em sólidos, e que estuda os cristais. Já o artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ficou famoso por utilizar padrões geométricos como a reflexão e a simetria entre outras operações geométricas. Duas de suas obras são apresentadas na Figura 5, onde se observa as isometrias como parte da arte.

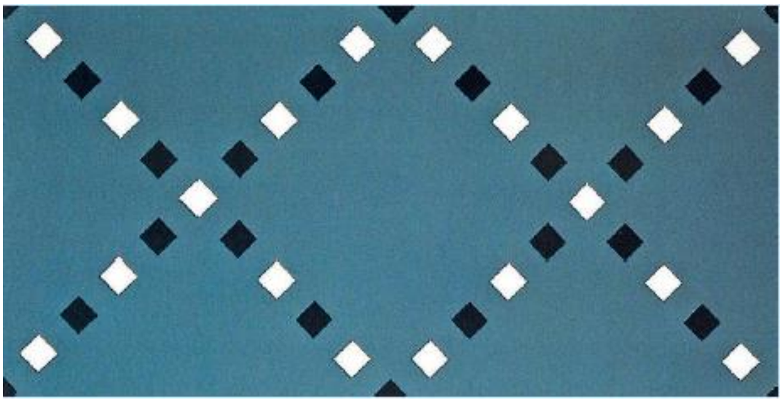
Observa-se que desde o período pré-histórico até os dias atuais que as transformações geométricas são utilizadas, comprovadas por obras de artes, que identificam comportamentos culturais e ajudam a entender a sociedade de antepassados.

Figura 5: Obras do artista Cornelis Escher

Fonte: (COSTA e RODRIGUES, 2012)

Resumindo o que apresenta (SAMPAIO, 2018), Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um pintor, escultor e desenhista que nasceu no Brasil e também teve em suas obras a simetria como ponto marcante, explorando também fenômenos ópticos. Em seus trabalhos utilizava elementos não convencionais, como madeira compensada, telhas de amianto-cimento, alumínio, latão e ferro. Na Figura 6 tem-se uma de suas importantes obras, onde percebe-se o uso das isometrias.

Figura 6: Estruturação com elementos iguais, Luiz Sacilotto



Fonte: (SAMPAIO, 2018)

Observa-se que os artistas buscam explorar na geometria, e principalmente nas simetrias para compor de suas obras de arte.

2.2 O MOVIMENTO HISTÓRICO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NAS DIRETRIZES CURRICULARES DO ENSINO FUNDAMENTAL – SÉRIES FINAIS

O currículo escolar vem sendo definido de acordo com debates, influenciados pelas transformações na sociedade, de modo, que através do ensino a população esteja incluida nesse meio, sendo consciente de suas ações, colaborando de forma autônoma, ética, propositiva, entre outros quesitos que sustentam o habitat e geram harmonia entre os seres. Para isso se escolhe conhecimentos que irão formar a identidade do aluno.

Na sequência tem-se um resumo histórico da educação matemática tratada por (BRASIL,1988), com pontos mais marcantes, considerações na formação do PCN e dados sobre o conteúdo de transformações geométricas.

Desde os anos 1920 temos movimentos de reorientação curricular, mas nessa época não se teve muito êxito, pois se tratava de um ensino de caráter elitista. Na matemática alguns conceitos eram tratados antecipadamente e não se procurava entender o processo dos cálculos, tudo era aprendido na forma mecânica.

O ensino da matemática foi influênciado pela chamada Matemática Moderna, isso entre os anos de 1960 e 1970, onde esse movimento despertou ações em diferentes países e houve uma modernização na estrutura do ensino da matemática. A matemática moderna procurou aproximar os conteúdos aos que eram vistos pelos estudiosos e pesquisadores, enfatizando conteúdos como teoria dos conjuntos, álgebra e topologia. Porém isso se tornou um problema, visto que, não se ensinava a prática dos conteúdos e sim regras ou ações padronizadas de forma exagerada.

Em 1980, um documento chamado “Agenda para Ação” influenciou reformas no ensino da matemática em todo o mundo, pois trouxe uma importância em aspectos sociais, antropológicos, linguísticos e cognitivos na aprenizagem matemática. Assim todas as reformas ocorridas entre 1980 e 1995, em vários países, tinham pontos em comum, entre eles, a ênfase na resolução de problemas, introdução de conteúdos de elementos da estatística, probabilidade e combinatória, usar a tecnologia, bem como acompanhar sua evolução, direcionar o ensino fundamental de modo que o aluno adquira conhecimentos básicos necessários na sua vida cidadão e também fazer o aluno participar na sua construção do conhecimento. No Brasil, o currículo matemático apareceu de forma mais organizada a partir dos anos 90, onde foram criados diretrizes e parâmetros curriculares nacionais e regionais. Também se tinha uma intenção dos currículos nessa época de que a educação atendesse a todos e de forma igualitária.

Várias atitudes contribuíram para o desenvolvimento desse currículo, desde pesquisas censitárias, resultados de provas nacionais e até internacionais, vivências escolares de todo o mundo juntamente com um documentos firmado pelo Brasil em uma conferência na Tailândia, a chamada Conferência Mundial de Educação para Todos. Isso tudo deu origem dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no ano de 1995. Nesse ano ele foi disponibilizado para análise, onde especialistas e professores complementaram com pareceres, para que enfim fosse publicado.

A partir de 1996 a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) foi criada, ela é uma legislação que regula o sistema educacional brasileiro, desde as escolas públicas e até mesmo as privadas, seguindo os princípios da Constituição Federal. Com o Art.9°, inciso IV da LDB:

> A União incumbir-se-á de: estabelecer, em colaboração com os Estados, Distrito Federal e os municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum (BRASIL, 1996, p.12)

Em 1998 são consolidados em 10 volumes os PCN para as séries finais do ensino fundamental, sendo o primeiro volume a introdução e os demais compondo os conteúdos de língua portuguesa, matemática, ciências naturais, história e geografia, arte, educação física, apresentação dos temas transversais e ética, meio ambiente e saúde e o último pluralidade cultural e orientação sexual.

De forma geral os PCN trazem uma série de considerações. Há nele uma apresentação do seu propósito e também um breve histórico mostrando a estrutura da educação que era aplicado antes dos PCN e que era regido pela Lei Federal nº 5692 de 11 de agosto de 1971 e chegando na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de Lei Federal 9394 de 20 de dezembro de 1996. Contou-se o processo de elaboração dos PCNs, indicando a proposta desses parâmetros, a organização curricular e a forma como seus componentes deveriam ser abordados, os objetivos, os conteúdos, a avaliação, orientações didáticas e a estrutura organizacional. Na parte que trata da matemática das séries finais do ensino fundamental, observa-se que a construção do referencial visa orientar o ensino, de tal forma que o estudante saia apto e inserido ao mercado do trabalho, das relações sociais e da cultura.

Na seleção dos conteúdos de matemática, os PCN estavam separados em quatro campos, números e operações, espaço e formas, grandezas e medidas e tratamento de informações. No que tange o conteúdo de transformações geométricas, observa-se que faz parte do campo espaço e formas, mais conhecido como geometria. O PCN destaca que a geometria não fica restrita no estudo das formas, mas envolve a noção de posição, onde essas formas estão localizadas e o movimento delas dentro do plano cartesiano. Conforme diz o documento:

> Deve-se destacar também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias) de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

Ele também fundamenta que os estudos da geometria sejam investigados através de situações reais do cotidiano, como obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanatos, de modo que o estudante perceba conexões em áreas diferentes da matemática, como por exemplo, os padrões geométricos apresentados pelo artista Cornelis Escher (1898-1972).

Nas diretrizes dos PCN há uma divisão em ciclos, sendo que das séries finais do ensino fundamental são o terceiro e quarto ciclos. O terceiro ciclo correspondia à 5ª e 6ª séries, o que hoje equivale ao 6º e 7º anos, já o quarto ciclo eram as 7ª e 8ª séries, atualmente 8º e 9º anos. No terceiro ciclo são apresentados dois objetivos que incluem as transformações geométricas:

> Resolver situações-problemas de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas; Resolver situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução. (BRASIL,1998,p.64)

Para atingir esses objetivos é indicado a interpretação de situações-problemas que envolvam leituras de plantas, croquis e mapas e que se faça transformações de figuras no plano, também a ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão, identificando os elementos desses resultados.

No quarto ciclo os objetivos traçados usando tranformações geométricas são:

> Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança. (BRASIL,1998, p.81)

Para atingir esses objetivos é orientado que a partir de uma figura, os alunos façam a reflexão, a rotação e a translação, e então, observem a manutenção das medidas dos lados e dos ângulos das figuras transformadas. Ao realizar estas atividades os alunos manifestarão capacidades de percepção espacial, auxiliando no entendimento das congruências e semelhanças de figuras planas, as chamadas isometrias e homotetias.

Há também no documento orientações didáticas sobre todos os campos da matemática e dentre eles o conteúdo de tranformações geométricas é tratado como algo a ser privilegiado, pois através dele facilitará a compreensão de conceitos geométricos. Orientam que se utilizem softwares e exemplos do dia a dia que apresentam as isometrias, que por sinal no PCN é visto como muito presente no nosso cotidiano, exemplificando-os. Tem uma abordagem trazendo a importância da ampliação e redução de figuras para entender o conceito de semelhança. Os PCN trazem orientações para que os professores tenham sucesso na sua forma de ensinar.

O conteúdo de tranformações geométricas apareceu em várias abordagens, assim como outros conteúdos também tiveram boas orientações, porém naquela época havia uma grande preocupação no quadro de ensino da matemática, conforme é apresentado:

> Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino da matemática aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas. (BRASIL,1998, p.21)

Havia uma crítica sobre a organização dos conteúdos, cujo cenário apontava professores trabalhando os conteúdos em forma de “corrente”, os conteúdos eram pré-requisitos para outros, mas como colocado, não existem ligações fortes que não se possa ser trabalhado em ordem diferente.

Na sequência tem-se um resumo histórico trazida por (BRASIL, 2018) onde lista os principais acontecimentos até a criação da BNCC e os principais pontos que evidenciam o conteúdo de transformações geométricas.

Após a criação dos PCN, em 2008 houve um movimento para aperfeiçoar e atualizar o conteúdo da Educação Básica, o chamado Programa Currículo em Movimento. No ano de 2010 temos a definição das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que tinham como função de guiar as instituições de ensino. São regras obrigatórias a serem seguidas no planejamento do currículo. Diferente dos PCN que não eram obrigatórios por lei, mas que subsidiavam e orientavam em diversas questões, as DCN deveriam ser seguidos à regra na formação dos currículos escolares e os conteúdos mínimos previstos. Ainda no ano de 2010 é realizado a Conferência Nacional de Educação (CONAE), com fins de debater a Educação Básica. Desse encontro sai um documento trazendo a necessidade de uma Base Nacional Comum Curricular. E em 2011 foi criado o Ensino Fundamental de 9 anos.

Em 2014 é realizado a 2ª Conferência Nacional pela Educação (CONAE), onde foi proposto ideias e reflexões para a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sendo que no ano de 2015 já teve a sua primeira versão disponibilizada. Após debates e mais duas versões, em 2017 a BNCC foi homologada e orientada a sua implantação.

A BNCC vem como uma atualização dos PCN, sendo mais detalhada a respeito das habilidades e competências e com objetivos mais claros. A BNCC organiza os conteúdos por ano escolar e não por ciclos como eram os PCN. A criação da BNCC não vai excluir as DCN, visto que, foi criada com base nessas diretrizes, sendo assim, um complemento. Em 2018 a BNCC ficou completa com a homologação da etapa do Ensino Médio.

A BNCC é composta de um volume único, contendo uma introdução, uma explicação da estrutura da BNCC, a etapa da educação infantil, do ensino fundamental que foi subdividido em anos iniciais (1º ao 5º ano) e anos finais (6º ao 9º ano), e por fim, a etapa do ensino médio.

A introdução vem explicando que a BNCC é um documento que foi criado com base nas Diretrizes Curriculares Nacionais e que traz como normas conteúdos básicos para garantir aos alunos na etapa da educação básica seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Há também 10 competências gerais da educação básica, as leis que embasam a BNCC e seus fundamentos pedagógicos.

A estruturação da BNCC torna claro quais competências devem ser desenvolvidas na educação infantil, no ensino fundamental e médio e como estão estruturados as aprendizagens. Dentro de cada etapa tem orientações gerais, as competências específicas de cada disciplina e após isso encontra-se detalhado em um quadro as unidades temáticas, objetos do conhecimento e as habilidades. Na matemática da BNCC, as unidades temáticas são separadas em números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

O conteúdo das transformações geométricas aparece dentro do eixo temático da geometria, com orientações de que o desenvolvimento geométrico dos alunos pode ser construido quando o professor ensina as posições e deslocamentos no espaço, juntamente com as formas e relações, tanto nas figuras planas quanto nas espaciais.

Assim como nos PCN, que tratavam as transformações geométricas como um conteúdo a ser priviligeado, na BNCC traz ele como muito importante, sobretudo as simetrias, pois envolvem a construção, representação e a independência. Com esse trabalho será facilitado o entendimento de semelhança e congruência de triângulos, além de desenvolver o raciocínio hipotético-dedutivo ao realizar demonstrações simples com a consolidação dos aprendizados dessa área da matemática.

Na BNCC as transformações geométricas são apresentadas em quase todos os anos da etapa final do ensino fundamental. No 6º ano o objeto do conhecimento que envolve as transformações geométricas é descrito como: “Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malha quadriculada” (BRASIL, 2018, p. 303).

A habilidade que deve ser desenvolvida é colocada com o código EF06MA21 que indica: “Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 303).

No 7º ano são dois objetos do conhecimento que contornam as transformações geométricas: “Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação de coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e a origem (BRASIL, 2018, p. 309) e “Simetrias de translação, rotação e reflexão” (BRASIL, 2018, p. 309). Junto com esses objetos são citados três habilidades:

> (EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano,decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro; (EF07MA20) Reconhecer e apresentar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem; (EF07MA21): reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obra de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.(BRASIL, 2018, p.309)

No 8º ano, o objeto do conhecimento envolvido é: transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação. A habilidade a ser desenvolvida é “(EF08MA18) Reconhecer e contruir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p.

315).

No 9º ano as transformações geométricas não são explícitas, mas são bases para a compreensão de outros objetos do conhecimento no campo da geometria, como parte da trigonometria e da geometria analítica.

No seguimento há um resumo baseado no (RGS, 2018), com os principais pontos do Referencial e as partes que evidenciam as transformações geométricas.

Seguido da BNCC veio a criação do RCG, um documento norteador dos currículos do Estado do Rio Grande do Sul. Ele foi elaborado em administração colaborativa entre a Secretaria Estadual de Educação (SEDUC-RS), a União Nacional dos Dirigentes Municipais da Educação (UNDIME) e o Sindicato do Ensino Privado no Rio Grande do Sul (Sinepe / RS). Esse documento segue a BNCC, complementado-a com novas habilidades e agregando temáticas regionais como a história, cultura e diversidade étnico-racial. O referencial é composto por um caderno orientado para a Educação Infantil e outros cinco divididos por área do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. Cada caderno traz uma fundamentação pedagógica, características da área, componentes curriculares e um quadro com a estrutura curricular semelhante à BNCC, com os temas, objetos do conhecimento, as habilidades da BNCC e de novo, as habilidades do RCG.

Na matemática, o documento apresenta os princípios pedagógicos, e na parte das transformações geométricas nas séries finais do ensino fundamental repete as ideias mostradas na BNCC, expressando com outras palavras a importância desse conteúdo e fundamentando com as mesma intenções da aplicação das transformações geométricas.

Aparecem habilidades complementares à BNCC. No 6º ano, no conteúdo de transformações geométricas é agregado a habilidade codificada como (EF06MA21RS-1) que indica: “Construir, ampliar e reduzir figuras planas semelhantes com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais, verificando elementos e propriedades que se alternam.”(RGS, 2018, p.126)

No 7º ano surgem seis novas habilidades:

> (EF07MA19RS-1) classificar polígonos usando critérios como número de lados, eixo de simetria e comprimento de seus lados e número de ângulos; (EF07MA19RS-2) observar a transformação dos polígonos representados no plano cartesiano, a partir da multiplicação das coordenadas dos vértices por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem,

> discutindo e descrevendo e observando em linguagem corrente; (EF07MA20RS-1) localizar e representar na malha quadriculada, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem; (EF07MA20RS-2) descrever, interpretar e representar a localização ou a movimentação de pontos do plano cartesiano, utilizando coordenadas cartesianas; (EF07MA21RS-1) reconhecer, identificar e diferenciar os tipos de transformações simétricas de translação, rotação e reflexão, usando desenhos e tecnologias digitais; (EF07MA21RS-2) identificar e construir transformações de uma figura obtida por translação e reflexão, reconhecendo características dessa transformação, através de pesquisas vinculadas a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros (RGS, 2018, p.142)

No 8º ano, o documento repete na habilidade do RCG a habilidade apresentado na BNCC.

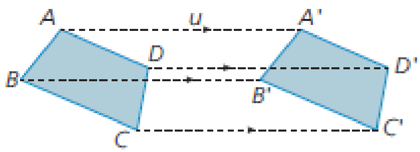
Obseva-se que nas principais diretrizes curriculares do Brasil, o conteúdo de transformações geométricas sempre é presente e tratado como preocupação ou como a ser privilegiado. A preocupação talvez se deve no pouco desenvolvimento do conteúdo nas séries finais e o privilégio no ponto em que dentre todos os conteúdos curriculares, deve-se ter um foco nas transformações geométricas, visto que, é um conteúdo importantíssimo na compreensão de conceitos geométricos e introdução de outros conteúdos na área da geometria.

3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E PROPRIEDADES

A abordagem do método das tranformações geométricas envolve basicamente o conceito de funções isométricas. A fim de motivar o estudo de transformações geométricas vamos apresentar três modelos de transformações dados pelas Figuras 7, 8 e 9:

A Figura 7 apresenta um movimeto de translação, onde o objeto translada de um ponto a outro. É um deslocamento paralelo, em linha reta e cada ponto do objeto percorre uma mesma distância e uma mesma direção.

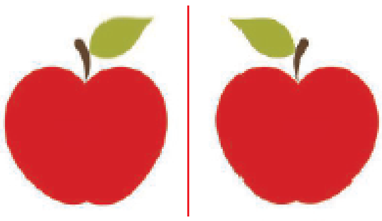
Figura 7: Translação



Fonte: (SAMPAIO, 2018)

Na Figura 8 tem-se uma reflexão, onde realiza um movimento de espelhamento de um objeto a partir de um eixo de simetria.

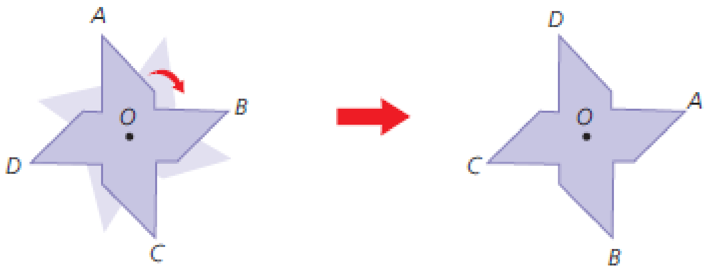
Figura 8: Reflexão



Fonte: (SAMPAIO, 2018)

Na Figura 9 é apresentado uma rotação do objeto, um giro em torno de um eixo. Esse giro pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Figura 9: Rotação



Fonte: (SAMPAIO, 2018)

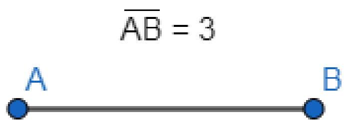
Essa seção começa com uma revisão de funções isométricas muito importante para o entendimento do material que será exposto. Essa revisão foi baseada em (LIMA, 2007).

3.1 DEFINIÇÕES GERAIS

Definição: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ pontos de um plano $\boldsymbol{\pi}$. Definimos o comprimento do segmento de reta $\boldsymbol{AB}$ como a distância do ponto $\boldsymbol{A}$ até o ponto $\boldsymbol{B}$ e denotamos por $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Na Figura 10 tem-se um exemplo de segmento.

Figura 10: Segmento AB



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que se um ponto $\boldsymbol{C}$ pertence ao segmento de reta $\boldsymbol{AB}$ então: $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B})$.

3.1.1 Isometrias no plano

Definição: Uma isometria entre os planos $\pi \subset \mathbb{R}^2$ e $\pi' \subset \mathbb{R}^2$ é uma função

$T: \pi \rightarrow \pi'$ que preserva a distância, ou seja,para $P, Q \in \pi$, pondo $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$ temos que $d(P', Q') = d(P, Q)$.

Definição: Dizemos que uma função $T: \pi \rightarrow \pi'$ é injetiva se:

(i) Dados $P, Q \in \pi$ com $T(P) = T(Q)$ tivermos que $P = Q$, ou equivalente,

(ii) Dados $P, Q \in \pi$ com $P \neq Q$ tivermos $T(P) \neq T(Q)$.

Teorema: Uma isometria $T: \pi \rightarrow \pi'$ é uma função injetiva.

Definição: Dizemos que uma função $T: \pi \rightarrow \pi'$ é sobrejetiva se a imagem de T é todo o conjunto de π', isto é, $T(\pi) = \pi'$.

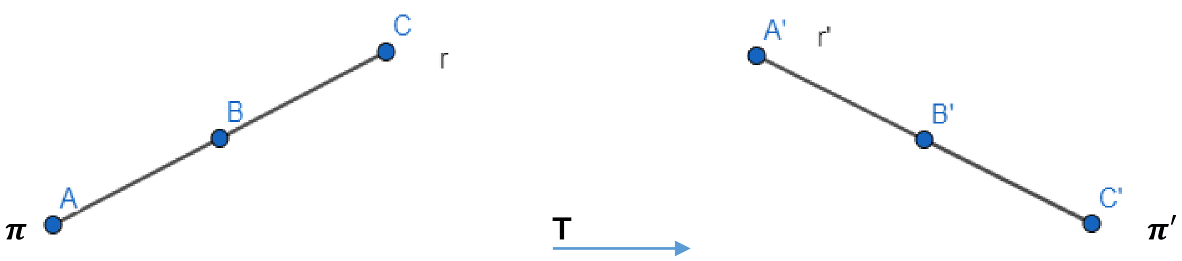
Proposição: Uma isometria $T: \pi \rightarrow \pi'$ é uma função sobrejetiva.

Definição: Dizemos que uma função $T: \pi \rightarrow \pi'$ é bijetiva se T é injetiva e sobrejetiva.

Teorema: Toda isometria $T: \pi \rightarrow \pi'$ transforma retas em retas.

Na Figura 11 há um exemplo de transformação isométrica entre segmentos.

Figura 11: Transformação isométrica



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: Sejam $T: \pi \rightarrow \pi'$ e $S: \pi' \rightarrow \pi''$, onde $\pi, \pi' e\, \pi'' \subset \mathbb{R}^2$ e $P \in \pi$, indicamos por $S \circ T$ uma aplicação composta das funções T e S, definida por:

$(S \circ T)(P) = S(T(P))$, onde $T(P) \in \pi'$ e $S(T(P)) \in \pi''$, ou seja, $S \circ T = \pi \rightarrow \pi''$

Definição: Definimos a função identidade $Id: \pi \to \pi$ por $Id(P) = P$, $\forall\, P \in \pi$.

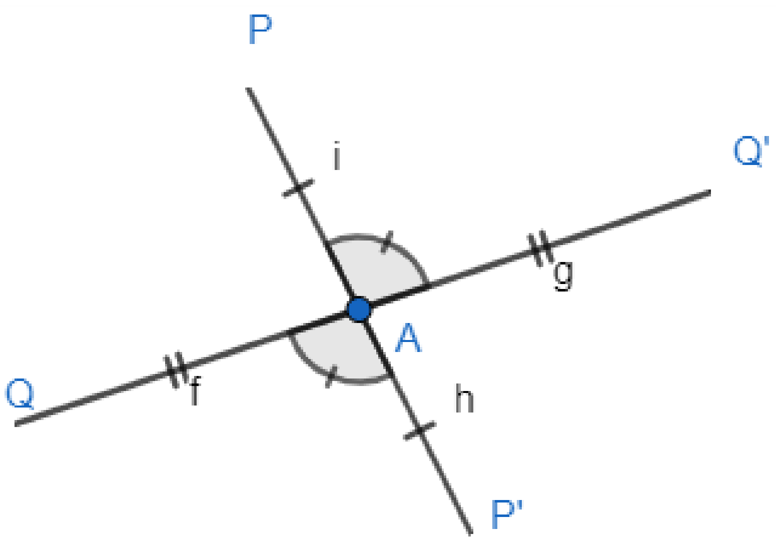
Definição: Dizemos que uma função $T: \pi \to \pi'$ é invertível se existe uma função $S: \pi' \to \pi$ tal que $T \circ S = Id$ e $S \circ T = Id$, onde T^{-1}é denominada função inversa de T. Assim $T \circ T^{-1} = Id$ e $T \circ^{-1} T = Id$.

Teorema: Se $T: \pi \to \pi'$ e $S: \pi' \to \pi''$ são isometrias, então $S \circ T: \pi \to \pi''$ também é uma isometria.

Definição: (Simetria em torno de um ponto) Seja um ponto $A \in \pi$. A simetria em torno de A é uma função $T: \pi \to \pi$ definida por $T(A) = A$ e para $P \neq A$, $T(P) = P'$ é o simétrico de P em relação a A, ou seja, A é o ponto médio do segmento PP'.

A Figura 12 traz um exemplo de simetria em torno no ponto A. Os pontos P' e Q' são simétricos de P e Q respectivamente. Observe que os pontos i e h possuem o mesmo comprimento.

Figura 12: Simetria em torno de um ponto

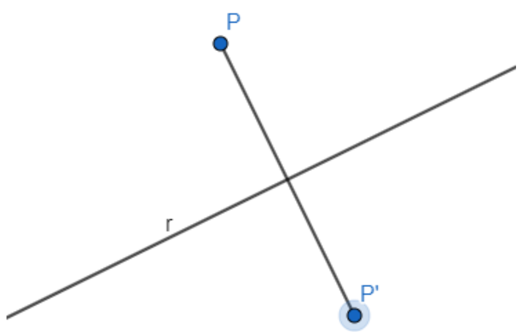


Fonte: elaborado pelo autor

Definição: (Reflexão em torno de uma reta) Seja r uma reta do plano π. A reflexão em torno da reta r é uma função $R_r: \pi \to \pi$ definida por $R_r(P) = P, \forall\, P \in r$ e para todo $P \notin \mathrm{r}$, $R_r(P) = P'$ é tal que a mediatriz do segmento PP' é a reta r.

Note na Figura 13 que a reta r representa o eixo de simetria. A distância do ponto P ao ponto médio da reta r é a mesma distância do ponto P' ao ponto médio da reta r.

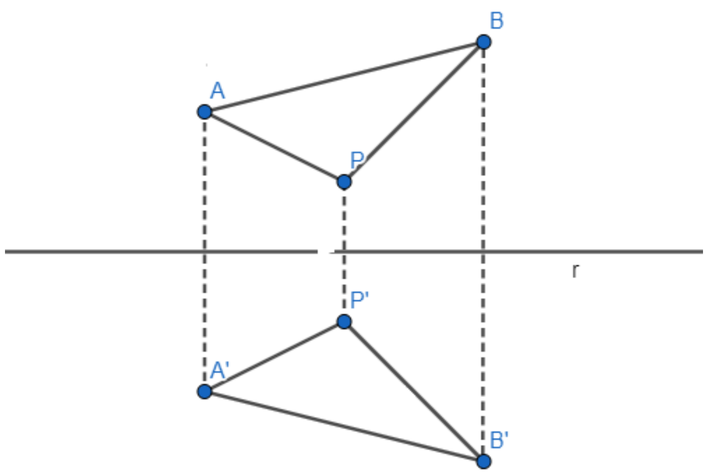
Figura 13: Mediatriz da reta r



Fonte: Elaborado pelo autor

A reflexão de uma figura F em torno de uma reta r é dada pela figura $R_r(F) = +\{R_r(P)/P \in F\}$.

Figura 14: Reflexão em torno da reta r



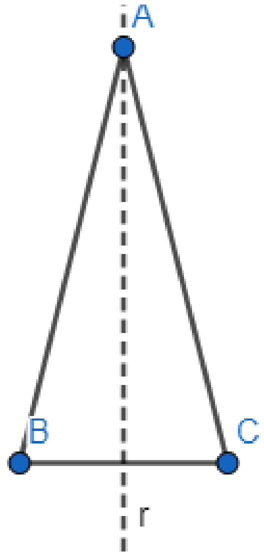
Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 14 o triângulo ABP é refletido em torno da reta r, formando o triângulo $A'B'P'$.

Definição: (Figuras simétricas) Duas figuras F e G são ditas simétricas em relação à uma reta r, se $R_r(F) = G$, ou seja, a imagem da figura F pela reflexão R_r coincide com a figura G. Neste caso a reta r, é denominada de eixo de simetria.

Na Figura 15, o eixo de simetria do triângulo ABC coincide com a altura relativa ao lado BC.

Figura 15: Simetria no triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor

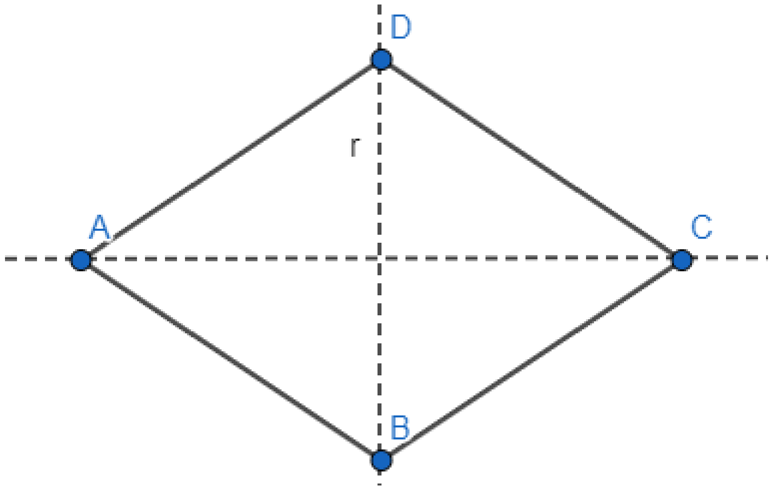
O triângulo isósceles ABC de base BC possui um eixo de simetria que também é a mediatriz da base BC.

No losango pode-se observar a existência de dois eixos de simetrias, conforme é apresentado na Figura 16.

O losango $ABCD$ da Figura 16 tem seus eixos de simetria a reta s que passa pela diagonal AC e a reta r que passa pela diagonal BD. Também pode-se observar que os triângulos ADC e ABC são simétricos, assim como os triângulos ABD e BCD também são simétricos com eixo de simetria sendo a reta r.

Diferente que o losango, o triângulo equilátero vai ter um eixo de simetria a mais que o losango.

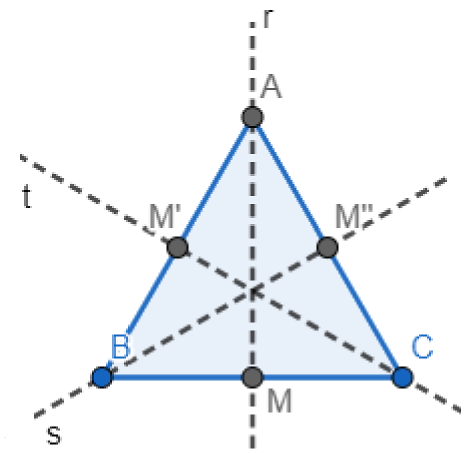
Figura 16: Simetria no losango



Fonte: Elaborado pelo autor

Já o triângulo equilátero pode ter três eixos de simetrias, conforme pode ser visto na Figura 17. Observa-se que os três eixos de simetrias coincides com as mediatrizes do triângulo.

Figura 17: Simetria no triângulo equilátero

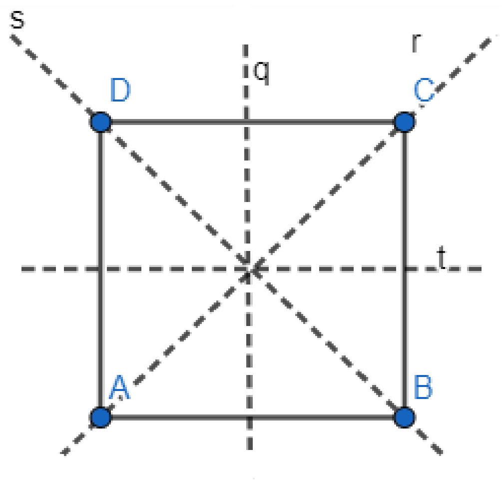


Fonte: Elaborado pelo autor

O triângulo equilátero ABC da Figura 17 tem seus três eixos de simetria que são as retas suporte r, s, t dos segmentos AM, BM'' e CM' respectivamente, onde M, M'e M'' são os pontos médios dos segmentos BC, AC e AB.

Em um quadrado há a existência de quatro eixos de simetrias, conforme pode ser observado na Figura 18.

Figura 18: Simetria no quadrado

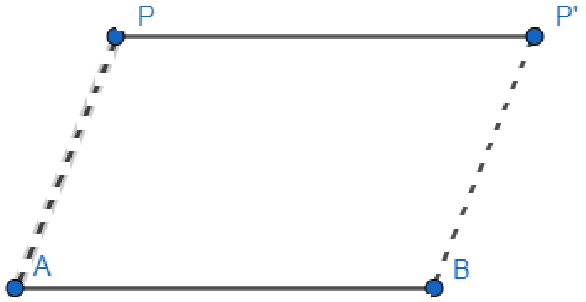


Fonte: Elaborado pelo autor

O quadrado $ABCD$ da Figura 18 tem seus quatro eixos de simetria, r e s que são as retas suporte das diagonais AC e BD e t, q que são as retas suporte das mediatrizes de seus lados.

Definição: (Translação) Sejam A, B e π tal que $A \neq B$. A translação $T_{AB}: \pi \rightarrow \pi'$ é uma função definida da seguinte forma: Dado $P \in \pi$ e sua imagem $P' = T_{AB}(P)$. Se $A, B\ e\ P$ são não colineares, então P' é o quarto vértice do paralelogramo que tem $AB\ e\ AP$ como lados.

Figura 19: Translação dados os pontos A e B



Fonte: Elaborado pelo autor

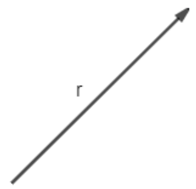
Na Figura 19 há a transformação geométrica da translação, onde o segmento AB é transladado para a posição PP'.

Note que a translação $T_{AB}: \pi \to \pi'$ é uma isometria, ou seja, dados dois pontos quaisquer $P, Q \in \pi$ e suas imagens $P' = T_{AB}(P)$ e $Q' = T_{AB}(Q)$, então:
$d(P', Q') = d(P, Q)$.

A noção de translação está estritamente ligada ao conceito de vetor. Assim é conveniente introduzirmos o conceito de vetor.

Definição: (Reta orientada) Uma reta $r \subset \pi$ é dita orientada quando a reta é fixada no sentido do percurso considerado positivo e indicado por uma seta.
O sentido oposto é considerado negativo. A reta orientada é denominada de eixo. Um exemplo de reta orientada pode ser observada na Figura 20.

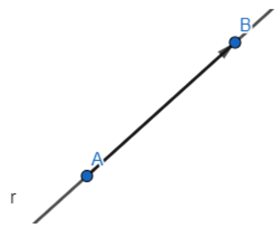
Figura 20: Reta orientada



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: (Segmento orientado) Sejam os pontos $A, B \in \pi$. Um segmento de reta com origem em A extremidade em B é dito ordenada se nele é fixado um percurso e é orientado por $\overrightarrow{AB}$, conforme é apresentado na Figura 21.

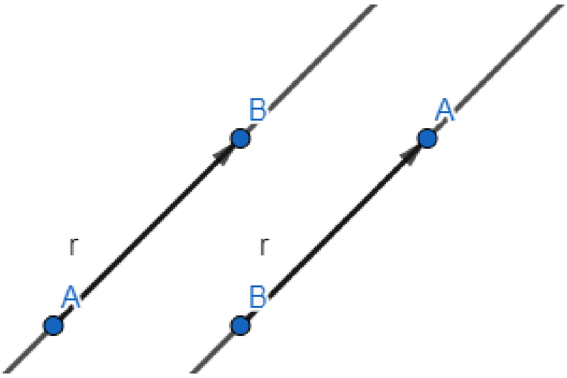
Figura 21: Segmento orientado r



Fonte: Elaborado pelo autor

A reta suporte r do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é denominado direção de $\overrightarrow{AB}$. Já na Figura 22, dizemos que o segmento $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ tem mesma direção e sentidos opostos.

Figura 22: Reta suporte do segmento orientado

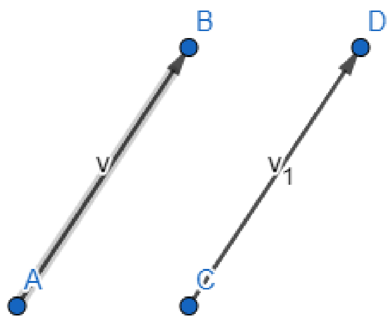


Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: (Segmentos equipolentes) Dizemos que dois segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes se tem a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma, e escrevemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Definição: (Vetores) Um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB. Tais segmentos são denominados de representantes do vetor $\vec{v}$ conforme é colocado na Figura 23.

Figura 23: Vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$e o representante $\overrightarrow{v1} = \overrightarrow{CD}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos então reescrever a função translação $T_{AB}: \pi \rightarrow \pi'$ por $T_{v}{:}\pi \rightarrow \pi'$ e dizer que T_v é a translação do vetor v.

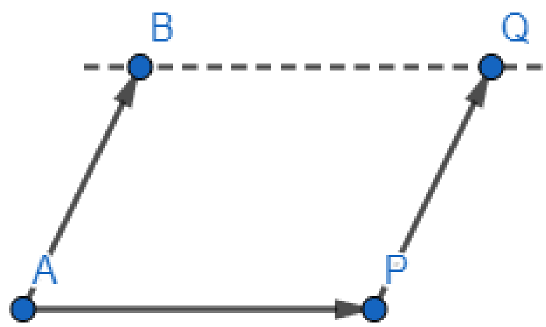
Definição: (Norma) Associado ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, temos que sua norma que é denominada $|AB|$ e é definida como a distância entre os pontos A e B.

$$|AB| = d(A, B)$$

Teorema: Dado o segmento orientado AB e o ponto P no plano π, existe um único ponto Q do plano π tal que os segmentos orientados AB e PQ são equidistantes, ou seja, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Na Figura 24 apresenta o ponto Q como o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AP como lados.

Figura 24: Existência de um único ponto Q

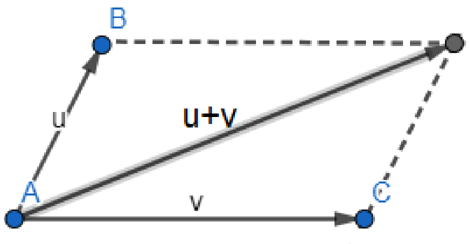


Fonte: Elaborado pelo autor

Escrevemos $Q = P + v$ e dizemos que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ transportou P para a posição Q. Note que $Q = T_{AB}(P) = T_v = (P)$.

Definição: (Soma de vetores) Sejam $A, B \; e \; C$ pontos de um plano π e os vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$. Na Figura 25 tem-se a definição do vetor soma $u + v$ por $u + v = \overrightarrow{AD}$ onde D é o quarto vértice do paralelogramo com lados AC e AB.

Figura 25: Soma de vetores



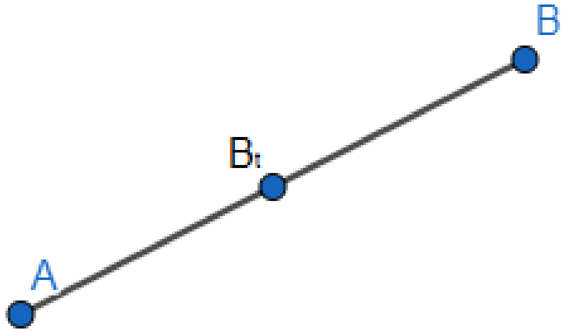
Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: Definimos o vetor nulo, indicado por $\vec{0}$, como sendo o vetor para o qual a origem coincide com a extremidade, ou seja, $0 = \overrightarrow{AA}$. Note que a transformação T_0é a função identidade $T_0 = Id$, $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u = T_{u+v}$ e se $v = \overrightarrow{AB}$ escreve-se $-v = \overrightarrow{BA}$ e $(T_v)^{-1} = T_{-v}$.

Definição: (Multiplicação de um vetor v por um escalar t). Dado um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ e um número real t:

Se $t > 0$,o produto de t por v é o vetor $tv = AB_t$, onde B_t é um ponto da segmento AB, tal que $\frac{AB_t}{AB} = t$, podendo ser visto no exemplo da Figura 26.

Figura 26: Multiplicação de um vetor por um escalar



Fonte: Elaborado pelo autor

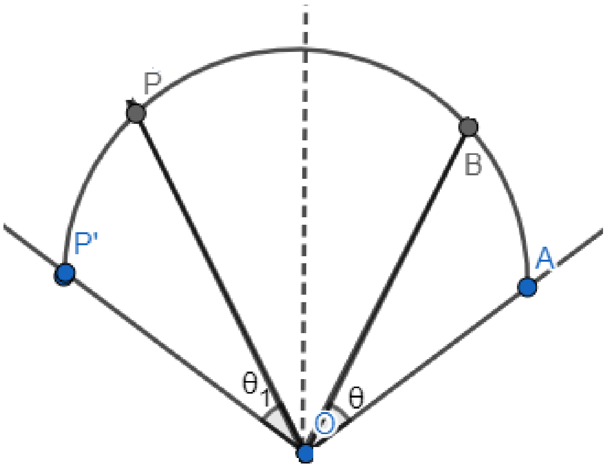
Se $t < 0$, então $tv = -|t|v$ e se $t = 0$, temos que $t.v = 0.v = 0 = \overrightarrow{AA}$

Definição: (Rotação) Dado um ponto O do plano π e $\theta = A\hat{O}B$ um ângulo com vértice

O. A rotação do ângulo θ em torno do ponto O é a função $P_o: \pi \rightarrow \pi$ definida por $P_o(0) = 0$ e para todo ponto $P \neq 0$ em $\pi, P_o(P) = P'$, onde P' é o ponto do plano π. Note que geometricamente a condição $d(P,0) = d(P',0), P\hat{O}P' = \theta$ e o sentido de rotação de A para B e o mesmo de P' para P.

Note na Figura 27, que geometricamente a condição $P\hat{O}P' = \theta$ significa que se tomarmos o ponto A e B tais que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OP'}$ então $\overline{AB} = \overline{PP'}$.

Figura 27: Rotação do ângulo θ em torno do ponto O



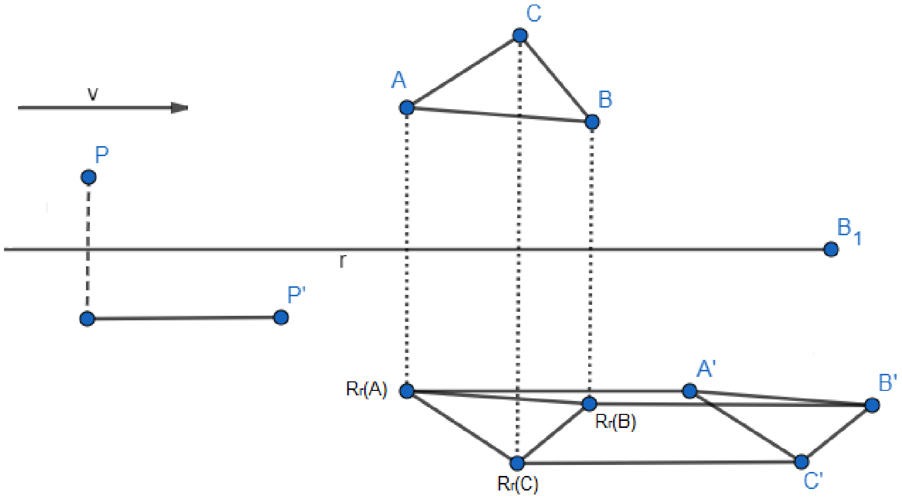
Fonte: Elaborado pelo autor

Para que a função $P_o: \pi \rightarrow \pi$ esteja bem definida é necessário que a ordem das semirretas AO e OB sejam levados em conta, sendo OA a primeira e OB a segunda. Neste caso dizemos que $\theta = A\hat{O}B$ é um ângulo orientado. Note que $-\theta = B\hat{O}A$ e $P_{-\theta} = (P_{-\theta})^{-1}$.

Definição: (Reflexão com deslizamento) Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ um vetor não nulo e r uma reta paralela a v no plano π, $T_v: \pi \rightarrow \pi$ a função translação e $R_r: \pi \rightarrow \pi$ a função reflexão, conforme é exemplificada na Figura 28, com a reflexão do triângulo ABC, seguido do deslizamento.

A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor v e pela reta r é a isometria obtida fazendo-se uma reflexão seguida de translação.

Figura 28: Reflexão com deslizamento



Fonte: Elaborado pelo autor

3.1.2 Isometrias Próprias e Impróprias

Definição: Um movimento em um plano $\boldsymbol{\pi}$ é uma coleção de isometrias $\boldsymbol{H_t}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ para cada $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ em que $\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ é a função identidade e para cada ponto fixo $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\pi}$ tem-se que o ponto $\boldsymbol{H_t}(\boldsymbol{P})$ varia continuamente com $\boldsymbol{t}$ quando $\boldsymbol{t}$ varia de 0 a 1.

Definição: Uma isometria $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ é denominada própria se existe um movimento $\boldsymbol{H_t}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ com $\boldsymbol{H_1} = \boldsymbol{T}$, ou seja, $\boldsymbol{T}$ é a etapa final do movimento $\boldsymbol{H_t}$. Caso contrário essa isometria é denominada imprópria.

São exemplos de isometria própria a translação e a rotação. São exemplos de isometria imprópria a reflexão e a reflexão com deslizamento.

Teorema: Se $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ são isometrias próprias, então a composta $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}$ e as inversas $\boldsymbol{S^{-1}}$ e $\boldsymbol{T^{-1}}$ são isometrias próprias.

Teorema: Se $\boldsymbol{S}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ são isometrias impróprias então $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ são isometrias próprias.

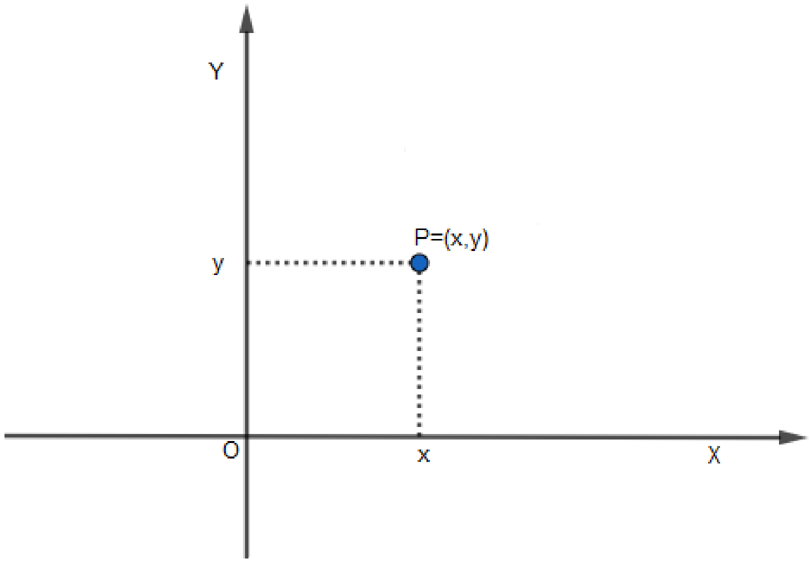
Teorema: Se $\boldsymbol{S}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ é uma isometria própria e $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{\pi} \to \boldsymbol{\pi}$ é imprópria ou vice-versa, então $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S}$ são isometrias impróprias.

Observação: Podemos abordar questões referentes a isometrias no plano usando um sistema de coordenadas no plano, conforme Figura 29. Um sistema de coordenadas é introduzido no plano π quando se toma um par de eixos perpendiculares OX e OY com a origem no ponto $O \in \pi$.

Ox chama-se o eixo das abcissas.

Oy é chamado o eixo das ordenadas.

Figura 29: Sistemas de coordenadas cartesianas



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: (Isomorfismo) Dizemos que existe um isomorfismo entre dois espaços vetoriais U e V se existe uma função $\gamma = U \rightarrow V$ bijetiva.

Teorema: Sejam os eixos OX e OY fixados. Então existe um isomorfismo $\gamma: \pi \rightarrow R^2$ onde o x é a abcissa de P e y é a ordenada de P.

Observação: A abcissa x do ponto P é obtida fazendo a projeção do ponto P sobre o eixo OX e a ordenada de P é obtida fazendo a projeção de P sobre o eixo OY.

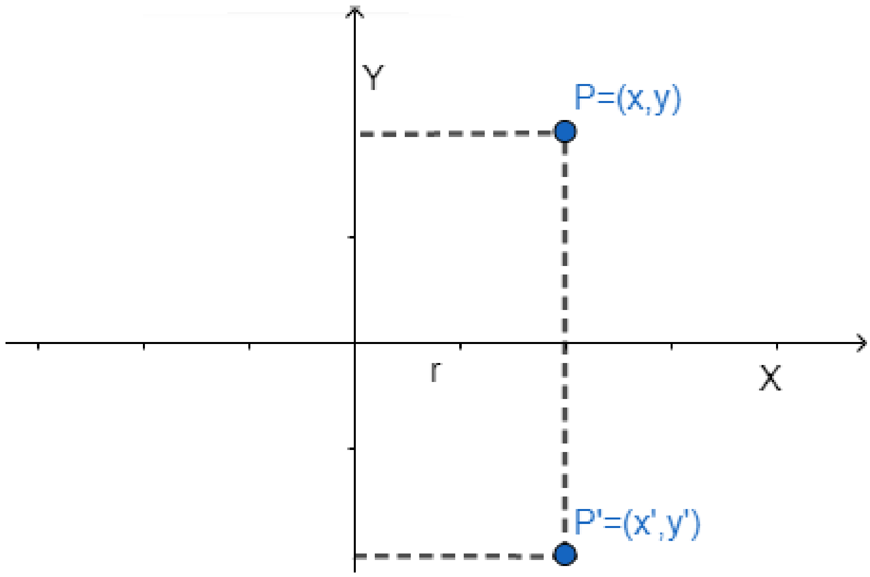
Nestas condições, dada uma isometria $T: \pi \rightarrow \pi$ se o ponto $P' = (x', y') = T(P)$ é a imagem do ponto $P = (x, y)$ pela T é natural indagar de que modo podemos exprimir as coordenadas x' e y' de P' em função das coordenadas x, y de P.

Segue alguns exemplos:

Seja a função $R_r: \pi \rightarrow \pi$ reflexão em torno da reta r. Note que podemos tomar no plano $\boldsymbol{\pi}$ um sistemas de coordenadas de forma que a reta $\boldsymbol{r}$ coincide com o eixo $\boldsymbol{OX}$.

Então para cada ponto $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ temos que $\boldsymbol{R_r}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$, onde $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{y}$, de acordo com o que é apresentado na Figura 30.

Figura 30: Projeção do ponto sobre os eixos



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição: A distância entre os pontos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ de coordenadas $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ e $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ é dada pela fórmula $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$.

Note que, $\boldsymbol{R_r}(\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{y_1})$ e $\boldsymbol{R_r}(\boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{y_2})$.

$\boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{R_r}(\boldsymbol{P})\big) = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (-\boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{y_1})^2} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$, logo $\boldsymbol{R_r}(\boldsymbol{P})$ é uma isometria.

3.1.3 Homotetia

As transformações apresentadas até agora tem como característica o fato de que transformam cada figura no plano em uma figura congruente. Todas essas transformações com essa propriedade de preservar distâncias são chamadas homotetias.

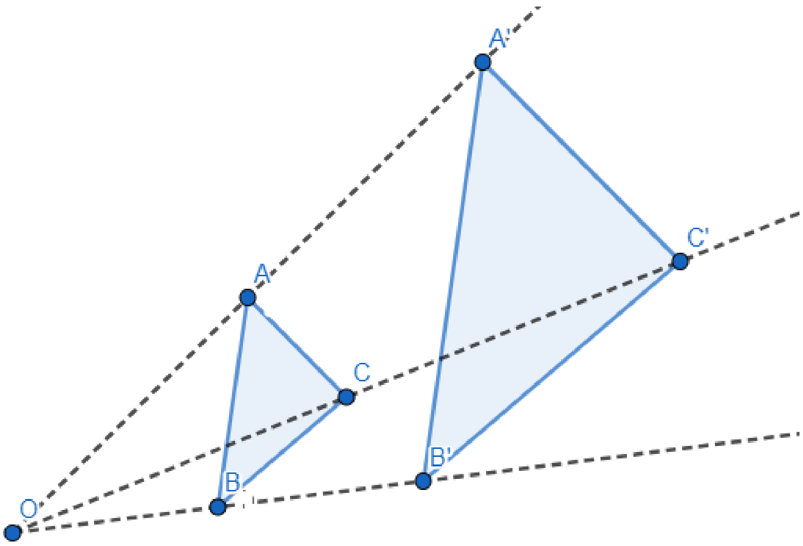
Existem algumas transformações geométricas que levam uma figura do plano em uma figura semelhante. Uma tal semelhança preserva os ângulos, mas não preserva a distância. No entanto, todas as distâncias devem ser aumentadas ou diminuídas em uma mesma razão *K.*

Definição: Uma homotetia de centro *O* e razão $K \neq 0$, é uma transformação geométrica $H_{O,K} : \pi \to \pi$ que fixa o ponto *O* e associa cada ponto $P \neq O$ um ponto $P' = H_{O,k}(P)$ sobre a reta $\overleftrightarrow{PO}$ tal que: $\overrightarrow{OP'} = K\overrightarrow{OP}$.

- Se *K=1* temos a transformação identidade, uma isometria, um caso especial de homotetia.

- Se *K > 0* dizemos que a homotetia tem razão positiva. Na Figura 31, o valor de K é um número maior que 1 e centro O, tendo assim uma ampliação do triângulo ABC.

Figura 31: Homotetia de razão positiva



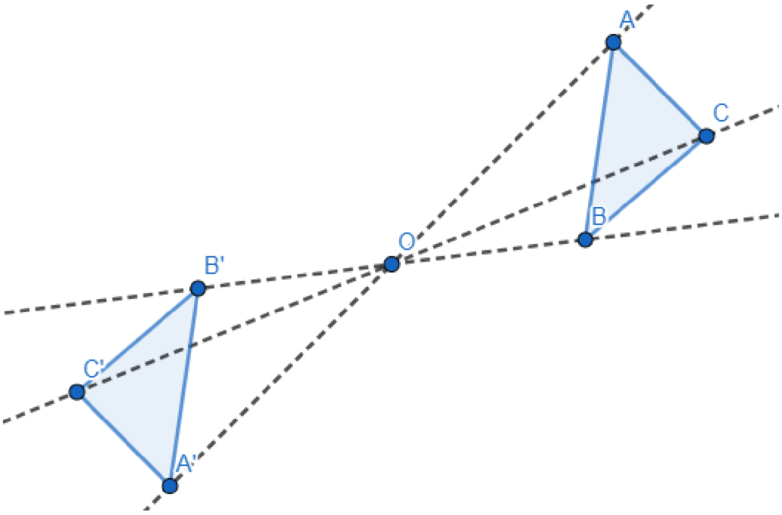
Fonte: Elaborado pelo autor

- Se *k < 0* dizemos que a homotetia tem razão negativa.

A ilustração da Figura 32 mostra uma homotetia que tem como centro O e uma razão negativa.

Observer que o triângulo transformado vai se formar depois do centro O, sendo uma reflexão pelo ponto O.

Figura 32: Homotetia de razão negativa



Fonte: Elaborado pelo autor

Teorema: (Inclinação preservada) Seja $H_{o,K}: \pi \to \pi$ uma homotetia, *A'=H*$_{o,k}$ *(A) e B'=H*$_{o,k}$ *(B).* Então a inclinação de $\overrightarrow{AB}$ é igual a inclinação de $\overrightarrow{A'B'}$.

Prova: por definição de homotetia $\overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA}, \forall\, A \in \pi$, onde $O = (0{,}0)$ é a origem da homotetia. $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$,

Seja $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, *então* $\overrightarrow{OA} = (x_a, y_a)$, e $\overrightarrow{OB} = (x_b, y_b)$,

$OA' = k.\overrightarrow{OA} = (kx_a, k.y_a)$ e $OB' = k.\overrightarrow{OB} = (kx_b, k.y_b)$

Inclinação de $\overrightarrow{AB} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{k}{k} . \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{k.y_b - k.y_a}{k.x_b - k.x_a} =$ inclinação de $\overrightarrow{A'B'}$

Teorema: (Ângulos preservados) Se $A' = H_{o,k}(A), B' = H_{o,k}(B)\ e\ C' = H_{o,k}(c)$, então:

$$\measuredangle A'B'C' = \measuredangle ABC$$

Teorema: (Existência de inversa) Toda homotetia tem uma inversa, ou seja, dada uma homotetia de centro *O* e razão *K*, $H_{O,k}: \pi \to \pi$ existe ${H_{O,k}}^{-1}: \pi \to \pi$, onde:

$${H_{O,k}}^{-1}(P) = H_{O,\frac{1}{k}}(P), \forall\, P \in \pi.$$

4. PERCURSO METODOLÓGICO

Utilizando-se uma abordagem qualitativa, o presente trabalho foi elaborado quanto aos desenvolvimentos técnicos adotados e pode ser considerado como um estudo de caso. Os procedimentos e recursos adotados envolveram a construção e aplicação de atividades que contornam o conteúdo de transformações geométricas.

Neste trabalho, as atividades foram aplicadas em escola de uma cidade no interior do Rio Grande do Sul, com população de aproximadamente 9500 habitantes, em uma escola do campo, mas que recebe muitos alunos da zona urbana, principalmente de bairros. Na grande maioria, os alunos são de famílias de baixa renda.

A escola tem alunos desde a educação infantil até o 9º ano do ensino fundamental. Tem funcionamento em dois turnos, sendo que pela manhã frequentam alunos do 6º ao 9º ano e pela tarde, os alunos de educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. No ano de 2022 estudam cerca de 200 alunos na escola. Nas turmas de aplicação das atividades contam com 19 no 6º ano e 18 alunos no 7º.

A escola tem acesso à internet, porém não tem sala de informática ou computadores para os alunos, mas a maioria dos alunos possuem aparelho celular, o que possibilita pesquisa e a utilização de aplicativos, como o GeoGebra. Como estrutura a escola está instalado em um terreno de aproximadamente 3000 m², com quadra de esportes, parque de brinquedos, sala de aula para todas as turmas, biblioteca, refeitório, sala dos professores, secretaria, cozinha, almoxarifado e banheiros.

Os alunos tem acesso ao transporte escolar, visto que, vêm de várias localidades e algumas distantes, tanto que, alguns alunos pegam o transporte às 6 horas da manhã para chegar no horário do início das aulas, que é às 7:20 horas.

As famílias dos alunos na maioria são agricultores e uma outra grande parte no comércio do município e adjacências.

Também vale destacar que por quase dois anos a escola esteve com aulas remotas, por motivo da pandemia da COVID-19, e nesse tempo, muitos alunos não tiveram aulas presenciais, apenas retiravam atividades na escola e a cada quinze dias retornavam na escola para pegar novas atividades. Assim, há uma defasagem muito grande no contexto de conteúdos, muitas lacunas à serem preenchidas.

Para o 6º ano, foram elaboradas e aplicadas atividades que envolvem a transformação geométrica da homotetia, visando atingir as habilidades da BNCC e para isso fará o uso do software GeoGebra. Também as atividades envolvem o plano cartesiano, conteúdo estudado antes das transformações geométricas.

Planejou-se o uso de 10 períodos de 45 minutos para a aplicação das atividades.

Para o 7º ano, foram elaboradas e aplicadas atividades que envolvem as transformações geométricas de isometrias como a rotação, translação e reflexão. As atividades visam atender as habilidades da BNCC e para isso será usado o software GeoGebra e também obras artísticas de Escher.

Planejou-se o uso de 10 períodos de 45 minutos para a realização das atividades.

Pensando em uma contribuição com o ensino aprendizagem do conteúdo de transformações geométricas e baseado no histórico, nas principais diretrizes curriculares e também nas definições, teoremas do conteúdo, se desenvolveu as atividades para a aplicação em sala de aula para as turmas de 6º e 7º anos.

5. APLICAÇÕES E SUGESTÕES DE ATIVIDADES DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

5.1 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES NO 6º ANO

Pelo capítulo 2, observa-se que na BNCC muitas habilidades devem ser atingidas com o uso de tecnologias digitais. O GeoGebra é um software, que por ser acessível, de fácil manuseio e gratuíto, permitindo trabalhar conhecimentos matemáticos nas áreas de geometria, álgebra, estatística e cálculo atende as habilidades exigidas pela BNCC.

Como o GeoGebra apresenta um plano cartesiano, esse aplicativo interativo conta com uma malha quadriculada, objeto que é apresentado nas habilidades da BNCC. A habilidade EF06MA21 proposta pela BNCC: Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais e também a EF06MA22: Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para a representação de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros, podem ser desenvolvidas com o uso do GeoGebra. São habilidades que devem ser trabalhadas no 6º ano do ensino fundamental.

Pelas descrições das habilidades não é obrigatório o uso de softwares, mas diante do fácil acesso e na diversificação das aulas, com instrumentos atrativos aos alunos, espera-se melhores resultados.

Para a aplicação dessa atividade é necesário antes o desenvolvimento de outras habilidades da BNCC, como a EF06MA16: Associar pares ordenados de números a pontos no plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono; EF06MA18: Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros e EF06MA19: Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

Foram elaboradas duas atividades que usavam homotetias, baseadas nas habilidades da BNCC. Uma das habilidades usando o GeoGebra e outra atividade usando réguas e esquadros.

Na atividade 1, os alunos receberam uma lista com 10 itens para desenvolverem no GeoGebra. Em grupos eles resolveriam cada item e quando todos estivessem terminado fariam a conferência com o professor, que por sua vez, usando um projetor colocava os resustados no quadro fazendo as considerações.

Atividade 1: Homotetia no GeoGebra

1) Selecione a ferramenta “Ponto” e marque cinco pontos: A (2,3), B (4,3), C (3,5), D (0,3) e E (0,6)

2) Selecione a ferramenta “Polígono” e clique nos pontos A, B e C

3) Para fazer a homotetia de ampliação selecionamos a ferramenta “homotetia”, depois o polígono ABC e o ponto D, após isso coloque o número 2 na aba que vai aparecer pedindo o “fator”.

4) Selecione o polígono ABC e o ponto E, após isso coloque o número 0,5 na aba que vai aparecer pedindo o “fator”.

5) Qual polígono vai aparecer?

6) O que acontece quando é colocado o número 2 na aba que aparece depois que é selecionado o polígono e o ponto D?

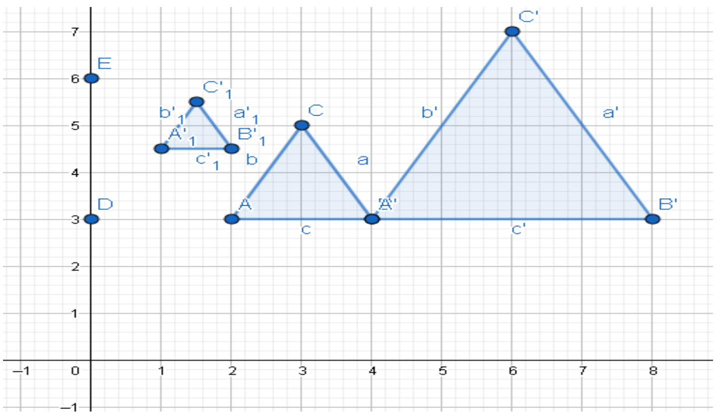
7) Explique o que acontece quando é colocado o 0,5 na aba que aparece depois de selecionado o polígono e o ponto E?

8) Para quais valores colocados na aba teremos uma ampliação de polígono?

9) Para quais valores colocados na aba teremos uma redução do polígono?

10) Qual valor colocado na aba vai manter o mesmo polígono no mesmo local, do mesmo tamanho?

Figura 33: Homotetia no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

No final os alunos devem chegar no resultado apresentado na Figura 33.

Após isso, os alunos poderão criar novos polígonos e fazer novas ampliações e reduções, utilizar outros fatores nas aba que surge ao selecionar o polígono e um ponto, afim de criar conjecturas e enteder o significado do fator.

Atividade 2: Ampliação de mapas

Os alunos receberiam uma impressão de um trajeto percorrido por eles em um passeio. Eles deveriam fazer a ampliação do mapa usando o plano cartesiano.

5.2 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES NO 6º ANO

Dentro do estudo dos polígonos foram estudadas coordenadas cartesianas e os polígonos dentro do plano cartesiano e em seguida a ampliação e redução de polígonos no plano cartesiano. Após todo esse estudo então foi realizado a aplicação do geogebra, com a ampliação e redução de polígonos no GeoGebra, de modo a atender as habilidades EF06MA21 e EF06MA22 , propostas pela BNCC.

Os 19 alunos da turma do 6º ano não conheciam o aplicativo GeoGebra, então tudo era novidade.

Figura 34: Turma do 6º ano no seu primeiro dia com GeoGebra

Fonte: Imagem do autor

Foi preciso uma explicação detalhada de cada ferramenta do GeoGebra, assim diante dos primeiros passos eles contruiram retas, polígonos, ângulos, pontos no plano cartesiano, entre outros. Eles acabaram revisando conteúdos de geometria. Uma das dificuldades no trabalho com GeoGebra no 6º ano é que nem todos os alunos tinham um dispositivo móvel ou um computador para acesso. Assim houve a necessidade de agrupá-los conforme mostra a Figura 34 e os alunos faziam os comandos anunciados pelo professor e o mesmo fazia a explicação na projeção.

No primeiro dia, o trabalho foi executado no GeoGebra, como funcionava cada ferramenta e como se comportava o programa nos dispositivos móveis dos alunos. Em alguns aparelhos o aplicativo era difícil de ser manipulado, visto que, os dispositivos móveis de alguns alunos eram mais simples e os passos para o desenvolvimento de cada tarefa eram trabalhosos. O envolvimento dos alunos era intenso e até mesmo quem não tinha um dispositivo móvel estava contagiado e quando alguém não conseguia efetuar a tarefa, eles se ajudavam, algo que normalmente não é visto durante as outras aulas de matemática.

Figura 35: Alunos comparando os resultados no smartphone com a projeção

Fonte: Imagem do autor

Depois de aprender a utilizar as ferramentas do GeoGebra, cada grupo recebeu uma folha com dez tarefas sobre homotetia. A cada passo que eles faziam, eles colocavam concluido na folha. Duas alunas que não tinham dispositivo móvel executavam essas atividades no notebook do professor, sendo projetado no quadro e conferido pelo professor. Os demais alunos observavam se tinham costruido corretamente nos seus aparelhos conforme mostra a Figura 35.

Durante a ampliação e a redução de polígonos no GeoGebra o que chamou a atenção deles foi a mensagem que aparecia no momento que acionavam o polígono e o ponto do centro da homotetia, eles deviam colocar um número que era o fator, quando colocaram o número dois, o polígono criado foi maior que o original, enquanto quando colocaram o número cinco décimos, o polígono se reduziu. Então começaram a simular outros valores, compreendendo a técnica, mas sem saberem explicar o porquê daquilo. O professor explicou que o fator seria o resultado da divisão entre os lados correspondentes e que futuramente nos próximos anos de estudos eles terão aquilo como uma constante de proporcionalidade nos polígonos semelhantes.

Um trabalho que também pode ser feito é ampliar as figuras utilizando a ferramenta de arraste, não a de homotetia, com a inteção de que os alunos percebessem que o arraste vai transformar a figura, mas deformada em relação à original, não sendo um caso de ampliação, pois a figura original e a transformada não seriam semelhantes. Os alunos dessa turma não tiveram essa percepção.

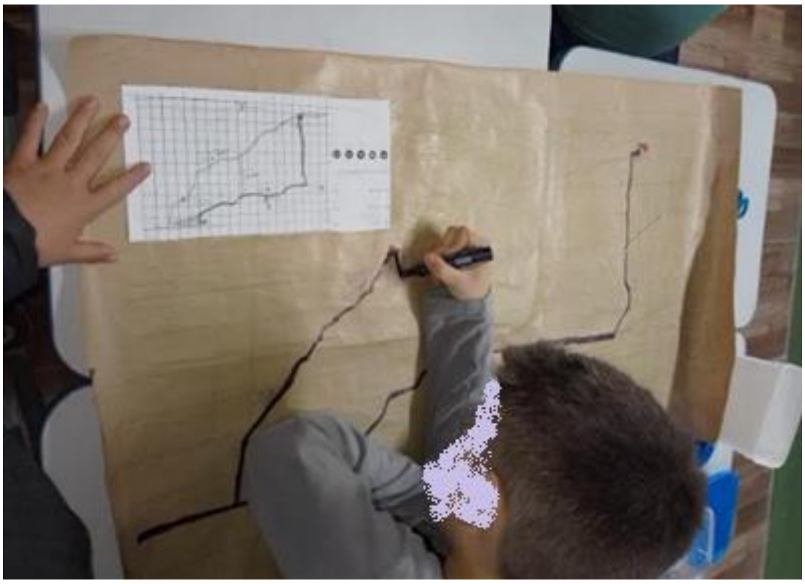
Observa-se que esse trabalho com o GeoGebra no 6º ano proporciona uma maior fixação e compreensão do que é estudado na teoria, além de revisar outros assuntos, como por exemplo, ao contruir retas podemos entender porque as paralelas nunca se cruzam ao reduzir o zoom no GeoGebra e procurar um ponto distante onde por suposição elas poderiam se cruzar.

Também pode-se exemplificar o trabalho com ângulos, ao procurar o valor da abertura entre duas semirretas e ao mover essas semirretas, aumentando e reduzindo o valor do ângulo. Podem entender a ideia de polígonos regulares, que eles têm lados e ângulos internos de mesmas medidas.

As escolas municipais desse município há mais de vinte anos participa de um programa de educação, cujo objetivo é trabalhar interdisciplinarmente um tema de interesse dos alunos, escolhido a partir de um passeio. Durante o trabalho com a ampliação e redução de figuras, surgiu a ideia do professor de colocar no papel o trajeto da escola até um dos pontos turísticos do município, local do passeio dos alunos no projeto. Observou-se durante as aulas que eles estavam na dúvida por qual caminho eles chegariam ao destino. Assim o professor buscou informações e a partir do Google Maps fez a pesquisa do trajeto e propôs a ampliação daquele mapa impresso, dando mais sentido ao conteúdo.

Primeiramente, a turma dividida em grupos recebeu impresso o mapa do trajeto, eles tracejaram uma malha quadriculada e numeraram seus eixos de acordo com o plano catesiano, como é uma turma de 6º ano, só usaram números naturais. A malha era composta por quadrados de 1 centímetro de lado. Depois dessa tarefa cada grupo recebeu um papel pardo onde tiveram que reproduzir a malha, mas com quadrados maiores que 1 centímetro, no caso, 4 centímetros conforme ilustração da Figura 36, visto que, com quadrados maiores o desenho não caberia no papel. É importante deixar os próprios alunos verificarem as possibilidades, o professor apenas mediando e questionando as impossibilidades na produção.

Figura 36: Ampliação de um trajeto usando malha quadriculada



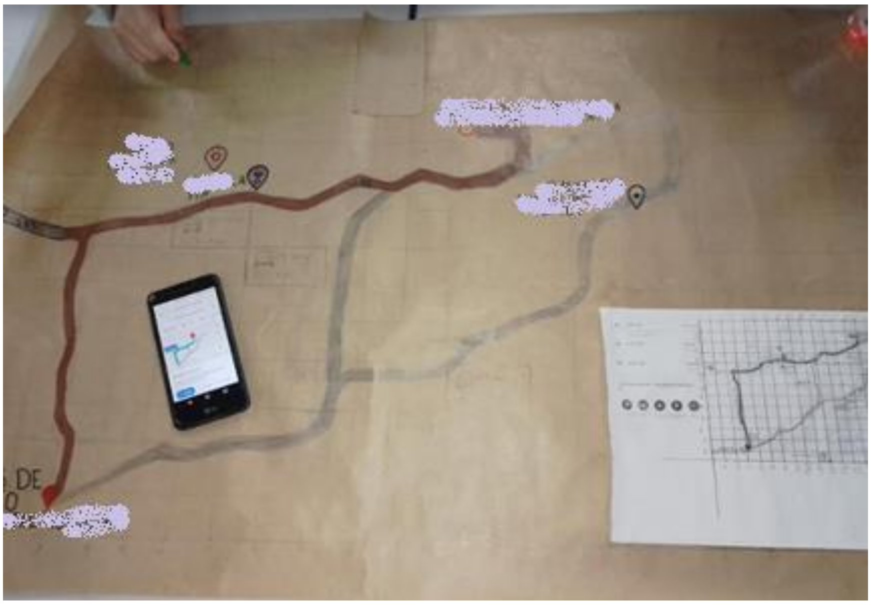
Fonte: Imagem do autor

A ideia é repetir o desenho em cada quadrado de 1 centímetro, no quadrado de 4 centímetro correspondente. Para ver essa correspondência entre as duas figuras, segue-se a numeração colocada nos eixos do plano cartesiano, tanto na malha formada por quadrados de 1 por 1, quanto na malha de 4 por 4.

A grande dificuldade encontrada pelos alunos foi na criação das malhas, as retas que deviam ser paralelas, facilmente viravam transversais. Precisaram de bastante auxílio do professor. Prontas as malhas quadriculadas, o restante do trabalho foi mais tranquilo.

No conjunto, a utilização do GeoGebra, a teoria e a participação no projeto trouxe um envolvimento dos alunos acima do esperado com excelente resultado de ampliação, conforme mostra a Figura 37. Também há uma proximidade maior de aluno/professor pela maior interação no trabalho e um carisma pela disciplina da matemática. E o principal, a boa compreensão do conteúdo.

Figura 37: Resultado de uma das ampliações



Fonte: Imagem do autor

A ampliação dos mapas também pode ser colocado para outras séries, por exemplo, seria uma ótima oportunidade para se trabalhar com o conteúdo de razão e proporção, fator de ampliação ou constante de proporcionalidade e razão entre distância e tempo que podem ser calculadas atravéz das informações contidas no Google Maps.

5.3 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES NO 7º ANO

No 7º ano o GeoGebra é uma importante ferramenta para contemplar as habilidades EF07MA20: Reconhecer e representar, no plano cartesiano, os simétricos de figuras em relação aos eixos e às origens; e EF07MA21: Reconhecer e construir figuras obtidas, por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obra de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

Foram desenvolvidas quatro atividades no 7º ano, nas atividades 1, 2 e 3 envolvendo o uso do GeoGebra os alunos receberam uma lista com vários itens para desenvolverem no software. Em grupos eles resolveriam cada item e quando todos estivessem terminado fariam a conferência com o professor, que por sua vez, usando um projetor colocava os resustados no quadro fazendo as considerações.

Atividade 1: Reflexão no GeoGebra

1) Selecione a ferramenta "Ponto" e marque três pontos: A (1,3), B (2,1) e C (4,2)

2) Selecione a ferramenta "Polígono" e clique nos pontos A, B, C e A;

3) Para fazer a reflexão selecione a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta", clique no polígono formado e no eixo das ordenadas;

4) Clicar na ferramenta "Reflexão em relação a uma reta", clicar no polígono e no eixo das abcissas

5) Selecione a ferramenta "Ponto" e marque o ponto D na origem (0,0)

6) Selecione a ferramenta "Reflexão em relação a um ponto", clique no polígono formado e no ponto D

7) Qual polígono foi formado entre os pontos A, B e C?

8) O polígono ABC formado está presente em qual quadrante?

9) O polígono gerado na reflexão do polígono ABC e o eixo das ordenadas está em qual quadrante?

10) O polígono gerado na reflexão do polígono ABC e o eixo das abcissas está em qual quadrante?

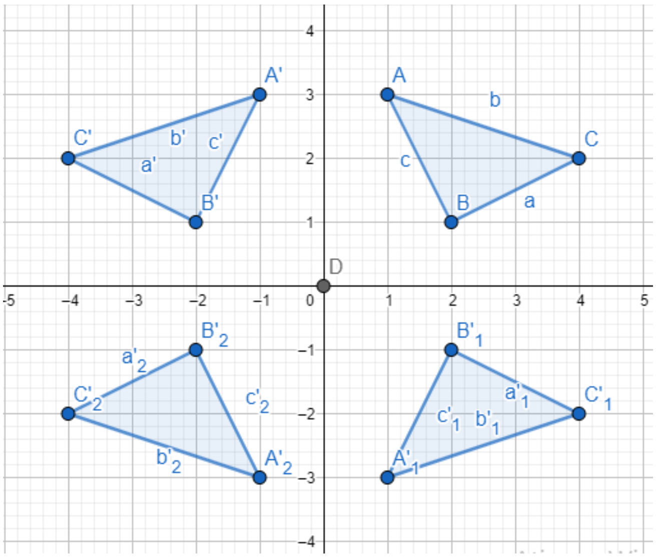
11) O polígono gerado na reflexão do polígono ABC e o ponto D está em qual quadrante?

12) O que você entendeu sobre reflexão?

Sugere-se que cada aluno faça as atividades de forma individual, sendo acompanhados pelo professor. O professor pode de forma simultânea ir fazendo as atividades e projentando os resultados como forma de conferência e abrindo debates nas perguntas, observando-se os acontecimentos da reflexão.

No final das atividades os alunos deveriam chegar no resultado ilustrado na Figura 38:

Figura 38: Reflexão no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade 2: Rotação no GeoGebra (ponto selecionado como parte do polígono)

1) Selecione a ferramenta “Ponto” e marque dois pontos A (2,2) e B(3,2)

2) Selecione a ferramenta “Polígono regular”, selecione os pontos A e B e solicite quatro vértices

3) Selecione a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, clique no ponto A e no polígono regular, selecione 135° no sentido anti-horário;

4) Selecione a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, clique no ponto C e no polígono regular, selecione 180° no sentido anti-horário;

5) Selecione a ferramenta “ Rotação em torno de um ponto”, clique no ponto B e no polígono regular, selecione 360° no sentido anti-horário;

6) Qual foi o polígono gerado?

7) Identitifique o ângulo de 135° na rotação dos polígonos;

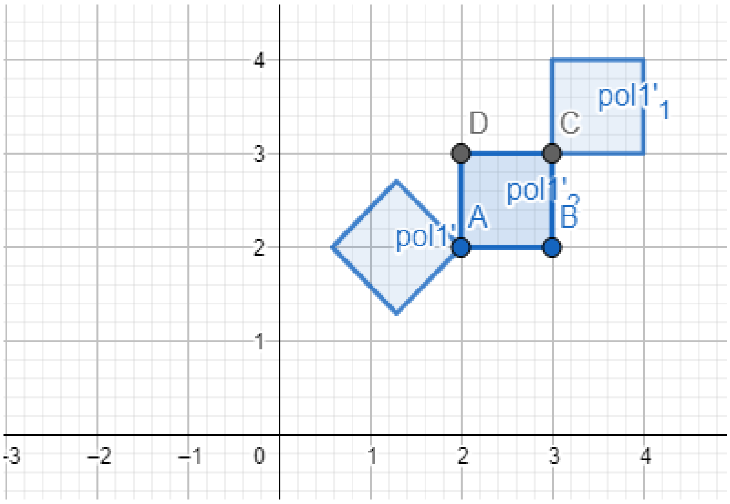
8) O que acontece quando se rotaciona em um ângulo de 180°?

9) O que acontece quando se rotaciona em um ângulo de 360°?

Pode se abrir um debate entre os alunos sobre os acontecimentos da rotação e deixar que simulem para outros ângulos de rotação para observarem padrões e realizarem conjecturas. É interessante também fazer a rotação de 180° no sentido horário e no sentido anti-horário.

No final dos 5 primeiros passos os alunos devem chegar no seguinte resultado ilustrado na Figura 39:

Figura 39: Rotação no GeoGebra com ponto selecionado interno ao polígono



Fonte: Elaborado pelo autor

Atividade 3: Rotação no GeoGebra (ponto selecionado externo ao polígono)

1) Selecione a ferramenta “Ponto” e marque os pontos A (-2,1) e B (-3,1)

2) Selecione a ferramenta “Polígono regular”, selecione os pontos A e B e solicite 5 vértices

3) Selecione a ferramenta “Ponto” e marque o ponto F (-1,1)

4) Selecione a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, selecione o polígono e o ponto F, solicite a rotação de 60° no sentido horário

5) Selecione a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, selecione o polígono e o ponto F, solicite a rotação de 135° no sentido horário

6) Qual foi o polígono regular gerado?

7) O que muda na rotação do sentido horário para o anti-horário?

8) Identifique o ângulo de 60° na rotação realizada:

9) Escreva com suas palavras o que você entendeu sobre rotação:

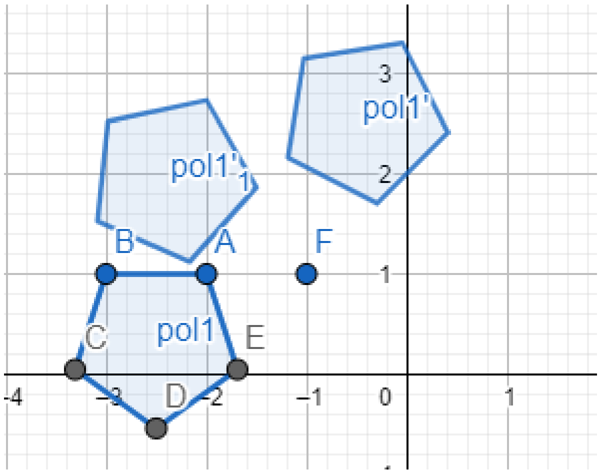
Ao final das atividades os alunos devem chegar no GeoGebra na Figura 40:

Pode-se questionar os alunos em comparação entre as atividades 2 e 3. Quais as diferenças que podem ser notadas ao selecionar um ponto interno ou um ponto externo ao polígono?

Também há o questionamento em relação ao polígono encontrado nas três atividades. Quais eram regulares? Por que eram regulares?

De maneira análoga à essas três atividades, pode-se trabalhar a translação. Claro que vai ser necessário mais tempo e também uma explicação sobre os vetores, pois para transladar no Geogebra é preciso usá-lo.

Figura 40: Rotação no GeoGebra com ponto selecionado exterior ao polígono



Fonte: Elaborado pelo autor

Já na quarta atividade, os alunos deveriam criar uma obra de arte usando as transformações geométricas de rotação, translação e reflexão.

Atividade 4: Obras de arte

Inspirado nas obras de Escher, os alunos deveriam criar moldes e a partir deles usar as transformações geométricas de rotação, translação e reflexão para produzir as suas obras.

5.4 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES NO 7º ANO

A aplicação do conteúdo de transformações geométricas usando GeoGebra no 7º ano iniciou-se com o seguinte questionamento: O que é rotação, reflexão e translação? Por motivo das aulas serem remotas no ano de 2020, eles não tiveram o desenvolvimento da habilidade EF06MA21 no 6º ano e começou-se a trabalhar o aplicativo sem antes ter sido trabalhado a teoria do conteúdo. Em questão ao aplicativo GeoGebra, a maioria dos alunos já tinham usado no 6º ano, somente alguns que estavam com aulas remotas que não o conheciam.

Em resposta à pergunta, muitos alunos lembraram sobre a rotação e translação do planeta Terra ao redor do sol. Com isso, aproveitou-se que tinha um globo terrestre na sala e fez-se os dois movimentos para comparar com a rotação e a translação na matemática, conforme ilustra a Figura 41.

Figura 41: Comparação dos movimentos de rotação e translação feitos pelo planeta Terra

Fonte: Imagem do autor

Depois da pergunta, o professor instalou um projetor conectado à internet e ao GeoGebra online e orientou que os alunos também acessassem nos seus disponíveis móveis, e para que todos pudessem participar, mesmo quem não tinha dispositivo móvel, foram feitos grupos. Assim o professor retomou as funcionalidades do GeoGebra, explicando as principais ferramentas. Ao mesmo tempo auxiliava os alunos à realizarem tarefas nos seus dispositivos móveis. Depois de praticar algumas funcionalidades, o professor distribuiu uma folha com a atividade 1: Reflexão no GeoGebra, e quando ordenados deveriam fazer os passos ali listados. Quando todos os grupos terminavam cada passo o professor fazia no computador e projetava no quadro e todos verificavam se tinham seguidos os passos corretamente, conforme mostra a Figura 42.

Nessa turma do 7º ano, dos 18 alunos, dois são alunos de inclusão, que estão ainda em fase de alfabetização. Mas apesar disso, eles têm dispositivos móveis, e um deles conseguiu fazer as atividades propostas, pois o GeoGebra traz nas suas ferramentas a imagem do que eles querem construir. Como estavam em grupos, quando alguém tinha dificuldade eles se ajudavam.

Cabe destacar que normalmente é necessário levar atividades diferenciadas para os alunos de inclusão. Nestes trabalhos eles fizeram as mesmas atividades que os colegas.

Figura 42: Alunos do 7º ano usando o GeoGebra

Fonte: Imagem do autor

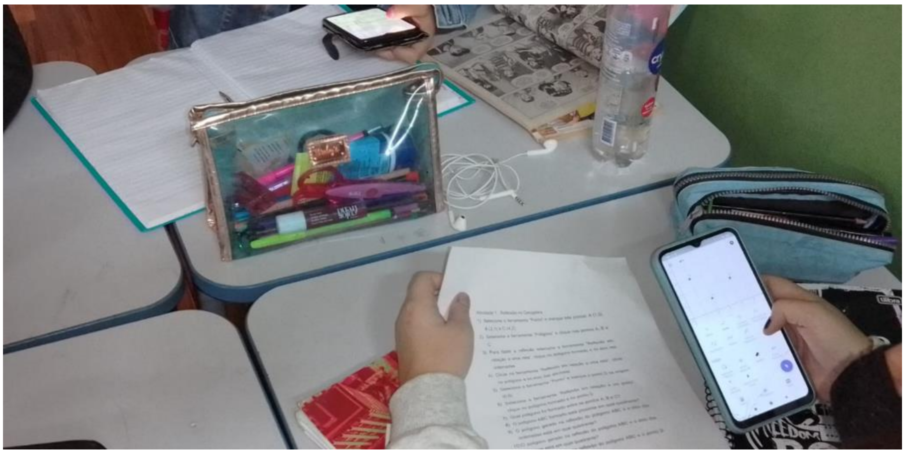
Em geral eles se mostraram bastante motivados e envolvidos, pois além de envolver uma tecnologia, era uma maneira diferente da matemática ser trabalhada e seus resultados saiam iguais ao que o professor fazia, conforme mostra a Figura 43.

Figura 43: Comparando resultado obtido com a projeção

Imagem: Imagem do autor

A partir da folha recebida do professor, os alunos faziam as atividades como mostra na Figura 44, eles colocavam como concluidas e no final eles tinham que responder novamente à pergunta sobre o que era a reflexão.

Figura 44: Construindo no GeoGebra a partir de passos distribuidos pelo professor



Fonte: Imagem do autor

Nessa primeira atividade precisou-se de bastante tempo, porém nas atividades de rotação eles foram rápidos, visto que, compreenderam facilmente o GeoGebra. A turma também tem alguns alunos com distorção série/idade, onde normalmente se mostram contrariados em estudar matemática, mas nestas atividades foram bastante receptivos.

Foram necessários cinco períodos de 45 minutos para a realização das atividades 1, 2 e 3 no GeoGebra, fazendo de forma rápida, porém pode ser feito em mais tempo ou em forma de oficina, em turno invertido às aulas, pois são vários conteúdos de matemática para serem trabalhados durante o ano e para cumprir com todas as habilidades propostas não tem como envolver muito tempo, apesar que, para um melhor aprendizado, quanto mais tempo, melhor o resultado.

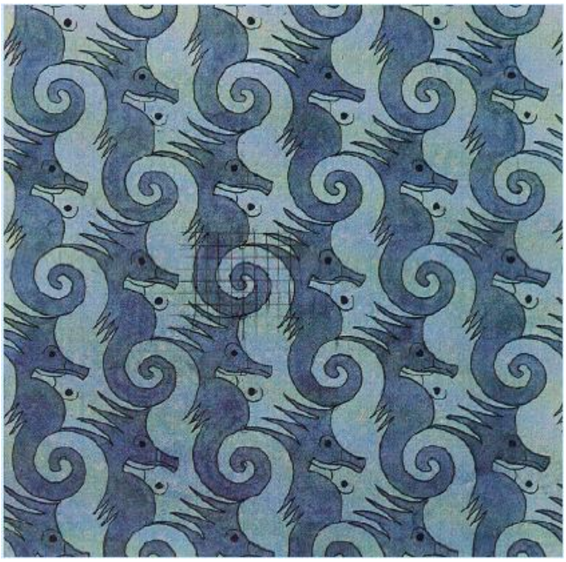
Essa atividade pode ser comprometida se a escola não tiver acesso à internet, pois o GeoGebra no aplicativo não apresenta todas suas ferramentas em comparação à versão online.

No 7º ano dentro das habilidades que a BNCC propõe, tem a habilidade EF07MA21: Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representação planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros; e a partir dessa habilidade, pode-se inspirar nas obras de Escher. Maurits Cornelis Escher (1898-1972) apresentou em sua obras de arte padrões geométricos e simetrias. Em partes de seus trabalhos ele usou isometrias no plano como rotação, translação, reflexão e reflexões deslizantes.

O holandês Escher usava de polígonos para alterar a sua forma surgindo figuras diversas e com ajuda das isometrias resultavam em obras de artes magníficas.

Em padrões de pavimentação com polígonos, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados de formas isoladas, mas no caso de Escher suas pavimentações não apresentam nenhum tipo de polígono, apesar que a chamada técnica de tesselação parte de um polígono, onde se faz cortes na área desse polígono pegando um de seus lados e transladando esse corte para um outro lado do polígono. Isso pode ser feito várias vezes até formar um molde. Com esse molde vai sobrepondo um plano com translações ou rotações até formar a obra, conforme Escher fez na obra intitulada como Cavalo Marinho, ilustrada na Figura 45.

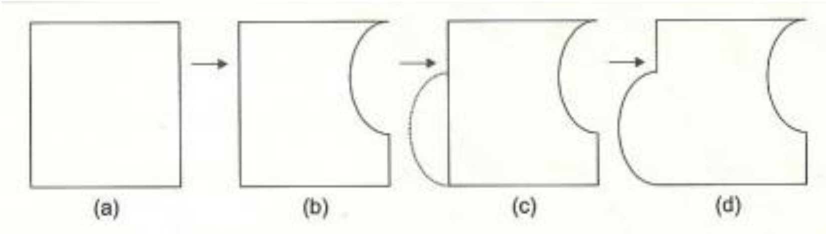
Figura 45: Obra Cavalo Marinho



Fonte: (SAMPAIO, 2018)

Para a prática de pavimentações, serão desenvolvidos obras fundamentados em feitos de Escher, com mesma definição geométrica, porém com nível bem mais simples. A ideia é criar um molde e a partir dele fazer rotações, translações ou reflexões. Esses moldes podem ser feitos de papéis firmes. Primeiramente deve ser cortado um quadrado de 6 ou 7 centímetros e conforme a criatividade pode ser cortado partes que contém apenas um lado do quadrado e transladado para outro lado, formando o molde, conforme ilustrado na Figura 46, que a partir dele são feitos composições, de modo a preencher o plano.

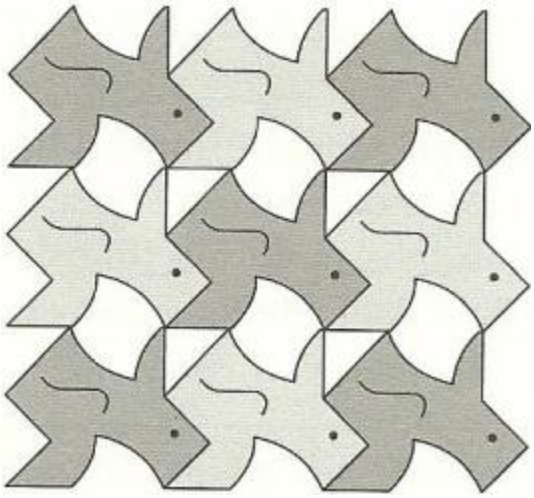
Figura 46: Exemplo de molde para a execução da translação



Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

Fazendo a translação desse molde sobre uma mesma direção e sobrepondo uma folha e colorindo, chega-se à uma obra com os mesmos conceitos utilizados por Escher. Inventando modificações diferentes no molde o resultado pode ser interessante, como é ilustrado na Figura 47.

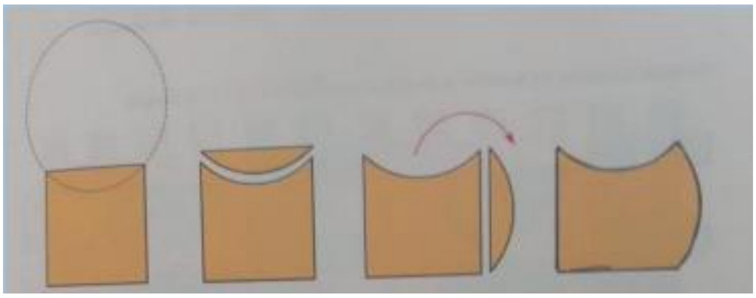
Figura 47: Composição de um mosaico a partir de um molde



Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

Para trabalhar a rotação o processo é semelhante da translação, usa-se um quadrado, e retira partes do quadrado e coloca-se em outras partes do molde. Sugere-se deixar dois lados do quadrado original intacto, para que no momento que é feito a rotação de 90º possa-se criar um mosaico totalmente sobreposto, como ilustra a Figura 48.

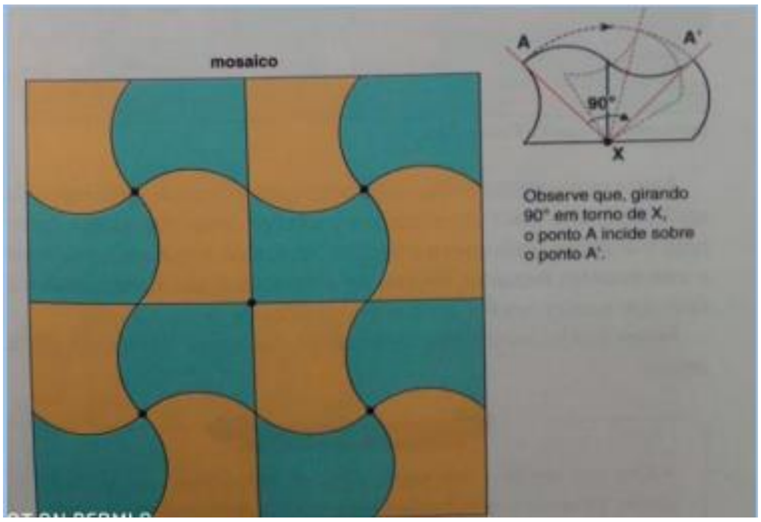
Figura 48: Criação molde para rotação



Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

Com o molde criado, escolhe-se um vértice para a partir dele fazer o giro, sendo o mais apropriado o vértice onde está o ângulo de 90°, pois fazendo a volta completa o ladrilho fica sobreposto totalmente pelo molde, conforme apresenta a Figura 49.

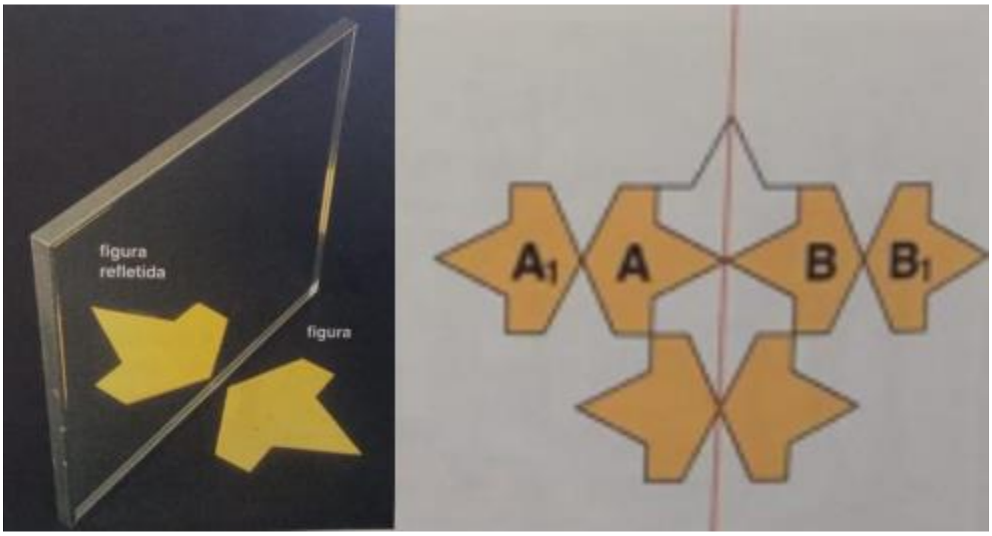
Figura 49: Ladrilho criado pela rotação de um molde



Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

Para fazer a reflexão pode-se a partir de um quadrado de 6 ou 7 centímetros, retirar partes dele e criar um molde, assim como é ilustrado na Figura 50. Dependendo do formato do corte é possível criar um molde que ao sobrepô-los, é possível criar um mosaico infinito, porém é preciso de prática para esse sucesso.

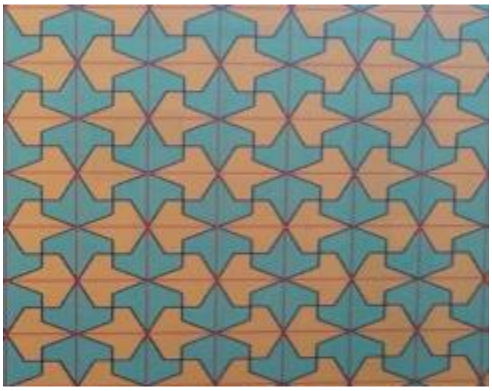
Figura 50: Criação de molde para a reflexão



Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

Como resultado de reflexão podemos obter composições diversas dependendo do modelo de molde criado. Pelo exemplo de molde apresentado, podemos ter uma criação como apresentado na figura 51:

Figura 51: Composição com movimento de reflexão

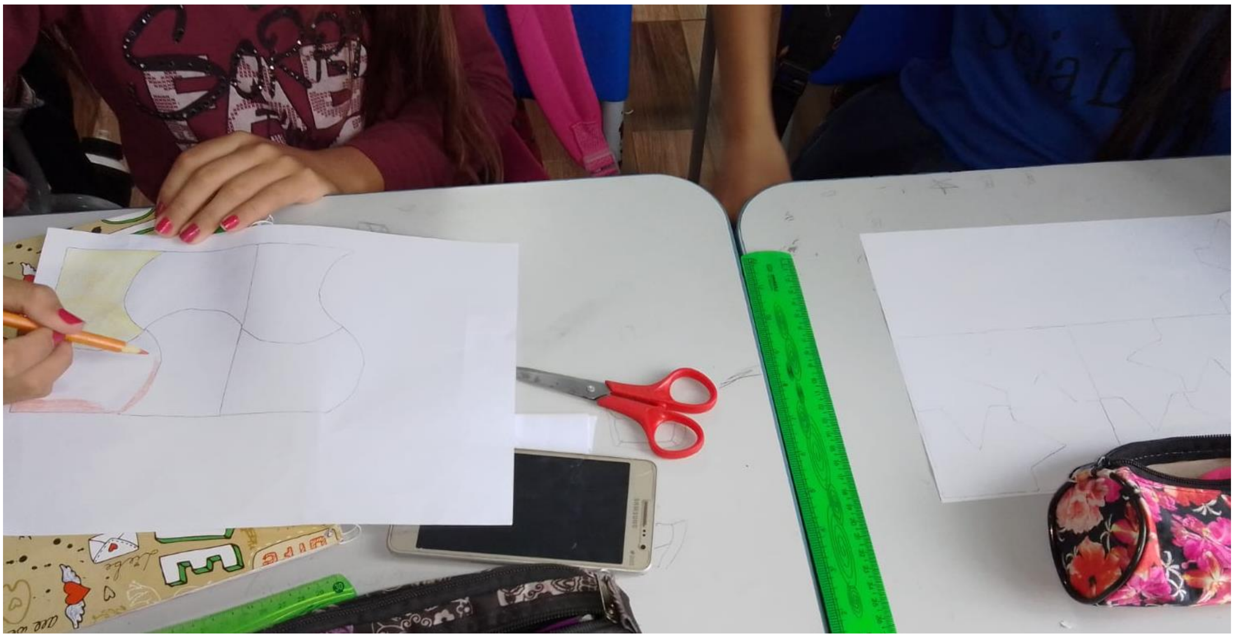


Fonte: (MACROMISSIONEIRA, 2021)

A aplicação das atividades baseadas nas obras de Escher ocorreram na semana após a aplicação das transformações geométricas no Geogebra. Assim eles já tinham ideia dos processos que estavam acontecendo. A cada passo que era dado os alunos identificavam se o movimento realizado era uma rotação, reflexão ou translação. Primeiramente foram apresentados algumas das obras de Escher. Com a técnica também pode-se trabalhar a área de um quadrado, visto que, a arte era iniciada com um quadrado e eram feitos recortes dessa quadrado e posicionado em outras partes do quadrado inicial, tendo no fim, um molde com mesma área do quadrado.

Após isso começou-se os trabalhos, com a primeira atividade para criar uma arte usando a rotação. Eles criaram um molde a partir de um quadrado, logo após fixavam um ponto na figura e rotacionavam 90° no sentido anti-horário. Observou bastante dificudade na construção dos quadrados, precisando o professor explicar que os ângulos internos do quadrado deveriam ser retos, de 90°. Também mostrou-se a importância dos milímetros, pois um à mais ou à menos interferia na forma do quadrado. Alguns alunos também não iniciavam a medida na régua a partir do zero, achando que poderiam iniciar do um.

Figura 52: Produzindo ladrilhos a partir de uma rotação



Fonte: Imagem do autor

Depois de várias orientações, cada aluno usou sua criatividade, conforme mostra a Figura 52 e criou um molde diferente, compondo diferentes desenhos.

Na primeira construção, que foi sobre a rotação, a maioria dos alunos repetiu os cortes no molde de acordo com o que o professor explicou, mesmo sendo informados que poderiam fazer de formas variadas. As variações nos desenhos deles ocorreram de forma significativa na pintura, tendo como resultados obras como ilustrado na Figura 53.

Figura 53: Uma das produções da rotação produzido pelos alunos

Fonte: Imagem do autor

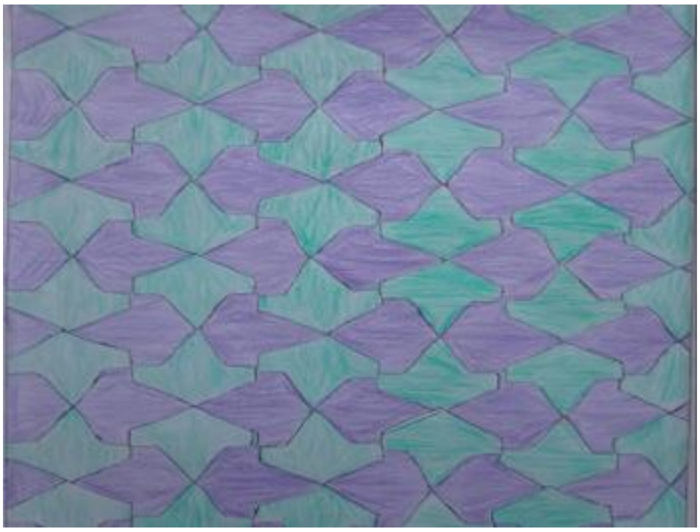
Na translação, os alunos fizeram vários trabalhos diferentes. A criação do molde aconteceu de forma mais rápida.

Figura 54: Uma das obras de translação produzidas pelos alunos

Fonte: Imagem do autor

Para a realização da reflexão, os alunos foram desafiados a criação um molde em que ao fazer as reflexões, as partes vazias do molde criavam uma mesma figura, o chamado mosaico infinito. Eles fizeram as suas tentativas, porém é um processo bastante difícil, necessitando bastante prática. Mesmo assim, alguns alunos conseguiram êxito, conforme apresentado na Figura 55.

Figura 55: Uma das obras de reflexão produzidos pelos alunos



Fonte: Imagem do autor

Após a realização das atividades, surgiu a ideia de realizar essas obras com o auxílio do GeoGebra, porém necessita uma preparação do professor para dominar as técnicas de construção, ficando como sugestão de novas atividades envolvendo as transformações geométricas.

5.5 SUGESTÃO DE ATIVIDADE DE TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA NO 8º ANO

Para o 8º ano, dentro das habilidades propostas pela BNCC também encontra-se uma específica às tranformações geométricas e que coloca o uso de softwares como uma opção de desenvolver o conteúdo. Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica, corresponde à habilidade EF08MA18.

Reconhecer e contruir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica, é a habilidade EF08MA18 da BNCC, que direciona ao conteúdo de transformações geométricas. No 8º ano, poderia ser interessante a aplicação do GeoGebra numa forma diferente do que se trabalha no 6º e no 7º ano, para não se tornar muito repititivo e buscar mais atenção dos alunos.

Sempre é bom recordar o que foi visto em anos anteriores, mas também é necessário um olhar aos conteúdos que os alunos terão no próximo ano. Diante disso, uma sugestão de atividade se dá no uso da malha triangular ou também conhecida como malha isométrica, no GeoGebra. Essa ferramenta está escondida nas configurações, na opção exibir malha. Lá pode ser feito a escolha entre a malha quadriculada, que normalmente é utilizada, ou a malha isométrica. Se faz importante o uso dela, pois no 9º ano, uma das habilidades propostas pela BNCC envolve o seu uso, e o conhecimento dela um ano antes facilita a compreensão dos alunos e o trabalho do professor. “Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva” (BRASIL, 2018, p.321), essa é a habilidade EF09MA17 que deve ser desenvolvida no 9º ano. Corresponde a criação de desenhos em várias perspectivas, entre elas a perpectiva isométrica, que ao invéz de usar malha quadriculada, usa uma malha composta de triângulos equiláteros. Ela é adequada para desenhar paralelepípedos, dando a ideia de profundidade.

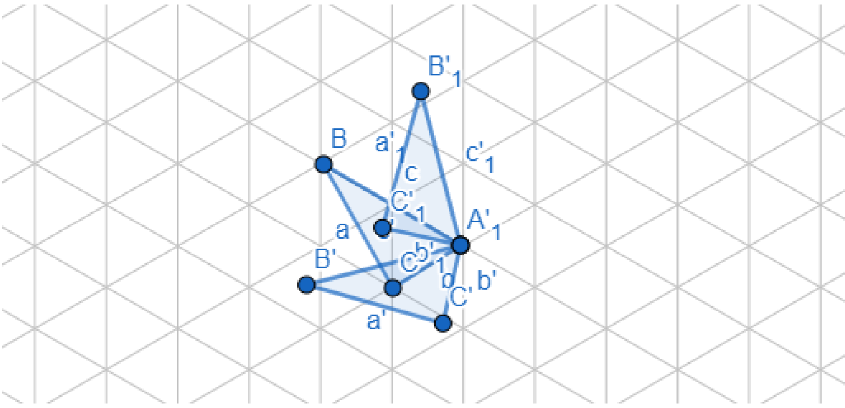
Levar o conhecimento do aluno a existência dessa outra malha trará uma maior ambientação e facilidade para adquirir a habilidade proposta pela BNCC. Porém no 8º ano o trabalho deve envolver as tranformações geométricas. Para isso o professor pode estimular o aprendizado dessas isometrias envolvendo as malhas isométricas e as transformações geométricas.

Propõe-se então a criação de um desenho qualquer, na malha isométrica, e deve-se usar obrigatoriamente nesse desenho a rotação, a translação e a reflexão. É indispensável que o professor de um exemplo, para que os alunos compreendam o motivo do trabalho. Como exemplo de atividade, a criação de uma flor.

Como primeiro passo pode-se começar mostrando o local para acionar a malha isométrica. Após isso, o professor explica como funciona a malha isométrica e segue na contrução.

Para criar a flor, forma inicialmente um triângulo, que será uma das pétalas da flor. A partir desse triângulo, com duas rotações de 45º, uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário a flor vai se desenvolvendo como mostra a Figura 56 .

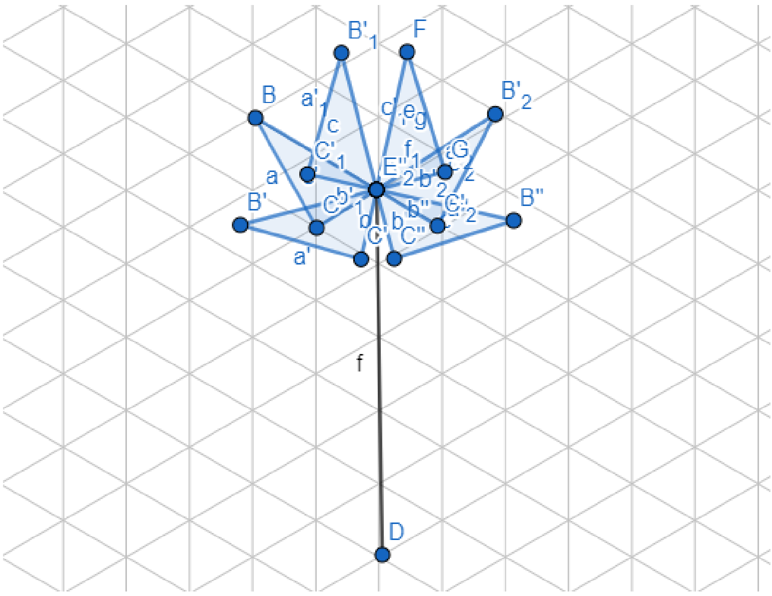
Figura 56: Rotação na malha isométrica



Fonte: Elaborado pelo autor

Após isso, um segmento de reta irá servir de talo da flor e no Geogebra será o eixo de reflexão para formar a outra parte da flor. Para isso seleciona-se a ferramenta reflexão em relação à um eixo, seleciona-se cada triângulo e o segmento criado, dando forma ao desenho como mostra a Figura 57.

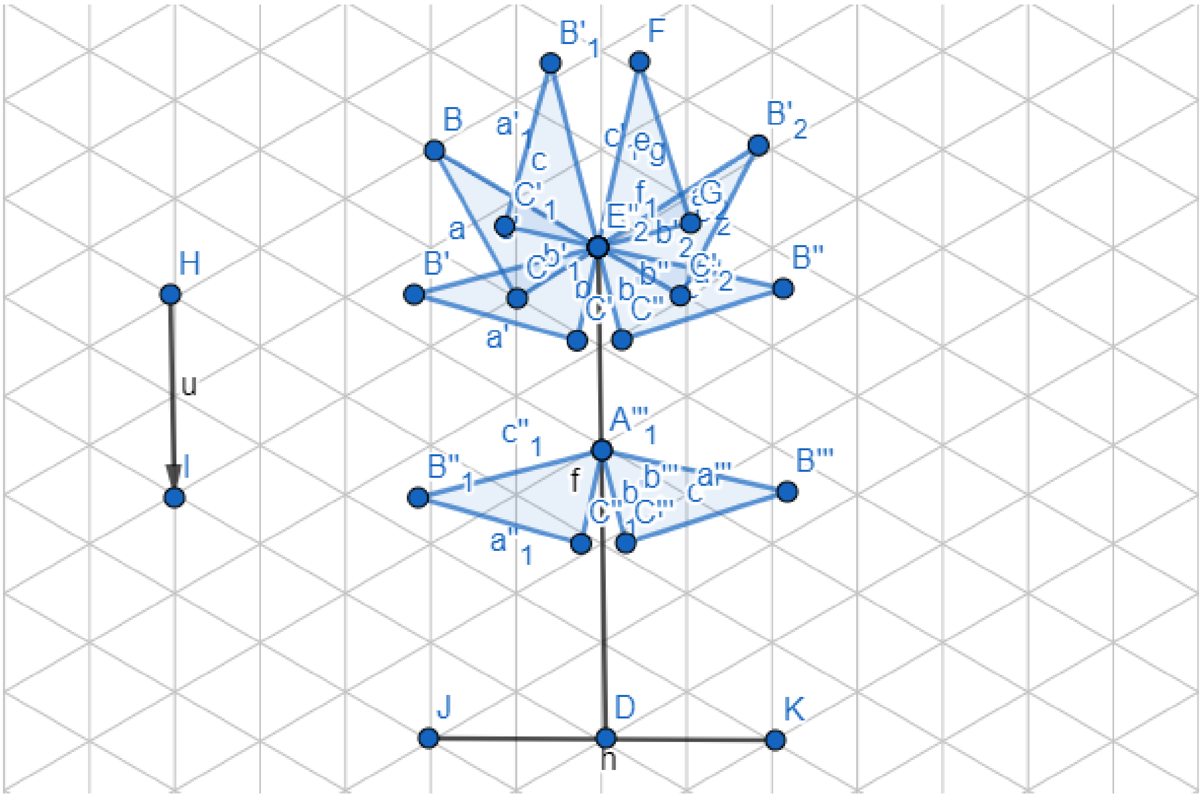
Figura 57: Reflexão na malha isométrica



Fonte: Elaborado pelo autor

Faltando a utilização da translação, deve-se antes criar um vetor, para dar sentido à translação que será aplicada. Assim, seleciona-se os dois triângulos inferiores do desenho e o vetor. O procedimento criará as folhas da flor. Também faz-se mais um segmento que será a base da planta e praticamente se finaliza o trabalho, conforme mostra a Figura 58.

Figura 58: Translação na malha isométrica



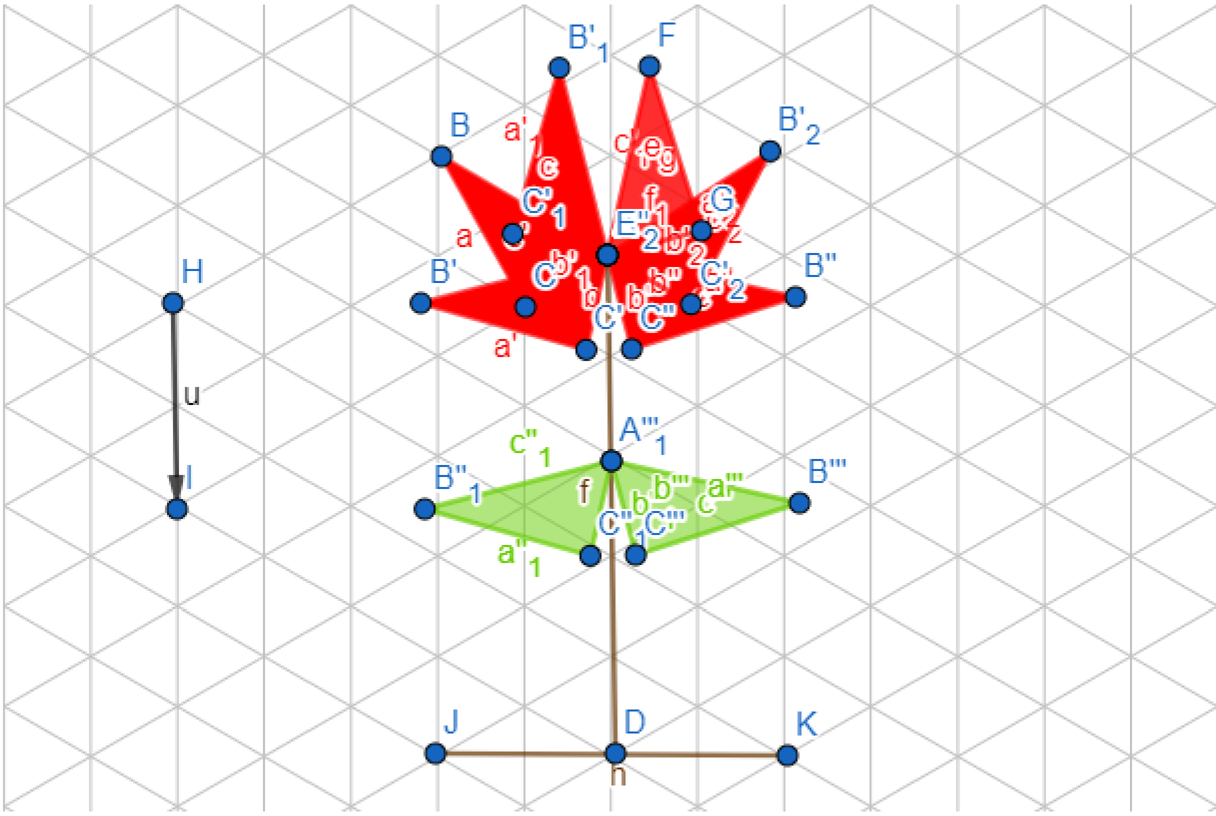
Fonte: Elaborado pelo autor

Para dar um toque final, pode-se colorir a figura, opção disponível no Geogebra. Finalizando o desenho como é ilustrado na Figura 59. Também pode-se imprimir os trabalhos e fazer uma exposição na escola, se alunos de séries anteriores já passaram pelo conteúdo poderão ver o uso das simetrias de uma outra forma, trazendo-lhes a expectativa de no próximo ano aplicar esses conhecimentos.

Também pode-se orientar aos alunos para a criação de um logotipo, ou um desenho relacionado à um tema em projeto na escola.

É importante que durante o processo de criação do desenho se questione os alunos sobre onde que se encontram os resultados da rotação, reflexão e translação, bem como, o eixo de simetria.

Figura 59: Resultado da proposta de aplicação das transformações geométricas



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se também analisar outros conteúdos, como por exemplo, ângulos, posição retivas de retas, tipos de triângulos.

5.6 SUGESTÕES DE ATIVIDADES USANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO 9º ANO

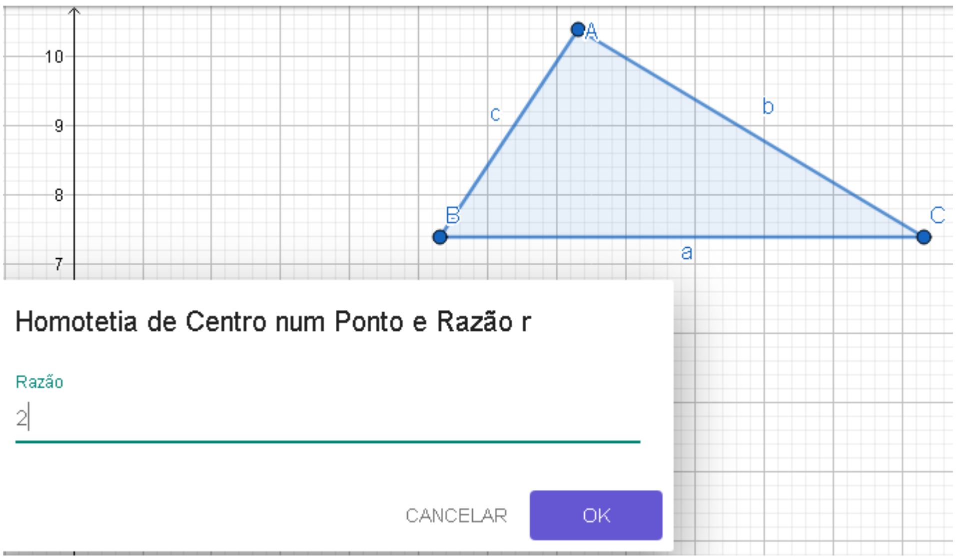
No 9º ano não temos um conteúdo que trabalhe diretamente as isometrias, visto que, nos anos anteriores elas já foram apresentadas para os alunos, de diferentes formas, mas com a intenção de compreender as suas definições. Assim, no 9º ano o uso das transformações geométricas aparecem de forma indireta. Nesse ano de aprendizagem, os alunos irão desenvolver os conceitos de congruência e semelhança de triângulos. Na congruência eles terão que verificar a congruência em triângulos que se diferem apenas na sua posição, sendo eles rotacionados, refletidos ou transladados.

Na semelhança de triângulos, os triângulos terão a transformação geométrica que altera o tamanho dos triângulos, a chamada homotetia. Essas compreensões auxiliarão na aplicação de demonstrações simples, como por exemplo, nas deduções de fórmulas das relações métricas no triângulos retângulo, onde é necessário a rotação e a reflexão dos triângulos, para a fácil verificação da congruência dos triângulos, para que depois possa ser usado o fator da proporcionalidade de seus lados correspondentes, na semelhança dos triângulos. Isso contribui para um processo hipotético-dedutivo, um raciocícinio muito importante na matemática.

Usar o Geogebra no 9º ano juntamente com as transformações geométricas é uma boa prática para fixar o conteúdo de semelhança de figuras. A principal ferramenta que pode ser usada nesse trabalho é a homotetia. O trabalho se dá em ampliar ou reduzir polígonos, de tal forma a verificar as congruências dos ângulos internos, da proporcionalidade dos lados correspondente e do fator ou razão de semelhança entre as figuras.

Pode ser feito de vários formatos as figuras, sendo importante a apresentação do triângulo, polígono muito trabalhado no 9º ano. Primeiramente se solicita a criação de um triângulo qualquer. Após isso, deverão ir na ferramenta de transformação geométrica homotetia e aparecerá uma aba para colocar o fator, conforme mostra a Figura 60.

Figura 60: Homotetia: ampliação de triângulos

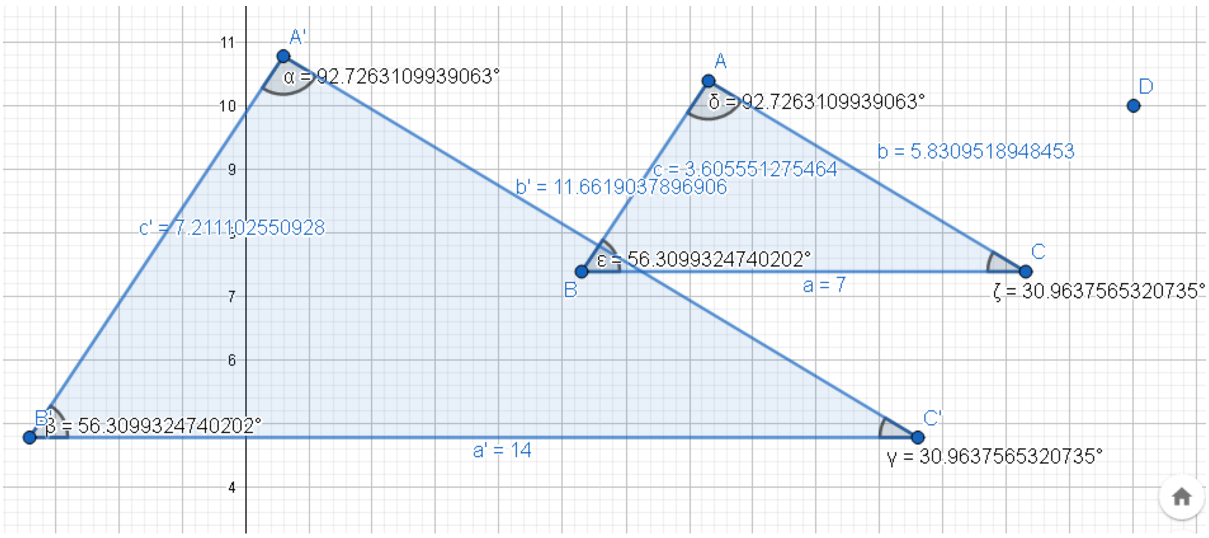


Fonte: Elaborado pelo autor

Um fato que chama a atenção dos alunos quando se usa o GeoGebra é não contar o que vai acontecer a cada processo, deixá-los curiosos e questioná-los sobre o que eles creem que vai acontecer. Após respostas, pode-se indagar se a figura vai aumentar ou diminuir. Muitas vezes a ansiedade pela busca da resposta, vai influenciá-los a testar valores e a conjectural hipóteses.

Após a construção, conforme mostra a Figura 61, pode-se usar as ferramentas ângulos e comprimento, para a verificação da congruência dos triângulos e da compreensão do fator, que é a razão de semelhança, a razão entre os lados correspondentes dos triângulos. Nesse caso o fator 2 dobrou as medidas dos lados do triângulo ABC. É importante a colocação de um exemplo em que se reduz o tamanho da figura e um exemplo em que transforma em um triângulo de mesma medida, para que entendam os valores em que reduz, mantém ou aumentam a figura original.

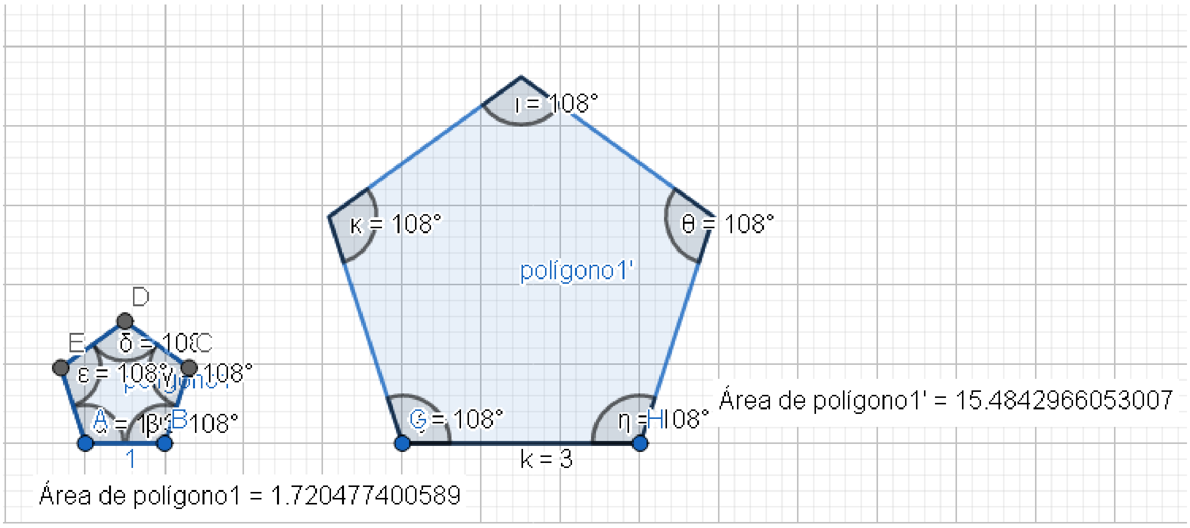
Figura 61: Resultado da ampliação dos triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse trabalho, uma propriedade também pode ser verificada. Tendo dois polígonos semelhantes, a razão entre as medidas da áreas desses polígonos é igual ao quadrado da razão de semelhança desses polígonos. Para isso usa a ferramenta do Geogebra, área. Pode-se em uma outra construção fazer essa verificação, sugere-se a utilização da criação de outros polígonos, como por exemplo, um pentágono regular, conforme ilustra a Figura 62.

Figura 62: Ampliação de um pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

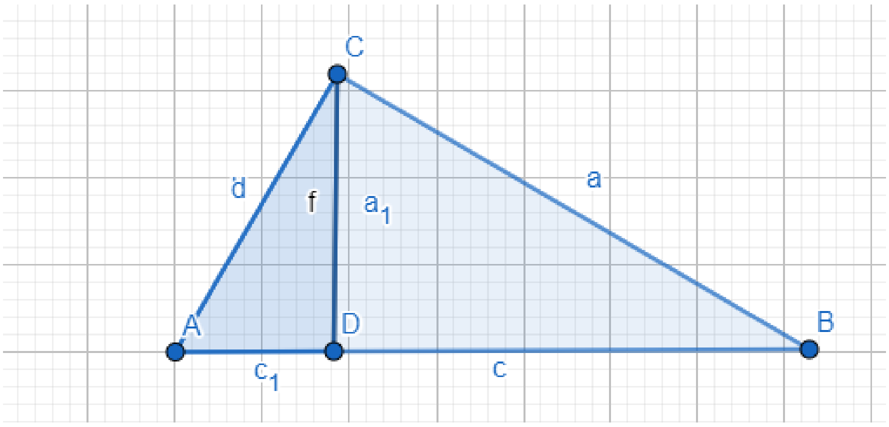
A razão entre as áreas dos pentágonos é igual a 9, que é o quadrado da razão entre os lados correspondentes.

Dependendo do rendimento da turma dos alunos o trabalho pode ser expandido, retomando outros conteúdos, como por exemplo, a soma dos ângulos internos dos polígonos, pois, está se trabalhando com os ângulos e não é um atrapalho retomar outros conteúdos não distantes ao que se está trabalhando.

Um outro trabalho que pode ser desenvolvido se dá no conteúdo de relações métricas. É um trabalho posterior ao de semelhança e de congruência de triângulos. Para a compreensão daquelas outras relações diferentes do Teorema de Pitágoras, como por exemplo, o quadrado do cateto é igual o produto da projeção desse cateto pela hipotenusa, é importante a utilização do material concreto ou algo que o estudante identifique o porquê daquelas fórmulas. Observa-se que o GeoGebra pode ser um facilitador na compreensão das relações métricas no triângulo retângulo. A ideia é a partir da construção triângulo retângulo chegar em triângulos semelhantes e com a proporcionalidade encontrar as relações métricas.

Juntamente com os alunos, o professor vai orientando para a contrução. O primeiro passo é criar um triângulo retângulo, traçar a altura relativa à hipotenusa e traçar um triângulo com lados coincidindo com a altura relativa à hipotenusa, ao cateto e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa, conforme mostra a Figura 63.

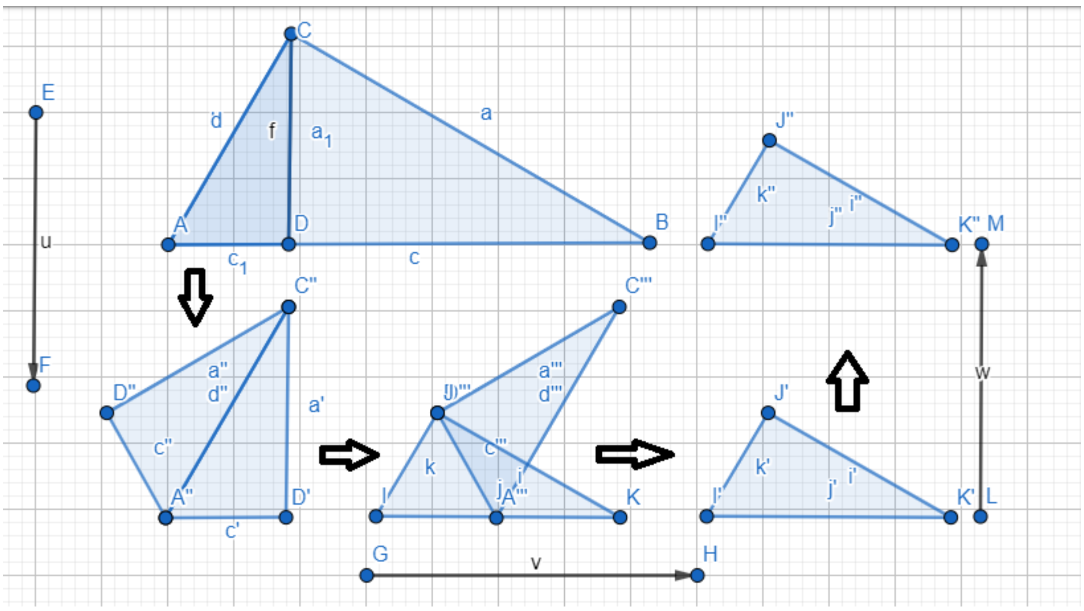
Figura 63: Compreendendo as relações métricas



Fonte: Elaborado pelo autor

Após isso entram as tranformações geométricas para tirar o triângulo menor do interior do triângulo ABC e deixá-lo na mesma posição do triângulo ABC. O processo é trabalhoso, mas o Geogebra sendo usado com os alunos desde o 6º ano tornará um trabalho fácil. O primeiro passo será criar um vetor, para que a partir dele transladamos o triângulo ACD para fora do triângulo ABC. Feito esse passo, o novo triângulo será o A'C'D', que precisará ser refletido em relação ao segmento A'C', formando um novo triângulo A"C"D". Após isso, para ficar melhor visível no Geogebra ele pode ser translado para uma posição limpa da página.

Figura 64: Transformando o triângulo ACD para a mesma posição do triângulo ABC

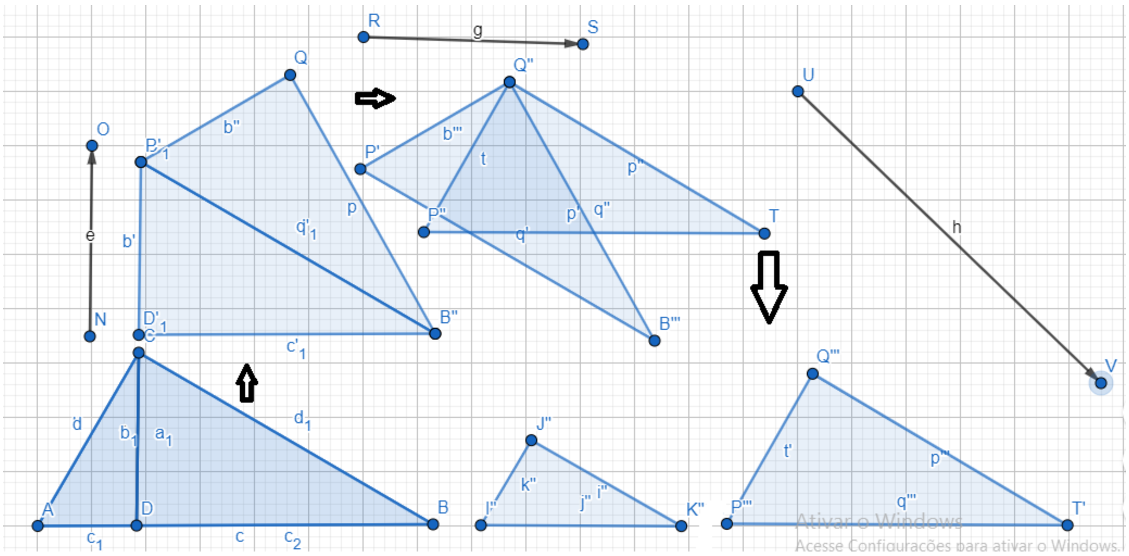


Fonte: Elaborado pelo autor

O próximo passo será uma rotação no sentido anti-horário para o triângulo ficar na mesma posição do triângulo ABC. Por fim, com mais uma translação ele ficará ao lado do triângulo ABC, conforme mostra a Figura 64. A cada transformação geométrica o triângulo vai recebendo novos nome, mas no final eles podem ser redefinidos.

Depois desse trabalho, pode-se ser apagado as transformações e de maneira análoga deve-se externar o triângulo BCD, como mostra a Figura 65.

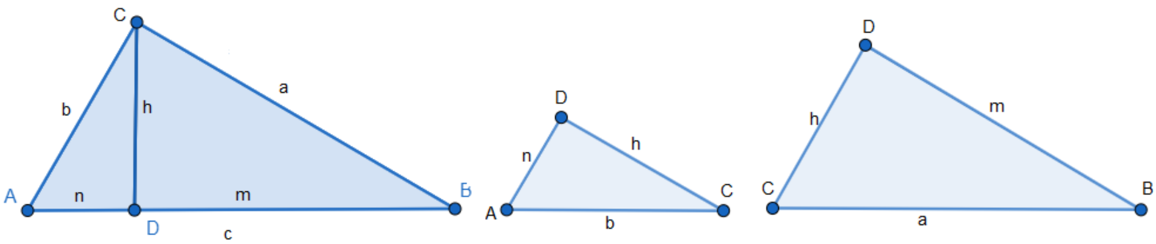
Figura 65: Transformando o triângulo BCD para a mesma posição do triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor

Separados os triângulos, conforme mostra a Figura 66, é interessante renomear os lados do triângulo, os vértices, se possível ainda imprimir os triângulos. Também os alunos podem verificar se as medidas dos ângulos internos dos ângulos são iguais, para verificação da congruência dos triângulos.

Figura 66: Os três triângulos congruentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Sabendo que os lados correspondentes dos triângulos são medidas diretamente proporcionais, chegamos às relações métricas do triângulo retângulo: $h^2=m.n$, $b^2=n.c$, $a^2=m.c$ e $c.h=a.b$.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentro do contexto escolar, muitos assuntos são discutidos, analisados, refutados, atualizados a todo momento, pois o ensino requer algo sério e que tenha o mínimo de erros possíveis para não interferir e prejudicar o aprendizado do aluno. Mesmo assim, não é assumido o compromisso de cumprir de aplicar os conteúdos indicados pelas diretrizes curriculares nacionais, por diversos motivos, entre elas está a relevância em determinados conteúdos e a pouca exploração de outros que tem-se como característica um nível mais complexo de se ensinar e que por um ciclo que se arrasta por anos, incapacita os docentes em desenvolvê-los.

A geometria tem de forma geral muitas propriedades que exigem mais conhecimentos que outras áreas da matemática. De forma mais específica, as transformações geométricas, por serem menos notáveis nas ações cotidianas das pessoas, passam a ser algo sem importância dentro do ensino.

Assim, o presente trabalho buscou dentro de fatos históricos, nas conceitualizações e em aplicações, o mérito das transformações geométricas dentro do ensino da matemática. Desde o período pré-histórico até hoje, representações artísticas com a presença de rotações, translações e relexões retratam a cultura e a beleza dessas produções. Na apreciação do conteúdo, a relevância é significativa na forma em que pode concretizar vários outros assuntos da geometria, como a compreensão de como são abordados os elementos geométricos, por exemplo. Na área estudantil, a compreensão das congruências e semelhanças, que em sequência dão sentido em relações da trigonometria. Fato esse, dimensionado nas principais diretrizes curriculares do País, que há mais de vinte anos abordam, orientando em ações e que atualmente com a chamada Base Nacional Comum Curricular, de uma forma conhecida como ensino em espiral, trabalha em todas as séries de ensino as transformações geométricas, aprofundando a cada ano e tornando ele indispensável para o conhecimento do aluno. Continuando com o PCN, na qual sugere aplicações com o uso de tecnologias digitais, ao ser colocado em prática, eleva ainda mais o conteúdo das transformações geométricas com o uso do software GeoGebra, onde além de ser uma forma atrativa e prática de ensino, atrai a atenção dos discentes, tornando uma aula interativa e memorável, colaborando com as práticas educacionais.

Dentro das aplicações, o desenvolvimento do conteúdo das transformações geométricas inserido nas obras de arte, que também é sugerido na BNCC alia a matemática às habilidades artísticas, podendo assim a serem influenciados por artístas famosos, como Escher. E ainda de forma interdisciplinar, uma ampliação da rota de um passeio na escola, alia o conhecimento das transformações geométricas com conhecimentos de geografia, ciências, língua portuguesa e até mesmo outros conteúdos da matemática, como razão e proporção.

Tudo o que é desenvolvido na escola tem sua importância, mas a execução deste trabalho sistematiza que o conteúdo matemático das transformações geométricas não deve ser menosprezado diante dos demais conteúdos e que tem papel fundamental no conhecimento matemático. Pode ser que as aplicações apresentadas não tenham o mesmo efeito em todas as escolas, em todas as turmas, mas poderá deixar marcas significativas aos alunos.

O uso de simetrias desde períodos pré-históricos, passando por várias gerações, vários lugares do planeta, por artistas renomados, pelas principais diretrizes curriculares mostra o quanto é importante as transformações geométricas. De forma mais específica, dentro da BNCC as isometrias e a homotetias fazem um caminho nas séries finais do ensino fundamental não só da compreensão das ideias de congruências e semelhanças, mas auxilia nas construções de outros conteúdos da matemática.

Diante disso, esse trabalho trouxe para o autor a percepção da grande importância que esse conteúdo tem no ensino da matemática, sendo indispensável e que proporciona aulas interessantes ao aliá-la com as tecnologias digitais.

Espera-se que mais docentes sintam-se inspirados a explorar esse tema, tanto quanto os demais conteúdos da matemática e que continuem a produção de aplicações práticas, para que as transformações geométricas sejam facilmente compreendidas e de resultados significativos aos estudantes.

REFERÊNCIAS

Arte histórica e contemporânea. Disponível em: < https://www.arteeblog.com/2015/08/luiz-sacilotto-sua-arte-e-sua-historia.html >. Acessado em 15 dez. 2021

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília: MEC, 1996

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: matemática**. Brasília: MECSEF, 1998

COSTA, Belmiro; RODRIGUES, Ermelinda. **Novo Espaço – Matemática – 8º ano.** 2012. Porto, PT: Porto Editora.

DODGE, C.W., **Euclidean Geometry and Transformations.** New York, 1972.

EUCLIDEAN geometry – homothety. Disponível em: < https://brilliant.org/wiki/euclidean-geometry-homothety/ >. Acesso 12 jan. 2022

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFISSIONAIS DA EDUCAÇÃO DA REGIÃO MACROMISSIONEIRA. 2021, Cerro Largo, RS, Universidade Federal Fronteira Sul

LIMA, E.L., **Isometrias**. SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

MABUCHI, S.T., **Transformações geométricas: de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores.** 2000. 1 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2000.

PAVANELLO, R.M., **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Campinas. Revista Zetetiké, nº 1, p. 16, 1993

PINHO, J.L.R; BATISTA,E.; CARVALHO, N.T.B. **Geometria I.** Florianópolis, SC, 2010.

RIO GRANDE DO SUL. **Referencial Curricular Gaúcho**. Secretaria de Estado da Educação: Porto Alegre, 2018

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da Matemática, 7º ano.** 2018. São Paulo, SP: Saraiva