UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

DOMINGOS DA SILVA E SILVA

UM ESTUDO DO CONCEITO DE PROPORCÃO VIA FUNÇÕES REAIS

BELÉM
2022

DOMINGOS DA SILVA E SILVA

UM ESTUDO DO CONCEITO DE PROPORCÃO VIA FUNÇÕES REAIS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof°. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzmán

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Domingos da Silva E.
Um Estudo do Conceito de Proporção Via Funções Reais / Domingos da Silva E Silva. — 2022.
55 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzmán
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2022.

1. Proporção. 2. Funções Reais. 3. Discussão de Conceitos. 4. Documentos Normativos. 5. Aplicações. I. Título.

CDD 510.71

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

DOMINGOS DA SILVA E SILVA

UM ESTUDO DO CONCEITO DE PROPORCÃO VIA FUNÇÕES REAIS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFPA como um dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rogelio D. B. Guzmán

Prof^{o}. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzman (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Juaci Picanço da Silva

Prof^{o}. Dr. Juaci Picanço Da Silva
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof^{o}. Dr. Anderson David De Souza Campelo
Universidade Federal do Pará (UFPA)

DATA DA AVALIAÇÃO: 16/12/2022

CONCEITO: EXCELENTE

Dedico este trabalho a minha família, em especial a Dona Tereza, minha querida mãe (*in memorian)*.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela vida, saúde e curiosidade, os quais possibilitam seguir em frente.

À minha família, pelo incentivo que me deram e dão nesta minha jornada acadêmica, em especial, a minha mãe Tereza Silva, pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis, sem o qual meus caminhos seriam mais espinhosos.

À minha esposa Tatiane e filhos Kevin, Willard e Hendrik, pelo amor e carinho, os quais preenchem meu o ser de paz e alegria.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzman, pela orientação e valiosas sugestões em todas as fases de preparação deste trabalho.

Aos professores, Dr. Juaci Picanço Da Silva e Dr. Anderson David De Souza Campelo por terem aceitado participar da banca de defesa deste trabalho, contribuindo assim para minha formação.

Aos amigos que fiz nesta longa jornada rumo ao conhecimento, por terem me proporcionado alegria e desenvolvimento, dentre eles, toda minha turma do PROFMAT-UFPA, a minha turma do bacharelado em Física-UFPA, em especial ao Sr. Carlos Augusto, Diego Douglas, Shirley Martins, Francisco Júnior, Marlon Silva e Jorge Silva.

À todo o corpo de funcionários do PROFMAT-UFPA, pela ajuda para cumprir mais esta etapa acadêmica, em especial aos professores, sempre dedicados.

"A desvalorização do mundo humano aumenta em proporção direta com a valorização do mundo das coisas."

Karl Marx

RESUMO

Não é difícil encontrarmos alunos que não têm ideia do que consiste o processo de medir, o que é uma grandeza e, principalmente, quando que duas grandezas são proporcionais. Assim, nosso objetivo geral é desenvolver o conceito de proporção via funções reais, tentando, na medida do possível, esclarecer estes pontos, trilhando, portanto, um caminho que o professor do ensino básico possa seguir na hora de ensinar estes conteúdos. Para isso, faremos inicialmente uma apresentação e discussão dos conceitos de medida, grandeza e razão, os quais são pré-requisitos para o estudo de proporção. Esta apresentação e discussão é feita no contexto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no intuito de termos um embasamento nos documentos normativos no que diz respeito aos processos de ensino e aprendizagem destes e, ainda, verificarmos quais as habilidades que devem ser desenvolvidas nos alunos relativamente a cada um desses conceitos dentro de cada nível de ensino nos quais são introduzidos. Em seguida, faremos o estudo central deste trabalho, isto é, desenvolveremos o conceito de proporção via funções reais. O percurso que faremos, desde os conceitos de medida, grandeza e razão até o conceito de proporção via funções reais, será feito a partir de revisão bibliográfica, procurando desenvolver os conceitos de medida, grandeza e razão de modo que o professor possa utilizá-los desde o 6º ano do ensino fundamental. Quanto ao desenvolvimento do conceito de proporção via funções reais, este só pode ser utilizado a partir do 1º ano do ensino médio, uma vez que é no ensino médio que o conceito de função é abordado formalmente. Por fim, exploramos as aplicações do conceito de proporção na Matemática e na Física.

Palavras-chave: Proporção. Funções Reais. Discussão de Conceitos. Documentos normativos. Aplicações.

ABSTRACT

It is not difficult to find students who have no idea what the process of measuring consists of, what a quantity is and, mainly, when two quantities are proportional. Thus, our general objective is to develop the concept of proportion via real functions, trying, as much as possible, to clarify these points, treading, therefore, a path that the teacher of basic education can follow when teaching these contents. For this, we will initially present and discuss the concepts of measurement, magnitude and ratio, which are prerequisites for the study of proportion. This presentation and discussion is made in the context of the National Curricular Parameters (PCNs) and National Common Curricular Base (BNCC), in order to have a foundation in normative documents with regard to their teaching and learning processes and, also, to verify which the skills that must be developed in students in relation to each of these concepts within each level of education in which they are introduced. Then, we will do the central study of this work, that is, we will develop the concept of proportion via real functions. The path we will take, from the concepts of measurement, magnitude and ratio to the concept of proportion via real functions, will be based on a bibliographical review, seeking to develop the concepts of measurement, magnitude and ratio so that the teacher can use them since the 6th year of elementary school. As for the development of the concept of proportion via real functions, this can only be used from the 1st year of high school onwards, since it is in high school that the concept of function is formally addressed. Finally, we explore the applications of the concept of proportion in Mathematics and Physics.

Keywords: Proportion. Real Functions. Discussion of Concepts. Normative documents. Applications.

Sumário

Introdução

A Teoria das Proporções foi criada por Eudoxo, matemático e astrônomo ligado à escola de Platão, e exposta no Livro V dos Elementos de Euclides (ÁVILA, 2006). Já a palavra "função" foi utilizada pela primeira vez por Leibniz (1646-1716) para se referir a uma fórmula matemática simples que expressasse a natureza exata de uma relação (COURANT e ROBBINS, 2000). Neste trabalho, relacionamos estes dois importantíssimos conceitos matemáticos, usando um para desenvolver o outro.

A justificativa para escolhermos o conceito de proporção para desenvolvermos nosso trabalho, está relacionada ao fato deste conceito ser básico em Matemática, usado amplamente no dia a dia e, ainda assim, termos alunos que não têm minimamente clara a ideia do que consiste o processo de medir, o que é uma grandeza e, principalmente, quando que duas grandezas são proporcionais. Então nosso objetivo geral é desenvolver o conceito de proporção via funções reais, tentando, na medida do possível, esclarecer estes pontos.

O trabalho está estruturado em 4 capítulos. No capítulo 1, fazemos uma exposição e discussão sobre os conceitos de medida, grandeza e razão, os quais costumam gerar confusão quanto "ao que são", principalmente pelos os alunos dos 6º e 7º anos do ensino fundamental, níveis nos quais estes conceitos são introduzidos. Analisamos como alguns livros do ensino fundamental, especificamente [5, 10, 6, 11], introduzem esses tópicos e tentamos, a partir destes, fazer sugestões sobre a introdução desses conceitos. É importante frisar que nosso objetivo não é fazer um julgamento dessas referências no que diz respeito às formas de introdução desses tópicos, mas tão somente nos apoiarmos nestes para um melhor desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 2 é onde temos os conceitos centrais deste trabalho; desenvolvemos o conceito de proporção via funções reais. Tal desenvolvimento tem como referências [15, 18, 19, 21]. No capítulo 3, mostramos algumas aplicações do conceito de proporção na Matemática e também na Física. Por fim, temos as considerações finais e as referências bibliográficas. Várias de nossas figuras foram feitas com a ajuda do *software* Geogebra.

Capítulo 1

Documentos Normativos

Neste capítulo, fazemos uma exposição e discussão sobre os conceitos de medida, grandeza e razão. Esta discussão é feita no contexto dos PCNs e BNCC. Analisamos como alguns livros do ensino fundamental, especificamente [5, 10, 6, 11], introduzem esses tópicos e tentamos, a partir destes, fazer sugestões sobre a introdução desses conceitos.

1.1 PCNs

Os PCNs são um conjunto de documentos elaborados pelo governo federal para servir de norte aos professores no que tange, dentro de cada nível de ensino, aos conteúdos, objetivos e processos de avaliação. Dentre os vários objetivos dos PCNs, [8], para o ensino fundamental, nosso trabalho está alinhado com: "estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares".

Os conteúdos a serem trabalhos aparecem selecionados em blocos, os quais são: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Uma observação é feita, no bloco Números e Operações, que ajuda a visualizar, nos PCNs, a localização do nosso trabalho:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da Álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problemas, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação.
>
> Esse encaminhamento da a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (PCNs, 1998, p.50)

Com isso, queremos mostrar que mesmo este trabalho tendo sido preparado para o professor do ensino médio, ainda assim pode ser lido e compreendido por alunos a partir do 6º ano do fundamental, contanto que cada aluno leia os capítulos e seções referentes ao seu nível de ensino.

Ainda em relação a conteúdos, vemos, no bloco Grandezas e Medidas, o que se espera repassar aos alunos sobre conteúdos deste bloco, no qual estão inseridos quase todos os conceitos tratados neste trabalho.

> Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica etc.). Será explorada a utilização de instrumentos adequados para medi-las, iniciando também uma discussão a respeito de algarismo duvidoso, algarismo significativo e arredondamento. Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física.
>
> Além disso, os conteúdos referentes a grandezas e medidas proporcionarão contextos para analisar a interdependência entre grandezas e expressá-la algebricamente. (PCNs, 1998, p.52)

Como um dos nossos objetivos é fazer uma discussão relativamente aprofundada dos conceitos de medida, grandeza e razão, olhemos, agora, o que a BNCC diz a respeito desses conteúdos e com base nisso faremos nossa discussão.

1.2 BNCC

Antes de começarmos a falar de habilidades da Base Nacional Comum Curricular, BNCC, é importante, assim como fizemos com os PCNs, dizermos o que é a BNCC. É importante também deixar claro ao leitor que esta seção não se propõe a debater a plausibilidade, ou não, da BNCC, mas tão somente a expor as habilidades que devem ser desenvolvidas nos alunos relativamente aos conceitos de medida, grandeza e razão para que, assim, possamos fazer a discussão a qual nos propomos. Permitamos que a própria BNCC se apresente:

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BNCC, [s.d.], p. 7)

1.2.1 Medidas e Grandezas

Aqui fazemos uma exposição das habilidades a serem desenvolvidas nos alunos com relação aos conceitos de medida e grandeza; analisamos como as referências [5, 10] introduzem esses conceitos e tentamos, a partir desta exposição, contribuir para os processos de ensino e aprendizagem destes conceitos.

A primeira habilidade (EF06MA24)[1] da Unidade Temática[2] Grandezas e Medidas diz:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. (BNCC, [s.d.], p. 303)

Note que, em se tratando da primeira habilidade referente a Unidade Temática Grandezas e Medidas, seria interessante haver algo a respeito do processo de medir em si; mas não há. A mesma falta sentimos em relação ao conceito de grandeza. A palavra “medida” aparece pela primeira vez, dentro de uma habilidade, em (EF06MA27), a qual diz: “Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.” Porém, novamente, não vemos nada relativo ao processo de medir em si.

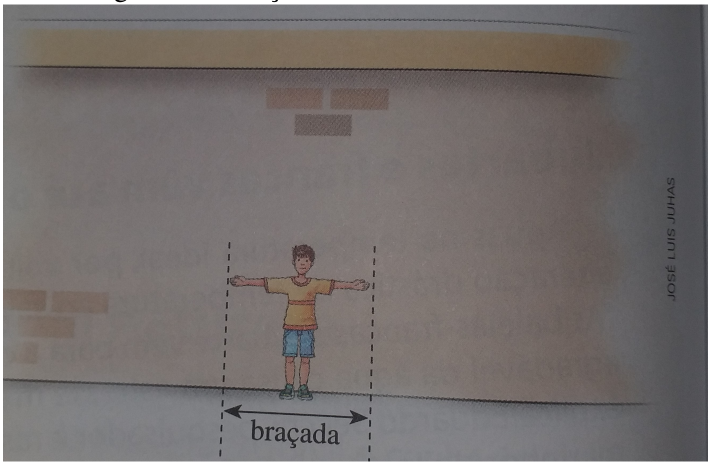
Vamos ver agora como [5, 10] introduzem esses conceitos. Para [5] introduzir esses conceitos, exibe, na primeira seção do capítulo dedicado a este assunto, uma reportagem a qual aborda a noção intuitiva que alguns animais têm no que diz respeito a algumas medidas específicas, como “medida de temperatura” e “medida de distâncias percorridas”. Na seção seguinte, intitulada “Conhecendo algumas unidades de medidas de comprimento”, coloca uma situação em que duas pessoas terão que “medir um comprimento” e, para isso, terão que compará-lo com outro

[1] Cada partícula dentro do código tem um significado. Por exemplo, E significa ensino; F, fundamental; 06, sexto ano; MA, Matemática e 24 indica a posição da habilidade dentro da componente curricular Matemática no 6º ano.

[2] A BNCC divide os conteúdos em grandes áreas da Matemática, as quais denomina de Unidades Temáticas.

comprimento, tomado como unidade de medida. Eles terão que medir o "comprimento de um muro" e para isso adotam como unidade de medida a "braçada".

Figura 1.1: Braçada como unidade de medida



Fonte: Referência [5]

Analisemos, agora, como [10] aborda esses conceitos. [10] começa fazendo uma série de perguntas, como, por exemplo,

1) Qual é a última "coisa" que você se lembra de ter medido?

2) Que instrumentos são usados para medir o comprimento? E para medir o tempo?

3) Se você não tivesse instrumentos de medida, como faria para medir o comprimento da sala de aula?

A pergunta 1) pressupõe, claramente, que o aluno, diante de uma situação a qual tenha que executar o processo de medida, reconheça-o como tal. Também, vemos a referência que [10] faz ao conceito de grandeza ao destacar entre aspas a palavra coisa. Já 3) tem por objetivo fazer com que o aluno lembre de que, não dispondo de "instrumentos padrões de medida", "qualquer outro objeto" serve, onde, para uma característica desse outro objeto será atribuído o valor 1, definindo-o como unidade de medida. Continuaremos esta discussão mais adiante.

Depois, adentrando de fato no capítulo, temos a Seção 1, onde [10], assim como [5], faz uma contextualização para, assim, introduzir os conceitos do capítulo, onde dentre outras coisas, diz: "Para construir uma piscina, é necessário medir comprimentos, superfícies e volumes." Em seguida, na Seção 2, tem-se a seguinte imagem:

Figura 1.2: Grandezas, unidades de medida e instrumentos de medida

Fonte: Referência [10]

Vemos que [10] dá exemplos de "instrumentos de medida", "unidade de medida" e "grandeza". De acordo com [10], é provável que o aluno já tenha tido contato com os conceitos que estão na figura 1.2, uma vez que fazem parte dos currículos de anos anteriores ao 6º, conteúdos que têm relação com esses conceitos; porém, o que gostaríamos de saber é se o aluno do 6º ano do fundamental, dentro de suas limitações, consegue abstrair a ideia do processo de medir em si e do de grandeza, pois os documentos normativos não parecem apontar para uma resposta positiva para nossa pergunta. Ao contrário dos documentos normativos, na Seção 3, [10] dá uma definição explícita do que é medir: "Medir é comparar duas grandezas de mesma espécie, verificando quantas vezes uma (a que está sendo medida) contém a outra (unidade de medida).", o que, a nosso ver, responde positivamente a nossa pergunta. Vale ressaltar que esta postura não foi adotada por [5].

Tentaremos agora dar nossa contribuição quanto aos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de medida e grandeza, descrevendo por meio de um exemplo uma possível introdução aos conceitos, o que acreditamos ser uma boa metodologia. Mas, antes de começarmos, gostaríamos de frisar dois pontos: primeiro, estamos cientes das limitações de um aluno do 6º ano do fundamental; segundo, assim como daremos no capítulo 2 um tratamento funcional às Proporções, o conceito de medida também pode receber tal tratamento. Este tratamento foge aos objetivos deste trabalho. Aos leitores curiosos em contemplar tal abordagem, indicamos [3, 14].

Através de um exemplo, tentaremos explicar o que são medida e grandeza. Imagine que você tem um pedaço de barbante e queira saber o “comprimento” deste, mas a única coisa que você imagina no momento para usar no processo de medir é sua mão (palmo). Então você estica esse barbante e começa a verificar quantas vezes o seu palmo “cabe” no barbante. Ao final deste processo, você percebe que o seu palmo cabe dez vezes no barbante. O processo que acabamos de descrever é, simplificadamente, o processo de medida. Então o que é medir? Medir é “pegar” dois objetos (no nosso exemplo são o barbante e o palmo) e comparar alguma propriedade/característica que eles têm em comum (no nosso exemplo, essa característica é a extensão desses objetos). Essa comparação é feita pegando um desses objetos (o qual chamamos de instrumento de medida) e definindo um valor numérico para sua propriedade (no nosso caso, definindo um valor numérico para a extensão do palmo). É natural e cômodo escolhermos o valor 1. Então, neste momento, temos o que chamamos *unidade de medida*, o que, para o nosso exemplo, é o palmo. A toda característica de um objeto a qual podemos associar um valor numérico, chamamos de *grandeza.* Neste exemplo, fizemos a comparação utilizando diretamente os dois objetos, então podemos dizer aos nossos alunos que fizemos uma *medida direta.* Algumas outras vezes, utilizamos instrumentos de medida mas estes não nos dão a medida que buscamos, por exemplo, quando queremos saber a área de um retângulo, medimos inicialmente as suas dimensões e, matematicamente, obtemos sua área. Para estes casos, dizemos que fizemos uma *medida indireta.* É claro que o aluno ainda pode fazer outras indagações, como por exemplo sobre as características dos objetos. Podemos dizer a eles que existem basicamente dois tipos de características dos objetos: as *intrínsecas* e as *não intrínsecas.* Toda característica que define um objeto é intrínseca a este, uma vez que não é possível excluir essa propriedade do objeto sem que ele deixe de existir como tal. Por exemplo, a propriedade “ser humano” não pode ser retirada de uma pessoa sem que ela deixe de existir como tal. Por outro lado, pegando-se uma bola cheia de ar, o estado “cheia de ar” é uma característica da bola naquele momento. Mas podemos secar a bola e assim ela perder essa característica, mas continua sendo bola. Então esta característica da bola é não intrínseca, pois podemos retirá-la sem que a bola deixe de ser bola.

É claro que não pretendemos esgotar as discussões que se pode fazer a respeito desses conceitos. O próprio processo de medir, no que ele consiste de fato, pode ser levado a outro patamar. Nossa abordagem é feita de modo que possamos repassar esses conhecimentos aos nossos alunos. Devemos ter alguns cuidados durante o processo de medida. Por exemplo, quando dizemos que devemos escolher uma característica de um objeto, de quais objetos estamos falando? De modo geral, estamos falando de objetos físicos. Do contrário, esbarraríamos na dificuldade de comparação entre as características dos objetos. Um exemplo clássico dessa dificuldade é tentar medir os sentimentos das pessoas. Como atribuir um valor numérico a um sentimento e compará-lo com outros?

1.2.2 Razão

Aqui, como na seção anterior, fazemos, de acordo coma BNCC, uma exposição das habilidades a serem desenvolvidas nos alunos do 7ª ano do fundamental com relação ao conceito de razão; analisamos como as referências [6, 11] introduzem esse conceito e tentamos, a partir desta exposição, contribuir para os processos de ensino e aprendizagem deste conceito.

A primeira vez que a palavra razão surge em uma habilidade é em (EF06MA15), no 6º ano do fundamental, na Unidade Temática Álgebra, na qual se tem: "Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.". Vamos ver agora as habilidades para o 7ª ano do fundamental.

Na habilidade (EF07MA08), tem-se "Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.". Vemos que, assim como os documentos normativos tratam os conceitos de medida e grandeza, fazem-no também com o conceito de razão, isto é, não há uma habilidade que explore esse conceito em si. Vamos ver como [6, 11] tratam esse conceito.

Assim como [5, 10], [6] introduz o conceito de razão através de exemplos para logo em seguida dar a seguinte definição: "A razão entre dois números é o quociente entre eles, com o segundo diferente de zero.". Ou seja, a razão para [6] é definida em termos de quociente entre números. Já [11], começa, assim como fez [10], com uma série de perguntas relacionadas ao conceito de razão. Depois, assim como [6], dá a seguinte definição: "A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, é o quociente de a por b, $a : b$, que pode ser indicado por $\frac{a}{b}$ ou qualquer outra forma equivalente.". Vemos que [11] segue a mesma linha de raciocínio de [6] quanto a definição do conceito de razão.

Tentemos agora dar algumas contribuições. Em primeiro lugar, somos adeptos da ideia de definir razão como um quociente entre números, mas com uma ressalva quanto a natureza desses números: esses números utilizados para obter um quociente ao qual chamamos de razão podem ser obtidos, basicamente, de duas maneiras; por um processo de contagem ou como resultado de uma medida (ou a própria medida, se preferir). Por exemplo, na razão entre os números de meninos e meninas de determinado 7ª ano, temos números obtidos pelo processo de contagem. Já no conceito de densidade demográfica, temos o quociente entre número de habitantes e área, isto é, um obtido pelo processo de contagem e outro pelo processo de medida. Em segundo lugar, quando se introduz o conjunto dos números racionais, geralmente faz-se referência a forma das frações como um quociente entre números, ou seja, uma razão. O cuidado aqui, é deixar claro para os alunos que frações são um tipo específico de razão e que no conjunto dos racionais não estão todas as razões, somente aquelas em que numerador e denominador são números inteiros.

Capítulo 2

Proporção e Funções Reais

Neste capítulo exploramos o conceito de proporção via funções reais. Tratamos do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, grandezas direta e inversamente proporcionais a uma ou várias outras grandezas, regra de três simples e composta e divisão em partes proporcionais. Em particular, mostramos que existe uma estreita relação entre o conceito de proporção com o de função linear.

Vale a pena alertar o leitor que a pouca quantidade de exemplos neste capítulo é justificada pelo fato de o próximo tratar de aplicações do conceito de proporção. O desenvolvimento aqui foi feito baseando-se em [15, 18, 19, 21]. Para uma revisão de conceitos e notações da Teoria de Conjuntos e Funções Reais, indicamos [16, 17, 20].

No que segue, poderíamos ser mais rigorosos quanto aos termos usados. Quando dizemos que existe uma função entre as grandezas x e y, o que queremos dizer é que existe uma função entre as medidas dessas grandezas, as quais são números reais, isto é, existe uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, a cada medida da grandeza x associa uma única medida da grandeza y, ou seja $y = f(x)$ (note que usamos a mesma notação para a grandeza e sua medida). Além disso, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $\mathbb{R}$ representam, como de costume, o conjuntos dos números naturais e reais, respectivamente. Feita essa ressalva, vamos então iniciar pelo conceito central deste trabalho, qual seja, de grandezas proporcionais, o qual é o conteúdo das seguintes definições.

Definição 2.1. *(**Grandezas Diretamente Proporcionais**) Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, $y = f(x)$. Dizemos que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1) y é uma função crescente de x;

2) *se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n, ou seja, $f(nx) = nf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2. ***(Grandezas Inversamente Proporcionais)*** *Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, $y = f(x)$. Dizemos que y é inversamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1) *y é uma função decrescente de x;*

2) *se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y fica dividido por n, ou seja, $f(nx) = \dfrac{f(x)}{n}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Para simplificar nossa discussão, no que segue consideraremos apenas grandezas cujas medidas são números positivos. Assim, $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{R}^+$ representam os conjuntos dos números racionais positivos e reais positivos, respectivamente. Isto torna as nossas demonstrações mais curtas, evitando a consideração de casos, e os resultados ficam mais simples.

Exemplo 2.1. ***(Grandezas Diretamente Proporcionais)*** *Aplicando x reais na caderneta de poupança no dia 1º de julho, receberei y reais no dia 1º de Agosto. A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}^+$ um $f(x) = y \in \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade direta. De fato, quanto maior for a aplicação mais receberei, isto é, y é função crescente de x. Além disso, se aplicar $2x$, isto equivalerá a fazer dois depósitos de x reais, portanto receberei $f(2x) = 2f(x) = f(x) + f(x) = y + y = 2y$. Analogamente, aplicar nx equivale a fazer n depósitos de x reais, isto é, $f(nx) = nf(x) = ny$.*

Exemplo 2.2. ***(Grandezas Inversamente Proporcionais)*** *O tempo t necessário para ir, numa linha reta, de um ponto A a um ponto B, com velocidade v constante, é inversamente proporcional a essa velocidade, isto é, para estas grandezas, temos $t = t(v)$ (t é função de v), $v_1 > v_2 \Rightarrow t(v_1) < t(v_2)$ e $t(nv) = \frac{t(v)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. De fato, esse tempo diminui quando se aumenta a velocidade. Além disso, t reduz-se à metade, a um terço, a um quarto, etc. quando se duplica, triplica, quadruplica, respectivamente, a velocidade.*

É comum ouvirmos pessoas dizendo "se uma grandeza aumentou e outra relacionada a ela também aumentou, então estas grandezas são diretamente proporcionais" ou "se uma grandeza aumentou e outra relacionada a ela diminuiu, então estas grandezas são inversamente proporcionais". Mas isso não é necessariamente verdade. Então, cabe-nos aqui fazer uma breve discussão sobre o relaxamento das condições que figuram nas definições 2.1 e 2.2.

Nos exemplos 2.1 e 2.2, temos claramente que a condição de monotonicidade da função é satisfeita e isso é suficiente para induzir certas pessoas a achar que se tem casos de proporcionalidade, mas a monotonicidade não é condição suficiente. Por exemplo, a área A de um quadrado é função crescente do lado l, porém, se dobrarmos o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois), pois um quadrado de lado $2l$ decompõe-se em quatro quadrados de lado l, ou seja, não se tem $A(2l) = 2A(l)$, que é a segunda condição dada na definição de grandezas diretamente proporcionais (definição 2.1). Logo, não é correto afirmar que A e l são grandezas diretamente proporcionais.

Também podemos nos perguntar se as segundas condições são suficientes. Mostraremos que se existissem apenas números racionais, ou seja, se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre *comensuráveis*[1], então a resposta seria afirmativa.

Lema 2.1. *Se $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(rx) = rf(x)$ para todo número racional $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Como $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, então $r > 0$ e $rx > 0$. Assim,

$$pf(x) = f(px) = f\left(\left(p\,\frac{q}{q}\right)\,x\right) = f\left(\left(q\,\frac{p}{q}\right)\,x\right) = f(q(rx)) = qf(rx),$$

logo,

$$f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

□

Lema 2.2. *Se $f(nx) = \frac{f(x)}{n}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(rx) = \frac{f(x)}{r}$ para todo número racional $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $f(nx) = \frac{f(x)}{n}$ para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Como $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, então $r > 0$ e $rx > 0$. Assim,

$$\frac{f(x)}{p} = f(px) = f\left(\left(p\,\frac{q}{q}\right)\,x\right) = f\left(\left(q\,\frac{p}{q}\right)\,x\right) = f(q(rx)) = \frac{f(rx)}{q},$$

logo,

$$f(rx) = \frac{f(x)}{\frac{p}{q}} = \frac{f(x)}{r}.$$

[1] Duas grandezas da mesma espécie são comensuráveis quando a razão entre suas medidas for um número racional.

□

Teorema 2.1. *Se $f(rx) = rf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $r \in \mathbb{Q}^+$, então $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x.*

Demonstração. Dados $x, x' \in \mathbb{R}^+$, com $x < x'$, temos que existe $r \in \mathbb{R}^+$, com $r > 1$, tal que $x' = rx$. Assim, $f(x') = f(rx)$. Por hipótese, temos que $f(rx) = rf(x)$, logo $f(x') = f(rx) = rf(x)$. Como $r > 1$, temos que $f(x) < rf(x) = f(x')$. Portanto, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$, isto é, f é crescente e, consequentemente, que $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x. □

Teorema 2.2. *Se $f(rx) = \frac{f(x)}{r}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $r \in \mathbb{Q}^+$, então $y = f(x)$ é inversamente proporcional a x.*

Demonstração. Dados $x, x' \in \mathbb{R}^+$, com $x < x'$, temos que existe $r \in \mathbb{R}^+$, com $r > 1$, tal que $x' = rx$. Assim, $f(x') = f(rx)$. Por hipótese, temos que $f(rx) = \frac{f(x)}{r}$, logo $f(x') = f(rx) = \frac{f(x)}{r}$, isto é, $rf(x') = f(x)$. Como $r > 1$, temos que $f(x') < f(x)$. Portanto, $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$, ou seja, f é decrescente e, consequentemente, que $y = f(x)$ é inversamente proporcional a x. □

2.1 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Perguntamo-nos se as segundas condições nas definições 2.1 e 2.2 eram suficientes para se ter proporcionalidade direta ou inversa, conforme o caso. Os teoremas abaixo, fundamentais resultados desta teoria, esclarecem esta questão.

Teorema 2.3. ***(Teorema Fundamental da Proporcionalidade, I)*** *As seguintes afirmações a respeito de uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tal que $y = f(x)$ são equivalentes:*

1) y é diretamente proporcional a x;

2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(cx) = cf(x)$;

3) existe um número k, chamado "a constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = kx$, para todo x.

Demonstração. Provaremos que $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$ Seja $y = f(x)$ diretamente proporcional a x e suponhamos, por absurdo, que $f(cx) \neq cf(x)$, para algum real $c > 0$. Consideremos, inicialmente, o caso $f(cx) < cf(x)$. Como estamos tratando de medidas positivas, isto é, $x, f(x) > 0$ para todo x, temos que $\frac{f(cx)}{f(x)} < c$. Da densidade do conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, no conjunto dos números reais, temos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, e, assim, temos que $f(cx) < rf(x) < cf(x)$. Daqui e do Lema 2.1, segue que $f(cx) < f(rx) < cf(x)$. Como $rx < cx$ e $f(cx) < f(rx)$, temos que f não é crescente e, consequentemente, y não é diretamente proporcional a x, contradizendo nossa hipótese.

Consideremos, agora, o caso $f(cx) > cf(x)$. Então, $\frac{f(cx)}{f(x)} > c$. Daqui e da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existe $r' \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{f(cx)}{f(x)} > r' > c$. Assim, temos que $f(cx) > r'f(x) > cf(x)$ e, do Lema 2.2, segue que $f(cx) > f(r'x) > cf(x)$. Como $r' > c$ e $f(cx) > f(r'x)$, temos que f não é crescente e, consequentemente, y não é diretamente proporcional a x, contradizendo, novamente, nossa hipótese. Logo, devemos ter $f(cx) = cf(x)$ para todos $c, x > 0$.

$2) \Rightarrow 3)$ Tomemos $k = f(1)$. Então, em virtude da hipótese 2), usada com x em lugar de c, temos $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xk$, logo $f(x) = kx$. Notemos que $f(1) > 0$, pois do contrário, como $x > 0$, teríamos $xf(1) = f(x) < 0$, contrariando $x, f(x) \in \mathbb{R}^+$, como fixamos anteriormente.

$3) \Rightarrow 1)$ De $k = f(1) > 0$ e $x < x'$, temos $kx < kx'$, ou seja, $f(x) < f(x')$, portanto, $y = f(x)$ é uma função crescente de x. Além disso, $f(nx) = knx = nkx = nf(x)$. Portanto, y é diretamente proporcional a x. □

Note a partir de 3) que $f(x) = kx$ é precisamente a lei de definição (lei de formação) de uma função linear. Então, quando se tem um problema sobre o qual sabemos ser de proporcionalidade direta, podemos, sem sombras de dúvidas, afirmar que o modelo matemático a ser utilizado para tratar o problema é uma função linear.

Teorema 2.4. ***(Teorema Fundamental da Proporcionalidade, II)*** *As seguintes afirmações a respeito de uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tal que $y = f(x)$ são equivalentes:*

I) y é inversamente proporcional a x;

II) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$;

III) existe um número k, chamado "a constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = \frac{k}{x}$, para todo x.

Demonstração. Seja y função de $\frac{1}{x}$, ou seja, $y = f(x) = g(\frac{1}{x})$ e consideremos as seguintes proposições:

I') y é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$;

II') para todo número real $d > 0$, tem-se $g(d\,\frac{1}{x}) = dg(\frac{1}{x})$;

III') existe um número k, chamado "a constante de proporcionalidade" entre $\frac{1}{x}$ e y, tal que $g(\frac{1}{x}) = k\,\frac{1}{x}$, para todo x.

Mostremos que *I'*) $\Leftrightarrow$ *I*), *II'*) $\Leftrightarrow$ *II*) e *III'*) $\Leftrightarrow$ *III*).

$I')\Leftrightarrow I)$

$I)\Rightarrow I')$ Seja $y = f(x)$ inversamente proporcional a x. Então, pela definição 2.2, f é função decrescente de x. Assim, dados $x, x' > 0$, com $x < x'$, tem-se $f(x') < f(x)$. Mas $f(x') = g(\frac{1}{x'})$ e $f(x) = g(\frac{1}{x})$, logo $f(x') = g(\frac{1}{x'}) < g(\frac{1}{x}) = f(x)$. Por propriedade de ordem dos números reais, temos que $0 < x < x'$ é equivalente a $0 < \frac{1}{x'} < \frac{1}{x}$. Portanto, $\frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \Rightarrow f(x') < f(x)$, ou seja, $y = g(\frac{1}{x})$ é função crescente de $\frac{1}{x}$. Além disso, temos que

$$g\left(n\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{n}{x}\right) = g\left(\frac{1}{\frac{x}{n}}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right),$$

onde $\frac{x}{n}$ é um real positivo. Logo,

$$g\left(n\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{n}\,x\right)\cdot$$

Como $\frac{1}{n}$ é um racional positivo, segue do Lema 2.2 que

$$g\left(n\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{n}\,x\right) = \frac{f(x)}{\frac{1}{n}} = nf(x) = ng\left(\frac{1}{x}\right).$$

Portanto, mostramos que $y = g(\frac{1}{x})$ é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}\cdot$

$I')\Rightarrow I)$ Seja y diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$. Então, pela definição 2.1, $y = g(\frac{1}{x})$ é função crescente de $\frac{1}{x}$. Assim, dados $x, x' > 0$, com $0 < \frac{1}{x'} < \frac{1}{x}$, temos $g(\frac{1}{x'}) < g(\frac{1}{x})$. Mas $0 < \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \Longleftrightarrow 0 < x < x'$, então $0 < x < x' \Rightarrow g(\frac{1}{x}) = f(x) > f(x') = g(\frac{1}{x'})$, isto é, f é função decrescente de x. Além disso, temos que

$$f(nx) = g\left(\frac{1}{nx}\right),$$

onde nx é um real positivo. Logo,

$$f(nx) = g\left(\frac{1}{n}\frac{1}{x}\right)\cdot$$

Como g é diretamente proporcional a $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$ e $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}^+$, segue do Lema 2.1 que

$$f(nx) = \frac{1}{n} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{n}\cdot$$

Portanto, mostramos que $y = f(x)$ é inversamente proporcional a x.

$II) \Leftrightarrow II')$

$II) \Rightarrow II')$ Suponhamos que valha $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$. Então $\frac{f(x)}{c} = \frac{1}{c} f(x)$. Fazendo $\frac{1}{c} = d$ e lembrando que $f(x) = g(\frac{1}{x})$, temos $f(cx) = dg(\frac{1}{x})$. Uma vez que, por hipótese, $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$, temos, em particular, que $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para todo $c \in \mathbb{Q}^+$, logo, pelo Teorema 2.2, segue que $f(x)$ é inversamente proporcional a x, isto é, vale *I*), o qual, por sua vez, é equivalente *I'*). Segue daqui que g é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$. Daí, temos que $dg(\frac{1}{x}) = g(d\frac{1}{x})$, ou seja, vale $dg(\frac{1}{x}) = g(d\frac{1}{x})$, para todo $d \in \mathbb{R}^+$, com $\frac{1}{c} = d$.

$II') \Rightarrow II)$ Suponhamos agora que valha $g(d\frac{1}{x}) = dg(\frac{1}{x})$, para todo $d \in \mathbb{R}^+$. Fazendo $d = \frac{1}{c}$ e lembrando que $f(x) = g(\frac{1}{x})$, temos que $g(d\frac{1}{x}) = \frac{1}{c} f(x) = \frac{f(x)}{c}$. Uma vez que, por hipótese, $g(d\frac{1}{x}) = dg(\frac{1}{x})$, para todo $d \in \mathbb{R}^+$, temos, em particular, que $g(d\frac{1}{x}) = dg(\frac{1}{x})$, para todo $d \in \mathbb{Q}^+$, logo, pelo Teorema 2.1, segue que $g(\frac{1}{x})$ é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$, isto é, vale $I')$, o qual, por sua vez, é equivalente a $I)$. Segue daqui que $f(x)$ é inversamente proporcional a x. Daí, temos que $\frac{f(x)}{c} = f(cx)$. Ou seja, vale $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, para todo $c \in \mathbb{R}^+$, com $c = \frac{1}{d}$.

$III) \Leftrightarrow III')$ Basta notarmos que

$$f(x) = \frac{k}{x} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) = k\,\frac{1}{x}\cdot$$

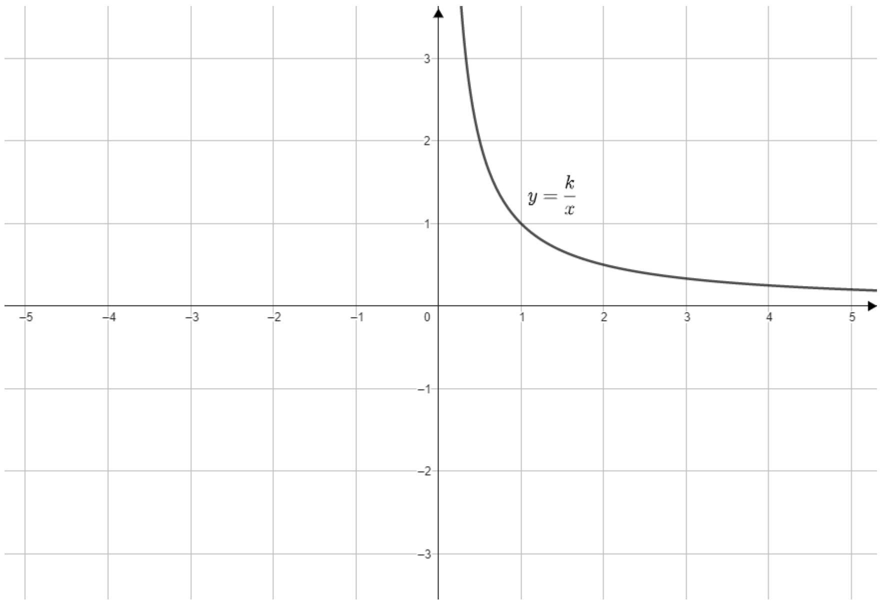
Pelo Teorema 2.3, temos que $I') \Leftrightarrow II') \Leftrightarrow III')$. Daí, segue que $I) \Leftrightarrow II) \Leftrightarrow II)\cdot$

□

No caso de y ser diretamente proporcional a x, temos $y = kx$. Quando y é inversamente proporcional a x, temos $y = \frac{k}{x}$, com k sendo a constante de proporcionalidade direta e inversa, respectivamente. No primeiro caso, o gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e no segundo é uma hipérbole, conforme vemos na figura 2.1 com $k = 1$ e $x > 0$.

Figura 2.1: Representação Gráfica de Grandezas Proporcionais

(a) y diretamente proporcional a x



(b) y é inversamente proporcional a x

Fonte: Autor

Ainda a partir das fórmulas $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}$ que caracterizam, respectivamente, as proporcionalidades direta e inversa, podemos obter outras maneiras de definir estes conceitos; maneiras estas muito empregadas no ensino fundamental (ver [6], págs. 199 e 204). Vejamos quais são essas outras formas de definir proporcionalidade direta e inversa.

Propriedade 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $y = f(x)$. A fim de que y seja diretamente proporcional a x é necessário e suficiente que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$, sendo o valor comum desses* *quocientes igual à constante de proporcionalidade k.*

Demonstração. Suponhamos que f seja uma proporcionalidade direta. Então pelo Teorema 2.3, temos que f é uma função linear, isto é, vale $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \cdots, y_n = kx_n$, onde k é a constante de proporcionalidade entre y e x. Daqui, segue que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$. Por outro lado, se vale $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$, então, chamando de k o valor comum desses quocientes, temos $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \cdots, y_n = kx_n$, ou seja, f é linear, o que pelo Teorema 2.3 implica f ser uma proporcionalidade direta. □

Propriedade 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $y = f(x)$. A fim de que y seja inversamente proporcional a x é necessário e suficiente que $x_1y_1 = x_2y_2 = \cdots = x_ny_n$, sendo o valor comum desses produtos igual à constante de proporcionalidade k.*

Demonstração. Suponhamos que f seja uma proporcionalidade inversa. Então pelo Teorema 2.4, temos que $y_1 = \frac{k}{x_1}, y_2 = \frac{k}{x_2}, \cdots, y_n = \frac{k}{x_n}$, onde k é a constante de proporcionalidade entre y e x. Daqui, segue que $x_1y_1 = x_2y_2 = \cdots = x_ny_n = k$. Por outro lado, se vale $x_1y_1 = x_2y_2 = \cdots = x_ny_n$, então, chamando de k o valor comum desses produtos, temos $y_1 = \frac{k}{x_1}, y_2 = \frac{k}{x_2}, \cdots, y_n = \frac{k}{x_n}$, o que pelo Teorema 2.4 implica f ser uma proporcionalidade inversa. □

Note que as propriedades 2.1 e 2.2 permitem definir, como geralmente é visto no ensino fundamental, proporção como uma igualdade entre duas razões, por exemplo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onde a e d são chamados de *extremos* e b e c são chamados de *meios*, nomes dados em virtude do carácter geométrico das grandezas e cuja leitura é "a está para b, assim como c está para d". Falaremos mais de interpretação geométrica de proporção no capítulo 3.

Podemos obter, a partir do nosso desenvolvimento, a propriedade a seguir, a qual, no ensino fundamental, é tida como o "Teorema Fundamental das Proporções", que, obviamente, é equivalente ao que desenvolvemos neste trabalho.

Propriedade 2.3. *Sejam a, b, c e d reais não nulos. Então a, b, c e d formam, nessa ordem, uma proporção se, e somente se, o produto ad (dos extremos) é igual ao produto bc (dos meios).*

Demonstração. Temos que vale a seguinte sequência de equivalências,

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a}{b}\frac{d}{d} = \frac{c}{d}\frac{b}{b} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{bd}ad = bc\frac{1}{bd} \\ \Leftrightarrow \quad & ad = bc. \end{aligned}$$

□

2.1.1 Regra de três Simples

Uma das aplicações mais antigas da noção de proporcionalidade é o tipo de problema chamado *regra de três*, que pode ser *simples* ou *composto*. A *regra de três composta* será tratada na subseção 2.2.1. Tratemos agora da *regra de três simples*. Neste problema, tem-se uma grandeza y (direta ou inversamente) proporcional a x. Aos valores x_1, x_2 correspondem, respectivamente, y_1 e y_2. O problema consiste em, conhecendo 3 desses valores, determinar o quarto. Uma vez determinado este quarto valor, dizemos que a regra de três foi resolvida. Conforme y seja direta ou inversamente proporcional a x, tem-se uma *regra de três direta* ou uma *regra de três inversa*.

Uma vez comprovado que y é, de fato, proporcional a x, não há dificuldade em resolver a regra de três. Digamos que se conhecem x_1, x_2 e y_1. Se a regra de três é direta, temos $y_1 = kx_1$ e $y_2 = kx_2$, logo $k = \frac{y_1}{x_1}$ e, por substituição, obtemos $y_2 = y_1\frac{x_2}{x_1}$. Se a regra de três é inversa, temos, pela propriedade 2.2 $x_1y_1 = x_2y_2 = k$, logo $y_2 = y_1\frac{x_1}{x_2}$. É importante notar que esses resultados mostram que se pode calcular o valor y_2 quando se conhecem x_1, x_2 e y_1, sem precisar ter o valor de k.

2.2 Grandezas Direta ou Inversamente Proporcionais a Várias Outras

Nesta seção, tratamos o caso em que uma grandeza, digamos z, é uma função real de várias variáveis, digamos, x, y, u, v e w, isto é, $z = f(x, y, u, v, w)$, e esta função é uma proporção, no sentido das seguintes definições.

Definição 2.3. *Sejam x, y, u, v, w e z grandezas tais que $z = f(x, y, u, v, w)$. Diremos que z é diretamente proporcional a x quando:*

1) *para quaisquer valores fixados de* y, u, v, w*, a grandeza* z *é uma função crescente de* x*, isto é, a desigualdade* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1, y, u, v, w) < f(x_2, y, u, v, w)$*;*

2) *para quaisquer* x, y, u, v, w *e* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se* $f(nx, y, u, v, w) = n\, f(x, y, u, v, w)$*.*

De modo análogo,

Definição 2.4. *Sejam* x, y, u, v, w *e* z *grandezas tal que* $z = f(x, y, u, v, w)$*. Diremos que* z *é inversamente proporcional a* x *quando:*

1) *para quaisquer valores fixados de* y, u, v, w*, a grandeza* z *é uma função decrescente de* x*, isto é, a desigualdade* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1, y, u, v, w) > f(x_2, y, u, v, w)$*;*

2) *para quaisquer* x, y, u, v, w *e* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se* $f(nx, y, u, v, w) = \frac{f(x,y,u,v,w)}{n}$*.*

É claro que não há nada em especial na escolha da variável x nas Definições 2.3 e 2.4, definições semelhantes podem ser dadas para as demais variáveis. Temos também que, assim como no caso de uma só variável, tem-se f inversamente proporcional a x se, e somente se, f é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$.

O Teorema seguinte resume os Teoremas 2.3 e 2.4 no caso de uma função de várias variáveis. Para fixar as ideias e não ter que introduzir mais notações, consideraremos as variáveis x, y, u, v, w, mas, como é de se esperar, ele vale para um número qualquer de variáveis.

Teorema 2.5. *Seja* $z = f(x, y, u, v, w)$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) z *é diretamente proporcional a* x, y *e inversamente proporcional a* u, v, w*;*

b) *existe uma constante* k *tal que* $z = k\,\frac{x\,y}{uvw}$*.*

Demonstração. Suponhamos válida a afirmação $a)$ e escrevamos $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$. Dos Teoremas 2.3 e 2.4, segue que

$$\begin{aligned}
z &= f(x, y, u, v, w) = f(x \cdot 1, y \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1, w \cdot 1) \\
&= xf(1, y \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1, w \cdot 1) = xyf(1, 1, u \cdot 1, v \cdot 1, w \cdot 1) \\
&= xy\frac{f(1, 1, 1, v \cdot 1, w \cdot 1)}{u} = xy\frac{f(1, 1, 1, 1, w \cdot 1)}{uv} \\
&= xy\frac{f(1, 1, 1, 1, 1)}{uvw} = \frac{xy}{uvw}f(1, 1, 1, 1, 1) \\
&= k\frac{xy}{uvw}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se vale a afirmação $b)$, então $a)$ é obviamente verdadeira. □

Resulta do Teorema 2.5 que uma grandeza é diretamente (ou inversamente) proporcional a várias outras se, e somente se, é diretamente (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras.

2.2.1 Regra de Três Composta

Grandezas que são direta ou inversamente proporcionais a duas ou mais outras dão origem ao tipo de problema conhecido como regra de três composta (LIMA, 1998, pág. 139). Nos problemas de regra de três composta, tem-se, digamos, uma grandeza z diretamente proporcional a x e y , e inversamente proporcional a u. conhecendo-se o valor de z_1 correspondente aos valores particulares de x_1, y_1 e u_1, procura-se determinar z_2 que corresponde a outros valores particulares x_2, y_2, u_2. Pelo Teorema 2.5, sabemos que existe k tal que $z_1 = k\frac{x_1y_1}{u_1}$ e $z_2 = k\frac{x_2y_2}{u_2}$. Dividindo a segunda igualdade pela primeira, obtemos $z_2 = z_1\frac{x_2y_2u_1}{x_1y_1u_2}$.

2.2.2 Regra de Três e Diagrama de setas

Uma técnica muito utilizada para se resolver problemas de regra de três (simples ou composta) é o "diagrama de setas". Uma vez constatada a proporcionalidade entre as grandezas, a técnica consiste em se utilizar uma tabela esquemática com setas, onde os sentidos destas estão relacionados às proporcionalidades direta e inversa. As medidas das grandezas são colocadas em colunas e logo em seguida é feita uma análise para se descobrir se as grandezas envolvidas são direta ou inversamente proporcionais. A coluna da grandeza que possui a medida desconhecida é a primeira a receber uma seta [2]. Nas outras colunas, as setas serão colocadas conforme as grandezas que ali estejam sejam diretamente ou inversamente proporcionais a grandeza com medida desconhecida. Aquelas que forem diretamente proporcionais receberão setas no mesmo sentido da seta inicial, do contrário, receberão seta com sentido oposto. Em virtude da independência das variáveis, enquanto se está analisando o tipo de proporcionalidade de uma grandeza comparando-a com a de medida desconhecida, as outras são fixadas. Temos nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3 diagramas de setas para regra de três simples e composta, respectivamente, dadas de acordo com as proporcionalidades direta e inversa de 2.1.1 e 2.2.1.

[2]Se o sentido da seta que fica ao lado da grandeza que possui valor desconhecido é para baixo ou para cima é irrelevante para se resolver o problema. Também é irrelevante se as setas ficam à direita ou esquerda das grandezas; mas, uma vez que se escolha um lado, é bom mantê-lo por questões de clareza e estética.

Tabela 2.1: Regra de Três Simples Direta e Diagrama de Setas

$x(\downarrow)$	$y(\downarrow)$
x_1	y_1
x_2	y_2

Fonte: Autor

Tabela 2.2: Regra de Três Simples Inversa e Diagrama de Setas

$x(\downarrow)$	$y(\uparrow)$
x_1	y_1
x_2	y_2

Fonte: Autor

Tabela 2.3: Regra de Três Composta e Diagrama de Setas

$x(\downarrow)$	$y(\downarrow)$	$u(\uparrow)$	$z(\downarrow)$
x_1	y_1	u_1	z_1
x_2	y_2	u_2	z_2

Fonte: Autor

Em qualquer um dos casos, regra de três simples ou composta, direta ou inversa, começamos por colocar, em um dos lados de uma igualdade, a razão (na ordem que figura no diagrama) dos valores da grandeza que possui medida desconhecida. Do outro lado da igualdade, colocamos um produto das razões formadas pelos valores das outras grandezas, de modo que, se determinada razão é formada por valores de uma grandeza diretamente proporcional à grandeza que possui valor desconhecido, ela ficará na mesma ordem que figura no diagrama; agora, se a razão for formada por valores de uma grandeza inversamente proporcional à grandeza com valor desconhecido, seu sentido tem que ser invertido. De 2.1, temos $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, isto é, $y_2 = y_1\frac{x_2}{x_1}$. De 2.2, ficamos com $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$, ou seja, $y_2 = y_1\frac{x_1}{x_2}$. Já de 2.3, obtemos, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1}{x_2}\frac{y_1}{y_2}\frac{u_2}{u_1}$, de onde segue que $z_2 = z_1\frac{x_2y_2u_1}{x_1y_1u_2}$. Estes resultados são exatamente os mesmos obtidos em 2.1.1 e 2.2.1, mostrando, com isso, que existe uma equivalência entre o diagrama de setas e o “Teorema Fundamental da Proporcionalidade”, de sorte que em resoluções de problemas de regra de três, temos a liberdade de usar uma ou outra técnica.

2.3 Divisão em Partes Proporcionais

Nesta seção tratamos da divisão em partes proporcionais. Este conhecimento é muito útil quando se quer resolver problemas de *regra de sociedade*. Nesses problemas, temos certo número de pessoas que organizam uma sociedade. Estas pessoas podem entrar com capitais iguais ou diferentes, bem como permanecer por tempos iguais ou diferentes. Assim, o lucro (ou prejuízo) ao final de determinado período deve ser dividido proporcionalmente aos capitais e aos intervalos de tempo. No que segue, precisaremos da seguinte propriedade.

Propriedade 2.4. *Seja $y = f(x)$ uma proporção. Se $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \cdots, y_n = f(x_n)$, então existe $k \in \mathbb{R}^2$ tal que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, ou seja, $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$*

Demonstração. Seja $y = f(x)$ uma proporção tal que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \cdots, y_n = f(x_n)$. Então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \cdots, y_n = kx_n$. Daqui, somando membro a membro, segue que

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

ou seja,

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

□

Mas, o que significa dividir em partes proporcionais? Dividir um número a em partes proporcionais a $x_1, x_2, \cdots, x_n$, significa encontrar $y_1, y_2, \cdots, y_n$, proporcionais a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e tais que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = a\cdot$

Se $y = f(x)$ é uma proporção, então

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1, y_2 = kx_2, \cdots, y_n = kx_n \\ \Rightarrow a &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ \Rightarrow k &= \frac{a}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{ax_1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, y_2 = \frac{ax_2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \cdots, x_n = \frac{ax_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \end{aligned}$$

2.3.1 Regra de Sociedade Simples

Neste tipo de sociedade, os sócios entram com capitais diferentes mas permanecem por tempos iguais ou, então, entram com capitais inicias iguais mas permanecem na sociedade por tempos diferentes. Por exemplo, suponhamos que três pessoas organizam um negócio entrando com capitais c_1, c_2 e c_3, respectivamente. No final de um ano, obtiveram um lucro L. Quanto desse lucro cabe a cada um dos sócios?

Trata-se de dividir L em partes proporcionais a c_1, c_2 e c_3. Sejam L_1, L_2 e L_3 os lucros que cabem aos sócios que entraram com os capitais c_1, c_2 e c_3, respectivamente. Então, $L_1 + L_2 + L_3 =$

L e $L_1 = kc_1, L_2 = kc_2$ e $L_3 = kc_3$, onde k é a constante de proporcionalidade. Assim,

$$\frac{L_1}{c_1} = \frac{L_2}{c_2} = \frac{L_3}{c_3} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{c_1 + c_2 + c_3} = \frac{L}{c_1 + c_2 + c_3} = k.$$

Portanto,

$$L_1 = \frac{Lc_1}{c_1 + c_2 + c_3},\ L_2 = \frac{Lc_2}{c_1 + c_2 + c_3} \quad \text{e} \quad L_3 = \frac{Lc_3}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

2.3.2 Regra de Sociedade Composta

Nestas sociedades, os sócios entram com capitais diferentes e permanecem por tempos diferentes. Consideremos uma sociedade formada for três pessoas e sejam c_1, c_2 e c_3, respectivamente, os capitais iniciais; t_1, t_2 e t_3, respectivamente, os tempos de aplicação desses capitai e L_1, L_2 e L_3, respectivamente, os lucros.

O valor que cada sócio receberá é diretamente proporcional ao capital inicial e ao tempo de aplicação. Então, de acordo o Teorema 2.5, o valor é diretamente proporcional ao produto do capital inicial pelo tempo de permanência na sociedade, isto é, $L_1 = k\ c_1t_1, L_2 = k\ c_2t_2$ e $L_3 = k\ c_3t_3$, onde k é a constante de proporcionalidade. Assim,

$$\frac{L_1}{c_1t_1} = \frac{L_2}{c_2t_2} = \frac{L_3}{c_3t_3} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3} = \frac{L}{c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3} = k.$$

Portanto,

$$L_1 = \frac{Lc_1t_1}{c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3}, L_2 = \frac{Lc_2t_2}{c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3} \quad \text{e} \quad L_3 = \frac{Lc_3t_3}{c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3}.$$

Capítulo 3

Aplicações do Conceito de Proporção

Neste capítulo, dedicamo-nos a apresentar aplicações do conceito de proporção na Matemática e na Física.

3.1 Na Matemática

Aqui mostramos algumas aplicações do conceito de proporção na Geometria e também resolvemos problemas que caíram em exames conhecidos, como por exemplo, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares (OBMEP) e Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

3.1.1 Segmentos Incomensuráveis e Proporção Áurea

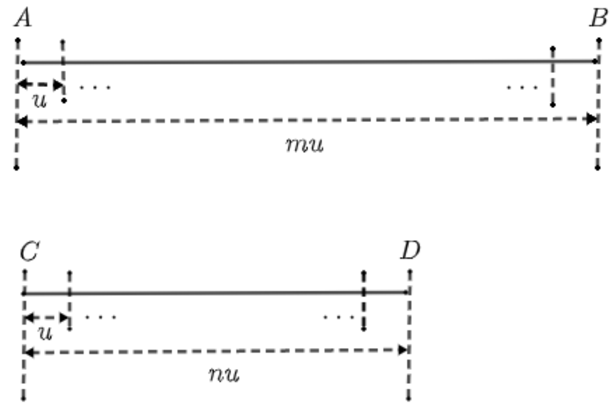
Muito do que vamos expor aqui pode ser encontrado em [2], o qual indicamos para mais detalhes. A razão entre dois segmentos é igual à razão dos números que exprimem as medidas desses segmentos, tomados na mesma unidade. Então, dizer que os Segmentos AB e CD são comensuráveis significa que admitem uma medida comum u, que está m vezes em AB e n vezes em CD. Isto é,

$$\overline{AB} = mu$$

$$\overline{CD} = nu,$$

Onde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam, respectivamente, as medidas dos segmentos AB e CD. Geometricamente, temos

Figura 3.1: Segmentos Comensuráveis



Fonte: Autor

A razão entre dois segmentos, AB e CD por exemplo, é igual a razão entre suas medidas. Assim,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}.$$

Dizemos que dois segmentos AB e CD são proporcionais a outros dois segmentos $A'B'$ e $C'B'$ se a razão $\frac{AB}{CD}$ é igual a razão $\frac{A'B'}{C'D'}$, ou seja,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Existem algumas nomenclaturas muito utilizadas no contexto das proporções, especialmente no ensino fundamental. Vejamo-las. Supondo que sejam conhecidos três valores, a, b e c; diferentes entre si, chamamos de *quarta proporcional* o valor x para o qual vale a seguinte proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}. \tag{3.1}$$

Se em (3.1) tivermos $b = c$, então dizemos que x é a *terceira proporcional* e temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Se numa proporção $a : b :: c : d$ (e aqui temos mais uma notação para a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) temos que $b = c$, então dizemos que o valor b é a *média proporcional* ou *média geométrica* dos valores a e d. Neste caso a proporção é chamada de *proporção contínua*.

De acordo com [2], foram os próprios pitagóricos que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado qualquer são grandezas incomensuráveis. Dentre as várias formas de se estabelecer a existência de segmentos incomensuráveis, existe uma baseada no "retângulo áureo", a qual descreveremos a seguir.

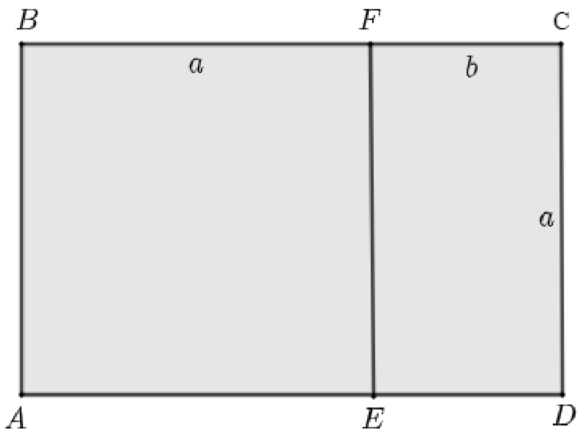
O retângulo áureo

Chama-se *retângulo áureo* a qualquer retângulo $ABCD$ (fig. 3.2) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como $ABFE$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original. Denotando por $a+b$ e a os comprimentos dos lados do retângulo original e lembrando que segmentos equivalentes são proporcionais (por definição), temos, a parir da definição de retângulo áureo que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \tag{3.2}$$

A razão $\phi = \frac{a}{b}$ é chamada *razão áurea* enquanto o inverso desse número, $\varphi = \frac{1}{\phi} = \frac{b}{a}$, é chamado

Figura 3.2: Retângulo Áureo $ABCD$



Fonte: Autor

número áureo. Dividindo numerador e denominado do lado esquerdo da equação (3.2) por b, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\phi + 1}{\phi} = \phi \\ \Rightarrow \quad & \phi^2 - \phi - 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

As raízes de (3.3) são $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como estamos procurando uma razão entre medidas positivas, devemos ter $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Daqui, segue que o número áureo é $\varphi = \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0,618$. Uma vez que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é irracional e $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, então a e $a+b$, os lados do retângulo áureo, são incomensuráveis.

Divisão Áurea

Diz-se que um ponto C de um segmento AB (fig. 3.3) divide esse segmento na *razão áurea* se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}, \tag{3.4}$$

onde (3.4) é chamada *proporção áurea*. Diz-se também que C divide AB em *média e extrema*

Figura 3.3: Divisão Áurea

Fonte: Autor

razão (ou *meia e extrema razão*). A escolha desta nomenclatura justifica-se pelo fato de AC aparecer duas vezes na proporção (3.4) como termos do meio, enquanto AB e CB são os termos extremos.

Note que se fizermos $\overline{AC} = a$ e $\overline{CB} = b$ em (3.4), obtemos precisamente a proporção (3.2), de modo que $\overline{AB} = a + b$ e $\overline{AC} = a$ da divisão áurea são as medidas dos lados de um retângulo áureo e (3.4) é a razão áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ já encontrada anteriormente.

3.1.2 "Teorema de Tales"

Teorema 3.1. *(**"Teorema de Tales"**) Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros lados em segmentos proporcionais.*

Demonstração. Seja ABC o triângulo. A cada ponto X do lado AB, façamos corresponder o ponto X' do lado AC, de tal modo que XX' seja paralela a BC. Provaremos que o comprimento $X'C$ é diretamente proporcional ao comprimento XB. Em primeiro lugar, é claro que se X, Y são pontos de AB tais que $XB < YB$, então $X'B < Y'B$, porque XX' e YY' são paralelos. Em seguida, afirmamos que se os pontos X, Y, Z do lado AB são tais que $XY = YZ$, então $X'Y' = Y'Z'$. Para ver isto, tomemos os pontos P em XX e Q em YY' de modo que $Y'P$ e $Z'Q$ sejam paralelas a AB. Os triângulos $PX'Y'$ e $QY'Z'$ são congruentes porque têm um lado igual ($PY' = QZ'$) compreendidos entre ângulos iguais. Desta observação, resulta que se X, Y são pontos de AB com $YB = n\,XB$, então seus correspondentes X', Y' no lado AC são tais que $Y'C = n\,X'C$. Isto conclui a verificação de que o comprimento $X'C$ é diretamente proporcional a XB. Pelo Teorema 2.3, existe uma constante k tal que, para todo ponto X do segmento AB, tem-se

$$X'C = k\,XB \tag{3.5}$$

Em particular, para $X = A$, como $A' = A$, obtemos

$$AC = k\,AB \tag{3.6}$$

Subtraindo (3.5) de (3.6) vem

$$AX' = k\,AX \tag{3.7}$$

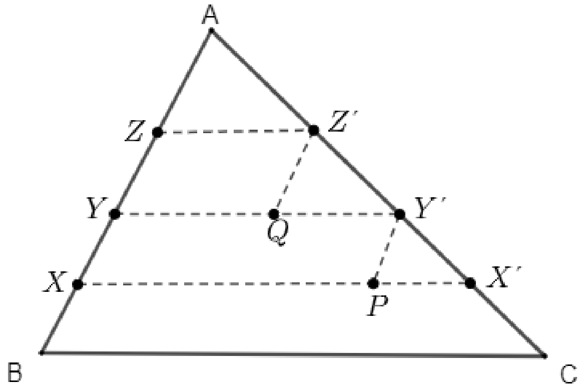
Dividindo (3.7) por (3.5) resulta

$$\frac{AX'}{X'C} = \frac{AX}{XB}.$$

Isto é precisamente o que estipula o Teorema de Tales.

□

Figura 3.4: "Teorema de Tales"



Fonte: Referência [19]

3.1.3 Área de um Retângulo

A área $A = A(x, y)$ de um retângulo de base x e altura y é diretamente proporcional a x e a y. Basta verificar quanto a x, pois a verificação quanto a y é análoga. Assim, fixando y, se $x_1 < x_2$, então $A(x_1, y) < A(x_2, y)$, já que o retângulo de base x_1 e altura y está contido no retângulo de base x_2 e mesma altura y. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, o retângulo de base $n\,x$ e altura y se decompõe como reunião de n retângulos justapostos, todos com base x e altura y, logo $A(n\,x, y) = n\,A(x, y)$. Segue-se do Teorema 2.5 que existe uma constante k tal que $A(x, y) = k\,xy$. Por um lado, temos que $A(1, 1)$ é a área de um retângulo de base e altura iguais a 1 (quadrado unitário). Mas a área de um quadrado de lado unitário é tomada como unidade de medida de área, logo $A(1, 1) = 1$. Por outro, temos que $A(1, 1) = k \cdot 1 \cdot 1 = k$, isto é, a constante de proporcionalidade é a área do quadrado unitário que por sua vez é a unidade de medida de área. Portanto, $A = xy$.

3.1.4 Volume de um Paralelepípedo

O volume $V = V(x, y, z)$ de um paralelepípedo de dimensões x, y, z é diretamente proporcional a x, y e z. Mostraremos somente a proporcionalidade em relação a x, pois em relação às outras variáveis se faz de modo análogo. Fixados y e z, se $x_1 < x_2$, então $V(x_1, y, z) < V(x_2, y, z)$, pois o paralelepípedo com dimensão x_2, $x_2 > x_1$, contém o primeiro. Assim, a função V é crescente na variável x. Além disso, a soma das n parcelas, $n \in \mathbb{N}$, $V(x, y, z) + V(x, y, z) + \cdots + V(x, y, z) = n\,V(x, y, z)$ é igual a $V(n\,x, y, z)$. Ou, usando a linguagem utilizada em 3.1.3, temos a justaposição de n paralelepípedos de dimensões x, y, z. Segue-se do Teorema 2.5 que existe uma constante k tal que $V(x, y, z) = k\,xyz$. Se as arestas do paralelepípedo forem mutuamente perpendiculares, então $k = V(1, 1, 1)$ é a volume do cubo unitário. Mas o volume de um cubo unitário é tomado como unidade de medida de volume, logo $k = V(1, 1, 1) = 1$. Portanto, $V(x, y, z) = xyz$.

3.1.5 Questões de Exames

1) (ENEM-2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão

pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

A) 300

B) 360

C) 400

D) 480

E) 600

Solução

Notemos que existe uma proporção entre o número de telhas t_e e o número de tijolos t_i. Se aumentarmos a quantidade de telhas, a de tijolos também aumentará; se duplicarmos, triplicarmos, etc. a quantidade de telhas, a de tijolos também duplicará, triplicará, respectivamente, contanto que a soma dessas quantidades não ultrapasse a carga máxima. Dito isto, temos que $\frac{t_e}{t_i} = \frac{1500}{1200} = \frac{5}{4}$, isto é, uma proporção de 5 para 4, o que significa que a cada 5 telhas correspondem 4 tijolos. Como já há no caminhão 900 telhas, para completar as 1500 telhas, faltam $1500 - 900 = 600$ telhas. Então queremos descobrir quantos tijolos correspondem a essas $t_e = 600$ telhas. Logo

$$
\begin{aligned}
& \frac{t_e}{t_i} = \frac{5}{4} \\
\Rightarrow \quad & \frac{600}{t_i} = \frac{5}{4} \\
\Rightarrow \quad & t_i = \frac{4 \times 600}{5} \\
\Rightarrow \quad & t_i = 480 \text{ tijolos.}
\end{aligned}
$$

Portanto, a opção correta é a D).

2) (ENEM-2019) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;

o total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de $R\$ \ 31000,00$;

o valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com $2, 3$ e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

A) $R\$ \ 3100,00$

B) $R\$ \ 6000,00$

C) $R\$ \ 6200,00$

D) $R\$ \ 15000,00$

E) $R\$ \ 15500,00$

Solução

Este problema relaciona duas grandezas: idade (em anos) de uso das máquinas e valor (em reais) a receber por cada empresa. Inicialmente teríamos que verificar se há proporcionalidade entre essas grandezas, mas o próprio problema pede uma divisão proporcional, estabelecendo uma proporcionalidade inversa entre elas, de modo que cada empresa receba de forma inversamente proporcional ao tempo de uso da máquina. Como vimos, se uma grandeza y é inversamente proporcional a uma grandeza x, então y é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$. Então, de acordo com nossa notação, sejam $x_1 = 2, x_2 = 3$ e $x_3 = 5$ as idades, em anos, de uso das máquinas e y_1, y_2 e y_3 os valores a receber por cada empresa, relacionados, respectivamente, a x_1, x_2 e x_3. Logo,

$$\frac{y_1}{\frac{1}{2}} = \frac{y_2}{\frac{1}{3}} = \frac{y_3}{\frac{1}{5}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = k.$$

Do texto, temos que o total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de $R\$ \ 31000,00$, o que significa $y_1 + y_2 + y_3 = R\$ \ 31000,00$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{\frac{1}{2}} = \frac{y_2}{\frac{1}{3}} = \frac{y_3}{\frac{1}{5}} &= \frac{31000}{\frac{31}{30}} \\ &= 30000 = k. \end{aligned}$$

A máquina com maior idade de uso tem 5 anos de uso. Portanto, a empresa responsável por esta máquina receberá

$$\frac{y_3}{\frac{1}{5}} = 30.000 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{5} \times 30000 = 6000 \text{ reais.}$$

Logo, a opção correta é a alternativa B).

3) (Enade-2011) Duas grandezas x e y são ditas *comensuráveis* se existe um número racional q tal que a medida de x é q vezes a medida de y.

Com base nesse conceito, são grandezas comensuráveis

A) a aresta de um cubo de volume V e a aresta de um cubo de volume $2V$.

B) a área e o perímetro de um círculo, quando o raio é um número racional.

C) a área e o diâmetro de um círculo, quando o raio é um número racional.

D) o comprimento e o diâmetro de uma circunferência.

E) a diagonal e o lado de um quadrado.

Solução

A definição dada para grandezas comensuráveis é equivalente a dizer que a razão entre as grandezas é um número racional. Calculemos, então, a razão para cada par de grandezas nos itens de A) a E).

A) Seja a a aresta de um cubo de volume V. Então, $V = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[2]{V}$. Para um cubo de volume $2V$, sua aresta a' será $a' = \sqrt[3]{2V}$. Assim,

$$\frac{a}{a'} = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2v}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \notin \mathbb{Q}.$$

B) A área A e o perímetro $2p$ de um círculo de raio $r \in \mathbb{Q}^+$ são dados, respectivamente, por $A = \pi r^2$ e $2p = 2\pi r$. Logo,

$$\frac{A}{2p} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}.$$

C) A área A e o diâmetro D de um círculo de raio $r \in \mathbb{Q}^+$ são dados, respectivamente, por $A = \pi r^2$ e $D = 2r$. Portanto,

$$\frac{A}{D} = \frac{\pi r^2}{2r} = \frac{\pi r}{2} \notin \mathbb{Q}.$$

D) O Comprimento $2p$ e o diâmetro D de uma circunferência de raio $r \in \mathbb{Q}^+$ são dados, respectivamente, por $2p = 2\pi r$ e $D = 2r$. Daqui, segue que

$$\frac{2p}{D} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \notin \mathbb{Q}.$$

E) Dado um quadrado de lado l, sua diagonal mede $l\sqrt{2}$. Daí, temos

$$\frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Portanto, a opção correta é o item B).

4) (OBMEP-2022) Uma fábrica recebeu uma encomenda de $100\,kg$ de bombons para entregar em 10 dias. Após 5 dias, seus 3 funcionários produziram $20\,kg$ de bombons. No mínimo, quantos funcionários extras a fábrica precisa contratar para atender a encomenda no prazo, supondo-se que todos os funcionários tenham a mesma produção diária?

A) 5

B) 7

C) 8

D) 9

E) 12

Solução

Resolveremos este problema pelo diagrama de setas. As grandezas envolvidas são massa de bombons em kg, tempo em dias e quantidade de funcionários. As proporcionalidades entre as grandezas estão na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Problema 4). OBMEP-2022.

$massa\, em\, kg(\downarrow)$	$tempo\, em\, dias(\downarrow)$	$quantidade\, de\, funcionrios(\downarrow)$
3	20	5
x	80	5

Fonte: Autor

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{20}{80} \times \frac{5}{5} \\ \Rightarrow x &= \frac{3 \times 80}{20} \\ \Rightarrow x &= 12 \text{ dias.} \end{aligned}$$

Mas como o problema quer saber o número de funcionários extra, temos $12 - 3 = 9$ funcionários. Logo, a opção correta é D).

5) (OBM-98) Quando você entra em um restaurante para comer pizza espera pagar uma quantia proporcional a quantidade de pizza consumida. Se uma pizza com $20\,cm$ de diâmetro custa $R\$\ 3,60$, quanto você espera pagar por outra do mesmo sabor e com $30\,cm$ de diâmetro?

A) $R\$\ 5,40$

B) $R\$\ 5,80$

C) $R\$\ 6,60$

D) $R\$\ 7,50$

E) $R\$\ 8,10$

Solução

Primeiramente temos que definir o que queremos dizer com quantidade de pizza. O preço a pagar é diretamente proporcional à área da superfície da pizza e ao seu volume. Para nossos cálculos, suporemos as espessuras das pizzas iguais, de modo que quando falamos quantidade, queremos dizer área consumida. Sendo assim, a menor tem raio $10\,cm$ e área $\pi \times 10^2 = 100\pi$; a maior, raio $15\,cm$ e área $\pi \times 15^2 = 225\pi$. Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{3,60}{x} = \frac{100\pi}{225\pi} = \frac{4}{9} \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{9 \times 3,60}{4} \\ \Rightarrow \quad & x = 9 \times 0,9 \\ \Rightarrow \quad & x = 8,1. \end{aligned}$$

Portanto, a opção correta é alternativa E) $R\$ \ 8,10$.

6) (OBM-2001) Em Tumbólia, um quilograma de moedas de 50 centavos equivale em dinheiro a dois quilogramas de moedas de 20 centavos. Sendo 8 gramas o peso de uma moeda de 20 centavos, quanto pesará uma moeda de 50 centavos?

   A) 15 gramas

   B) 10 gramas

   C) 12 gramas

   D) 20 gramas

   E) 22 gramas

   Solução

   Os pesos das moedas e as quantidades são grandezas diretamente proporcionais, quer dizer, se aumentarmos a quantidade de moedas o peso total destas aumentará, de sorte que duplicando, triplicando, etc. a quantidade, o peso total fica multiplicado por dois, três, etc., respectivamente. Comecemos calculando a quantidade de moedas de vinte centavos nos dois quilos iniciais delas. Assim,

$$\frac{8}{2000} = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{2000 \times 1}{8}$$
$$\Rightarrow \quad x = 250 \text{ moedas.}$$

   Ou seja, em moedas de 20 centavos, tem-se $250 \times R\$0,20 = R\$\,50$. Isto nos dá $\frac{50}{0,50} = 100$ moedas de $R\$\,0,50$. Assim, como há 1000 g destas moedas, segue que o peso por moeda de $R\$\,0,50$ é $\frac{1000}{100} = 10$ g. Logo a opção correta é a B).

3.2 Na Física

Nesta seção apresentamos aplicações do conceito de proporção na Física.

3.2.1 Lei de Hooke

A Lei de Hooke é uma lei física de proporcionalidade, onde esta proporcionalidade é obtida experimentalmente. Então, diferente das aplicações matemáticas que vimos nas quais mostramos que de fato existia a proporcionalidade, aqui nos limitaremos a apresentar a lei como uma proporção e a tecer alguns comentários sobre o domínio de validade da lei.

A Lei de Hooke diz que a deformação sofrida por um corpo elástico (uma mola, por exemplo) é diretamente proporcional à (intensidade da) força empregada. Matematicamente, $d = d(F) = k\,F$ ($d =$ deformação, $F =$ força, $k =$ coeficiente de elasticidade), ou simplesmente $d = k\,F$. A validade desta equação como modelo matemático é sujeita a restrições evidentes. A Força F não pode ser muito pequena porque então, mesmo positiva, não seria suficiente para deslocar a mola; neste caso teríamos $d = 0$ com $F > 0$, logo não valeria o modelo $d = k\,F$. Também não se pode tomar F muito grande porque a mola arrebentaria.

3.2.2 Lei de Gravitação Universal

Aqui também nos limitamos a simplesmente expor a lei como aplicação de grandeza que é proporcional a várias outras.

A chamada Lei de Gravitação Universal (de Newton) diz que "a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância". Isto significa que um corpo de massa m_1 e outro de massa m_2, situados a uma distância d um do outro, se atraem mutuamente com uma força cuja intensidade F é diretamente proporcional a m_1 e m_2, e inversamente proporcional a d^2. Seque-se do Teorema 2.5 que $F = k\dfrac{m_1 m_2}{d^2}$, onde a constante k depende do sistema de unidades utilizado.

3.2.3 Movimento Retilíneo Uniforme

Um Movimento é Retilíneo (aquele em a trajetória é uma linha reta) Uniforme (MRU) quando o móvel percorre espaços iguais em intervalos de tempos iguais. A *velocidade* é, por definição, o espaço percorrido na unidade de tempo. Num movimento desta espécie, o espaço percorrido a partir de certo ponto fixado, e de um instante em que se começou a contar o tempo, é função da velocidade e do tempo decorrido: $E = f(v, t)$. Evidentemente, E é função crescente de v e de t. Além disso, pela definição de movimento uniforme, o espaço percorrido depois de n intervalos de tempos iguais é n vezes o espaço percorrido durante um desses intervalos (mantida constante a velocidade). Logo, $f(v, nt) = nf(v, t)$. Segue do Teorema 2.3 que $E = f(v, t) = t\,f(v, 1)\cdot$

A definição de velocidade como espaço percorrido na unidade de tempo significa que $E = f(v, 1) = v$. Segue-se então que $E = vtf(1, 1) = vt\,k = k\,vt$. Como o espaço percorrido nas unidades de tempo e velocidade é igual a uma unidade de comprimento, isto é, $f(1, 1) = 1 = k$, temos que $E = vt$. Daí resulta que, no movimento uniforme, o espaço percorrido é diretamente proporcional à velocidade e ao tempo.

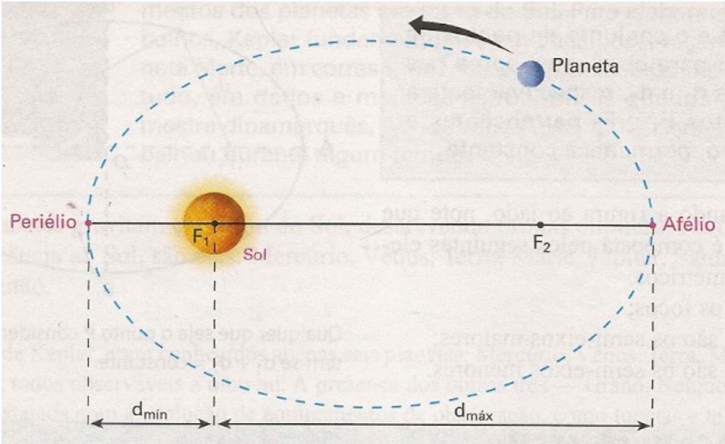
3.2.4 Leis de Kepler

Foi graças ao astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) que a Astronomia se desvencilhou da Astrologia para se ligar definitivamente à Física. De acordo com [7] (2001), Kepler era dono de uma personalidade indagadora e obstinada. Professor de Matemática e Astronomia, conhecedor das teorias de Copérnico, herdou um grande acervo de informações e medidas obtidas pelo astrônomo dinamarquês Ticho Brahe ao longo de muitos anos de pesquisas. Esses ingredientes bastaram para que ele formulasse, sem demonstrar matematicamente, as três leis que apresentamos a seguir:

1ª Lei - Lei das Órbitas

Em relação a um referencial no Sol, os planetas se movimentam descrevendo *órbitas elípticas*, ocupando o sol um dos focos da elipse.

Figura 3.5: Elipse - 1ª lei de Kepler



Fonte: Referência [7]

Chamando de d_{min} e d_{max} as distâncias do *periélio* e *afélio*, respectivamente, ao centro do sol, definimos como *raio médio da órbita (R)* do planeta, a *média aritmética simples* entre d_{min} e d_{max}, isto é,

$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}.$$

2ª Lei - Lei das Áreas

As áreas varridas pelo *vetor-posição* $\vec{r}$ de um planeta em relação ao centro do sol, são diretamente proporcionais aos respectivos intervalos de tempos gastos.

Sendo A a área e Δt o correspondente intervalo de tempo, temos que

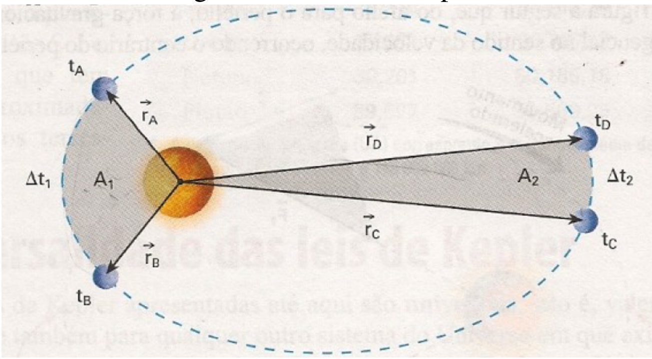
$$A \propto \Delta t \Leftrightarrow \frac{A}{\Delta t} = k,$$

onde $\propto$ indica proporcionalidade entre as grandezas. A constante de proporcionalidade k é chamada aqui de *velocidade areolar*, v_a, e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta varre as áreas. Assim, ficamos com

$$A = v_a \Delta t.$$

De acordo com a 2ª Lei, temos

Figura 3.6: 2ª lei de Kepler



Fonte: Referência [7]

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow A_1 = A_2.$$

3ª Lei - Lei dos Períodos

Para qualquer planeta do *sistema solar*, o cubo do raio médio da órbita, R^3, é diretamente proporcional ao quadrado do período de revolução (ou translação), T^2, em torno do sol.

$$\frac{R^3}{T^2} = k_p,$$

onde a constante de proporcionalidade k_p denomina-se *constante de Kepler* e seu valor depende apenas da massa do sol e das unidades de medida.

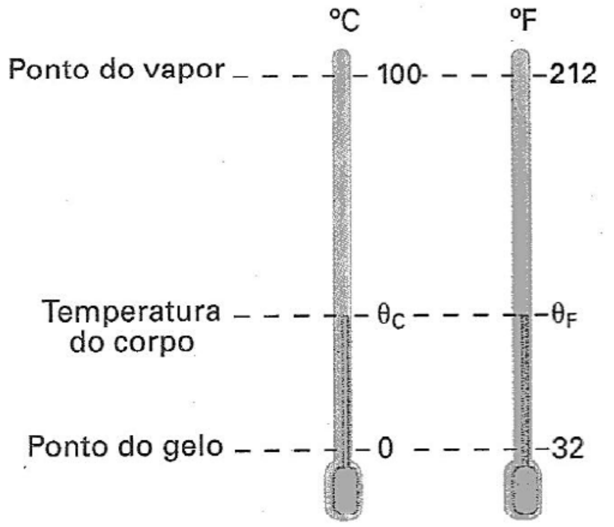
O leitor deve ter notado que a 1ª Lei não é uma lei de proporcionalidade, no entanto, colocamo-la aqui para que o leitor tivesse um mínimo de informação para compreender os enunciados das leis.

3.2.5 Escalas Termométricas: conversão Celsius-Fahrenheit

Um dos problemas enfrentados por alunos do segundo ano ensino médio diz respeito às escalas termométricas, principalmente no que tange a compreensão da relação de proporcionalidade entre as escalas. Tomemos as escalas Celsius e Fahrenheit, por exemplo, e a figura 3.7. Na figura 3.7 vemos que as linhas tracejadas traçadas pelos *pontos fixos fundamentais* (ponto do gelo e ponto do vapor) determinam sobre as escalas "segmentos" proporcionais, isto é, temos simplesmente uma aplicação do Teorema de Tales. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_C - 0}{\theta_F - 32} &= \frac{100 - 0}{212 - 32} \\ \Rightarrow \quad \frac{\theta_C}{\theta_F - 32} &= \frac{100}{180} = \frac{5}{9}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Figura 3.7: Conversão de escalas Celsius-Fahrenheit



Fonte: Referência [7]

O fato do produto dos extremos ser igual ao produto dos meios nos permite trocar as posições dos extremos e dos meios, de sorte que (3.8) fica

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9}.$$

Qualquer duas escalas são sempre proporcionais, de modo que sempre podemos aplicar o raciocínio acima para obter uma relação de proporcionalidade entre elas.

Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um estudo do conceito de proporção via funções reais. Como o público alvo deste trabalho é o grupo de professores da educação básica, sentimos necessidade de começarmos por fazer uma exposição dos conceitos de medida, grandeza e razão nos contextos dos PCNs e BNCC a fim de verificarmos quais os objetivos desses documentos normativos quanto aos processos de ensino e aprendizagem desses conteúdos. Constatamos que não há habilidades específicas para o aprendizado do conceito de medida no que diz respeito ao processo de medir em si. A partir disto, tentamos contribuir através de exemplo para que se chegue mais perto de se atingir tal objetivo, pois, a nosso ver, essa falta é uma deficiência nos processos de ensino e aprendizagem. Como é possível pedir a um aluno que meça algo sem o ter ensinado o processo de medir?

No capítulo 2, centro deste trabalho, tratamos do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Vimos que o modelo matemático para tratar proporcionalidade (direta) é a função linear, isto é, se $y = f(x)$ é uma proporção, então $f(x) = kx$ para todo $x > 0$. Vimos que $f(c\,x) = c\,f(x)$ para todo real $c > 0$ é condição suficiente para a proporcionalidade, mas na prática é de difícil verificação. Esta dificuldade pode ser contornada caso saibamos de antemão que f é crescente. Neste caso, basta verificarmos se $f(n\,x) = n\,f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Podemos ainda ser menos exigente caso estejamos tratando de grandezas com medidas positivas. Como vimos, neste caso basta verificarmos se $f(n\,x) = n\,f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ junto com a monotonicidade de f. Ainda neste capítulo, vimos formalmente alguns elementos muito explorados nos ensinos fundamental e médio, como regra de três e divisão proporcional.

Em seguida, no capítulo 3, foi explorado o conceito de proporção na Matemática e na Física. Nas aplicações a Matemática, vimos como o conceito de proporção está fortemente ligado à Geometria, mostrando, por exemplo, a existência de segmentos incomensuráveis. Também resolvemos problemas que caíram em exames conhecidos com o intuito de termos uma ideia de como o conceito de proporção é abordado por estes exames. Na Física, mostramos algumas leis de proporcionalidade bem conhecidas no ensino médio, com o objetivo de mostrar ao leitor que a aplicação do conceito de proporção não se restringe a Matemática. Com a Lei de Hooke, mostramos que, ao aplicarmos um modelo matemático para analisarmos uma situação concreta, devemos ter em mente os limites de validez do modelo, o que, no contexto aqui tratado, quando tivermos que uma grandeza y é proporcional a uma grandeza x, deve-se deixar claro que isto se dá dentro de certos limites de variação para y e x.

Por fim, Esperamos que este trabalho possa de alguma forma contribuir para os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos aqui tratados.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, A. C. do. *Grandezas Proporcionais: Um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula* $f(x) = ax$ *como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.* Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto. 2014. 22 f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

[2] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Análise Matemática para Licenciatura.* 3ª. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

[3] BARATA, João C. A. *"Notas para um Curso de Física-Matemática".* Versão de 31 de outubro de 2021. 2575 páginas. Departamento de Física Matemática - USP. Disponível em: http://denebola.if.usp.br/ jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap28.pdf. Acesso em: 31 de out. de 2021.

[4] *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base.* Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 de Out. de 2021.

[5] BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática.* 6ª. ed. São Paulo: Moderna, 2006. 6º ano do fundamental.

[6] BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática.* 6ª. ed. São Paulo: Moderna, 2006. 7º ano do fundamental.

[7] BISCUOLA, G. J., BÔAS, N. V., DOCA, R. H. *Tópicos de Física.* Vol. 1 e 2. 12ª. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2001.

[8] Brasil. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. 3º e 4º ciclos. Disponível em:

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 26 de Out. de 2021.

[9] COURANT, Richard. ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática*. 5ª. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

[10] DANTE, Luiz R. *Matemática*. 2ª. ed. São Paulo, Ática, 2015. 6º ano do fundamental (Projeto Teláris).

[11] DANTE, Luiz R. *Matemática*. 2ª. ed. São Paulo, Ática, 2015. 7º ano do fundamental (Projeto Teláris).

[12] Enade. Disponível em: https://sites.google.com/site/feucmat/enade/arquivos-de-provas. Acesso em: 20 de Ago. de 2022.

[13] ENEM. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 20 de Ago. de 2022.

[14] ISNARD, Carlos. *Introdução à medida e integração*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[15] LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. vol. 1. 9ª. ed. [S.l.]: SBM, 1997.

[16] LIMA, E. L. *Análise real. vol. 1: Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[17] LIMA, E. L. *Análise real. vol. 2: Funções de n Variáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[18] LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. 3ª. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

[19] LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 5ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[20] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] LIMA, E. L. *et al. Temas e Problemas Elementares*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[22] OBMEP. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1qf2EYY7W6oDsVSM1JhMj_KMNxVl0mLIl/view. Acesso em: 19 de Nov. de 2022.