

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

Ávido Sadote de Barros Neto

CADEIAS DE MARKOV NO ENSINO MÉDIO

professorsadote@gmail.com

São Cristovão

Julho de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ávido Sadote de Barros Neto

CADEIAS DE MARKOV NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADORA: Professora Doutora Débora Lopes

professorsadote@gmail.com

São Cristóvão

Julho de 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

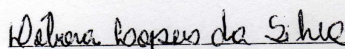
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Cadeias de Markov no Ensino Médio


por

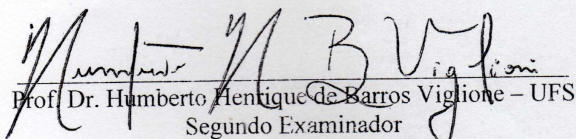
Ávido Sadote de Barros Neto

Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dra. Débora Lopes da Silva-UFS
Orientadora


Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva - UFRPE
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglione - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 02 de agosto de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Alcísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Introdução	vi
1 Definições	1
1.1 Cadeia de Markov	1
1.2 Diagrama de Transição de Estado	2
1.3 Vetor Probabilidade	5
1.4 Matriz de Transição da Cadeia de Markov	6
1.5 Determinação de Estados Futuros (Probabilidades Futuras)	7
1.6 Cadeias de Markov Ergódicas	14
1.7 Cadeias Regulares	15
1.8 Estado Estacionário	17
2 Aplicações à Cadeia de Markov	21
2.1 Criando Música a partir de uma matriz de transição	21
2.1.1 Noções Elementares sobre Música	21
2.1.2 Criando Música Aleatoriamente	23
2.1.3 Gerando uma música jogando dados	24
2.2 Produção X Sustentabilidade	27
2.2.1 O que é Sustentabilidade?	27
2.2.2 Os problemas	28
3 Sugestões de Atividades	1
4 Considerações Finais	4
Referências Bibliográficas	5

Páginas Web Consultadas	6
Softwares Utilizados	7

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, especialmente à minha filha Lana Sadote Gouveia de Barros, ao meu filho Luan Sadote Rocha de Barros e à minha querida mãe Eline Barbosa dos Santos, pelas presenças amorosas em minha vida, alimentando-me, sempre e durante todo o mestrado, de bons sentimentos.

Agradecimentos

Ao Grande Geômetra do Universo, que geometriza sem cessar, “inteligência suprema, causa primária de todas as coisas”, Deus.

À minha mãe Eline, meu modelo de força, fé, resignação e coragem.

À minha filha Lana e ao meu filho Luan, meus maiores motivadores, que por diversas vezes, mesmo sem alcançar o significado do meu mestrado em nossas vidas, foram compreensivos com as minhas ausências, nos períodos de estudo mais intenso.

À minha esposa Karol e ao meu irmão Juninho que, de alguma forma me incentivam, torcendo pelo meu sucesso.

À minha orientadora, Professora Débora Lopes, pela competência e generosidade com que executou a parte que lhe cabia nesse processo.

Ao corpo docente e à coordenação, pela dedicação ao ministrar as aulas, que colaboraram para o meu amadurecimento acadêmico.

Aos amigos e demais familiares que ofertaram sua parcela de orações, torcida sincera e palavras de encorajamento. Dentre os amigos, especialmente, agradeço a Décio, irmão pelo coração, por seu companheirismo e cumplicidade, e à “tia” Lísia, que tanto vibra com meus êxitos e me estimula a prosseguir quando fracasso. Muito obrigado, Lísia.

Aos meus “Anjos da Guarda”, Zen, Barros, Ana, João e tantos outros, pela abnegação com que, invisíveis e amorosos, se fazem presentes sempre, sempre...

Às pessoas generosas que contribuíram para o deferimento da minha Licença para Estudo, nos âmbitos estadual e municipal: Nádia, Lusinete, Gilmar Carvalho, Josevanda Franco e Wesley.

Aos que, por fragilidade ou ignorância, se fazem pedra de tropeço em meu caminho, tentando dificultar a minha caminhada. Com eles, também aprendo, sendo, muitas vezes, no tropeço, impulsionado a seguir em frente.

Aos colegas de Mestrado, pela contribuição e companheirismo com que colaboraram para o resultado exitoso deste trabalho, especialmente a Cesinha, Hélio, Evinha, Lúcia e Anselmo.

Aos meus amigos Márcio, Davi e Wellington, por toda disponibilidade e paciência com que me brindaram.

A CAPES, pela concessão da bolsa de estudo.

A SBM, pela qualidade com o material didático fornecido.

julho de 2013

Resumo

Este trabalho apresenta um assunto abordado em alguns cursos de graduação denominado de Cadeias de Markov. São explanados conceitos de Cadeia de Markov como Matriz Estocástica, Vetor-Estado, dentre outros. São apresentados alguns exemplos contextualizados de modo a facilitar a compreensão do assunto, visto que o presente trabalho objetiva ressaltar a importância de desenvolver aulas com temas do ensino superior em turmas do ensino médio. Além disso, serão apresentadas noções de alguns conceitos musicais objetivando mostrar uma possibilidade de composição algorítmica utilizando o Processo de Markov. Também serão abordadas noções elementares sobre sustentabilidade e será exposto um modelo matemático envolvendo Cadeia de Markov com o intuito de demonstrar ao aluno a importância da tomada de decisões de modo correto e planejado, e procurando despertar no discente não somente a curiosidade e o gosto pela matemática, mas também desenvolver no mesmo a capacidade de criar e raciocinar, tornando o estudo da matemática mais agradável e interessante.

Palavras Chaves: Cadeia de Markov, ensino médio, conceitos musicais, sustentabilidade.

Introdução

Sabemos que o ensino da matemática é um árduo desafio, e mais ainda na atualidade, em que vivemos a era do conhecimento, da informação e da tecnologia. Para agravar ainda mais esse quadro, alia-se a isso a “facilidade” encontrada pelos alunos em aprovações progressivas e a ausência familiar na participação da vida escolar do discente.

Como motivar os alunos diante dessa realidade? Estudamos matemática desde as séries iniciais e sabemos que é uma ciência que está presente no nosso dia-a-dia em muitas coisas. No entanto, muitas vezes, não mostramos sua aplicabilidade de modo a despertar o interesse do aluno. Por esta razão, o presente trabalho objetiva mostrar algumas aplicações de um conteúdo matemático abordado no ensino superior e sua relação com diversas áreas do conhecimento, as Cadeias de Markov. Além disso, mostrar que é possível introduzir tal conteúdo no Ensino Médio.

De modo simples, podemos dizer que quando a probabilidade de algo acontecer amanhã depende apenas do que acontece hoje, e não do que aconteceu mais anteriormente, teremos o que é denominado de Cadeia de Markov. Imagine, por exemplo, que a probabilidade de amanhã está ensolarado dependa apenas de saber se hoje estava ensolarado, nublado ou chuvoso; ou, que a probabilidade da bolsa subir ou cair amanhã dependa apenas de ter subido ou caído hoje; ou ainda que a sequência de acordes de uma música dependa apenas da probabilidade do acorde anterior. Podemos citar diversas situações que podem ser estudadas como uma cadeia de Markov.

Sendo assim, as cadeias de Markov são um instrumento muito poderoso e relativamente simples para previsões. Há disciplinas inteiras que estudam cadeias de Markov e aplicações em diversas áreas. São usadas em biologia, administração, economia, química, na própria matemática, entre outras. Em todas essas áreas, essas cadeias podem descrever um modelo que é realizado muitas vezes da mesma maneira, através de uma sequência de etapas.

Para facilitar os cálculos, obter resultados mais seguros e precisos, facilitar o entendimento dos alunos e melhorar a compreensão, pode-se fazer uso de alguns recursos tecnológicos como calculadoras e/ou computadores.

Capítulo 1

Definições

1.1 Cadeia de Markov

Cadeia de Markov é uma sequência de estados seguindo o processo de Markov.

Processo de Markov é um processo em que a probabilidade de transição de um fenômeno depende apenas do estado em que ele se encontra e do estado a seguir. Em outras palavras, é o processo de passar de um estado para outro dentro de um sistema em que algumas passagens de transições têm mais probabilidade de acontecer do que outras, ou seja, é um tipo de processo onde as distribuições de probabilidade para os passos futuros do processo dependem somente do estado presente, desconsiderando como o processo chegou a tal estado, onde o espaço de estados é discreto (enumerável). Por exemplo, a temperatura em certa região pode estar fria ou quente; o tempo em determinada cidade pode estar ensolarado, nublado ou chuvoso; em música, pode-se determinar os possíveis acordes posteriores desde que se conheça o acorde atual; uma pessoa pode estar emocionalmente feliz, triste, tensa ou irritada; o sistema pode mudar de um estado para outro. Supondo que se observa o estado do sistema em períodos fixos de tempo. Em muitas aplicações, conhecemos o estado atual do sistema e queremos prever o estado no próximo período de observação ou em algum período futuro.

Suponhamos por exemplo, que numa determinada região, observa-se que se um ano for chuvoso, a probabilidade de o ano seguinte seja igualmente chuvoso é $\frac{1}{4}$, e a probabilidade de que haja seca é $\frac{3}{4}$. Ainda, em ocorrendo seca num ano, a probabilidade de que também ocorra no seguinte é a mesma de que seja um ano chuvoso, isto é, $\frac{1}{2}$. Suponhamos, para termos um indicador de situação, que as probabilidades não mudem com o decorrer do tempo. Os estados possíveis para este processo são, pois: chuva (C) e seca(S).

Podemos ter, então, as seguintes sequências de acontecimentos conforme o Diagrama de Árvore na figura 1.1.

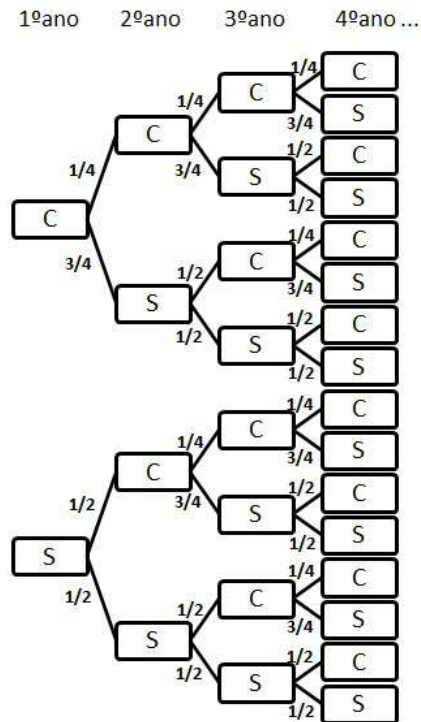


Figura 1.1:

Assim, sabendo que no primeiro ano houve seca, a probabilidade de que chova no terceiro ano, ou seja, a probabilidade que chova após 2 anos de um ano de seca será dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Conforme o número de anos aumenta, as contas se tornam mais complicadas. Desse modo, para previsões a longo prazo, temos que procurar outro procedimento. Isto pode ser feito se introduzirmos alguns conceitos sobre a Cadeia de Markov.

1.2 Diagrama de Transição de Estado

Uma maneira alternativa para reproduzir uma Cadeia de Markov, é utilizar uma representação gráfica denominada Diagrama de Transição de Estado. Neste diagrama são visualizados:

- os estados (representado por círculos);
- as transições (representadas por arcos ou flechas);
- as probabilidades das transições.

Os sentidos dos arcos indicam a probabilidade de transição de um estado i para um estado j . De modo geral, pode-se representar os estados e as probabilidades de transição, respectivamente, por E_i e P_{ij} , onde i e j são um índices que identificam os vários estados possíveis (logo P_{ij} é a probabilidade de haver uma transição do estado E_i para o estado E_j). A partir desta generalização, pode-se desenhar um diagrama, conforme a figura 1.2:

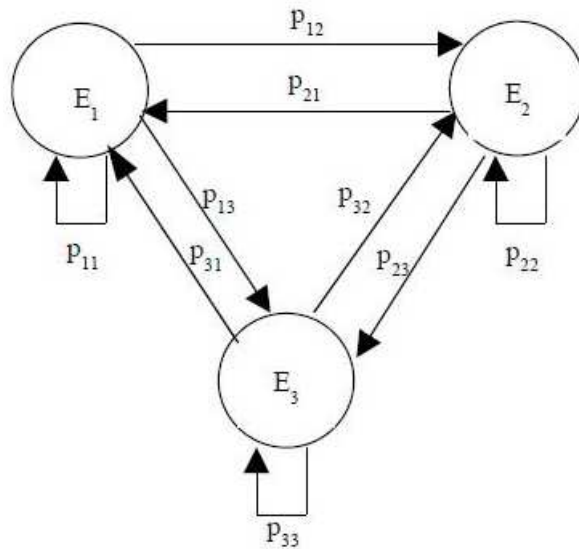


Figura 1.2: Diagrama de Transição

Exemplos:

Exemplo 1.

Suponha que o tempo em uma determinada região é chuvoso ou ensolarado. Devido aos registros existentes, determinou-se que a probabilidade de se ter um dia chuvoso logo após um dia ensolarado é de $\frac{1}{3}$, e a probabilidade de se ter um dia ensolarado após um dia chuvoso é de $\frac{1}{2}$. Se representarmos por E_1 o estado de um dia ensolarado e por E_2 o de um dia chuvoso, então o diagrama de transição dessa cadeia de Markov é:

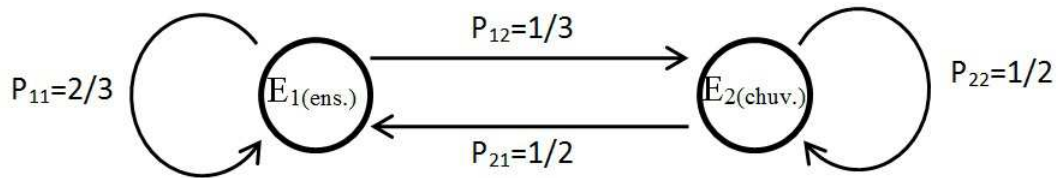


Figura 1.3: Diagrama do exemplo 1

Exemplo 2.

Sabe-se que o movimento de grupos de pessoas, de uma região para outra é um objeto de estudo dos demógrafos. Consideremos um modelo simples para a variação da população de uma cidade e dos subúrbios vizinhos ao longo de um determinado período de anos. Suponhamos que um estudo demográfico mostre que em cada ano, aproximadamente 5%

da população da cidade se muda para o subúrbio (isto significa que 95% permanecem na cidade) enquanto 3% da população dos subúrbios se mudam para cidade (isto é, 97% permanecem no subúrbio). Se representarmos por E_1 a população da cidade e por E_2 a população do subúrbio, então o diagrama de transição dessa cadeia de Markov é:

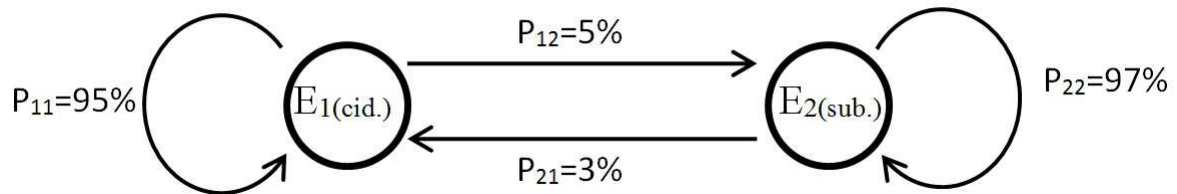


Figura 1.4: Diagrama do exemplo 2

Exemplo 3.

Uma locadora de automóveis tem três lojas de atendimento, denotadas por 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três lojas e devolver o carro para qualquer uma das três lojas. O gerente percebe que os clientes costumam devolver os carros com as seguintes probabilidades: Quem aluga da loja 1 tem 10% de chance de devolver na loja 2 e 10% de chance de devolver na loja 3; Quem aluga da loja 2 tem 30% de chance de devolver na loja 1 e 50% de chance de devolver na loja 3; Quem aluga da loja 3 tem 20% de chance de devolver na loja 1 e 60% de chance de devolver na loja 2. Se representarmos por E_1 , E_2 e E_3 as lojas 1, 2 e 3 respectivamente, então o diagrama de transição dessa cadeia de Markov será:

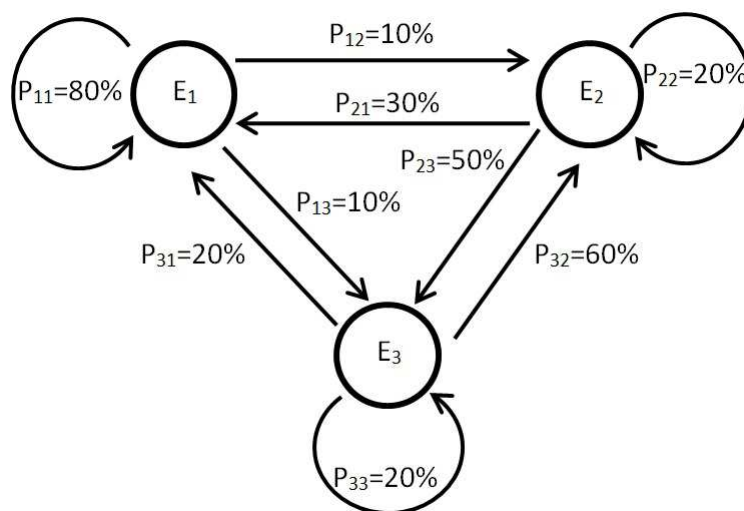


Figura 1.5: Diagrama do exemplo 3

1.3 Vetor Probabilidade

Definimos como vetor de probabilidade a matriz linha que contém as probabilidades de transição de um estado para outros estados em um intervalo de tempo discreto. A generalização do vetor de probabilidade pode ser dada por:

$$V_i = \left[P_{i1} \quad P_{i2} \quad P_{i3} \quad \dots \quad P_{ik} \right],$$

onde:

P_{i1} indica a probabilidade de haver transição do estado E_i para o estado E_1 ,

P_{i2} indica a probabilidade de haver transição do estado E_i para o estado E_2 ,

P_{i3} indica a probabilidade de haver transição do estado E_i para o estado E_3 ,

...

P_{ik} indica a probabilidade de haver transição do estado E_i para o estado E_k .

Deve-se observar que os elementos de um vetor de probabilidade são não negativos e que a soma dos mesmos sempre será igual a 1.

É importante destacar também, que um vetor de probabilidade na n -ésima observação é indicado por $V_i^{(n)}$, sendo assim:

$V_i^{(0)}$ é o vetor de probabilidade numa observação inicial,

$V_i^{(1)}$ é o vetor de probabilidade numa primeira observação,

$V_i^{(2)}$ é o vetor de probabilidade numa segunda observação, e assim sucessivamente.

Utilizando os exemplos da seção 1.2 e uma vez que todas as probabilidades sejam conhecidas, teremos:

Para o exemplo 1, exemplo do tempo:

$$V_1 = \left[\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right]$$

$$V_2 = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]$$

Para o exemplo 2, da migração:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 3\% & 97\% \end{bmatrix}$$

Para o exemplo 3, da locadora:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}$$

1.4 Matriz de Transição da Cadeia de Markov

Nota-se que para cada estado deve haver um vetor de probabilidade. À união de todos os vetores de probabilidade em uma matriz $M = [P_{ij}]$ dá-se o nome de matriz de transição. Por exemplo, numa cadeia de Markov de k estados, a matriz de transição tem o seguinte formato:

$$M = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2k} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1} & P_{k2} & P_{k3} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix},$$

onde i indica o estado precedente e j o novo estado.

Nesta matriz, P_{32} é a probabilidade do sistema mudar do estado 3 para o estado 2, P_{22} é a probabilidade de o sistema continuar no estado 2 após ter sido observado no estado 2, P_{21} é a probabilidade de o sistema mudar do estado 2 para o estado 1, e assim por diante.

É importante observar que como P_{ij} é uma probabilidade, temos então que $0 \leq P_{ij} \leq 1$ ($1 \leq i, j \leq k$). Deve-se notar também, que as cadeias de Markov têm a propriedade que as entradas em qualquer linha somam 1. Isto se deve ao fato de que se o sistema está no estado i em um determinado período de observação, então ele tem que estar em um dos k estados possíveis (inclusive pode permanecer no estado i) no próximo período de observação. Desse modo:

$$P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \dots + P_{ik} = 1 \tag{1.1}$$

A matriz de transição $M = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2k} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1} & P_{k2} & P_{k3} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix}$, também é denominada Matriz Estocástica, Matriz de Probabilidade ou Matriz de Markov.

Nos exemplos da seção 1.2, teríamos:

Para o exemplo 1, exemplo do tempo:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Para o exemplo 2, da migração:

$$M = \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{bmatrix},$$

Para o exemplo 3, da locadora:

$$M = \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}$$

1.5 Determinação de Estados Futuros (Probabilidades Futuras)

A matriz de transição juntamente com vetor de probabilidade são úteis na determinação de estados futuros ao longo do tempo. Suponhamos que seja conhecido o vetor de probabilidade $V_i^{(0)}$ de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial. O próximo teorema nos permitirá determinar os vetores de probabilidade $V_i^{(1)}$, $V_i^{(2)}$, $V_i^{(3)}$, ..., $V_i^{(n)}$, etc, nas observações subsequentes.

Teorema 1 *Se M é a matriz de transição de uma cadeia de Markov, $V_i^{(1)} = V_i^{(0)}$, visto que na primeira observação temos o próprio vetor probabilidade de transição de um estado para outros estados e considerando $V_i^{(n)}$ o vetor de probabilidade na n ésima observação, para $n \geq 2$ então:*

$$V_i^{(n)} = V_i^{(n-1)} \cdot M$$

A prova deste teorema envolve ideias da teoria de probabilidades e não será dada aqui. (O leitor interessado pode consultar um texto mais especializado, por exemplo o de A. Bruce Clarke e Ralph L. Disney, Probabilidade e Processos Estocásticos.). No entanto, para um melhor entendimento podemos observar um sistema com dois estados E_1 e E_2 , onde P_{ij} é a probabilidade do sistema mudar do estado i para o estado j , $V_1^{(0)}$ é o vetor probabilidade inicial conforme o diagrama de árvore da figura 1.6.

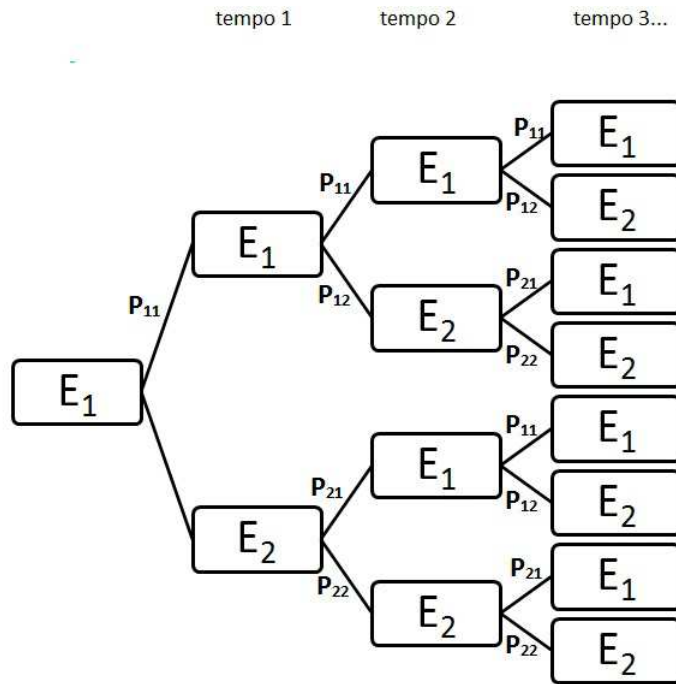


Figura 1.6:

Observando o diagrama, temos:

$$V_1^{(1)} = V_1^{(0)} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(2)} = \begin{bmatrix} P_{11} \cdot P_{11} + P_{12} \cdot P_{21} & P_{11} \cdot P_{12} + P_{12} \cdot P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(2)} = V_1^{(1)} \cdot M$$

$$V_1^{(3)} = \begin{bmatrix} P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{11} + P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{21} + P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{11} + P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{21} & P_{11} \cdot P_{11} \cdot P_{12} + \\ + P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{22} + P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{12} + P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{22} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(3)} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} \cdot P_{11} + P_{12} \cdot P_{21} & P_{11} \cdot P_{12} + P_{12} \cdot P_{22} \\ P_{21} \cdot P_{11} + P_{22} \cdot P_{21} & P_{21} \cdot P_{12} + P_{22} \cdot P_{22} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(3)} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(3)} = V_1^{(2)} \cdot M$$

Desse modo podemos averiguar a veracidade do teorema 1, para $V_1^{(2)}$, $V_1^{(3)}$, etc.

Desse teorema segue que:

$$V_i^{(1)} = V_i^{(0)}$$

$$V_i^{(2)} = V_i^{(1)} \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M$$

$$V_i^{(3)} = V_i^{(2)} \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M^2$$

$$V_i^{(4)} = V_i^{(3)} \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M^2 \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M^3$$

.

.

.

$$V_i^{(n)} = V_i^{(n-1)} \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M^{(n-2)} \cdot M = V_i^{(0)} \cdot M^{(n-1)}$$

$$V_i^{(n)} = V_i^{(0)} \cdot M^{(n-1)}$$

Sendo assim, o vetor-estado inicial $V_i^{(0)}$ e a matriz de transição M determinam $V_i^{(n)}$ para $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. O vetor resultante desta equação conterá as probabilidades de transição de um estado E_i após um período n .

Para um melhor entendimento vamos aos exemplos da seção 1.2.

Para efetuar os cálculos com as matrizes, poderemos usar um software como o Excel ou um chamado Winmat. O Winmat, além de ser um software livre e de fácil manipulação, permite que se definam e construam matrizes, realizem operações básicas como soma, subtração e produto. O uso desses softwares pode ajudar na obtenção de resultados numéricos de forma rápida e precisa, possibilitando aos discentes maior atenção ao conteúdo.

Exemplo 1:

Desse exemplo já temos o diagrama de transição, os vetores de probabilidade e a matriz de transição.

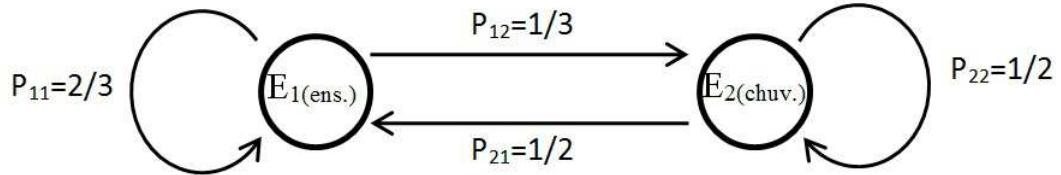


Figura 1.7: Diagrama do exemplo 1

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Caso se queira obter a probabilidade de um dia chuvoso após 4 dias de um dia ensolarado, têm-se a seguinte equação e sua resolução:

$$V_1^{(4)} = V_1^{(0)} \cdot M^3$$

$$V_1^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{65}{108} & \frac{43}{108} \\ \frac{43}{72} & \frac{29}{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{389}{648} & \frac{259}{648} \end{bmatrix}$$

$$V_1^{(4)} \approx \begin{bmatrix} 60,03\% & 39,97\% \end{bmatrix}$$

O vetor $V_1^{(4)} \approx \begin{bmatrix} 60,03\% & 39,97\% \end{bmatrix}$ indica que um dia ensolarado tem uma probabilidade de quase 40% de estar chuvoso após quatro dias, assim como tem a probabilidade de aproximadamente 60% de continuar ensolarado.

Exemplo 2:

Desse exemplo também já temos o diagrama de transição, os vetores de probabilidade e a matriz de transição.

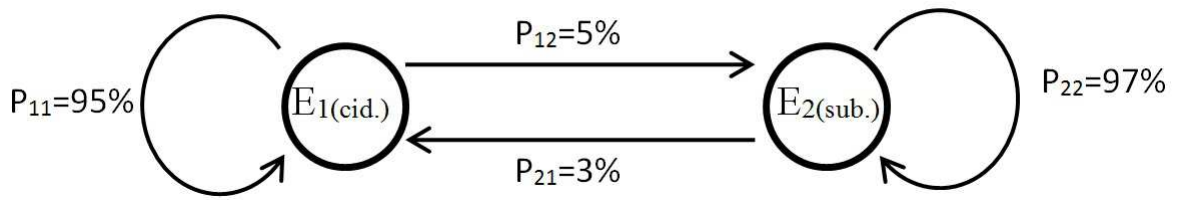


Figura 1.8: Diagrama do exemplo 2

$$V_1 = \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 3\% & 97\% \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{bmatrix}$$

Supondo uma população inicial na cidade de 600.000 habitantes e no subúrbio 400.000 habitantes, podemos analisar os efeitos dessa migração ao longo de dois anos, verificando a quantidade de habitantes em cada lugar ao longo do tempo. Observemos:

$$V_1^{(2)} = V_1^{(0)} \cdot M = \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90,4\% & 9,6\% \end{bmatrix}$$

e

$$V_2^{(2)} = V_2^{(0)} \cdot M = \begin{bmatrix} 3\% & 97\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,76\% & 94,24\% \end{bmatrix}$$

Desse modo a matriz de transição no segundo ano será:

$$M = \begin{bmatrix} 90,4\% & 9,6\% \\ 5,76\% & 94,24\% \end{bmatrix}$$

Tal matriz especifica que 90,4% da população da cidade permanecerão na cidade e 9,6% irão para o subúrbio. Mostra também que 5,76% dos que vivem no subúrbio irão para a cidade e 94,24% permanecerão. Se quisermos saber a população em cada região fazemos: $\begin{bmatrix} 600.000 & 400.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 90,4\% & 9,6\% \\ 5,76\% & 94,24\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 565.440 & 434.560 \end{bmatrix}$, ou seja, após dois anos teremos 565.440 habitantes na cidade e 434.560 no subúrbio.

Exemplo 3:

Dispomos desse exemplo o diagrama de transição, os vetores de probabilidade e a matriz de transição.

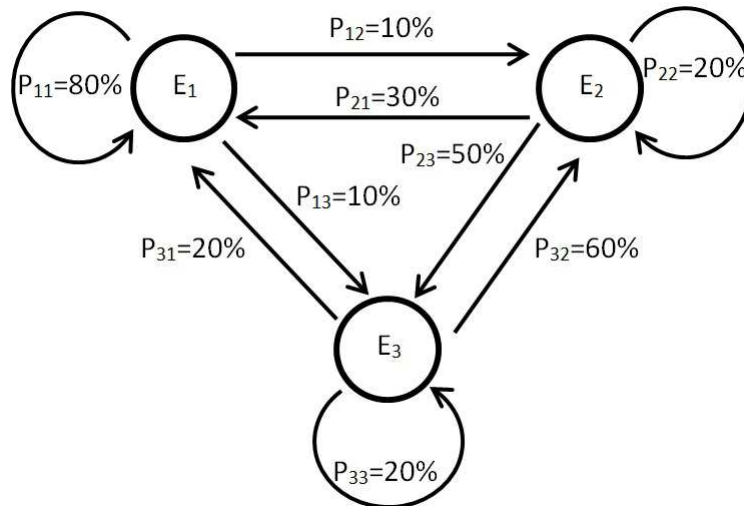


Figura 1.9: Diagrama do exemplo 3

$$V_1 = \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}$$

Digamos que um carro é alugado da loja 2. Podemos analisar os vetores estados posteriores desse estado.

$$V_2^{(1)} = V_2^{(0)} \cdot M^0 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(2)} = V_2^{(0)} \cdot M^1 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40\% & 37\% & 23\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(3)} = V_2^{(0)} \cdot M^2 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 47,7\% & 25,2\% & 27,1\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(4)} = V_2^{(0)} \cdot M^3 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 51,1\% & 26,1\% & 22,8\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(5)} = V_2^{(0)} \cdot M^4 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 53,3\% & 24\% & 22,7\% \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$V_2^{(10)} = V_2^{(0)} \cdot M^9 = \begin{bmatrix} 30\% & 20\% & 50\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80\% & 10\% & 10\% \\ 30\% & 20\% & 50\% \\ 20\% & 60\% & 20\% \end{bmatrix}^9 = \begin{bmatrix} 55,6\% & 23\% & 21,4\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(11)} = V_2^{(0)} \cdot M^{10} = \begin{bmatrix} 55,7\% & 23\% & 21,3\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(12)} = V_2^{(0)} \cdot M^{11} = \begin{bmatrix} 55,7\% & 23\% & 21,3\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(13)} = V_2^{(0)} \cdot M^{12} = \begin{bmatrix} 55,7\% & 23\% & 21,3\% \end{bmatrix}$$

$$V_2^{(14)} = V_2^{(0)} \cdot M^{13} = \begin{bmatrix} 55,7\% & 23\% & 21,3\% \end{bmatrix}$$

Devemos fazer duas observações neste exemplo:

1º) Não é necessário saber quanto tempo o cliente ficou com o carro, visto que num processo de Markov o tempo entre as observações não necessita ser regular.

2º) Para todos os valores de n maiores do que 11, todos os vetores-probabilidade são iguais a $V_2^{(11)}$ até uma casa decimal, ou seja, os vetores-probabilidade convergem a um vetor fixo à medida que n cresce.

1.6 Cadeias de Markov Ergódicas

Uma cadeia de Markov é denominada de ergódica se é possível ir de um estado para qualquer outro da cadeia (não necessariamente em um único passo). Os exemplos 1, 2 e 3 da seção 1.2 são exemplos de cadeias ergódicas.

É possível também determinar se uma cadeia é ergódica a partir de uma matriz de transição, para isso, basta verificar se há probabilidades nulas e se estas tornam algum estado inalcançável.

Como exemplo, a matriz de transição seguinte é ergódica, mesmo havendo probabilidades nulas. Isto pode ser verificado pelo seu diagrama de transição.

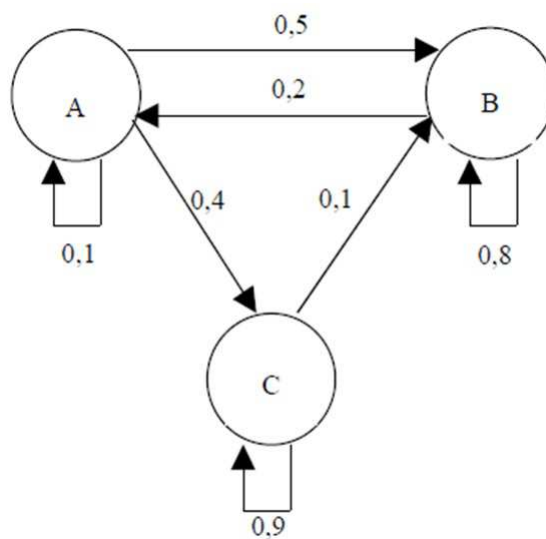


Figura 1.10:

$$M = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Uma cadeia não-ergódica, também chamada de cadeia absorvente, é uma cadeia de Markov onde existem estados onde não é possível realizar a transição para nenhum outro estado. Como exemplo podemos citar uma variante do jogo “A Ruína do Jogador” .

No início do jogo, o jogador tem somente R\$2,00. De acordo com as regras do jogo, o jogador deve apostar apenas R\$1,00 por vez. Com probabilidade $p\%$ o jogador ganha R\$1,00 e com probabilidade $(1 - p)\%$ o jogador perde R\$1,00. O jogo acaba, sem direito a empréstimos ou prorrogações, quando o jogador perde tudo ou quando atinge R\$3,00.

Considerando-se “ Q_t ” como a quantidade de capital que o jogador tem em um determinado instante “ t ”, existem 4 estados possíveis ($Q_t = 0, 1, 2, 3$). De acordo com o diagrama de transição desse exemplo, verifica-se que estando no estado 0 ou 3 não é possível ir a nenhum outro, ou seja, temos uma cadeia absorvente.

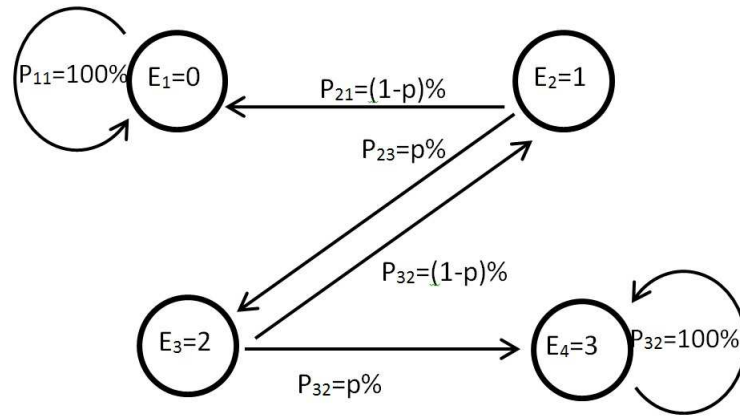


Figura 1.11:

1.7 Cadeias Regulares

Uma matriz de transição é regular se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas. Uma cadeia de Markov governada por uma matriz de transição regular é chamada de cadeia de Markov regular. Toda cadeia regular é também ergódica, conforme verificaremos. Vejamos o seguinte exemplo:

Uma guarda de trânsito é designada para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na figura seguinte.

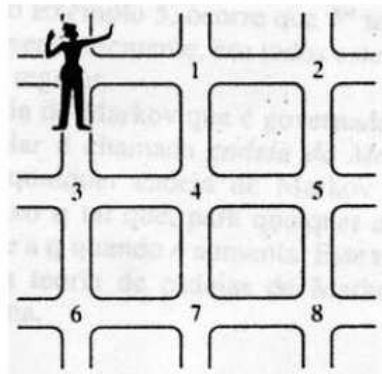


Figura 1.12:

Ela é instruída a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, ou permanecer no mesmo cruzamento ou seguir para um cruzamento adjacente. Para evitar que ela estabeleça um padrão, ela deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ela está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Cada dia ela começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição M desta cadeia de Markov é:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Após 4 horas, a matriz de transição terá todas as entradas positivas, logo a matriz M , é regular. Sendo assim, como essa cadeia de Markov é governada por uma matriz de transição regular, então ela é uma Cadeia de Markov Regular.

$$M^4 = \begin{bmatrix} 0,183 & 0,179 & 0,075 & 0,183 & 0,174 & 0,045 & 0,089 & 0,072 \\ 0,179 & 0,201 & 0,045 & 0,188 & 0,187 & 0,030 & 0,074 & 0,096 \\ 0,075 & 0,045 & 0,183 & 0,183 & 0,089 & 0,179 & 0,174 & 0,072 \\ 0,110 & 0,113 & 0,110 & 0,195 & 0,130 & 0,113 & 0,130 & 0,101 \\ 0,130 & 0,140 & 0,067 & 0,162 & 0,190 & 0,056 & 0,131 & 0,124 \\ 0,045 & 0,030 & 0,179 & 0,188 & 0,074 & 0,201 & 0,187 & 0,096 \\ 0,067 & 0,056 & 0,130 & 0,162 & 0,131 & 0,140 & 0,190 & 0,124 \\ 0,072 & 0,096 & 0,072 & 0,168 & 0,165 & 0,096 & 0,165 & 0,164 \end{bmatrix}$$

Também como exemplo, podemos tomar a matriz M a seguir que possui um elemento nulo na terceira linha. Porém, a potência M^2 não possui nenhum elemento nulo. Sendo assim, trata-se de uma cadeia regular.

$$M = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} \Rightarrow M^2 = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,16 & 0,19 \\ 0,15 & 0,52 & 0,33 \\ 0,01 & 0,16 & 0,83 \end{bmatrix}$$

Como já vimos, em uma potência de M , ou seja, em um momento futuro, se a matriz de transição não possui elementos nulos, isto indica que, em algum momento, todas as transições serão possíveis, desse modo a cadeia é ergódica.

Já as potências da próxima matriz formam padrões em que as probabilidades nulas não desaparecem. Logo, estas matrizes representam cadeias não regulares.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como estes padrões se repetem indefinidamente, tais matrizes de transição nunca deixarão de ter elementos nulos, porém, isso não indica que se trata obrigatoriamente de uma cadeia não-ergódica, uma vez que há cadeias ergódicas não regulares.

1.8 Estado Estacionário

Para toda cadeia ergódica regular existe um estado estacionário, onde as probabilidades de transição estabilizam após o período transitório. Em uma cadeia em estado estacionário, as probabilidades de transição não dependem do estado inicial.

É importante notar, que ao obter a sequência de vetores probabilidade $V_i^{(1)}, V_i^{(2)}, V_i^{(3)}, \dots, V_i^{(n)}$, estamos com uma sequência de vetores que pode convergir para um vetor denotado por Π quando n tende ao infinito, ou seja, $V_i^{(n)} = \Pi$ quando $n \rightarrow \infty$. Nesse caso, definimos o vetor Π de vetor estacionário para o problema onde é conhecida a matriz estocástica M e o vetor de condições iniciais $V_i^{(0)}$. Observemos o exemplo 3, para $V_2^{(n)}$, com $n > 10$, da seção 1.5.

Teorema 2 *Se M é a uma matriz de transição regular, então*

$$M^n \rightarrow \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix},$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde os π_j são números positivos tais que $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s = 1$.

Não iremos provar este teorema aqui (O leitor interessado pode consultar um texto mais especializado, por exemplo o J. Kemeny e J. Snell, Finite Markov Chains, Nova Iorque: Springer Verlag, 1976.).

Chamemos $\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$ de Q e $\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$ de Π . Desse modo Q é uma matriz de transição com todas as linhas iguais ao vetor de probabilidade Π . Essa matriz Q tem a seguinte propriedade:

se V é um vetor de probabilidade, então:

$$V \cdot Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

$$V \cdot Q = \begin{bmatrix} v_1 \cdot \pi_1 + v_2 \cdot \pi_1 + \dots + v_s \cdot \pi_1 & v_1 \cdot \pi_2 + v_2 \cdot \pi_2 + \dots + v_s \cdot \pi_2 & \dots & v_1 \cdot \pi_s + \\ + v_2 \cdot \pi_s + \dots + v_s \cdot \pi_s \end{bmatrix}$$

$$V \cdot Q = \begin{bmatrix} (v_1 + v_2 + \dots + v_s) \cdot \pi_1 & (v_1 + v_2 + \dots + v_s) \cdot \pi_2 & \dots & (v_1 + v_2 + \dots + v_s) \cdot \pi_s \end{bmatrix}$$

Como V é um vetor probabilidade, então $v_1 + v_2 + \dots + v_s = 1$, logo:

$$V \cdot Q = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

$$V \cdot Q = \pi$$

Isso nos mostra que Q transforma qualquer vetor de probabilidade V num vetor de probabilidade Π fixo. Tal vetor Π nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 3 *Se M é a uma matriz de transição regular, e V é um vetor de probabilidade qualquer, então $V \cdot M^n \rightarrow \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix} = \Pi$, quando $n \rightarrow \infty$, onde Π é um vetor de probabilidade fixo, independente de n , cujas entradas são todas positivas.*

Demonstração: Como, pelo teorema 2, $M^n \rightarrow Q$, quando $n \rightarrow \infty$, então $V \cdot M^n \rightarrow V \cdot Q = \Pi$, quando $n \rightarrow \infty$.

Desse modo, para uma cadeia de Markov regular, o sistema sempre converge para um vetor de estado Π fixo, denominado de *Vetor de Estado Estacionário* da cadeia de Markov regular.

Para calcular o vetor Π podemos utilizar o seguinte teorema.

Teorema 4 *O vetor de estado estacionário Π de uma matriz de transição regular M é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação $\Pi \cdot M = \Pi$*

Demonstração: Consideremos que $M^n \cdot M = M^{n+1}$. Pelo teorema 2, $M^n \rightarrow Q$ e $M^{n+1} \rightarrow Q$ quando $n \rightarrow \infty$, logo temos $Q \cdot M = Q$. Sendo assim, qualquer uma das linhas desta equação matricial dá $\Pi \cdot M = \Pi$. Suponhamos que α é um vetor de probabilidade tal que $\alpha \cdot M = \alpha$. Então também $\alpha \cdot M^n = \alpha$. Pelo teorema 3, resulta que $\Pi = \alpha$, pois $\alpha \cdot M^n \rightarrow \Pi$ quando $n \rightarrow \infty$.

O teorema 4 pode ser exposto do seguinte modo:

$$\Pi \cdot M = \Pi \implies \Pi \cdot M = \Pi \cdot I \implies \Pi \cdot M - \Pi \cdot I = 0 \implies \Pi \cdot (M - I) = 0$$

O sistema linear homogêneo $\Pi \cdot (M - I) = 0$, tem um único vetor-solução Π com entradas não negativas que satisfazem a condição $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s = 1$.

Como exemplo, podemos obter os vetores estacionários resolvendo os sistemas dos exemplos 2 e 3. Vejamos:

Para o exemplo 2:

$$\Pi \cdot (M - I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,05 & 0,05 \\ 0,03 & -0,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,05\pi_1 + 0,03\pi_2 & 0,05\pi_1 - 0,03\pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -0,05\pi_1 + 0,03\pi_2 = 0 \\ 0,05\pi_1 - 0,03\pi_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,05\pi_1 - 0,03\pi_2 = 0 \\ 0,05\pi_1 - 0,03\pi_2 = 0 \end{cases}$$

Observemos que o sistema nos leva a uma única equação independente. Assim, somando a ela a equação $\pi_1 + \pi_2 = 1$, teremos:

$$\begin{cases} 0,05\pi_1 - 0,03\pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{8} \\ \pi_2 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Consequentemente $\Pi = \left[\frac{3}{8} \quad \frac{5}{8} \right]$ é o vetor estacionário desta cadeia de Markov regular. Isto significa que, em longo prazo, 37,5% da população permanecem na cidade, ou seja, 375.000 habitantes e 62,5% permanecem no subúrbio, isto é, 625.000.

Para o exemplo 3:

$$\Pi \cdot (M - I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & -0,8 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & -0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,2\pi_1 + 0,3\pi_2 + 0,2\pi_3 & 0,1\pi_1 - 0,8\pi_2 + 0,6\pi_3 & 0,1\pi_1 + 0,5\pi_2 - 0,8\pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -0,2\pi_1 + 0,3\pi_2 + 0,2\pi_3 = 0 \\ 0,1\pi_1 - 0,8\pi_2 + 0,6\pi_3 = 0 \\ 0,1\pi_1 + 0,5\pi_2 - 0,8\pi_3 = 0 \end{cases}$$

Escalonando chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 + 0\pi_2 + \frac{34}{13}\pi_3 = 0 \\ 0\pi_1 + \pi_2 + \frac{24}{13}\pi_3 = 0 \end{cases}$$

Observemos que o sistema nos leva a duas equações. Assim somando a ela a equação $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, teremos:

$$\begin{cases} \pi_1 + 0\pi_2 + \frac{34}{13}\pi_3 = 0 \\ 0\pi_1 + \pi_2 + \frac{24}{13}\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{34}{61} \\ \pi_2 = \frac{14}{61} \\ \pi_3 = \frac{13}{61} \end{cases}$$

Conseqüentemente $\Pi = \left[\frac{34}{61} \quad \frac{14}{61} \quad \frac{13}{61} \right]$ é o vetor estacionário desta cadeia de Markov. Isto significa que, em longo prazo, aproximadamente 55,73%, 22,95% e 21,31% dos carros serão devolvidos à loja 1, 2 ou 3 respectivamente. Isso significa dizer que se a loja locadora de automóveis tiver 100 carros, deve projetar suas instalações de modo a ter pelo menos 56 vagas na loja 1, pelo menos 23 vagas na loja 2 e no mínimo 22 vagas na loja 3.

Devemos lembrar que as afirmações, alusivas ao estado estacionário, só podem ser feitas se o fenômeno avaliado se tratar de uma cadeia ergódica regular. Caso se trate de uma cadeia ergódica não regular, a afirmação de que o regime estacionário não pode ser feita com segurança, pois pode haver elementos nulos cíclicos na matriz de transição.

Capítulo 2

Aplicações à Cadeia de Markov

2.1 Criando Música a partir de uma matriz de transição

2.1.1 Noções Elementares sobre Música

Com o intuito de melhor entender a composição musical, definiremos de forma simples, alguns conceitos sobre música.

Música

É a arte de combinar os sons simultânea e sucessivamente, com ordem equilíbrio e proporção dentro do tempo.

Som

Som é um fenômeno físico que compreende a geração e propagação de perturbações de pressão em um fluido que pode ser o ar ou água, por exemplo.

Nota Musical

Nota Musical é um termo empregado para designar o elemento mínimo de um som. Uma nota musical é oriunda de uma fonte sonora, que pode ser, muitas vezes, um instrumento musical. Embora sejam inúmeros os sons empregados na música, para representá-los bastam somente sete notas, denominadas de naturais:

Dó - Ré - Mi - Fá - Sol - Lá - Si

Melodia

Conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva. Podemos dizer de maneira simples que melodia é uma sucessão coerente de sons e silêncios. Quando associamos uma canção,

por exemplo, estamos cantando notas e essa sucessão de notas em música é a melodia.

Harmonia

Conjunto de sons dispostos em ordem simultânea. Também pode ser definida como o estudo das combinações de notas em acordes e seu uso em composição musical.

Acorde

Um acorde é um conjunto de três ou mais notas tocadas em simultâneo. Um conjunto de duas notas chama-se um arpeggio. Os acordes são construídos com base numa nota de referência, à qual se acrescentam depois outras notas. A nota de referência é chamada a tônica do acorde. Existem regras diferentes para adicionar outras notas à tônica, criando-se assim diferentes tipos de acorde: acordes maiores, acordes menores, acordes de quarta, de sétima, e muitos outros. É impossível assobiar um acorde, visto que no mesmo só há a melodia.

Como vimos, podemos construir acordes de três notas para cada uma das notas, nessa ordem: Dó - Ré - Mi - Fá - Sol - Lá - Si.

O acorde de Dó é formado pelas notas dó, mi e sol. Chamamos esse acorde de Dó maior.

O acorde de Ré é formado pelas notas ré, fá e lá. Chamamos esse acorde de Ré maior.

O acorde de Lá é lá, dó e mi, chamamos esse acorde de Lá maior, e assim por diante de modo cíclico.

Como dá pra observar cada acorde é formado pela nota base (tônica), que fica sendo a primeira, mais a terceira e a quinta nota em relação a ela.

Começando com uma nota qualquer vamos dar um número para cada nota, sendo cada um desses números o grau. Sendo assim, temos o 1º grau, o 2º grau até o 7º grau. Da mesma forma temos o acorde do 1º grau, do 2º grau e assim sucessivamente. Essa numeração é bastante importante para a construção da harmonia de uma música. Exemplificando, temos:

Se começarmos com Ré, o grau 1 passa a ser o Ré e o acorde do primeiro grau será Ré, Fá e Lá. Observe a tabela:

1	2	3	4	5	6	7
Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Do

O acorde do 5º grau nessa escala de Ré será Lá, Dó e Mi e assim por diante. Se começarmos com Fá, o acorde correspondente Fá, Lá e Dó será o acorde de grau 1, sendo a ordem sempre cíclica. Veja:

1	2	3	4	5	6	7
Fá	Sol	Lá	Si	Do	Ré	Mi

Minueto

O minueto teve sua origem, como dança, na região de Poitu e seu nome vem de “pas menu” que significa passo miúdo. Sob o reinado de Luís XIV invadiu os salões da corte e se espalhou pela Europa, a ponto de se tornar a principal dança da aristocracia, atingindo o mais alto grau de luxo e magnificência. Como música, o minueto foi usado em várias composições para piano ou orquestra por Mozart, Haydn, Bach entre outros compositores.

Trio

Trio pode designar tanto uma forma musical quanto um grupo de três instrumentos musicais.

2.1.2 Criando Música Aleatoriamente

A arte de tocar e/ou inventar uma música é algo extremamente interessante, motivadora e prazerosa. A música é uma excepcional forma de expressão artística. Devido o fato de a música transmitir emoções, a mesma influência o ser humano, adulto ou criança, sendo objeto de muitos estudos.

Atualmente é possível compor músicas automaticamente, mesmo que a pessoa não tenha nenhuma experiência musical, graças aos avanços da ciência. A história tem mostrado que, apesar de ser um processo artístico subjetivo, a música pode ser um produto de raciocínios lógicos ou ainda de procedimentos mecânicos. Como exemplo, podemos citar Wolfgang Amadeus Mozart, que em 1787 criou o seu Jogo de Dados Musical para compor minuetos. A intenção de Mozart era fazer com que leigos em música tivessem a sensação de compor uma peça musical.

Para estimular pessoas ao estudo da música pode-se utilizar métodos automáticos, fazendo com que as mesmas, mesmo que de forma indireta, tenham a sensação de estar compondo. Comercialmente, vemos hoje em dia jogos que dão a sensação de tocar ou influenciar a execução de uma música mesmo que não se possua conhecimento ou técnica musical, a exemplos como Guitar Hero e o Rock Band.

A automatização no processo de compor uma música pode ser feito através de técnicas que utilizam a aplicação de um algoritmo. Dentre essas técnicas podemos citar: combinação de padrões e sequência, autômatos celulares, regras e restrições, gramáticas e as cadeias de Markov.

O uso de cadeias de Markov, além de ser umas das primeiras formas de composição algorítmica utilizadas, tornou-se uma das mais populares devido a sua simplicidade e pelo fato de produzir estilos musicais baseados num determinado estilo previamente analisado.

O processo markoviano de se gerar uma música pode se dar do seguinte modo: uma determinada música é processada lendo-se cada nota e estatisticamente calcula-se a probabilidade desta nota ser tocada, dada que uma ou mais notas foram tocadas anteriormente. Se uma nota depende apenas de uma nota anterior, chama-se cadeia de Markov de primeira ordem, objeto de nosso estudo. Se uma nota depende de duas anteriores, chama-se cadeia de Markov de segunda ordem. E assim por diante. Quanto maior a ordem da cadeia, mais a música criada será parecida em estilo com o da música fornecida. O caso aqui mencionado será o de primeira ordem.

2.1.3 Gerando uma música jogando dados

Tendo em vista que o objetivo é introduzir Cadeias de Markov para os alunos do ensino médio, mostrando a sua aplicabilidade inclusive na composição musical, construiremos um algoritmo para tal. Partiremos da premissa que o público-alvo possui pouca experiência musical ou quase nenhuma. Além disso, utilizaremos um método semelhante ao criado por Mozart.

Suponhamos que escolhemos várias músicas de um mesmo estilo e fizemos uma estatística contando quantas vezes nessas músicas se faz a transição de um acorde para outro incluindo as vezes que permanecem no mesmo acorde. Nota-se facilmente que quando se sabe o grau que está sendo tocado fica evidente prever qual será o próximo acorde. Isto se deve ao fato de que cada estilo musical tem suas transições mais comuns, por exemplo, no Jazz os acordes se relacionam de um modo diferente da bossa nova.

Supondo que a estatística tenha sido detalhada na seguinte tabela “A”:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
II	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0
III	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0
IV	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{6}{7}$	0	0
V	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
VI	0	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
VII	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0

As linhas representam as entradas e as colunas as saídas, onde os graus dos acordes das linhas representam o estado em que você se encontra, ou seja, o acorde que está sendo tocado. O grau dos acordes das colunas representam o estado pra onde se deseja ir, isto é, o acorde que será tocado.

Os números da tabela são as probabilidades de transição, ou seja, a chance de você sair de um estado para outro. Observa-se que algumas transições têm probabilidade zero de acontecer.

Supondo que Sol seja o grau 1 e resolve-se começar tocando o acorde sobre o grau 5, que nesse caso é o Ré maior, logo só existem duas possibilidades: ir para o grau 1, que é o Sol maior e tocar o acorde de Sol maior ou permanecer no grau 5 que é o Ré maior e tocar novamente o acorde de Ré maior. Observe a tabela.

	Sol	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá
Sol	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
Lá	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0
Si	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0
Dó	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{6}{7}$	0	0
Ré	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
Mi	0	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
Fá	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0

Com a tabela anterior é possível descobrir quais serão os possíveis próximos acordes, usando a teoria estudada na seção 1.5.

Podemos fazer a proposta de um jogo semelhante ao criado por Mozart no século XVIII. Criaremos uma sequência de acordes com o auxílio do acaso usando dois dados distintos, porém criaremos uma nova matriz denominada de matriz do tipo acumulada “B”, a partir da tabela anterior “A”. Nessa matriz acumulada, cada linha corresponde a soma das probabilidades das entradas anteriores até obtermos resultado 1, de acordo com o seguinte critério:

$$b_{in} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{in} = 0, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}, & \text{se } a_{in} \neq 0. \end{cases}$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
II	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0
III	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0
IV	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{6}{7}$	0	0
V	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
VI	0	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0
VII	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0

 \rightarrow

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$
II	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{7}$	0	0
III	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{7}$	0
IV	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
V	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
VI	0	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
VII	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0

Notemos que em cada linha dessa matriz B, a última entrada não nula é sempre igual a 1, visto que ela é a soma de todas as probabilidades anteriores da linha.

Lembremos também que quando jogamos dois dados a soma “ s ” das faces superiores obtidas é maior ou igual a 2 e menor ou igual a 12 ($2 \leq s \leq 12$). Sendo assim, multiplicaremos a matriz B por 12 e arredondaremos os resultados chegando a matriz C com elementos entre 0 e 12.

	Sol	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá
Sol	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{7}$
Lá	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{7}$	0	0
Si	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{7}$	0
Dó	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
Ré	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
Mi	0	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0
Fá	$\frac{6}{7}$	0	0	0	$\frac{7}{7}$	0	0

→

	Sol	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá
Sol	$\frac{12}{7}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{48}{7}$	$\frac{60}{7}$	$\frac{72}{7}$	$\frac{84}{7}$
Lá	0	0	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{84}{7}$	0	0
Si	0	0	0	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{84}{7}$	0
Dó	$\frac{12}{7}$	0	0	0	$\frac{84}{7}$	0	0
Ré	$\frac{72}{7}$	0	0	0	$\frac{84}{7}$	0	0
Mi	0	$\frac{72}{7}$	0	0	$\frac{84}{7}$	0	0
Fá	$\frac{72}{7}$	0	0	0	$\frac{84}{7}$	0	0

$C =$

	Sol	Lá	Si	Dó	Ré	Mi	Fá
Sol	2	3	5	7	9	10	12
Lá	0	0	0	2	12	0	0
Si	0	0	0	0	2	12	0
Dó	2	0	0	0	12	0	0
Ré	10	0	0	0	12	0	0
Mi	0	10	0	0	12	0	0
Fá	10	0	0	0	12	0	0

Considerando que o Sol é o grau 1 e partindo do Ré, podemos lançar os dados. Supondo que tenha dado $s = 8$. Como iniciamos em Ré, que é o grau 5, temos duas possibilidades, ou vamos para o grau 1 que é o Sol, ou permanecemos no grau 5 que é o Ré. O que fazer então?

Procurando manter as probabilidades iniciais da matriz A, podemos estabelecer as seguintes regras para cada linha da matriz C:

Para a linha 1: Se tirarmos um número

$s = 2$ ou $s = 10$, iremos pro Sol;

$s = 3$ ou $s = 11$, iremos pro Lá;

$s = 5$, iremos pro Si;

$s = 6$, pro Dó;

$s = 8$, pro Mi;

$s = 9$, pro Ré;

$s = 12$ ou $s = 4$, iremos pro Fá.

Para a linha 2: Se tirarmos um número

$s = 2$ ou $s = 4$, iremos pro Dó;
 s igual 12, 11, 10, 9, 8, 6 ou 5, iremos pro Ré.

Para a linha 3: Se tirarmos um número
 $s = 2$ ou $s = 4$, iremos pro Ré;
 s igual 12, 11, 10, 9, 8, 6 ou 5, iremos pro Mi.

Para a linha 4: Se tirarmos um número
 $s = 2$ ou $s = 4$, iremos pro Sol;
 s igual 12, 11, 10, 9, 8, 6 ou 5, iremos pro Ré.

Para a linha 5: Se tirarmos um número
 s igual a 10, 9, 8, 7, 5 ou 3, iremos pro Sol;
 s igual a 12, 11 ou 2 iremos Ré.

Para a linha 6: Se tirarmos um número
 s igual a 10, 9, 8, 7, 5 ou 3, iremos pro Lá;
 s igual a 12, 11 ou 2 iremos Ré.

Para a linha 7: Se tirarmos um número
 s igual a 10, 9, 8, 7, 5 ou 3, iremos pro Sol;
 s igual a 12, 11 ou 2 iremos Ré.

Voltando ao jogo. De acordo com as regras acima, como tiramos 8 iremos para o Sol. Jogando os dados mais quatro vezes obtivemos 6, 5, 10 e 12, logo obtivemos a seguinte sequência de acordes: Ré, Sol, Dó, Ré, Sol e Fá. Obtida essa sequência de seis acordes, deve-se solicitar a um músico experiente que escolha a duração dos acordes e toque a música quase criada pela casualidade. Pode-se também visitar o site [http : //www.hooktheory.com/trends#](http://www.hooktheory.com/trends#), selecionar os acordes obtidos com os dados e ouvir a musica desejada (Nesse caso, Weep Day de They Might Be Giants).

2.2 Produção X Sustentabilidade

2.2.1 O que é Sustentabilidade?

Sustentabilidade se refere a um conjunto de ações voltadas à solução ou na redução do impacto ambiental , econômico e social, tais como esgotamento de recursos naturais, desigualdade social ascendente e crescimento econômico ilimitado, ou seja, é um conceito relacionado com os aspectos econômicos, sociais, culturais e ambientais de toda a sociedade humana.

O termo original, Desenvolvimento Sustentável, atende às necessidades do presente sem comprometer a possibilidade de as futuras gerações atenderem às suas próprias necessidades. Esse conceito foi definido, em 1987, durante a elaboração do Relatório Brundtland pela Comissão Mundial de Meio Ambiente e Desenvolvimento (UNCED) da ONU e se apoia no tripé atividade econômica, meio ambiente e bem-estar da sociedade. Em 1992, esse termo foi adaptado pela agenda 21, um dos principais resultados da Conferência ECO92 realizada no Rio de Janeiro. A agenda 21 é um documento que estabeleceu a importância do comprometimento de todos os países com o estudo de soluções para os problemas socioambientais.

Para que o empreendimento humano seja considerado sustentável ele precisa ser ecologicamente correto, economicamente viável, socialmente justo e culturalmente aceito valendo pra qualquer nível de organização social, desde uma determinada vizinhança local até o planeta inteiro. Em suma, sustentabilidade significa fornecer o melhor para as pessoas e para o ambiente, tanto para o presente como para o futuro.

Na próxima seção examinaremos um modelo para uma empresa que deseja reativar uma usina hidroelétrica de maneira sustentável em um determinado Estado, visto que as outras três usinas dessa mesma empresa, localizada nessa mesma região, estão trabalhando acima do limite recomendável. Desse modo, caso a usina 4 fosse reaberta, tal sobrecarga deveria ser transferida entre elas gradualmente, a fim de que todas passassem a operar com a mesma capacidade após determinado período de tempo. Sendo assim, podemos fazer uso das cadeias de Markov para determinar a porcentagem de energia a ser transferida entre as elas.

2.2.2 Os problemas

Questão 1: Toda empresa que trabalha com a produção de energia elétrica tem uma enorme responsabilidade socioambiental. Numa determinada região há 3 usinas em funcionamento e uma usina desativada. Deseja-se reativar essa quarta usina. Todas têm a mesma capacidade de produção. Se desejarmos reativar a usina 4, tal decisão é sustentável?

Se as usinas 1, 2, 3 estão sobrecarregadas ativando a quarta, a operação nas demais fica mais segura, visto que não trabalharão mais no limite. Além disso, com a quarta usina funcionando pode-se implantar um sistema de manutenção preventivo. Logo, o projeto passa a ser economicamente viável. Colocar a usina 4 em funcionamento não impactará o ambiente, pois a mesma já está construída e não será necessário desmatamento. Além disso, ativando a quarta usina surgirá oferta de emprego na região e nas proximidades, além de não ocorrer impacto cultural, pois a usina foi construída há muito tempo. Dessa forma a reativação da usina será considerado sustentável, pois é economicamente viável, ecologicamente correto, socialmente justo e culturalmente aceito.

Questão 2: Sendo sustentável a reativação da quarta usina, é necessário reativa-la gradualmente. Para isso as demais devem ter sua produção diminuída na mesma proporção para que não ocorra choque no sistema e de modo que todas possam trabalhar com capacidades semelhantes após certo tempo. Como fazer isso?

Inicialmente devemos simular a quantidade de energia a ser passada de cada usina para as demais, conforme o diagrama de transição abaixo:

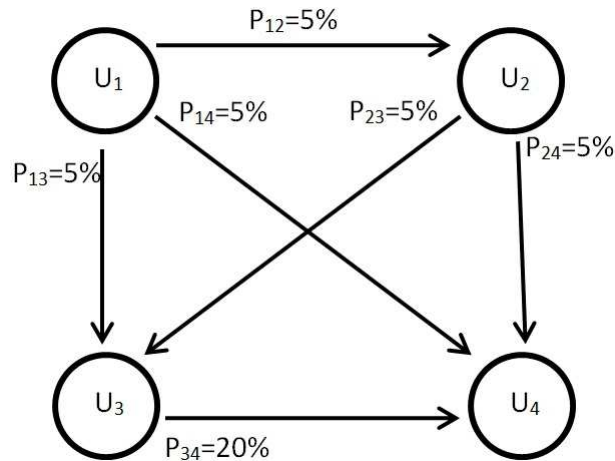


Figura 2.1:

De acordo com o diagrama obtemos os vetores de probabilidade, nesse caso porcentagens, de cada usina (estado) no primeiro mês e montamos a tabela de transição seguinte:

	U_1	U_2	U_3	U_4
U_1	85%	5%	5%	5%
U_2	0%	90%	5%	5%
U_3	0%	0%	80%	20%
U_4	0%	0%	0%	100%

Como $V_i^{(n)} = V_i^{(0)} \cdot M^{(n-1)}$, então para os 2 meses seguintes, teremos:

$$V_1^{(2)} = V_1^{(0)} \cdot M, V_2^{(2)} = V_2^{(0)} \cdot M \text{ e } V_3^{(2)} = V_3^{(0)} \cdot M.$$

Desse modo a matriz de transição no segundo mês será:

$$\begin{bmatrix} 0,7225 & 0,0875 & 0,085 & 0,105 \\ 0 & 0,81 & 0,085 & 0,105 \\ 0 & 0 & 0,64 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tal matriz especifica que após dois meses a usina 1 permanecerá com 72,25% da sua capacidade, passará 8,75% para usina 2, 8,5% para usina 3 e 10,5% para usina 4; a usina 2 permanecerá com 81% de sua capacidade, passará 8,5% para usina 3 e 10,5% para usina 4 e assim por diante. Como inicialmente as usinas 1, 2, 3 estão trabalhando com capacidade máxima, ou seja, 100% cada uma, e a 4 está desativada podemos calcular a produção de cada usina após os dois meses, do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7225 & 0,0875 & 0,085 & 0,105 \\ 0 & 0,81 & 0,085 & 0,105 \\ 0 & 0 & 0,64 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7225 & 0,8975 & 0,81 & 0,57 \end{bmatrix},$$

ou seja, após dois meses a usina 1 estará operando com 72,25% de sua capacidade, a usina 2 estará operando com 89,75% de sua capacidade, a usina 3 com 81% e a usina 4 com 57%.

Feito isso, se pode pedir aos alunos que verifiquem o que aconteceria após 3 meses, se por quantos meses seria possível continuar as transferências de produção e ainda pedir novas simulações. Para ajudar nos cálculos pode-se fazer uso de softwares como o Excel ou Winmat.

Capítulo 3

Sugestões de Atividades

Neste capítulo serão recomendados exercícios que podem ser aplicados pelo professor junto aos alunos. Algumas atividades podem ser trabalhadas de forma interdisciplinar como veremos.

Os exercícios 1, 2 e 3 podem ser trabalhados em conjunto com o professor de Geografia. Pode-se sugerir que sejam pesquisadas questões como: A divisão da população brasileira em classes socioeconômicas, o que definem tais critérios de divisão; Os fluxos migratórios no Brasil, quais os motivos que levam a tal fenômeno, se as migrações caracterizam um problema social, etc; A questão ambiental relacionada à pesca predatória nos rios, mares e oceanos.

O exercício 4 pode ser trabalhado fazendo-se a interdisciplinaridade com Química.

Para realização do exercício 5, é necessário que o professor consulte o livro [2]. Nesse livro, constam algumas explicações sobre previsões genéticas. Desse modo, a interdisciplinaridade com Biologia é extremamente interessante de ser abordada. Questões como genes e transmissão de herança genética podem ser exaustivamente exploradas.

No exercício 7, além de se poder trabalhar matemática financeira, pode-se sugerir uma pesquisa sobre a bolsa de valores: o que é, histórico, como funciona, as principais bolsas de valores do mundo, etc.

Como se poderá notar, fazer a interligação das cadeias de Markov com outras áreas do conhecimento é algo relativamente simples. No entanto, se faz necessário ao docente dedicação, pesquisa, estudo e a vontade, apesar de todas as dificuldades, de mostrar que a Matemática, além de “mãe” de todas as ciências, está presente em tudo e que é de fácil acesso, desde que se tenha a predisposição em aprendê-la.

Exercício 1

Um recenseamento econômico revelou que, numa dada população, as famílias são divididas em dois grupos: (1) as economicamente estáveis; e (2) aquelas em depressão. Depois de um período de 10 anos, a probabilidade de que uma família estável assim permaneça

é de 0,92, enquanto a probabilidade dela entrar em depressão é de 0,08. A probabilidade de que uma família em depressão se torne estável é 0,03, enquanto a probabilidade de que ela assim permaneça é de 0,97. Supondo que este fenômeno social seja estável, não havendo mudanças nestas taxas, responda:

- a) Represente o diagrama de transição.
- b) Monte a matriz de transição.
- c) Calcule a probabilidade de uma família estável estar em depressão a longo prazo.

Exercício 2

2) Suponhamos que em uma determinada região, a cada ano 7% da população rural migra para a zona urbana e que 2% da população urbana migra para a zona rural. Supondo que este fenômeno social seja estável e não havendo mudanças nestas taxas, responda:

- a) Em 5 anos, qual a probabilidade de um indivíduo da zona urbana migrar para a zona rural?
- b) Em 10 anos, qual a probabilidade de um indivíduo, atualmente na zona rural, ter migrado para a zona urbana?
- c) Desconsiderando o crescimento populacional da cidade, a longo prazo, qual será a taxa de migração da população para a zona urbana e para a zona rural desta cidade?

Exercício 3

Observa-se empiricamente que, em condições naturais e sem ser submetida à pesca industrial, a quantidade de certa espécie de peixes varia da seguinte forma: se em um determinado ano a população diminuiu, a probabilidade de que diminua ainda mais no ano seguinte é 0,6 e, se em um determinado ano a população aumenta, a probabilidade de que diminua no ano seguinte é apenas 0,3. Entretanto, observa-se que sendo submetida à pesca industrial, quando a população aumenta num determinado ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte se altera para 0,5, enquanto que se a população diminui num ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte continua sendo 0,6. Deseja-se saber como, a longo prazo, a pesca industrial estará afetando os peixes dessa espécie, para ver se é necessário diminuir a intensidade de pesca ou se, ao contrário, é possível aumentá-la.

Exercício 4

Duas substâncias distintas estão em contato e trocam íons de sódio entre si. Por dedução teórica ou empírica, sabe-se que um íon de sódio do meio (1) abaixo tem probabilidade 70% de passar ao meio (2), enquanto que um íon de sódio do meio (2) tem probabilidade 10% de passar para o meio (1) conforme a figura seguinte. Colocando-se 2 moles de sódio no meio (1), quais serão as concentrações de sódio em cada um dos meios, após um longo período de tempo?

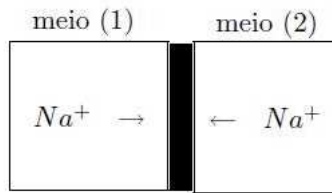


Figura 3.1:

Exercício 5

Aplica-se certo tipo de inseticida numa plantação, para se combater uma determinada espécie de insetos. Após a aplicação verifica-se que, dos poucos insetos sobreviventes, 60% eram resistentes ao inseticida e os outros 40% não o eram (e haviam sobrevivido por razões casuais). Sabe-se que o ciclo de vida desses insetos é de um ano e que eles se cruzam apenas uma vez em cada geração. Ademais, ficou comprovada que a resistência ao inseticida é uma característica dominante e que o inseticida não foi aplicado novamente. Tendo tais dados, pergunta-se: qual é a porcentagem de insetos resistentes ao inseticida após dois anos?

Exercício 6

A matriz de transição abaixo pertence a uma Cadeia de Markov que representa o processo de um cliente que comprou uma das 4 marcas possíveis de cerveja (0, 1, 2, 3) no instante n e irá comprar cada uma das marcas no instante $n + 1$ sob a condição que realmente em cada etapa de transição ele irá comprar o produto.

$$P \rightarrow \begin{bmatrix} 0,8033 & 0 & 0,1844 & 0,0123 \\ 0,1412 & 0,7547 & 0 & 0,1041 \\ 0 & 0,2535 & 0,7397 & 0,0068 \\ 0,2080 & 0,1232 & 0 & 0,6688 \end{bmatrix},$$

- O que significa $P_{31}^{(16)}$? Qual o seu valor?
- Quais as Probabilidades de Estado-Estável da Cadeia de Markov dada? Quais interpretações são possíveis sobre tais probabilidades?

Exercício 7

Suponha que um corretor da Bolsa de Valores faça um pedido para comprar ações na segunda-feira, como segue: 400 quotas de ação A, 500 quotas da ação B e 600 quotas da ação C. As ações A, B e C custam por quota R\$ 500,00, R\$ 400,00 e R\$ 250,00 respectivamente. a) Encontre o custo total das ações, usando multiplicações de matrizes.

b) Qual será o ganho ou a perda quando as ações forem vendidas seis meses mais tarde se as ações A, B e C custam R\$ 600,00, R\$ 350,00 e R\$ 300,00 por quota, respectivamente?

Capítulo 4

Considerações Finais

Através deste trabalho, procuramos mostrar algumas das muitas aplicações da Álgebra Linear. Notamos durante o seu desenvolvimento que o estudo destas aplicações exige o conhecimento de assuntos como matrizes, resoluções de sistemas lineares e conceitos básicos de probabilidade.

Além disso, este trabalho foi uma boa oportunidade de correlacionar um conceito de álgebra linear, assunto visto na graduação, aos conteúdos estudados no ensino médio, através de aplicações, que muitas vezes, por diversos fatores, como a indisponibilidade de tempo e crença de que o discente nessa fase não possui capacidade para tal, não podem ser abordadas e trabalhadas no ensino básico.

É importante destacar também a necessidade de diversificar as formas de ensinar, pois sabemos que a Matemática exige competências que vão além do sistema didático adotado. Sendo assim, ferramentas como o computador, softwares e outras tecnologias de informação, apesar de um grande desafio para o professor, são um importante aliado, visto que os alunos possuem hoje em dia acesso fácil a tais tecnologias. Desse modo, em diversas oportunidades o uso de programas como o WinMat e o Excel, para o desenvolvimento do conteúdo e exemplos, pode se tornar imprescindível no processo de ensino aprendizagem.

O professor que integrar o mundo da tecnologia ao da Matemática e principalmente, tornar acessíveis conteúdos da graduação ao ensino fundamental e médio, desmistificando assim matemática como algo acessível apenas a gênios e mentes brilhantes, talvez seja um dos seus maiores desafios e para isso é necessário atentar-se as propostas e capacitações que visam à atualização constante do profissional.

Referências Bibliográficas

- [1] Anton, H. & Rorres, C. Algebra Linear com aplicações. 8a edição. Porto Alegre, Bookman, 2001, ISBN 0-471-17052-6.
- [2] Boldrini, José Luiz. Algebra Linear. 5a edição. Campinas, 1991.
- [3] Roads, C. The Computer Music Tutorial. Cambridge, MA:MIT Press.
- [4] Med, Bohumil. Teoria da Música. Edição revista e ampliada. 4a edição. Brasília, 1996.
- [5] Kemeny, J. & Snell J. Finite Markov Chains. Nova Iorque, 1976.
- [6] Clarke, A. B. & Disney R. L. Probabilidade e Processos Estocásticos. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1979.

Páginas Web Consultadas

1. http://pt.wikipedia.org/wiki/Cadeias_de_Markov
2. <http://www.somatematica.com.br/software.php#>
3. <http://www.sbpcnet.org.br/livro/63ra/conpeex/pivic/trabalhos/TALLYTA-CAROLYNE-MARTINS-DA-SILVA-PIVIC.PDF>
4. <http://www.dcc.fc.up.pt/~jpp/mad/teorica-19.pdf>
5. <http://pt.scribd.com/doc/23069525/Cadeias-e-modelos-ocultos-de-Markov-Aplicacao-e-analise-na-composicao-de-musicas>
6. <http://www.youtube.com/watch?v=Ubp0MzAhezM>
7. http://blog.lib.umn.edu/geers001/emusic/02Chapter_ComputerMusicTutorial.pdf
8. <http://www.infoescola.com/musica/notas-musicais/>
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain#Music
10. <http://m3.ime.unicamp.br/>
11. <http://www.cce.usp.br/?q=node/85>
12. <https://sites.google.com/site/musicaeteorica/musica-definicao>
13. <http://www.falamedemusica.net/GuitarChords/Definition.php?lang=pt>
14. <http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=107>
15. <http://www.hooktheory.com/trends#>

Todas as páginas foram acessadas em 15/07/2013.

Softwares Utilizados

1. TexMaker 3.5
2. Winmat versão 95/98/ME/2k/XP
3. Microsoft Word 2010
4. Microsoft Excel 2010
5. Paint Windows 7 Ultimate Versão 6.1
6. Mozilla Firefox Versão 19.0.2
7. Gimp 2.8.4