UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Aritmética nas Olimpíadas de Matemática Universitária

por

Manoel Rodrigues de Araújo Neto

2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A663a Araújo Neto, Manoel Rodrigues de.
A aritmética nas olimpíadas de matemática universitária / Manoel Rodrigues de Araújo Neto. - João Pessoa, 2023.
82 f. : il.

Orientação: Wállace Mangueira de Sousa.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Olimpíadas. 2. Aritmética. 3. Resolução de problemas - Matemática. I. Sousa, Wállace Mangueira de. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por MAGNOLIA FELIX DE ARAUJO - CRB-15/883

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Aritmética nas Olimpíadas de Matemática Universitária †

por

Manoel Rodrigues de Araújo Neto

sob a orientação do

Prof. Dr. Wállace Mangueira de Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2023
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Aritmética nas Olimpíadas de Matemática Universitária

por

Manoel Rodrigues de Araújo Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Wállace Mangueira de Sousa - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - UFPB

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves - UFG

Fevereiro/2023

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele eu não chegaria até aqui.

À minha família, em especial minha esposa, Anny Karla, por sempre ter me dado apoio e motivação nos momentos que mais precisei.

Agradeço também ao meu orientador, Professor Doutor Wállace Sousa, pela paciência, dedicação, incentivo e pela confiança depositada em mim para a realização deste trabalho.

À UFPB e todo corpo docente do PROFMAT, em especial aos que foram meus professores nas turmas de 2018 e 2021.

Aos colegas do da turma 2021 pela colaboração e ajuda em algumas disciplinas e também aos colegas da turma 2018, por todos os momentos de descontração, grupos de estudo e palavras de apoio para que eu não desistisse do curso.

Dedicatória

A Deus,
À minha mãe Elza (In Memorian),
À minha esposa Anny Karla e à minha filha Maria Graziela.

Resumo

Desde a antiguidade, a Matemática sempre foi desafiadora, e muitas pessoas resolviam problemas matemáticos por prazer e diversão. Com o surgimento das olimpíadas de matemática, esses desafios se transformaram em grandes competições que se espalharam por todo o mundo, sendo aprimorados com o passar do tempo, e este prazer e interesse pelas olimpíadas faz com que continuem surgindo novas competições até os dias atuais. Este trabalho traz uma abordagem geral das olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais, em especial as universitárias, pois este nível ainda é pouco divulgado e não se têm muitos materiais disponíveis sobre elas. Começamos o trabalho falando sobre as principais olimpíadas internacionais, como a IMO, IMC, CIIM, OIMU, entre outras, apresentando os melhores resultados de brasileiros em cada uma delas. Além disso, também abordamos as competições nacionais e as poucas regionais que contam com o nível universitário. Ainda destacamos a participação feminina nas Olimpíadas de Matemática, mostrando os melhores resultados alcançados por brasileiras e as competições existentes voltadas exclusivamente para o público feminino. Em seguida temos alguns conceitos relacionados à Aritmética, tais como princípio de indução, divisibilidade e congruências. Após isso, este trabalho é finalizado com questões de aritmética selecionadas de algumas olimpíadas de nível universitário, com suas devidas soluções, criando assim um material de apoio para quem deseja conhecer mais sobre as olimpíadas de Matemática e ver como alguns conteúdos estudados na educação básica e superior podem ser utilizados na resolução de questões destas competições.

Palavras-chaves: olimpíadas de matemática; aritmética; resolução de problemas.

Abstract

Since ancient times, Mathematics has always been challenging, and many people solve mathematical problems for pleasure and fun. With the advent of the mathematical olympiads, these challenges turned into great competitions that spread throughout the world, being improved over time, and that pleasure and interest for the olympiads makes it possible that new competitions continue to emerge until the present day. This work presents a general approach of the national and international Mathematical Olympiads, specially the academical ones, because this modality is still little publicized and there are not many materials available about them. We started the work speaking about the main international olympiads, such as IMO, IMC, CIIM, OIMU, among others, presenting the best results of brazilians in each of them. In addition, we also address the national competitions and the few regional ones that have an academical level. We have also highlighted the female participation in the mathematics olympiads, showing the best results achieved by the brazilian women and the existing competitions aimed exclusively at the female audience. Next, we have some concepts related to Arithmetic, such as principle of induction, divisibility and congruences. After that, this work is finished with arithmetic questions selected from some academical level olympiads, with their appropriate solutions, thus creating a support material for those who desire to know more about the mathematical olympiads and see how some studied contents in basic and university education can be used in solving questions from these competitions.

Keywords: mathematical olympiads; arithmetic; problem solving.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de abreviaturas e siglas

AOBM - Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

CELL - Competição Elon Lages Lima de Matemática

CIIM - *Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas* - Competição Ibero-Americana Interuniversitária de Matemática

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

EGMO - *European Girls' Mathematical Olympiad* - Olimpíada Europeia de Matemática Feminina

FZEA - Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

GN - Gallois Noether

IFBA - Instituto Federal da Bahia

IMC - *International Mathematics Competition* - Competição Internacional de Matemática

IME - Instituto Militar de Engenharia

IMO - *International Mathematical Olympiad* - Olimpíada Internacional de Matemática

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MCTI - Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação

MEC - Ministério da Educação

OAM - Olimpíada Alagoana de Matemática

OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OBMU - Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária

OFMEBA - Olimpíada Feminina de Matemática do Estado da Bahia

OIM - Olimpíada Iberoamericana de Matemática

OIMU - Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitaria

OMCsul - Olimpíada de Matemática do Cone Sul

OMERJ - Olimpíada de Matemática do Rio de Janeiro

OMIME - Olimpíada de Matemática do IME

OMpD - Olimpíada Matemáticos por Diversão

OMRN - Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte

PAGMO - *Pan-American Girls' Mathematical Olympiad* - Olimpíada Pan-Americana de Matemática Feminina

PROLÍMPICO - Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos

PUC-Rio - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

TM^2 - Torneio Meninas na Matemática

UEA - Universidade do Estado do Amazonas

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UESC - Universidade Estadual de Santa Cruz

UFAL - Universidade Federal de Alagoas

UFF - Universidade Federal Fluminense

UFG - Universidade Federal de Goiás

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UNB - Universidade de Brasília

USP - Universidade de São Paulo

Introdução

As competições matemáticas acontecem desde o século XVI, quando eram realizados desafios entre os matemáticos da época, com apostas de dinheiro, reputação e cátedras em universidades. Muitos deles se dedicavam bastante para ter algum prestígio ou reconhecimento da sociedade ([15]).

Já no final do século XIX, no ano de 1894, surgiu a primeira competição com características das olimpíadas de Matemática que temos atualmente. Essas competições aconteceram na Hungria e eram chamadas de *Eotvos*, que era o sobrenome do presidente da Hungria naquele ano. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo leste europeu e em 1934, surgiu a primeira olimpíada de matemática, que pode ser classificada como "moderna", na cidade de Leningrado, na extinta União Soviética. Hoje a cidade tem o nome de São Petersburgo ([1]).

Todas essas competições ao longo dos anos, culminaram com a organização da primeira IMO, realizada na cidade de Bucareste na Romênia, no ano de 1959. A IMO é a olimpíada de Matemática mais antiga que ocorre atualmente, com participação de mais de 100 países do mundo todo.

A primeira olimpíada de matemática que surgiu no Brasil foi realizada no Estado de São Paulo em 1977. Estamos falando da Olimpíada Paulista de Matemática, que foi criada pela Academia Paulista de Ciência ([1]).

Este trabalho tem como principal objetivo criar um material de estudo e motivacional para estudantes da educação básica e ensino superior a participarem ativamente de competições matemáticas. Além disso, tem o intuito de aumentar a divulgação das olimpíadas, principalmente a olimpíada de nível universitário, pois muitos estudantes não participam desse nível simplesmente por não terem conhecimento da existência de tais competições. Foi o caso do autor deste trabalho, que participou das primeiras edições da OBMEP, sendo classificado para segunda fase, mas que no ensino superior não participou de nenhuma competição similar por não saber da existência, em consequência da falta de divulgação ou incetivo para mobilizar os estudantes desta etapa de ensino.

A escolha de abordar as olimpíadas de nível universitário se dá por ter pouquíssimo material disponível acerca deste nível, e isto é consequência do número reduzido de competições para esse público, principalmente no Brasil, que durante 13 anos só tinha como única opção a OBMU, e atualmente, após 21 anos da primeira olimpíada universitária, contamos oficialmente com apenas 4 olimpíadas regionais, que são disputadas em 3 estados e uma online, além da Competição Elon Lages Lima, que conta como primeira fase da OBMU.

Estruturalmente, este trabalho está dividido em 3 capítulos: o primeiro trata de um breve histórico sobre as olimpíadas de matemática no âmbito nacional e internacional, enfatizando as participações brasileiras. Ainda no Capítulo 1, falamos sobre as competições dedicadas para as meninas, assim como a participação e aproveitamento das mesmas nas competições gerais, principalmente nas internacionais. O Capítulo 2 é dedicado a uma apresentação dos conteúdos de aritmética, com teoremas, proposições, corolários e algumas demosntrações que servem como base para soluções das questões listadas no trabalho. E por fim, no Capítulo 3 abordamos as questões que envolvem assuntos da aritmética e suas respectivas resoluções.

Capítulo 1

Um Pouco da História das Olimpíadas de Matemática

Neste capítulo, vamos falar sobre diversas olimpíadas de matemática, sejam nacional ou internacional, destinadas ao nível básico e também universitário. Iremos abordar as competições no exterior que contam com participação brasileira, com destaque para IMO, maior e mais antiga olimpíada de matemática ainda em atividade. No cenário brasileiro, temos muitas competições regionais espalhadas pelo país. Destas, iremos dar ênfase àquelas que possuem nível universitário. Já a nível nacional, destacamos a OBM, segunda olimpíada de matemática mais antiga do Brasil, e a OBMEP.

A OBM passou por diversas mudanças em seu formato ao longo dos anos mas sempre mantendo o mesmo objetivo o qual, segundo a página oficial da competição, é estimular o estudo da Matemática nos alunos, desenvolvendo e aperfeiçoando a capacitação dos professores, influenciando na melhoria do ensino, além de descobrir novos talentos. A partir de 2001, a OBM passou a ter o nível universitátio, possibilitando que jovens estudantes desta etapa também paticipassem da competição.

Focando no ensino básico, outra olimpíada de grande representatividade a nível nacional é a OBMEP. Criada em 2005, ela é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo IMPA, com o apoio da SBM, e promovida com recursos do MEC e do MCTI. A OBMEP é direcionada para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

Além disso, ainda temos as olimpíadas de Matemática direcionadas exclusivamente para o público feminino, tanto no Brasil quanto no exterior, com a maioria destas sendo criada nos últimos anos.

1.1 Olimpíadas Internacionais

Nesta seção, vamos falar um pouco sobre a história da IMO, destacando participações brasileiras e, também, sobre outras olimpíadas internacionais que contam o Brasil entre os países competidores.

1.1.1 A Olimpíada Internacional de Matemática

Na sua primeira edição, em 1959, a IMO contou com a participação de apenas 7 países. Foram eles a Romênia, país sede das olimpíadas naquele ano, Bulgária, Hungria, Polônia, Alemanha Oriental, Tchecoslováquia e União Soviética, sendo os três últimos países já extintos ([15]). Com o passar dos anos, o número de países participantes foi aumentando gradativamente e, desde então, a competição veio incentivando o desenvolvimento da Matemática, oferecendo uma grande oportunidade para a troca criativa de ideias e experiências entre estudantes de muitas culturas distintas. Em 2019, no Reino Unido, ocorreu a olimpíada que reuniu mais países em toda sua história, com 112 nações, e, consequentemente, a que também teve recorde de participantes, com 621 competidores ([12]).

A IMO é a maior, mais antiga e prestigiada olimpíada científica para alunos do ensino médio. Cada país pode enviar uma equipe de até seis alunos do ensino médio, ou alunos que não tenham ingressado em uma universidade, ou instituição equivalente, na data de realização da olimpíada, além de um líder de equipe, um vice-líder e observadores, se desejado. Nem sempre o número de aluno por país era o mesmo. Nas primeiras edições da IMO, cada país podia inscrever até oito alunos na competição. Em 1982, esse número foi reduzido para quatro e só em 1983 passou para o número de participantes por equipe que permanece até hoje. Durante a olimpíada, os competidores devem resolver, individualmente, duas provas em dois dias consecutivos, com três problemas em cada dia. Cada problema vale sete pontos. São concedidas medalhas de ouro, prata e bronze de acordo com os resultados gerais. Para incentivar o maior número possível de alunos a resolverem problemas completos, são concedidos certificados de menção honrosa àqueles estudantes que não receberam medalha, mas obtiveram sete pontos em pelo menos um problema.

O Brasil teve sua primeira participação na IMO no ano de 1979, sediada no Reino Unido. Esta edição teve um número de 23 países competindo e o Brasil terminou na 22ª colocação. Dois anos depois, na edição que ocorreu nos Estados Unidos, o Brasil conseguiu sua primeira medalha de ouro e com o passar do tempo foi melhorando suas participações, chegando a ter sua melhor colocação no ano de 2020, na Rússia, quando conseguiu atingir o 10º lugar geral.

Na edição de 1981, além do primeiro ouro, vale destacar também a primeira vez em que um Brasileiro conseguiu acertar todas as questões, fazendo 42 pontos, e ficar na primeira colocação geral das olimpíadas. Quem conseguiu realizar este feito foi

Nicolau Corçao Saldanha. Até os dias atuais só mais um Brasileiro conseguiu esta conquista, foi Ralph Costa Teixeira, na edição de 1987 em Cuba. No ano anterior, na edição que aconteceu na Polônia, Ralph já tinha chegado perto de atingir essa marca, fazendo 37 pontos e alcançando a 10ª colocação geral, o que lhe garantiu a medalha de ouro naquele ano, e assim ele se tornou recordista, sendo até hoje o único brasileiro a ter conseguido conquistar dois ouros nesta olimpíada ([10]).

A IMO já teve diversos países sedes ao longo dos anos, e um fato a se destacar aconteceu na edição de 1995, no Canadá, quando foi criada a logo da competição, a qual é usada até hoje em qualquer divulgação oficial dessa olimpíada. A bandeira oficial da IMO foi introduzida no mesmo ano, juntamente com o logotipo. A bandeira é branca com o logotipo da IMO no centro. É uma tradição que a bandeira seja entregue, na conclusão da Cerimônia de Encerramento, ao próximo anfitrião. A IMO também possui um hino, que foi introduzido em 1997, na edição que aconteceu na Argentina ([11]).

Figura 1.1: Logo da IMO

Fonte: https://www.imo-official.org/logo/IMOLogo.pdf/
Acesso em: 14 de out. de 2022.

O Brasil sediou a IMO uma única vez, no Rio de Janeiro em 2017, quando terminou na 37ª posição. Competindo em casa, não conseguiu nenhum ouro mas conquistou duas pratas, um bronze e três menções honrosas. A última edição ocorreu este ano, na Noruega, onde o Brasil teve uma participação histórica, conquistando pela primeira vez duas medalhas de ouro em uma mesma edição. Além dos dois ouros, a equipe brasileira conseguiu ainda uma prata, dois bronzes e uma menção honrosa. Esses resultados fizeram o Brasil encerrar a competição na 19ª colocação no ranking geral, além de obter a sua maior pontuação nas 43 participações que teve, com 173 pontos. As medalhas de ouro foram conquistadas pelos estudantes Olavo Paschoal Longo e Marcelo Machado Lage. Já a prata foi do estudante Rodrigo Salgado Domingos Porto e os dois bronzes por Eduardo Henrique Rodrigues do Nascimento e Gabriel Cruz Vitale Torkomian. A menção honrosa foi para João Pedro Ramos Viana Costa ([10]).

Figura 1.2: Equipe brasileira na IMO 2022

Fonte: https://www.imo2022.org/imo/Teams/
Acesso em: 14 de out. de 2022.

Até aqui, o Brasil já conquistou 152 medalhas, sendo 13 de ouro, 53 de prata e 86 de bronze, além de 35 menções honrosas. As próximas três edições da IMO já têm países sede definidos: Japão em 2023, Reino Unido em 2024 e Austrália em 2025.

1.1.2 Outras Olimpíadas Internacionais

Além da IMO, existem outras olimpíadas de Matemática espalhadas pelo mundo que contam com participação brasileira, e nesta subseção iremos destacar aquelas que possuem nível universitário.

A competição mais antiga neste nível é a *International Mathematics Competition*, que é disputada desde 1994 e é organizada pela *University College London* em parceria com a *American University in Bulgaria*, realizada na Bulgária. Com exceção de algumas edições nas quais o evento ocorreu em outros países da Europa sendo organizado também por instituições locais. Esta é a maior competição para estudantes universitários e recebe destacados graduandos de matemática e ciências afins de todo o mundo. Ela é composta por duas provas a serem resolvidas em dois dias e os participantes contam com no máximo 4 horas para resolver os problemas. Estes de álgebra, análise real e complexa, geometria e combinatória ([9]).

De acordo com registros da página oficial da IMC, a primeira participação brasileira na competição ocorreu no ano de 2003 e já na edição seguinte, o Brasil conseguiu conquistar seu primeiro ouro com Yuri Gomes Lima, representando a Universidade Federal do Ceará. Com o passar dos anos, o Brasil seguiu ganhando várias medalhas e melhorando seu desempenho na competição. O maior destaque individual do país foi Fábio Dias Moreira, que conquistou quatro medalhas de ouro seguidas de 2005 a 2008, na época aluno da Pontifícia Universidade Católica do

Rio de Janeiro e este foi o melhor desempenho até hoje de um brasileiro. Outros estudantes também tiveram atuações de destaque como Rafael Myiazaki, também da PUC-RJ, e Thiago Landim, que foi estudante de graduação da UFPE, conquistando 3 ouros cada. As conquistas de Thiago foram mais recentes, sendo nas edições de 2018, 2019 e 2020.

Figura 1.3: Logo da IMC.

Fonte: https://www.imc-math.org.uk/
Acesso em: 12 de nov. de 2022.

Além dos destaques individuais, o desempenho geral do Brasil tem sido bastante positivo nos últimos anos, com quebra de recordes em número de medalhas conquistadas. Desde 2020, quando conseguiu conquistar 29 medalhas, o Brasil vem conseguindo ultrapassar sua própria marca. No ano seguinte conseguiu saltar para 44 medalhas no total, e no ano de 2022 conseguiu atingir sua melhor marca com duas medalhas a mais que o ano anterior e com a inédita conquista de 9 ouros numa edição. Todos esses dados foram obtidos na página oficial da competição, presente nas referências, acessando as edições de cada ano e os seus respectivos resultados.

Outra olimpíada internacional de Matemática a nível universitário é a *Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas*. A CIIM foi criada em 2009 na Colômbia. De lá pra cá a competição vem sendo sediada por outros países da América Latina. O Brasil, por exemplo, sediou esta competição em 2010, logo na sua segunda edição, que foi organizada pelo IME e o IMPA, com o apoio da OBM. E em uma segunda oportunidade, foi sediada em Manaus, em 2016, com organização da OBM, IME e UEA ([4]).

O Brasil sempre se destacou em todas as edições desta competição, ganhando várias medalhas de ouro desde quando foi criada. Mas seus melhores desempenhos foram em 2010 e 2022, quando todas as medalhas de ouro foram conquistadas por brasileiros. Como destaque individual, temos o competidor Andrey Jhen Shan Chen, que foi recordista em medalhas de ouro pelo Brasil, obtendo essas conquistas de 2018 a 2021 ([4]).

Figura 1.4: Logo da CIIM

Fonte: http://ciim.uan.edu.co/ciim-2013/
Acesso em: 8 de dez. de 2022.

Agora vamos falar sobre mais uma competição de Matemática no nível universitário. Trata-se da Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária. Esta olimpíada foi criada em 1998 e tem a finalidade de identificar e propor à comunidade universitária dos países ibero-americanos a busca da excelência acadêmica em matemática no nível universitário, promovendo a pesquisa e o pensamento criativo entre estudantes desses países no âmbito de seus estudos matemáticos. Além disso, tem o objetivo também de dar continuidade à formação matemática e de pesquisa dos alunos que participaram das olimpíadas de Matemática no ensino médio, para que estejam plenamente aptos a ocupar um lugar importante no desenvolvimento científico e tecnológico de seus respectivos países.

Figura 1.5: Logo da OIMU

Fonte: https://oimu.eventos.cimat.mx/
Acesso em: 13 de dez. de 2022.

Cada país participante é responsável pela organização da OIMU no seu território e pelos respectivos custos. Esta competição é realizada anualmente e consiste em uma única prova de sete problemas com duração de cinco horas. A pontuação do participante será a soma das quatro maiores pontuações recebidas nos sete problemas. Todos os países da região ibero-americana são elegíveis para participar da OIMU e os competidores não podem ter um diploma universitário e devem estar matriculados em uma universidade como alunos de graduação.

Assim como na CIIM, a equipe brasileira sempre teve bom desempenho, conseguindo medalhas em todas as edições. De acordo com os dados da OBM, a única edição em que o Brasil não conquistou nenhuma medalha de ouro foi em 2020 e o ano em que obteve a maior conquista de medalhas foi em 2017, quando ganhou 1 de ouro, 2 de prata e 5 de bronze, além de 2 menções honrosas. Nos destaques individuais, temos André Macieira Braga Costa, que ganhou 3 medalhas de ouro consecutivas a partir de 2012 e Carlos Yuzo Shine, conseguindo conquistar medalhas nas quatro primeiras edições, sendo 2 de ouro e 2 de prata, se tornando o brasileiro que ganhou o maior número de medalhas nesta competição ([22]).

Finalizando as competições de Matemática universitária internacional citadas neste trabalho, temos o Concurso Universitário de Matemática Gallois-Noether. Esta olimpíada é realizada anualmente desde 2011 e é destinada para alunos de graduação. Um de seus objetivos é o de difundir a importância da resolução de problemas dentro da Matemática e áreas afins, além de encontrar jovens talentoso e ajudá-los a desenvolver suas carreiras matemáticas. A competição é disputada em duas fases, sendo a primeira por meio de uma prova de múltipla escolha e a segunda por questões discursivas. Quanto a participação brasileira nesta olimpíada, segundo a página da OBM, o Brasil conquistou o segundo lugar em 2016 com Igor Albuquerque Araújo, o terceiro lugar em 2017 com Valentino Amadeus Sichinel e o primeiro lugar em 2018 com Thiago Landim de Souza Leão.

Em relação às olimpíadas internacionais que não possuem nível universitário, podemos destacar a OMCsul, que é uma competição que conta com a participação dos países da porção meridional da América do Sul, sendo representados por equipes compostas de 4 estudantes com a condição de que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada. Quanto a participação brasileira, a 13ª edição foi a que o país obteve melhor desempenho, com três ouros e um bronze. Além dela, temos a Olimpíada de Maio, que é uma competição destinada a jovens estudantes e disputada em dois níveis, sendo o nível 1 para alunos até 13 anos e o nível 2 para alunos até 15 anos. Podem participar países da América latina, Espanha e Portugal. No Brasil, ela é aplicada apenas àqueles alunos que foram premiados na OBM do ano imediatamente anterior. As provas são enviadas para comissão organizadora na Argentina, onde é dada a classificação final por país ([20]).

Por fim, vamos citar a OIM, que é uma competição, assim como a anterior, da qual participam os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham completado 18 anos em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da olimpíada e, além disso, cada estudante só pode participar no máximo de duas edições desta competição. Desde 1985, quando iniciou sua participação na competição, o Brasil já conquistou um total de 140 medalhas. Os melhores resultados alcançados pela equipe brasileira foram em duas edições consecutivas, nos anos de 2004 e 2005, quando todos os competidores conquistaram medalhas de ouro e só nesses dois anos o país acumulou 8 ouros.

1.2 Olimpíadas Nacionais

Agora vamos abordar as olimpíadas de Matemática realizadas no Brasil, começando pela história da OBM e depois algumas olimpíadas regionais espalhadas pelo país e que incluem o nível universitário em suas provas.

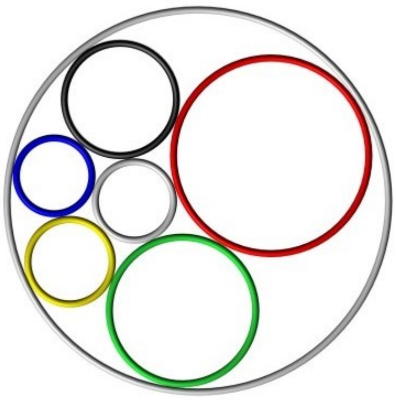
1.2.1 A Olimpíada Brasileira de Matemática

A primeira olimpíada de Matemática no Brasil surgiu no ano de 1977, com a Olimpíada Paulista de Matemática, realizada pela Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Dois anos depois, foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática, que é uma realização da AOBM em parceria com a UFG. A OBM é uma competição nacional anual de Matemática para alunos dos ensinos fundamental, médio e superior de instituições públicas ou privadas. Seus principais objetivos são: estimular o estudo da Matemática no meio acadêmico; identificar jovens talentos em Matemática e incentivá-los a seguir uma carreira científica, especificamente em Matemática; além de selecionar e treinar alunos para representar o Brasil em competições internacionais de Matemática, como a IMO e de apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil.

Desde que foi criada, a OBM passou por diversas mudanças. Nos primeiros 12 anos, era disputada em uma única fase e em apenas um nível. A partir de 1991, os competidores foram divididos em dois níveis: o Júnior para alunos completando no máximo 15 anos naquele ano e o Sênior para alunos cursando o ensino médio. No ano seguinte, a mudança foi no número de fases. A olimpíada passou a ser disputada em duas fases, sendo a primeira por meio de uma prova com 25 questões de múltipla escolha e a segunda fase sendo dividida em dois dias com três problemas em cada dia. Além dessas mudanças, o nível Júnior passou a ser aplicado para alunos cursando até a 8ª série.

O ano de 1998 foi muito marcante para OBM com diversas novidades, começando por mudanças significativas tanto nas fases quanto nos níveis. A competição passou a ser dividida em três níveis, a saber I, II e III; e três fases. O nível I se referia aos estudantes de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental, já o nível II era destinado também para o ensino fundamental mas para as turmas de 7ª e 8ª séries, e por fim, o nível III era direcionado para os alunos do ensino médio. Em relação às fases, a primeira era composta por um prova de múltipla escolha com 20 ou 25 questões, na segunda fase era proposto uma prova discurssiva com seis questões e a terceira era formada por cinco questões nos níveis I e II, e seis questões no nível III, em dois dias. Além dessas mudanças, neste mesmo ano também foi adotado o símbolo para representar a OBM, que foi concebido a partir de um problema matemático que utiliza sete circunferências. Mais detalhes sobre este problema podem ser encontrados na referência ([21]).

Figura 1.6: Símbolo da OBM



Fonte: https://www.moodle.ufba.br/course/search.phpcontext=1&q=obm/
Acesso em: 4 de nov. de 2022.

Outra novidade que surgiu neste ano, foi a realização da primeira Semana Olímpica, um evento que ocorre anualmente e envolve os estudantes medalhistas da OBM. Nela os alunos participam durante uma semana de aulas avançadas de Matemática, além de frequentar palestras de orientação acadêmica e ter oportunidade de interagir com outros competidores. O evento conta com a participação de alunos do sexto ano do ensino fundamental até estudantes do ensino médio e o encerramento é marcado pela realização da Cerimônia de Premiação da OBM, ocasião na qual são premiados os alunos que conquistaram medalhas de ouro, prata e bronze. A Semana Olímpica, no ano de 2022, comemorou 25 anos, contando com uma presença recorde de 220 participantes, e o evento foi realizado na cidade do Recife, capital Pernambucana.

E para completar as novidades que surgiram no ano de 1998, destacamos o lançamento da revista EUREKA!. Nela são publicados artigos relevantes na preparação dos estudantes para a OBM em seus diversos níveis e para várias olimpíadas de caráter internacional das quais o Brasil participa. A revista já teve dezenas de edições publicadas ao longo dos anos e sua última edição, até o momento, foi publicada em 2020 e foi a edição de número 42.

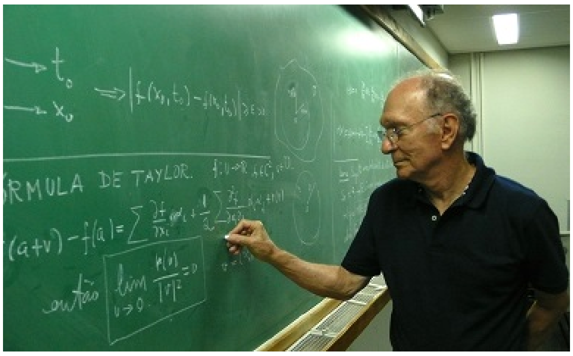
Figura 1.7: Revista EUREKA!

Fonte: https://www.obm.org.br/2021/11/15/publicamos-o-numero-42-da-revista-eureka/
Acesso em: 4 de nov. de 2022.

Seguindo nossa linha do tempo, encontramos mais uma mudança significativa no ano de 2001. Naquele ano foi criado o inédito nível universitário na OBM, para alunos que não tenham completado o ensino superior, contando com duas fases até o ano de 2020, quando passou a ser disputada em fase única. Esta mudança já havia ocorrido em 2017 nos níveis I, II e III quando a OBM se integrou a OBMEP.

O nível universitário passou a ser realizado em uma única fase quando foi criada a Competição Elon Lages Lima de Matemática, que classifica todos os estudantes premiados para disputarem a OBM.

Figura 1.8: Elon Lages Lima (1929-2017)



Fonte: https://matematicaaserio.com.br/matematica-para-olimpiadas/
Acesso em: 13 de dez. de 2022.

A CELL é uma realização da AOBM e conta com o apoio da SBM, sendo uma competição dirigida aos estudantes universitários, matriculados em instituições brasileiras da rede pública ou privada, que ainda não possuam título superior, podendo ser estudantes de graduação de qualquer curso e qualquer período. A prova aborda temas básicos de Álgebra Linear, Cálculo, Geometria Analítica e Matemática Discreta e é composta por 25 questões de múltipla escolha com duração de 3 horas.

Outra competição que classifica os estudantes para a fase única da OBM, só que nos níveis I, II e III, é a Competição Jacob Palis Júnior de Matemática. Ela também é organizada pela AOBM com apoio da SBM, foi criada recentemente e teve sua primeira edição no ano de 2022. Esta competição é destinada a estudantes de ensino fundamental e médio de escolas públicas e privadas de todo o país. O nível I conta com a participação de estudantes do 6º e 7º anos, já no nível II, participam os alunos do 8º e 9º anos e por fim, o nível é direionado para todos os anos do ensino médio.

Todos os dados e informações aqui mencionadas foram obtidos na página oficial da OBM, disponível nas referências deste trabalho.

1.2.2 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

A OBMEP é uma competição de extrema importância para a matemática do ensino básico. Ela foi criada para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área e tem como objetivos principais, entre outros, contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, identificar jovens taletos e estimular e promover o estudo da Matemática.

Figura 1.9: Logo da 17ª OBMEP

Fonte: http://www.cp2.g12.br/blog/engenhonovo2/?s=obmep/ Acesso em: 10 de nov. de 2022.

Figura 1.10: Olimpíada Mirim

Fonte: https://olimpiadamirim.obmep.org.br/ Acesso em: 10 de nov. de 2022.

Desde a sua criação, esta competição tem mobilizado anualmente milhões de estudantes do ensino básico e dezenas de milhares de escolas por todo o país.

Na sua primeira edição, em 2005, a competição contou com a participação de cerca de 10,5 milhões de alunos, número que foi subindo com o passar dos anos, chegando ao número recorde até os dias atuais em 2010, com cerca de 19,6 milhões de participantes naquele ano. Com a quantidade de escolas participantes também não foi diferente, já na sua primeira edição contou com a participação de 31 mil escolas públicas e a quantidade máxima atingida de escolas foi na edição de 2019, chegando a quase 55 mil escolas, incluindo públicas e privadas.

Durante toda história da OBMEP podemos citar dois acontecimentos importantes. O primeiro deles foi a integração com a OBM em 2017, transformando-se numa única e grande competição, realizada em duas fases, fazendo com que os alunos premiados pudessem se classificar para a OBM, que a partir daquele ano passou a ter uma única fase para o nível básico. Esta mudança na OBMEP possibilitou que as escolas privadas também tivessem o direito de participar da olimpíada, que até então era destinada apenas para as escolas públicas. Outro acontecimento que merece destaque ocorreu neste ano, que foi o surgimento da primeira Olimpíada Mirim OBMEP, realizada pelo IMPA, com o intuito de buscar novos talentos da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A Olimpíada Mirim - OBMEP é dirigida aos alunos dos 2º, 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de escolas públicas municipais, estaduais e federais, localizadas no território brasileiro, e eles têm a chance de testar seus conhecimentos matemáticos em duas etapas: Prova da 1ª Fase e Prova da 2ª Fase.

Com o objetivo de fortalecer a cultura olímpica em escolas de todo o país e incentivar a formação de professores para que possam preparar melhor seus alunos para OBMEP e demais olimpíadas, foi criado o Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos, que visa oferecer treinamento gratuito para professores de matemática de todo o Brasil e oferecer propostas de aplicação em sala de aula, abordando assuntos relativos às olimpíadas de matemática do ensino básico. Ele é realizado pelo IMPA desde 2020 e a partir de 2021 passou a ser ofertado duas vezes ano, durante os recessos escolares, em janeiro e julho ([14]).

Figura 1.11: PROLÍMPICO

Fonte: https://impa.br/wp-content/uploads/2023/01/foto-prolimpico-imprensa.png
Acesso em: 25 de jan. de 2023.

O programa está dividido em quatro módulos. O primeiro é o nível A, que é voltado para professores do Ensino Fundamental I e abrange conteúdos do 3º ao 5º ano. Já o nível 1 é focado nos docentes do Ensino Fundamental II, do 6º e 7º ano. No nível 2, ainda no Fundamental II, o foco são os professores do 8º ao 9º ano. E por fim, o nível 3 está voltado para professores do Ensino Médio. O professor Krerley Oliveira é coordenador do programa desde o início e na 6ª edição a coordenação foi formada também pelo professor Samuel Barbosa, que já foi coordenador em outras duas edições. A intenção do programa é trazer conhecimentos mais específicos para os participantes, incentivando a cultura olímpica desde cedo nas escolas. A 6ª edição do Prolímpico abordou os temas: Por trás dos Problemas Olímpicos; Combinatória; Geometria; Aritmética; Competições Internacionais de Nível Intermediário e Aplicações dos Números Complexos em Problemas Olímpicos ([13]).

1.2.3 Olimpíadas Regionais de Matemática

Nesta subseção serão apresentadas algumas olimpíadas regionais oficiais que contemplam o nível universitário e classificam os competidores premiados para participarem da OBM nesta etapa. A oferta de olimpíadas regionais neste nível ainda é muito baixa e só nos últimos anos começaram a surgir algumas dessas competições, o que contribui para o incentivo da participação desses estudantes.

Começamos falando sobre a Olimpíada Alagoana de Matemática, também chamada de competição Professor Edmilson Pontes. A OAM é realizada pelo Instituto de Matemática da UFAL e ocorre anualmente desde 2003, e desde então só não foi realizada no ano de 2020.

Figura 1.12: Olimpíada Alagoana de Matemática

Fonte: https://www.facebook.com/photo/?fbid=588488999336988&set=a.588488959336992/
Acesso em: 10 de nov. de 2022.

Desde o início a competição vem estimulando estudantes de todo o estado e podem participar os alunos matriculados em quaisquer escolas, públicas ou privadas do estado de Alagoas a partir dos anos finais do ensino fundamental. No caso do nível universitário, podem se inscrever alunos em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso e qualquer período, sendo das redes pública e privada do estado. A OAM só foi diponibilizada para o público universitário na edição de 2019, quando foi criado mais esse nível na competição ([18]).

Continuando no nordeste, chegamos no Rio Grande do Norte com a OMRN, que é organizada pela UFRN e teve sua última edição no ano de 2020, no formato online em razão da pandemia. Esta competição vinha ocorrendo anualmente desde 2008, contando com 3 níveis de participação, sendo os níveis I e II para o ensino fundamental, $6^{\underline{o}}$ a $7^{\underline{o}}$ ano para o I e $8^{\underline{o}}$ a $9^{\underline{o}}$ para o II; e o nível III para estudantes do $1^{\underline{o}}$ ao $3^{\underline{o}}$ ano do ensino médio. Assim como ocorreu na OAM, recentemente foi criado também o nível universitário para os alunos que estejam regularmente matriculados em cursos de graduação e que não tenham concluído o ensino superior ([26]).

Figura 1.13: Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte

Fonte: https://portal.ifrn.edu.br/campus/natalzonanorte/noticias/campus-divulga-lista-de-aprovados-da-omrn/
Acesso em: 10 de nov. de 2022.

Do Rio Grande do Norte, passamos para o Rio de Janeiro, onde é realizada, desde 1998, a OMERJ. Esta olimpíada é organizada pela parceria entre PUC-RJ, UERJ e UFF, e, atualmente, é dividida em seis níveis de acordo com a escolaridade do participante.

O primeiro nível é o Jr, para estudantes do $5^{\underline{o}}$ ano do ensino fundamental, depois temos o nível 1 para alunos do $6^{\underline{o}}$ e $7^{\underline{o}}$ anos do ensino fundamental, nível 2 para $8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ da mesma etapa de ensino, nível 3 para $1^{\underline{o}}$ e $2^{\underline{o}}$ anos do ensino médio, nível 4 contando com alunos do $3^{\underline{o}}$ ano ou que tenham concluído o ensino médio há menos de um ano e não estejam cursando nenhuma graduação em instituições de ensino superior e, por último, temos o nível U destinado aos alunos universitários. O nível U foi criado em 2014, possibilitando aos estudantes de graduação do estado a participação numa competição de matemática regional de nível universitário ([24]).

Figura 1.14: Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro

Fonte: https://www.cp2.g12.br/blog/tijuca2/files/2019/08/omerj-2019-logo02.jpg
Acesso em: 10 de novembro de 2022

Uma outra olimpíada de Matemática que surgiu recentemente foi a Olimpíada Matemáticos por Diversão. A OMpD é uma olimpíada online, criada e organizada pelo Professor Davi Lopes e teve sua primeira edição no ano de 2020, com 3 níveis de participações para estudantes do ensino fundamental e médio. A competição é realizada em duas fases, onde a primeira fase é por meio de uma prova objetiva de 20 questões. Já na segunda fase, os alunos precisam resolver uma prova subjetiva de 4 questões. A prova da primeira fase tem duração de 3 horas, já a da segunda, de 4 horas e meia ([25]).

Figura 1.15: Olimpíada Matemáticos por Diversão

Fonte: https://matematicopordiversao.files.wordpress.com/2022/07/2022-datas.png?w=708/
Acesso em: 10 de nov. de 2022.

Em 2022, a OMpD teve sua terceira edição realizada e contou com duas novidades. Neste ano, ela passou a ser reconhecida oficialmente pela OBM como uma olimpíada regional mas tem abrangância nacional e podem participar estudantes de todo o Brasil, permitindo assim classificar competidores premiados para a OBM. A outra novidade da competição foi que a partir desta edição, passou a contar com mais um nível de participação, que foi o nível universitário, nos mesmos moldes da

OBMU, dando oportunidade para que estudantes universitários possam competir também.

A quantidade de olimpíadas regionais de nível universitário ainda é baixa, mas além das regionais temos também algumas olimpíadas locais, realizadas pelas instituições de ensino superior. Dentre essas, podemos citar a Olimpíada de Matemática FZEA-USP, organizada pela Universidade de São Paulo, que desde que foi criada vem sendo realizada 2 vezes por ano e passou a ter o nível universitário em 2017. Outra olimpíada dessa categoria que podemos citar também é a OMIME, que é realizada pelo IME e é responsável por selecionar a equipe que representará o Instituto na CIIM, sendo destinada aos alunos dos diversos anos e cursos da instituição.

1.3 Meninas Olímpicas

Esta seção tem por finalidade destacar e apresentar a participação feminina nas olimpíadas de matemática no Brasil e no mundo, além de mostrar também competições de matemática que foram criadas exclusivamente para meninas.

1.3.1 Participações nas Principais Olimpíadas Nacionais e Internacionais

A participação feminina na IMO sempre foi muito baixa, comparada com a masculina, desde quando foi criada. Até o ano de 1987, o número de meninas que competiram em uma edição nunca tinha chegado a dez, e com o passar dos anos essa presença feminina foi aos poucos aumentando, porém ainda com um percentual muito pequeno em relação ao total de participantes. Até a última edição, realizada em 2022, o recorde de participação feminina foi na edição de 2016, quando contou com a participação de 71 meninas, de um total de 602 competidores.

O Brasil começou a competir na IMO em 1979, mas só teve uma participante feminina no time pela primeira vez em 1983, com a competidora Leda Braga. Além dessa, poucas foram as outras participações femininas na equipe. Até 2022, apenas sete mulheres diferentes fizeram parte do time brasileiro e a última participação feminina ocorreu em 2012, ou seja, já temos 10 anos sem nenhuma brasileira na IMO. Quanto aos resultados, 3 meninas conseguiram conquistar medalha, sendo a primeira em 2002, quando Larissa Cavalcante ganhou medalha de prata e ficou em 58º no ranking geral, melhor colocação alcançada por uma brasileira. As outras medalhas foram de bronze, conquistadas por Maria Clara Mendes e Deborah Barbosa Alves, ambas em 2011. As três competidoras tiveram duas participações na IMO e, além das medalhas, cada uma também ganhou uma menção honrosa ([11]).

Em outras olimpíadas internacionais, nas participações de brasileiras na CIIM, temos como destaque feminino, Luíze Mello D'Urso Vianna. Ela conseguiu uma prata e um ouro, em 2016 e 2017, respectivamente; sendo a única brasileira a conquistar uma medalha de ouro nesta competição. Além disso, Luíze também conquistou dois bronzes na IMC, em 2017 e 2018. Nas competições nacionais ela conseguiu se destacar ainda mais, pois só na OBMEP ela ganhou 7 ouros seguidos, de 2008 até 2014, além de mais 2 ouros na OBM, em 2011 e 2018, sendo a última no nível universitário. E seus ouros não pararam por aí, pois na OMERJ ela conseguiu alcançar o ponto mais alto do pódio por 3 vezes, se destacando também em competições regionais ([29]).

Em relação à IMC, nenhuma brasileira conseguiu ganhar uma medalha de ouro. Quem mais se destacou na competição foi Maria Clara de Lacerda Werneck, conquistando medalhas nas últimas três edições, sendo dois bronzes, em 2021 e 2022, e uma medalha de prata em 2020. Esta foi a maior premiação alcançada por uma brasileira nessa competição a qual foi conquistada também por Leticia Dias Mattos, na edição de 2014 ([9]). Na CIIM, Maria Clara tem um histórico semelhante ao da IMC, conquistando três medalhas de 2020 à 2022, sendo uma prata em 2021 e dois bronzes nas outras duas edições. Ela também teve bom desempenho na EGMO, onde conquistou uma prata e um bronze, e na Competição Elon Lages Lima, conquistando duas medalhas de bronze na primeira e terceira edição da competição ([20]).

1.3.2 EGMO e PAGMO

A *European Girls' Mathematical Olympiad* é uma competição cuja primeira edição ocorreu em 2012, no Reino Unido. Inspirada na *China Girls' Mathematical Olympiad*, a EGMO foi criada com o objetivo de dar a mais meninas a oportunidade de participar de torneios internacionais, já que a porcentagem de garotas no meio olímpico é ínfima, e assim incentivá-las a permanecer nesse ambiente competitivo.

Figura 1.16: European Girls' Mathematical Olympiad

Fonte: https://noic.com.br/olimpiadas/matematica/olimpiada-europeia-de-matematica-para-garotas/
Acesso em: 17 de nov. de 2022.

Participam do torneio países europeus e também nações convidadas de outros continentes. Em 2017, o Brasil levou sua primeira equipe, estando entre os 40 países convidados naquele ano. Cada país é representado por um grupo de 4 alunas, uma líder e uma vice-líder. A prova é realizada nos moldes da IMO, com dois dias de teste, cada um com três questões e um limite de 4 horas e meia de duração. São distribuídas medalhas de ouro, prata e bronze para metade das participantes, e menções honrosas para aquelas que fizeram ao menos um problema completo.

Desde a sua primeira participação, a equipe brasileira tem conseguido conquistar um bom número de medalhas. Até a última edição, disputada em 2022, o Brasil conseguiu 19 medalhas, sendo 14 de bronze, 4 de prata e 1 de ouro, além de uma menção honrosa. A melhor colocação do País foi na edição de 2018, quando ficou na 13ª posição, com duas medalhas de prata e duas de bronze. Já no destaque individual, temos as competidoras Mariana Bigolin Groff e Ana Beatriz de Castro Studart, recordistas brasileiras em número de participações e medalhas conquistadas. Cada uma participou 3 vezes dessa competição, sendo medalhistas em todas elas. Ana Beatriz conquistou duas pratas e um bronze, enquanto Mariana conseguiu um bronze, uma prata e um ouro, único conquistado por uma brasileira até hoje, o que garantiu a ela a 14ª colocação no ranking geral ([6]).

Outra competição internacional exclusiva para meninas é a *Pan-American Girls' Mathematical Olympiad*, que foi criada recentemente, em 2021, e teve sua segunda edição. A PAGMO foi inspirada na EGMO e segue o mesmo modelo da IMO, com dois dias de provas, cada um com 3 problemas e 4 horas e meia de duração. Esta olimpíada cria oportunidades para que as mulheres testem seu potencial matemático e, ao mesmo tempo, representem seu país. Ela é realizada anualmente, e a cada ano é escolhido um país-sede para realizar a competição na data correspondente. Cada uma das delegações participantes é composta por 4 alunas, um tutor e um líder.

Figura 1.17: Pan-American Girls' Mathematical Olympiad

Fonte: https://pagmo.mat.uc.cl/
Acesso em: 17 de nov. de 2022.

A primeira edição da PAGMO foi realizada em 2021 de maneira virtual e organizada por representantes do Brasil, Chile, Equador, Espanha e México. Nas duas participações brasileiras, todas as competidoras conquistaram medalhas. Em 2021, o Brasil conseguiu uma medalha de bronze, duas de prata e uma de ouro, com Fabricia Cardoso Marques. Já em 2022, foram três medalhas de prata e novamente uma de ouro, desta vez com Endy Lumy Okamura Miyashita. Com este resultado o Brasil obteve a segunda colocação no ranking por países, com 129 pontos, atrás apenas da equipe do Peru que obteve 133 pontos ([22]).

1.3.3 Torneio Meninas na Matemática

O Torneio Meninas na Matemática é uma competição dirigida às alunas do ensino fundamental, a partir do 8º ano, até o último ano do ensino médio das escolas públicas e privadas de todo o Brasil. Ela é dividida em dois níveis, sendo o nível A para 8º e 9º ano do ensino fundamental e o nível B para o ensino médio. Esta competição tem Ana Karoline Borges Carneiro como Coordenadora Geral, sendo uma realização conjunta da comissão gestora TM^2 e da AOBM e conta com o apoio da SBM. Esta competição foi criada no ano de 2019 e com uma parada em 2020, voltou a ser realizada em 2021 e chegou na sua terceira edição em 2022. Ela é composta por duas fases, sendo a primeira uma prova objetiva de 25 questões e a segunda uma prova discursiva realizada em um único dia, composta de 4 questões com duração de 4 horas e 30 minutos. A prova da primeira fase tem caráter apenas classificatório para a participação na segunda fase ([28]).

Figura 1.18: Torneio Meninas na Matemática (TM^2)

Fonte: https://www.tm2.org.br/
Acesso em: 25 de nov. de 2022.

Faz parte dos objetivos desta competição, incentivar a participação de garotas em olimpíadas científicas, com foco na matemática. E assim, aumentar a representatividade feminina em competições nacionais e internacionais, além de promover a maior participação de alunas em treinamentos olímpicos. Esse torneio também consegue criar um espaço de olimpíada em que as alunas brasileiras possam competir e ser premiadas de forma igualitária, desenvolvendo a confiança em seus potenciais para as demais olimpíadas, testes de seleção e desafios estudantis. Isso ajuda a descobrir jovens meninas com talento matemático e apresentá-las ao ambiente de ensino e pesquisa de alto nível de modo a incentivá-las no âmbito da formação acadêmica.

A premiação é realizada durante a Semana Olímpica da OBM. As medalhistas do TM² serão convidadas a participar. As medalhistas que não puderem comparecer receberão a premiação enviada pelos Correios. As agraciadas com certificado de Menção Honrosa poderão baixar o certificado diretamente por email.

Em relação aos resultados das paraibanas nesta competição, temos estudantes premiadas nas duas últimas edições. Em 2021, Mariana Melo Araújo conquistou medalha de bronze no nível B. Já na edição de 2022, Gabriela Rodrigues de Morais ganhou menção honrosa no nível B e Lívia Fernandes Tabosa conseguiu conquistar medalha de ouro no nível A, com a segunda maior pontuação neste nível, alcançando o melhor resultado do estado nesta competição.

1.3.4 OFMEBA

A Olimpíada Feminina de Matemática do Estado da Bahia é a primeira e única competição regional de Matemática destinada exclusivamente para meninas.

Figura 1.19: Olimpíada Feminina de Matemática do Estado da Bahia

Fonte: https://sites.google.com/view/ofmeba/ofmeba-2022?authuser=0/
Acesso em: 25 de nov. de 2022.

A OFMEBA é um evento científico organizado pelo IFBA, Campus Salvador, com apoio da associação IMPA e da AOBM e foi promovida pela primeira vez com recursos oriundos da chamada para Competições Regionais de Matemática, vinculadas à OBM de 2021. Ela consiste numa ação exclusivamente cultural e recreativa, cuja participação se faz de maneira voluntária e desvinculada à aquisição de qualquer bem, serviço ou direito e tem como um dos objetivos, motivar a participação do público feminino em olimpíadas de matemática, estimulando-as a desenvolverem habilidades relacionadas à resolução de problemas e desafios matemáticos. A competição é disputada por meio de uma única fase, que é composta por uma prova objetiva de 20 questões.

Seu público alvo são as estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, Ensino Médio, da Educação de Jovens e Adultos (EJA), de escolas públicas municipais, estaduais, federais e escolas privadas de todo o território baiano. Na edição de 2022, a OFMEBA criou uma premiação para as estudantes de outros estados brasileiros que desejarem participar da Olimpíada. Esta iniciativa foi motivada por várias estudantes do Brasil que em 2021 pediram para participar da primeira edição. A premiação de estudantes de outros estados brasileiros será distribuída por região: Norte, Nordeste, Centro Oeste, Sudeste e Sul. Além disso, contemplará estudantes das redes municipais, estaduais, federais e privadas. Vale ressaltar que esta premiação não tira o caráter da OFMEBA como Olimpíada Regional, visto que as estudantes baianas terão seus direitos reservados, ou seja, as cotas de medalhas e certificados não se fundem ([23]).

1.3.5 Movimento Meninas Olímpicas

O Movimento Meninas Olímpicas é um projeto que foi criado no Rio Grande do Sul, no ano de 2016, e a sua principal finalidade é a de incentivar a participação feminina nas olimpíadas científicas. As idealizadoras deste projeto foram as irmãs Natália e Mariana Bigolin Groff, detentoras de mais de 80 medalhas em olimpíadas de conhecimentos nacionais e internacionais na área de Matemática, Física, Química, Informática, Astronomia, Linguística, entre outros.

Figura 1.20: Movimento Meninas Olímpicas

Fonte: https://tfcbr.inf.ufsm.br/meninas-olimpicas/
Acesso em: 13 de dez. de 2022.

Este movimento tem o objetivo de aumentar a presença das mulheres em espaços de Poder incentivando a participação igualitária das meninas em olimpíadas de conhecimento. No meio olímpico, é notável a predominância masculina entre participantes e premiados, especialmente nas Ciências Exatas. O aumento da representatividade feminina nas áreas das Ciências e Tecnologias significa impactar o interesse de meninas e sua disposição para seguir essas carreiras, afetando diretamente o mercado de trabalho e o futuro da ciência brasileira. Nos últimos anos, o projeto tem desempenhado um papel muito importante para a valorização de meninas nas olimpíadas científicas. As duas irmãs conseguiram fazer com que o movimento fosse conhecido não só no estado delas como também em todo país e até no exterior ([17]).

De acordo com a página do movimento, desde 2016, um total de 12 olimpíadas brasileiras já criaram prêmios especiais para meninas, assim como a IMO em 2017. Ainda segundo o site, foram propostos, aos legisladores, projetos de lei em Assembleias Legislativas, na Câmara Federal e em Câmara de vereadores para criação do Prêmio Meninas Olímpicas. Vários estados, tais como, Amazonas, Rio Grande do Sul, Mato Grosso do Sul e Espírito Santo já tiveram os prêmios aprovados. No Mato Grosso do Sul, inclusive, foi criado o dia estadual das Meninas Olimpícas, comemorado no dia 21 de março. E na cidade de Nova Lima, em Minas Gerais, este prêmio foi criado por meio de uma lei municipal, assim como, na mesma lei foi instituído o dia municipal das meninas olímpicas, para ser comemorado preferencialmente em data próxima ao dia da Mulher.

Capítulo 2

Tópicos de Aritmética

Neste capítulo, serão apresentados conteúdos realcionados à Aritmética, onde são enunciados vários teoremas, proposições e corolários que serão usados como ferramentas para a resolução de questões do Capítulo 3. Alguns resultados não estão demonstrados neste trabalho, sendo disponibilizada a referência de onde pode ser encontrada a demonstração, pelo motivo de não ser utilizado na resolução dos problemas do capítulo seguinte ou por precisar de outros resultados na demonstração, o que estenderia muito este capítulo e o nosso foco principal são as soluções dos problemas olímpicos. A principal referência utilizada no desenvolvimento deste capítulo foi ([7]).

2.1 Princípio de Indução Matemática e Aplicações

O Princípio de Indução Matemática serve para estabelecer verdades matemáticas válidas sobre subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Não se trata de provar que determinada sentença é verdadeira só para um grande número de casos, mas sim de mostrar que é verdadeira para todo número natural maior ou igual do que um certo $a \in \mathbb{N}$ ([8]).

Nos números inteiros há uma propriedade que só eles possuem, que é o *Princípio da Boa Ordenação.*

Dizemos que um subconjunto S de $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leqslant x$ para todo $x \in S$. Dizemos que $a \in S$ é um menor elemento de S se $a \leqslant x$ para todo $x \in S$.

Princípio da Boa Ordenação: Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

Teorema 2.1 (Princípio de Indução Matemática) *Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Se*

(i) $p(a)$ é verdade, e

(ii) supondo que $p(n)$ é verdade para algum $n \geq a$ implica que $p(n+1)$ também é verdade,

então $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Em outras palavras, para se provar uma sentença por indução, são necessários dois passos. O primeiro passo é o mais simples, que é mostrar que vale para algum número a que pertença ao conjunto dos naturais. Verificado isto, vamos para o segundo passo de indução, no qual supomos que é verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$, e a partir disto provamos que vale também para $n+1$. Verificando estes dois passos, conseguimos mostrar, por indução, que determinada sentença aberta é verdadeira para todo $n \geq a$.

Exemplo 2.1 *Mostrar que*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução: Considere a seguinte setença aberta

$$p(n): \ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $p(1)$ é verdadeira. De fato,

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2.$$

Daí, temos que $p(n)$ é verdadeira para $n = 1$. Agora, vamos supor que $p(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Precisamos então mostrar que $p(n+1)$ também é verdadeira, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Tese: } 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 =& \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \\ =& \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução e somando o termo $(n+1)^2$ em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 =& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ =& \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}. \end{aligned}$$

Colocando o termo $(n+1)$ em evidência,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Mas, $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$. Portanto,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

o que mostra que $p(n+1)$ também é verdadeira.

Disto, provamos que $p(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ implica $p(n+1)$ verdadeira também. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Observação 2.1 (Princípio de Indução Forte) *Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. O princípio da indução forte pode ser definido como segue: se*

(i) $p(a)$ é verdade, e

(ii) supondo que $p(k)$ é verdade para todo k tal que $a \leqslant k \leqslant n$, então também é verdade para $p(n+1)$,

concluímos que $p(n)$ é verdade para todo $n \geqslant a$.

2.1.1 Progressão Aritmética

Progressões aritméticas são sequências nas quais os termos, a partir do segundo, são obtidos pela soma de um mesmo número, chamado de razão, ao termo antecedente. A sequência $(2, 5, 8, 11, \cdots)$ é um exemplo de uma Progressão Aritmética (PA) e a razão desta progressão é igual a 3.

Em uma PA, podemos determinar qualquer termo da sequência por uma expressão, chamada de termo geral, assim como também é possível calcular a soma dos n primeiros termos dessa progressão por meio de outra fórmula. Estas expressões podem ser provadas usando o Princípio de Indução Matemática, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2 *Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que*

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde r é um número real fixo chamado razão.

a) Mostre que o termo geral de uma PA é

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

b) Mostre que se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é a soma dos n primeiros termos de uma PA, então

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Solução: Vamos mostrar ambos os itens usando Princípio de Indução Matemática.

a) Considere a seguinte sentença aberta

$$p(n): \ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $p(n)$ é verdadeira para $n = 1$. De fato,

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r \implies a_1 = a_1 + 0 \cdot r \implies a_1 = a_1.$$

Logo, $p(1)$ é verdadeira. Agora, vamos supor que $p(n)$ seja verdadeira para algum n, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } \ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Precisamos então mostrar que $p(n+1)$ também é verdadeira, ou seja,

$$\text{Tese: } \ a_{n+1} = a_1 + n \cdot r.$$

Por definição, temos que

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

usando a hipótese de indução,

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1) \cdot r + r.$$

Colocando r em evidência,

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1+1) \cdot r.$$

Daí, obtemos que

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$$

como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a sentença é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Considere a seguinte sentença aberta

$$p(n): \ S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Inicialmente, provaremos que a sentença $p(n)$ vale para $n = 1$. De fato,

$$S_1 = \frac{1 \cdot (a_1 + a_1)}{2} = \frac{2 \cdot a_1}{2} = a_1.$$

Logo, $p(1)$ é verdadeira. Agora, vamos supor que $p(n)$ é verdadeira para algum n, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Precisamos provar que $p(n + 1)$ também é verdadeira, ou seja,

$$\text{Tese: } S_{n+1} = \frac{(n + 1) \cdot (a_1 + a_{n+1})}{2}.$$

Como

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1},$$

usando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1} =& \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} \\ =& \frac{n \cdot a_1 + n \cdot a_n + 2a_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de $a_{n+1} = a_n + r$ e substituindo o $a_n = a_{n+1} - r$, concluímos que

$$S_{n+1} = \frac{n \cdot a_1 + n \cdot a_{n+1} - n \cdot r + a_{n+1} + a_{n+1}}{2}.$$

Pelo item anterior, observamos que $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$, donde se tem que $a_{n+1} - n \cdot r = a_1$. Substituindo na última equação obtemos

$$S_{n+1} = \frac{n \cdot (a_1 + a_{n+1}) + a_1 + a_{n+1}}{2}.$$

Colocando $a_1 + a_{n+1}$ em evidência,

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1) \cdot (a_1 + a_{n+1})}{2},$$

como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a sentença é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1.2 Binômio de Newton

Considerando a expressão $(1 + X)^n$, em que X é indeterminado e $n \in \mathbb{N}^*$, o desenvolvimento dessa potência será um polinômio de grau n em X cujos coeficientes são números naturais:

$$(1 + X)^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{a-1} X^{n-1} + a_n X^n.$$

O coeficiente a_i, com $0 \leqslant i \leqslant n$, será expressado pelo símbolo $\binom{n}{i}$, lê-se binomial de n sobre i, e pode ser calculado pela seguinte regra

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \tag{2.1}$$

Este coeficiente será chamado de número binomial ([7]).

Lema 2.1 (Relação de Stifel) *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e todo $i \in \mathbb{N}$ com $0 \leqslant i \leqslant n$, tem-se que*

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Demonstração: Pela Equação (2.1), podemos escrever

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \frac{n!}{i!(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}$$

Agora, como

$$i!(i+1) = (i+1)! \quad \text{e} \quad (n-i-1)!(n-i) = (n-i)!$$

então podemos multiplicar a primeira fração por $\dfrac{(i+1)}{(i+1)}$ e a segunda por $\dfrac{(n-i)}{(n-i)}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} &= \frac{n!(i+1)}{i!(i+1)(n-i)!} + \frac{n!(n-i)}{(i+1)!(n-i-1)!(n-i)} \\
&= \frac{n!(i+1)}{(i+1)!(n-i)!} + \frac{n!(n-i)}{(i+1)!(n-i)!} \\
&= \frac{n!(i+1) + n!(n-i)}{(i+1)!(n-i)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(i+1)!(n-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i+1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

como queríamos de demonstrar. □

Lema 2.2 *Para todos $n, i \in \mathbb{N}^*$, com $1 \leqslant i \leqslant n$, tem-se que*

$$i!\binom{n}{i} = n(n-1)\cdots(n-i+1).$$

Demonstração: Utilizando a Equação (2.1), temos que

$$i!\binom{n}{i} = i!\frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Agora, desenvolvendo o $n!$ até chegar no $(n-i)!$,

$$\begin{aligned} i!\binom{n}{i} =& i!\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)(n-i)!}{i!(n-i)!} \\ =& n(n-1)\cdots(n-i+1), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.2 (Binômio de Newton) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando o Princípio de Indução Matemática. Considere a seguinte sentença aberta

$$p(n): \ (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $p(n)$ vale para $n = 1$. De fato,

$$(a+b)^1 = a + b = a^1 + b^1.$$

Logo, $p(1)$ é verdadeira. Agora, vamos supor que $p(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Vamos mostrar que $p(n+1)$ também é verdadeira, ou seja,

Tese: $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}$.

Usando a hipótese de indução e multiplicando ambos os membros da igualdade por $(a+b)$, temos

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n\right](a+b) \\ &= \left[a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \cdots + ab^n\right] + \left[a^n b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1}\right] \end{aligned}$$

O coeficiente 1 nos termos ab^n e $a^n b$ pode ser escrito, respectivamente, como $\binom{n}{n}$ e $\binom{n}{0}$. Daí, fazendo essa substituição e colocando em evidência os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} = a^{n+1} &+ \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} ab^n \\ &+ \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^n + b^{n+1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} = a^{n+1} &+ \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a^{n-1} b^2 \\ &+ \cdots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right] ab^n + b^{n+1}. \end{aligned}$$

Utilizando a Relação de Stifel nas somas dos binômios, obtemos

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}$$

que é a nossa tese. O que prova que $p(n+1)$ também é verdadeira. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos o Teorema do Binômio de Newton. $\square$

2.2 Divisão nos Inteiros

Nesta seção, trataremos da parte da aritmética que envolve divisibilidade nos números inteiros. Como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível, expressa-se esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Quando não existir essa relação, será possível efetuar uma divisão com restos, chamada de divisão euclidiana. O fato de sempre ser possível efetuar estas divisões é responsável por inúmeras propriedades.

2.2.1 Divisão Euclidiana

Mesmo quando um número inteiro $b \neq 0$ não divide o número inteiro a, Euclides utiliza o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de a por b, com resto.

Sejam a e b inteiros. Dizemos que b divide a se existe um inteiro q tal que $a = bq$.

Teorema 2.3 (Divisão Euclidiana) *Sejam a e b dois números inteiros com $b > 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \ \ \textit{com } 0 \leqslant r < b.$$

Demonstração: Seja $b > 0$ e a números inteiros dados. Vamos começar mostrando a existência dos inteiros q e r. Temos duas possibilidades:

1. $\underline{b \text{ divide } a}$. Neste caso, existe um número inteiro q tal que $a = bq + 0$, com $r = 0$.

2. $\underline{b \text{ não divide } a}$. Neste caso, definimos o conjunto

$$S := \{s = a - bt \in \mathbb{Z} \mid \ t \in \mathbb{Z}, s \geqslant 0\}.$$

A primeira observação que fazemos é que, da definição do conjunto S, concluímos que é um conjunto de inteiros positivos. Portanto $S \subset \mathbb{N}$.

Uma segunda observação é que, se tomarmos $t_1 = -|a|$, então o elemento $s_1 = a - bt_1$ pertence ao conjunto S. De fato,

$$s_1 = a - bt_1 = a - b(-|a|) = a + b|a| \geqslant a + |a|.$$

Assim, usando a definição do módulo, temos que $s_1 \geqslant 0$.

Isto mostra que o conjunto S não é vazio e é um subconjunto dos números naturais. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, deve existir um número natural r mínimo de S.

Do fato de r ser mínimo de S, r pertence a S e, portanto, tem que existir um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - bq$, de onde $a = bq + r$.

Resta provar que $0 \leqslant r < b$. Vamos supor, por absurdo, que $r \geqslant b$. Como $r = a - bq \geqslant b$ então devemos ter $a - bq - b \geqslant 0$. Portanto, o elemento $s_2 = a - bq - b = a - b(q + 1)$ pertence ao conjunto S para o valor de $t = q + 1$. Usando novamente que r é o mínimo do conjunto S, deve verificar-se que

$$r \leqslant a - b(q + 1) = r - b \implies r \leqslant r - b.$$

Logo,

$$b \leqslant 0,$$

o que é falso por hipótese. Assim, supor que $r \geqslant b$ é verdade nos leva a uma contradição. Como consequência $r < b$ é verdadeiro.

A unicidade do quociente q e do resto r se mostra supondo que existem q_1 e r_1, outro quociente e resto, respectivamente, da divisão inteira de a por b. Assim, temos que

$$a = bq_1 + r_1 \text{ e } 0 \leqslant r_1 < b,$$

e também que

$$a = bq + r \text{ e } 0 \leqslant r < b.$$

Vamos supor que $r_1 \neq r$, por exemplo que $r > r_1$. Subtraindo as duas equações acima, obtém-se

$$0 = a - a = (bq_1 + r_1) - (bq + r) = b(q_1 - q) + (r_1 - r).$$

Portanto, obtemos $r - r_1 = b(q_1 - q)$. Isto implica que $b|r - r_1$. Daí, temos que $b \leqslant r - r_1$. Por outro lado, temos que $0 \leqslant r_1 < r < b$, ou seja, se verifica que $r - r_1 < b$, o que contradiz que $b \leqslant r - r_1$. Supondo a outra desigualdade $r_1 > r$, chegaríamos da mesma maneira a uma contradição. Portanto devemos ter $r_1 = r$.

Finalmente, de $r - r_1 = b(q_1 - q)$ obtemos que $0 = b(q_1 - q)$. Como $b > 0$, devemos concluir que $q_1 - q = 0$, ou seja, $q_1 = q$, como queríamos demonstrar. □

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de a por b. Da divisão euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, $b \mid a$, lê-se b divide a.

Exemplo 2.3 *Quantos são os múltiplos de 5 que se encontram entre 1 e 253?*

Solução: Para responder esta questão, podemos usar a a Divisão Euclidiana como ferramenta. Ao calcular o quociente e resto da divisão de 253 por 5, obtemos que

$$253 = 5 \cdot 50 + 3.$$

Então, temos 50 como quociente nesta divisão e disto concluímos que existem 50 múltiplos de 5 no intervalo entre 1 e 253.

Exemplo 2.4 *Qual o quociente e o resto da divisão de* -295 *por* 13*?*

Solução: Pela Divisão Euclidiana, temos que

$$-295 = -(13 \cdot 22 + 9) = 13 \cdot (-22) - 9.$$

Daí, teríamos -9 como resto. Mas pelo Teorema 2.3, $0 \leqslant r < 13$, então vamos usar um artifício para obter o resto positivo. Neste caso, é somar e subtrair o divisor, que é o 13, e assim não alteramos o resultado.

$$-295 = -13 \cdot 22 - 13 + 13 - 9 = 13(-22 - 1) + (13 - 9) = 13 \cdot (-23) + 4$$

De onde concluímos, pelo Teorema 2.3, que $q = -23$ e $r = 4$.

Lema 2.3 *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Temos*

(i) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (ax + by)$ para qualquer combinação linear $ax + by$ de a e b com coeficientes $x, y \in \mathbb{Z}$.

(ii) Se $d \mid a$ então $a = 0$ ou $|d| \leqslant |a|$.

(iii) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração: *(i)* Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então podemos escrever $a = d \cdot m$ e $b = d \cdot n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Como

$$ax + by = dmx + dny = d(mx + ny) \quad \text{e} \quad mx + ny \in \mathbb{Z},$$

logo $d \mid (ax + by)$.

(ii) Suponha que $d \mid a$ e $a \neq 0$. Então temos que $a = dk$, com $|k| \geqslant 1$. Assim, $|a| = |d||k| \geqslant |d|$. Daí, concluímos que $|a| \geqslant |d|$.

(iii) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tas que $b = am$ e $c = bn$. Assim,

$$c = bn = amn.$$

Logo, $a \mid c$. $\square$

2.2.2 Máximo Divisor Comum

Dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro $d \in \mathbb{Z}$ será dito um divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.

Por exemplo, ± 1, ± 2, ± 7, ± 14 são os divisores comuns de 28 e 42.

A definição a seguir é exatamente a mesma dada por Euclides nos *Elementos* e se constitui em um dos pilares da sua aritmética.

Diremos que um número inteiro $d \geqslant 0$ é o máximo divisor comum de a e b, denotamos por $\operatorname{mdc}(a, b)$, se possuir as seguintes propriedades:

(i) d é um divisor comum de a e b, e

(ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b, ou seja, se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$.

Teorema 2.4 *Sejam a e b inteiros com $b \neq 0$, q e r respectivamente o quociente e o resto da divisão de a por b, isto é,*

$$a = bq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

Então

$$\operatorname{mdc}(a, b) = \operatorname{mdc}(b, r).$$

Demonstração: Vamos supor que $d = \text{mdc}(a, b)$. Precisamos mostrar que $d = \text{mdc}(b, r)$. Como $d = \text{mdc}(a, b)$, segue que $d \mid a$ e $d \mid b$. Assim, pelo Lema 2.3, $d \mid (a - bq)$. Mas como $a - bq = r$, segue que $d \mid r$. Assim, d é um divisor comum de b e r.

Agora seja d' um inteiro, tal que $d' \mid b$ e $d' \mid r$. Assim, $d' \mid (bq + r)$ e, consequentemente, $d' \mid a$. Como $d = \text{mdc}(a, b)$ e d' também é um divisor comum de a e b, segue da definição de máximo divisor comum, que $d' \mid d$. Logo $d = \text{mdc}(b, r) \Longrightarrow \text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$. $\square$

Exemplo 2.5 *Calcule o* $\text{mdc}(2022, 356)$.

Solução: Realizando a divisão Euclidiana repetidas vezes até encontrar resto 0,

$$2022 = 356 \cdot 5 + 242$$

$$356 = 242 \cdot 1 + 114$$

$$242 = 114 \cdot 2 + 14$$

$$114 = 14 \cdot 8 + 2$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0.$$

Assim, pelo Teorema 2.4, temos que

$$\begin{aligned} \text{mdc}(2022, 356) &= \text{mdc}(356, 242) = \text{mdc}(242, 114) = \text{mdc}(114, 14) \\ &= \text{mdc}(14, 2) = \text{mdc}(2, 0) = 2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{mdc}(2022, 356) = 2.$$

Teorema 2.5 (Bachet-Bézout) *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem inteiros x e y, tais que*

$$\text{mdc}(a, b) = ax + by.$$

Demonstração: O caso $a = b = 0$ é trivial (temos $x = y = 0$). Nos outros casos, considere o conjunto de todas as combinações $\mathbb{Z}-$lineares de a e b:

$$I(a, b) = \{ax + by;\ x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja $d = ax_0 + by_0$ o menor elemento positivo de $I(a, b)$. Afirmamos que d divide todos os elementos de $I(a, b)$. De fato, dado $m = ax + by \in I(a, b)$, sejam $q, r \in \mathbb{Z}$ o quociente e o resto na divisão euclidiana de m por d, de modo que $m = dq + r$ e $0 \leqslant r < d$. Temos

$$r = m - dq = a(x - qx_0) + b(y - qy_0) \in I(a, b).$$

Mas como $r < d$ e d é o menor elemento positivo de $I(a,b)$, segue que $r = 0$ e, portanto, $d \mid m$.

Em particular, como $a, b \in I(a,b)$ temos que $d \mid a$ e $d \mid b$, logo $d \leqslant \text{mdc}(a,b)$. Note ainda que se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid ax_0 + by_0 \Longleftrightarrow c \mid d$. Tomando $c = \text{mdc}(a,b)$ temos que $\text{mdc}(a,b) \mid d$ o que, juntamente com a desigualdade $d \leqslant \text{mdc}(a,b)$, mostra que $d = \text{mdc}(a,b)$. $\square$

Corolário 2.1 *Sejam a e b inteiros. Então*

$$\exists\; x, y \in \mathbb{Z} \textit{ tais que } ax + by = 1 \iff \text{mdc}(a,b) = 1.$$

Demonstração: Suponhamos que existam $x, y \in \mathbb{Z}$, com $ax + by = 1$ e que $\text{mdc}(a,b) = d$. Vamos provar que $d = 1$. Como $d = \text{mdc}(a,b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$, e assim d divide qualquer combinação linear entre a e b. Segue que $d \mid (ax + by) \Longrightarrow d \mid 1 \Longrightarrow d = \pm 1$. Mas, por definição, $d \geqslant 0$ e, assim, segue que $d = 1$. Logo, $\text{mdc}(a,b) = 1$. A recíproca segue do Teorema 2.5. $\square$

Teorema 2.6 *Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ e $\text{mdc}(a,b) = 1$, então $a \mid c$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.5 existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$. Como $a \mid bc$, existe um $k \in \mathbb{Z}$, tal que $bc = ak$. Agora, multiplicando igualdade $ax + by = 1$ por c, obtemos

$$c = cax + cby$$

mas $cb = ak$, então

$$c = acx + aky$$

colocando a em evidência,

$$c = a(cx + ky).$$

Daí, segue que $a \mid c$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.2.3 Números Primos

Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de número primo.

Dados dois números primos p e q e um número inteiro a qualquer, decorrem da definição acima os seguintes fatos:

(i) Se $p \mid q$, então $p = q$. De fato, como $p \mid q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

(ii) Se $p \nmid a$, então $\text{mdc}(p,a) = 1$. De fato, se $\text{mdc}(p,a) = d$, temos que $d \mid p$ e $d \mid a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente, $d = 1$.

Se um número inteiro $n > 1$ não é primo, então ele é chamado de composto. Assim, n é composto, se existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $1 < n_2 \leqslant n_1 < n$ com $n = n_1 \cdot n_2$.

Exemplos de números primos: $2, 3, 5, 7, 11$.

Exemplos de números compostos: $4, 6, 8, 9, 10$.

Proposição 2.1 *Sejam $a, b, p \in \mathbb{N}^*$, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração: Supondo que $p \mid ab$, se $p \mid a$, não há mais o que demonstrar. Se $p \nmid a$, pela definição de máximo divisor comum, temos que $\mathrm{mdc}(p, a) = 1$ e, pelo Teorema 2.6, concluímos que $p \mid b$. $\square$

Corolário 2.2 *Sejam $p, p_1, p_2, \cdots, p_n$ todos números primos. Se $p \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demonstração: A demonstração é feita usando o Princípio de Indução Matemática a partir de $n = 2$. Considere a seguinte sentença aberta

$$s(n): \ p \mid p_1 \cdots p_n \implies p = p_i, \ \text{ para agum } \ 1 \leq i \leq n.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $s(n)$ vale para $n = 2$. De fato, se $p \mid p_1 p_2$, então $p \mid p_1$ ou $p \mid p_2$ pela Proposição 2.1. Como p é primo, segue que $p = p_1$ ou $p = p_2$. Logo, $s(2)$ é verdadeira. Agora, vamos supor que $s(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } p \mid p'_1 \cdots p'_n \implies p = p'_i, \ \text{ para agum } \ 1 \leq i \leq n.$$

Vamos mostrar que $s(n+1)$ também vale, ou seja,

$$\text{Tese: } p \mid p_1 \cdots p_n p_{n+1} \implies p = p_i, \ \text{ para agum } i, \ 1 \leq i \leq n+1.$$

Observe que

$$p \mid p_1 \cdots p_n p_{n+1} \implies p \mid (p_1 \cdots p_n) p_{n+1}.$$

Então, pela Proposição 2.1, temos que $p \mid p_1 \cdots p_n$ ou $p \mid p_{n+1}$. Caso $p \mid p_1 \cdots p_n$, por Hipótese de indução, temos que $p = p_i$ para algum $1 \leqslant i \leqslant n$. Caso $p \mid p_{n+1}$, então $p = p_{n+1}$. O que prova que $s(n+1)$ também é verdadeira. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, o resultado vale. $\square$

Teorema 2.7 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo número natural n maior que 1 ou é primo ou se escreve de forma única, exceto pela ordem dos fatores, como um produto finito de números primos*

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Demonstração: Vamos utilizar a segunda forma do Princípio de Indução. Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

Agora supondo que o resultado seja válido para todo número natural menor do que n, vamos mostrar que vale para n. Se n é primo, não há o que provar. Vamos supor então que n seja composto. Portanto, existem números $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Por hipótese de indução, existem números primos $p_1, \cdots, p_r$ e $q_1, \cdots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$. Logo, $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$.

Vamos mostrar agora a unicidade. Supondo, agora, que $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, pelo Corolário 2.1, então $p_1 = q_j$ para algum j, que após reordenamento de $q_1, \ldots, q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares. $\square$

2.3 Congruências

Nesta seção, iremos abordar uma aritmética com os restos da divisão euclidiana, que começaram a ser observadas por chineses, gregos e indianos, que costumavam buscar soluções de problemas que envolvessem divisões euclidianas e seus restos. Esta ideia, porém, só passou a ser mais desenvolvida a partir de 1801, quando Gauss publicou o seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, que foi sua maior contribuição à Teoria dos Números. Nele, Gauss introduz principalmente a notação de congruência para a relação entre os números inteiros e seus restos da divisão por outro inteiro ([2]).

2.3.1 Aritmética dos Restos

Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \mod m$. Se a relação $a \equiv b \mod m$ não for verdadeira, então diremos que a e b não são congruentes módulo m e a notação usada para este caso é $a \not\equiv b \mod m$.

Por exemplo, $37 \equiv 12 \mod 5$, pois os restos da divisão de 37 e de 12 por 5 são iguais a 2. Por outro lado, $37 \not\equiv 11 \mod 12$, pois o resto da divisão de 37 por 12 é 1 e de 11 por 12 é 11.

Proposição 2.2 *Suponha que* $a, b, m \in \mathbb{Z}$*, com* $m > 1$*. Tem-se que* $a \equiv b \mod m$ *se, e somente se,* $m \mid (b - a)$*.*

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \mod m$. Pela Divisão Euclidiana existem inteiros q_1, q_2 e r, tais que

$$a = m \cdot q_1 + r \text{ e } b = m \cdot q_2 + r \text{ , onde } 0 \leqslant r < m.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} b - a &= m \cdot q_2 + r - m \cdot q_1 - r \\ &= m(q_2 - q_1). \end{aligned}$$

Logo, $m \mid (b - a)$.

Reciprocamente, suponhamos que $m \mid (b - a)$. Neste caso, existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = m \cdot q_1$. Portanto, $b = m \cdot q_1 + a$. Por outro lado, sejam q_2 e r o quociente e o resto da divisão de a por m, respectivamente. Assim, $a = m \cdot q_2 + r$, com $q_2, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant r < m$. Disto, segue que

$$\begin{aligned} b &= m \cdot q_1 + a \\ &= m \cdot q_1 + m \cdot q_2 + r \\ &= m(q_1 + q_2) + r, \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = m(q_1 + q_2) + r, \text{ onde } 0 \leqslant r < m.$$

Pela unicidade na Divisão Euclidiana, podemos concluir que r é também o resto da divisão de b por m. Assim, temos que $a \equiv b \mod m$. $\square$

Proposição 2.3 *Seja* $m \in \mathbb{N}^*$*. Para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, temos:*

(i) $a \equiv a \mod m$.

(ii) se $a \equiv b \mod m$*, então* $b \equiv a \mod m$.

(iii) se $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$*, então* $a \equiv c \mod m$.

Demonstração: *(i)* Note que $m \mid 0 \Longrightarrow m \mid (a - a)$ e, consequentemente, $a \equiv a \mod m$ pela Proposição 2.2.

(ii) Pela Proposição 2.2, se $a \equiv b \mod m$, então que $m \mid a - b$. Assim, $a - b = mq$ para algum número inteiro q. Multiplicando por -1 esta igualdade, obtemos $b - a = m(-q)$, que significa que $m \mid b - a$. Portando, $b \equiv a \mod m$ pela Proposição 2.2.

(iii) Pela Proposição 2.2, se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m$, então $m \mid (b - a)$ e $m \mid (c - b)$. Agora, pelo item (i) do Lema 2.3, temos que $m \mid [(b - a) + (c - b)]$, ou seja, $m \mid c - a$. Logo, $a \equiv c \mod m$ pela Proposição 2.2. $\square$

Proposição 2.4 *Sejam $a, b, c, d, m, r \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $ac \equiv bd \mod m$.

(iii) Se $ar \equiv br \mod m$ e $\mathrm{mdc}(r, m) = 1$, então $a \equiv b \mod m$.

Demonstração: Para demonstrar essa proposição, usaremos a Proposição 2.2 e o Lema 2.3.

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $m \mid (b-a)$ e $m \mid (d-c)$. Daí, temos que $m \mid [(b-a)+(d-c)]$, ou seja, $m \mid [(b+d)-(a+c)]$. E assim, $a+c \equiv b+d \mod m$.

(ii) Analogamente ao item *(i)*, m divide qualquer combinação linear entre $b-a$ e $d-c$. Então temos que $m \mid [d(b-a)+a(d-c)]$, mas $d(b-a)+a(d-c) = bd - ad + ad - ac = bd - ac$. Assim, $m \mid (bd - ac)$, mostrando que $ac \equiv bd \mod m$.

(iii) Se $ar \equiv br \mod m$, então $m \mid (br - ar)$, ou seja, $m \mid r(b-a)$. Como $\mathrm{mdc}(r, m) = 1$, segue que $m \mid (b-a)$ pelo Teorema 2.6. Logo, $b \equiv a \mod m$. □

Corolário 2.3 *Para todos $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, se $a \equiv b \mod m$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \mod m$.*

Demonstração: Vamos demonstrar este corolário usando o Princípio de Indução Matemática. Considere a seguinte sentença aberta

$$p(n):\ a \equiv b \mod m \implies a^n \equiv b^n \mod m.$$

Para $n = 0$, temos

$$a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \cdot m \implies m \mid (a^0 - b^0) \implies a^0 \equiv b^0 \mod m.$$

Então, a sentença aberta $p(n)$ é válida para $n = 0$. Agora, suponhamos que $p(n)$ vale para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução: } a \equiv b \mod m \implies a^n \equiv b^n \mod m.$$

Vamos mostrar que $p(n+1)$ também vale, ou seja,

$$\text{Tese: } a \equiv b \mod m \implies a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m.$$

Como $a \equiv b \mod m$ e, por hipótese de indução, $a^n \equiv b^n \mod m$, pela Proposição 2.4, temos que

$$a \cdot a^n \equiv b \cdot b^n \mod m \implies a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m,$$

como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a sentença $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 2.6 *Encontre o resto da divisão de* 7^{10} *por 51.*

Solução: Note que
$$7^2 = 49 \equiv -2 \mod 51$$
Elevando ambos os membros a 5,
$$(7^2)^5 \equiv (-2)^5 \mod 51 \Longrightarrow 7^{10} \equiv -32 \mod 51.$$
Mas como $-32 = -51 + 19$,
$$7^{10} \equiv -51 + 19 \mod 51 \Longrightarrow 7^{10} \equiv 19 \mod 51.$$
Logo, o resto da divisão de 7^{10} por 51 é igual a 19.

Exemplo 2.7 *Prove que* $11 \mid (2^{1000} - 1)$.

Solução: Pela Proposição 2.2, basta provar que $2^{1000} \equiv 1 \mod 11$. Agora, observemos que
$$2^5 = 32 \equiv -1 \mod 11.$$
Elevando ambos os membros a 200, obtemos
$$(2^5)^{200} \equiv (-1)^{200} \mod 11 \Longrightarrow 2^{1000} \equiv 1 \mod 11.$$
E isto é suficiente para concluírmos que $11 \mid 2^{1000} - 1$.

2.3.2 Números de Fibonacci

Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, nasceu na Itália por volta de 1175. Em sua obra intitulada *Liber Abacci*, ou livro do ábaco, está presente o problema dos coelhos, o qual daria origem a uma das sequências mais famosas da humanidade, conhecida como sequência de Fibonacci ([5]).

Cada termo da sequência de Fibonacci é definido, a partir do terceiro termo, como sendo a soma dos dois termos anteriores, com os dois primeiros termos iguais a 1. Assim, os primeiros números desta sequência são
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Definição 2.1 *A sequência de Fibonacci* (F_n) *é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, *para* $n \geqslant 1$, *onde* $F_1 = 1$ *e* $F_2 = 1$.

Dentre as várias propriedades que esta sequência possui, temos a periodicidade. Os números de Fibonacci apresentam uma regularidade quanto à repetição de seus últimos dígitos. O dígito das unidades se repete com uma periodicidade de 60, ou seja, a sequência formada pelos algarismos das unidades do números de Fibonacci se repete a cada 60 números. Esta curiosidade foi descoberta em 1774 pelo matemático franco-italiano Joseph Louis Lagrange ([27]).

Por exemplo, os números $F_7 = 13$, $F_{67} = 44945570212853$ e $F_{127} = 155576970220531065681649693$ exemplificam a periodicidade dos dígitos das unidades desta sequência.

Proposição 2.5 *$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ para m e n naturais.*

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em ([5]), na página 25.

Proposição 2.6 *$F_{n+60} \equiv F_n \mod 10$ para todo n inteiro positivo.*

Demonstração: Faremos a demonstração usando o Princípio de Indução Matemática. Considere a seguinte sentença aberta

$$p(n): \ F_{n+60} \equiv F_n \mod 10.$$

Primeiramente, observe que $F_{61} \equiv F_1 \mod 10$, pois $F_{61} - F_1 = 2504730781961 - 1$. Logo, $p(1)$ é verdadeira. Agora, vamos supor que $p(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$\text{Hipótese de indução}: \ F_{n+60} \equiv F_n \mod 10.$$

Vamos mostrar que $p(n+1)$ também é verdadeira, ou seja,

$$\text{Tese}: \ F_{n+61} \equiv F_{n+1} \mod 10.$$

Por hipótese de indução, temos que $F_{n+60} \equiv F_n \mod 10$. Somando F_{n+59} à congruência anterior, temos $F_{n+59} + F_{n+60} \equiv F_n + F_{n+59} \mod 10$.

Mas, por definição,

$$F_{n+59} + F_{n+60} = F_{n+61}$$

e usando a Proposição 2.2 em F_{n+59}, obtemos

$$F_{n+59} = F_n F_{60} + F_{n-1} F_{59}$$

Assim,

$$F_{n+61} \equiv F_n + F_n F_{60} + F_{n-1} F_{59} \mod 10.$$

Note que $F_{59} \equiv 1 \mod 10$ e $F_{60} \equiv 0 \mod 10$, pois $F_{59} = 956722026041$ e $F_{60} = 1548008755920$. Então,

$$F_{n+61} \equiv F_n + F_n \cdot 0 + F_{n-1} \cdot 1 \equiv F_n + F_{n-1} \mod 10$$

e finalmente, usando a definição da sequência de Fibonacci, $F_{n+61} \equiv F_{n+1} \mod 10$. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, $F_{n+60} \equiv F_n \mod 10$ para todo n inteiro não negativo. $\square$

2.3.3 Teorema de Euler

Proposição 2.7 *Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. A congruência $aX \equiv 1 \mod m$ possui solução se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$. Além disso, se $x_0 \in \mathbb{Z}$ é uma solução, então x é uma solução da congruência se, e somente se, $x \equiv x_0 \mod m$.*

A demonstração da Proposição 2.7 encontra-se em ([7]), na página 194.

Um sistema reduzido de resíduos módulo m é um conjunto de números inteiros $r_1, \ldots, r_s$ tais que

a) $\mathrm{mdc}(r_i, m) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, s$;

b) $r_i \not\equiv r_j \mod m$, se $i \neq j$;

c) Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$, existe i tal que $n \equiv r_i \mod m$.

Proposição 2.8 *Seja $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m e seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$. Então, $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m.*

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em ([7]), na página 197.

Designaremos por $\varphi(m)$ o número de elementos de um sistema reduzido de resíduos módulo $m > 1$, que corresponde à quantidade de números naturais entre 0 e $m - 1$ que são primos com m. Pondo $\varphi(1) = 1$, isso define uma importante função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, chamada função 'fi de Euler'.

Exemplo 2.8
- $\varphi(9) = 6$, *pois de 1 até 8 temos seis números que são primos com 9, ou seja o mdc entre 9 e cada um deles é igual a 1. São eles $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.*
- $\varphi(13) = 12$, *pois de 1 até 12 todos os números são primos com 13, e isso se dá justamente por 13 ser um número primo.*

Observação 2.2 *Pela definição, temos que $\varphi(m) \leqslant m - 1$, para todo $m \geqslant 2$. Além disso, $\varphi(m) = m - 1$ se, e somente se, m é um número primo. De fato, m é primo se, e somente se, $1, 2, \cdots, m - 1$ são coprimos com m, o que é equivalente a dizer que $\varphi(m) = m - 1$.*

Teorema 2.8 (Euler) *Sejam $m, a \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$ e $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$. Então,*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m.$$

Demonstração: Seja $r_1, \cdots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m. Logo, pela Proposição 2.8, $ar_1, \cdots, ar_{\varphi(m)}$ formam um sistema reduzido de resíduos módulo m e, portanto,

$$ar_1 \cdot ar_2 \cdots ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \mod m$$

pela definição de sistema reduzido de resíduos. Consequentemente,

$$a^{\varphi(m)} r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)} = ar_1 \cdot ar_2 \cdots ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \mod m,$$

ou seja,

$$a^{\varphi(m)}(r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)}) \equiv (r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)}) \mod m.$$

Como $\mathrm{mdc}(r_1 \cdot r_2 \cdots r_{\varphi(m)}, m) = 1$, segue que

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$$

pelo item (iii) da Proposição 2.4. □

Exemplo 2.9 *Determine o resto da divisão de* 4^{50} *por 9.*

Solução: Como o $\mathrm{mdc}(4, 9) = 1$, pelo Teorema de Euler,

$$4^{\varphi(9)} \equiv 1 \mod 9.$$

Mas $\varphi(9) = 6$, então

$$4^6 \equiv 1 \mod 9 \Longrightarrow 4^{48} \equiv 1^8 \mod 9.$$

Multiplicando ambos os membros por 4^2,

$$4^{50} \equiv 16 \mod 9 \Longrightarrow 4^{50} \equiv 7 \mod 9.$$

Portanto, 7 é o resto da divisão de 4^{50} por 9.

Proposição 2.9 *Sejam* $m, m' \in \mathbb{N}$ *tais que* $\mathrm{mdc}(m, m') = 1$. *Então*

$$\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m').$$

Demonstração na referência ([7]), página 199.

Proposição 2.10 *Se* p *é um número primo e* r*, um número natural, então tem-se que*

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Demonstração: De 1 até p^r, temos p^r números naturais. Temos que excluir, desses, os números que não são primos com p^r, ou seja, todos os múltiplos de p, que são precisamente $p, 2p, \ldots, p^{r-1}p$, cujo número é p^{r-1}. Portanto, $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$, provando o resultado. □

Teorema 2.9 *Seja $m > 1$ e seja $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ a decomposição de m em fatores primos. Então,*

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Demonstração: O resultado decorre imediatamente das Proposições 2.9 e 2.10.

2.3.4 Pequeno Teorema de Fermat e Teorema de Wilson

Lema 2.4 *Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e p um número primo tais que* $\mathrm{mdc}(a, p) = 1$. *Tem-se que*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Demonstração: Como $a, p \in \mathbb{Z}$ e o $\mathrm{mdc}(a, p) = 1$, pelo Teorema de Euler

$$a^{\varphi(p)} \equiv 1 \mod p.$$

Mas p é um número primo, então $\varphi(p) = p - 1$. Daí, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$, como gostaríamos. □

Teorema 2.10 (Pequeno Teorema de Fermat) *Dado um número primo p e qualquer $a \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

$$a^p \equiv a \mod p$$

Demonstração: Se $\mathrm{mdc}(a, p) = 1$, então o resultado segue do Lema 2.4, multiplicando por a ambos os membros da congruência $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. No caso em que $\mathrm{mdc}(a, p) \neq 1$, segue-se que $p \mid a$ e, consequentemente, $p \mid (a^p - a)$, o que ainda garante que $a^p \equiv a \mod p$, provando assim o teorema. □

Exemplo 2.10 *Determine o resto da divisão de* 13^{111} *por* 11.

Solução: Como 11 é um número primo e o $\mathrm{mdc}(13, 11) = 1$, pelo Lema 2.4,

$$13^{10} \equiv 1 \mod 11.$$

Elevando ambos os membros a 11, temos

$$13^{110} \equiv 1^{11} \mod 11.$$

Por fim, multiplicando ambos os membros por 13,

$$13^{111} \equiv 13 \mod 11 \Longrightarrow 13^{111} \equiv 2 \mod 11.$$

Logo, o resto da divisão de 13^{111} por 11 é 2.

Teorema 2.11 (Teorema de Wilson) *Se p é um número primo, então*

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p.$$

Demonstração: Note que para $p = 2$ e $p = 3$ o Teorema é válido. Suponhamos então $p \geqslant 5$ primo. Para todo $i \in 1, \ldots, p-1$, pela Proposição 2.7, a congruência $iX \equiv 1 \mod p$ possui uma única solução módulo p; ou seja, dado $i \in 1, \ldots, p-1$ existe um único $j \in 1, \ldots, p-1$ tal que $ij \equiv 1 \mod p$. Por outro lado, se $i \in 1, \ldots, p-1$ é tal que $i^2 \equiv 1 \mod p$, então $p \mid i^2 - 1$, o que equivale a $p \mid i - 1$ ou $p \mid i + 1$, o que só pode ocorrer se $i = 1$ ou $i = p - 1$. Logo,

$$2 \cdots (p-2) \equiv 1 \mod p,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdots (p-2)(p-1) \equiv& p - 1 \mod p \\ \equiv& -1 \mod p. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p,$$

como gostaríamos. □

Exemplo 2.11 *Qual o resto da divisão de $\frac{13!}{7}$ por 7?*

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{13!}{7} =& \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7} \\ =& 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) &\equiv (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \mod 7 \\ &\equiv 6! \cdot 6! \mod 7 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Wilson,

$$\frac{13!}{7} \equiv (-1) \cdot (-1) \mod 7 \Longrightarrow \frac{13!}{7} \equiv 1 \mod 7$$

Então, o resto da divisão de $\frac{13!}{7}$ por 7 é 1.

Capítulo 3

Soluções de Problemas Olímpicos de Nível Universitário

Neste capítulo, apresentamos resoluções de questões, ligadas a aritmética, de algumas olimpíadas de matemática universitária. Foram selecionadas as questões mais recentes possíveis, sendo todas de 2017 até os dias atuais, em ordem cronológica, e também exclusivamente questões que disponibilizavam apenas o gabarito mas sem nenhuma solução. Tivemos grande dificuldade na seleção das questões pelo número reduzido de provas do nível desejado com os conteúdos de aritmética.

1) (GN 2017 - 1ª fase - Q 07) *Quantos valores inteiros de x no intervalo [1, 100] fazem com que o determinante da seguinte matriz seja múltiplo de 3?*

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & (x+2) \end{pmatrix}$$

(a) 0

(b) 34

(c) 67

(d) 100

Solução: Vamos chamar a matriz em questão de M e inicialmente, iremos calcular o determinante da matriz em função de x. Como se trata de uma matriz de ordem 3, utilizaremos a regra de Sarrus para o cálculo deste determinante.

$$\begin{aligned} \det \mathrm{M} =& (3x^3 + 6x^2) + 28 + 70 - 147 - 20x^2 - (2x + 4) \\ =& 3x^3 - 14x^2 - 2x - 53. \end{aligned}$$

Agora vamos determinar para quantos valores de x a expressão acima será múltiplo de 3, ou seja, será congruente a 0 módulo 3.

Para todo x inteiro, temos que $3x^3 \equiv 0 \mod 3$. Além disso, $-14x^2 - 2x - 53 = (x^2 - 15x^2) + (x - 3x) + (1 - 54)$. Então,

$$\det \mathrm{M} \equiv x^2 + x + 1 \mod 3$$

Resta agora verificar para quais valores de x a expressão $x^2 + x + 1$ é congruente a 0 módulo 3. Como na divisão por 3 só é possível deixar restos 0, 1 e 2, temos que

$$x \equiv 0 \mod 3 \Longrightarrow x^2 + x + 1 \equiv 1 \mod 3$$

$$x \equiv 1 \mod 3 \Longrightarrow x^2 + x + 1 \equiv 0 \mod 3$$

$$x \equiv 2 \mod 3 \Longrightarrow x^2 + x + 1 \equiv 1 \mod 3$$

Assim, os valores de x para que $\det \mathrm{M} \equiv 0 \mod 3$, são determinados pela expressão $x_k = 3k + 1$ com $x \in [1, 100]$ e $k \geq 0$ e inteiro. Observe que o último termo congruente a 1 módulo 3 no intervalo é o 100. Então basta substituir x_k por 100 para calcular o último termo do intervalo que satisfaz a condição.

$$100 = 3k + 1 \Longrightarrow 3k = 100 - 1 \Longrightarrow 3k = 99 \Longrightarrow k = 33.$$

Daí, temos que $x_k \in [1, 100]$ se, e somente se, $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 32, 33\}$.

Logo, temos 34 valores inteiros no intervalo [1, 100] que fazem o Determinante da matriz ser múltiplo de 3, e assim a alternativa (b) é a resposta da questão.

2) (GN 2017 - 1ª fase - Q 10) *Para cada par de números inteiros m, n denotemos por $\mathrm{mdc}(m, n)$ o máximo divisor comum de m e n. Se $n \geq 2$, qual é o valor de* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{mdc}(n, j)} \right\rfloor$?

(a) 1

(b) $\phi(n)$

(c) n

(d) $\dfrac{n}{\phi(n)}$

Solução: Se n e j forem primos entre si, então $\mathrm{mdc}(n, j) = 1$ e isto implia $\left\lfloor \dfrac{1}{\mathrm{mdc}(n, j)} \right\rfloor = 1$.

Por outro lado, se n e j tiverem fatores em comum em sua decomposição, então $\text{mdc}(n, j) \geqslant 1$, o que implica $\left\lfloor \dfrac{1}{\text{mdc}(n,j)} \right\rfloor = 0.$

Daí, temos que no somatório, só serão contadas as parcelas onde j for coprimo com n, pois caso contrário, a parcela será nula.

Para $n = 2$:
$\displaystyle\sum_{j=1}^{1} \left\lfloor \frac{1}{\text{mdc}(2,j)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 = \phi(2).$

Para $n = 3$:
$\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \left\lfloor \frac{1}{\text{mdc}(3,j)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 + 1 = 2 = \phi(3).$

Para $n = 4$:
$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \left\lfloor \frac{1}{\text{mdc}(4,j)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 1 + 0 + 1 = 2 = \phi(4).$

Então, de 1 até $n - 1$, temos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{1}{\text{mdc}(n,j)} \right\rfloor = \phi(n)$, pois a soma obtida é o resultado da quantidade de números que são coprimos com n. Logo, a resposta da questão será a alternativa (b).

3) (OBMU 2018 - 1ª fase - Q 23) *Para quantos números primos p o número $p^3 - 4p + 9$ é um quadrado perfeito?*

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 7

Solução: Para que a expressão do enunciado seja um quadrado perfeito, temos que $p^3 - 4p + 9 = n^2$. Escrevendo tudo módulo p, $n^2 \equiv 9 \mod p$. Então

$$n \equiv 3 \mod p \quad \text{ou} \quad n \equiv -3 \mod p \Longrightarrow n = q \cdot p \pm 3, \text{ com } q \in \mathbb{N}^*.$$

Daí,

$$\begin{aligned} n^2 =& (q \cdot p \pm 3)^2 \\ p^3 - 4p + 9 =& q^2p^2 \pm 6qp + 9 \end{aligned}$$

cancelando o 9 e dividindo tudo por p

$$\begin{aligned} p^2 - 4 =& q^2p \pm 6q \\ p^2 - q^2p =& \pm 6q + 4 \\ p \cdot (p - q^2) =& 2 \cdot (\pm 3q + 2) \end{aligned}$$

Disto, $p|2$ ou $p|(\pm 3q+2)$, e assim temos $p=2$ como uma das soluções. Agora supondo p ímpar, $p|(\pm 3q+2)$. Então

$$p \leqslant 3q+2 \Longrightarrow \frac{p-2}{3} \leqslant q.$$

Se $n = qp+3$ ou $n = qp-3$, então $n \geqslant qp-3$. Mas

$$\frac{p-2}{3} \leqslant q \Longrightarrow \frac{(p-2)\cdot p}{3} - 3 \leqslant qp-3$$

Daí,

$$\begin{aligned} n \geqslant& \frac{(p-2)\cdot p}{3} - 3 \\ n \geqslant& \frac{p^2-2p-9}{3} \\ n^2 \geqslant& \frac{(p^2-2p-9)^2}{3^2} \\ p^3-4p+9 \geqslant& \frac{(p^2-2p-9)^2}{9} \\ 9p^3-36p+81 \geqslant& p^4-4p^3-14p^2+36p+81 \\ p^4-13p^3-14p^2+72p \leqslant& 0 \\ p\cdot(p-2)\cdot(p^2-11p-36) \leqslant& 0 \end{aligned}$$

Como $p > 2$, já que supomos que é ímpar, então necessariamente

$$p^2-11p-36 \leqslant 0.$$

Resolvendo esta inequação, obtemos

$$\frac{11-\sqrt{265}}{2} \leqslant p \leqslant \frac{11+\sqrt{265}}{2}.$$

Como queremos p primo, temos como possíveis valores para ele 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Como já foi verificado antes, o 2 é uma das soluções. Basta então verificar os demais casos. Testanto 3, 5, 7, 11 e 13 em p^3-4p+9, concluímos que apenas 2, 7 e 11 satisfazem a condição do enunciado. Logo, para apenas 3 números primos, o número p^3-4p+9 é um quadrado perfeito, e assim temos a alternativa (b) como resposta.

4) (OBMU 2019 - 1ª fase - Q 09) *Para quantos valores de n inteiros positivos o determinante da matriz:*

$$\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & -2^n \end{pmatrix}$$

é divísivel por 7?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 15

Solução: Primeiramente, vamos calcular o determinante de A em função de n.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & -2^n \end{vmatrix} = -2^{2n} - 3^{2n} = -(4^n + 9^n)$$

Utilizando a congruência modular, e escrevendo os termos módulo 7, temos

$$4 \equiv 4 \bmod 7 \Longrightarrow 4^n \equiv 4^n \mod 7$$

$$9 \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow 9^n \equiv 2^n \mod 7$$

Disto,

$$\det A \equiv -(4^n + 2^n) \mod 7$$

e colocando 2^n em evidência,

$$\det A \equiv -2^n(2^n + 1) \mod 7.$$

Note que 2^n para qualquer n inteiro não é divisível por 7. Resta agora determinar para quais valores de n, a expressão $2^n + 1$ será divisível por 7. Pela Divisão Euclidiana, existem inteiros q e r, tais que $n = 3 \cdot q + r$, com r variando de 0 a 2. Disto, temos que

$$2^n + 1 = 2^{3q+r} + 1 = 2^{3q} \cdot 2^r + 1 = 8^q \cdot 2^r + 1$$

Mas $8 \equiv 1 \mod 7$, então

$$\begin{aligned} 2^n + 1 &\equiv 1^q \cdot 2^r + 1 \mod 7 \\ &\equiv 2^r + 1 \mod 7. \end{aligned}$$

Como r varia de 0 a 2, temos

$$2^0 + 1 \equiv 2 \mod 7$$

$$2^1 + 1 \equiv 3 \mod 7$$

$$2^2 + 1 \equiv 5 \mod 7$$

Daí, $2^n + 1$ só deixa restos 2, 3, e 5 na divisão por 7, ou seja, para qualquer valor de $n \in \mathbb{Z}$, $2^n + 1$ também não é divisível por 7.

Como 7 não divide nenhum do termos 2^n e $2^n + 1$, não existe nenhum inteiro positivo n para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & -2^n \end{pmatrix}$ seja divisível por 7. Logo, a resposta da questão será a alternativa (a).

5) (OBMU 2019 - 1ª fase - Q 25) *Considere a sequência definida por* $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ *e, para* $n \geq 3$,

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Determine o resto na divisão de a_{2019} *por 2019.*

(a) 1

(b) 2

(c) 2017

(d) 2018

Solução: Inicialmente, vamos analisar os restos de a_n na divisão por n, a partir do a_3.

$$\begin{aligned} a_3 =& 2 \cdot (1+0) = 2 \equiv -1 \mod 3 \\ a_4 =& 3 \cdot (2+1) = 9 \equiv 1 \mod 4 \\ a_5 =& 4 \cdot (9+2) = 44 \equiv -1 \mod 5 \\ a_6 =& 5 \cdot (44+9) = 265 \equiv 1 \mod 6 \end{aligned}$$

Observando o padrão seguido termo a termo, temos que

$$a_n \equiv -1 \mod n \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

e

$$a_n \equiv 1 \mod n \text{ se } n \text{ é par}$$

para $n \geqslant 2$. Ou seja, $a_n \equiv (-1)^n \mod n$. Assim, para $n = 2019$,

$$a_{2019} \equiv -1 \mod 2019 \Longrightarrow a_{2019} \equiv 2018 \mod 2019.$$

Logo, 2018 é o resto da divisão de a_{2019} por 2019, e a alternativa (d) é a resposta.

6) (1ª CELL 2021 - Q 01) *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 1000 \\ 1001 & 1002 & \cdots & 2000 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 999001 & 999002 & \cdots & 1000^2 \end{pmatrix}$$

Escolha qualquer entrada e a denote por x_1*. Em seguida, apague a linha e coluna contendo* x_1 *para obtemos uma matriz* 999×999*. Então escolha qualquer entrada e a denote por* x_2*. Apague a linha e a coluna contendo* x_2 *para obter uma matriz* 998×998*. Realize essa operação 1000 vezes. Determine o valor da soma*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{1000}.$$

(a) 1000

(b) $\dfrac{1000^3 + 1000}{2}$

(c) 1000^2

(d) $\dfrac{1000^2 + 1000}{2}$

(e) $\dfrac{1001}{2}$

Solução: Inicialmente, encontraremos uma expressão para a_{ij}. Note que $a_{(i+1)j} = a_{ij} + 1000$ e $a_{i(j+1)} = a_{ij} + 1$. Assim, com i ou j fixos, temos progressões aritméticas de razão 1 e 1000, respectivamente. Como o primeiro termo é $a_{11} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} a_{ij} =& 1 + 1000 \cdot (i-1) + 1 \cdot (j-1) \\ =& 1 + 1000 \cdot (i-1) + j - 1 \\ =& 1000 \cdot (i-1) + j, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_{ij} = 1000 \cdot (i-1) + j.$$

Agora, notemos que se $x_n = a_{i_n j_n}$ para todo $n = 1, ..., 1000$, então $1 \leq i_n, j_n \leq 1000$ com $i_n \neq i_m$ se $n \neq m$ e $j_n \neq j_m$ se $n \neq m$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{1000} x_n =& \sum_{n=1}^{1000} \left[1000 \cdot (i_n - 1) + j_n\right] = \sum_{n=1}^{1000} 1000 \cdot (i_n - 1) + \sum_{n=1}^{1000} j_n \\ =& \sum_{i=1}^{1000} 1000 \cdot (i-1) + \sum_{j=1}^{1000} j. \end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{i=1}^{1000}(i-1)$ e $\sum\limits_{j=1}^{1000} j$ podem ser vistos como soma dos 1000 primeiros termos de uma PA, então

$$\sum_{n=1}^{1000} x_n = 1000 \cdot \left[\frac{1000 \cdot (1000+1)}{2} - 1000\right] + \frac{1000 \cdot (1000+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{1000} x_n = 1000 \cdot \left(\frac{1000^2 + 1000 - 2 \cdot 1000}{2}\right) + \frac{1000^2 + 1000}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{1000} x_n = \frac{1000^3 + 1000^2 - 2 \cdot 1000^2 + 1000^2 + 1000}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{1000} x_n = \frac{1000^3 + 1000}{2}$$

Logo, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1000} = \dfrac{1000^3 + 1000}{2}$ e a alternativa correta é a (b).

7) (1ª CELL 2021 - Q 02) *Quantos termos racionais aparecem na expansão binomial de*

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{6})^{100}?$$

(a) 16

(b) 17

(c) 66

(d) 33

(e) 50

Solução: Usando a expansão do binômio de Newton, temos que

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{6})^{100} = (\sqrt{6})^{100} + \binom{100}{1}(\sqrt{6})^{99}\sqrt[3]{2} + \cdots + \binom{100}{99}\sqrt{6}(\sqrt[3]{2})^{99} + (\sqrt[3]{2})^{100},$$

ou seja,

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{6})^{100} = \sum_{p=0}^{100} \binom{100}{p} \cdot (\sqrt[3]{2})^p \cdot (\sqrt{6})^{100-p}.$$

Observe que $\binom{100}{p}$ sempre será um número inteiro, para $p \in \{0, 1, 2, \cdots, 100\}$, e consequentemente um racional. Então precisamos saber para quais valores de p teremos $(\sqrt[3]{2})^p$ e $(\sqrt{6})^{100-p}$ racionais. Notemos que

$$(\sqrt[3]{2})^p \cdot (\sqrt{6})^{100-p} = 2^{\frac{p}{3}} \cdot 6^{\frac{100-p}{2}} = 2^{\frac{p}{3}} \cdot 6^{50} \cdot 6^{\frac{-p}{2}}$$

Daí, temos que 6^{50} é inteiro, e consequentemente racional. Resta agora determinar os valores de p para que $2^{\frac{p}{3}} \cdot 6^{\frac{-p}{2}}$ seja racional. E isto vai ocorrer quando $3|p$ e $2|p$, ou seja, quando $6|p$. Mas p varia de 0 a 100, então basta determinar todos os múltiplos de 6 no intervalo $[0, 100]$. Como existem 17 múltiplos de 6 neste intervalo, logo aparecem 17 termos racionais na expansão binomial, e a alternativa correta é a (b).

8) (1ª CELL 2021 - Q 03) *Seja* $f : \{1, 2, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função tal que* $f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1)$ *para todo* $n \geq 1$. *Sabendo que* $f(2020) = \dfrac{1}{4040}$, *o valor de* $f(1)$ *é:*

(a) $\dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{1}{4040}$

(c) $\dfrac{1}{2021}$

(d) 1

(e) $\dfrac{1}{2020}$

Solução: Isolando o $f(n+1)$ na expressão, temos

$$f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1) \Longrightarrow f(n+1) + f(n)f(n+1) = f(n)$$

Colocando $f(n+1)$ em evidência,

$$f(n+1) \cdot (1 + f(n)) = f(n) \Longrightarrow f(n+1) = \frac{f(n)}{1 + f(n)}, \text{ se } f(n) \neq -1.$$

Como queremos determinar $f(1)$, vamos tomar $f(1) = a$ e pela expressão definida acima, temos

$$f(2) = \frac{f(1)}{1 + f(1)} = \frac{a}{1+a} \Longrightarrow f(3) = \frac{\dfrac{a}{1+a}}{1 + \dfrac{a}{1+a}} = \frac{\dfrac{a}{1+a}}{\dfrac{1+2a}{1+a}} = \frac{a}{1+2a}$$

Continuando até $f(n+1)$, chegamos na fórmula

$$f(n+1) = \frac{a}{1+na}.$$

Agora vamos provar, usando o Princípio de Indução Matemática, que esta fórmula é válida. Primeiro, vamos mostrar que vale para $n = 1$. De fato, substituindo n por 1 na fórmula, obtemos

$$f(1+1) = f(2) = \frac{a}{1+a \cdot a} = \frac{a}{1+a}.$$

Agora, supondo que vale para algum $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar que vale também para $n+1$. Então temos

$$\text{Hipótese de indução: } f(n+1) = \frac{a}{1+n \cdot a}.$$

$$\text{Tese: } f(n+2) = \frac{a}{1+(n+1) \cdot a}.$$

por definição, temos

$$f(n+2) = \frac{f(n+1)}{1+f(n+1)}$$

Usando a hipótese de indução,

$$f(n+2) = \frac{\dfrac{a}{1+n \cdot a}}{1+\dfrac{a}{1+n \cdot a}} = \frac{\dfrac{a}{1+n \cdot a}}{\dfrac{1+n \cdot a + a}{1+n \cdot a}} = \frac{a}{1+n \cdot a} \cdot \frac{1+n \cdot a}{1+(n+1) \cdot a}$$

$$f(n+2) = \frac{a}{1+(n+1) \cdot a}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula é válida para todo $n \geqslant 1$.

Agora vamos usar o fato de que $f(2020) = \dfrac{1}{4040}$ para determinar o valor de a. Notemos que

$$f(2019+1) = \frac{1}{4040} \qquad \text{e} \qquad f(2019+1) = \frac{a}{1+2019a}$$

Assim,

$$\frac{a}{1+2019a} = \frac{1}{4040} \Longrightarrow 4040a = 1 + 2019a \Longrightarrow 4040a - 2019a = 1$$

$$2021a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2021}$$

Logo, $f(1) = \dfrac{1}{2021}$ e a alternativa correta é a (c).

9) (1ª CELL 2021 - Q 04) *Considere a sequência a_n definida por $a_1 = 2$ e para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{n+1} = (a_n)^2 + 6a_n + 6.$$

Determine o resto de a_{100} na divisão por 7.

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Solução: De início, vamos escrever a_n congruente com r módulo 7. Assim, $a_n \equiv r \mod 7$, onde $0 \leqslant r \leqslant 6$. O que equivale dizer que $a_n = 7k + r$. Substituindo o a_n em a_{n+1}, obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (7k + r)^2 + 6 \cdot (7k + r) + 6 \\ &= 49k^2 + 14kr + 42k + 6r + 6 + r^2. \end{aligned}$$

Colocando 7 em evidência nos termos que o tem em sua decomposição,

$$a_{n+1} = 7(7k^2 + 2kr + 6k) + r^2 + 6r + 6 \Longrightarrow a_{n+1} \equiv r^2 + 6r + 6 \mod 7.$$

Agora vamos verificar os possíveis restos para a_n e ver o comportamento dos restos de a_{n+1} em função dos de a_n. Se $a_n \equiv 1 \mod 7$, então

$$a_{n+1} \equiv 1^2 + 6 \cdot 1 + 6 \mod 7, \text{ ou seja, } a_{n+1} \equiv 6 \mod 7.$$

Agora, se $a_n \equiv 6 \mod 7$, então

$$a_{n+1} \equiv 6^2 + 6 \cdot 6 + 6 \mod 7, \text{ ou seja, } a_{n+1} \equiv 1 \mod 7.$$

Aqui encontramos um padrão, onde $a_n \equiv 1 \mod 7 \Longrightarrow a_{n+1} \equiv 6 \mod 7$ e $a_n \equiv 6 \mod 7 \Longrightarrow a_{n+1} \equiv 1 \mod 7$. Pelo enunciado da questão, temos

$$a_1 \equiv 2 \mod 7$$

e

$$a_2 = 2^2 + 6 \cdot 2 + 6 = 22 \Longrightarrow a_2 \equiv 1 \mod 7.$$

A partir daí, seguindo o padrão encontrado, iremos obter o próximo resto igual a 6, o seguinte igual a 1, depois 6 novamente e assim sucessivamente.

$$a_3 \equiv 6 \mod 7$$

$$a_4 \equiv 1 \mod 7$$
$$a_5 \equiv 6 \mod 7$$
$$\vdots$$
$$a_{98} \equiv 1 \mod 7$$
$$a_{99} \equiv 6 \mod 7$$
$$a_{100} \equiv 1 \mod 7.$$

Logo, o resto de a_{100} na divisão por 7 é 1 e a alternativa correta é a (b).

10) (1ª CELL 2021 - Q 05) *Considere o número real, escrito em notação decimal,*

$$r = 0,235831...$$

em que, a partir da terceira casa decimal após a vírgula, todo dígito é igual ao resto na divisão por 10 da soma dos dois dígitos anteriores. Podemos afirmar que

(a) $(10^{60} - 1) \cdot r$ *é inteiro*

(b) $(10^{25} - 1) \cdot r$ *é inteiro*

(c) $(10^{17} - 1) \cdot r$ *é inteiro*

(d) r *é irracional algébrico*

(e) r *é irracional não algébrico*

Solução: Seja (F_n) a sequência de Fibonacci. Observe que após a vírgula, r é representado pela sequência dos algarismos das unidades dos números de Fibonacci, a partir de $F_3 = 2$. Considere (a_n) como a sequência desses dígitos após a vírgula, com $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, temos que

$$F_{n+2} \equiv a_n \mod 10$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Usando a periodicidade da sequência de Fibonacci, temos que

$$F_{(n+2)+60} \equiv F_{n+2} \mod 10 \implies a_{n+60} \equiv a_n \mod 10$$

para todo inteiro $n \geq 1$. E como $a_n < 10$, então temos que

$$a_{n+60} = a_n$$

Daí, a cada 60 termos, a sequência volta a se repetir. Se denotarmos cada período por r_1, então multiplicando r por 10^{60}, obtemos

$$10^{60} \cdot r = r_1 + r.$$

Agora subtraindo r desse resultado,

$$10^{60} \cdot r - r = r_1.$$

Logo $(10^{60} - 1) \cdot r = 10^{60} \cdot r - r = r_1$ é inteiro, pois r_1 é período da sequência (a_n). Disto, temos que a resposta correta é a alternativa (a).

11) (2ª CELL 2021 - Q 03) *O resto da divisão de* $2^{2021} + 3^{2021}$ *por 17 é*

(a) 12

(b) 13

(c) 14

(d) 15

(e) 16

Solução: Vamos calcular as congruências separadamente. Primeiro, calcularemos o resto da divisão de 2^{2021} por 17.

$$2^4 = 16 \equiv -1 \mod 17$$

Elevando tudo a 505,

$$(2^4)^{505} \equiv (-1)^{505} \mod 17 \implies 2^{2020} \equiv -1 \mod 17$$

Agora, multiplicando a congruência por 2,

$$2^{2020} \cdot 2 \equiv (-1) \cdot 2 \mod 17 \implies 2^{2021} \equiv -2 \mod 17$$

$$2^{2021} \equiv 15 \mod 17.$$

Determinaremos agora, o resto da divisão de 3^{2021} por 17. Usando o Pequeno Teorema de Fermart,

$$3^{16} \equiv 1 \mod 17$$

Elevando tudo a 126,

$$(3^{16})^{126} \equiv 1^{126} \mod 17 \Longrightarrow 3^{2016} \equiv 1 \mod 17$$

Observe que $3^5 = 243 \equiv 5 \mod 17$. Multiplicando a congruência por 3^5,

$$3^{2016} \cdot 3^5 \equiv 1 \cdot 5 \mod 17$$

$$3^{2021} \equiv 5 \mod 17.$$

E finalmente somando os resultados obtidos,

$$2^{2021} + 3^{2021} \equiv 15 + 5 \mod 17 \Longrightarrow 2^{2021} + 3^{2021} \equiv 20 \mod 17$$

$$2^{2021} + 3^{2021} \equiv 3 \mod 17$$

Logo, o resto da divisão de $2^{2021} + 3^{2021}$ por 17 é 3.

Observação: Nenhuma das alternativas apresenta a questão correta, e provavelmente a questão deva ter sido anulada por conta disso.

12) (2ª CELL 2021 - Q 15) *Para n natural, seja A_n a matriz 2×2 com entradas $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ dada por*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

(a n-ésima potência da matriz de entradas $2, 1, -1, 2$). Para quantos valores de n dentre $1, 2, \ldots, 2021$ a entrada c_n é um múltiplo de 7?

(a) 250

(b) 251

(c) 252

(d) 253

(e) 254

Solução: Inicialmente, vamos determinar algumas matrizes A_n, sempre calculando as entradas módulo 7.

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}2 & -4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Note que com $n = 8$ encontramos a primeira entrada congruente a 0 módulo 7. Note também que A_8 é uma matriz diagonal e um produto entre matrizes diagonais sempre será outra matriz diagonal, ou seja,

$$A_{8^k} = \begin{pmatrix}(-2)^k & 0\\ 0 & (-2)^k\end{pmatrix}$$

para todo k. Assim, vamos determinar quantas matrizes desse tipo iremos obter a partir de A_8. Então, teremos $c_n \equiv 0 \mod 7$ sempre que $(A^8)^k = A^{8k}$, para $8k \leqslant 2021$. Assim,

$$k \leqslant \frac{2021}{8} \Longrightarrow k \leqslant 252.$$

Disto, temos pelo menos 252 valores para que c_n seja um múltiplo de 7. Resta mostrar que extistem apenas esses valores satisfazendo esta condição. Analisando o comportamento das matrizes calculadas, note que $a_n = d_n$ e $c_n = -b_n$, ou seja,

$$A^n = \begin{pmatrix}a_n & -c_n\\ c_n & a_n\end{pmatrix}.$$

Agora vamos provar por indução que isto vale para todo n. Observe que para $n = 1$ é verdade, pois $a_1 = d_1 = 2$ e $c_1 = -b_1 = 1$. Vamos então supor que vale para algum n e mostrar que vale também para $n + 1$.

$$\text{Hipótese de indução: } A^n = \begin{pmatrix} a_n & -c_n \\ c_n & a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Tese: } A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & -c_{n+1} \\ c_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo A^{n+1}, temos

$$A^{n+1} = A^n \cdot A^1,$$

mas como já foi determinado em A^1 e usando a hipótese de indução,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & -c_n \\ c_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_n - c_1 \cdot c_n & -(a_n \cdot c_1 + c_n \cdot a_1) \\ a_n \cdot c_1 + c_n \cdot a_1 & a_1 \cdot a_n - c_1 \cdot c_n \end{pmatrix},$$

o que é equivalente a $a_{n+1} = d_{n+1}$ e $c_{n+1} = -b_{n+1}$. Então, pelo Princípio de Indução Matemática, está provado que vale para todo n.

Vamos supor que existe n tal que $c_n \equiv 0 \mod 7$. Então

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Usando agora a Divisão Euclidiana, tome $k, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = 8 \cdot k + r$, com $0 \leq r \leq 7$. Disto,

$$A^n = A^{8 \cdot k + r} = A^{8 \cdot k} \cdot A^r = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \cdot A^r = (-2)^k \cdot A^r.$$

Suponhamos que $r \neq 0$. Então teríamos $(-2)^k \cdot c_r \equiv 0 \mod 7$, o que seria absurdo pois como já foi calculado anteriormente, os valores de c_r são $\{1, 4, 4, 3, -1, 2, -1\}$ e 7 não divide nenhum desses termos. Daí, $r = 0$ e as únicas matrizes que satisfazem a condição são do tipo A^{8k}. Logo, existem apenas 252 valores e a resposta é a alternativa (c).

13) (3ª CELL 2022 - Q 03) *Seja a um inteiro positivo tal que*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{25} = \frac{a}{25!}.$$

Encontre o resto de a na divisão por 13.

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 7

(e) 12

Solução: Multiplicando ambos os lados da igualdade por 25!, temos

$$25! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{25}\right) = 25! \cdot \frac{a}{25!}.$$

Daí,

$$a = 25! + \frac{25!}{2} + \frac{25!}{3} + \cdots + \frac{25!}{25}$$

Note que todas as parcelas tem 13 em suas decomposições primárias, com exceção da parcela $\frac{25!}{13} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25$. Sendo assim, todas as outras parcelas são congruentes a zero módulo 13. Então,

$$\begin{aligned}
a &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \mod 13 \\
&\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \mod 13 \\
&\equiv 12! \cdot 12! \mod 13
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Wilson,

$$12! \equiv -1 \mod 13.$$

Assim,

$$a \equiv (-1) \cdot (-1) \mod 13, \text{ ou seja, } a \equiv 1 \mod 13.$$

Logo, o resto de a na divisão por 13 é 1, e alternativa (a) é a correta.

14) (3ª CELL 2022 - Q 15) *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Qual o menor inteiro $N > 0$ para o qual $A^N \equiv A \mod 11$? Aqui, dadas duas matrizes 2×2 X e Y com entradas inteiras, escrevemos $X \equiv Y \mod 11$ se cada entrada de X é congruente módulo 11 à entrada de Y na mesma posição.

(a) 11

(b) 16

(c) 121

(d) 110

(e) 120

Solução: Vamos inicar calculando algumas matrizes A^N e analisar os restos de suas entradas na divisão por 11.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que com $N = 3$, temos uma matriz diagonal, e que o produto de matrizes diagonais sempre será outra diagonal. Daí, vamos multiplicar essas matrizes diagonais até encontrarmos uma matriz identidade $A^N = I$, pois $A \cdot I = A$.

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^9 = A^6 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} = A^9 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{15} = A^{12} \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora seja N um inteiro positivo. Pela Divisão Euclidiana, temos $q, r \in \mathbb{Z}$, onde $0 \leqslant r \leqslant 2$, tais que $N = 3 \cdot q + r$. Então,

$$\begin{aligned} A^N &\equiv A^{3 \cdot q + r} \mod 11 \\ &\equiv (A^3)^q \cdot A^r \mod 11 \\ &\equiv 4^q \cdot A^r \mod 11. \end{aligned}$$

Precisamos encontrar o menor inteiro $q \geq 1$ tal que $4^q \cdot A^r \equiv A \mod 11$, para algum $0 \leqslant r \leqslant 2$. Vamos então analisar cada valor de r.

• Para $r = 0$:
$A^N \equiv A^{3 \cdot q + 0} \mod 11 \Longrightarrow A^N \equiv (A^3)^q \mod 11.$

Mas, como já foi calculado, A^3 é uma matriz diagonal e o produto de matrizes diagonais sempre será outra matriz diagonal. Portanto, não existe $q \geq 1$ tal que $(A^3)^q \equiv A \mod 11$.

• Para $r = 1$:

$A^N \equiv A^{3 \cdot q} \cdot A \mod 11$.

Analisando alguns valores de q, temos que

$$\begin{aligned} q = 1 &\implies A^N \equiv A^3 \cdot A \mod 11 \\ q = 2 &\implies A^N \equiv A^6 \cdot A \mod 11 \\ q = 3 &\implies A^N \equiv A^9 \cdot A \mod 11 \\ q = 4 &\implies A^N \equiv A^{12} \cdot A \mod 11 \\ q = 5 &\implies A^N \equiv A^{15} \cdot A \mod 11. \end{aligned}$$

Todas essas matrizes já foram calculadas anteriormente, e a única que satisfaz a condição é A^{15}, pois se trata de uma matriz identidade de ordem 2, ou seja, $A^{15} = I_2$. Assim,

$$\begin{aligned} A^N &\equiv A^{15} \cdot A \mod 11 \\ &\equiv I_2 \cdot A \mod 11 \\ &\equiv A \mod 11. \end{aligned}$$

Neste caso, o menor inteiro $q \geq 1$ tal que $A^N \equiv A^{3 \cdot q} \cdot A \mod 11$ é $q = 5$. Então, $N = 3 \cdot 5 + 1 = 16$ é o menor valor para $r = 1$.

• Para $r = 2$:

$A^N \equiv 4^q \cdot A^2 \mod 11$.

Neste caso, não existe $q \geq 1$ tal que $4^q \cdot A^2 \equiv A \mod 11$. De fato, se existisse tal inteiro $q \geq 1$, então (comparando os termos da primeira coluna de ambas as matrizes $4^q \cdot A^2$ e A) teríamos

$$4^q \cdot 4 \equiv 3 \mod 11 \qquad \text{e} \qquad 4^q \cdot 2 \equiv 4 \mod 11.$$

Assim,

$$4^q \cdot 4 \equiv 3 \mod 11 \qquad \text{e} \qquad 4^q \cdot 4 \equiv 8 \mod 11.$$

Portanto,

$$8 \equiv 3 \mod 11$$

o que é absurdo. Logo, 16 o menor inteiro N que satisfaz a condição $A^N \equiv A \mod 11$ e a alternativa (b) é resposta da questão.

15) (OMpD 2022 - 1ª fase - Q 01) *Qual o resto da divisão de* $11^{3333} + 33^{1111}$ *por 7?*

(a) 0

(b) 1

(c) 3

(d) 5

(e) 6

Solução: Calculando os restos separadamente, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos

$$11^6 \equiv 1 \mod 7$$

Elevando tudo a 555,

$$(11^6)^{555} \equiv 1^{555} \mod 7 \Longrightarrow 11^{3330} \equiv 1 \mod 7.$$

Multiplicando por 11,

$$11^{3330} \cdot 11 \equiv 1 \cdot 11 \mod 7 \Longrightarrow 11^{3331} \equiv 4 \mod 7.$$

Multiplicando agora por 11^2,

$$\begin{aligned} 11^{3331} \cdot 11^2 \equiv& 4 \cdot 11^2 \mod 7 \\ \equiv& 4 \cdot 2 \mod 7, \end{aligned}$$

ou seja,

$$11^{3333} \equiv 1 \mod 7.$$

Analogamente ao cálculo anterior, vamos determinar o resto da divisão de 33^{1111} por 7. Pelo Pequeno Teorema de Fermat,

$$33^6 \equiv 1 \bmod 7$$

Elevando tudo a 185,

$$(33^6)^{185} \equiv 1^{185} \mod 7 \Longrightarrow 33^{1110} \equiv 1 \mod 7$$

Multiplicando por 33,

$$33^{1110} \cdot 33 \equiv 1 \cdot 33 \mod 7 \Longrightarrow 33^{1111} \equiv 5 \mod 7.$$

E finalmente, somando os resultados obtidos, temos

$$\begin{aligned} 11^{3333} + 33^{1111} \equiv& 1 + 5 \mod 7 \\ \equiv& 6 \mod 7. \end{aligned}$$

Logo, o resto da divisão de $11^{3333} + 33^{1111}$ por 7 é 6, e a alternativa correta é a (e).

Considerações Finais

As Olimpíadas de Matemática são de extrema importância para despertar o interesse pelo estudo da Matemática, incentivando os alunos e revelando talentos na área. Elas trazem inúmeros benefícios para todos os estudantes. Além das premiações recebidas, contribuem para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e para aqueles que se destacam nas competições, existe a possibilidade de ganhar bolsas de estudo em algumas universidades que reservam vagas olímpicas para os jovens talentos. Por isso essas olimpíadas precisam ser bastante divulgadas, fazendo com que participem a maior quantidade de estudantes possível. A motivação para a escolha desse tema foi a falta de material publicado e disponível para estudo e divulgação de olimpíadas de Matemática universitária, e para isso apresentamos as principais competições com este nível de participação, além de trazer vários nomes de participantes premiados e recordistas de diversas olimpíadas. Contudo, temos que enfatizar a participação feminina, que, mesmo com alguns destaques, ainda precisa melhorar bastante, principalmente nos últimos níveis de ensino, para que possamos ter um número maior de alunas premiadas. Uma marca negativa disso, que serve como exemplo, é a ausência da participação de meninas na equipe brasileira da IMO desde 2012. Uma das tentativas de solucionar este problema foi a criação de competições exclusivas para garotas, que também é abordada neste trabalho.

Pensando nos estudantes de graduação, em especial os de Licenciatura em Matemática, desenvolvemos soluções de questões que envolvem conteúdos de aritmética, que foram extraídas de olimpíadas de Matemática de nível universitário, sendo selecionadas apenas as questões que não têm nenhuma solução publicada em trabalhos anteriores ou páginas oficiais das competições. É importante a participação e presença no meio olímpico dos professores de Matemática em formação, para que quando estiverem em sala de aula, possam estimular e preparar mais os alunos da educação básica para participarem de todas as olimpíadas de Matemática que forem possíveis, contribuindo, assim, para o desenvolvimento e aprofundamento do conhecimento matemático dos estudantes.

Por fim, esperamos que este trabalho possa servir como um material de apoio e incentivo à participação de estudantes nas diversas Olimpíadas de Matemática Universitária, podendo ser aproveitado também para os alunos que estejam no ensino básico, possibilitando o aumento do acesso a esses conhecimentos e competições.

Referências Bibliográficas

[1] Bagatini, A. *Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas*. 82 f. Monografia (Graduação em Matemática) - UFRGS, Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/29144. Acesso em: 4 Nov. 2022.

[2] Bertone, A. M. A. *Introdução à Teoria dos Números*. Uberlândia: UFU, 2014. 202 p. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle /123456789 /25317. Acesso em: 27 Nov. 2022

[3] Bezerra, M. de N. C. *Teoria dos números: um curso introdutório*. 1. ed. Belém: EditAedi/UFPA, Belém, 2018. 196 p. Disponível em: https://www.aedi.ufpa.br/parfor/arquivos/livros/teoria-dos-numeros.pdf. Acesso em: 27 Nov. 2022.

[4] CIIM. Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas, c2022. Página inicial. Disponível em: http://ciim.uan.edu.co/. Acesso em: 13 Dez. 2022.

[5] Costa, G. C. *Ordem de Aparição na Sequência de Fibonacci: um Problema sobre Divisibilidade*. 81 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UNB, Brasília, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1887&id2=80134. Acesso em: 5 Jan. 2023.

[6] EGMO. European Girls' Mathematical Olympiad, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://www.egmo.org/. Acesso em: 17 Nov. 2022.

[7] Hefez, A. *Aritmética*. Coleção PROFMAT. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 298 p.

[8] Hefez, A. *Elementos de Aritmética*. Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[9] IMC. International Mathematics Competition for University Students 2022, [s.d.]. Página inicial. Disponível em: https://www.imc-math.org.uk/. Acesso em: 13 Dez. 2022.

[10] IMO. International Mathematical Olympiad, c2006. Countries. Disponível em: https://www.imo-official.org/country_team_r.aspx?code=BRA. Acesso em: 8 Dez. 2022.

[11] IMO. International Mathematical Olympiad, c2006. Página inicial. Disponível em: https://www.imo-official.org/. Acesso em: 8 Dez. 2022.

[12] IMO. International Mathematical Olympiad, c2006. Timeline. Disponível em: https://www.imo-official.org/organizers.aspx. Acesso em: 8 Dez. 2022.

[13] IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, [s.d]. Notícias. Disponível em: https://impa.br/noticias/impa-recebe-inscricoes-para-o-prolimpico-ate-7-de-fevereiro/. Acesso em: 25 Jan. 2023.

[14] IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, [s.d]. PROLÍMPICO. Disponível em: https://impa.br/ensino/prolimpico/. Acesso em: 25 Jan. 2023.

[15] Maciel, M. V. M.; Basso, M. V. de A. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): As origens de um projeto de qualificação do ensino de Matemática na educação básica*. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009. Disponível em: https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/. Acesso em: 4 Nov. 2022.

[16] Maier, R. R. *Teoria dos números*. Brasília: UNB, 2005. 139 p. Disponível em: https://www.mat.unb.br/ maierr/tnotas.pdf. Acesso em: 27 Nov. 2022.

[17] Movimento Meninas Olímpicas. Torneio Feminino de Computação, [s.d]. Meninas Olímpicas. Disponível em: https://tfcbr.inf.ufsm.br/meninas-olimpicas. Acesso em: 13 Dez. 2022.

[18] OAM. Olimpíada Alagoana de Matemática, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://sites.google.com/view/olimpiadaalagoanadematematica/. Acesso em: 10 Nov. 2022.

[19] OBM. Olimpíada Brasileira de Matemática, c2022. Notícias. Disponível em: https://www.obm.org.br/2022/10/31/brasil-conquista-uma-medalha-de-ouro-e-tres-de-prata-na-pagmo-2022/. Acesso em: 17 Nov. 2022.

[20] OBM. Olimpíada Brasileira de Matemática, c2022. Página inicial. Disponível em: https://www.obm.org.br/. Acesso em: 14 Dez. 2022.

[21] OBM. Olimpíada Brasileira de Matemática, c2023. Projeto gráfico da OBM. Disponível em: https://www.obm.org.br/quem-somos/projeto-grafico/. Acesso em: 1 Mar. 2023.

[22] OBM. Olimpíada Brasileira de Matemática, c2022. Resultados OIMU. Disponível em: https://www.obm.org.br/resultados-oimu/. Acesso em: 13 Dez. 2022.

[23] OFMEBA. Olimpíada Feminina de Matemática da Estado da Bahia, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://sites.google.com/view/ofmeba. Acesso em: 25 Nov. 2022.

[24] OMERJ. Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://www.omerj.org/. Acesso em: 10 Nov. 2022.

[25] OMpD. Matemático por Diversão, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://matematicopordiversao.wordpress.com/. Acesso em: 10 Nov. 2022.

[26] OMRN. Competição Matemática do Estado do Rio Grande do Norte, [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://olimpiada.mat.ufrn.br/. Acesso em: 10 Nov. 2022.

[27] Ramos, M. G. O. *A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. 93 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UESC, Ilhéus, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=90&id2=27580. Acesso em: 5 Jan. 2023.

[28] TM^2. Torneio Meninas na Matemática. [s.d]. Página inicial. Disponível em: https://www.tm2.org.br/. Acesso em: 25 Nov. 2022.

[29] Vianna, L. M. D. Plataforma Lattes, [s.d]. Disponível em: http://lattes.cnpq.br/5370802197857839. Acesso em: 12 Dez. 2022.