UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

VALNEI BATISTA DOS SANTOS

EXPLORANDO A CURVA BRAQUISTÓCRONA COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES MATEMÁTICAS

JUAZEIRO - BA
2023

VALNEI BATISTA DOS SANTOS

EXPLORANDO A CURVA BRAQUISTÓCRONA COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo

JUAZEIRO - BA

2023

.

Santos, Valnei Batista dos

S237e Explorando a Curva Braquistócrona como Instrumento Didático na Resolução de Problemas com Funções Matemáticas / Valnei Batista dos Santos. – Juazeiro - BA, 2023.
xiii, 77f. : il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Funções. 3. Modelagem matemática. I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

EXPLORANDO A CURVA BRAQUISTÓCRONA COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2023.

Banca examinadora

Evando Santos Araújo

Prof. Dr. Evando Santos Araújo (PROFMAT - UNIVASF) - Orientador

João Batista Rodrigues da Silva.

Prof. Dr. João Batista Rodrigues da Silva (PROFMAT - UNIVASF) - Avaliador Interno

Anibal L. S. Netto

Prof. Dr. Anibal Livramento da Silva Neto (UNIVASF) - Avaliador Externo

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus, pela dádiva da vida e por me proporcionar forças para luta de cada dia. A minha mãe que mesmo não estando mais nesse mundo foi minha maior fonte de amor e dedicação, a meu pai que é minha referência de vida, a meu filho razão do meu viver, a minha esposa por todo apoio e companheirismo, meus irmãos e amigos por acreditarem em mim e ao meu professor orientador por ajudar a tornar real essa conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo amor tão imenso e genoroso que nos dedica.

Aos meus pais pela tênura, pelo amor incondicional e dedicação presente em todos os momentos.

A minha esposa e ao meu filho que são sinonimos de felicidade em minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Evando Santos Araújo, por toda atenção, paciência e significativa contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT-UNIVASF por compartilharem seus conhecimentos.

Ao servidor Manoel do PROFMAT – UNIVASF pelo atendimento tão cordial.

A minha turma do mestrado que durante todo o curso foi de muita ajuda mútua.

Aos meus amigos por estarem presentes nos momentos difíceis, ajudando com palavras de grande incentivo.

Aos colegas de trabalho por estarem sempre me motivando a seguir em frente na busca dos meus objetivos.

O livro do mundo está escrito em linguagem matemática.

(Galileu Galilei)

RESUMO

O estudo de funções se mostra como um dos tópicos mais importantes no ensino de Matemática do Ensino Básico, principalmente pela aplicação eminente na modelagem de fenômenos em diversas áreas do conhecimento. Nesse sentido, a interdisciplinaridade e a modelagem matemática são discutidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como metodologias alternativas para o ensino de funções, na tentativa de ressignificar o tema no contexto da formação do aluno. Esse trabalho de pesquisa propõe um estudo bibliográfico de cunho descritivo exploratório (Gil, 2002), para se conhecer aspectos teóricos relativos à curva braquistócrona e sua aplicação como meio facilitador para o ensino interdisciplinar de funções. Desta forma propõe-se uma metodologia de ensino por meio de uma sequência didática, na qual os livros de matemática e física não serão os únicos e nem os principais recursos pedagógicos a serem utilizado pelos alunos, pois a modelagem matemática assim como ensino interdisciplinar atrelado as novas tecnologias vão estar presentes nesse processo (FREITAS, 2005). O desenvolvimento desta pesquisa é vista numa ação que remete ao aluno como participante ativo na formação do próprio conhecimento (Freire, 1996) além de propiciar discussões efetivas de como a Matemática é usada para explicar fenômenos da natureza e (ou) solucionar problemas de ordem prática. O resultado da pesquisa mostrou uma maior exploração do tema que é pouco conhecido na educação básica, bem como uma aproximação do docente com ensino concreto e utilização de tecnologia. Espera-se que este trabalho possa contribuir para estudos na área de ensino de Matemática que tratam do tema interdisciplinaridade, visando à melhoria da aprendizagem no Ensino Básico.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; funções; interdisciplinaridade; modelagem matemática; braquistócrona.

ABSTRACT

The study of functions is shown as one of the most important topics in the teaching of Mathematics of Basic Education, mainly for the eminent application in the modeling of phenomena in several areas of knowledge. In this sense, interdisciplinarity and mathematical modeling are discussed in the National Common Curricular Base (BNCC) as alternative methodologies for the teaching of functions, in an attempt to re-signify the theme in the context of student education. This research work proposes a bibliographic study of exploratory descriptive nature (Gil, 2002), to know theoretical aspects related to the brachytochronous curve and its application as a facilitating means for the interdisciplinary teaching of functions. In this way it is proposed a teaching methodology through a didactic sequence, in which the books of mathematics and physics will not be the only and not the main pedagogical resources to be used by the students, because the mathematical modeling as well as interdisciplinary teaching linked to new technologies will be present in this process (FREITAS, 2005). The development of this research is seen in an action that refers to the student as an active participant in the formation of his own knowledge (Freire, 1996) in addition to providing effective discussions of how Mathematics is used to explain phenomena of nature and (or) solve practical problems. The result of the research showed a greater exploration of the theme that is little known in basic education, as well as an approximation of the teacher with concrete teaching and use of technology. It is expected that this work can contribute to studies in the area of teaching Mathematics that deal with the theme of interdisciplinarity, aiming at improving learning in Basic Education.

Keywords: Mathematics Teaching; functions; interdisciplinarity; mathematical modelling; brachistochrone.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE EQUAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo e a exploração das propriedades matemáticas da curva braquistócrona surgem como principais ações da Teoria do Cálculo Variacional, desenvolvida nos séculos XVII e XVIII, na busca de soluções para problemas de otimização (XIMENES, 2011). E por tal teoria está atrelado à otimização que deu início a uma investigação de como a curva braquistrócona poderia ser útil em um estudo interdisciplinar entre matemática e física voltado para resoluções de problemas.

De forma resumida, Souza Júnior (2010) o problema da braquistócrona discorre sobre encontrar a curva no plano tal que um móvel partindo de um ponto A (mais alto), em repouso, percorra sua trajetória até um ponto B (mais baixo), com o menor tempo possível, apenas sob ação da gravidade, entre todas as outras curvas possíveis.

É fato que o problema da braquistócrona e outros problemas de otimização solucionados nesse período histórico são a base para o entendimento de diversos fenômenos e aplicações científicas em outras áreas do conhecimento, tais como em Física, Matemática Aplicada, Economia, Engenharias, Medicina, entre outras. Miranda (2014) destaca que o problema da braquistócrona foi fundamental para o entendimento de problemas em Física como, por exemplo, o Princípio de Fermat e o desenvolvimento da Lei da de Snell, quando se estabelece que “o caminho percorrido pela luz entre dois pontos é aquele que minimiza o tempo de percurso dentre todos os possíveis” (FASSARELA, 2017, p. 216).

Embora sejam encontrados diversos trabalhos na literatura que tratam da apresentação de conceitos e da importância dos problemas do Cálculo Variacional para o desenvolvimento científico e tecnológico atual, nos mais diversos níveis de abordagem, esse tema ainda é pouco conhecido por professores de Matemática e de Física. De certa forma, pode-se entender que um dos aspectos relevantes para isso é a abordagem incipiente dessa teoria nos currículos de formação inicial e continuada das licenciaturas, o que influencia diretamente na escassez de explanação sobre o tema no Ensino Básico (e preferência por temas mais usuais em Ciência e Tecnologia). Essa interpelação efetiva poderia enriquecer o leque de possibilidades para se trabalhar habilidades e competências orientadas na (Base Nacional Comum Curricular BNCC) em Matemática e suas Tecnologias, bem como o desenvolvimento de estratégias alternativas e lúdicas de ensino que envolvam a modelagem matemática e a interdisciplinaridade.

Nesses aspectos, uma das abordagens possíveis é a aplicação desse conhecimento para o estudo interdisciplinar e significativo de funções de uma variável real, na Educação Básica. Com a modelagem da curva braquistócrona e de outras curvas no plano, a partir da manipulação de seus parâmetros característicos, é possível projetar diferentes trajetórias para um móvel e transformá-las em materiais concretos que servirão para que o estudante possa experimentar o problema de otimização do menor tempo de percurso e ressignificar o estudo de funções de forma interdisciplinar com a Física.

Baseado nesses conceitos, o objetivo principal desse trabalho é compreender o problema da braquistócrona no contexto da Teoria do Cálculo Variacional, para aplicação de uma sequência didática com uso de materiais concretos para o ensino interdisciplinar de funções no Ensino Médio. Já os objetivos específicos envolvem conhecer o contexto histórico científico do Calculo Variacional e da Curva Braquistócrona como importante embasamento teórico da pesquisa; desenvolver leis de formação de outras curvas no plano com parâmetros relativos ao da braquistócrona para o projeto de um aparato experimental de baixo custo; aplicar uma sequência didática para o ensino interdisciplinar de funções, usando esse aparato.

Para se atingir os objetivos, escolheu-se desenvolver uma revisão bibliográfica de caráter exploratório-descritivo que por Salvador apud Lima e Mioto (2007) deverá seguir as etapas características de investigação das soluções, análise explicativa das soluções e a de síntese integradora. De acordo com Gil (2002), as pesquisas exploratórias têm como objetivo primordial proporcionar um maior esclarecimento do problema estudado de modo a ser possível construir hipóteses. Ainda por Gil (2002) no que tange as pesquisas descritivas seu principal intuito é poder descrever as características de determinada população ou fenômeno, além da possibilidade de estabelecimento de relações entre as variáveis.

A investigação das soluções será executado através da busca de dados (*google acadêmico,* periódicos CAPES e livros didáticos de matemática e física) para estudos de pressupostos teóricos do Cálculo Variacional e do problema da braquistócrona, já para análise explicativa das soluções ocorrerá com verificação dos trabalhos relativos ao tema de pesquisa; bem como seleção, organização e entendimento de trabalhos da literatura considerados significativos ao estudo e no tocante a síntese integradora pretende-se obter como resultado a relação de parâmetros da braquistócrona com outras curvas; projeto de aparato experimental e uma proposta de sequência didática.

Para facilitar o entendimento da proposta, os resultados do estudo foram divididos em capítulos. No capítulo 2, são apresentados conceitos históricos e matemáticos relativos ao Cálculo Variacional e ao problema da curva braquistócrona. No capítulo 3, são discutidos aspectos metodológicos aplicáveis à exploração do problema da braquistócrona no ensino de Matemática como, por exemplo, por meio da modelagem matemática e da interdisciplinaridade com Física, mostrando a importância dessa abordagem no currículo do Ensino Básico. O capítulo 4 apresenta o desenvolvimento de expressões matemáticas de curvas no plano, com seus parâmetros relativos aos da braquistócrona, que podem ser usadas para desenvolver um aparato experimental físico, com material/técnica de baixo custo, para estudo interdisciplinar de funções, a partir do estudo de suas propriedades. O capítulo 5 culmina com a proposta de uma sequência didática para o estudo interdisciplinar de funções no Ensino Médio, a partir do aparato desenvolvido e o capítulo 6 discorre sobre as considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

2 ABORDAGEM DO CÁLCULO VARIACIONAL E O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Este capítulo faz um breve histórico de fatos importantes encontrados na literatura sobre o Cálculo Variacional e a Braquistócrona, dessa forma, situando o leitor quanto aos processos de desenvolvimento dessas teorias. Também é possível verificar aspectos relacionados à aplicação de tal Cálculo com ênfase no problema da Braquistócrona, bem como a solução deste problema com abordagem na parametrização desta curva. Além disso, será apresentado à curva cicloide com suas definições matemáticas.

2.1 Introdução ao Cálculo Variacional

O Cálculo Variacional se trata de uma teoria desenvolvida para resolver problemas de otimização (LOUREIRO, 2004; XIMENES, 2011). Com o passar do tempo, mudanças relevantes contribuíram para avanço do Cálculo Variacional e, dessa forma, consolidou a formalização da teoria que é utilizada na atualidade. Embora a literatura relate que problemas de minimização e maximização já eram discutidos, seu desenvolvimento científico começou a partir do século XVII, na Europa Ocidental, com Isaac Newton (1643-1727), conforme (SOUSA JÚNIOR, 2010; XIMENES, 2011).

Em 1686, Isaac Newton referindo-se a um típico problema que envolve a teoria do Cálculo Variacional, propõe um problema de superfície de revolução com objetivo de calcular a forma de superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido oferecendo resistência mínima. (SOUSA JÚNIOR, 2010).

Apesar da contribuição importante de Newton, só posteriormente o Cálculo Variacional tem o seu desenvolvimento significativo. E isso ocorre através do problema da Braquistócrona e das figuras isoparamétricas propostas respectivamente pelos irmãos Jean Bernoulli (1667-1748) e Jakob Bernoulli (1654-1705). Tais feitos proporcionaram aos irmãos Bernoulli o título de inventores do Cálculo de Variações.

Paralelo a tais feitos citados acima haviam discussões de grande interesse nos séculos XVII e XVIII referente às navegações, uma vez que era de suma importância encontrar trajetórias mínimas sobre a superfície do globo terrestre (trajetórias denominadas de Geodésicas). Para Bueno (2016, p.1) é possível verificar publicações de Jean Bernoulli acerca dessas curvas.

Percebe-se que encontrar curvas que minimizem ou maximizem a variável do problema tem sido o principal objeto na teoria do Cálculo Variacional. Contudo, uma curva em particular foi de grande importância para o reconhecimento da temática como campo de estudo em Matemática Rojas (2013), tendo recebido o nome de curva Braquistócrona.

Essa curva é solução de um problema de grande notoriedade proposto por Jean Bernoulli, em junho de 1696, que ficou conhecido como o problema da Braquistócrona. (LOUREIRO, 2004; SOUSA JÚNIOR, 2010). Tal problema é relatado através de uma publicação no jornal científico *Acta Eruditorium*, com o titulo: “Um novo problema que convido os matemáticos a resolver”. (SOUSA JÚNIOR, 2010, p.8).

Para Bueno (2016), os trabalhos desenvolvidos referentes à Braquistócrona por Jakob Bernoulli, Newton e Leibniz foram aproveitados por Euler e Lagrange para criar um método sistemático de resolução para esses tipos de problemas, ou seja, problemas de Cálculo de Variações. Ainda segundo Bueno (2016, p.1), o termo Cálculo de Variações foi denominado para esses problemas primeiro por Euler. Ademais, muitos outros estudiosos fizeram suas contribuições com o passar dos anos para tal cálculo, e tal fato é citado em Loureiro (2004, p.02).

> Por um longo tempo, cada problema extremal era resolvido individualmente. A partir do século XVII começam a ser desenvolvidos métodos gerais de resoluções destes problemas. Matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642- 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813) criaram métodos que serviram de base para vários ramos da teoria de problemas extremais como programação matemática e cálculo de variações.

Nesse contexto, também se destaca o Matemático Lagrange. Pois Ximenes (2011) afirma que aproximadamente a partir de 1760, as anotações de Lagrange deram origem ao nome dado a esse ramo da matemática chamado Cálculo das Variações.

Segundo Boyer (1996 apud Ximenes, 2011, p.18),

> Em 1755 Lagrange havia escrito a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar problemas de isoperimetria e de mais rápida queda, e Euler generosamente retardou a publicação de um trabalho seu sobre tema semelhante, a fim de que o autor mais jovem recebesse todo o crédito pelos novos métodos que Euler considerava superiores.

Euler, de acordo com Loureiro (2004), ao estudar os trabalhos de Jean Bernoulli e Jakob Bernoulli, aperfeiçoou um método muito eficiente para resolver uma grande variedade de problemas com máximos e mínimos. Ainda sobre Euler é importante ressaltar que um dos seus grandes trabalhos foi à descoberta da equação diferencial abaixo:

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0 \quad \text{Eq. 1}$$

Tal equação diferencial recebe o nome de Equação de Euler em sua homenagem e tem sido usada por muitos estudiosos para resolver problemas de máximos e mínimos. Portanto, muito se tem produzido em função dessa importante teoria na área de matemática, o que é obvio que tal produção de conhecimento não cessou no século XVIII. Pelo contrário, através do seu aprimoramento será visto sua aplicação em diversas outras áreas do conhecimento, como em Economia, Física, Matemática Aplicada, Medicina, entre outras.

2.2 Desenvolvimento Conceitual e Aplicações do Cálculo Variacional

No que tange ao conhecimento aplicado as áreas de saber, ressalta-se aqui a utilização do Cálculo Variacional no desenvolvimento de soluções em fenômenos na física. Na matemática, sua área de origem, o Cálculo Variacional está atrelado a diversas outras teorias, principalmente quando se trata de otimização.

Na perspectiva de entender ainda mais sobre o conceito de Cálculo Variacional, Casagrande (2013, p.1) destaca que:

> O Cálculo Variacional é o método utilizado na obtenção de extremos de expressões que não dependem somente de uma ou

> mais variáveis contínuas, mas explicitamente de uma função. O problema de interesse não consiste apenas em obter o ponto no qual alguma função atinge seu extremo, mas determinar o comportamento de uma função que minimiza ou maximiza uma integral envolvendo a própria função e todas as suas derivadas.

Nesse sentido, e acrescentado ainda mais sobre a ideia do que trata o Cálculo Variacional, Barbosa (1975, p.1) afirma que

> O cálculo das variações nasceu das tentativas desenvolvidas ao longo dos anos por matemáticos interessados em generalizar a teoria de máximos e mínimos do cálculo diferencial para funções cujo domínio fosse constituído por certos conjuntos de curvas e funções.

Apesar do Cálculo Diferencial e Cálculo Variacional estarem envolvidos através de problemas de máximos e mínimos, é possível esclarecer o que diverge entre eles.

Segundo Tagliolatto, (2015, p.27)

> A diferença entre os cálculos diferencial e o variacional é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados (otimizados). Enquanto o cálculo diferencial procura números com propriedades otimizadoras, o cálculo variacional procura encontrar funções com propriedades otimizadoras.

É importante salientar também que tal teoria de estudo tem como base de formação o funcional. De Sousa Júnior (2010), um funcional u é uma regra que associa a cada função w em um espaço de funções Ω**,** um único número real. Já em Ferreira (2019), uma equação é dita funcional quando suas variáveis são funções, o que torna o domínio e imagem da função também funções.

O Cálculo Variacional é a parte da matemática que visa trabalhar com os extremos de funções cujo domínio de definição é um espaço de dimensão infinita, ou seja, o espaço das curvas com certas propriedades dependendo do problema em estudo, e onde tais funções são denominadas funcionais.

De Sousa Júnior (2010, p. 11), segue ainda que "O Cálculo Variacional visa fundamentalmente investigar os máximos e mínimos dos funcionais e se assemelha bastante à investigação de máximos e mínimos de funções". Enquanto a minimização de funcionais, para Leitão (2001) e Calixto; Oliveira (2019), um problema clássico envolvendo esse tipo de teoria é dado pela expressão do tipo $I(y) := \int_a^b L(t, y(t), y') \, dt$ Eq. 2, onde o intervalo $[a, b]$ é fixo e a aplicação $L: [a, b] \times \Re \times \Re \to \Re$ é conhecida.

Ressalta-se que o problema de minimização de funcionais é o principal objetivo do Cálculo Variacional, e que no seu estudo, equações diferenciais aparecem de modo natural, como condições suficientes a que a função que minimiza o funcional deve satisfazer.

Os desdobramentos alcançados ao longo do tempo ocasionaram avanço dessa teoria o que fez com que muitos problemas passassem a ter soluções. Sobretudo, problemas sobre ter lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, tamanho ideal e caminho mais curto, o que contribuiu de certa forma na melhoria da qualidade de vida das pessoas.

Exemplos bem conhecidos de aplicação do Cálculo Variacional envolvem a Lei de Snell-Descartes em Bonjorno *et al*. (2013) e o problema da Braquistócrona em Miranda (2014).

Por outro lado, aplicações mais atuais discorrem sobre o desenvolvimento de modelos matemáticos que analisam o avanço de cânceres com o uso mínimo de quimioterápicos em Ramos (2015), a otimização de bioprocessos com a produção de antibióticos em Tolaba (2019), modelos de formação de estoque corporativo de materiais para as refinarias brasileiras em Ferreira (2014) e desenvolvimento de teorias físicas modernas tais como de teorias modernas, a exemplo da Teoria Quântica de Campos em Casagrande (2013).

Agora voltando para século XVII e XVIII, o matemático francês Johann Bernoulli , propôs em 1696 um problema que o fez ser reconhecido como o pai do Cálculo Variacional, o chamado problema da Braquistócrona.

Nesse trabalho ele desafiou as mentes mais brilhantes da época com um problema que ele apresentou na revista científica Acta Eruditorum (Revista dos Eruditos), uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, mantida por um ilustre matemático da época, a saber, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De acordo com Miranda (2014, p.13), o problema foi apresentado da seguinte forma,

> Encontrar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória.

Além do próprio Johann Bernoulli, após alguns meses, cinco outros matemáticos apresentaram soluções particulares para o problema, contudo, chegaram a uma conclusão comum, ou seja, encontraram a curva de menor tempo, também conhecida como Braquistócrona. (ANDRADE; FERREIRA FILHO, 2015).

Para Andrade e Ferreira Filho (2019), o trabalho desses matemáticos em solucionar o problema foi o ápice do Cálculo de Variações, que por sua vez tornou-se uma poderosa ferramenta matemática que fundamenta a formulação Lagrangiana da mecânica clássica, o que consequentemente impulsionou toda revolução cientifica ocorrida na virada do século XIX para o século XX, com o desenvolvimento da mecânica quântica e da mecânica relativística.

2.3 A Curva Cicloide

2.3.1 Um breve histórico sobre a cicloide

A curva ciclóide foi estudada primeiramente no século XV por Nicholas Cusa (1401- 1464), em 1450, quando tentava encontrar a área de um círculo usando técnicas de integração (VEIGA e SASSINE, 2009; FERREIRA, 2013; SOUSA, 2018). Nicholas de Cusa era um padre alemão que se interessava por geometria, lógica, filosofia e astronomia. De acordo com Veiga e Sassine (2009), Cusa que era de origem humilde, ascendeu rapidamente na hierarquia da igreja se tornando cardeal e logo depois, em 1448, governador de Roma.

Pouco tempo depois, a curva foi estudada por Charles Bovelles (1479 – 1566), teólogo e matemático. Seu estudo sobre a curva cicloide ocorreu mais precisamente em 1501, em um trabalho de geometria sobre quadratura do circulo, sendo publicado em Paris (ARAÚJO, 2017).

Todavia, esse problema já tinha sido abordado pelos egípcios em 1800 a.C. na ocasião estes tomaram o lado do quadrado como igual 8/9 do diâmetro de um circulo dado. No entanto, pode-se dizer que o estudo realizado por Nicholas Cusa e Charles Bovelles não se tratava da cicloide em si, mas de algo próximo a esta curva.

Com o passar do tempo outros cientistas marcantes na história fizeram estudos mais detalhados sobre tal curva, tais como Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Blaise Pascal (1623 -1662), Evangelista Torricelli (1608 - 1647) e Galileu Galilei (1564- 1642).

Este último estudou a curva, atribuindo a ela o nome de cicloide, onde também ficou conhecida de "Curva Galileu". Sua orientação sobre esta curva era voltada para o perfil dos arcos de construções em arquitetura. (PEDROSO e PRECIOSO, 2014)

Para Araújo (2017), nos estudos e provas desenvolvidos por estes cientistas destacam-se a comprovação de algumas propriedades, sendo estas: a área sob um arco da cicloide é três vezes a área do círculo que a gera e o comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo que a gera, consequentemente, o comprimento desse arco é oito vezes o raio do círculo que a gera.

De acordo com Sassine e Veiga (2009), o frade Marin Mersenne (1588 – 1648), contemporâneo de René Descartes, também se interessou pelos estudos da cicloide por supostamente ter escutado algo sobre a curva através de Galileu.

Em 1630, outra vertente para discussão foi dada para essa curva, pois Marin Mersenne escreveu um desafio para Descartes, Fermat e outros matemáticos da época pautando que a cicloide era a curva teste para os diferentes métodos que lidam com infinitesimais.

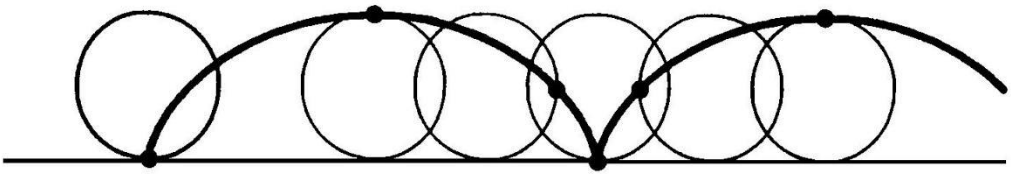
Com tal problema proposto, houve debates fervorosos entres os matemáticos e em razão de todas essas discussões que a cicloide ficou caracterizada como "a Helena da Geometria", em comparação a Helena de Tróia, que segundo a mitologia foi a mulher mais bonita da Grécia, e por isso, a mais requisitada.

2.3.2 Definições matemáticas

As definições matemáticas da cicloide estão diretamente relacionadas ao que foi descrito na história dessa curva, mais precisamente a partir de Galilei Galilei (VIEIRA ET AL., 2016).

Para um melhor entendimento da cicloide pela comunidade da época, os estudos descrevem que Galilei considerava em suas explicações um ponto fixo na roda de uma charrete e depois o movimento descrito por essa roda sobre uma superfície reta sem que a roda deslizasse. A trajetória desse ponto fixo é a geometria da curva cicloide (Fig. 1).

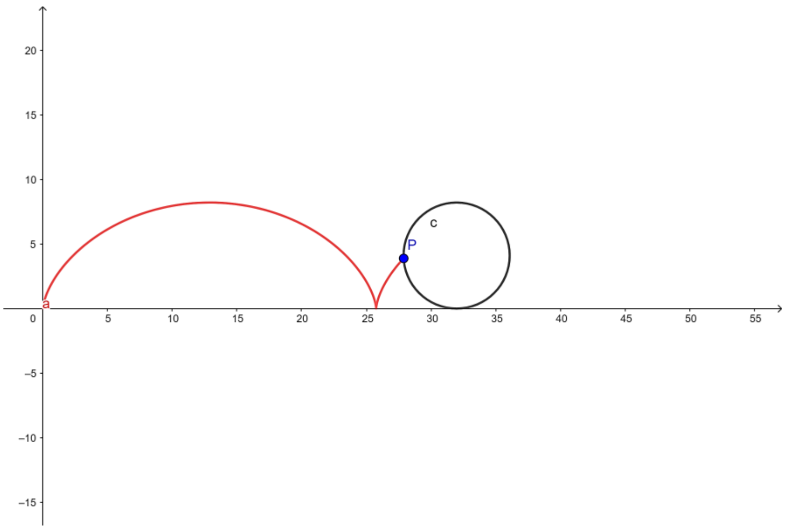
Figura 1: Ilustração da geração da curva cicloide.



Fonte: Reginaldo (2012, p. 1).

Uma formalização da definição dessa curva é feita em Coelho (2008, p.12), onde é possível verificar que a cicloide "é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola sobre uma reta sem deslizar". Na Fig. 2 é visto através do gráfico a ratificação de como é construída a curva cicloide a partir da definição.

Figura 2. Cicloide construída no *software* Geogebra.



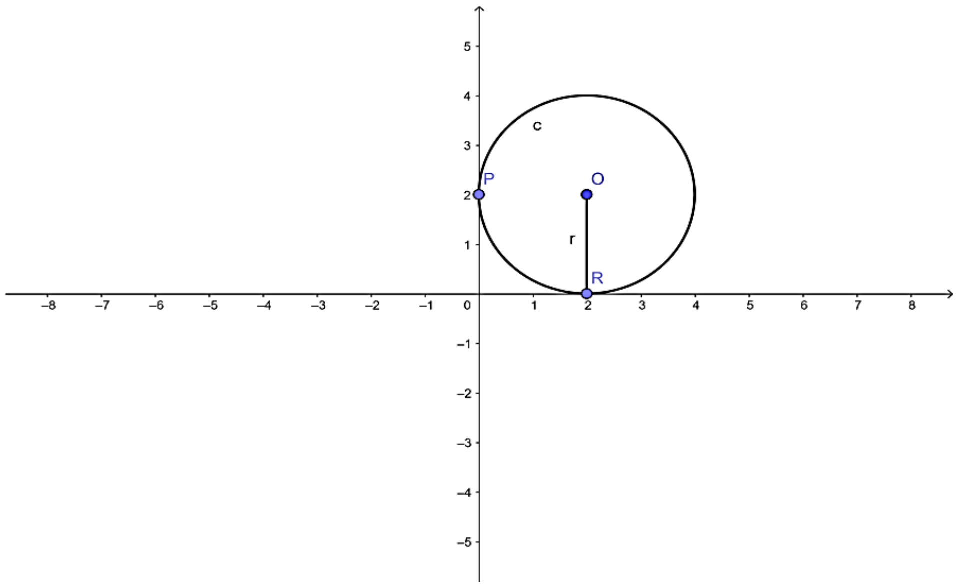
Fonte: Arquivo do autor (2023).

Com intuito de melhorar as definições dadas anteriormente, Barros (2016, p.33) ainda destaca que,

> A curva Cicloide é uma curva especial e pode ser construída da seguinte forma: Seja um círculo de raio r posicionado sobre o eixo x, com um ponto P fixo em sua borda. Considerando que o ponto fixo P esteja inicialmente sobre a origem dos eixos do plano cartesiano xy, e que este círculo role, sem deslizar, no sentido positivo do eixo x, a curva descrita pelo ponto P durante a rolagem do círculo é denominada Cicloide.

Percebe-se que as definições mostradas objetivam esclarecer as primeiras considerações geométricas que definem a supracitada curva, com vistas à sua parametrização (SOUSA, 2008). Para tal, considere C um círculo de raio r, onde r é a distância do centro O ao ponto R, o eixo ox uma reta e R um ponto de C (Fig. 03). Define-se como cicloide a curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta ox, sem deslizar.

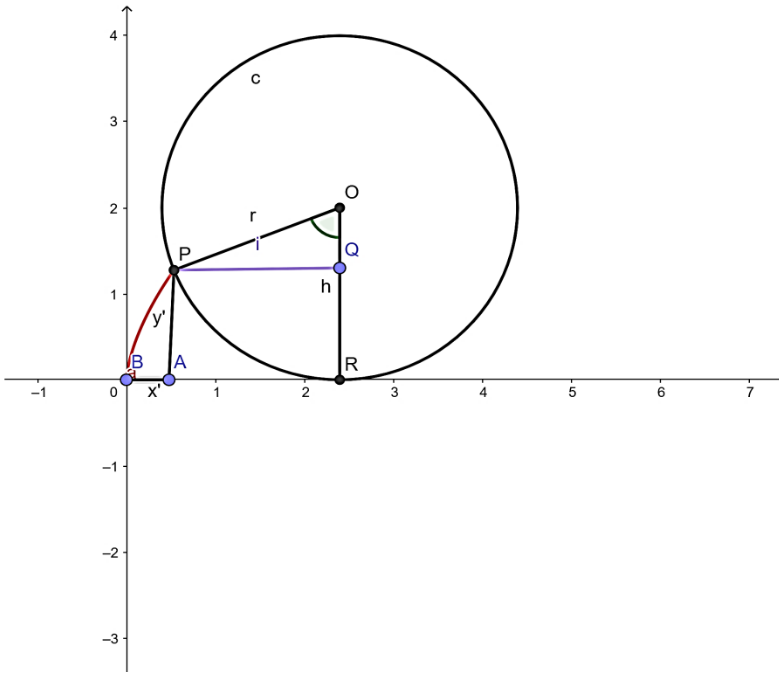
Figura 3. Círculo C de centro O e raio r.



Fonte: Arquivo do autor (2023).

Agora observe a Fig. 4, a seguir.

Figura 4: Círculo C de raio r e centro O deslizando sobre o eixo ox e construindo a cicloide.



Fonte: Arquivo do autor (2023).

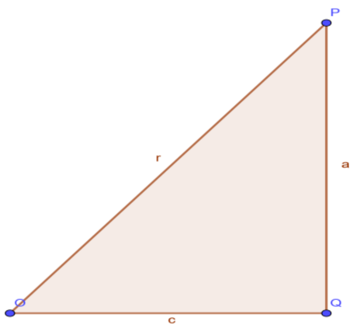
Segue da Fig. 4 que os segmentos x' e y' são dados da seguinte forma:

$$x' = BR - AR \quad \text{Eq.3}$$

$$y' = OR - OQ \quad \text{Eq.4}$$

Onde BR, AR, OR e OQ são respectivamente as distâncias do ponto B ao ponto R, do ponto A ao ponto R, do ponto O ao ponto R e do ponto O ao ponto Q. Dessa forma, é possível obter o triângulo retângulo ΔPQO, destacado na Fig. 5.

Figura 5. Triângulo retângulo ΔPQO de lados OQ, PQ e PO.



Fonte: Arquivo do autor (2023).

Segue da Fig. 5 que:

$$\cos P\hat{O}Q = \frac{OQ}{r}$$

$$OQ = \cos P\hat{O}Q.r$$

Em adição, seque que:

$$senP\hat{O}Q = \frac{PQ}{r}$$

$$PQ = senP\hat{O}Q.r$$

Utilizando regra de três simples as dimensões do círculo C, obtém-se,

$$2\pi \to 2\pi r$$

$$P\hat{O}Q \to PR$$

$$PR = P\hat{O}Q.r$$

Em C, observa que $PR = BR$ e $AR = PQ$. Substituindo essas igualdades na Eq.3, tem-se que

$$x' = P\hat{O}Q.r - senP\hat{O}Q.r \qquad \text{Eq. 5}$$

Como $OR = r$ e $OQ = \cos P\hat{O}Q.r$, substituindo essas igualdades na Eq. 4, tem-se que,

$$y' = r - \cos P\hat{O}Q.r \qquad \text{Eq. 6}$$

Trocando $P\hat{O}Q = \alpha$ e substituindo respectivamente em Eq. 5 e Eq. 6, obtém-se,

$$x' = \alpha.r - sen\alpha.r = r.(\alpha - sen\alpha)$$

$$y' = r - \cos\alpha.r = r(1 - \cos\alpha)$$

Portanto, do resultado exposto anteriormente, conclui-se que

$$c: \begin{cases} x' = r.(\alpha - sen\alpha) \\ y' = r.(1 - \cos\alpha) \end{cases}, \alpha \in [0, 2\pi) \qquad \text{Eq.7}$$

é a equação parametrizada da curva cicloide.

2.4 Parametrização da Braquistócrona

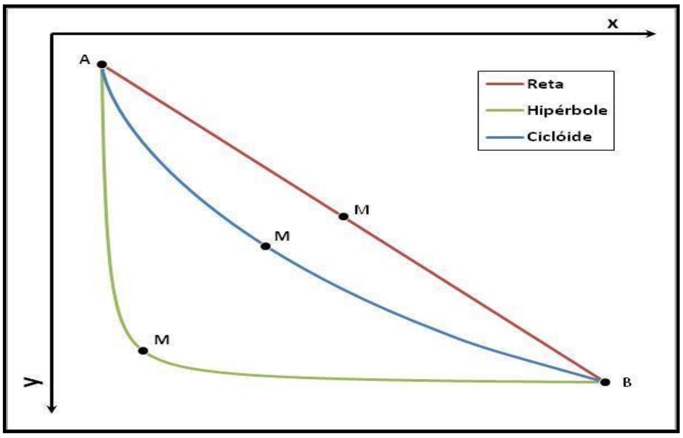
O termo Braquistócrona, segundo Barbosa (2010) e Belarmino *et al*. (2019) deriva de duas palavras gregas, onde *brakhsto* significa (mais curto) enquanto que *chronos* (tempo). Dessa forma, a nomenclatura faz jus à relação com o problema de encontrar uma curva na qual um corpo realiza sua trajetória com menor tempo possível.

Como discutido anteriormente, em Castro (2020) e Nazaré (2020), a curva Braquistócrona recebeu maior atenção no final do século XVIII, mais precisamente em 1696, quando Johann Bernoulli (1667-1748) propôs o chamado problema da Braquistócrona em forma de desafio para os matemáticos da época. Este problema não foi um desafio qualquer no meio científico, haja vista que renomadas personalidades da ciência naquele período estiveram envolvidas em sua solução. Sua descrição se deu da seguinte forma (COELHO, 2008, p. 22):

> Dados um plano vertical e dois pontos A e B sobre o plano, com A mais alto do que B, e um ponto móvel M, determinar uma curva ao longo da qual uma partícula material desliza no menor tempo possível de A até B, considerando apenas a ação da gravidade, sem atrito.

A Fig. 6 a seguir é apresentada no intuito de ilustrar o problema anunciado anteriormente.

Figura 6. Trajetórias descritas por uma partícula M entre os pontos A e B.



Fonte: Corrêa (2010, p. 5).

Considere na Fig. 6, algumas curvas representando caminhos entre A e B, sobre as quais uma partícula M, sob ação da gravidade, parte de A e chega a B com menor tempo possível. Uma provável resposta para a curva que obdece essa condição seria a reta, uma vez que tal representação geométrica corresponde ao caminho mais curto entre dois pontos. Entretanto, a reta não se mostra como o caminho mais rápido, pois se deve considerar o fato de que fisicamente, no caso da trajetória ser uma reta, a transformação de energia potencial em energia cinética durante o deslocamento do corpo ocorre de forma mais lenta.

Johann já possuía a solução, que consistia em uma adaptação da lei de Snell. De acordo com o princípio de Fermat, a luz sempre escolhe o trajeto mais rápido a percorrer um meio. E voltando para lei de Snell, sabe-se que quando a luz troca de meios onde sua velocidade varia, como o ar e a água, ela acaba assumindo ângulo para melhor fazer uso do trajeto, com finalidade de sempre escolher o caminho mais rápido.

Para tornar o problema mais desafiador, Bernoulli estipulou um prazo de seis meses e quem o solucionasse receberia as honras de tal feito descrito a seguir (JAFELICE; MARQUES; OLIVEIRA, 2008, p. 256):

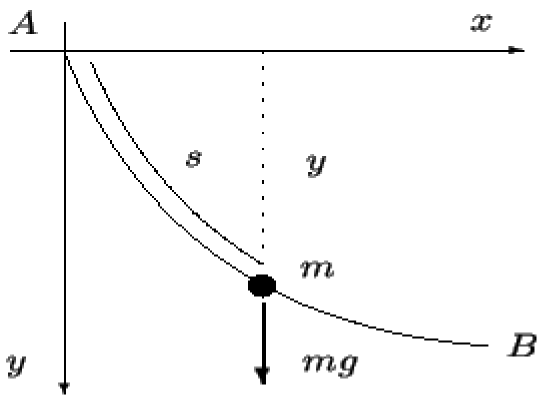
> Que aquele que consiga solucionar este problema conquiste o prêmio que prometemos. Este prêmio não é ouro nem prata (...) mas antes as honras, os elogios e os aplausos; (...) exaltaremos, pública e privadamente, por palavra e por carta, a perspicácia do nosso grande Apollo.

Ainda segundo Jafelice, Marques e Oliveira (2008, p.256), em janeiro de 1697, Johann publicou uma nova proclamação na qual mencionava que apenas Leibniz lhe comunicara ter resolvido o desafio proposto. Porém, depois de ter prorrogado o prazo, cinco soluções foram apresentadas, a do próprio Johann Bernoulli, a de Leibniz, a de L’Hôspital, a do seu irmão mais velho Jacob Bernoulli e uma em anonimato, que posteriormente foi assumida por Newton . (JUSTINO; SANTOS; SOUZA, 2019).

Esse feito considerou tais pesquisadores como os principais responsáveis pelo do problema da Braquistócrona no contexto da importância do Cálculo Variacional. (CASTRO, 2020; DAMASCENO; GONÇALVES; VIEIRA, 2016).

Como já descrito, a resolução consistiu em descobrir qual é trajetória que deve seguir um objeto (de massa m) entre dois pontos de tal modo que o tempo de percurso seja o menor possível, sob ação apenas da gravidade (Fig. 7).

Figura 7. Ilustração do problema da curva Braquistócrona.



Fonte: Zani (2000).

Para se desenvolver a solução matemática do problema, suponha que este objeto de massa m irá se deslocar do ponto A (ponto mais alto, altura igual a y) para o ponto B, onde o ponto B está localizado abaixo do ponto A (fim de percurso, altura considerada igual à zero, em relação à altura inicial de percurso). Deseja-se encontrar qual é a forma dessa curva que representa um menor tempo de descida de um móvel sobre ela.

Assim, considere um pequeno intervalo de tempo dt que leva para esse móvel percorrer um segmento infinitesimal ds, dado pela expressão:

$dt = \frac{ds}{v}$, onde v é a velocidade de descida do móvel sob ação da gravidade g do objeto de massa m. Em adição, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Então segue que dt pode ser calculado da seguinte maneira:

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$$

Utilizando algumas ferramentas algébricas tem-se que:

$$dt = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}}{v}dy \qquad \text{Eq.8}$$

Para facilitar os cálculos, considera-se x também em função de y. Nesse caso, x representa o deslocamento do objeto de massa m no eixo ox e y o deslocamento do objeto de massa m no eixo oy.

No ponto A, o móvel sai do repouso, de uma altura y, sobre ação apenas da gravidade g e, portanto, sua energia total é igual à energia potencial gravitacional E_p, onde $E_P = mgy$. Com a excursão do móvel sobre a curva, sem atrito, ele perde altura e, consequente, energia potencial gravitacional. Dadas essas condições, pelo princípio da conservação da energia mecânica, essa energia potencial é transformada gradativamente em energia cinética E_C, onde $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, sem percas.

No ponto B $(y = 0)$, a energia gravitacional é totalmente convertida em energia cinética (representativa da energia total do móvel). Dessa forma, pode-se concluir que a energia total em A é igual a energia total em B, e assim:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

Onde $\frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética e mgy é a energia potencial gravitacional. Assim, tem-se que, $v = \sqrt{2gy}$ Eq. 9, o que confirma que a velocidade está em função de y. Ou seja, que a velocidade depende apenas da altura de queda do móvel, uma vez que $\sqrt{2g}$ é uma constante.

Substituindo a Eq. 9 na Eq.8, segue que o intervalo de tempo de percurso do móvel de A até B é dado por:

$$\Delta t = \int_A^B \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{2gy}}\text{, onde } x' = \frac{dx}{dy}$$

Reescrevendo a equação acima, tem-se:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_A^B \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}} dy \qquad \text{Eq. 10}$$

Nesse momento, deseja-se encontrar a função $x = x(y)$ que torne a Eq.10 mínima. Portanto o integrando deve obedecer à equação de Euler-Lagrange (ver Eq.1).

Sendo y a variável independente, segue que a função diferenciável é da seguinte forma:

$$f = (x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2 + 1}}{\sqrt{y}} \qquad \text{Eq. 11}$$

Calculando a derivada da função f em relação à x, segue que $\frac{df}{dx} = 0$, pois a função f não depende de x. Por outro lado, tem-se que:

$$\frac{df}{dx'} = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \text{Eq. 12}$$

Como a Eq. 12 tem que ser igual à zero como requisito à sua minimização, segue que

$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = c$ Eq. 13, onde c é uma constante.

Com o intuito de facilitar o desenvolvimento dos cálculos, eleva-se Eq. 13 ao quadrado. Assim, segue que:

$$\frac{x'^2}{1 + x'^2} \cdot \frac{1}{y} = c^2 \qquad \text{Eq. 14}$$

Trocando c^2 por $\frac{1}{2a}$ na Eq.14, uma vez que c^2 é uma constante, tem-se: $\frac{x'^2}{1 + x'^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$ (Eq. 15), onde a é outra constante positiva. Dessa forma pretende-se obter

$$2ax'^2 = y(1 + x'^2)$$

$$2ax'^2 = y + yx'^2$$

$$2ax'^2 - yx'^2 = y$$

$$(2a - y)x'^2 = y$$

$$x'^2 = \frac{y}{2a - y}$$

Isso acarreta que

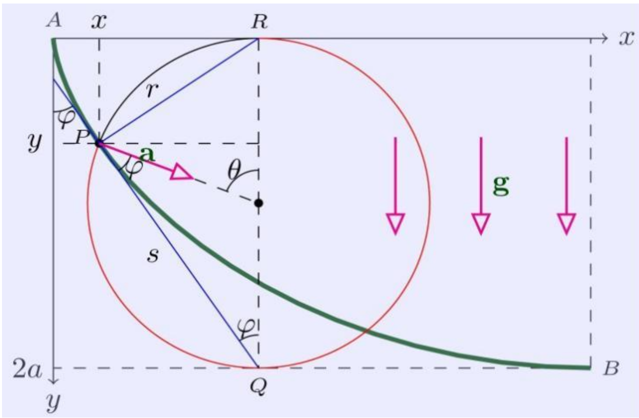
$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \qquad \text{Eq. 16}$$

Porém, deseja-se obter x em função y, portanto deve-se integrar a Eq. 16, na forma:

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a - y}}dy \qquad \text{Eq. 17}$$

Para resolver a integral acima, utiliza-se de uma substituição trigonométrica. Considere $y = a(1 - \cos\theta)$ Eq. 18, na Fig. 18.

Figura 8. A trajetória representativa de uma curva Braquistócrona como raio do circulo gerador r=a.



Fonte: Andrade e Ferreira (2015).

Assim, segue-se que $dy = asen\theta d\theta$ (Eq. 19). Substituindo a Eq. 18 e a Eq. 19 na Eq. 17, tem-se que:

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos\theta)}{2a - a(1 - \cos\theta)}} asen\theta d\theta$$

$$x\int \sqrt{\frac{a(1 - \cos\theta)}{2a - a + a\cos\theta}} asen\theta d\theta$$

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos\theta)}{a + a\cos\theta}} asen\theta d\theta$$

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos\theta)}{a(1 + \cos\theta)}} asen\theta d\theta$$

Multiplicando o numerador e o denominador na raiz quadrada acima por $(1 - \cos\theta)$, segue que:

$x = \int \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} asen\theta d\theta$. E, como $1-\cos^2\theta = sen^2\theta$, tem-se que:

$$x = \int \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{sen^2\theta}} asen\theta d\theta \text{, logo,}$$

$$x = \int \frac{(1-\cos\theta)}{sen\theta} asen\theta d\theta .$$

Portanto,

$$x = a\int (1-\cos\theta) d\theta \text{, o que implica:}$$

$$\begin{cases} x = a(\theta - sen\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) = y(\theta) \end{cases} \qquad \text{Eq. 20}$$

Comparando-se esta última equação com as equações parametrizadas descritas na Eq.7, conclui-se que a curva parametrizada que representa a Braquistócrona, nos moldes dados aqui, é justamente uma curva cicloide, no intervalo de A=(0,0) a B=($a\pi$, 2a), e raio do círculo gerador r=a.

Generalizando o conceito, a partir das condições físicas do problema, uma braquistócrona é uma curva cicloide invertida na qual um corpo (móvel, partícula), partindo do repouso no seu ponto mais alto (A), se desloca sob essa curva até o ponto mais baixo (B), sob ação apenas da gravidade, com o menor tempo de percurso entre todas as outras curvas possíveis.

3. DELINEANDO O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM UTILIZANDO MATERIAL MANIPULATIVO E TECNOLÓGICO COM ALGUMAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Este capítulo será uma etapa na qual se mostra através de alguns autores, conceitos relacionados à modelagem matemática e o ensino interdisciplinar. Será visto também a importância de trabalhar esses temas como instrumento facilitador de aprendizagem. Além disso, a relação dessa abordagem com a exploração da curva Braquistócrona.

3.1 A Modelagem Matemática

Nessa fase do trabalho, entende-se como necessário inserir a curva Braquistócrona como atividade que atende aos aspectos da modelagem Matemática, buscando-se dessa forma dialogar com a educação transformadora no sentido de aproximar a aprendizagem com o conhecimento mais concreto.

Portanto, será feita a seguir algumas discussões acerca do conceito da modelagem matemática, além disso, também situar o leitor sobre a relação da Braquistócrona com modelagem matemática neste trabalho.

Acredita-se que um bom educador não deve dar uma atividade pronta para seus educandos, mas a certeza da sua presença para que posteriormente possa sanar a dúvida de algo que está dificultando aprendizagem, deixando muito claro que o protagonista na construção do saber será o aluno.

Esse protagonismo pode ser buscado significativamente através das ações executadas na modelagem Matemática. De acordo com Burak (1992, p.62, *apud* Burak, 2010 ,p.18),

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões [...].

Ainda sobre o protagonismo evidenciado acima, Cerqueira (2004) descreve que a modelagem posta como um ambiente propício para aprendizagem, haja vista que os alunos irão utilizar a matemática para problematizar, bem como investigar situações referentes à sua realidade. Portanto o estudo da Braquistócrona pode ser usado como uma importante ferramenta para tal discussão e principalmente para aplicação nas aulas de Matemática. Sobre a inserção da Braquistócrona, corroborando com os objetivos na utilização da modelagem matemática, será visto mais adiante na abordagem onde é sugerida uma sequencia didática para tal ação.

Muito se tem discutido sobre a modelagem matemática, onde suas concepções de fato merecem um olhar cuidadoso para sua inserção em sala de aula, isso de tal maneira que possa contemplar alguns dos seus objetivos, um deste pode ser visto em Caldeira (2009, p.33),

> Pensar a Modelagem Matemática como um dos possíveis caminhos de uma nova forma de estabelecer, nos espaços escolares, a inserção da maneira de pensar as relações dos conhecimentos matemáticos e a sociedade mais participativa e democrática.

Com isso, a modelagem matemática está inserida também em indagações, questionamentos, reflexões acerca de problemas sociais o que a aproxima de uma educação crítica. Contexto esse tão almejado pelos educadores da atualidade. É importante salientar que a modelagem matemática incorporando verdadeiramente esse sentido, atinge de certo modo a busca da aprendizagem de maneira concreta.

Corroborando com a modelagem na perspectiva da formação do estudante enquanto cidadão crítico apto a refletir sobre os problemas da sua realidade, que segue por Jacabini e Wodewotzki (2006, p. 3),

> [...] a inserção da modelagem no contexto da Educação Matemática Crítica, abordando reflexões decorrentes do trabalho com a modelagem que possam contribuir para o crescimento político do aluno. Essas reflexões relacionam-se com a formação e o amadurecimento acadêmico do estudante, com as investigações e com as discussões (sendo estas matemáticas ou não), e com as transformações ocorridas em seu pensamento e em sua maneira de pensar e agir como decorrência desse amadurecimento, dessas investigações e dessas discussões. Nessa perspectiva, interessamo-nos igualmente por reflexões que decorrem do compartilhamento do conhecimento resultante do processo de aprendizagem baseado na modelagem, em algum contexto (social, político, econômico, educacional, da escola, da própria sala de aula etc.) que tenha alguma relação com os atores

> envolvidos e que possa de alguma forma, contribuir para a formação da sua cidadania.

É fato que a aplicação de modelagem matemática em sala de aula é um grande desafio para todos envolvidos no processo, haja vista que ela é real e uma necessidade na demanda dos estudantes na atualidade. Para Cerqueira (2001), apesar dos professores indicarem certo receio na aplicação da modelagem no ensino, tal situação não minimizam suas vantagens que consistem na contribuição dos conceitos matemáticos e na efetivação de habilidades de pesquisa e experimentação.

Ratificando o que foi dito anteriormente, a princípio, é possível que a Braquistócrona enquanto atividade que atende a modelagem matemática possa desencadear certa resistência nos docentes da área, entretanto a proposta aqui apresentada terá com um dos intuitos, direcionar os professores de Matemática a prática de ações interdisciplinares e investigativas, de forma organizada e sequencial.

Contudo, tanto mediador quanto alunos são convidados à adaptação das ações a realidade do processo de ensino-aprendizagem local. Como se percebe, a braquistócrona não será apresentada como conhecimento já pronto, haja vista que ocorrerá um processo anterior de pesquisa de modo que os professores possam estar familiarizados com o tema e desta maneira possam guiar os alunos na busca da construção desse conhecimento.

Sendo assim, quando os professores de Matemática propuserem atividades relacionadas ao tema, deverão estar aptos juntamente com os alunos a relacionar a braquistócrona com problemas reais. De acordo com Bassanezi (2002, apud Silva e Werle, 2010, p.223), “a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (p. 16).

Espera-se que com o estudo da braquistócrona seja possível construir um modelo real que possa exemplificar a solução do problema, na verdade, acredita-se também que tal saber deva funcionar como instrumento capaz de pensar na Matemática como componente curricular que faz parte do cotidiano dos alunos. Dessa forma, a proposta de modelagem matemática envolvida nesse trabalho abordará o projeto de construção física da curva braquistócrona e de outras curvas no plano para confecção de aparato experimental para o teste do conceito da braquistócrona como curva de percurso mais rápido de um móvel em comparação com qualquer outra curva no plano.

Nesse contexto, a Matemática será trabalhada de forma interdisciplinar com Física, uma vez que as discussões sobre a curva supracitada envolvem conceitos de cinemática de corpos.

3.2 A Interdisciplinaridade com a Física

A BNCC apresenta algumas citações sobre a importância do ensino interdisciplinar de Matemática. O documento ressalta que a forma de organização dos componentes curriculares deve ser feita de maneira interdisciplinar, visando o fortalecimento das estratégias adotadas pelas equipes escolares, em um processo mais dinâmico, interativo e colaborativo no que tange a relação de ensino-aprendizagem (BRASIL, 2018).

É fato que o ensino de Matemática apresenta várias demandas relativas à sua melhoria, sendo ainda maior na atualidade. Uma delas está relacionada ao ensino interdisciplinar, que pode ser verificado sem perda de generalidade em expectativa de aprendizagem para o Ensino Médio, também nos Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco, (PERNAMBUCO, 2012, p. 120),

> Dessa forma, as atenções do professor, tanto na escolha dos temas a serem ensinados, como em seu trabalho em sala de aula, devem voltar-se para as questões da contextualização e da interdisciplinaridade. Em outras palavras, as escolhas do professor devem priorizar conceitos e procedimentos que permitam as conexões entre diversas ideias matemáticas, diferentes formas de pensamento matemático e vários campos do conhecimento. Importa, também, favorecer a compreensão da relevância social da Matemática e do seu papel no desenvolvimento histórico da ciência.

Além do mais, nestes Parâmetros é possível identificar como mencionando no capitulo anterior, a forte relação da interdisciplinaridade com a modelagem Matemática (PERNAMBUCO, 2012, p. 39),

> [...] Do ponto de vista metodológico, a proposta de uma pedagogia de projetos de trabalho harmoniza-se com a da resolução de problemas ou a da modelagem matemática, tendo em comum com elas a valorização do envolvimento ativo do professor e dos alunos nas ações desenvolvidas na sala de aula. Além disso, os projetos que articulem vários campos do saber são oportunidades adequadas à prática da interdisciplinaridade.

Já no Currículo de Pernambuco do Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2021, p.89), é destacado que

> As habilidades específicas dos componentes foram construídas de forma a promover a interdisciplinaridade, sempre referenciadas pelas habilidades de área da BNCC. Dessa forma, os professores poderão perceber como seu componente de formação está presente nas discussões propostas pelo documento nacional, mas sempre em busca de uma integração dentro e fora da área, proporcionando aos estudantes uma formação mais ampla em relação aos objetos de conhecimento apresentados.

Sendo assim, fica evidente a importância de um fazer pedagógica que possa relacionar diferentes componentes curriculares, onde essa demanda pode ser trabalhada com o estudo de conceitos da Braquistócrona.

Como foi dito, o estudo da Braquistócrona não será específico da Matemática, pois nesse processo a Física terá importante contribuição na construção do processo que a aproxima do que foi dito por Silva (2008, p.546),

> A interdisciplinaridade, como um movimento contemporâneo que emerge na perspectiva da dialogicidade e da integração das ciências e do conhecimento, vem buscando romper com o caráter de hiperespecialização e com a fragmentação dos saberes.

Muitas vezes os professores encontram dificuldades para colocar em prática um ensino interdisciplinar. Assim, entende-se que o planejamento de uma sequência didática é uma excelente ferramenta para vencer esses desafios.

O tema da interdisplinaridade na ótica desta pesquisa é direcionado como algo que pode, dentre muitos objetivos, tornar o ensino de tópicos de Matemática mais palpável ao aluno, no sentido de contextualidade e aplicação de conceitos para a solução de problemas de ordem prática, haja vista o dialogo existente entre a Matemática, Ciências da Natureza e Novas Tecnologias. Tal discussão é ainda fortalecida por Freire (1987, *apud* Silva, 2008, p. 551) quando afirma que “a interdisciplinaridade é o processo metodológico de construção do conhecimento pelo sujeito com base em sua relação com o contexto, com a realidade, com sua cultura".

Tal ideia pode ser ainda mais fortalecida pelo próprio Silva (2008, p.551), quando discorre que

> De todo modo, o professor precisa tornar-se um profissional com visão integrada da realidade, compreender que um entendimento mais profundo de sua área de formação não é suficiente para dar conta de todo o processo de ensino. Ele precisa apropriar-se também das múltiplas relações conceituais que sua área de formação estabelece com as outras ciências.

Na perspectiva de atender em grande parte os anseios expostos nos argumentos anteriores, que se propõe um estudo com aplicabilidade em sala de aula sobre a curva Braquistócrona. Todavia, os maiores detalhes contemplando os critérios da modelagem matemática, bem como a interdisciplinaridade será visto através da sequência didática que será explanada em detalhes a seguir no desenvolvimento deste trabalho.

4 FUNÇÕES COM PARÂMETROS RELATIVOS AOS DA BRAQUISTÓCRONA

Esse será o momento na qual é colocado em prática o resultado da revisão bibliográfica referente ao tema estudado. Isso no tange as aspectivos criativo da construção, haja vista, que será mostrado expressões matemáticas de curvas no plano, com seus parâmetros relativos aos da braquistócrona.

4.1 Desenvolvimento de Expressões Matemáticas

Nesse capítulo, serão desenvolvidas expressões matemáticas de curvas no plano, com seus parâmetros relativos aos da braquistócrona. O objetivo é disponibilizar ao leitor, leis de formação dessas curvas que podem ser representadas geometricamente com auxílio de um software gráfico, para que se possa projetar um aparato experimental físico, com material/técnica de baixo custo, para estudo de propriedades da braquistócrona em comparação com outras curvas.

A motivação para essa abordagem está no fato de que na literatura brasileira e estrangeira pouco se tem explanado sobre expressões que podem ser usadas em comparação com a braquistócrona para projetos de aparatos experimentais como o descrito no parágrafo anterior.

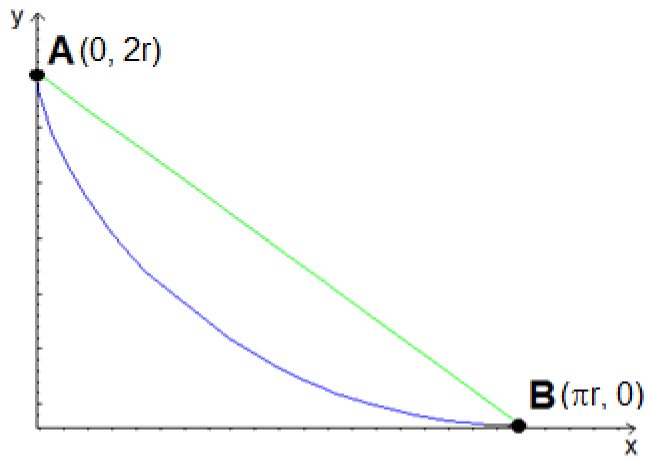
É comum se deparar com materiais concretos representativos dessas curvas usando materiais e/ou cortes inadequados, que podem não garantir uma boa precisão (que é requerida nos testes experimentais). Em adição, os aparatos experimentais disponíveis no mercado são de custo relativamente alto (comparados a outros aparatos com outras abordagens) e, muitas vezes, se limitam à comparação da braquistócrona apenas com uma reta.

Nesse sentido, a seguir serão desenvolvidas expressões matemáticas de curvas no plano que podem ser usadas para projetos desses aparatos, a um custo acessível.

4.1.1 Reta

Considere uma braquistócrona com raio gerador r, de A=(0, 2r) a B=(πr, 0), e uma reta passando por esses pontos (Fig. 9).

Figura 9. Curva braquistócrona (em azul) com raio gerador r, em comparação com uma reta (em verde) que passa pelos pontos A=(0, 2r) a B=(πr, 0).



Fonte: Arquivos do autor (2023).

Para simplificar os cálculos, os eixos cartesianos foram alocados de modo que o ponto B (que marca o final da trajetória) pertença ao eixo x. Partindo da equação geral da reta (Eq. 21),

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ (Eq. 21)},$$

onde $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é o coeficiente angular da reta e (x_0, y_0) e (x_1, y_1) são as coordenadas de dois pontos que pertecem a essa reta, pode-se inferir a equação da reta com parâmetros relativos ao da braquistócrona que passa por A e B, da forma:

$$(y - 2r) = \frac{-2r}{\pi \mathrm{r}}(x - 0)$$

$$y = -\frac{2}{\pi}x + 2r \text{ (Eq. 22)}.$$

Essa última expressão será considerada para a inclusão de uma trajetória retilínea, com início em A e término em B, no projeto do aparato experimental.

4.1.2 Parábola

Considere uma função polinomial do 2° grau que representa uma parábola com concavidade voltada para cima, na forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{(Eq. 23)},$$

onde a>0, b e c são constantes $\epsilon\ R$. Considere também o mesmo referencial de coordenadas usado anteriormente no caso da reta, fazendo essa curva passar pelos pontos A(0, 2r) e B(πr, 0), onde B é o vértice dessa parábola (ou o final da trajetória que será realizada pelo móvel). O objetivo é encontrar os valores dos parâmetros a, b e c da função quadrática que obedece a essas condições iniciais.

Para essas condições iniciais, as manipulações algébricas implicam

$$y = \left(\frac{2}{\pi^2 r}\right)x^2 + \left(\frac{-4}{\pi}\right)x + 2r \quad \text{(Eq. 24)}.$$

Essa é a expressão de uma função quadrática com parâmetros relativos ao da braquistócrona, que passa pelos pontos A e B, de acordo com as condições iniciais dadas.

4.1.3 Circunferência

Do mesmo modo que nos casos anteriores, é possível desenvolver a expressão matemática para o projeto da trajetória circular com parâmetros ligados aos da braquistócrona. Partindo da equação reduzida da circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad \text{(Eq. 25)},$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro C e R é o raio da circunferência, das condições iniciais do problema e o sistema referencial adotados anteriormente, a partir de manipulações algébricas, chega-se à expressão

$$\left[X-\left(\frac{\pi+2\sqrt{3}}{2}\right)r\right]^2+\left[Y-\left(\frac{1+\pi\sqrt{3}}{2}\right)r\right]^2=4r^2\left[1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \text{ (Eq. 26).}$$

Usando a propriedade de translação dos eixos cartesianos xy, ou seja, alterando a posição do sistema referencial ortogonal inicial, é possível transladar a circunferência de modo que as coordenadas x_0 e y_0 do centro C fiquem localizadas na origem do novo referencial xy', com C(0,0), sem alterar o valor do raio R, o que simplifica a descrição da Eq. 26 para

$$x^2+y^2=4r^2\left[1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \text{ (Eq. 27).}$$

O desenvolvimento algébrico para a demonstração dessas duas últimas equações (Eq. 24 e Eq. 27) foi omitido propositalmente, uma vez que esse material é parte integrante dos documentos que irão compor o pedido de exame de patente de Modelo de Ultilidade desenvolvido (como resultado desta pesquisa de Mestrado no PROFMAT/UNIVASF) ao Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI). Entenda-se por modelo de utilidade (INPI, 2012, p. 3)

> a criação de algo resultante da capacidade intelectual do seu autor, referindo-se a um objeto de uso prático ou parte deste. Este objeto deve ser tridimensional (como instrumentos, utensílios e ferramentas), apresentar nova forma ou disposição, que envolva ato inventivo e resulte em melhoria funcional no seu uso ou fabricação.

Embora se tenha escolhido pelo pedido de patente do aparato experimental que foi desenvolvido como resultado da pesquisa, este trabalho apresenta os resultados, possibilidades e sugestões concretas para que o professor mediador e (ou) seus alunos possam construir seu próprio aparato experimental, com a proposição de outras curvas que, inclusive, podem ser produzidas pelos próprios alunos, a partir da manipulação algébrica dos parâmetros envolvidos, sob orientação do professor mediador.

O Quadro 1 traz um resumo das expressões matemáticas de curvas que foram desenvolvidas neste trabalho, para fins do projeto físico de aparato experimental da braquistócrona e outras curvas relacionadas.

Quadro 1. Quadro resumo com as expressões algébricas de curvas no plano que foram determinadas com os parâmetros relativos ao da curva braquistócrona.

CURVA	EXPRESSÃO ALGÉBRICA COM PARÂMETROS GENÉRICOS	EXPRESSÃO ALGÉBRICA COM PARÂMETROS RELATIVOS AOS DA BRAQUISTÓCRONA
Braquistócrona	$x = r(\theta + sen\theta)$ $y = r(1 - \cos\theta)$	-
Reta	$y = ax + b$	$y = \frac{-\pi}{2}x + 2r$
Parábola	$y = ax^2 + bx + c$	$y = \left(\frac{2}{\pi^2 r}\right)x^2 + \left(\frac{-4}{\pi}\right)x + 2r$
Circunferência	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 = 4r^2\left[1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]$

Fonte: Arquivos dos autores (2023).

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO INTERDISCIPLINAR DE FUNÇÕES: utilização de aparato experimental da braquistócrona e outras curvas

Este capítulo mostra sequência didática construída como parte do produto educacional desenvolvido neste trabalho. Consoante a isso, detalhes de todas as atividades a serem feitas nessa sequência com orientações, além de sugestões para serem executadas pelos alunos e o professor da turma.

5.1 Apresentação

O presente documento descreve uma sequência de atividades destinada a professores de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio e aos respectivos alunos da turma. Trata-se do resultado do trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Vale de São Francisco.

A proposta desse trabalho foi engendrada com intuito de ser desenvolvida numa escola pública do município de Juazeiro, BA, no primeiro ano do ensino médio, na disciplina de matemática. Os conteúdos que serão estudados são funções e alguns assuntos da disciplina de física, contudo, no que tange esse último componente curricular, mais especificamente será abordado conservação de energia, energia potencial gravitacional e energia cinética.

É importante ressaltar que para tal atividade será feito o uso de recursos didáticos diversificados, tais como software matemático, estudos interdisciplinar, desenvolvimento de atividades em grupo, relatórios de produção e modelagem matemática com a construção de um modelo concreto sobre o tema da pesquisa.

Acredita-se que tais recursos diversificados serão importantes ferramentas pedagógicas que podem contribuir mais significativamente com o processo de aprendizagem dos conceitos pelos alunos. Isso porque os recursos utilizados além de contribuírem para o desenvolvimento do tema da pesquisa escolhida, também deverá se mostrar eficaz na adesão por parte dos alunos, uma vez que tal atividade se dá com assaz protagonismo dos estudantes.

A temática escolhida para essa abordagem foi o estudo de diferentes funções, haja vista que trata-se de um assunto muito utilizado na disciplina de matemática , bem como em outras disciplinas e apresenta certas dificuldades por parte dos alunos. Contudo, o estudo de funções e abordagem interdisciplinar servirá de embasamento para efetivar um dos principais objetivos da pesquisa que é estudo da Braquistócrona e a sua construção.

Ressaltando-se aqui a interdisciplinaridade do tema, além da busca de construção do saber por parte dos discentes, podendo ser visto em,

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BNCC, 2017, p.9).

As atividades de introdução buscam dá embasamento para desenvolvimento da proposta para que de tal sorte na sua finalização possa alcançar êxito no produto final. Dentro deste processo espera-se contar com toda observação e a interação dos discentes, de modo que seja possível criar argumentos, discutir diversidades de ideias, desenvolver raciocínio e principalmente alavancar posturas investigativas que tenham como objetivo a busca de estratégias inovadoras para encontrar soluções para os problemas da proposta da atividade.

Enquanto a utilização das ferramentas tecnológicas, tal escolha foi feita partindo do principio que para a sociedade moderna ou mais especificamente os estudantes da atualidade a tecnologia tem sido em certos aspectos um grande facilitador de aprendizagem, haja vista que em Rodrigues (2012),

> O avanço tecnológico tem, ainda, proporcionado ferramentas que, adequadas ao contexto e às necessidades de cada aluno, podem aumentar a probabilidade de desenvolvimento do desempenho acadêmico de cada um e de todos. Entretanto, a disponibilização destas ferramentas no ambiente escolar depende exclusivamente da adesão do professor a elas (p. 9-10.)

Nesse sentido a proposta deste trabalho é também estimular o uso da tecnologia por partes dos professores, tornando dessa forma um ensino mais dinâmico, participativo, atualizado e colaborativo com as demandas de novas estratégias de ensino.

Outro fato positivo em relação ao uso da tecnologia nesta proposta é que o estudo de funções irá ficar mais atrativo para os alunos, pois através de software matemático os estudantes irão visualizar e manipular os gráficos das funções por eles construídos, além disso, perceber a curva Braquistócrona de grande importância neste trabalho.

Este recurso também será usado para analisar os conceitos algébricos e geométricos de pertinência para a realização deste trabalho, e de forma concreta, os erros ocasionados no estudo destes conceitos serão imediatamente visualizados em tela pelos alunos, o que faz oportunizar reflexões, bem como ações práticas para acrescentar no desenvolvimento desse projeto.

Adiante, descreve-se a proposta do produto educacional, onde consta o cronograma das atividades desenvolvidas no decorrer dos três encontros, bem como a organização de cada uma deles. Também poderão ser verificadas nos desdobramentos deste trabalho as orientações para serem seguidos pelos envolvidos, assim como sugestões para serem exploradas em futuros trabalhos.

5.2 Sequência de atividades

Este produto educacional se constitui em uma sequência de atividades para serem aplicadas por professores da disciplina de Matemática no primeiro ano do Ensino Médio, com objetivo de trabalhar diferentes funções algebricamente e geometricamente como auxilio na busca da solução para o problema da curva Braquistócrona. Para alcançar tal feito, é proposto aqui atividades que corroboram com o protagonismo dos estudantes uma vez que a metodologia de ensino empregada será voltada para construção do saber e do dialogo problematizador. As informações básicas da sequência didática estão descritas no Quadro 2.

Quadro 2. Informações básicas as sequência didática.

Dados da sequência didática	
Temática	Ensino interdisciplinar de funções com auxílio de aparato experimental da braquistócrona e outras curvas.

Público-alvo	Estudantes do primeiro ano do Ensino Médio.
Duração	Três encontros de 50 minutos cada.
Objetivos	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Geometria –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Estruturação	Estudo algébrico e geométrico de funções. Construção e manipulação da curva Braquistócrona de modo virtual. Construção física do modelo da Braquistócrona e outras curvas no plano. Comparação dos resultados.

Fonte: Arquivos do autor (2023).

A sequência de atividades é composta por três encontros (Quadro 3).

Quadro 3. Síntese de aplicação da sequência de atividades.

Encontro	**Sintese**
1º	Apresentação da proposta de trabalho e organização pra sua aplicação. 50 min.
2º	Estudos de funções, uso do sofware matemático e início de construção do modelo matemático. 50 min
3º	Apresentação do modelo matemático com comparação dos resultados. 50 min.

Fonte: Arquivos do autor (2023).

Em seguida é detalhado cada um dos encontros, inclusive com sugestões e espaços para serem acrescentados pelos professores e estudantes envolvidos. Na verdade, se o professor assim julgar, até utilizar ou adaptar em outras séries do Ensino Médio.

5.3 Estruturação dos Encontros

Visando que tais encontros obtenham êxito na perspectiva do produto final deste trabalho que faz interessante pensar em todo o processo de aprendizagem com muita cautela e reflexão, pois de acordo com Almeida (2008, p. 163),

> A aprendizagem é um processo de construção do aluno - autor de sua aprendizagem, mas nesse processo o professor, além de criar ambientes que favoreçam a participação, a comunicação, a interação e o confronto de ideias dos alunos, também tem sua autoria. Cabe ao professor promover o desenvolvimento de atividades que provoquem o envolvimento e a livre participação do aluno, assim como a interação que gera a coautoria e a articulação entre informações e conhecimentos, com vistas a construir novos conhecimentos que levem à compreensão do mundo e à atuação crítica no contexto.

Para o desenvolvimento das atividades, o professor terá disponível planejamentos para cada encontro, descritos a seguir.

5.3.1 Encontro 1 – Apresentação da Braquistócrona

Este encontro será usado pelo professor para explicar a proposta de trabalho para os alunos da sua turma do primeiro ano do ensino médio. O mediador seguirá as seguintes orientações para execução deste encontro:

Inicialmente com auxílio de projetor multimidia, o docente deverá realizar uma apresentação em *power point* (ou similar), como a sugerida no Apêndice B, contendo os seguintes itens, nessa ordem:

- Motivação – apresentação de aplicações da braquistócrona no dia-a-dia do aluno;

- Apresentação da problemática da braquistócrona;

- Equações paramétricas da cicloide e da braquistócrona;

- Propriedades da braquistócrona;

- Produção de aparatos experimentais personalizados da braquistrócona e outras curvas.

Na apresentação, o professor poderá fazer a seguinte pergunta à turma: dados um plano vertical e dois pontos A e B sobre o plano, com A mais alto do que B, e um ponto móvel M, determinar uma curva ao longo da qual uma partícula material desliza com menor tempo possível de A até B, considerando apenas a ação da gravidade, sem atrito?

Espera-se que de imediato a resposta da turma seja uma reta, pois a mesma corresponde ao caminho mais curto. È nesse momento que o mediador irá informar que para responder essa pergunta de uma maneira mais completa, e, principalmente de modo convincente, faz-se necessário estudar e observar a solução do problema da braquistócrona.

Nesse momento, o professor também pode aproveitar para fazer um breve histórico sobre essa curva, mas sem responder a pergunta que foi feita anteriormente.

Em seguida, o professor pode apresentar o nome da curva e sua geometria, e mostrar alguns aparatos experimentais que já foram produzidos para se experimentar as propriedades da braquistócrona em comparação com outras curvas.

A parte final do Encontro 1 deve iniciar com a indicação do professor que nos próximos encontros, os alunos serão capazes de projetar seus próprios aparatos experimentais, com a escolha de curvas personalizadas a partir da manipulação algébrica dos parâmetros dessas funções.

Contando com a curiosidade da turma, o professor deve fornecer as orientações indicadas:

- Formar grupos;

- Refletir se algum aluno já ouviu sobre a curva e ou visualizou em algum lugar;

- Discutirem entre os componentes da turma quais funções no plano foram trabalhadas nas unidades anteriores e se conhecem ou se lembram de suas respectivas geometrias;

- E se os componentes dos grupos já estudaram assuntos de Física, como velocidade, queda livre, energia potencial gravitacional, energia potencial cinética e conservação de energia;

- Indicar que todos esses conteúdos de física deverão ser pesquisados em casa, pois serão muito utilizados no próximo encontro.

O professor deverá está ciente que durante a realização dessas orientações muitas dúvidas irão surgir, o que deve tornar o processo de construção de conhecimento e do princípio investigativo como já positivo.

No final desse encontro, o mediador deverá informar que a continuidade e êxito para que possam descobrir a solução da pergunta feita no inicio do encontro vai depender do cumprimento das orientações indicadas.

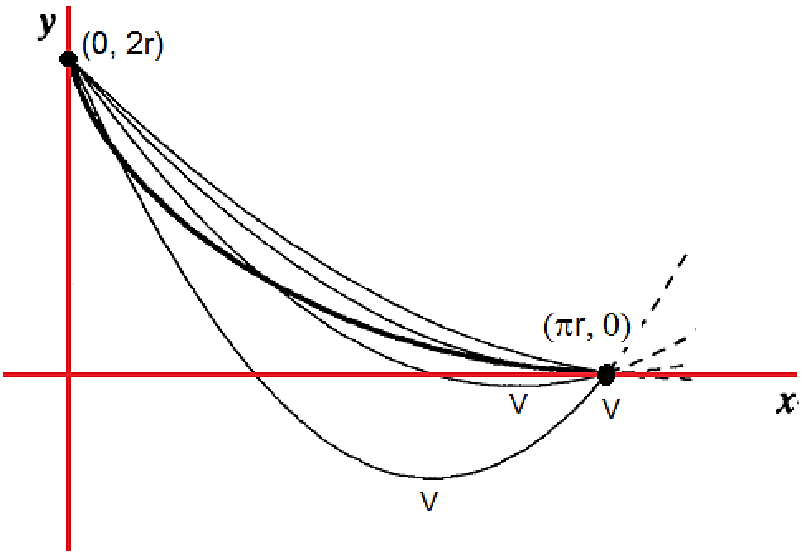
5.3.2 Encontro 2 – Estudo de funções com parâmetros relativos ao da braquistócrona e esboço das curvas em *software* matemático

Nesse encontro, o professor deve começar fazendo uma breve revisão do que foi solicitado na aula anterior. O mediador deve falar sobre conceito de funções, para revisar e ensinar para aqueles estudantes que não lembravam e que não compreenderam direito a ideia de função. As funções afim e quadrática devem ser revisadas em detalhes, com ênfase à interpretação de seus parâmetros e equações dependentes desses parâmetros.

Nessa abordagem teórica, deve-se dar ênfase aos conceitos e propriedades das funções listadas anteriormente (cicloide, braquistócrona, reta, parábola e circunferência). Pode-se utilizar o livro didático e material impresso como estratégia para complementar o objetivo proposto.

Uma possibilidade concreta para se trabalhar o projeto de curvas no plano para o desenvolvimento de aparato experimental da braquistócrona e outras curvas, é desenvolver funções que representam parábolas que passam pelos pontos A e B (inicial e final da trajetória) e que diferem na posição do vértice (V) (Fig. 10).

Figura 10. Parábolas que passam pelos pontos A(0, 2r) e B(πr, 0), com destaque aos seus vértices (V).



Fonte: Adaptado de Haws (1995, p. 330).

Para tanto, a partir da Eq. 23 com c=2r (constante a todas as parábolas que são soluções do problema), faz-se aparecer o sistema de duas equações e duas incógnitas a e b: uma, substituindo as coordenadas do ponto B (ou do ponto A) na Eq. 23; a outra, a partir da expressão que determina o x do vértice (x_V):

$$\begin{cases} \pi^2 r^2 a + \pi r b = -2r \\ b = -2a x_V \end{cases} \text{ (Eq. 28).}$$

Isolando-se a no sistema, tem-se:

$$a = \frac{-2}{\pi(\pi r - 2x_V)} \text{ (Eq. 29).}$$

Das condições iniciais, a>0 e, assim, $\pi r - 2x_V < 0$. Isso implica

$$x_V > \frac{\pi r}{2} \text{ (Eq. 30).}$$

Em adição, das condições de contorno, pode-se inferir que o maior valor possível para x_V ocorre para $x_V = \pi r$, quando a parábola possui apenas uma raíz real ($\Delta = 0$). Assim, pode-se inferir que podem existir infinitas parábolas que solucionem o problema, com parâmetros a e b dependentes de x_V, desde que a condição $\frac{\pi r}{2} < x_V \leq \pi r$ seja satisfeita. Em outras palavras, o professor mediador pode propor essa possibilidade, com vistas a experimentar com os alunos como a escolha dos parâmetros a e b interferem na geometria da trajetória de um corpo de A a B, sobre parábolas.

A sugestão é que os alunos possam participar ativamente do projeto das curvas representadas por essas funções, desde o entendimento da proposa, passando pela manipulação algébrica dos parâmetros a e b (dada a restrição para a atribuição de valores do x_V), ao esboço dos gráficos dessas curvas com auxílio de *software* de análise gráfica. Com um aparato adicional para a medição do tempo de percurso do móvel sobre as parábolas, pode-se elaborar o gráfico do tempo de percurso *versus* x_V e assim experimentar e estimar qual a parábola de menor tempo de percurso, entre todas as parábolas testadas.

Outras possibilidades envolvem a abordagem da família de curvas representadas pela função

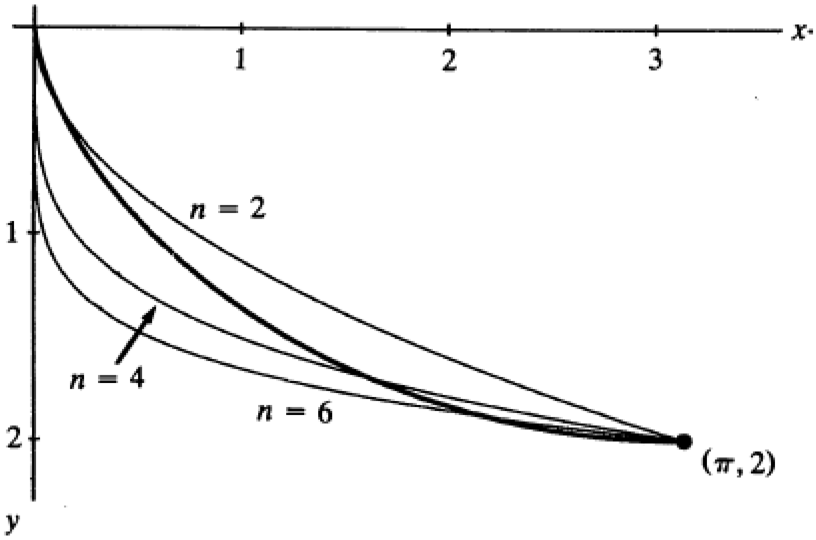
$$f(x) = 2\left(\frac{x}{\pi}\right)^{1/n} \text{ (Eq. 31),}$$

como ilustrado na Fig. 11.

Esta é uma boa alternativa de curvas para explorar com os alunos a compensação entre influência da manipulação dos parâmetros da função com a inclinação e o comprimento do caminho que o móvel percorrerá. De toda forma, como destacado, outras curvas como, por exemplo, a hipérbole e a elipse, também podem ser estudadas para compor um aparato experimental personalizado para experimentação da braquistócrona.

Considerando agora que os alunos estão cientes do conteúdo de funções e do propósito da sequência didática, o mediador irá propor aos grupos de alunos, a análise de algumas funções, seus parâmetros e geometrias específicas e a possibilidade de modificação de suas formas a partir da manipalação algébrica desses parâmetros.

Figura 11. Ilustração de curvas da família da função $f(x) = 2\left(\frac{x}{\pi}\right)^{1/n}$, para n=2, 4 e 6.



Fonte: Haws (1995, p. 331).

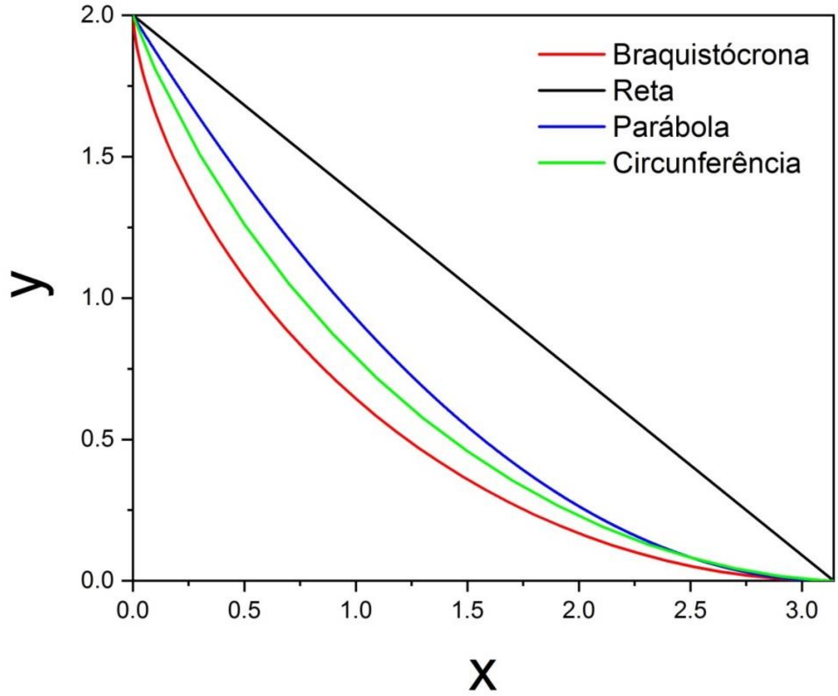
Na sequência, é o momento de significar as expressões matemáticas a partir da produção física das curvas correspondentes. Aqui, sugere-se que a confecção física dessas curvas possa ser feita com a técnica de corte a laser, em gráfica especializada, utilizando-se chapas de madeira natural, de pequena espessura. O objetivo é produzir um aparato de baixo custo relativo aos disponíveis já existentes no mercado, com boa precisão de geometria e minimização de erros de medições experimentais.

Para o projeto físico das curvas, com o objetivo de simplificar os parâmetros nas expressões matemáticas de outras curvas relacionadas, é indicado considerar um círculo gerador da braquistócrona com r=1, para todas as expressões que o envolverem.

Em um primeiro momento, é sugerido que se comece a transição do esboço da geometria das curvas no software para a confecção de uma representação física, a partir das expressões do Quadro 1, fazendo r=1 para todas elas.

É interessante que o mediador possa mostrar as geometrias dessas curvas (Fig. 11) com a ajuda de um *software* de álgebra e geometria (como o Geogebra), e como estas curvas podem se transformar em algo físico para formar um aparato experimental para o teste das propriedades da braquistócrona.

Figura 12. Representação gráfica da braquistócrona e de curvas relacionadas, descritas no Quadro 1, com r=1.



Fonte: arquivos do autor (2023).

Após os alunos visualizarem que o professor pode inserir a expressão da curva no software para visualizar a sua representação geométrica, o professor mediador poderá agora apresentar o *software* Geogebra (bem como suas ferramentas básicas) para que cada grupo possa, na sequência das atividades, manipular algebricamente os parâmetros das curvas e visualizar a formação do gráfico das respectivas funções na tela do programa.

Ao final do Encontro 2, o professor mediador deve indicar que cada grupo de alunos possa escolher uma curva das que foram trabalhadas até aqui para estudá-la em detalhes e apresentar o seu gráfico no geogebra para posterior aplicação na confecção de curvas com àquela dada geometria. Estas curvas poderão compor um aparato personalizado da braquistócrona e outras curvas. Nesse intervalo de tempo, o professor poderá orientar os alunos no entendimento dos parâmetros e esboço dos gráficos no Geogebra.

5.3.3 Construindo a curva braquistócrona e outras funções no *software* Geogebra

Inicialmente, se faz necessário o *software* Geogebra, no endereço www.geogebra.at, nos computadores do laboratório de informática da escola e(ou) nos computadores pessoais dos alunos. É preferível que a atividade de construção das curvas no programa possa ocorrer, na sua maior parte, em período de tempo extra classe, com orientação e acompanhamento contínuo do professor. De toda forma, essa atividade deve iniciar no laboratório da escola para que as primeiras orientações sejam dadas. Os passos para a construção da cicloide no Geogebra seguem abaixo:

Passo 01 - Criar dois controles deslizantes, em seguida clicar em qual lugar da tela do geogebra, o que logo irá aparecer uma caixa que daremos o nome para o primeiro controle deslizante de t ,com intervalo de zero para o mínimo e o máximo 40, com inclemento de 0,01. Já para o segundo o nome será r , com intervalo de mínimo zero e máximo 15, com inclemento de 0,1.

Passo 02 – Onde está escrito entrada digita -se f(x)=r*(x -sen(<x>)) e aperta o enter, sendo criado assim a função f(x).

Passo 03 – Onde está escrito entrada digita -se g(x) = r*(1-cos(<x>)) e aperta o enter, sendo criado assim a função g(x).

Passo 04 – Apagar esses objetos construídos, clicando com o botão direito em cima da curva, e quando aparecer uma janela com expressão que representar a função, é só clicar onde está escrito exibir objeto, esse passo deverá ser feito para as duas curvas.

Passo 05 – Vamos criar agora a curva ciclóide, escrevendo na entrada a palavra curva, o que logo vai aparecer algumas opções, destas escolher-se a primeira, onde tem Curva [<Expressão> , <Expressão> , < Variável> , < Valor

Inicial> , < Valor Final>], em seguida substituir as palavras que estão entre os símbolos da desigualdade da seguinte forma: Curva [f(s) , g(s) , s , 0 , t], apertando o enter, criamos a curva.

Passo 06 – Deslizar o ponto que se entrar no controle deslizando de nome t, nesse momento é possível visualizar a curva ciclóide.

Passo 07 – Construir um ponto P, onde está escrito entrada digita-se a (t).Clicar com botão direito em cima do ponto A que encontra-se no lado direito da tela e no clica em renomear digitando o P e dando Ok.

Passo 08 – Na entrada digita-se R=(r*t,0) aperta enter, criando assim o ponto no eixo X.

Passo 09 - Na entrada digita-se O= (r*t,r) aperta enter, criando assim o ponto O como centro da circunferência.

Passo 10 – Criar agora a circunferência, na parte superior da tela onde tem uns icones, clica no que está aparecendo a figura de um circulo, onde irá aparecer uma setinha pra baixo, deve-se clicar nela e escolher a primeira opção que diz: Circulo dados o Centro e um dos seus Pontos. Com o cursor do mouse clica no ponto O e arrasta até o ponto P.

Passo 11 – Criando o raio da circunferência, na parte superior da tela onde tem uns icones, clica no que está aparecendo a figura de segmento de reta, como irá aparecer algumas opções, deve-se escolher a opção que diz: segmento. Com o cursor do mouse clica no ponto O ligando até o ponto P. Portanto, criando a curva chamada ciclóide.

Passo 12 - Na parte superior da tela onde tem uns icones, clica no que está aparecendo a figura de uma setinha, em seguida clica no contole deslizante de nome t, para assim poder movimentar a circunferência e perceber a construção da ciclóide a partir de um ponto desta.

Passo 13 – Para diferenciar a cor da ciclóide e da circunferência, é só clicar em cima da curva com o botão direito, onde irá abrir uma janela, clica em propriedades, escolher a opção cor da sua preferência, também pode modificar a espessura da curva, clicando em estilo na mesma janela já aberta, em seguida modifica a posiçao da seta no local dito com espessura da linha. E para ficar ainda mais diferenciado, segue o mesmo procedimento acima para modificar a cor e espessura do raio.

Passo 14 – Para aumentar a circunferência e consequentemente a ciclóide é só alterar o tamanho raio utilizando o controle deslizante de nome r.

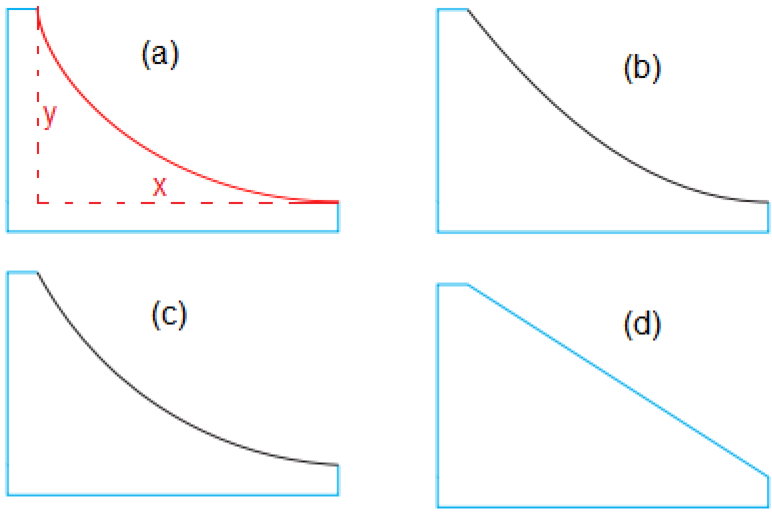
Passo 15 – Para criar uma animação, ou seja, ter a circunferência e construção da ciclóide movendo-se sozinhas é só clicar como botão direito em cima do controle deslizante de nome t e escolher a opção animar.

Já para a elaboração dos gráficos no Geogebra das funções projetadas algebriamente pelos grupos, o professor mediador pode elaborar um procedimento com ações semelhantes às destacadas nos Passos de 1 a 10, de acordo com as particularidades das funções escolhidas por cada grupo de alunos.

Tendo em vista que esta será a etapa que vai materializar as curvas esboçadas no Geogebra, tanto o mediador como os estudantes envolvidos neste processo irão acompanhar essa transformação do estudo algébrico e geométrico em um modelo matemático.

Ainda no *software* matemático, é sugerido que as curvas sejam plotadas individualmente e salvas no formato .eps (*Encapsulated PostScript*). Essa ação facilita a manipulação gráfica das curvas em *softwares* de edição de imagens (como o CorelDraw) para que se tenha tamanhos reais escolhidos para as peças que irão compor o aparato, obedecendo as mesmas proporções das figuras das curvas plotadas no *software* matemático. Essas proporções reais para as curvas devem obedecer à relação $2/\pi$ para a medida x/y, como destacado no exemplo na Fig. 12.

Figura 13**.** Layout das curvas (a) braquistócrona, (b) parábola, (c) circunferência e (d) reta que serão geradas nas chapas de madeira com corte a laser. Em detalhe, a relação $x/y=2/\pi$ que deve ser obedecida para que o tamanho real das peças se mantenha com as mesmas proporções das figuras das curvas geradas anteriormente no *software* matemático.



Fonte: Arquivos do autor (2023).

Sugere-se imprimir duas peças de cada curva, que ficarão separadas por uma distância necessária para que o objeto a ser testado como móvel possa seguir as trajetórias das curvas com o mínimo de atrito e maior segurança durante as observações. Suportes podem ser projetados de modo que as curvas fiquem fixas e separadas entre elas, em um único conjunto. Para tal, esses suportes podem ser fixados na base e na lateral das peças, amarrando-as de forma que fiquem unidas, sem articulação. Uma ilustração do aparato produzido com as curvas destacadas na Fig. 13 é mostrada no Apêndice A.

Como destacado anteriormente, as curvas desenvolvidas aqui são apenas alguns exemplos do que se pode ser explorado. Diversas outras curvas podem ser desenvolvidas com parâmetros relativos ao da braquistócrona, como foi discutido aqui. Inclusive, as mesmas curvas trabalhadas aqui podem ser usadas, com utilização ou não de outros valores de r, com vista ao levantamento e testes de novas hipóteses. Dessa forma, o professor mediador que desejar desenvolver um aparato experimental da braquistócrona e outras curvas pode personalizá-lo em tipos e quantidades de curvas que atendam a demanda das ações planejadas. Imagens ilustrativas de um aparato construído são mostradas no Apêndice A.

5.4 Encontro 3 – Utilização o modelo construído para comparação dos resultados

Neste ultimo encontro para desenvolvimento do trabalho espera-se que o produto educacional já esteja pronto e palpável a utilização pelos alunos. Para fazer sentido à realização desse trabalho o professor deverá retomar a pergunta feita no primeiro encontro, ou seja, qual será a curva de menor tempo. Para responder agora, os estudantes farão o teste soltando bolinhas esféricas de massa ao mesmo percorrendo as curvas construídas.

Logo os estudantes irão observar o resultado, principalmente pra aqueles que apontaram no primeiro encontro a reta como a curva de tempo menor.

Ao visualizar que a curva na verdade é a cicloide invertida, muitas perguntas irão surgir nessa dinâmica investigativa dos alunos.

Portanto, será um momento de grande importância para o ensino interdisciplinar, haja vista que o mediador vai pronto para iniciar a explanação do fenômeno agora com auxilio de outro componente curricular, mas precisamente a disciplina de física.

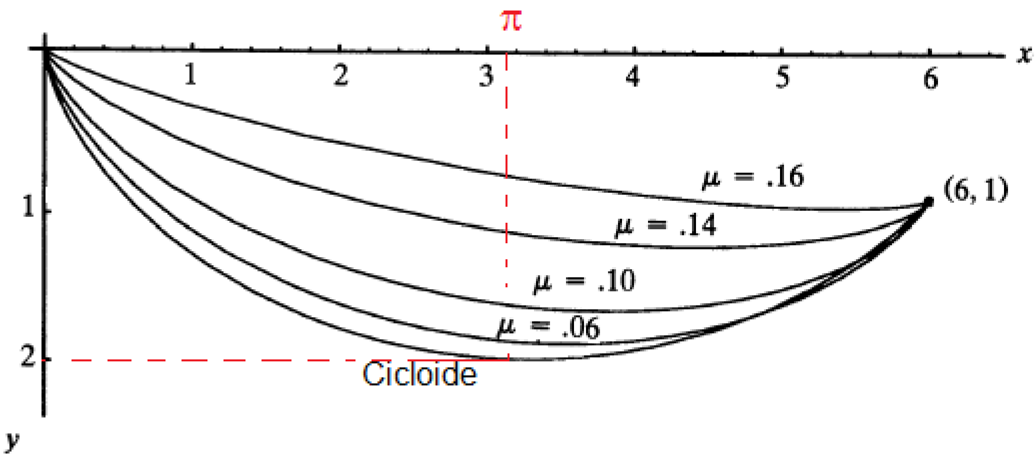
Os estudantes estarão aptos à comparação das curvas com olhar mais diversificado, pois outra área de saber foi apresentada no processo de conclusão deste produto educacional. Este trabalho deixará espaços para que outras abordagens futuras sejam feitas referentes ao resultado da encontrado para o problema da Braquistócrona.

Sobre outras abordagens, uma possibilidade interessante envolve a utilização da família de equações paramétricas da braquistócrona modificada (Eq. 32) (com menor tempo de percurso), considerando a inclusão do coeficiente de atrito cinético, μ (HAWS, 1995).

$$x(\theta) = x_c(\theta) + \mu\rho(1 - \cos\theta)$$

$$y(\theta) = y_c(\theta) + \mu\rho(\theta + \sin\theta)$$ (Eq. 32).

Figura 14. Ilustração de braquistócronas modificadas pelo coeficiente de atrito μ, em comparação com a cicloide sem atrito, com o raio gerador r=1. A linha tracejada marca o final da trajetória de menor tempo para o caso da braquistócrona.



Fonte: Haws (1995).

A discussão inicial com os alunos pode envolver a inobservância da conservação da energia mecânica na trajetória de um corpo sobre a curva, quando a força de atrito cinético (F_{at} = μ N, onde N é a força Normal) está envolvida no movimento (diferente do que se tem para a equação da braquistócrona original).

Nesse sentido, é possível discutir com os alunos o caso ideal da braquistócrona em comparação com as curvas modificadas com μ conhecidos, com vista à expectativa dos tempos de percurso de um móvel sobre estas curvas. Note na Fig. 14, que quanto menor o valor de μ, mais próximas as geometria das curvas modificadas estarão da braquistócrona original (μ=0). Outra observação feita por Haws (1995), e que pode ser trabalhada em sala de aula, é a de que, para as curvas modificadas, independente do valor do coeficiente de atrito (desde que obedeça a inequação $y < \mu x$) o tempo de percurso de um móvel será o mesmo sobre todas elas, com trajetórias findando no ponto P(6, 1).

Essa é uma observação/fenômeno não usual, uma vez que se entende que um corpo sobre uma curva com maior coeficiente de atrito poderia levar mais tempo para partir do repouso em A e chegar ao ponto P. Isso vale também para a braquistócrona sem atrito e a discussão do fenômeno está diretamente relacionada às geometrias dessas curvas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Os objetivos para este trabalho foram executados e apresentados seguindo a metodologia proposta. Aspectos históricos e matemáticos relativos ao Cálculo Variacional e à braquistócrona, pouco difundidos na área de Ensino de Matemática, foram tratados em detalhes para que o professor de Matemática possa se apoderar desses conceitos. Pois foi feito uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos através da etapa característica de investigação de soluções e isso de tal sorte que a partir da organização e seleção do material encontrado foi possível descrever e compreender o problema.

Expressões de outras curvas no plano, com parâmetros relativos aos da braquistócrona, pouco difundidas na literatura, foram demonstradas e apresentadas como opções para compor curvas para um aparato experimental sugerido para testes das propriedades da braquistócrona.

Uma sequência didática para o estudo interdisciplinar de funções foi proposta, com apresentação e revisão de conceitos importantes sobre o tema, atividades de manipulações algébricas dos parâmetros das curvas pelos alunos, com auxílio de *software* matemático. É mostrado que as curvas produzidas pelos alunos podem ser representadas fisicamente para projetos de aparato experimental da braquistócrona personalizado e de baixo custo, o que influencia diretamente na significação dos conceitos matemáticos estudados. Evidenciando dessa forma, uma alternativa de ensino no qual os discentes são os protagonistas na busca e construção do conhecimento.

De fato as expectativas deste trabalho foram atendidas na sua grande parte, ou seja, com a metodologia de pesquisa escolhida sendo seguida, também com os objetivos específicos sendo quase todos alcançados, com excessão da sequência didática interdisciplinar de funções sendo aplicada em sala de aula.

Tal aplicação não ocorreu devido ao início da pesquisa coincidir com o período da Pandemia, o que tornava inviável, pois a proposta exige um ensino presencial; houve também a questão de não possuir tempo hábil para ser submetido ao comitê de ética da Universidade, e por fim, alguns percalços particulares, mas especificamente sobre a questão de saúde, que impossibilitaram direcionar os momentos previstos para realização de tal atividade.

È importante salientar que o aparato experimental definido como produto educacional da pesquisa foi concretizado, atendendo a etapa final da síntese intregadora desta pesquisa, além disso, enfantizar que sequência didática interdisciplinar de funções também foi concluída e será um significativo instrumento para obtenção de êxito no processo de ensino-aprendizagem.

Com o trabalho desenvolvido nessa dissertação, as perspectivas futuras envolvem o depósito da patente de modelo de utilidade do protótipo de aparato experimental produzido, produção e melhoramento de outros aparatos com novos tipos de curvas e aplicação e avaliação da sequência didática em sala de aula na prática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. Tecnologia na escola: Criação de redes de conhecimentos. Gestão Escolar e Tecnologias, v. 1, n. 1, p. 153–164, 2008.

ANDRADE, M.A; FERREIRA, L.G. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. In: Revista Brasileira de Ensino de Física. Resende, RJ, v. 37, n. 2,p. 2309-1 – 2309-6, junho de 2015.

ARAÚJO, Roniel. A matemática do Espirógrafo. In: Cepe IV Congresso de Ensino, Pesquisa e Extensão da UEG, Anápolis – GO. Anais. 2017.

BARBOSA, Americo. O Problema da Braquistócrona e Algumas Noções de Cálculo Variacional. Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 05 de Julho de 2010.

BARBOSA, João. GEOMETRIA DIFERENCIAL E CÁLCULO DAS VARIAÇÕES. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. In: I Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, Rio Claro /SP, v. 14, n. 15, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA. In: VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL. Anais. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 1-10, 15 a 18 de julho de 2004.

BARROS, Fernando. Introdução ao estudo do Cálculo Variacional e da Curva Cicloide. Dissertação (Especialização em Matemática com ênfase em Cálculo Diferencial e Integral) – Curso de matemática – UFMG, Belo Horizonte/ MG, 2016.

BELARMINO, Luis et al. O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA. In: SEMIC - SEMINÁRIOS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2019, Cedro. Anais. INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ- IFCE, Cedro/CE, v.01, p. 59-63, 03 e 04 de dezembro de 2019.

BRASIL. Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco. Pernambuco, 2012.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BONJORNO, José et al. FÍSICA: Termologia, Óptica e Ondulatória. 2ª edição. São Paulo: FTD, 2013.

BORGES, Janaina de Nazaré. EXPERIMENTO DIDÁTICO COM A BRAQUISTÓCRONA E OUTRAS CURVAS. Monografia (Especialização em Ensino Médio) – Curso de Física, Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2020.

BUENO, Estafanía. Cálculo variaciones para el procesamiento de imagénes. Monografia (Graduação em Matemática) – Curso de Matemática – Universidad de Zaragoza, 2016.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. Revista de Modelagem na Educação Matemática, Vol. 1, Nº 1, p. 10-27, Ponta Grosas/PR, 2010.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar . ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

CALIXTO, Lucas; OLIVEIRA, Valeriano A. O Problema Inverso do Cálculo Variacional. In: CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2010, Ituiutaba. Anais. Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba/MG, 2019.

CASAGRANDE, Paulo. Princípios variacionais e equações de Euler – Lagrange. In: Salão UFRGS 2013: SIC - XXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS, 2013, Porto Alegre. Resumo. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/ RS, 2013.

COELHO, Rejeane. A HISTÓRIA DOS PROBLEMAS DA TAUTÓCRONA E DA BRAQUISTÓCRONA. Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática) - Área de concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/ SP, 2008.

Fassarella L. Lei de Snell generalizada. Rev Bras Ensino Fís [Internet]. 2007;29(Rev. Bras. Ensino Fís., 2007 29(2)).

FERREIRA, Ana C. O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática. Monografia (Graduação em Matemática) – Curso de Matemática – IFSP, São Paulo, 2013.

FERREIRA, José A. Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Curso de Matemática - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia/ Goiás, 2019.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 4ª. Ed. São Paulo: Atlas S/A, 2002.

GONÇALVES, Maurício Castro. HISTÓRIA DA MATEMATIZAÇÃO DA BRAQUISTÓCRONA E ABORDAGENS DIDÁTICAS. Monografia (Graduação em Matemática) – Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias/TO, 2020.

INPI. Diretriz de exame de patentes de modelo de utilidade. Disponível em: https://www.gov.br/inpi/pt-br/servicos/patentes/pagina_consultas-publicas/arquivos/diretriz_de_mu_versao_2_original.pdf . Acesso em: 23 nov. 2022.

JACOBINI, Otávio Roberto; WODEWOTZKI, Maria Lucia L .Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica. In : Boletim de Educação Matemática, vol. 19, núm. 25, 2006, p. 1-16, Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, Brasil.

LEITÃO, A. Cálculo Variacional e Controle Ótimo. Florianópolis/SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

LIMA, Thelma Cristiane; MIOTO, Regina Célia. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. 2007.

LOUREIRO, Gabriel. Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Curso de Matemática – UNICAMP, Campinas/São Paulo, 2004.

MARQUES, Danilo A.; OLIVEIRA, Rafael H.A.; Rosana S.M. JAFELICE, Rosana S.M. MODELAGEM MATEMÁTICA DAS PISTAS DE SKATE. In: FAMAT em Revista, Uberlândia, nº 10, p. 253-269, Abril de 2008.

MIRANDA, Leonardo. O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Curso de Matemática – Unb, Brasília, 2014.

PEDRO, H. A.; PRECIOSO, J. C. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 3, p. 17-34, dez. 2014.

QUINTO, Thiago Corrêa. ABORDAGEM ALGÉBRICO-DIFERENCIAL DA OTIMIZAÇÃO DINÂMICA DE PROCESSOS COM ÍNDICE FLUTUANTE. Dissertação (mestrado em Engenharia química). Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, 2010.

RAMOS, Eduardo. Controle Ótimo Aplicado em um Modelo de Câncer. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Curso de Matemática aplicada e Computacional- Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente, Presidente Prudente/SP, 2015.

REGINALDO. Física - Investigando o Universo. Disponível em<www.fisicarevelada.blogspt.com>. Acesso em: 06 de maio de 2022

RODRIGUES, O. M. P. R. et al. As tecnologias nas práticas pedagógicas inclusivas. 1. ed. São Paulo: Cultuta acadêmica Editora, 2012.

ROJAS, Rocío. Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo Variacional. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Curso de Matemática Aplicada - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Campus São José do Rio Preto/São Paulo, 2013.

SOUSA JÚNIOR, José Ribamar Alves de. O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona. 2010. 42 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática Universitária, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2010.

SOUSA, Lourimar. Parametrização de curvas planas, cicloide e os problemas da braquistócrona e da tautócrona: aplicações no ensino médio com a utilização do Geogebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Curso de Matemática – UFMT, Cuiabá/MT, 2008.

SOUZA, Cassio Henrique et al. USO DE VÍDEO-ANÁLISE PARA PROMOVER A EXPERIMENTAÇÃO DOS CONCEITOS DE FÍSICA COM ATIVIDADES AO AR LIVRE. In: REnCiMa, v. 10, n.3, p. 243-256, 2019.

TAGLIOLATTO, Ana Luísa Sader. BRAQUISTÓCRONA. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

THIESEN, Juares da Silva. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. Revista Brasileira de Educação, v.13, nº 39, p. 545-554, set./dez. 2008.

TOLABA, Angel. OTIMIZAÇÃO DE BIOPROCESSOS BASEADA EM MODELOS MATEMÁTICOS E CÁLCULO VARIACIONAL. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Biomaterias e Bioprocessos) – Curso de Engenharia em Biomaterias e Bioprocessos - UNESP, Araraquara/São Paulo, 2019.

VEIGA, Oscar ; SASSINE, André. A MAGIA DA CURVA CICLÓIDE - BRAQUISTÓCRONA E TAUTÓCRONA. São Paulo: Scortecci, 2009.

VIEIRA, Clóvis Güerim; ROSA, Ramon Junio Gonçalves; FREITAS, Wellington Damaceno de. O Problema da Braquistócrona: uma proposta para o ensino. AbakÓs, Belo Horizonte, v. 4, n. 2, p.94-104, 04 maio 2016.

XIMENES, Ana. CÁLCULO VARIACIONAL: ASPECTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Curso de Matemática - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Campus de Rio Claro/São Paulo, 2011.

ZANI, Sérgio Luís. De volta à Braquistócrona. Disponível em <https://sites.icmc.usp.br/szani/bra/bra.html>. Acesso em: 10 de janeiro de 2023.

The Bountiful Bernoullis of Basel. GALILEO UNBOUND, 2020. <https://galileo-unbound.blog/tag/johann-bernoulli/ >. Acesso em: 10 de janeiro de 2023.

SANTOS, José Carlos. Demontração de Huygens (2ª parte).W3C; XHTML 1.0, 2012.

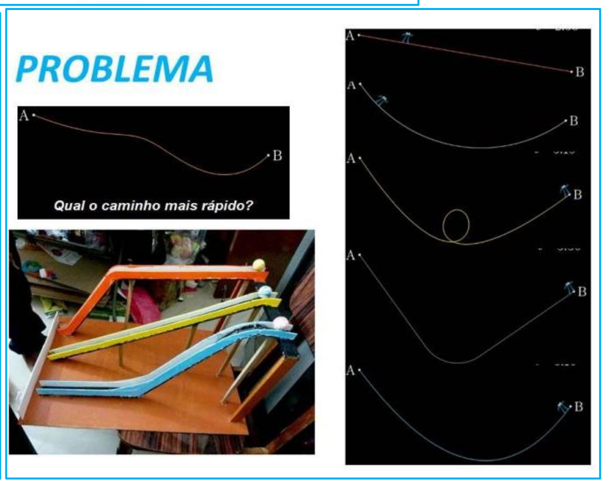
Disponível em <https:// https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Tautocrona/Huygens2.html >. Acesso em: 10 de janeiro de 2023.

APÊNDICE A - APARATO EXPERIMENTAL CONFECCIONADO

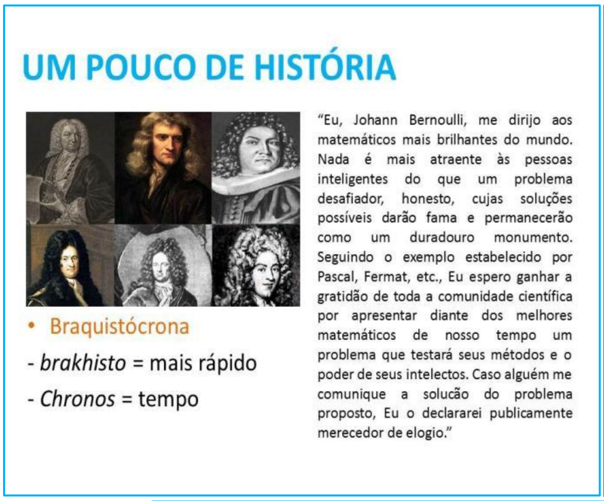
No detalhe, as setas mostram os suportes que podem ser usados para fixar as peças.

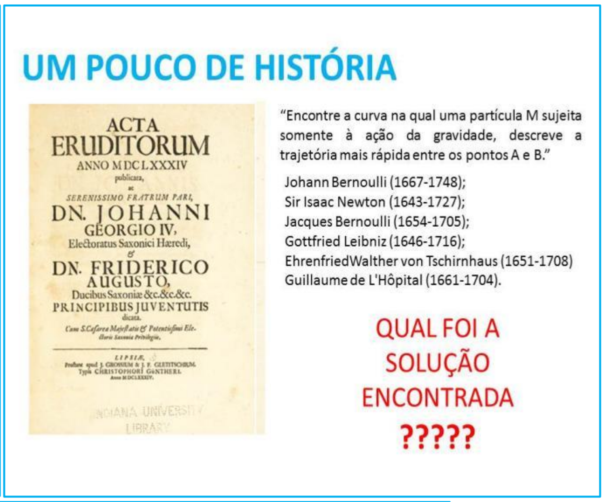
Fonte: Arquivos dos autores (2023).

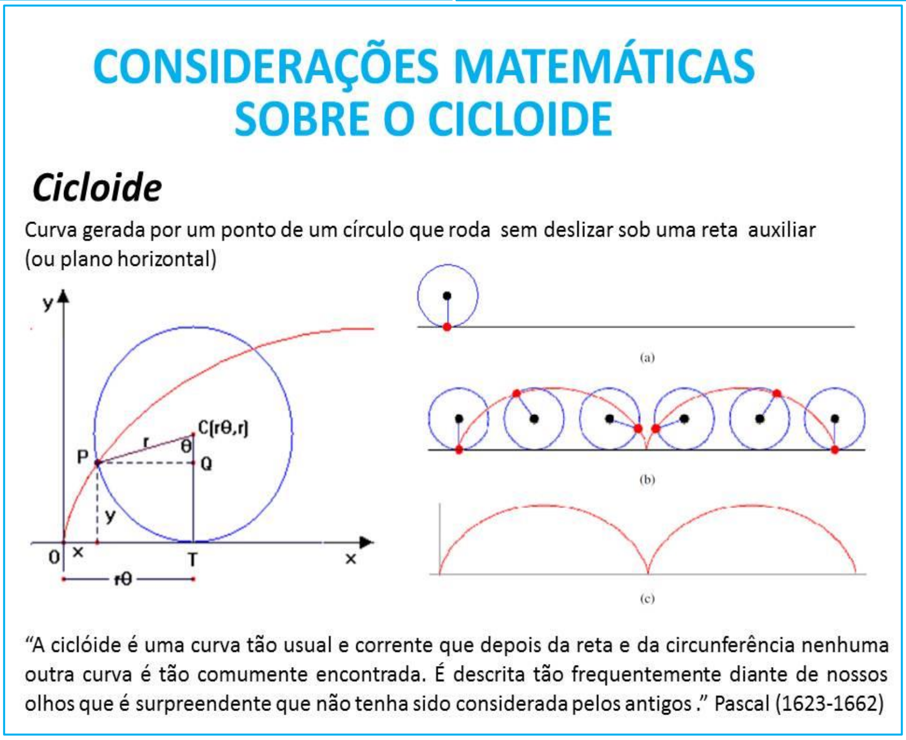
APÊNDICE B – SUGESTÃO DE *SLIDES* PARA A APRESENTAÇÃO PLANEJADA NO ENCONTRO 1 DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA



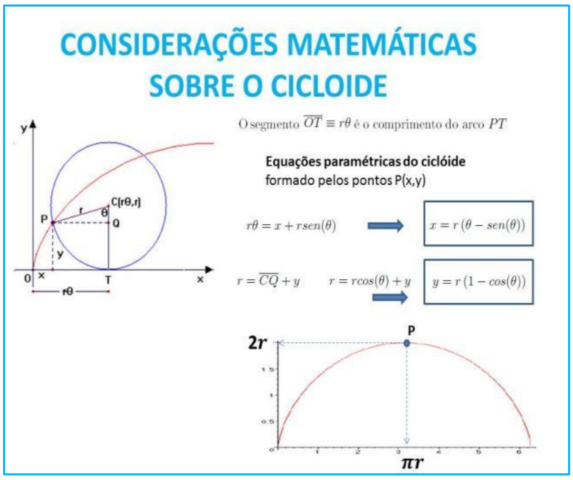
APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO

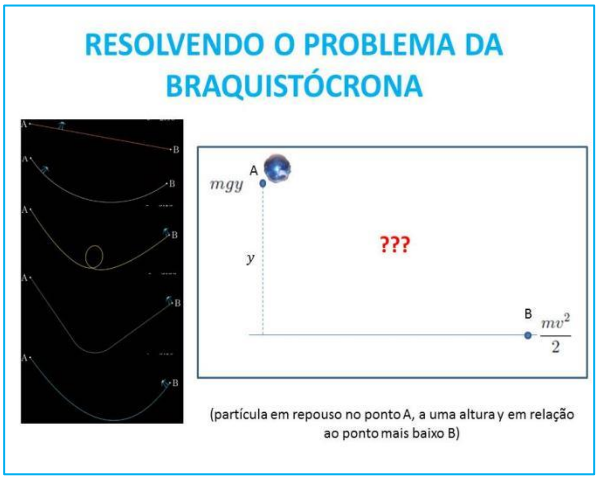


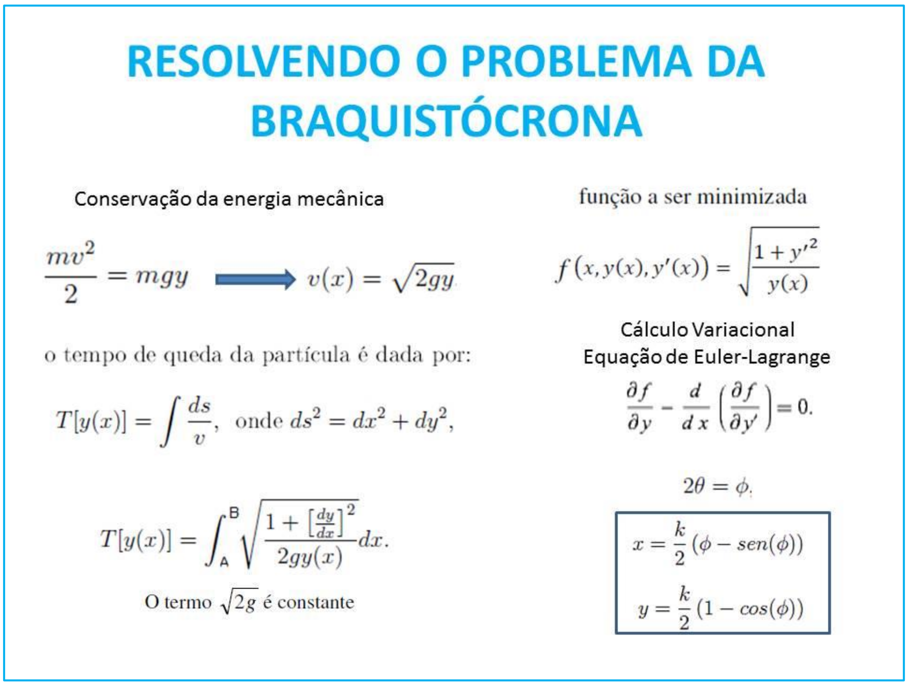




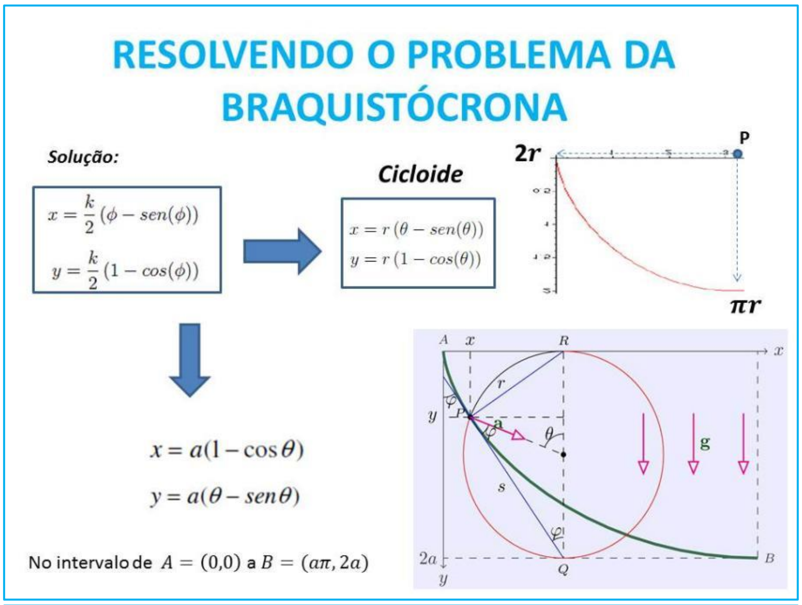
APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO

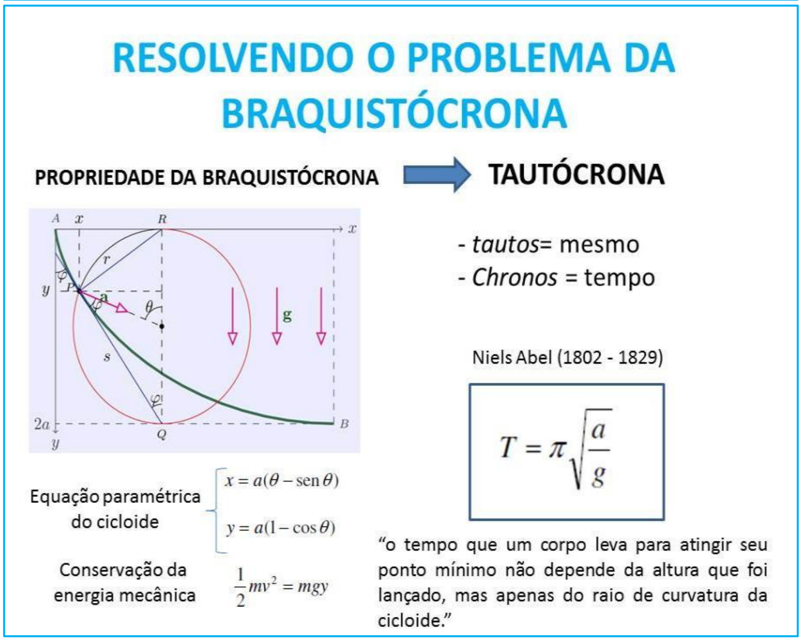






APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO



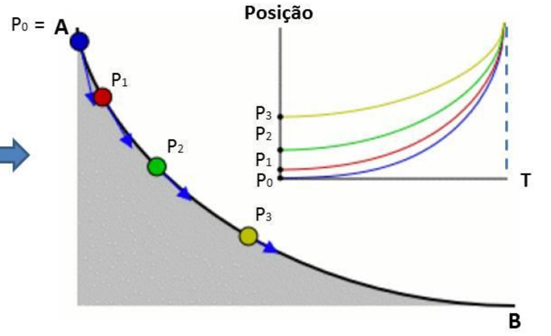


APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO

RESOLVENDO O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

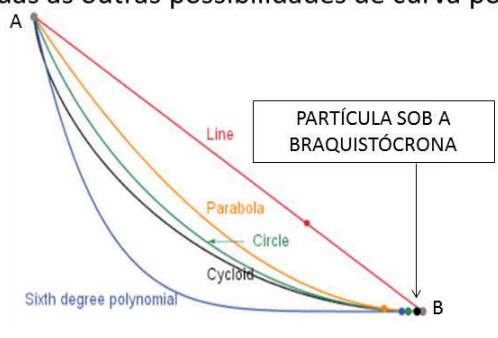
PROPRIEDADE DA BRAQUISTÓCRONA ⇒ **TAUTÓCRONA**

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$



Recapitulando conceitos...

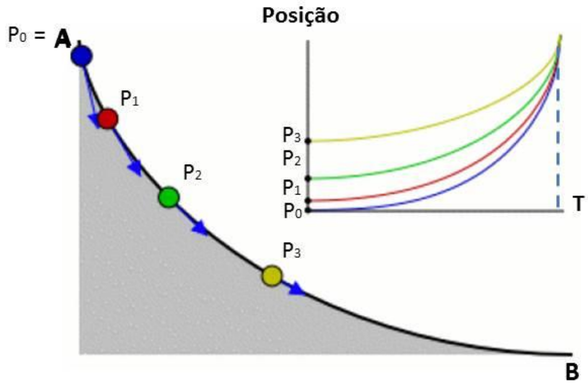
- Uma braquistócrona é uma curva cicloide invertida na qual um corpo (móvel, partícula), partindo do repouso no seu ponto mais alto (A), se desloca sob essa curva até o ponto mais baixo (B), sob ação da gravidade, com o menor tempo entre todas as outras possibilidades de curva possíveis.



APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO

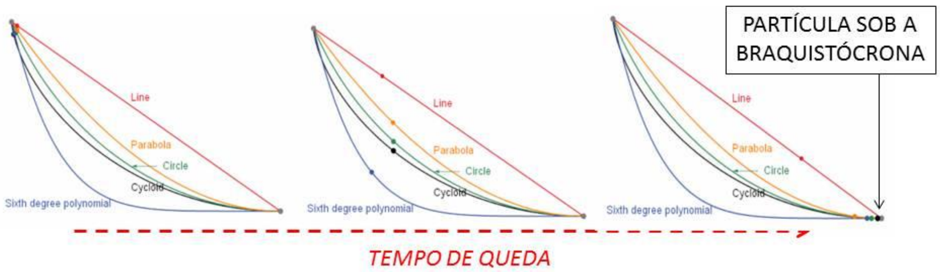
Recapitulando conceitos...

- Uma braquistócrona é uma tautócrona. Ou seja, independente da posição na curva que o corpo seja lançado, partindo do repouso, sob ação da gravidade, seguindo a trajetória até o ponto mais baixo (B), este corpo levará o mesmo de percurso.



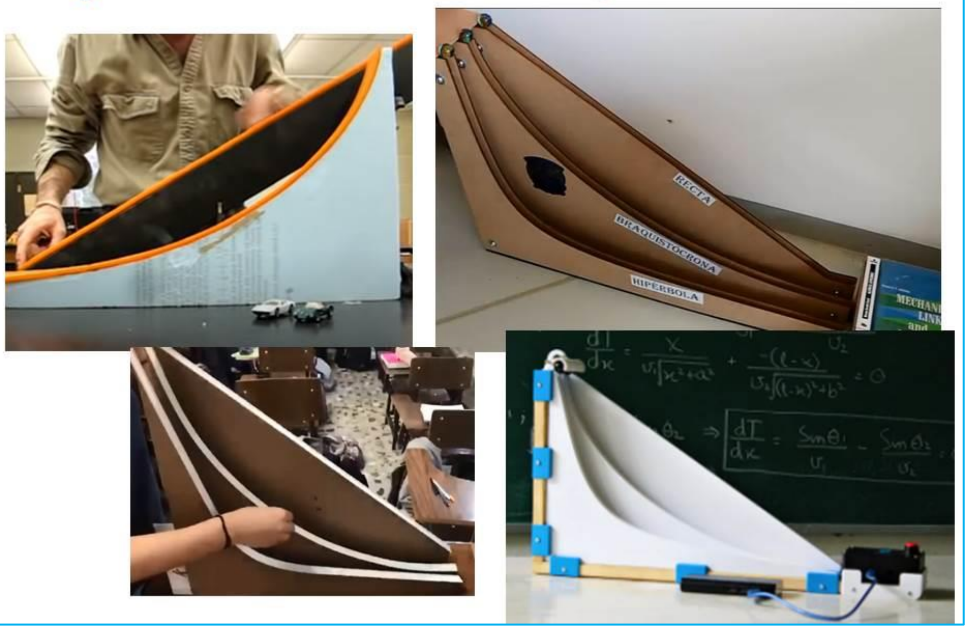
FAÇA SUA PRÓPRIA BRAQUISTÓCRONA!

CURVA	EQUAÇÃO
LINHA RETA	$y = mx + b$
HIPÉRBOLE	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
CICLOIDE	$x = r(\theta + \sin\theta);\ y = r(1 - \cos\theta)$



APÊNDICE B – CONTINUAÇÃO

FAÇA SUA PRÓPRIA BRAQUISTÓCRONA!



REFERÊNCIAS

https://galileo-unbound.blog/tag/johann-bernoulli/

https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Tautocrona/Huygens2.html

https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU

https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172015000200010

https://www.myphysicslab.com/roller/brachistochrone-en.html

https://www.myminifactory.com/object/3d-print-27264