UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CHARLLES DE MORAIS BORGES

GEOMETRIA DE MOULTON x GEOMETRIA EUCLIDIANA: TRILHAS DE APROFUNDAMENTO PARA O ENSINO MÉDIO

GOIÂNIA
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Charlles de Morais Borges

3. Título do trabalho

Geometria de Moulton x Geometria Euclidiana: Trilhas de Aprofundamento para o Ensino Médio

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/03/2023, às 21:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Charlles De Morais Borges**, **Discente**, em 07/03/2023, às 13:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3569952** e o código CRC **07C86180**.

Referência: Processo nº 23070.006519/2023-78 SEI nº 3569952

Criado por sosteneg, versão 3 por ole em 06/03/2023 21:02:25.

CHARLLES DE MORAIS BORGES

GEOMETRIA DE MOULTON x GEOMETRIA EUCLIDIANA: TRILHAS DE APROFUNDAMENTO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

GOIÂNIA
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

BORGES, CHARLLES DE MORAIS
Geometria de Moulton x Geometria Euclidiana: Trilhas de Aprofundamento para o Ensino Médio [manuscrito] / CHARLLES DE MORAIS BORGES. - 2023.
0 129 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2023.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Plano de Moulton. 2. Circunferência de Moulton. 3. Elipse de Moulton. 4. Parábola de Moulton. 5. Hipérbole de Moulton. I. Smith, Ole Peter, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **01** da sessão de Defesa de Dissertação de **Charlles de Morais Borges**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos **vinte e quatro dia do mês de fevereiro de dois e vinte três**, a partir das 14h, na sala de aula do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Geometria de Moulton x Geometria Euclidiana: Trilhas de Aprofundamento para o Ensino Médio"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Ole Peter Smith IME-UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Geci José Pereira da Silva IME-UFG e o** membro titular externo; **Flávio Raimundo de Souza IFG**. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Ole Peter Smith**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **vinte e quatro dia do mês de fevereiro de dois e vinte três**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO RAIMUNDO DE SOUZA**, **Usuário Externo**, em 25/02/2023, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Geci José Pereira Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 27/02/2023, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith**, **Professor do Magistério Superior**, em 28/02/2023, às 07:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3508087** e o código CRC **6B0833CF**.

Referência: Processo nº 23070.006519/2023-78 SEI nº 3508087

Criado por sosteneg, versão 7 por sosteneg em 24/02/2023 16:30:24.

CHARLLES DE MORAIS BORGES

GEOMETRIA DE MOULTON x GEOMETRIA EUCLIDIANA: TRILHAS DE APROFUNDAMENTO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Goiás - PROFMAT/UFG, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática do Ensino Básico, aprovada no dia 24 de fevereiro de 2023, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Geci José Pereira da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Membro Interno da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Goiás - IFG
Membro Externo da Banca

RESUMO

Com advento da homologação da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio - BNCC, que traz o aprendizado baseado em Habilidades e Competências, e fez com que o conteúdo deixasse de ser o protagonista do processo ensino aprendizagem, é o que o presente trabalho vem abordar. Para isso, apresentamos um pouco da trajetória deste processo de homologação da BNCC, seus principais caminhos e resoluções. Apresentamos como foi estruturada esta Base, enunciando as Habilidades e Competências esperadas, bem como propondo um produto educacional na forma de uma Trilha de Aprofundamento em Matemática, para a formação do estudante.

A trilha de aprofundamento aqui proposta, tem por finalidade apresentar o modelo de geometria proposta por Moulton, como forma de provocar uma comparação com a geometria proposta por Euclides, evidenciando a existência de outras geometrias, as chamadas geometrias não euclidianas que, na maioria das vezes, não chegam a ser apresentadas aos estudantes até o final do Ensino Médio. Assim, através de habilidades já adquiridas no Ensino Fundamental com relação ao estudo de Geometria Plana, levar o estudante a revisar conceitos já conhecidos e propor-lhes desafios, para que por meio de investigação científica, o mesmo desenvolva ainda mais suas habilidades e competências que os levem a propor soluções e conjecturar novas ideias sobre o assunto proposto. Começamos com uma apresentação de conceitos primitivos e postulados do modelo euclidiano, e em seguida, apresentamos conceitos primitivos do modelo proposto por Moulton. Mostramos como foi definida sua estrutura para o plano, o comportamento das retas e suas equações, a forma de como se calcular as distâncias entre dois pontos e ainda, como determinar a medida de ângulos entre retas. Para isso, fazemos uso da Geometria Cartesiana, estruturada por René Descartes, como um elo de ligação, na comparação entre estes dois modelos.

Os conceitos as serem trabalhados já são muito conhecidos na Geometria Euclidiana e, a partir deste outro modelo, vamos mostrar algumas das transformações e modificações sofridas por essas figuras clássicas da Geometria Plana, a saber: retas paralelas e perpendiculares, o triângulo e seus elementos notáveis, a circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Na intenção de se fazer uma ampla exploração inicial sobre as transformações e modificações sofridas por essas figuras, vamos também apresentar o passo a passo de um processo construtivo de algumas cônicas, com uso de software de geometria dinâmica, no caso, o Geogebra, afim de desenvolver também habilidades computacionais e de programação, que são esperadas na nova Base Nacional.

Palavras-chaves: Plano de Moulton; Circunferência de Moulton; Elipse de Moulton; Parábola de Moulton; Hipérbole de Moulton.

ABSTRACT

With the advent of the approval of the National Common Curriculum Base for Secondary Education - BNCC, which brings learning based on Skills and Competences, and made the content no longer the protagonist of the teaching-learning process, this is what the present work addresses . For this, we present a little of the trajectory of this BNCC homologation process, its main paths and resolutions. We present how this Base was structured, enunciating the expected Skills and Competences, as well as proposing an educational product in the form of a Deepening Track in Mathematics, for the student's formation.

The purpose of the deepening trail proposed here is to present the model of geometry proposed by Moulton, as a way of provoking a comparison with the geometry proposed by Euclid, evidencing the existence of other geometries, the so-called non-Euclidean geometries that, in most cases , are not introduced to students until the end of high school. Thus, through skills already acquired in Elementary School in relation to the study of Plane Geometry, lead the student to review already known concepts and propose challenges, so that through scientific research, he can further develop his skills and competences that lead them to propose solutions and conjecture new ideas about the proposed subject. We begin with a presentation of primitive concepts and postulates of the Euclidean model, and then we present primitive concepts of the model proposed by Moulton. We show how its structure was defined for the plane, the behavior of straight lines and their equations, how to calculate the distances between two points and also how to determine the measure of angles between straight lines. For this, we make use of Cartesian Geometry, structured by René Descartes, as a link in the comparison between these two models.

The concepts to be worked on are already well known in Euclidean Geometry and, from this other model, we are going to show some of the transformations and modifications undergone by these classic figures of Plane Geometry, namely: parallel and perpendicular lines, the triangle and its notable elements , circle, ellipse, parabola and hyperbola.

With the intention of making a broad initial exploration of the transformations and modifications undergone by these figures, we will also present the step-by-step of a constructive process of some conics, using dynamic geometry software, in this case, Geogebra, in order to also develop computational and programming skills, which are expected in the new National Base.

Keywords: Moulton plan; Moulton circumference; Moulton ellipse; Moulton Parable; Moulton hyperbole.

Dedicatória

Pensar especificamente neste trabalho, é impossível não ver a mão auxiliadora de minha esposa Patrícia. Além de incentivadora, transformou este trabalho também em sua missão, me proporcionando condições adequadas para realizá-lo, enquanto que ela mesma se desdobrava em várias outras atividades diárias. Dedico a você esta obra, como fruto de esforços em conjunto. Muito obrigado.

Agradecimento

A Deus, pelo dom da vida e sua misericórdia para comigo.
Aos meus pais, que foram meus primeiros incentivadores a lutar sempre.
Aos meus filhos Caio e Hugo, que não me deixam esquecer de lutar sempre.
À minha esposa Patrícia, que tem tornado muito mais fácil a minha luta.

“Mestre não é quem sempre ensina,
mas quem de repente aprende.”

João Guimarães Rosa

CHARLLES DE MORAIS BORGES

Acadêmico do Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - ProfMat.

Possui Especialização em "Metodologia do Ensino de Matemática", pelo IPEMIG - 2023 e "Fontes Alternativas de Energia" pela Ufla - 2002.

É graduado em Licenciatura Plena e Bacharelado em Matemática pela Universidade Católica de Goiás (2001) e também graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Goiás (1993).

Possui Formação Técnica em Agrimensura pela antiga Escola Técnica Federal de Goiás, hoje, Instituto Federal de Goiás - IFG (1989).

Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada, Matemática Financeira e Estatística, como Professor e Profissional de Mercado.

Experiência também em atuação como Responsável Técnico na Elaboração de Projetos, Planejamento, Execução e Controle de Obras Habitacionais e Comerciais.

Sumário

Sumário **9**

Lista de Figuras **11**

Lista de Tabelas **12**

1 INTRODUÇÃO **13**

2 BNCC - BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR **16**
2.1 O Passo a Passo da BNCC, Segundo a Própria BNCC 16
2.2 Competências Gerais - BNCC 21
2.3 Competências Específicas – BNCC 22
2.3.1 Competências Específicas Matemática - Ensino Fundamental 23
2.3.2 Competências Específicas de Matemática - Ensino Médio 24
2.4 Habilidades 25
2.4.1 Habilidades Ensino Fundamental Goiano – BNCC - DCGO 25
2.4.2 Habilidades no Novo Ensino Médio Goiano 39
2.5 Enem - Exame Nacional do Ensino Médio 62
2.5.1 Apresentação 62
2.5.2 Exemplos de Habilidades Esperadas (Objetivos de Aprendizagens) por Meio de Objetos do Conhecimento não Convencionais no Ensino Médio. 62
2.6 Propostas de Questões: Enem/Vestibulares 63
2.6.1 Questão 01 63
2.6.2 Questão 02 64
2.6.3 Questão 03 64

3 APRESENTAÇÃO DE MODELOS DE GEOMETRIAS. **65**
3.1 Geometria Euclidiana 66
3.1.1 Definições - Conceitos Primitivos 66
3.1.2 Postulados 68
3.1.3 Distância 70
3.1.4 Ângulo 72
3.2 Geometria Cartesiana 74
3.2.1 Definições - Conceitos Primitivos 75
3.2.2 Distância 76
3.2.3 Ângulo 76
3.3 Geometria de Moulton 77
3.3.1 Definições - Conceitos Primitivos 78
3.3.2 Distância 79
3.3.3 Ângulo 80

4 PRODUTO EDUCACIONAL: Trilhas de Aprofundamento **83**
4.1 Trilha de Aprofundamento 01: Estudo de Reta 89

4.2 Trilha de Aprofundamento 02: Distância entre Dois Pontos 91
4.3 Trilha de Aprofundamento 03: Ângulos entre Segmentos 92
4.4 Trilha de Aprofundamento 04: Ponto Médio de um Segmento 94
4.5 Trilha de Aprofundamento 05: Triângulos - Soma dos Ângulos Internos 95
4.6 Trilha de Aprofundamento 06: Triângulos - Ângulo Externo 97
4.7 Trilha de Aprofundamento 07: Desigualdade Triangular 98
4.8 Trilha de Aprofundamento 08: Paralelismo e Perpendicularismo 100
4.9 Trilha de Aprofundamento 09: Triângulo - Medianas 102
4.10 Trilha de Aprofundamento 10: Triângulo - Bissetrizes 103
4.11 Trilha de Aprofundamento 11: Triângulo - Mediatrizes 104
4.12 Trilha de Aprofundamento 12: Triângulo - Altura 105
4.13 Trilha de Aprofundamento 13: Circunferência 106
4.14 Trilha de Aprofundamento 14: Elipse 107
4.15 Trilha de Aprofundamento 15: Parábola 108
4.15.1 Parábola com a Concavidade Voltada para Baixo 109
4.15.2 Parábola com a Concavidade Voltada para Cima 111
4.16 Trilha de Aprofundamento 16: Hipérbole 119

5 CONCLUSÃO **126**

6 REFERÊNCIA **127**

Lista de Figuras

1 Modelo de Moulton: Retas . . . 79
2 Distância de Moulton . . . 80
3 Modelo de Moulton: Medida de Ângulo com o Vértice B $\notin \mathcal{L}_0$ . . . 81
4 Modelo de Moulton: Medida de Ângulo com o Vértice B $\in \mathcal{L}_0$ . . . 82
5 Reta Euclidiana $\times$ Reta de Moulton . . . 89
6 Medida de Segmento Euclidiano $\times$ Medida de Segmento de Moulton . . . 91
7 Medidas de Ângulos: Euclides $\times$ Moulton . . . 92
8 Ponto Médio: Euclides $\times$ Moulton . . . 94
9 Soma dos Ângulos Internos: Euclides $\times$ Moulton . . . 95
10 Soma dos Ângulos Internos: Euclides $\times$ Moulton . . . 97
11 Desigualdade Triangular: Euclides $\times$ Moulton . . . 98
12 Paralelismo e Perpendicularismo: Euclides $\times$ Moulton . . . 100
13 Retas Paralelas Cortadas (ou não) por Retas Perpendiculares - Moulton . . . 101
14 Triângulo: Mediana - Moulton . . . 102
15 Triângulo: Bissetriz - Moulton . . . 103
16 Triângulo: Mediatriz - Moulton . . . 104
17 Triângulo: Altura - Moulton . . . 105
18 Circunferência (Euclidiana): Raio 5 de Centro (-1;-1,5) . . . 106
19 Circunferência (Moulton): Raio 5 de Centro (-1;-1,5) . . . 106
20 Elipse: . . . 107
21 Parábola - Euclidiana . . . 108
22 Passo a Passo da Construção de uma Parábola de Moulton - Concavidade para Baixo 109
23 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima . . . 111
24 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 01 . . . 112
25 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 02 . . . 113
26 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 03 . . . 114
27 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 04 . . . 115
28 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 05 . . . 116
29 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 06 . . . 117
30 Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 07 . . . 118
31 Hipérbole: Centro em $(-2, 0)$, Eixo Real=6, Eixo Imaginário=8 . . . 119
32 Hipérbole: Passo 01 . . . 120
33 Hipérbole: Passo 02 . . . 121
34 Hipérbole: Passo 03 . . . 122
35 Hipérbole: Passo 04 . . . 122
36 Hipérbole: Passo 05 . . . 123
37 Hipérbole: Passo 06 . . . 123
38 Hipérbole: Passo 07 . . . 124
39 Hipérbole: Passo 08 . . . 124

Lista de Tabelas

1 BNCC - Linha do Tempo 19
2 BNCC - Competências Gerais 21
3 BNCC - Competências Específicas Matemática - Ensino Fundamental 23
4 BNCC - Competências Específicas Matemática - Ensino Médio 24
5 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 1^o Ano 27
6 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 2^o Ano 28
7 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 3^o Ano 29
8 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 4^o Ano 30
9 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 5^o Ano 31
10 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 6^o Ano 32
11 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 7^o Ano 34
12 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 8^o Ano 36
13 Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 9^o Ano 37
14 Habilidades E.M.: Competência Específica 1 41
15 Habilidades E.M.: Competência Específica 2 42
16 Habilidades E.M.: Competência Específica 3 43
17 Habilidades E.M.: Competência Específica 4 44
18 Habilidades E.M.: Competência Específica 5 45
19 DC-GOEM: Formação Geral Básica - 1^a Série EM 46
20 DC-GOEM: Formação Geral Básica - 2^a Série EM 54
21 DC-GOEM: Formação Geral Básica - 3^a Série EM 58
22 Geometria Euclidiana: Definições - Conceitos Primitivos 66
23 Geometria Euclidiana: Postulados 68
24 Geometria Cartesiana: Definições - Conceitos Primitivos 75
25 Geometria de Moulton: Definições - Conceitos Primitivos 78
26 Revisar: Habilidades Refentes aos EF - Anos Iniciais 84
27 Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 6^oAno 85
28 Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 7^oAno 86
29 Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 8^oAno 87
30 Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 9^oAno 87
31 Desenvolver: Habilidades Proposta para o Ensino Médio 88

1 INTRODUÇÃO

Considerando a relação de intimidade vivida por mim e a Geometria ainda na infância, podendo aqui ser tanto a Geometria Plana, a Geometria Analítica ou ainda a Geometria Espacial, todas baseadas nos axiomas de Euclides, através de muitos dos brinquedos que eu gostava de brincar e passar longos momentos de dedicação a eles, tive a oportunidade de ir me familiarizando a seus formatos e conceitos. Destaco aqui, de forma especial os sólidos espaciais como bolas, caixas e pedaços de madeira. Esses, por muitas vezes utilizados por mim, como carrinhos e tratores no processo construtivo de minhas "cidades inteligentes", construídas em montes de areia existentes em parquinhos ou até mesmo em calçadas nas ruas por onde brincava. Já ali, havia uma preocupação enorme em construir as ruas de forma paralelas e perpendiculares, sem saber muito o que seriam isso, apenas de forma intuitiva, para que as áreas contidas entre elas, os lotes, pudessem ter a mesma forma e tamanho, o que me chamava muito a atenção e merecia minha dedicação.

Com relação a Analítica, como era bom jogar Batalha Naval. Jogo esse em que se vencia o oponente pela concentração e conhecimento das formas utilizadas na representação de navios, porta aviões, submarino, couraçado, entre outros. Para isso, era preciso ir informando através de um conjunto de pares ordenados, com a utilização de letras e números, fazendo referência a coluna e linha onde se imaginava estar a esquadra inimiga. Hoje, tal par ordenado, também é muito usado nas planilhas eletrônicas para identificação das células, como exemplo, B12, C9.

Quando o assunto era a Geometria Plana, exigia-se mais de uma nobreza nas ações, pois agora era preciso fazer o uso de instrumentos próprios para essa diversão, como: régua, compasso, esquadros e transferidor. Digo diversão, pois ainda na Educação Infantil, conhecida na época como Ensino Primário, tais usos eram para mim muito divertidos. Com eles, eram possíveis desenhar no papel, as minhas tais "cidades inteligentes" construídas na areia.

Também gostava muito do jogo Futebol de Botão, onde por anos pude colecionar vários troféus na disputa dos campeonatos organizados na rua onde morava. As disputas eram acirradíssimas, o que promovia uma alternância entre os primeiros colocados. Além de disputar tais campeonatos, também gostava muito era de construir meus campos de futebol de botão para tais disputas. Foram empregados muito tempo ali nestas confecções, em que eram precisos agora conhecer o processo de construção de retas perpendiculares e paralelas para a obtenção do melhor retângulo construído numa chapa de compensado, extrapolando os limites de uma folha de papel A4 ou de caderno, muitas vezes usadas em sala de aula. E as circunferências? Elas exigiam muito capricho! Estamos falando do círculo central, da "meia lua" na entrada da grande área (arcos de circunferência) e dos arcos nos cantos para cobrança dos escanteios. Agora, nessa confecção do campo, não tínhamos mais a construção de uma simples linha, elas tinham espessura, era preciso obedecer a medidas, fazer uso de escala. Era preciso pesquisar sobre medidas oficiais para uma construção perfeita. Fazia parte do espetáculo, jogar em um campo que era réplica de um estádio conhecido, como o Serra Dourada, Maracanã e Mineirão.

O tempo foi passando e agora, no final do Ginásio, atual Ensino Fundamental, chegou a hora de definir onde estudar o 2º Grau como era chamado, e hoje, Ensino Médio. Não foi difícil definir a opção de fazer um curso técnico em Agrimensura na antiga Escola Técnica Federal de Goiás, e hoje, Instituto Federal de Goiás, onde por quatro anos, muito foi falado e realizado sobre estudos e medição de terras levando ao aprofundamento de conceitos da Geometria plana Euclidiana. Al-

gumas poucas vezes falou-se sobre a diferença entre o curso técnico e o superior em Agrimensura. Ainda, que tal diferença passava-se por uma tal de linha geodésica e só isso foi falado.

Como opção para o ensino superior, a escolha por Engenharia Civil foi automática, e lá fui para a Universidade Federal de Goiás, na realização do grande sonho, isso em 1989. Com o fato de cursar este curso superior, ou seja, de estar matriculado em engenharia, me foi permitido lecionar Matemática para crianças, na época, da 5ª série ginasial. Eu havia acabado de completar meus 17 anos. Foi uma experiência fantástica e prazerosa. Já no ano seguinte, estava eu a ministrar aulas de Matemática e Geometria para a 8ª série ginasial, e a partir daí, nunca mais parei de lecionar. Tinha descoberto ali, o que nunca imaginava, minha vocação: Professor de Matemática.

O tempo foi passando e em 20 de dezembro de 1996 foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação 9.394/96, fruto da Constituição Federal Brasileira de 1988, que apresentou vários avanços na Educação, definindo o que agora chamamos de Ensino Fundamental e Ensino Médio, determinou prazo para que professores que não possuíam a Licenciatura, pudessem buscar tal formação e assim atender aos requisitos mínimos exigidos na execução da atividade docente. Tal lei foi evoluindo em outras que levaram ao agendamento de que, a partir de 2021, todas escolas já deveriam estar adotando o Novo Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC como currículo obrigatório aos que ingressarem no Ensino Médio.

Com essa nova demanda, me vi na obrigatoriedade de voltar para a universidade em busca de formação na área da Licenciatura em Matemática, com a complementação pedagógica do curso. Entrei na Pontifícia Universidade Católica de Goiás como portador de diploma, no caso, o de Engenharia Civil, e fui cursar as disciplinas faltantes para tal complementação para o curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Isso aconteceu no período de 1999 a 2001.

Com a experiência de 10 anos na atividade docente, neste momento já reduzindo em muito a atuação profissional como engenheiro para a dedicação cada vez maior como professor, tive a oportunidade de muito aprender de didática com a querida professora Maria José, me ajudando muito nessa transição de engenheiro para professor de Matemática. De fato, a vocação era para a docência.

Toda essa história contada foi para apresentar o que veio a ser uma grande e impactante "descoberta" para mim. De volta à sala de aula como aluno, em uma das aulas de Fundamentos da Matemática, numa apresentação de uma das colegas de turma, onde o assunto era Geometria não Euclidiana, ops! Como assim? Geometria não euclidiana? Essa foi a minha reação. Eu, extremamente curtido numa geometria por toda uma vida até então, ser apresentado à Não Euclidiana! Não era possível! Não conseguia entender e acreditar naquilo que estava ouvindo e vendo. Ouvir que "que duas retas perpendiculares a uma terceira reta, eram concorrentes", não podia ser. A partir daquele instante, tenho certeza que não consegui nem mais ouvir, de tanta confusão mental, a explanação de minha colega de turma. Como ficavam as minhas ruas construídas na areia? E os meus retangulares campos de futebol? Como se tratava de uma apresentação temática, a exposição acabou e nunca mais foi retomado em sala aquele assunto, o que me levou a uma pesquisa frágil sobre o assunto. Na época, a informação não era tão disponível como agora. Tratava-se da Geometria Esférica (caso mais simples da Geometria Elíptica ou Geometria de Riemann, como é conhecida). Uma geometria construída devido a mudanças em axiomas apresentados por Euclides.

Recentemente, muitos anos depois desse episódio, novamente de volta à sala de aula como

aluno, agora no curso de Mestrado, tive o privilégio de conhecer o Professor Dr. Ole, que durante as aulas, lançava desafios de construções geométricas completamente desconhecidas por mim. Num determinado dia, me foi apresentado o software Geogebra como ferramenta para o estudo de geometria. Fiquei encantado com o software e passei a estudá-lo. Com isso, comecei a responder aos desafios do Professor Dr. Ole, que de forma incansável, lançava outro desafio. Foi ficando interessante e passamos a discutir sobre novas construções. Eu não podia perder aquela conversa. Até que um dia, ele me perguntou se eu conhecia o Modelo de Moulton e me chamou para esse trabalho, o que foi prontamente aceito por mim.

Dessa forma, aproveitando o momento de implantação da nova BNCC - Base Nacional Comum Curricular, para o Ensino Médio, em que se faz uso dos Itinerários Formativos, Eletivas e Trilhas de Aprofundamento, passo a apresentar aqui a criação de um roteiro de trilha de aprofundamento do conhecimento matemático em Geometria Analítica, fundamentados com os axiomas da Geometria Plana Euclidiana. Tal aprofundamento passa pelo confronto do Modelo Euclidiano com um outro modelo também cartesiano, conhecido por Modelo de Moulton, porém com conceitos primitivos particulares e específicos. Será através da construção dos elementos propostos segundo este outro modelo de geometria, que trabalhamos as consequências provocadas pelas alterações nas propriedades euclidianas, utilizando todo o conhecimento adquirido nos ensinos fundamental e médio, reforçando aqui significativamente o aprendizado de tais conteúdos nas disciplinas de Geometria Plana e Analítica e ainda, utilizando dos novos conhecimentos para conjecturar como se comportariam outros elementos conhecidos na Geometria Plana Euclidiana, só que agora, submissos aos conceitos primitivos deste novo modelo. Assim, a ideia é utilizar parte de um conhecimento adquirido na educação básica para o entendimento de uma nova proposta, finalizando com a construção e entrega de um produto educacional como ferramenta de estudos, aqui denominada Trilhas de Aprofundamento a ser trabalhada em sala de aula/laboratório, trazendo o passo a passo da teoria utilizada e fazendo uso de software de geometria dinâmica para auxílio nas construções geométricas e em suas conjecturas, apresentando também as ideias iniciais sobre rotação e animação de figuras.

Como componente curricular dos ensinos fundamental e médio, a Geometria Euclidiana, ou comumente conhecida por Geometria Plana, tem sido a base para os estudos de Geometria. Neste período de formação acadêmica, praticamente não se fala ou apresenta a existências de outros modelos. É possível que grande parte dos discentes nem imaginam que possa haver o que são as chamadas de Geometrias não Euclidianas. Fato ocorrido na minha própria experiência de vida acadêmica.

2 BNCC - BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

2.1 O Passo a Passo da BNCC, Segundo a Própria BNCC

Com a promulgação da Constituição Brasileira em 05 de outubro de 1988 **[1]**, pelo então Congresso Nacional, presidida pelo Deputado Ulysses Guimarães, ficou nela prevista, em seus artigos 210 e 211 que:

> **Art. 210.** Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais.
>
> **Art. 211.** A União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios organizarão em regime de colaboração seus sistemas de ensino.
>
> **§ 2º.** Os Municípios atuarão prioritariamente no ensino fundamental e na educação infantil.
>
> **§ 3º.** Os Estados e o Distrito Federal atuarão prioritariamente no ensino fundamental e médio.

Tais artigos na Constituição levaram a criação de leis e planos de ações pensados para a educação brasileira.

Em 20 de dezembro de 1996, a Lei n º 9.394 **[2]**, decretada pelo Congresso Nacional foi sancionada pelo então Presidente da República Fernando Henrique Cardoso, e veio a estabelecer as diretrizes e bases da educação nacional, conhecida como LDB.

Conforme apresentado no 1º parágrafo do seu Artigo 1º, esta lei aplica-se à educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias.

Nela, fica determinado no Artigo 9º a necessidade de elaboração do Plano Nacional de Educação, o PNE, que só veio ficar regulamentado em 2014, por meio da Lei 13.005.

> **Art. 9.** A União incumbir-se-á de:
>
> **I -** elaborar o Plano Nacional de Educação, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios;

Definiu a Educação Básica como obrigatória, e estruturada em:

- Educação Infantil
- Ensino Fundamental
- Ensino Médio

> **Art. 21.** A educação escolar compõe-se de:
>
> **I -** educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio;

Desta maneira, a LDB traz um grande ganho quando inclui a Educação Infantil na Educação Básica, colocando-a no mesmo nível que o Ensino Fundamental e Médio, uma vez que é a Educação Infantil o início e alicerce da Educação Básica.

Já em seu Artigo 22, traz no texto como finalidade da Educação Básica, o desenvolvimento do educando, garantias de seus direitos de aprendizagem e fornecimento meios para avanços tanto no trabalho quanto em estudos futuros. Começava aqui a ser norteada a proposta da base comum, como sendo um documento normativo, definindo um conjunto estruturado e progressivo dos objetos de aprendizagens mínimas e essenciais, que pudessem levar o educando, ao longo das fases da Educação Básica, à sua formação integral garantindo seu direito às aprendizagens necessárias para seu desenvolvimento cognitivo, bem como prepará-lo para as exigências do mundo do trabalho e cidadania.

> **Art. 22.** A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

É no Artigo 26, que fica regulamentada a necessidade de criação de uma base nacional comum e outra diversificada para a Educação Básica.

> **Art. 26.** Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, e por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.

No Artigo 32, ficou estabelecido como um dos objetivos do Ensino Fundamental, a formação básica do cidadão, mediante o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades

> **Art. 32.** O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante
>
> **III -** o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;

Já em seus Artigos 35 e 36, a LDB trata das finalidades do Ensino Médio, bem como o papel da até então, futura BNCC, provocadas por acréscimos e alterações contidas na Lei nº 13.415 **[3]**, em seus artigos 3º e 4º.

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico - tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Art. 35-A. A Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas seguintes áreas do conhecimento:

I - linguagens e suas tecnologias;

II - matemática e suas tecnologias;

III - ciências da natureza e suas tecnologias;

IV - ciências humanas e sociais aplicadas;

V - formação técnica e profissional.

Art. 36. O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber

I - linguagens e suas tecnologias;

II - matemática e suas tecnologias;

E assim, diante deste cenário de muitas propostas de mudança na área educacional brasileira é que foram produzidos volumosos esforços ao longo das últimas décadas no intuito de muito se avançar nesta área muito importante, que é a Educação. Muito foi falado e discutido sobre formulação dos currículos dos sistemas de ensino, de propostas pedagógicas e metodologias, de contribuições para o alinhamento de políticas e ações educacionais nos três âmbitos do poder, seja ele federal, estadual e municipal.

O quadro a seguir, mostra o processo de maturação do pensamento educacional brasileiro que culminou na elaboração deste documento normativo que é a BNCC **[4]**, trazendo o percurso por onde se passaram a idealização, a reflexão, discussões, debates e a interação com a sociedade.

Tabela 1: BNCC - Linha do Tempo

Ano	Documento		Finalidade
1997	PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental do 1o ao 5o Ano	Desenvolver Currículo
1998	PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental do 6o ao 9o Ano	Aprofundar debate sobre a Educação
2000	PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio	Difundir princípios da reforma curricular Orientação de professores por busca de novas metodologias de ensino
2008		Programa Currículo em Movimento	Melhoria na qualidade da Educação Básica
2010	CONAE	Conferência Nacional de Educação	Debate BNCC como parte de um Plano Nacional de Educação
2010	Resolução No.4	Resolução CNE/CEB 4/2010 Em Conformidade com a Lei nº 9.394/1996	Define Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica.
2010	Resolução No.5	Resolução CNE/CEB 5/2009	Fixa as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil
2010	Resolução No.7	Resolução CNE/CEB 7/2010 Em conformidade com a Lei nº 9.394/96	Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos.
2012	Resolução No.2	Resolução CNE/CEB 2/2012 Em conformidade com a Lei nº 9.394	Define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
2012	PNAIC	A Portaria n. 867 Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa	institui o Pacto e as ações do Pacto e define suas Diretrizes Gerais.
2013	PNFEM	Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio	institui PNFEM
2014	PNE	A Lei n. 13.005 Plano Nacional de Educação	Regulamenta o PNE. Vigência de 10 (dez) anos. O Plano tem 20 metas para a melhoria da qualidade da Educação Básica 4 quatro delas falam sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNC).
2014	CONAE	2ª Conferência Nacional pela Educação	Propostas e reflexões para a Educação brasileira Processo de mobilização para a Base Nacional Comum Curricular.
2015	Portaria n. 592	I Seminário Interinstitucional para elaboração da BNC.	Marco importante no processo de elaboração da BNC Institui Comissão de Especialistas para a Elaboração de Proposta da Base Nacional Comum Curricular.
2015	BNCC	Base Nacional Comum Curricular. 16 de setembro de 2015	1ª versão da BNCC é disponibilizada.
2015	BNCC	Dia D da BNCC. 2 a 15 de dezembro de 2015	Mobilização das escolas de todo o Brasil para a discussão do documento preliminar da BNC.
2016	BNCC	Base Nacional Comum Curricular. 3 de maio de 2016	2ª versão da BNCC é disponibilizada.
2016	BNCC	Seminários Estaduais com professores, gestores e especialistas - Consed - Undime	Debater a segunda versão da BNCC.
2017	BNCC	Base Nacional Comum Curricular. Abril de 2017	Versão final da Base Nacional Comum Curricular
2017	BNCC	Base Nacional Comum Curricular. 20 de dezembro de 2017	Homologação da BNCC pelo ministro da Educação, Mendonça Filho.
2017	CNE/CP Nº 2	RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 2 22 DE DEZEMBRO DE 2017	Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular, a ser respeitada obrigatoriamente ao longo das etapas e respectivas modalidades no âmbito da Educação Básica.

continua...

Ano	Documento		Finalidade
2018	BNCC	Dia D da BNCC 06 de março de 2018	Educadores do Brasil inteiro se debruçaram sobre a Base Nacional Comum Curricular, com foco na parte homologada do documento, correspondente às etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental, com o objetivo de compreender sua implementação e impactos na educação básica brasileira.
2018	BNCC	O Ministério da Educação entregou ao Conselho Nacional de Educação (CNE) a 3ª versão da BNCC do Ensino Médio. 02 de abril de 2018	Debater a 3ª versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio
2018	ProBNCC	Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular ProBNCC. 5 de abril	Instituição do Programa
2018	BNCC	Dia D da BNCC 02 de agosto de 2018	Escolas de todo o Brasil se mobilizaram para discutir e contribuir com a BNCC da etapa do Ensino Médio. Professores, gestores e técnicos da educação criaram comitês de debate e preencheram um formulário online, sugerindo melhorias para o documento.
2018	BNCC	Base Nacional Comum Curricular para a etapa do Ensino Médio. 14 de dezembro de 2018	Homologação da BNCC para a etapa do Ensino Médio. Agora o Brasil tem uma Base com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica.

Fonte: Elaborada pelo Autor

Sim, agora o Brasil tem uma Base com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica.

Tem uma base que define quais são os direitos e objetivos de aprendizagem do Ensino Médio, consoante as diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas áreas do conhecimento, e os organizam segundo as competências e habilidades que nortearam e norteiam os currículos e seus conteúdos mínimos, assegurando assim, de forma integral, o desenvolvimento da aprendizagem na formação básica comum e na formação diversificada, tudo isso construído de acordo com critérios estabelecidos em cada sistema de ensino.

2.2 Competências Gerais - BNCC

A BNCC **[4]**, cuja homologação se deu em dezembro de 2018, em conformidade com a Lei 13.415 **[3]**, é referenciada como a Lei do Novo Ensino Médio, e veio atender ao que determinava a Lei 9.394/1996 **[2]**, a conhecida LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Ela traz em seu texto, uma proposta de nova organização dos componentes curriculares, apresentando-os de forma mais flexível, uma vez que agora, não é o conteúdo o fator determinante na aprendizagem, mas sim o desenvolvimento de Habilidades e Competências a serem adquiridos por meio de conteúdos variados.

Na BNCC, entende-se Competência como a "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), e com as aprendizagens essenciais definidas nela. Os estudantes devem ser levados ao desenvolvimento de dez competências gerais, que no âmbito pedagógico, garantam seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento integral.

São elas, as 10 competência Gerais, a saber:

Tabela 2: BNCC - Competências Gerais

COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: BNCC

2.3 Competências Específicas – BNCC

Sendo fundamentada no compromisso pedagógico com a educação integral e focada no desenvolvimento de competências, a BNCC apresenta a seguinte organização:

- Educação Infantil: Aprendizagem e Desenvolvimento baseados em Campos de Experiência da Criança.

- Ensino Fundamental: Define competências específicas para as áreas e os componentes curriculares do Ensino Fundamental de modo articulado às competências gerais. Na área de Matemática, na componente Matemática, essa articulação é dada por meio de Unidades Temáticas, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade por meio de oito competências específicas.

- Ensino Médio: Define-se competências específicas para as áreas do conhecimento. No caso da área de Matemática e suas tecnologias, cuja componente curricular Matemática é obrigatória, foram definidas cinco Competências Específicas, que se acrescentam às competências gerais, dando seguimento evolutivo com as competências específicas determinadas para o Ensino Fundamental, possibilitando flexibilização nas escolhas dos objetos do conhecimento a serem trabalhados, promovendo orientação e detalhamento de novos conteúdos curriculares que garantam a aprendizagem dos estudantes.

A BNCC não deixa dúvidas quanto à necessidade do conhecimento matemático, a ser trabalhado por todos os estudantes da Educação Básica, como parte da formação geral básica.

2.3.1 Competências Específicas Matemática - Ensino Fundamental

Tabela 3: BNCC - Competências Específicas Matemática - Ensino Fundamental

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA – ENSINO FUNDAMENTAL	
1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: BNCC

2.3.2 Competências Específicas de Matemática - Ensino Médio

Tabela 4: BNCC - Competências Específicas Matemática - Ensino Médio

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS - ENSINO MÉDIO	
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BNCC

2.4 Habilidades

Enquanto Competência, pode ser traduzida como sendo o resultado final esperado daquilo que o estudante precisa aprender e saber fazer, em que ela é o ponto a ser chegado, encontramos nas Habilidades como sendo um conjunto de ações que o leva a chegar neste resultado.

As Habilidades são os passos que faz com que o estudante garanta a sua aprendizagem essencial, que o leve ao saber fazer. Elas se comportam como sendo ações a serem desenvolvidas para alcançar a competência esperada.

2.4.1 Habilidades Ensino Fundamental Goiano – BNCC - DCGO

No Ensino Fundamental, essas habilidades estão ligadas às competências, tanto gerais como específicas, relacionando variados conteúdos como sendo os objetos de conhecimento, através de seus conceitos e procedimentos, que, por sua vez, encontram-se estruturados em unidades temáticas. Na área de Matemática, essas Unidades Temáticas são: Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatísticas.

Identificação das Habilidade para o Ensino Fundamental, segundo a BNCC:

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja exemplo da composição é a seguinte:

EF01MA11

- O primeiro par de letras - EF - indica a etapa de Ensino Fundamental.
- O primeiro par de números (01) indica o ano (do 1o ao 9o) a que se refere a habilidade, neste caso, o 1o Ano.
- A segundo par de letras - MA - indica o Componente Curricular, a saber, a Matemática.
- O último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano, ou seja, 11 como sendo a 11a habilidade esperada para a série em questão. E tal habilidade está associada aos Objetos do Conhecimento, pré-determinados e colocados de forma evolutiva no processo de aprendizagem.

Como apresentado inicialmente, ficaram para os Sistemas de Ensino, a elaboração de um conjunto de habilidades essenciais e determinantes para o desenvolvimento do estudante, bem como garantir que sejam alcançadas as aprendizagens esperadas.

Neste contexto, acrescentamos as adequações à BNCC, propostas pelo Sistema de Ensino da Rede Estadual de Goiás, através da DC-GO - Documento Curricular para Goiás [5].

Nele, ficaram mantidas as habilidades contidas na BNCC, e uma preocupação em acrescentar e detalhar outras habilidades, tão importantes para a formação do estudante. Segue assim, a instrução de leitura da identificação das Habilidades para o Ensino Fundamental, segundo a DC-GO, lembrando que elas podem ter a característica de detalhamento ou de acréscimo às já propostas

pela BNCC, podendo também serem chamadas de Objetivos de Aprendizagem. Assim:

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cujo exemplo da composição é a seguinte:

GO-EF01MA11-A

- O primeiro par de letras – GO - indica que houve um acréscimo no conjunto de habilidades já propostas para o ano em questão etapa de Ensino Fundamental.
- O último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano, ou seja, 11 como sendo a 11a habilidade esperada para a série em questão. E tal habilidade está associada aos Objetos do Conhecimento, pré determinados e colocados de forma evolutiva no processo de aprendizagem.
- A última letra - A - indica que houve um detalhamento específico da habilidade proposta.
- Vale destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. E que cabe aos sistemas e escolas definir a progressão das aprendizagens, em função de seus contextos locais.

Diferentemente de um curso de Geometria, seja ele um curso de plana, espacial ou analítica, a componente curricular de Matemática do Ensino Fundamental, traz de forma progressiva durante os anos do Ensino Fundamental, através das unidades temáticas, e no nosso caso exemplo, Geometria, fragmentos dos conteúdos programáticos destes cursos, de forma esparsadas ao longo de todo o Ensino Fundamental, na expectativa de preparar o estudante por meio de aquisição de habilidades pré-definidas, para a aquisição de novas habilidades no Ensino Médio, as quais passam a ser o centro das atenções para a aprendizagem, e não mais os conteúdos programáticos que foram até então, os responsáveis pelo processo de ensino experimentado.

E, com essa nova proposta, trazida pela BNCC é que temos fundamentado toda a linha de desenvolvimento da presente dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat, com a entrega de um produto educacional na forma de Trilha de Aprofundamento.

A seguir é apresentada uma coleção de tabelas, separadas por ano específico do Ensino Fundamental, trazendo as habilidades para se garantir as aprendizagens esperadas dos estudantes, e que estão relacionadas à componente de Matemática, para a unidade temática de Geometria, com a participação do Sistema de Ensino da Rede Estadual de Goiás.

Tabela 5: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 1^{o} Ano

1o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	**(EF01MA11-A)** Reconhecer noções de distância: perto, longe, tendo como referência o próprio corpo, fitas métricas, passos, cordas. **(EF01MA11-B)** Reconhecer por meio de jogos e brincadeiras direção, posição e sentido (acima, abaixo, perto, longe, à direita, à esquerda, ao lado, em frente, atrás, primeiro, último). **(EF01MA11-C)** Descrever, com palavras, esboços, desenhos ou uma combinação de duas ou mais formas, a localização de pessoas e de objetos no espaço, em relação à sua própria posição, utilizando termos como em cima, embaixo, perto, longe, à direita, à esquerda, ao lado, em frente, atrás, primeiro, último, alto, baixo, curto, comprido, igual, diferente, grosso, fino, dentro, fora, como em posições relativas dos objetos em mapas criados em sala de aula.	**(EF01MA11)** Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.
Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	**(EF01MA12)** Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço, segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição (em cima, embaixo, perto, longe, à direita, à esquerda, ao lado, em frente, atrás, primeiro, último) é necessário explicitar-se o referencial.	**(EF01MA12)** Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar se o referencial.
Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico	**(EF01MA13-A)** Identificar diferenças e semelhanças entre objetos familiares do mundo físico relacionados às formas geométricas espaciais, como em figuras tridimensionais em construções, na natureza e na arte. **(EF01MA13-B)** Comparar e organizar objetos que diferenciem quanto à forma, consistência, peso, cor, seguindo determinado critério (o cubo, o cilindro, a esfera e o bloco retangular) **(EF01MA13-C)** Observar, analisar e nomear os objetos da sala de aula, quanto à forma, cor, peso, consistência, usando linguagem formal e informal, em expressões como: “o cubo tem pontas e a esfera não”; “a esfera parece uma bola e o cubo, um dado”; “o bloco retangular tem faces e vértices e as faces não são redondas”.	**(EF01MA13)** Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais	**(EF01MA14-A)** Reconhecer figuras planas (retângulo, quadrado, triângulo e círculo) presentes em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos em objetos do mundo físico (casa, caixa, bola) e materiais manipuláveis (blocos lógicos). **(EF01MA14-B)** Reconhecer as figuras planas como parte das figuras não planas e descrevê-las verbalmente usando propriedades simples (quantidade de faces e vértices dos sólidos não redondos e quantidade de lados e vértices das figuras planas não redondas).	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 6: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 2º Ano

2o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido	**(EF02MA12-A)** Identificar e registrar a localização, em linguagem verbal ou não verbal, utilizando os termos ao lado de, entre, antes de, após o, à esquerda ou à direita e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido como ir adiante, em linha reta e mudar de direção virando à direita ou à esquerda; caminhar na mesma direção, mas em sentido oposto ao deslocamento de alguém, etc. (Exemplo: utilizar um croqui da sala de aula para indicar que uma pessoa está entre outras duas, ou à direita de uma e à esquerda de outra, ou em frente ao quadro e ao lado da porta). **(EF02MA12-B)** Elaborar estratégias para localizar ou estimar a localização de pessoas e objetos no espaço, a partir de dados como pontos de referência, mudanças de direção e de sentido do deslocamento, entre outras informações relativas à movimentação.	**(EF02MA12)** Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.
Esboço de roteiros e de plantas simples	**(EF02MA13-A)** Descrever oralmente a localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço por meio de representações como mapas, plantas, croquis e diagramas. **(EF02MA13-B)** Descrever oralmente o itinerário de locomoção de um lugar a outro. **(EF02MA13-C)** Descrever oralmente seu itinerário a partir de uma referência dada. **(EF02MA13-D)** Representar com desenhos a localização em um espaço (sala de aula, lugar de recreação, sua casa ou outro ambiente) tendo como ponto de referência o próprio corpo. (Exemplo: Após brincar de amarelinha, representar o cenário da brincadeira e detalhes do espaço onde ela ocorreu especificando posições e descrevendo relações de tamanho, distância e proximidade entre o cenário real e o representado). **(EF02MA13-E)** Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência em situações diversas.	**(EF02MA13)** Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características	**(EF02MA14-A)** Estabelecer relação entre as formas geométricas na natureza e nos objetos criados pelo homem. **(EF02MA14-B)** Reconhecer e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico (embalagens, modelos de figuras espaciais com massa de modelar ou varetas), expressando verbalmente ou por meio de desenhos suas características e propriedades, como ter ou não faces e vértices e ser ou não redondas, nomeando as figuras e as faces.	**(EF02MA14)** Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características	**(EF02MA15-A)** Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns e propriedades (ter ou não lados e vértices), em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos (objetos do cotidiano), identificando e classificando de polígonos as figuras planas com lados. **(EF02MA15-B)** Relacionar as características e propriedades dos polígonos, com suas respectivas nomenclaturas, inclusive reconhecendo o círculo como uma figura não poligonal.	**(EF02MA15)** Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 7: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 3º Ano

3o Ano EF	Componente Curricular: Matemática	
	Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	**(EF03MA12-A)** Descrever posição, trajetos, mudanças de direção e sentido, oralmente, com uso da linguagem materna e de vocabulário geométrico. **(EF03MA12-B)** Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis (com ou sem malhas quadriculadas), maquetes e tecnologias digitais, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência, em situações diversas.	**(EF03MA12)** Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações	**(EF03MA13-A)** Associar verbalmente ou por escrito figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico (das Artes visuais em objetos e suas representações geométricas) e identificar as características faces, vértices e aresta, quando existirem. **(EF03MA13-B)** Construir sólidos geométricos e suas representações (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), utilizando recursos diversos (malhas, planificações, esboços que os representem em perspectivas simples).	**(EF03MA13)** Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.
Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações	**(EF03MA14-A)** Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones) presentes em objetos e/ou em suas representações geométricas, utilizando tecnologias digitais, materiais manipuláveis. **(EF03MA14-B)** Relacionar figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones) com suas planificações e explorar o significado de planificação de uma figura espacial (como fazer um molde, uma representação plana da figura espacial).	**(EF03MA14)** Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	**(EF03MA15-A)** Fazer justificativas, argumentações e explicações de por que uma figura se encaixa ou não na categoria de quadrilátero ou triângulo. **(EF03MA15-B)** Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices, registrando essas características em esquemas e tabelas.	**(EF03MA15)** Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
Congruência de figuras geométricas planas	**(EF03MA16-A)** Reconhecer figuras de mesma forma e medidas por meio de sobreposição, utilizando materiais manipuláveis como peças de quebra-cabeças. **(EF03MA16-B)** Desenhar em malhas quadriculadas ou triangulares figuras planas em posições distintas, com a mesma forma e o mesmo tamanho. **(EF03MA16-C)** Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais, em situações diversas.	**(EF03MA16)** Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 8: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 4º Ano

4o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido Paralelismo e perpendicularismo	**(EF04MA16)** Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.	**(EF04MA16)** Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características	**(EF04MA17-A)** Representar prismas e pirâmides por desenho, com recursos específicos, tais como régua, compasso, esquadros ou tecnologias digitais. **(EF04MA17-B)** Representar as planificações de prismas e pirâmides, para reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos. **(EF04MA17-C)** Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais, em um contexto significativo, com estímulos visuais.	**(EF04MA17)** Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares	**(EF04MA18-A)** Manusear e observar os diferentes tipos de sólidos geométricos, classificar e identificar seus principais elementos utilizando dobraduras e esquadros. **(EF04MA18-B)** Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria dinâmica.	**(EF04MA18)** Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
Simetria de reflexão	**(EF04MA19-A)** Reconhecer simetria de reflexão em objetos familiares, figuras e pares de figuras geométricas planas, com ou sem uso de malhas quadriculadas e softwares de geometria. **(EF04MA19-B)** Utilizar simetria de reflexão na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.	**(EF04MA19)** Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 9: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 5º Ano

5o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano	**(EF05MA14-A)** interpretar diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. **(EF05MA14-B)** Utilizar diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.	**(EF05MA14)** Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.
Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano	**(EF05MA15-A)** Interpretar e descrever a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros. **(EF05MA15-B)** Representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.	**(EF05MA15)** Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.
Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	**(EF05MA16-A)** Identificar, associar, analisar e comparar figuras planas e não- planas com ou sem uso de materiais manipuláveis. **(EF05MA16-B)** Reconhecer, nomear e comparar poliedros e corpos redondos associando-os a objetos do mundo físico. **(EF05MA16-C)** Reconhecer faces, vértices e arestas nas figuras espaciais, planificadas ou não. **(EF05MA16-D)** Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos, em um contexto significativo, com estímulos visuais.	**(EF05MA16)** Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	**(EF05MA17)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.	**(EF05MA17)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes	**(EF05MA18)** Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.	**(EF05MA18)** Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 10: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 6º Ano

6o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	**(EF06MA16-A)** Descrever, interpretar e representar a localização ou a movimentação de pontos no primeiro quadrante do plano cartesiano. **(EF06MA16-B)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. **(EF06MA16-C)** Contextualizar o uso do plano cartesiano em mapas, GPS e plantas de construção, etc.	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17-A)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do número de lados do polígono da base, por meio de materiais manipuláveis ou não. **(EF06MA17-B)** Reconhecer e resolver problemas que envolvem as relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides e desenvolver a percepção espacial.	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularíssimo dos lados	**(EF06MA18-A)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA18-B)** Classificar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA18-C)** Reconhecer, nomear e comparar poliedros e corpos redondos na construção de figuras 3D de vários polígonos.	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularíssimo dos lados	**(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	**(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularíssimo dos lados	**(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	**(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

continua...

6o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e na construção de quadriláteros, entre outros.	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	**(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).	**(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 11: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 7^{o} Ano

7o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	**(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22-A)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas. **(EF07MA22-B)** Identificar os elementos básicos de uma circunferência (raio, diâmetro, arco, flecha e corda) e suas diversas aplicações em resoluções de problemas. **(EF07MA22-C)** Resolver problemas que envolvam objetos equidistantes, utilizando o conhecimento de circunferência.	**(EF07MA22)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF07MA23-A)** Explorar as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, através de atividades experimentais com dobraduras e materiais manipuláveis. **(EF07MA23-B)** Identificar pares de ângulos consecutivos, adjacentes (caso particular dos ângulos consecutivos), colaterais internos e externos, alternos internos e externos, correspondentes e opostos pelo vértice. **(EF07MA23-C)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica, para a utilização em situações-problema diversas.	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.

continua...

7o Ano EF	Componente Curricular: Matemática	
	Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA24-A)** Construir triângulos, usando régua e compasso. **(EF07MA24-B)** Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados. **(EF07MA24-C)** Verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e aplicar este resultado para demonstrar o Teorema do Ângulo Externo.	**(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.	**(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.	**(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.	**(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 12: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 8º Ano

8o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14-A)** Reconhecer os critérios de congruência de triângulos, por meio de investigações usando softwares de geometria dinâmica ou materiais manipuláveis, bem como suas respectivas demonstrações. **(EF08MA14-B)** Identificar triângulos congruentes seguindo os critérios de congruência de triângulos. **(EF08MA14-C)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos e da verificação usando materiais manipuláveis e/ou softwares de geometria dinâmica.	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA16-A)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, a construção de triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares através de esquadro, régua, compasso e outros instrumentos. **(EF08MA16-B)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadro, compasso, régua e outros instrumentos.	**(EF08MA16)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

Tabela 13: Habilidades E.F.: Unidade Temática: Geometria - 9º Ano

9o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
Comprimento da Circunferência e Área de um Círculo	**(GO-EF09MA24)** Resolver situações-problema envolvendo o cálculo das medidas do comprimento da circunferência e da área do círculo.	
Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
Semelhança de triângulos	**(EF09MA12-A)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. **(EF09MA12-B)** Reconhecer triângulos semelhantes em situações de ampliação, congruência e redução, e as relações que existem entre seus perímetros e suas áreas.	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA14-A)** Estabelecer o Teorema de Tales, por meio das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes, para calcular distâncias inacessíveis e nas relações envolvendo semelhança de triângulos em problemas diversos. **(EF09MA14-B)** Ler, interpretar, resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade, envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	**(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	**(GO-EF09MA26)** Estabelecer as razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) para resolver problemas em diferentes contextos.	

continua...

9o Ano EF	Componente Curricular: Matemática Unidade Temática: Geometria	
Objetos de Conhecimento	**Objetivos de Aprendizagem - DCGO**	**Habilidades - BNCC**
Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: Adaptação BNCC e DC-GOEF

2.4.2 Habilidades no Novo Ensino Médio Goiano

Apresentando-se de forma mais interessante aos jovens, surge o Novo Ensino Médio (Lei n^o. 13.415/2017), que vem trabalhar o fortalecimento do chamado protagonismo juvenil e o desenvolvimento de forma integral do estudante, apresentando uma flexibilização na escolha de conteúdos na construção de um currículo de referência, mas que garanta as aprendizagens mínimas definidas pela Base Comum. Também fica definido a necessidade de se trabalhar uma parte diversificada, com a escolha por parte dos estudantes daquilo que mais lhe interessam, tudo isso por meio do que foi chamado de Itinerários Formativos. Agora, além da formação comum em todo o território brasileiro, por meio de aulas de Formação Geral Básica Comum, passa a ser ofertado ao estudante, mediante escolhas próprias, aulas de Projeto de Vida, Eletivas e Trilhas de Aprofundamento, Trilhas essas que são aprofundamentos das aprendizagens de uma ou mais áreas do conhecimento.

Para a DC-GO,

> *é aqui que se encontra o ponto de transformação do antigo para o novo. A partir de agora, olhando para as habilidades (BNCC) e/ou objetivos de aprendizagem (DC-GOEM), que estão ligadas às competências específicas por área do conhecimento. Assim, as habilidades poderão ser adquiridas por meio de objetivos do conhecimento, que poderão fazer uso de conteúdos programáticos dos mais variados Temas, aqui entendido como sendo uma flexibilização das componentes curriculares. O importante é fazer com que os alunos adquiram domínio nas habildades propostas, independentes de conteúdos programáticos.*

Por meio da Formação Geral Básica Comum e/ou das Trilhas de Aprofundamento, é apresentado um repertório curricular, inédito para o ensino médio, capaz de promover uma discussão inovadora e tão eficiente quanto à conteúdos tradicionais.

O presente trabalho apresenta um conjunto de objetos do conhecimento, estruturados de modo a garantir que os alunos tenham asseguradas as aprendizagens esperadas pela BNCC, apresentando temas inovadores, que não eram trabalhados nos ensinos fundamental e médio, de forma a se adequarem às habilidades adquiridas no Ensino Fundamental e agora evoluídas com as habilidades essenciais da base comum para o Ensino Médio. Aqui, podemos fazer o uso fragmentado de objetos do conhecimento relativos ao conjunto proposto, atendendo a base comum, bem como, em forma de Trilha de Aprofundamento, trabalhar um curso completo, fazendo uso de todos os objetos do conhecimento apresentados, vislumbrando o aprofundamento acadêmico na área de matemática e suas tecnologias, ligados ao conhecimento relacional entre as geometrias cartesiana, euclidiana e não euclidiana.

Para tudo isso, é preciso também conhecer a identificação adotada na BNCC e DC-GOEM para o Ensino Médio **[6]**, que é muito parecida com a adotada pelo Ensino Fundamental, vejamos:

BNCC

EM13MAT101

- O primeiro par de letras - EM - indica a etapa de Ensino Médio.

- O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas poderão ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos (o que veio a permitir a flexibilização do ensino médio).

- A segunda sequência de letras - MAT - indica a área (três letras): LGG = Linguagens e suas Tecnologias

LP = Língua Portuguesa

MAT = Matemática e suas Tecnologias

CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias

CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

- Os números finais - 101 - indicam a competência específica - 1 - à qual se relaciona a habilidade e a sua numeração - 01 - no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

- Vale destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. Cabe aos sistemas e escolas definir a progressão das aprendizagens, em função de seus contextos locais.

De acordo com esse critério, tomando por exemplo o código EM13MAT101, temos:
- EM: ensino médio;
- 13: a ser desenvolvida da 1^a a 3^a série do Ensino Médio, conforme definições curriculares;
- Mat: área de matemática;
- 101: 1 refere-se competência específica 1 e o 01 refere-se à primeira habilidade proposta na área de Matemática e suas Tecnologias relacionada à competência específica 1 , que pode ser desenvolvida em qualquer série.

Também é preciso enfatizar que a organização das habilidades do Ensino Médio na BNCC (com a explicitação da vinculação entre competências específicas de área e habilidades) tem como objetivo definir claramente às aprendizagens essenciais a ser garantidas aos estudantes, digo, a serem alcançadas nessa etapa.

DC-GOEM

GO-EM13MAT101A

- O primeiro par de letras - GO - indica que houve um acréscimo no conjunto de habilidades já propostas para o ano em questão etapa de Ensino Médio

- A última letra - A - indica que houve um detalhamento específico da habilidade proposta.

Para a BNCC, no Novo Ensino Médio, é suficiente determinar as atividades essenciais a serem adquiridas, apenas vinculadas às competências específicas, como mostram as tabelas abaixo. Observe que não é feita uma previsão de quais anos tais habilidades são trabalhadas e quais conteúdos são explorados.

Tabela 14: Habilidades E.M.: Competência Específica 1

HABILIDADES: Competência Específica 1	
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	
(EM13MAT101)	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102)	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103)	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104)	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105)	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Fonte: Adaptação BNCC

Tabela 15: Habilidades E.M.: Competência Específica 2

HABILIDADES: Competência Específica 2	
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	
(EM13MAT201)	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202)	Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203)	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Fonte: Adaptação BNCC

Tabela 16: Habilidades E.M.: Competência Específica 3

HABILIDADES: Competência Específica 3	
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303)	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305)	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306)	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307)	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308)	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310)	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313)	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314)	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

continua...

HABILIDADES: Competência Específica 3	
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	
(EM13MAT315)	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316)	Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte: Adaptação BNCC

Tabela 17: Habilidades E.M.: Competência Específica 4

HABILIDADES: Competência Específica 4	
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403)	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404)	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405)	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406)	Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407)	Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Fonte: Adaptação BNCC

Tabela 18: Habilidades E.M.: Competência Específica 5

HABILIDADES: Competência Específica 5	
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503)	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504)	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505)	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506)	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507)	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508)	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509)	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510)	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptação BNCC

A estruturação de uma sequência organizacional para a padronização dos trabalhos no Sistema de Ensino da Rede Estadual de Goiás, foi apresentada, através da DC-GOEM como sendo a Bimestralização da Formação Geral Básica, trazendo sugestões de conteúdos para se chegar às aprendizagens esperadas, percorrendo-as pelas três séries do Ensino Médio, conforme mostra tabela abaixo. Além da parte comum, ainda temos a parte diversificada, que deve ser apresentada aos alunos, como forma de escolha, podendo os conteúdos serem de uma área do conhecimento ou mais, sob a forma de Projeto de Vida, Eletivas e Trilhas de Aprofundamento.

Segue a seguir, proposta para a Bimestralização da Formação Geral Básica, conforme apresentada pelo Sistema de Ensino da Rede Estadual de Goiás, através da DC-GOEM:

Tabela 19: DC-GOEM: Formação Geral Básica - 1ª Série EM

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida inevitavelmente acompanhada de erro.	(GO-EMMAT313A) Registrar informações numéricas apresentadas em textos diversos (científicos, técnicos ou jornalísticos etc.), utilizando a notação científica para adequar a escrita de números muito grandes ou muito pequenos. (GO-EMMAT313B) Resolver problemas de origem científica ou técnica, efetuando cálculos com números muito grandes ou muito pequenos, para expressar a solução com registros representados em notação científica. (GO-EMMAT313C) Identificar em registros referentes às medidas (de comprimento, área ou volume) algarismos significativos e duvidosos, analisando em textos e/ou situações problema a origem ou ponto de partida da medida apresentada para criticar se as informações apresentadas são totalmente verdadeiras.	Notação científica. Algarismos significativos e técnicas de arredondamento.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	(GO-EMMAT103A) Reconhecer as unidades de medidas (comprimento, capacidade, massa, tempo, volume, armazenamento e velocidade de transferência de dados) identificando características específicas a suas respectivas grandezas para compreender seus usos em situações específicas e em contextos relativos a atividades cotidianas (das áreas de Ciências Humanas e da Natureza ou tecnológica), divulgados por diferentes meios. (GO-EMMAT103B) Compreender os usos das diferentes representações das grandezas de medidas (comprimento, capacidade, massa, tempo, volume, armazenamento e velocidade de transferência de dados) utilizando procedimentos matemáticos para interpretar textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam tais grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo SI. (GO-EMMAT103C) Interpretar medidas de diferentes grandezas, adotadas ou não pelo SI, utilizando procedimentos matemáticos para resolver problemas ligados aos avanços tecnológicos e/ou a atividades cotidianas. (GO-EMMAT103D) Resolver problemas que necessitem de conhecimentos articulados a diferentes unidades de medidas (comprimento, capacidade, massa, tempo, volume, armazenamento e velocidade de transferência de dados), utilizando instrumentos, convencionais ou não e procedimentos matemáticos para argumentar e tomar decisões sobre situações cotidianas.	Sistema Internacional de Medida.
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela Análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT101A) Interpretar dados e informações (econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza) que envolvam a Variação entre grandezas, pesquisando e analisando gráficos (funções e/ou taxas de variação) para avaliar situações gerais relativas ao cotidiano. (GO-EMMAT101B) Resolver situações problemas que envolvam a Matemática (econômicos, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza), sintetizando conhecimentos, situações apresentadas em jornais, revistas, sites de notícia etc. para modelar/propor soluções/alternativas relacionadas com as políticas e estratégias sociais direitos sociais, riscos, contingências e necessidades. (GO-EMMAT101C) Analisar gráficos (velocidade x tempo; espaço x tempo; aceleração x velocidade), utilizando gráficos da Mecânica (Física) para compreender situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza.	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas. Sistemas e unidades de medida: leitura e conversão de unidades de grandezas diversas. Variaçao de grandezas, como velocidade, concentração, taxas de crescimento ou decrescimento de populações, índices econômicos etc.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a Variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	(GO-EMMAT510A) Pesquisar situações relacionadas às leis de formação ou funções em temas voltados a natureza socioeconômicas, técnico-científica etc. registrando os dados relativos ao comportamento das variáveis investigadas para construir gráficos que possibilitem tomadas de decisões posteriores. (GO-EMMAT510B) Construir gráficos de funções diversas definidas pela relação entre duas grandezas, utilizando dados apresentados em tabelas para inferir sobre a natureza das grandezas envolvidas. (GO-EMMAT510C) Investigar (com ou sem o apoio de tecnologias) dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, analisando as relações e variações estabelecidas entre as mesmas para descrever (oralmente ou por meio de textos - verbais, gráficos, esquemáticos entre outros) a relação observada.	Análise e construção de gráficos.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generaliza o, reconhecendo quando essa representa o de função polinomial de 1o grau.	(GO-EMMAT501A) Compreender o conceito de função polinomial de 1o grau, identificando a relação entre duas variáveis apresentadas em textos de origem socioeconômicas e/ou de natureza técnico ou científica, entre outros para resolver situações problemas do cotidiano. (GO-EMMAT501B) Identificar possíveis leis de formação que se estabelecem da relação entre duas grandezas, analisando conjecturas apresentadas em quadros e/ou tabelas para expressar algebricamente as generalizações que se definem da relação entre duas grandezas. (GO-EMMAT501C) Modelar situações relacionadas as leis de forma o definidas no campo das funções polinomiais de 1o grau, representando no plano cartesiano os dados apresentados em quadros e/ou tabelas para analisar situações que possibilitem a tomada de decisões. (GO-EMMAT501D) Compreender as relações estabelecidas entre duas grandezas, analisando os dados e informações apresentadas em quadros e tabelas para construir gráficos de funções polinomiais de 1o grau. (GO-EMMAT501E) Investigar relações entre números expressos em tabelas simples, identificando padrões e criando conjecturas para representar pontos no plano cartesiano.	Funções polinomiais do 1o grau (função afim, função linear, função constante, função identidade). gráficos de funções. Taxa de variação de funções polinomiais do 1o grau.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	(GO-EMMAT401A) Identificar uma função polinomial de 1o grau a partir de sua representa o algébrica, observando o grau do polinômio que compõe a função para construir o gráfico. (GO-EMMAT401B) Construir um quadro ou tabela simples que relacione as variáveis de uma função polinomial de 1o grau atribuindo valores para a variável independente e determinando o valor da variável dependente para representar geometricamente no plano cartesiano, os pares ordenados obtidos. (GO-EMMAT401C) Reconhecer as relações existentes entre duas grandezas, diretamente/inversamente proporcionais dentro de textos técnicos e/ou científicos, relacionando gráficos para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT401D) Analisar a relação entre os pares ordenados que geram o gráfico de uma função polinomial de 1o grau, verificando se o comportamento, destes, estabelece uma relação de proporcionalidade para inferir e articular possíveis soluções de situações problema. (GO-EMMAT401E) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1o grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo a softwares e/ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica para distinguir os casos nos quais o comportamento proporcional.	Funções afins, linear e constante. Proporcionalidade, estudo do crescimento e variação de funções. Estudo da Variação de funções polinomiais de 1o grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT506) Representar graficamente a Variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.	(GO-EMMAT506A) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, identificando informações (implícitas e explícitas), características e elementos referentes às formas poligonais para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, fatos relacionados as áreas de Ciências da Natureza e Humanas ou tecnológicas. (GO-EMMAT506B) Modelar a relação estabelecida entre a quantidade de lados de um polígono e seu perímetro e/ou a sua área, analisando as características e elementos dos mesmos para resolver problemas matemáticos relacionados ao cálculo de áreas e/ou perímetros. (GO-EMMAT506C) Reconhecer a conserva o ou modificação de medidas dos lados, do perímetro e/ou da área de figuras, utilizando malhas quadriculadas para verificar se houve amplia o ou redução dessas malhas. (GO-EMMAT506D) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classifi cando as funções envolvidas para resolver problemas que envolvam as relações estabelecidas. (GO-EMMAT506E) Calcular a área e o perímetro de cômodos e terrenos, desenhando em uma malha quadriculada ampliando e/ou reduzindo o tamanho para analisar a variação do espaço. Polígonos regulares (perímetro e área).	Função linear. Função quadrática.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	(GO-EMMAT402A) Identificar uma função polinomial do 2o grau a partir de sua representa o algébrica, observando o grau do polinômio que compõe a função para construir o gráfico. (GO-EMMAT402B) Construir um quadro ou tabela simples que relacione as variáveis de uma função polinomial de 2o grau, atribuindo valores para a variável independente e determinando o valor da variável dependente para representar geometricamente, no plano cartesiano, os pares ordenados obtidos. (GO- EMMAT402C) Reconhecer as relações existentes entre duas grandezas, em que uma diretamente proporcional ao quadrado da outra, dentro de textos técnicos e/ou científicos, relacionando gráficos para resolver problemas relacionados ao cotidiano. (GO-EMMAT402D) Analisar a relação entre os pares ordenados que geram o gráfico de uma função polinomial de 2o grau, verificando se o comportamento destes estabelece uma relação em que uma diretamente proporcional ao quadrado da outra para inferir e articular possíveis soluções de situações problema. (GO- EMMAT402E) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2o grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo a softwares e/ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica para distinguir os casos nos quais o comportamento proporcional.	Função polinomial de 2o grau. gráficos de funções a partir de transformações no plano. Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função).

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generaliza o, reconhecendo quando essa representa o de função polinomial de 2o grau do tipo $y = ax^2$.	(GO-EMMAT502A) Reconhecer as relações existentes entre duas grandezas, diretamente proporcional ao quadrado da outra dentro de textos técnicos e/ou científicos, relacionando gráficos para resolver problemas do cotidiano. (GO- EMMAT502B) Modelar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas quadr ticas, observando dados numa tabela para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT502C) Selecionar números expressos em tabelas, identificando padrões para expressar graficamente essa generalização no plano cartesiano. (GO-EMMAT502D) Identificar padrões e criar conjecturas, utilizando dados de tabelas e gráficos para expressar algebricamente uma função polinomial de 2o grau do tipo $y = ax^2$	Funções polinomiais do 2o grau (função quadrática): gráfico, raízes, pontos de máximo / mínimo, crescimento / decrescimento, concavidade. gráficos de funções.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos, envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT503A) Representar graficamente funções polinomiais de 2o grau, observando o vértice, as raízes e o ponto y = 0, para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT503B) Resolver problemas do cotidiano envolvendo máximos e mínimos, da função polinomial de 2o grau para propor soluções. (GO- EMMAT503C) Determinar pontos máximo e/ou mínimo de funções quadráticas em contextos econômicos e financeiros, observando as implicações dos coeficientes para compreensão das relações existentes entre as representações gráficas das funções. (GO-EMMAT503D) Utilizar as informações sobre vértices de parábolas, determinando suas relações com lançamentos oblíquos para estabelecer uma trajetória e/ou pontos máximo de alcance.	Funções polinomiais do 2o grau (função quadrática). Gráficos de funções. Pontos críticos de uma função quadrática: concavidade, pontos de máximo ou de mínimo.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1o ou 2o graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT302A) Identificar informações oriundas da relação entre grandezas em contextos diversos (funções), lendo gráficos para resolver problemas cotidianos relacionados função polinomial de 1 ou 2o grau. (GO-EMMAT302B) Resolver problemas cuja modelagem use a noção de funções polinomiais de 1 ou 2o graus apresentados em mais de uma fonte de conhecimento (dois textos, texto e gráfico, gráfico e tabela etc.) estabelecendo relações algébricas entre as informações apresentadas para construir alternativas de soluções que eliminem problemas cotidianos. (GO-EMMAT302C) Modelar problemas que envolvem variáveis que se relacionam por meio de duas grandezas específicas, investigando informações apresentadas em textos que trazem dados decorrentes de situações socioeconômicas, técnico- científicas etc, para resolver problemas relativos árealidade do/a estudante.	Função polinomial do 1o grau. função polinomial do 2o grau. Variação entre grandezas (proporcionalidade e não proporcionalidade).

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gàs etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT404A) Compreender o conceito de função analisando situações que especifiquem a dependência entre variáveis para modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas. (GO-EMMAT404B) Compreender as relações estabelecidas entre grandezas que de nem uma função, analisando suas representações algébrica e/ou gráfica para Identificar o domínio, contradomínio, imagem, crescimento ou decrescimento. (GO-EMMAT404C) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gàs etc.), utilizando estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. (GO-EMMAT404D) Modelar problemas que envolvem tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gàs dentre outras, investigando informações apresentadas em textos que trazem informações decorrentes de situações socioeconômicas, técnico- científicas etc., para resolver problemas relativos árealidade principalmente próxima ao/ estudante. (GO-EMMAT404E) Resolver problema cuja modelagem utiliza a noção de função, sintetizando informações apresentados em mais de uma fonte de conhecimento (no mínimo dois textos, texto e gráfico e/ou tabela etc.) para construir alternativas de soluções que eliminem problemas cotidianos.	Funções definidas por uma ou mais sentenças. Análise gráfica do comportamento dessas funções dentro dos seus respectivos domínios.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a Variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	(GO-EMMAT304A) Resolver problema que envolve função exponencial, utilizando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para avaliar proposta de intervenção na árealidade. (GO-EMMAT304B) Modelar situações que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas exponenciais identificando e relacionando as variáveis envolvidas para resolver problemas com ou sem apoio de tecnologias digitais. (GO-EMMAT304C) Elaborar problemas oriundos de situações do cotidiano que envolvam grandezas de natureza exponencial, utilizando contextos variados (Matemática Financeira, crescimento de diferentes populações, entre outros) para ampliar as percep es tanto dos conhecimentos envolvidos como das possibilidades que direcionam soluções.	Funções exponenciais. Noções de Matemática Financeira.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a Variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	(GO-EMMAT305A) Resolver problema que envolve função logarítmica, utilizando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para avaliar proposta de intervenção na árealidade. (GO-EMMAT305B) Modelar situações que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas logarítmicas identificando e relacionando as variáveis envolvidas para resolver problemas com ou sem apoio de tecnologias digitais. (GO-EMMAT305C) Elaborar problemas oriundos de situações do cotidiano que envolvam grandezas de natureza logarítmica, utilizando contextos variados (abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros) para ampliar as percepções tanto dos conhecimentos envolvidos como das possibilidades que direcionam a soluções.	Logaritmo (decimal e natural). função logarítmica. Variação entre grandezas: relação entre Variação exponencial e logarítmica.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para Identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	(GO-EMMAT403A) Identificar a relação estabelecida entre as grandezas, analisando as informações apresentadas em quadros, tabelas e/ou no plano cartesiano para determinar se a natureza de tais grandezas de ne gráficos de funções exponenciais ou logarítmicas. (GO-EMMAT403B) Analisar, com ou sem apoio de tecnologias digitais, informações de funções exponencial e logarítmica apresentadas em quadros, tabelas e/ou no plano cartesiano, reconhecendo suas características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) para estabelecer relações entre as representações dessas funções. (GO-EMMAT403C) Estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, comparando as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma das funções para propor soluções e comunicar resultados de problemas.	Funções: exponencial e logarítmica. Gráfico de funções a partir de transformações no plano. Estudo do crescimento e Análise do comportamento das funções exponenciais e logarítmica em seus respectivos domínios.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções a ns de domínios discretos, para Análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	(GO-EMMAT507A) Reconhecer situações que envolvem padrões numéricos em diferentes contextos, compreendendo a ideia de sequência (PA) para resolver problemas cotidianos. (GO-EMMAT507B) Compreender as características da progressão aritmética (PA), identificando seus elementos e conceitos (termos, posições dos termos, quantidade de termos, termo geral, razão, lei de formação, soma dos termos, entre outros) para aplicar tais conceitos na resolução de problemas que se relacionem às sequências. (GO-EMMAT507C) Analisar as propriedades inerentes a PA e suas aplicações, deduzindo suas fórmulas essenciais (termo geral, termo médio, soma dos primeiros termos, entre outras), para otimizar o uso de cada fórmula associada a uma situação problema. (GO-EMMAT507D) Associar PAs a funções afins de domínios discretos, empregando estratégias e recursos, como padrões, experimentações e diferentes tecnologias, para analisar as propriedades, deduzir fórmulas e/ou resolver problemas de diversos contextos. (GO-EMMAT507E) Modelar problemas que envolvem padrões aritméticos associados a PA, investigando dados e informações apresentadas em textos de natureza socioeconômica, técnico-científicas etc. para solucionar questões cotidianas.	Funções afins. sequências numéricas: progressões aritméticas (P.A.).

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para Análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	(GO-EMMAT508A) Reconhecer situações que envolvem padrões numéricos em diferentes contextos, compreendendo a ideia de sequência (PG) para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT508B) Compreender as características da PG identificando seus elementos e conceitos (termos, posições dos termos, quantidade de termos, termo geral, razão, lei de forma o, soma dos termos, entre outros) para aplicar os conceitos na resolução de problemas que se relacionem as sequências. (GO-EMMAT508C) Analisar as propriedades inerentes a PG e suas aplicações, deduzindo suas fórmulas essenciais (termo geral, termo m dio, soma dos primeiros termos, soma dos termos de uma PG infinita, entre outras), para avaliar o melhor momento para a utiliza o de cada fórmula associada a uma situa o problema. (GO-EMMAT508D) Associar PGs a funções exponenciais de domínios discretos, empregando estratégias e recursos, como padrões, experimenta es e diferentes tecnologias, para analisar as propriedades, deduzir fórmulas e/ou resolver problemas de contextos diversos. (GO- EMMAT508E) Modelar problemas que envolvem padrões aritméticos associados a PG, investigando dados e informações apresentadas em textos de natureza socioeconômica, técnico-científicas etc. para resolver problemas do cotidiano do/a estudante.	Função exponencial. sequências numéricas: progressões geométricas (P.G.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	(GO-EMMAT315A) Compreender o conceito de fluxograma como representação gráfica da sequência das etapas de um processo, lendo e identificando seus símbolos básicos (início/fim, seta, conector entre outros) e tipos (diagrama de blocos, de processos simples, funcional, horizontal, vertical entre outros) para mapear informações apresentadas em situações, bem como, organizar os processos, raciocínio e etapas para a resolução do problema. (GO- EMMAT315B) Organizar, por meio de fluxogramas, os processos, raciocínio e etapas para a resolução do problema selecionando e caracterizando os dados e informações apresentadas para investigar sequência das etapas de um processo, que envolvem conhecimentos numéricos, algoritmo, entre outros. (GO-EMMAT315C) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, algoritmos que resolvem problemas, analisando sua estrutura, as regras envolvidas, os raciocínios, procedimentos lógicos e/ou operações utilizadas, entre outros, para construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.	Noções básicas de Matemática Computacional e fluxogramas.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 1a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programa o na implementa o de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática.	(GO-EMMAT405A) Compreender a ideia básica de algoritmos como sequência finita de passos (instruções), registrando representações Matemáticas (algébrica, geométrica, estatística, computacional, entre outras) referentes a situações cotidianas (rotineiras ou não) para organizar o processo e utilizar conceitos iniciais de linguagem de programa o na implementa o de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática. (GO- EMMAT405B) Utilizar conceitos iniciais de linguagem de programa o na implementa o de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou Matemática, analisando os resultados e suas implicações para resolver problemas que envolvam expressões algébricas, funções e/ou algoritmos matemáticos, entre outros. (GO-EMMAT405C) Resolver problemas que envolvam expressões algébricas, funções e algoritmos matemáticos, utilizando conceitos iniciais de linguagem de programa o para buscar e propor soluções em contextos diversos da sociedade.	Noções elementares de Matemática Computacional. Algoritmos. Fluxogramas.

Fonte: Adaptação DC-GOEM

Tabela 20: DC-GOEM: Formação Geral Básica - 2ª Série EM

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 2a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).	(GO-EMMAT314A) Reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferentes contextos, compreendendo a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais para resolver problemas relativos árealidade e/ou solucionar problemas do cotidiano que envolvam relação entre grandezas tais como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc. (GO-EMMAT314B) Resolver problemas que envolvem relação entre grandezas, analisando se as relações existentes às o diretamente ou inversamente proporcionais para avaliar/criar propostas de intervenção na árealidade. (GO-EMMAT314C) Elaborar problemas oriundos de situações do cotidiano, utilizando dados referentes às grandezas proporcionais (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.) para ampliar as percepções acerca tanto dos conhecimentos envolvidos como das possibilidades de caminhos que direcionam soluções de problemas do dia a dia. (GO-EMMAT314D) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou produto de outras grandezas, utilizando informações apresentadas pela mídia, livros, jornais e revistas para compreender conceitos como velocidade média, densidade demográfica, índice pluviométrico etc.	Razão. Proporção.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	(GO-EMMAT505A) Analisar situações que envolvem figuras planas, reconhecendo seus elementos e características (nomenclatura, regularidade, medidas, entre outros) para resolver problemas relacionados a espaço e forma. (GO-EMMAT505B) Resolver problemas que envolvam espaço e forma (perímetro e área de figuras planas, ladrilhamento de planos, entre outros) empregando estratégias e recursos, observando padrões com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados etc. (GO-EMMAT505C) Conjecturar a respeito de diferentes conceitos e propriedades relacionadas ao perímetro e área de figuras planas utilizando padrões observados para selecionar possíveis soluções de problemas cotidianos.	polígonos regulares e suas características: ângulos internos, ângulos externos etc. Linguagem algébrica: fórmulas e generalizações.
(EM13MAT105) Utilizar as Noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	(GO-EMMAT105A) Compreender os conceitos de reflexão, translação, rotação (congruência) e homotetia (semelhança) discutindo diferentes situações e sintetizando conceitos para resolver problemas que envolvam dois ou mais conceitos, simultaneamente. (GO- EMMAT105B) Utilizar as transformações e composições isométricas (translação, reflexão, rotação) e homotéticas identificando os casos específicos de simetria em que se aplicam para analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (GO-EMMAT105C) Analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras), utilizando procedimentos matemáticos para construir figuras a partir das transformações isométricas e homotéticas.	Geometria das transformações: isometrias (reflexão, translação e rotação) e homotetia (amplia o e redução). Noções de geometria dos fractais.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 2a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá- las em situações áreais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT307A) Determinar as medidas de áreas de superfícies planas, utilizando estratégias, conceitos, definições, procedimentos matemáticos e conhecimentos geométricos (reconfigurações, aproximação por cortes, método da dissec o de figuras planas, entre outros) para argumentar e tomar decisões diante de problemas relacionados a espaço e forma. (GO-EMMAT307B) Deduzir expressões de cálculo construindo modelos e resolvendo problemas em diversos contextos da geometria plana, para aplicar tais dedu es em situações áreais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Áreas de figuras geométricas: cálculo por decomposição, composição ou aproximação. expressões algébricas.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as Noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	(GO-EMMAT308A) Relacionar, por semelhança de triângulos ou pelo Teorema de Pitágoras, as medidas dos lados e segmentos do triângulo retângulo (catetos, hipotenusa, altura relativa a hipotenusa e projeções dos catetos sobre a hipotenusa), identificando todas as medidas apresentadas no problema para compreender a origem e os processos que acarretam as relações métricas no triângulo retângulo. (GO- EMMAT308B) Relacionar, pelas Leis do Seno ou do Cosseno, as medidas dos lados de triângulos quaisquer com as medidas do seno ou do cosseno de seus respectivos ângulos, utilizando a tabela trigonométrica como suporte, para aplicar estas leis na resolução de problemas em diversos contextos (cálculo de distâncias, determinação da medida de ângulos ou relações trigonométricas, cálculo de perímetros, áreas, entre outros). (GO-EMMAT308C) Aplicar as relações métricas, as Leis do Seno e do Cosseno e as Noções de congruência e semelhança em situações que envolvem triângulos, resolvendo problemas apresentados em contextos relacionados ao cotidiano para entender, propor soluções e construir argumentação consistente.	Lei dos Senos. Lei dos Cossenos. Teorema de Pitágoras. congruência de triângulos (por transformações geométricas isometrias). semelhança entre triângulos (por transformações geométricas homotetia).
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos áreais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	(GO-EMMAT306A) Registrar, em listas, tabelas e outras informações contidas em situações problemas, mídias (internet, livros ou revistas) que envolvem fenômenos periódicos áreais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos etc.) identificando as características gráficas das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), para justificar os procedimentos utilizados nas soluções. (GO-EMMAT306B) Interpretar registros, dados e informações em contextos que envolvem fenômenos periódicos áreais, comparando suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria para resolver problemas de natureza trigonométrica. (GO-EMMAT306C) Resolver problemas cotidianos que envolvem fenômenos periódicos áreais, utilizando procedimentos matemáticos diversos para construir modelos de funções senos e cossenos e representá-las no plano cartesiano.	Trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas). Trigonometria no ciclo trigonométrico. Unidades de medidas de ângulos (radianos). funções trigonométricas (função seno e função cosseno).

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 2a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	(GO-EMMAT504A) Reconhecer os diferentes tipos de sólidos geométricos e suas particularidades, ilustrando com objetos do cotidiano e/ou por aplicativos para dedução do princípio de Cavalieri para aplicá-las em situações reais. (GO-EMMAT504B) Compreender o princípio de Cavalieri verificando características e medidas de altura e área (base e lateral) para investigar o processo de obtenção do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones. (GO-EMMAT504C) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, utilizando o princípio de Cavalieri para determinar fórmulas do volume. (GO-EMMAT504D) Determinar fórmulas da medida do volume de sólidos geométricos, utilizando procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem prismas em situações áreais.	Sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cilindros e cones. cálculo de volume de sólidos geométricos.
(EM13MAT509) Investigar a deforma o de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.	(GO-EMMAT509A) Identificar nas projeções re etidas no ambiente as formas geométricas reconhecendo seus respectivos elementos (vértices, lados, ângulos internos, externos e diagonais) para a leitura e a representa o da árealidade e agir sobre ela. (GO-EMMAT509B) Investigar a deforma o de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), observando padrões e experimenta es para estabelecer conjecturas acerca de seus conceitos e propriedades. (GO-EMMAT509C) Estabelecer conjecturas de diferentes conceitos e propriedades envolvidas na determinação da medida de ângulos e áreas de projeções, identificando a necessidade, ou não, de demonstra o formal para justificar o uso de ferramentas que colaborem com a solução de problemas dessa natureza.	transformações geométricas (isometrias e homotéticas). posição de figuras geométricas: tangente, secante, externa. Inscrição e circunscrição de sólidos geométricos. Noções básicas de cartografia: projeção cilíndrica e cônica.
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.	(GO-EMMAT201A) Calcular o perímetro e a área de figuras planas, área total e volume de sólidos geométricos, de regiões áreais, relacionando elementos e características (quantidade de lados, regularidade, composição, decomposição, medidas, entre outros) das formas geométricas planas com as espaciais para resolver problemas que envolvam medidas de grandezas. (GO-EMMAT201B) Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas (cálculos de perímetro, área, volume, capacidade ou massa), utilizando procedimentos matemáticos para participar de ações voltadas a comunidade local. (GO-EMMAT201C) Propor ações voltadas a comunidade local relacionadas aos cálculos de perímetro, área, volume, capacidade ou massa, utilizando medidas de grandezas para intervir em contextos que favoreçam a comunidade.	Conceitos e procedimentos de geometria métrica. Sistema métrico decimal e unidades não convencionais. funções, fórmulas e expressões algébricas.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 2a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações áreais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT309A) Conhecer as características de sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos), identificando seus elementos (arestas, faces, vértices etc.) para calcular áreas totais e volumes. (GO-EMMAT309B) Calcular áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, fazendo composições e decomposições para resolver problemas que envolvam gastos de materiais para revestir ou pintar os objetos estudados. (GO-EMMAT309C) Resolver e elaborar problemas cotidianos que envolvem o cálculo de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, com ou sem apoio de tecnologias digitais, utilizando procedimentos matemáticos e/ou geométricos para argumentar e tomar decisões relacionadas ao gasto de materiais.	Geometria métrica: poliedros e corpos redondos. área total e volume de prismas, pirâmides e corpos redondos.

Fonte: Adaptação DC-GOEM

Tabela 21: DC-GOEM: Formação Geral Básica - 3ª Série EM

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 3a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a árealidade e produzir argumentos.	(GO-EMMAT104A) Efetuar cálculo de porcentagem (acréscimos, descontos, taxas, entre outros), utilizando procedimentos matemáticos para compreender conceitos, evidências, taxas, índices e seus usos e intencionalidades nas atividades cotidianas divulgados por diferentes meios. (GO-EMMAT104B) Compreender os conceitos, evidências, taxas e índices relacionados a atividades cotidianas, investigando os processos de cálculo desses números, para interpretar ideias associadas a determinação do índice de Desenvolvimento Humano (IDH), de taxas de inflação, entre outros. (GO-EMMAT104C) Interpretar ideias associadas ao uso de taxas e índices de natureza socioeconômica (IDH, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números para analisar criticamente a árealidade e produzir argumentos.	Estatística: pesquisa e organização de dados. Porcentagens: cálculo de índices, taxas e coeficientes.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	(GO-EMMAT202A) Definir os elementos básicos para a árealização de uma pesquisa (objetivos, questionário, variáveis, população, entre outros), analisando as os assuntos e/ou temas de interesse para planejar e executar uma pesquisa amostral. (GO-EMMAT202B) Planejar e executar, a partir de necessidades específicas do cotidiano, uma pesquisa amostral, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes (jornais, revistas, mídias eletrônicas, entre outros) para comunicar os resultados. (GO-EMMAT202C) Comunicar os resultados da pesquisa amostral, utilizando relatórios, quadros, tabelas e gráficos para interpretar medidas de tendência central e de dispersão (amplitude e desvio padrão). (GO-EMMAT202D) Interpretar medidas de tendência central e de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos, para avaliar propostas de intervenção na realidade.	Conceitos iniciais de estatística Descritiva. Medidas de tendência central (média aritmética, moda e mediana). Medidas de dispersão: amplitude amostral, desvio padrão e coeficiente de variação. gráficos estatísticos: histogramas e polígonos de frequência. distribuição normal.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	(GO-EMMAT102A) Compreender as organizações de quadros, tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas, identificando em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, seus elementos, características, padrões, entre outros para interpretar situações em diversos contextos. (GO-EMMAT102B) Interpretar situações em diversos contextos apresentadas graficamente por meio de quadros, tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação (escalas e amostras não apropriadas, entre outros) para analisar informações como recurso para a construção de argumentos. (GO-EMMAT102C) Analisar informações expressas em quadros, tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas como recurso para a construção de argumentos, utilizando procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos (das Ciências da Natureza e Humanas ou tecnológicas) divulgados por diferentes meios.	Conceitos estatísticos de população e amostra. Confiabilidade de fontes de dados. Medidas de tendência central e de dispersão.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	(GO-EMMAT316A) Interpretar dados e informações representados de diferentes formas, analisando o contexto, para calcular as medidas de tendências central (moda, média e mediana) e de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). (GO- EMMAT316B) Calcular as medidas de tendências central (moda, média e mediana) e de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), utilizando procedimentos matemáticos para resolver problemas em diferentes contextos. (GO-EMMAT316C) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão), utilizando procedimentos matemáticos para avaliar propostas de intervenção na árealidade.	Noções de estatística descritiva. Medidas de tendência central: média aritmética, moda e mediana. Medidas de dispersão: amplitude amostral, variância e desvio-padrão.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 3a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionam estatísticas, geometria e álgebra.	(GO-EMMAT406A) Compreender os conceitos e as estruturas das representações gráficas, identificando seus elementos (título, eixos, legendas, rótulos, linhas etc.) para construir e interpretar quadros, tabelas e gráficos de frequências. (GO- EMMAT406B) Construir quadros, tabelas e gráficos de frequências analisando dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas (incluindo ou não o uso de softwares) que inter- relacionam estatísticas, geometria e álgebra para apresentar compilações, às nteses etc., referentes a resultados de pesquisas para a população. (GO-EMMAT406C) Interpretar dados de natureza científica e social apresentadas em quadros, tabelas e gráficos, identificando elementos e informações relevantes para avaliar propostas de intervenção na árealidade.	Amostragem. gráficos e diagramas estatísticos: histogramas, polígonos de frequências. Medidas de tendência central e medidas de dispersão.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais e cientes para sua Análise.	(GO-EMMAT407A) Interpretar dados e informações estatísticas divulgadas em textos diversos por meio de quadros, tabelas, diagramas, gráficos (histograma, box- plot, de ramos e folhas, entre outros), analisando os conceitos envolvidos (população e amostra, frequências absoluta e relativa, entre outros) para reconhecer o uso estatístico mais adequado. (GO-EMMAT407B) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de gráficos, analisando diferentes diagramas para determinar resultados e cientes.	Gráficos e diagramas estatísticos: histogramas, polígonos de frequências, diagrama de caixa, ramos e folhas. Medidas de tendência central. Medidas de dispersão.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).	(GO-EMMAT106A) Reconhecer situações cotidianas (Ciências da Natureza e Humanas ou tecnológicas) em que seja necessário fazer escolhas, utilizando procedimentos matemáticos para determinar a probabilidade dos riscos relativos cada decisão (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).	Porcentagem: cálculo de taxas, índices e coeficientes. Probabilidade simples e condicional. Eventos sucessivos, mutuamente exclusivos e não mutuamente exclusivos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	(GO-EMMAT310A) Compreender os conceitos essenciais da Análise combinatória identificando características específicas dos princípios aditivo e multiplicativo para resolver problemas do cotidiano que envolvam contagem. (GO-EMMAT310B) Resolver problemas de contagem, aplicando os princípios multiplicativo e/ou aditivo para avaliar propostas de intervenção na árealidade. (GO-EMMAT310C) Elaborar problemas de contagem que envolvem os princípios multiplicativo e/ou aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore, entre outros, para analisar resultados, adequar soluções, construir argumentação e tomar decisões.	Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações). princípio multiplicativo e princípio aditivo. Modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 3a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, árealizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	(GO-EMMAT311A) Identificar os conceitos essenciais de probabilidade, reconhecendo seus elementos em situações cotidianas (da área de Ciências da Natureza e Humanas, tecnológicas, técnico-científica etc.) para descrever o espaço amostral de eventos aleatórios. (GO- EMMAT311B) Compreender conceitos probabilísticos como espaço amostral de eventos aleatórios, analisando elementos e características específicas para calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados. (GO-EMMAT311C) Calcular medidas de tendência central ou de dispersão, utilizando procedimentos matemáticos para resolver e elaborar problemas cotidianos que envolvem o cálculo da probabilidade. (GO-EMMAT311D) Resolver problemas que envolvem conhecimentos de probabilidade e estatística, utilizando procedimentos matemáticos para avaliar propostas de intervenção na árealidade.	Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório. Contagem de possibilidades. cálculo de probabilidades simples. estatística descritiva (medidas de posição e medidas de dispersão). estatística indutiva, cálculo de probabilidades.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	(GO-EMMAT312A) Compreender os conceitos de probabilidade, a partir de exemplos (lançamento de dados ou moedas, retirada de cartas de baralho, entre outros), reconhecendo os elementos e características (espaço amostral, evento etc.) para calcular a probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (GO-EMMAT312B) Calcular a probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos, utilizando procedimentos matemáticos para resolver e elaborar problemas relacionados situações cotidianas (Ciências da Natureza, Ciências Humanas, técnico- científicas, entre outras). (GO-EMMAT312C) Resolver problemas cotidianos relacionados probabilidade, analisando as informações apresentadas em textos técnicos e/ou científicos para selecionar argumentos propostos como solução.	Eventos dependentes e independentes. cálculo de probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	(GO-EMMAT511A) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais (discretos ou não) e eventos (equiprováveis ou não) identificando e classificando seus elementos para analisar situações probabilísticas cotidianas. (GO-EMMAT511B) Reconhecer o caráter de variáveis aleatórias, identificando o espaço amostral para resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade em eventos equiprováveis. (GO- EMMAT511C) Investigar o cálculo de probabilidades, observando padrões, experimenta es e diferentes tecnologias, para conjecturar sobre propriedades probabilísticas.	Probabilidade. espaços amostrais discretos ou contínuos. Eventos equiprováveis ou não equiprováveis.
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(GO-EMMAT301A) Determinar o conjunto solução de equações lineares simultâneas, utilizando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais, para resolver problemas do cotidiano. (GO-EMMAT301B) Identificar problema do cotidiano relacionado Matemática ou outras áreas do conhecimento, envolvendo equações lineares simultâneas analisando informações apresentadas em textos científicos e outros para sua resolução. (GO-EMMAT301C) Resolver e elaborar problemas que envolvem sistemas de equações, analisando os resultados e a adequação das soluções propostas, para construir argumentação consistente.	Sistemas de equações lineares.

continua...

HABILIDADES DA BNCC	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM - DC - GOEM - 3a Série	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na Análise de ações envolvendo a utiliza o de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	(GO-EMMAT203A) Determinar os valores de capitais, juros (simples e composto), montantes, taxas e/ou tempos - com as conversões de medidas necessárias - de aplicações financeiras, empr stimo etc., utilizando procedimentos matemáticos adequados para compreender conceitos essenciais de investiga o, planejamento, execução, participa o e Análise do mundo contemporâneo. (GO-EMMAT203B) Compreender os conceitos essenciais da Matemática Financeira, educação financeira e outros, analisando dados e informações de problemas diversos (empréstimos, sa de, educação, nan as, sustentabilidade, tecnologia no mundo do trabalho etc.), para aplicar tais conceitos na busca por soluções de problemas. (GO-EMMAT203C) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na Análise de a es, envolvendo a utiliza o de aplicativos e a criação de planilhas (controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e composto etc.), identificando elementos essenciais da Matemática Financeira (capital, tempo, taxas, entre outros) para resolver problemas relacionados a educação financeira, mercado (cotidiano e de trabalho) etc. e propor e/ou participar de ações para investigar desa os do mundo contemporâneo.	cálculos envolvendo porcentagens. Conceitos de Matemática Financeira (juros simples, compostos, taxas de juros etc.). Alguns sistemas de amortização. Noções de fluxo de caixa. funções: exponenciais e logarítmicas.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou Análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.	(GO-EMMAT303A) Determinar os valores dos capitais, juros (simples e compostos), montantes, taxas e/ou tempos - com as conversões de medidas necessárias de aplicações financeiras, empréstimos, entre outros, utilizando procedimentos matemáticos adequados para interpretar situações que envolvem a ideia de juros apresentadas em textos, representações gráficas, quadros, tabelas e/ou planilhas (eletrônicas ou não). (GO- EMMAT303B) Interpretar situações que envolvem a ideia de juros (simples ou compostos) apresentadas em textos, representações gráficas, quadros, tabelas e/ou planilhas (eletrônicas ou não) verificando se o crescimento apresentado, em cada caso, linear ou exponencial para comparar o usos dos conceitos(juros simples ou compostos) em situações específicas do cotidiano. (GO-EMMAT303C) Comparar situações que envolvem a ideia de juros (simples ou compostos) analisando os resultados e a adequação das soluções propostas para construir argumentação consistente e tomar decisões acerca de situações relacionadas educação financeira, mercado (cotidiano e de trabalho) etc.	Conceitos de Matemática Financeira. Juros simples e juros compostos. funções e gráficos de funções de 1 grau associado a juros simples e função exponencial associado a juros compostos.

Fonte: Adaptação DC-GOEM

2.5 Enem - Exame Nacional do Ensino Médio

2.5.1 Apresentação

Desde a sua criação, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, tem por objetivo, avaliar o desenvolvimento do estudante ao final do Ensino Médio. Tem sido utilizado como forma de seleção de estudantes para se ingressarem no ensino superior. Com o passar do tempo, o Enem foi ganhando adesões de universidades e hoje, cerca de 500, já usam o resultado do Enem como forma de ingresso.

Seguindo ao que já está em prática nos exames do Enem, apresento exemplos de questões utilizadas em vários centros de seleções que já estão de acordo com a nova proposta da BNCC, uma vez que não é o conteúdo o item de papel principal no quesito aprendizagem, mas sim as competências e habilidades. Nelas, mesmo que o conteúdo esteja além do que se ensina até o Ensino Médio, ainda sim fazem parte do corpo de prova, uma vez que entende ser suficiente a habilidade desenvolvidas e aliadas às competências cognitivas adquiridas durante a fase de formação.

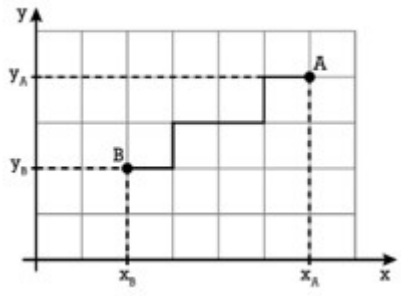
2.5.2 Exemplos de Habilidades Esperadas (Objetivos de Aprendizagens) por Meio de Objetos do Conhecimento não Convencionais no Ensino Médio.

Considerando que as aprendizagens aconteçam por meio de aquisições de competências e habilidades previamente traçadas pela BNCC, de modo que sejam possíveis de serem medidas as capacidades adquiridas pelo estudante para o domínio das mesmas, assim é como se apresenta o Enem, como um quantificador dessas aprendizagens por parte dos estudantes. Os exemplos de questões apresentadas abaixo, tem por finalidade mostrar que, independente do conteúdo contido em cada uma delas, se trabalhado ou não no Ensino Médio, deve o estudante por meio do que se esperava ter aprendido na Educação Básica, ser capaz de desenvolver as informações necessárias para levá-lo à compreensão do assunto e chegar ao resultado esperado na questão. Não se trata por exemplo, de apenas aplicação de fórmulas específicas de um certo conteúdo curricular.

2.6 Propostas de Questões: Enem/Vestibulares

2.6.1 Questão 01

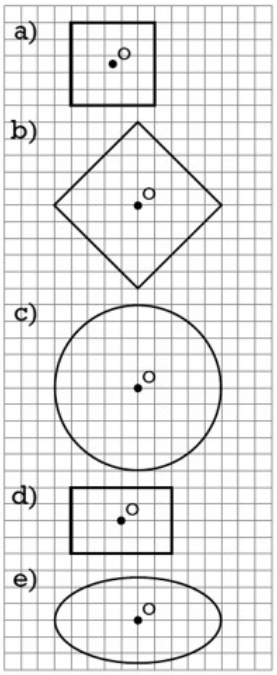
ESPM-2018) Num sistema de coordenadas cartesianas, considere que o caminho que liga dois pontos só poderá ser feito através de segmentos paralelos aos eixos coordenados. Dessa forma, teremos uma maneira diferente de calcular a distância entre dois pontos A e B. Vamos representá-la por $d(AB)$ e calculá-la da seguinte maneira: $d_{(A,B)} = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$, como no exemplo abaixo:



$$d_{(A,B)} = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

$$\Longrightarrow d_{(A,B)} = 4 + 2 = 6$$

De acordo com o texto acima, assinale a alternativa que representa o conjunto dos infinitos pontos P do plano que estão à distância $d_{(O,P)} = 5$ do ponto O:



Neste exemplo, temos claro o conteúdo trabalhado em Geometria do Taxista, onde é apresentada sua a métrica de cálculo de distância entre dois pontos no plano cartesiano. Com o conhecimento da métrica Euclidiana, para o cálculo de distância no plano, pode o estudante aplicá-la neste outro modelo de geometria, de forma adequada.

2.6.2 Questão 02

Enem 2018 - Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada. Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é
a) 30.
b) 40.
c) 45.
d) 60.
e) 68.

Esta questão do Enem aborda o Círculo de Apolônio, esperando do candidato a aplicação de habilidades desenvolvidas ainda no Ensino Médio.

2.6.3 Questão 03

Enem 2021 - Muitos brinquedos que frequentemente são encontrados em praças e parques públicos apresentam formatos de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Uma empresa foi contratada para desenvolver uma nova forma de brinquedo.
Com base na proposta apresentada, quantas figuras geométricas planas de cada tipo são formadas pela união das hastes?

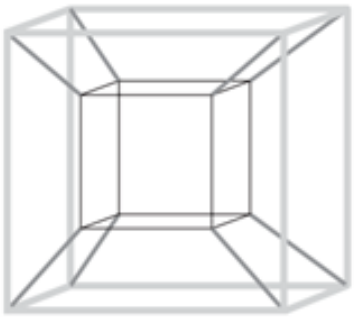
a) 12 trapézios isósceles e 12 quadrados.

b) 24 trapézios isósceles e 12 quadrados.

c) 12 paralelogramos e 12 quadrados.

d) 8 trapézios isósceles e 12 quadrados.

e) 12 trapézios escalenos e 12 retângulos.



Nesta questão, podemos até estar diante do que pode vir a ser a sombra em três dimensões de um $hipercubo\ quadri-dimensional$, ou simplesmente, um $Tesseract$. Mas, em momento algum foram precisas tais informações de conteúdo para almejar a resposta correta.

3 APRESENTAÇÃO DE MODELOS DE GEOMETRIAS.

Para a determinação de um modelo de geometria, faz necessário a definição primitiva de dois entes que, separadamente, formam dois conjuntos elementares, e que juntos, formam o conjunto universo deste modelo. Ainda, atribuir a este modelo duas métricas.

Os elementos do primeiro conjunto são chamados de Pontos. Os elementos do segundo conjunto, formados pela reunião de subconjuntos deste primeiro conjunto, são chamados de Linhas ou Retas. Já a reunião de todos esses elementos, Pontos e Retas, chamamos de Plano.

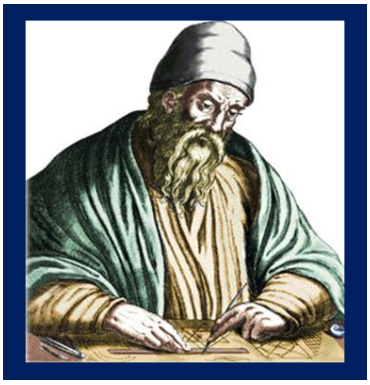
Quanto às métricas, uma delas é chamada de Função Distância, enquanto que a outra, chamada Função Medida de Ângulo.

Essas definições primitivas diferentes para Pontos e Retas, que caracterizam um modelo, poderão conduzir a resultados diferentes para as métricas mencionadas anteriormente. Tais alterações poderão levar ao encontro de resultados diferentes daqueles já conhecidos em um certo modelo.

Chamamos a atenção para o que aconteceu com a negação de um dos postulados-axiomas proposto por Euclides. Mantendo os quatro primeiros axiomas de Euclides e negando o quinto axioma, após muitos anos, matemáticos chegaram à conclusão da existência de novas geometrias.

Assim, este trabalho tem por uma das finalidades, promover discussão sobre consequências provocadas na Geometria Euclidiana, devido a alteração em um destes entes, no caso, a reta.

3.1 Geometria Euclidiana



Euclides de Alexandria
300 a.C.

A Geometria Plana apresentada por Euclides, amplamente estudada na Educação Básica, foi primeiro conhecimento matemático a ser estruturado e organizado, sendo apresentado na forma de um modelo axiomático. Em sua obra icônica, Os Elementos, totalizando um conjunto de 13 livros, Euclides começa por apresentar em seu primeiro Livro, um total de 23 definições assumidas como Termos Definidos. Apresenta 5 Postulados, que foram tratados como sendo afirmações específicas para a Geometria, cujo significado de postular alguma coisa, seria o de apresentar uma ideia inicial sobre esta coisa em questão, aceita como uma verdade, e a partir dessa ideia, poder concluir sobre outras ideias, também como sendo verdades, relacionadas a validade das primeiras. Apresentou ainda, 9 Axiomas ou Noções Comuns consideradas como afirmações generalizadas, também aceitas como verdadeiras e aplicáveis à todas as áreas do conhecimento. E assim, com todos esses itens, definições, postulados e axiomas, que foram aceitos sem demonstração, e que a partir deles, foram demonstrados 465 Proposições, das quais 93 são teoremas conhecidos num curso de Geometria Plana abordado na Educação Básica. Deste modo, apresentamos aqui, segundo tradução de Os Elementos por Irineu Bicudo **[13]**, tais definições (conceitos primitivos) e postulados:

3.1.1 Definições - Conceitos Primitivos

Tabela 22: Geometria Euclidiana: Definições - Conceitos Primitivos

Ord	Os Elementos	Versão atualizada
1	Ponto é aquilo de que nada é parte.	Um ponto é o que não tem partes.
2	Linha é comprimento sem largura.	Uma linha é o que tem comprimento sem largura.
3	Extremidades de uma linha são pontos.	As extremidades de uma linha são pontos.
4	Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.	Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades.
5	Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.	Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura.
6	Os lados de uma superfície são linhas.	As extremidades de uma superfície são linhas.
7	Superfície plana é a que está posta por igual com retas sobre si mesma.	Uma superfície plana é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.
8	Ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta;	Um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam numa superfície plana e que não fazem parte da mesma linha reta;

continua...

Ord	Os Elementos	Versão atualizada
9	Quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado de retilíneo;	E quando as linhas que contêm o ângulo são linhas retas, o ângulo chama-se retilíneo (raso);
10	Quando uma reta, tendo sido alterada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a que se alteou;	Quando uma linha reta, incidindo com outra linha reta, fizer com esta dois ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos é reto, e a linha reta incidente diz-se perpendicular à linha com a qual incide;
11	Ângulo obtuso é o maior do que um reto;	Um ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto;
12	Agudo, o menor que um reto;	Um ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto;
13	Fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa;	Uma fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14	Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.	Uma figura é aquilo que está contido por uma ou mais fronteiras.
15	Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação a qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si;	Um círculo é uma figura plana fechada por uma só linha de forma que todas as linhas retas, que de um ponto existente no meio da figura se conduzem para a circunferência, são iguais entre si;
16	O ponto é chamado de centro do círculo;	E o referido ponto da definição anterior chama-se centro do círculo;
17	Diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois;	O diâmetro do círculo é uma linha reta que passa pelo centro e termina, em ambas as direções, na circunferência e tal linha também bissecta o círculo;
18	Semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.	Um semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e a circunferência que é cortada pelo diâmetro. E o centro do semicírculo é o mesmo que o do círculo.
19	Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, e por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas;	Figuras retilíneas são as que são formadas por linhas retas, sendo as figuras triláteras as que são formadas por três linhas retas, as quadriláteras as que são formadas por quatro linhas retas, e as multiláteras as que são formadas por mais de quatro linhas retas;
20	Das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem três lados desiguais;	Das figuras triláteras, o triângulo equilátero é a que tem três lados iguais, o triângulo isósceles a que tem dois lados iguais e o triângulo escaleno a que tem os três lados desiguais;
21	Ainda das figuras trilateras, por um triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem três ângulos agudos;	Das figuras triláteras, o triângulo retângulo é a que tem um ângulo reto, o triângulo obtusângulo é a que tem um ângulo obtuso e o triângulo acutângulo é a que tem todos os ângulos agudos;
22	Das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, e que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tantos os lados opostos quantos os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios;	Das figuras quadriláteras, o quadrado é a que é simultaneamente equilátera e retângula; o oblongo é a que é retângula, mas não é equilátera; o rombo é uma figura equilátera, mas não retângula; e o rombóide é a que, tendo os lados e ângulos opostos iguais, não é nem equilátera nem retângula. E todas as outras figuras quadriláteras se chamam trapézios;
23	Paralelas são retas que, estão no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.	Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando na mesma superfície plana e sendo estendidas indefinidamente em ambas as direções, nunca se chegam a tocar.

Fonte: Adaptação de Os Elementos

3.1.2 Postulados

Tabela 23: Geometria Euclidiana: Postulados

Ord	Os Elementos	Versão atualizada
1º	Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.	Dois pontos distintos determinam uma reta.
2º	Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.	A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.
3º	E, com todo centro e distância, descrever um círculo.	É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4º	E serem iguais entre si todos os ângulos retos.	Todos os ângulos retos são iguais.
5º	E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.	Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.

Fonte: Adaptação de Os Elementos

Este 5^o postulado gerou muita discussão devido a forma como foi escrito, diferindo dos demais, gerando dúvidas se ele seria um postulado ou uma proposição. Entre tantos outros enunciados alternativos que apareceram para o 5^o postulado, foi John Playfair em 1795, quem apresentou um enunciado equivalente, com texto mais simples e claro que o original, que ficou conhecido como a mais famosa substituição, sendo: Por um ponto P fora de uma reta r, contidos em um mesmo plano, existe uma única reta nesse plano, passando por P que é paralela a r.

Por quase 2000 anos, esforços foram feitos na tentativa de se provar que o 5^o postulado, e embora tenham fracassado todos que trabalharam nessa tentativa de demonstração, foi com a substituição deste 5^o postulado, por outros postulados de diferentes teores, é que fez surgirem novas geometrias, as chamadas geometrias não euclidianas, e entre elas, a saber, conforme nos apresenta Plácido **[14]**:

Geometria Euclidiana Parabólica (Parábola = Igualdade):

Por um ponto P fora de uma reta r,
contidos em um mesmo plano,
existe uma única reta nesse plano,
passando por P que é paralela a r. (Playfair)

Geometria Hiperbólica (Hipérbole = Exagero):

Por um ponto P fora de uma reta r,
contidos em um mesmo plano,
é possível traçar pelo menos duas retas nesse plano,
passando por P que são paralelas a r.

Geometria Elíptica (Elipse = Falta):

Por um ponto P fora de uma reta r,
contidos em um mesmo plano,
não existe nenhuma reta nesse plano,
passando por P que seja paralela a r.

Já as Noções Comuns apresentadas em **[13]**, configuram-se como afirmações generalizadas, também aceitas como verdadeiras, aplicáveis em todas as áreas do conhecimento.

Noções Comuns

1. As coisas iguais a mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

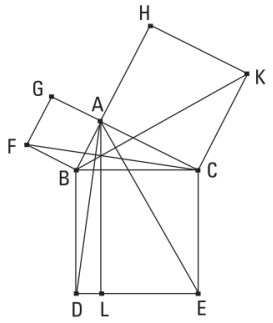
Fica evidente aqui, que Euclides, zelou pela necessidade de se postular o mínimo possível, fazendo com que as demais proposições fossem demonstradas fazendo uso das definições, postulados, axiomas e poposições já demonstradas anteriormente.

3.1.3 Distância

Na Obra de Euclides **[13]**, o Teorema de Pitágoras é demonstrado a partir das definições, postulados e axiomas por ele propostos. Na abordagem cartesiana, os axiomas são os mesmos axiomas da Álgebra, e a equação que expressa o Teorema de Pitágoras passa a ser a definição do termo distância. Veja:

Teorema de Pitágoras Demonstrado por Euclides

Proposição 47 – Livro 1 - Os Elementos - por Irineu Bicudo.



Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto. Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob $B\hat{A}C$ reto; digo que o quadrado sobre a $\overline{BC}$ é igual aos quadrados sobre as $\overline{BA}$, $\overline{AC}$. Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a $\overline{BC}$, e, por outro lado, os $\overline{GB}$, $\overline{HC}$ sobre as $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, e, pelo A, fique traçada a $\overline{AL}$ paralela a qualquer uma das $\overline{BD}$, $\overline{CE}$; e fiquem ligadas as $\overline{AD}$, $\overline{FC}$. E, como cada um dos ângulos sob $B\hat{A}C$, $B\hat{A}G$ é reto, então, as duas retas $\overline{AC}$, $\overline{AG}$, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a $\overline{BA}$, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a $\overline{CA}$ está sobre uma reta com a $\overline{AG}$. Pelas mesmas coisas, então, também a $\overline{BA}$ está sobre uma reta com a $\overline{AH}$. E, como o ângulo sob $D\hat{B}C$ é igual ao sob $F\hat{B}A$; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob $A\hat{B}C$ comum; portanto, o sob $D\hat{B}A$ todo é igual ao sob $F\hat{B}C$ todo. E como, por um lado, a $\overline{DB}$ é igual à $\overline{BC}$, e, por outro lado, a $\overline{FB}$, à $\overline{BA}$, então, as duas $\overline{DB}$, $\overline{BA}$ são iguais às duas $\overline{FB}$, $\overline{BC}$, cada uma a cada uma; e o ângulo sob $D\hat{B}A$ é igual ao ângulo sob $F\hat{B}C$; portanto, a base $\overline{AD}$ [é] igual à base $\overline{FC}$, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo $\overline{BL}$ [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base $\overline{BD}$ quanto estão nas mesmas paralelas $\overline{BD}$, $\overline{AL}$; e, por outro lado, o quadrado $\overline{GB}$ é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base $\overline{FB}$ quanto estão nas mesmas paralelas $\overline{FB}$, $\overline{GC}$. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo $\overline{BL}$ é igual ao quadrado $\overline{GB}$. Do mesmo modo, então, sendo ligadas a $\overline{AE}$, $\overline{BK}$, será provado também o paralelogramo $\overline{CL}$ igual ao quadrado $\overline{HC}$; portanto, o quadrado $BDEC$ todo é igual aos quadrados $\overline{GB}$, $\overline{HC}$. E, por um lado, o quadrado $BDEC$ foi descrito sobre a $\overline{BC}$, e, por outro lado, os $\overline{GB}$, $\overline{HC}$, sobre as $\overline{BA}$, $\overline{AC}$. Portanto, o quadrado sobre o lado $\overline{BC}$ é igual aos quadrados sobre os lados $\overline{BA}$, $\overline{AC}$. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

Tais demonstrações euclidianas, encontradas em sua obra Os Elementos seguem quase um padrão. Euclides começa com:

A) Enuncia a proposição, aqui, ele diz o que pretende provar. Parte introdutória.

B) Faz a apresentação intuitiva, usando desenho particular que satisfaça a hipótese da proposição.

C) Diz a realidade a ser feita. definição ou clareza.

D) Completa com desenho, utilizando de linhas, pontos, circunferências e outros.

E) Tira conclusões do desenho completado. Consequência de uma condicional.

F) Apresenta a Conclusão da demonstração.

Função Distância.

Intuitivamente, "distância" é uma função que atribui um número $d_{(P,Q)}$ a cada par de pontos P, Q. Não importa se medimos de P a Q ou de Q para P, ou seja, $d_{(P,Q)} = d_{(Q,P)}$. Além disso, quando a distância entre dois pontos for zero é porque os pontos são os mesmos.

Desta forma, função distância em um conjunto $\mathcal{P}$ é uma função $d : \mathcal{P}$ x $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$ de tal forma que para todos $P, Q \in \mathcal{P}$

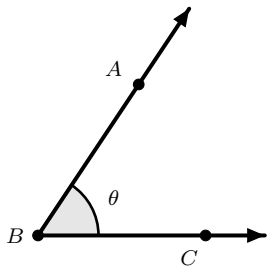
a) $d_{(P,Q)} > 0$

b) $d_{(P,Q)} = 0$ se, e somente se $P = Q$;

c) $d_{(P,Q)} = d_{(Q,P)}$.

3.1.4 Ângulo

Na geometria métrica euclidiana, dados os pontos A, B e C, não colineares, chamamos por ângulo $A\hat{B}C$ à figura obtida pela união de:



$$A\hat{B}C = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}.$$

Assim, chamamos por ângulo à reunião de duas semirretas (não colineares) de mesma origem.

Em $A\hat{B}C$, o ponto B é chamado de vértice do ângulo, enquanto que as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, são chamadas de lados do ângulo.

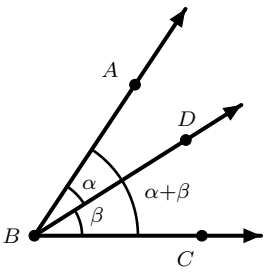
Função Medida de Ângulo:

Que r_0 seja um número real fixo positivo. Em uma geometria métrica arbitrária, a medida de ângulo, baseada em r_0, fica definida como sendo uma função m do conjunto $\mathcal{A}$ de todos os ângulos para o conjunto de números reais, de tal forma que:

Se $0 < A\hat{B}C \in \mathcal{A}$ então $0 < m(A\hat{B}C) < r_0$;

Se $\overrightarrow{BC}$ está na borda do meio plano H_1 e se θ é um número real com $0 < \theta < r_0$, então há uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ única com $A \in H_1$ e $m(A\hat{B}C) = \theta$;

Se $D \in int(A\hat{B}C)$
então $m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = m(A\hat{B}C)$.



Aqui, estendemos sem prejuízo, a Função Medida de Ângulo para dois casos especiais, em que os pontos A, B e C, sejam colineares:

- Ângulo Nulo: se $C \in \overrightarrow{BA}$, então $m(A\hat{B}C) = 0$.

- Ângulo Raso: se $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são semirretas opostas, então $m(A\hat{B}C) = 180^o$.

Definindo um modelo por meio da reunião de Ponto, Reta, Distância e Ângulo, então, com a métrica euclidiana $m_\mathcal{E}$, temos o Modelo Euclidiano $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}; \mathcal{L}_\mathcal{E}; d_\mathcal{E}; m_\mathcal{E}\}$.

Como já dito anteriormente, a Geometria Plana Euclidiana é praticamente a única geometria apresentada na Educação Básica, fazendo com que muitos dos estudantes que a aprenderam, acreditem ser a única forma de geometria existente. Nada sabendo dos questionamentos gerados pelo 5º postulado, conhecido como sendo o postulado das paralelas, que abriu caminho para novas concepções de geometrias, diferentes da euclidiana, fundamentadas ou não no plano. Convém aqui dizer que, ainda que uma geometria seja desenvolvida no plano, ou seja, ser uma Geometria Plana, pode ela não vir a ser uma Geometria Euclidiana. E este é um dos propósitos deste trabalho. Para isso, fizemos uma apresentação da Geometria Cartesiana; apresentamos uma geometria plana, cuja definição de reta difere daquela apresentada por Euclides, o chamado Modelo de Moulton, que foi usado como pano de fundo na comparação feita com a Geometria Euclidiana. O intuito é gerar muitos questionamentos oportunos que sirvam de Objetos de Aprendizagem a serem trabalhados no desenvolvimento de habilidades e competências propostas pela BNCC.

3.2 Geometria Cartesiana

René Descartes
1596–1650

Para muitos, René Descartes, é sem dúvidas, considerado o matemático mais conhecido do século 17. Ainda jovem, teve por oportunidade viajar por vários lugares da Europa, motivo de sua presença constante em Campanhas Militares, embora não fosse ali um soldado profissional, conforme apresentado, de forma descontraída, por Mlodinow **[8]**. Isso permitiu que ele pudesse conhecer alguns dos principais estudiosos e cientistas de sua época, com quem pode conversar e discutir livremente, por exemplo, sobre o método de Aristóteles, que era o de se ensinar enquanto andava. Tais experiências o levaram a se tornar "o pai da filosofia moderna". Enquanto René e a Filosofia pregavam uma quebra com o passado, seu pensamento matemático não se portava assim. Seu pensamento era inverso a isso e baseava-se em conhecimentos e problemas propostos por aqueles que os antecederam no passado, como exemplo, a geometria grega; o problema das retas de Pappus, a construção das raízes cúbicas ou quárticas de qualquer equação advindas por exemplo, da proposta de duplicação do cubo, segundo trabalho de Meneacmus, entre outros.

Nesta busca de trabalhar com o conhecimento científico desenvolvido no passado, Descartes veio a desenvolver aquela que foi a sua maior contribuição, a Geometria Cartesiana, conhecida como a Geometria Analítica, apresentada em sua obra "La Géométrie" **[9]**.

A Geometria Analítica, embora seja vista como uma forma alternativa de expressar a Geometria Euclidiana sob o olhar da Álgebra, para Descartes, poderia ser a tradução da Álgebra em linguagem geométrica, como pode ser constatado nos títulos iniciais dos capítulos do Livro 01 de La Géométrie **[9]**: Como os cálculos da aritmética se relacionam com as operações da geometria p.297; Como a multiplicação, a divisão e a extração da raiz quadrada são realizadas geometricamente p.293; Como usamos símbolos aritméticos em geometria p.299, ...

Enquanto as restrições na Geometria Clássica apareciam pelo uso de compasso e régua não graduada para às construções, na Geometria Analítica, as restrições se dão pelo uso de equações de primeira e segunda ordem, por exemplo:

$$y = mx + q \text{ (uma linha), ou}$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (um círculo).}$$

Em busca de uma definição mais formal, os termos definidos ponto e reta já definidos por Euclides, recebem uma nova definição, a saber:

3.2.1 Definições - Conceitos Primitivos

Tabela 24: Geometria Cartesiana: Definições - Conceitos Primitivos

Ord	Entes	Conceitos Primitivos: Geometria Cartesiana
1	Ponto	Ponto é representado através de um par de números reais ordenado (x, y) chamadas de coordenadas cartesianas. Ponto: $\mathcal{P} = R^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
2	Linha reta:	É definida pelo conjunto de coordenadas cartesianas (x, y) dos pontos que satisfazem uma equação $y = mx + q$ (primeiro grau). Reta Vertical: $\mathcal{L}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$ Reta não Vertical: $\mathcal{L}_{(m,q)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + q\}$, caso m=0, teremos uma reta horizontal com $y = q$. Chamamos por $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ o conjunto de todas as linhas verticais e não verticais, ou seja, $\mathcal{L}_\mathcal{E} = \{\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_{(m,q)}\}$, que são as mesmas Linhas Retas definidas por Euclides.
3	Segmento de reta:	Se A e B, são dois pontos distintos, chamamos por segmento de reta $\overline{AB}$ conjunto de pontos alinhados com A e B, compreendidos entre A e B, ou seja: $\overline{AB} = \{C \in R^2 \mid C = A + t(B - A)$, para $0 \leq t \leq 1\}$. Os pontos A e B são chamados de Extremidades do segmento$\overline{AB}$.
4	Semirreta:	Se A e B são dois pontos distinto, chamamos por semirreta $\overrightarrow{AB}$ conjunto de pontos C alinhados com A e B, tal que $A - C - B$ ou $A - B - C$, ou seja: $\overrightarrow{AB} = \{C \in R^2 \mid C = A + t(B - A)$, para $t \geq 0\}$. O ponto A é chamado de origem da semirreta.
5	Semiplano:	Em uma geometria métrica, que $\ell \in \mathcal{L}$, e que H_1, e H_2 sejam os semiplanos determinados por ℓ. Dois pontos A e B estão do mesmo lado de ℓ se ambos pertencem a H_1 ou ambos pertencem H_2. E os pontos A e B estão em lados opostos de ℓ se um pertence a H_1 e o outro pertence a H_2. Se $A \in H_1$, dizemos que H_1 é o semiplano determinado por ℓ que contém A. SeH_1 é um semi plano determinado pela linha ℓ, então a borda de H_1 é ℓ.
6	Plano	O modelo $C = \{\mathcal{P}; \mathcal{L}_\mathcal{E}\}$, é chamado de Plano Cartesiano.

O plano cartesiano fica determinado pela existência de duas retas perpendiculares entre si e graduadas, contendo cada uma delas, o conjunto ordenado dos números reais, em que o ponto de interseção é chamado de origem. Tais retas são chamadas de eixos coordenados, sendo o eixo na horizontal, chamado de eixo das abscissas - identificado como eixo x, enquanto o eixo vertical, chamado de eixo das ordenadas - identificado por eixo y. Já seus pontos são obtidos por meio de um par ordenado (x, y) de números reais, em que x (distância Ox) nos dá o valor a ser representado no eixo das abcissas, e o y (distância Oy), o valor a ser representado no eixo das ordenadas.

Fica definido que o ponto (0, 0) representa o ponto de origem do plano cartesiano, e que na horizontal, a graduação em x é crescente para a direita e decrescente para a esquerda, enquanto na vertical, o eixo y é crescente para cima e decrescente para baixo.

3.2.2 Distância

A função de distância para o plano cartesiano, foi construída segundo a métrica de distância euclidiana, a saber:

Distância Cartesiana: Seja $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. A distância cartesiana, dada pela função $d(P, Q)$, conhecida como a métrica euclidiana $d_{\mathcal{E}}$, dada por:

$$d\left(P, Q\right) = d_{\mathcal{E}} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Fica, deste modo, o plano cartesiano representado pelo modelo $\mathcal{C} = \{\mathcal{P}; \mathcal{L}_{\mathcal{E}}; d_{\mathcal{E}}\}$.

3.2.3 Ângulo

A métrica para medição de ângulos foi adotada como sendo a mesma para a métrica euclidiana $m_{\mathcal{E}}$.

Desta forma, o Modelo Cartesiano, passa a ser representado pelo modelo $\mathcal{C} = \{\mathcal{P}; \mathcal{L}_{\mathcal{E}}; d_{\mathcal{E}}; m_{\mathcal{E}}\}$.

3.3 Geometria de Moulton

Forest Ray Moulton
1872–1952

O presente trabalho tem por objetivo, apresentar o Modelo de Geometria proposta por Moulton, como sendo uma das geometrias não euclidianas, mostrando suas concepções com relação às retas, medidas de distâncias e medidas de ângulos. Fazemos comparações e mostramos transformações/modificações sofridas em figuras clássicas da Geometria Plana Euclidiana. Tal geometria, segundo Castrucci **[12]**, apresenta-se como exemplo importante no estudo da Geometria Projetiva. Seu autor, Forest Ray Moulton, nasceu em 29 de abril de 1872 - Michigan – EUA, e em 1902 apresentou seu modelo para a Geometria, como registrado por Martin **[10]**. Faleceu em 7 de dezembro de 1952 – Illinois – EUA. Foi um astrônomo americano. Ele foi um dos proponentes da Hipótese Planetesimal da Origem e Evolução do Sistema Solar.

3.3.1 Definições - Conceitos Primitivos

A proposta de geometria idealizada por Moulton, define Ponto da mesma forma definida na Geometria Euclidiana e no plano cartesiano, enquanto que para as Retas, é introduzida uma troca parcial das retas euclidianas, daquelas que, quando inclinadas e possuem coeficiente angular, $m > 0$ (crescentes), que é valor da tangente do ângulo de inclinação da reta com o eixo x. São as retas cuja forma é dada por $\mathcal{M}_{m,q}$. As demais linhas são mantidas como sendo as mesmas euclidianas, ou seja, as retas verticais, as retas inclinadas com $m < 0$ (decrescentes) e ainda as reta horizontais, em que $m = 0$ (constantes), seguem o modelo Euclidiano, conforme apresetado por Millman **[11]**.

Assim, temos:

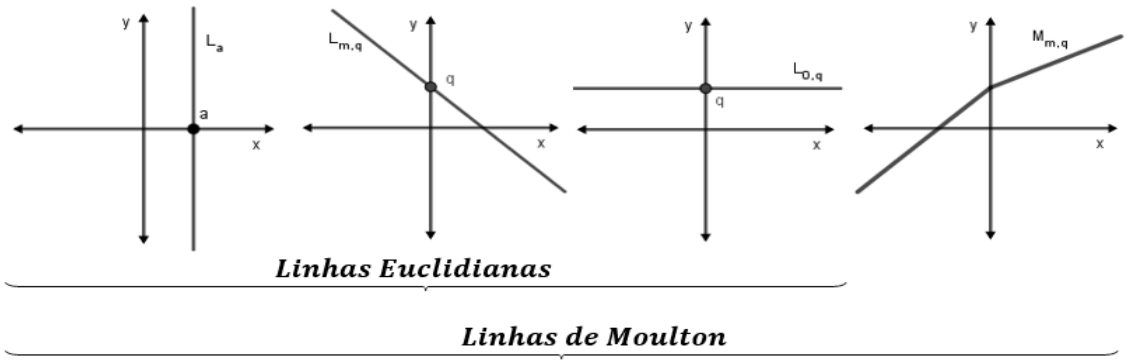
Tabela 25: Geometria de Moulton: Definições - Conceitos Primitivos

Ord	Entes	Axiomas: Geometria de Moulton
1	Ponto	Segue a mesma definição para os modelos Euclidiano e Cartesiano $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \| x, y \in= \mathbb{R}\}$
2	Linha reta	Linhas: $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \{\mathcal{L}_a,\ \mathcal{L}_{m,q}, \mathcal{M}_{m,q}\}$, em que: $\begin{cases} \mathcal{L}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}; \\ \mathcal{L}_{m,q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + q \text{ , para } m \leq 0\}; \\ \mathcal{M}_{m,q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} y = mx + q, \text{ para } x \leq 0; \\ y = \frac{1}{2}mx + q \text{ , para } x > 0. \end{cases} \text{ para } m > 0 \end{cases}$
3	Segmento de reta:	Se A e B, são dois pontos distintos, chamamos por segmento de reta $\overline{AB}$ conjunto de pontos alinhados com A e B, compreendidos entre A e B, ou seja: $\overline{AB} = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A)$, para $0 \leq t \leq 1\}$. Os pontos A e B são chamados de Extremidades do segmento$\overline{AB}$.
4	Semirreta:	Se A e B são dois pontos distinto, chamamos por semirreta $\overrightarrow{AB}$ o conjunto de pontos C alinhados com A e B, tal que $A - C - B$ ou $A - B - C$, ou seja: $\overrightarrow{AB} = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A)$, para $t \geq 0\}$. O ponto A é chamado origem da semirreta.
5	Semiplano:	Em uma geometria métrica, que $\ell \in \mathcal{L}$, e que H_1, e H_2 sejam os semiplanos determinados por ℓ. Dois pontos A e B estão do mesmo lado de ℓ se ambos pertencem a H_1 ou ambos pertencem H_2. E os pontos A e B estão em lados opostos de ℓ se um pertence a H_1 e o outro pertence a H_2. Se $A \in H_1$, dizemos que H_1 é o semiplano determinado por ℓ que contém A. Se H_1 é um semi plano determinado pela linha ℓ, então a borda de H_1 é ℓ.
6	Plano	O modelo $\mathcal{M} = \{\mathcal{P}; \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\}$, é chamado de Plano de Moulton.

Uma visão do comportamento da linha de Moulton $\mathcal{M}_{m,q}$ é a comparação com a trajetória

de um raio de luz que, ao passar pelo eixo y, sofre uma refração, mudando sua inclinação para a metade do valor da inclinação do raio incidente.

Figura 1: Modelo de Moulton: Retas



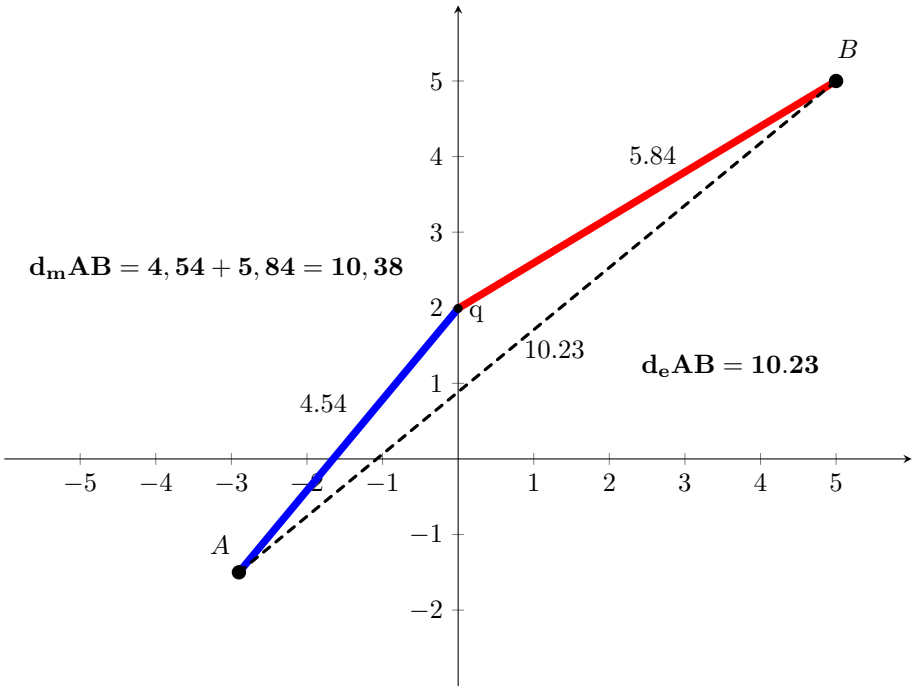
Fonte: Elaborada pelo Autor.

3.3.2 Distância

No modelo de Moulton, a distância entre os pontos $P = (x_1,\ y_1)$ e $Q = (x_2,\ y_2)$. em $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$d_{\mathcal{M}} = \begin{cases} d_{\mathcal{E}}\left(P,(0,q)\right) + d_{\mathcal{E}}\left((0,q),Q\right) \text{ se } \ P,Q \in \mathcal{M}_{m,q} \text{ com } \ x_1 \cdot x_2 < 0 \\ d_{\mathcal{E}}\left(P,Q\right) \text{ para os demais casos.} \end{cases}$$

Figura 2: Distância de Moulton



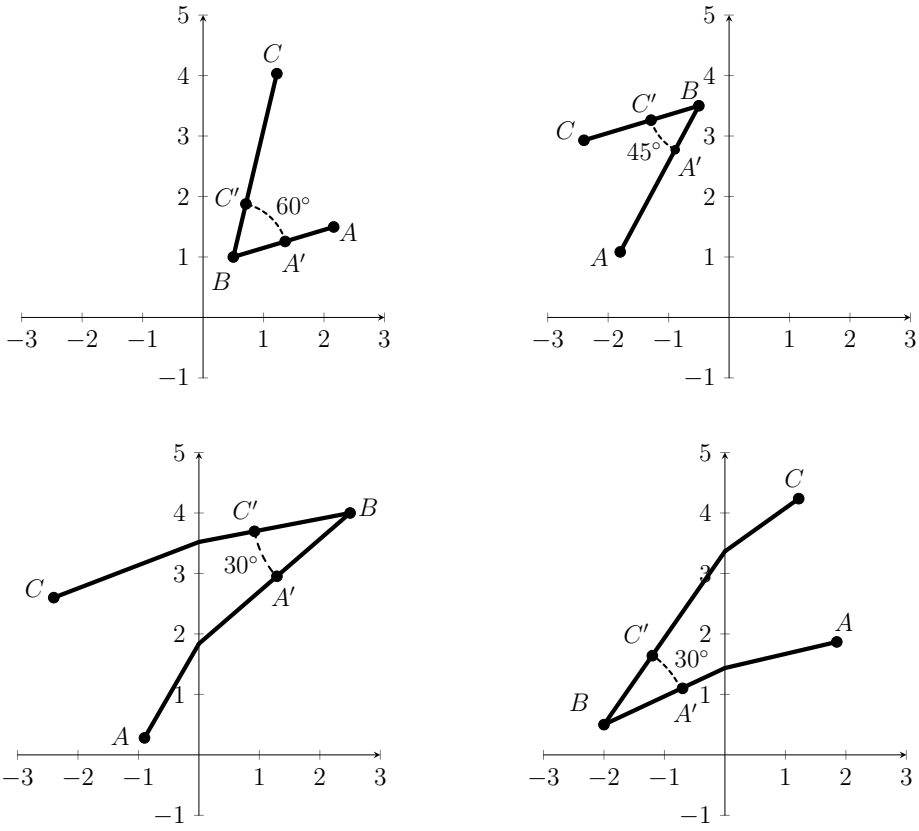
Fonte: Elaborada pelo Autor.

3.3.3 Ângulo

A função medida de ângulo para o modelo de Moulton, segue a mesma descrita na função medida de ângulo euclidiano. Sendo que:

- Se B $\notin \mathcal{L}_0$, ou seja, B $\notin$ ao eixo y, então a $m(ABC)$ será dada pela medida do ângulo formado pelos dois segmentos de origem em B, sendo que para isso, devemos escolher A'$\in$ int($\overline{BA}$) e $C' \in$ int($\overline{BC}$) de modo que A', B e C' fiquem todos do mesmo lado de $\mathcal{L}_0$, conforme mostram as figuras.

Figura 3: Modelo de Moulton: Medida de Ângulo com o Vértice B $\notin \mathcal{L}_0$



$$m_{\mathcal{M}}\left(A\hat{B}C\right) = m_{\mathcal{E}}\left(A'\hat{B}C'\right).$$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

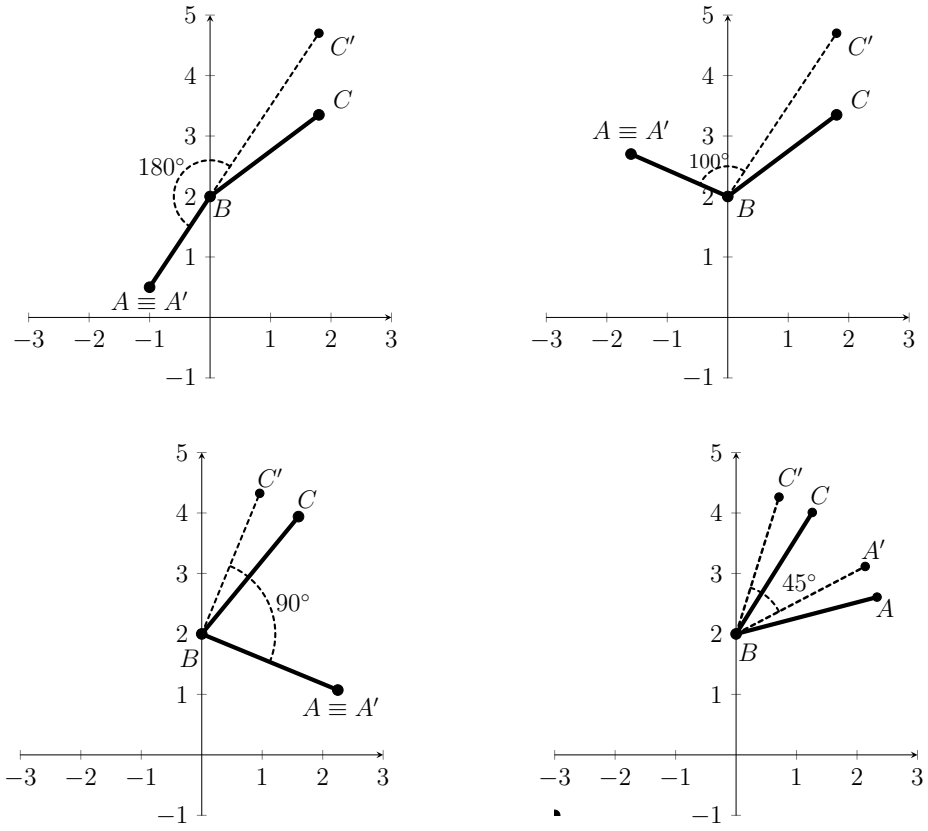
- Agora, se $B = (0, q)$, temos que $B \in \mathcal{L}_0$, então devemos observar duas condições:

* se $x > 0$ e $y > q$: Para cada $q \in \mathbb{R}$, e cada ponto $P = (x, y)$ temos que P' pode ser dado por:

$$P' = (x, 2y - q) \quad se \quad x > 0 \quad e \quad y > q$$

Exemplo: Seja $B(0, 2)$ e $C(2; 3, 5)$. Como $2 > 0$ e $3, 5 > 2$, temos que $C' = (2, 2 \cdot 3, 5 - 2) = (2, 5)$, se tornando uma maneira simples de determinar C'. Contudo, basta tomar qualquer ponto pertencente à semireta $\overrightarrow{BC'}$.

Figura 4: Modelo de Moulton: Medida de Ângulo com o Vértice B $\in \mathcal{L}_0$



$$m_{\mathcal{M}}\left(< A\hat{B}C\right) = m_{\mathcal{E}}(< A'BC').$$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

E desta forma, fica o Modelo de Moulton definido como sendo: $\mathcal{M} = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}}, d_{\mathcal{M}}, m_{\mathcal{M}}\}$, em que, este modelo continua sendo um modelo cartesiano, porém com conceito primitivo sobre a reta, diferente do Modelo Euclidiano.

4 PRODUTO EDUCACIONAL: Trilhas de Aprofundamento

GEOMETRIA DE MOULTON x GEOMETRIA EUCLIDIANA

A presente Trilha de Aprofundamento visa proporcionar uma vasta revisão de conteúdos sobre Geometria Euclidiana, amplamente abordada na Educação Básica. Para isso, fazemos uso do plano cartesiano e, como proposta para discussão, um confronto direto com uma geometria não euclidiana, no caso, a geometria proposta por Moulton.

Apresentamos anteriormente que os modelos de Euclides e de Moulton são modelos planos e que podem ser retratados sob o modelo cartesiano, através de seus eixos x e y.

São propostos exercícios, cujas resoluções leve o estudante a desenvolver cada vez mais sua capacidade investigativa, a adquirir conhecimento e, por meio de habilidades aprendidas em sua vida acadêmica, chegar a resultados conclusivos sobre o tema, preparando-o para novos desafios no campo da ciência.

Outra proposta também muito interessante para o desenvolvimento da aprendizagem do estudante, é a introdução ao uso de software de geometria dinâmica, ainda no Ensino Médio, como uma importante ferramenta facilitadora para a construção de seu conhecimento por meio de seus estudos.

Competências e Habilidades a serem esenvolvidas

Em conformidade com a BNCC e a DC-GOEM, apresentamos abaixo, a relação de Competências e Habilidades esperadas a serem revisadas e alcançadas com o desenvolvimento deste estudo.

Tabela 26: Revisar: Habilidades Refentes aos EF - Anos Iniciais

Geometria - Habilidades - Ensino Fundamental - Anos Iniciais	
(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.	**(EF03MA15-A)** Fazer justificativas, argumentações e explicações de por que uma figura se encaixa ou não na categoria de quadrilátero ou triângulo. **(EF03MA15-B)** Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices, registrando essas características em esquemas e tabelas.
(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.	**(EF04MA16)** Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.	**(EF04MA18-A)** Manusear e observar os diferentes tipos de sólidos geométricos, classificar e identificar seus principais elementos utilizando dobraduras e esquadros. **(EF04MA18-B)** Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria dinâmica.
(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.	**(EF05MA14-A)** interpretar diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. **(EF05MA14-B)** Utilizar diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.
(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.	**(EF05MA15-A)** Interpretar e descrever a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros. **(EF05MA15-B)** Representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Fonte: Proposta pelo Autor

Tabela 27: Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 6^{o}Ano

Geometria - Habilidades - Ensino Fundamental - 6o Ano	
(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.	**(EF06MA16-A)** Descrever, interpretar e representar a localização ou a movimentação de pontos no primeiro quadrante do plano cartesiano. **(EF06MA16-B)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. **(EF06MA16-C)** Contextualizar o uso do plano cartesiano em mapas, GPS e plantas de construção, etc.
(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.	**(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	**(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e na construção de quadriláteros, entre outros.
(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).	**(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Fonte: Proposta pelo Autor

Tabela 28: Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 7^{o}Ano

Geometria - Habilidades - Ensino Fundamental - 7o Ano	
(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	**(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.	**(EF07MA22-A)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas. **(EF07MA22-B)** Identificar os elementos básicos de uma circunferência (raio, diâmetro, arco, flecha e corda) e suas diversas aplicações em resoluções de problemas. **(EF07MA22-C)** Resolver problemas que envolvam objetos equidistantes, utilizando o conhecimento de circunferência.
(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.	**(EF07MA23-A)** Explorar as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, através de atividades experimentais com dobraduras e materiais manipuláveis. **(EF07MA23-B)** Identificar pares de ângulos consecutivos, adjacentes (caso particular dos ângulos consecutivos), colaterais internos e externos, alternos internos e externos, correspondentes e opostos pelo vértice. **(EF07MA23-C)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica, para a utilização em situações-problema diversas.
(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.	**(EF07MA24-A)** Construir triângulos, usando régua e compasso. **(EF07MA24-B)** Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados. **(EF07MA24-C)** Verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e aplicar este resultado para demonstrar o Teorema do Ângulo Externo.
(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.	**(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.	**(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.	**(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Fonte: Proposta pelo Autor

Tabela 29: Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 8^{o}Ano

Geometria - Habilidades - Ensino Fundamental - 8o Ano	
(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	**(EF08MA14-A)** Reconhecer os critérios de congruência de triângulos, por meio de investigações usando softwares de geometria dinâmica ou materiais manipuláveis, bem como suas respectivas demonstrações. **(EF08MA14-B)** Identificar triângulos congruentes seguindo os critérios de congruência de triângulos. **(EF08MA14-C)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos e da verificação usando materiais manipuláveis e/ou softwares de geometria dinâmica.
(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.	**(EF08MA16-A)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, a construção de triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares através de esquadro, régua, compasso e outros instrumentos. **(EF08MA16-B)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadro, compasso, régua e outros instrumentos.
(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: Proposta pelo Autor

Tabela 30: Revisar: Habilidades Refentes aos EF - 9^{o}Ano

Geometria - Habilidades - Ensino Fundamental - 9o Ano	
(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: Proposta pelo Autor

Tabela 31: Desenvolver: Habilidades Proposta para o Ensino Médio

HABILIDADES: Competência Específica 3	
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1° ou 2° graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT315)	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
HABILIDADES: Competência Específica 4	
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT405)	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
HABILIDADES: Competência Específica 5	
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT510)	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte: Proposta pelo Autor

4.1 Trilha de Aprofundamento 01: Estudo de Reta

Esta Trilha, tem por finalidade desenvolver o estudo da reta euclidiana no plano cartesiano $(y = mx + q)$, usando a reta de Moulton como instrumento fomentador para a discussão do tema.

Figura 5: Reta Euclidiana $\times$ Reta de Moulton

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\qquad$ $m_{CB} = \frac{1}{2} m_{AC}$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Espera-se com esta trilha, o desenvolvimento da competência de encontrar a equação de uma reta, conhecido dois de seus pontos.

Para isso, são exploradas as seguintes habilidades:

Encontrar o coeficiente angular da reta conhecendo dois pontos.

Achar o ponto C, contido no eixo y, dados as extremidades A e B, podendo eles estarem ou não no mesmo quadrante.

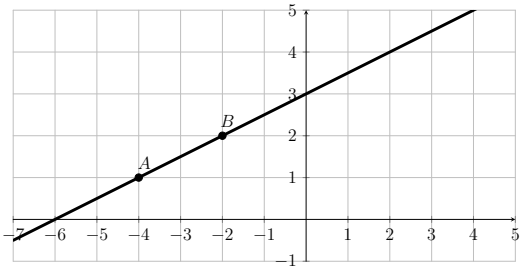
No item b, usamos a condição de alinhamento entre três pontos distintos, em que o determinante formado pelas coordenadas desses três pontos é zero, para determinar a equação da reta euclidiana proposta.

Exercício 01)
Dados os pontos A e B abaixo, determinar a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{AB}$ segundo os Modelos de Euclides e de Moulton:
a) $A = (-3; 4)$ e $B = (2; 1)$
b) $A = (-4; 1)$ e $B = (-2; 2)$
c) $A = (4; 5)$ e $B = (2; 3)$
d) $A = (-3; 1)$ e $B = (3; 4)$

Exemplo b)

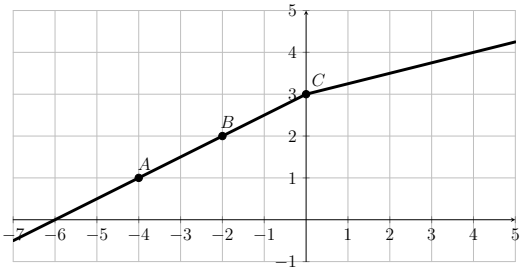
Sejam $A = (-4; 1)$ e $B = (-2; 2)$, determinar a $\overleftrightarrow{AB}$.

a) Modelo Euclidiano



$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y \\ -4 & 1 \\ -2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}: y = \frac{1}{2}x + 3$$

b) Modelo de Moulton



para x=0, temos y=3, $\therefore C = (0; 3)$

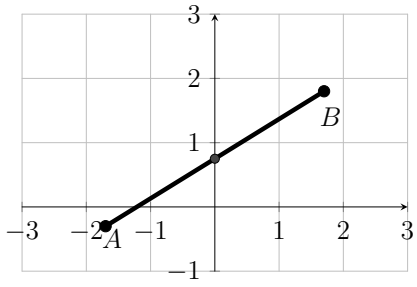
$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3, \ para\ x \leq 0 \\ ou \\ y = \frac{1}{4}x + 3, \ para\ x \geq 0 \end{cases}$$

Sugestão: Realizar essa Trilha também com uso de Software de Geometria Dinâmica - Geogebra, introduzindo o estudo de Programação.

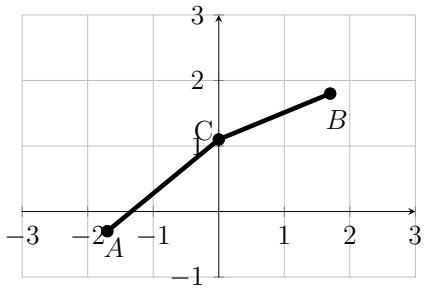
4.2 Trilha de Aprofundamento 02: Distância entre Dois Pontos

Esta Trilha, tem por finalidade desenvolver o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano, utilizando a conhecida fórmula de Pitágoras. Para isso usamos o segmento $\overline{AB}$ segundo conceitos da Geometria de Moulton, para assim, proceder o cálculo de sua medida.

Figura 6: Medida de Segmento Euclidiano $\times$ Medida de Segmento de Moulton



$d_{\mathcal{E}}(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$



$d_{\mathcal{M}}(A,B) = d_{\mathcal{E}}(A,C) + d_{\mathcal{E}}(C,B)$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Em alguns casos, aqui é necessário primeiro descobrir as coordenadas do ponto C, pertencente ao eixo y, para só depois calcular as distâncias euclidianas de cada trecho. A determinação deste ponto é fundamental para a resolução de muitos dos exercícios propostos nestas trilhas.

Exercício 02)

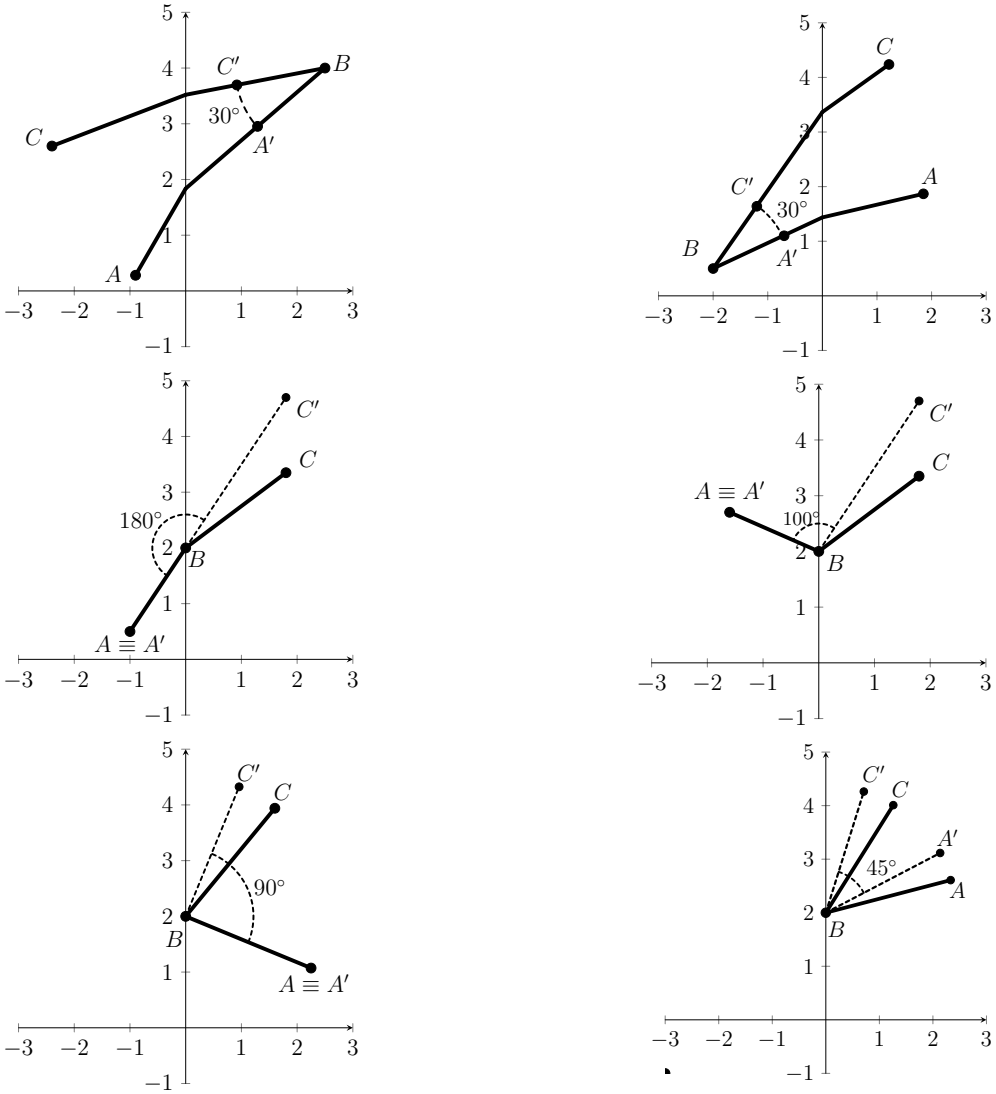
Dados os pontos A e B abaixo, como sendo as extremidades do segmento, segundo Moulton, $\overline{AB}$, determine sua medida.
a) $A = (-3; 4)$ e $B = (2; 1)$
b) $A = (-3; 0)$ e $B = (3; 2)$
c) $A = (4; 5)$ e $B = (-2; -1)$

Sugestão: Software de Geometria Dinâmica - Geogebra. Nesta trilha, pode vir a ser explorado a programação para determinação do ponto C de forma automática, e assim determinar a medida do segmento AB, com um simples mover de controles deslizantes.

4.3 Trilha de Aprofundamento 03: Ângulos entre Segmentos

Esta Trilha, vem para explorar habilidades que, ao seguir roteiro de cálculo, o estudante possa desenvolver sua capacidade de compreensão, pesquisa e determinação de soluções desejadas, levando-o a conjecturar sobre estes resultados encontrados. Para isso, é usada a fórmula da tangente da diferença entre arcos, mostrada abaixo, e construções geométricas para constatação de resultados.

Figura 7: Medidas de Ângulos: Euclides × Moulton



$$tg(\theta) = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \times tg\beta} = \frac{m_{A'B} - m_{BC'}}{1 + m_{A'B} \times m_{BC'}}$$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

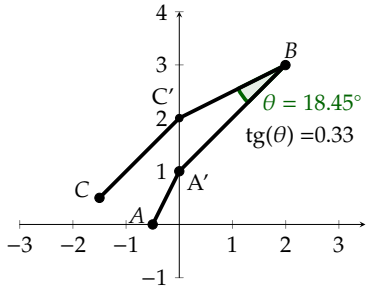
Exercício 03)
Dados os pontos A, B e C abaixo, determinar a medida do ângulo $A\hat{B}C$ segundo o Modelo de Moulton:
a)$A = (-4; 8)$, $B = (10; 4)$ e $C = (18; 16)$

b)$A = (-\frac{1}{2}; 0)$, $B = (2; 3)$ e $C = (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$

Resolução:

A'=(0; 1) e C'=(0; 2), assim:

$$m_{A'B} = \frac{3-1}{2-0} = 1 \text{ e}$$
$$m_{BC'} = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$
$$tg(\theta) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = 0,33$$



c) $A = (-1; \frac{1}{2})$, $B = (0; 2)$ e $C = (2; \frac{7}{2})$

Aqui, o estudante deve concluir que os pontos A, B e C estão alinhados.

d) $A = (2; 1)$, $B = (0; 2)$ e $C = (\frac{5}{2}; 7)$

O estudante deve concluir que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ não são perpendiculares.

e) $A = (-2; 2)$, $B = (0; 1)$ e $C = (2; 3)$

O estudante deverá concluir que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares.

f) $A = (6; 4)$, $B = (0; 3)$ e $C = (4; 7)$

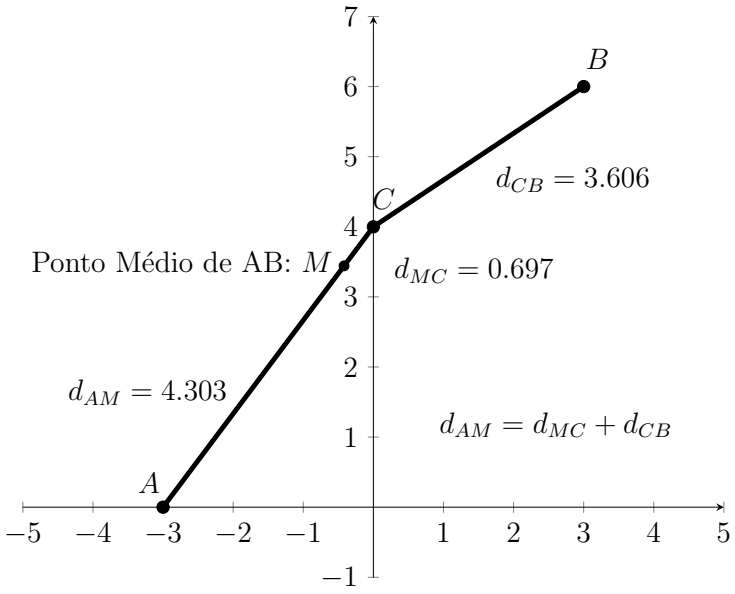
Sugestão: O uso aqui do Software de Geometria Dinâmica - Geogebra, permite ao estudante verificar a solução gráfica do problema, levando-o a realizar conjecturas sobre o tema.

4.4 Trilha de Aprofundamento 04: Ponto Médio de um Segmento

Esta Trilha, tem por finalidade reforçar o aprendizado do uso do software de geometria dinâmica, explorando um pouco mais suas funções pré-definidas, preparando o estudante para as Trilhas futuras.

Embora exista a função pré-definida Ponto Médio, no Geogebra, ela só se aplica para segmentos euclidianos. Uma solução dinâmica, pode ser obtida com o auxílio de circunferência. Já para uma solução analógica, o uso de semelhança se apresenta como uma ótima possibilidade. O mais importante aqui é deixar que o estudante desenvolva ainda mais sua capacidade de investigação.

Figura 8: Ponto Médio: Euclides $\times$ Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 04)
Dados os pontos A e B, determinar graficamente o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, segundo o Modelo de Moulton:

a) $A = (-3; 1)$ e $B = (5; 6)$.

b) $A = (-5; 2)$ e $B = (3; 5)$.

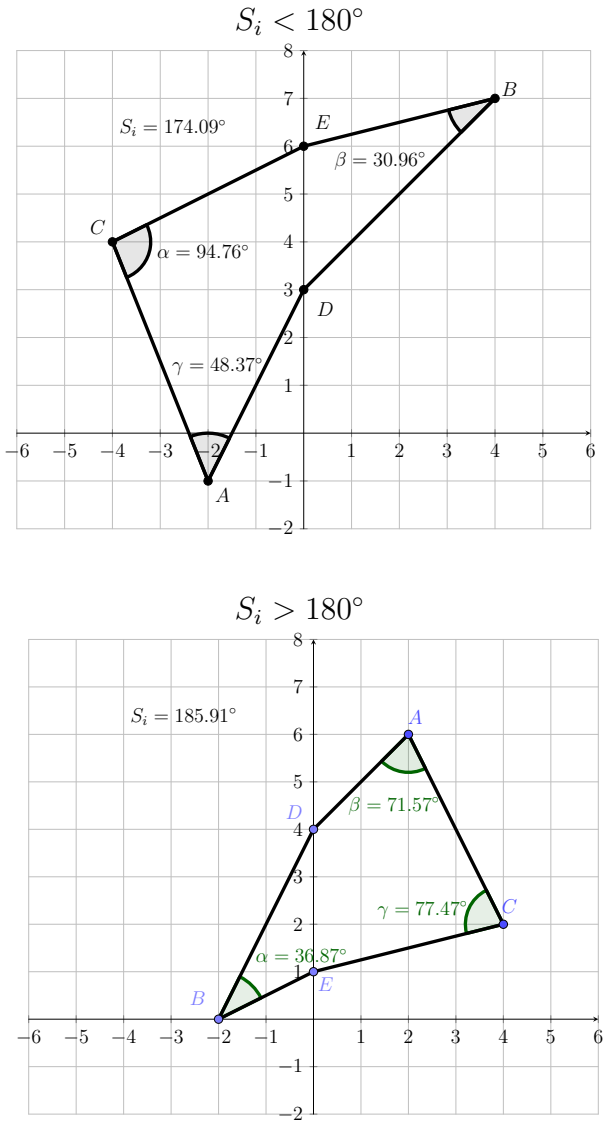
Sugestão: Explorar funções pré-definidas do Software de Geometria Dinâmica - Geogebra.

4.5 Trilha de Aprofundamento 05: Triângulos - Soma dos Ângulos Internos

Esta Trilha, tem por finalidade trazer a discussão sobre a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo numa Geometria não Euclidiana. Mostrar que, não sendo euclidiana, a Soma pode tanto se apresentar como sendo maior que $180°$ e ainda, menor que $180°$.

Vejamos:

Figura 9: Soma dos Ângulos Internos: Euclides $\times$ Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

A ideia desta trilha é a de apresentar e explorar as variações na soma dos ângulos internos de um triângulo. O que é uma verdade na Geometria Euclidiana, pode não ser verdade nas Geometrias não Euclidianas. Para isso, espera-se que o estudante possa variar ao máximo as coordenadas dos

vértices do triângulo e avaliar os resultados encontrados, e se possível conjecturar a respeito de tais observações. Recomenda-se que seja também explorada a linha de programação do software.

Conforme apresentado por Lázaro **[7]**, a Geometria Esférica é conhecida por apresentar $S_i > 180°$, enquanto que a Geometria Hiperbólica, apresenta $S_i < 180°$. Perceba que na Geometria de Moulton, é possível a presença dos dois casos. Em Trilhas seguintes, também constatamos a presença de características específicas para as geometrias citadas acima, contidas na geometria proposta por Moulton.

Exercício 05)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo ΔABC, determinar graficamente, o valor da soma de seus ângulos internos.

a) $A = (-2; -6)$, $B = (6; 4)$ e $C = (-6; -2)$.

b) $A = (-4; -4)$, $B = (4; 6)$ e $C = (2; 2)$.

c) $A = (-6; 1)$, $B = (0; 4)$ e $C = (6; 7)$.

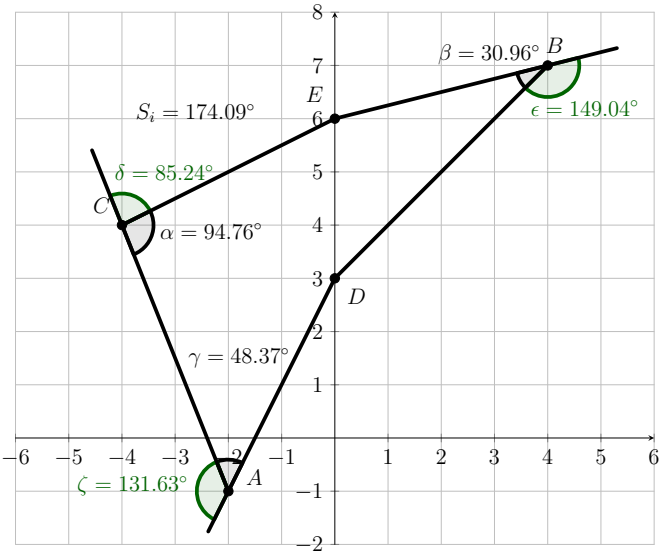
d) $A = (0; 5)$, $B = (6; 2)$ e $C = (15; 20)$.

Sugestão: Explorar funções pré-definidas do Software de Geometria Dinâmica - Geogebra.

4.6 Trilha de Aprofundamento 06: Triângulos - Ângulo Externo

Esta Trilha, tem por finalidade aproveitar a discussão da trilha anterior sobre a soma dos ângulos internos, para avaliar o comportamento da soma dos ângulos externos de um triângulo não euclidiano, bem como constatar se há a existência ou não da propriedade do ângulo externo de um triângulo, neste modelo. Lembrando que, em um triângulo euclidiano, a medida de cada ângulo externo é dada pela soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Figura 10: Soma dos Ângulos Internos: Euclides $\times$ Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 06)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo ΔABC, determine graficamente, a medida de cada ângulos externos, e avalie sua soma.

a) $A = (-2; -6)$, $B = (6; 4)$ e $C = (-6; -2)$.

b) $A = (-4; -4)$, $B = (4; 6)$ e $C = (2; 2)$.

c) $A = (-6; 1)$, $B = (0; 4)$ e $C = (6; 7)$.

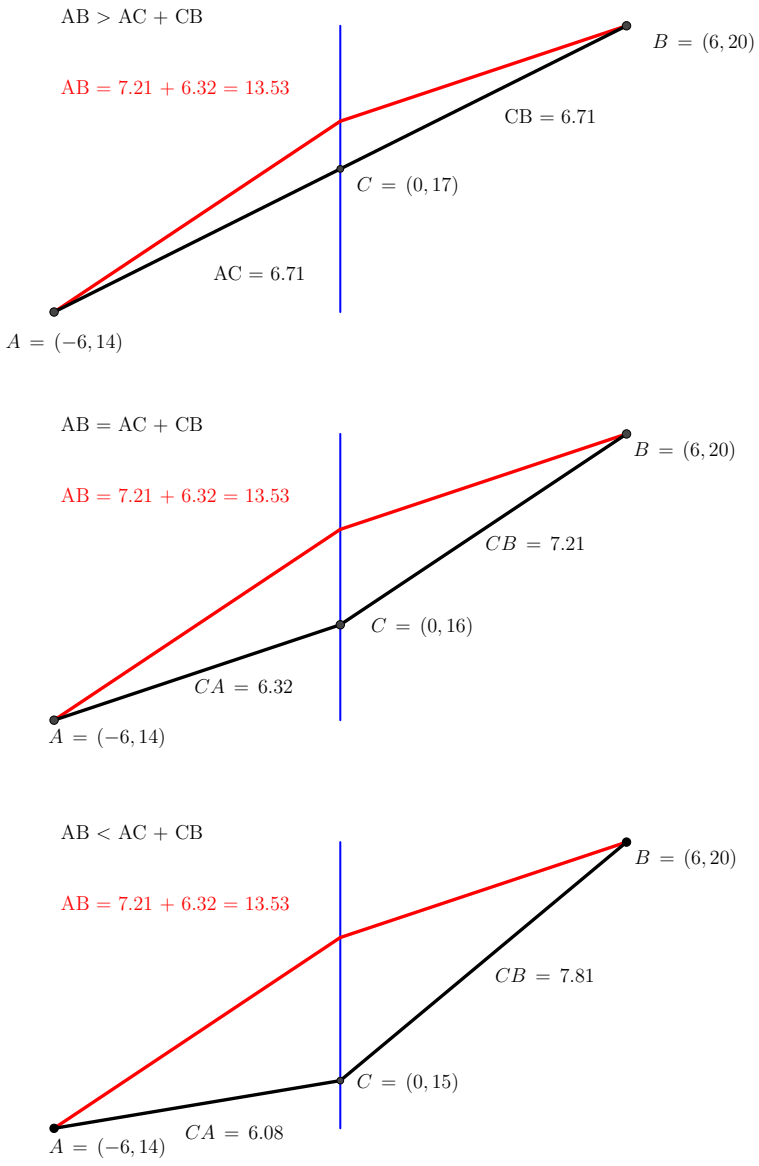
d) $A = (0; 5)$, $B = (6; 2)$ e $C = (15; 20)$.

Sugestão: Aproveitar a discussão sobre o ângulo externo e discutir sobre o comportamento de ângulos opostos pelo vértice com o uso do Software de Geometria Dinâmica - Geogebra.

4.7 Trilha de Aprofundamento 07: Desigualdade Triangular

Esta Trilha, tem por finalidade apresentar possibilidades para a desigualdade triagular. Enquanto que no modelo euclidiano, qualquer lado precisa ser, ao mesmo tempo, maior que a diferença entre os outros dois lados e menor que a soma desses outros dois lados, vemos que no Modelo de Moulton, os lados do triângulo podem se comportar de três modos, a saber:

Figura 11: Desigualdade Triangular: Euclides $\times$ Moulton



As figuras acima apresentam três casos particulares de triângulos segundo Mouton. Neles, o vértice C está sobre o eixo y e o lado AB, em vermelho, representa um segmento de Mouton.
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 07)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo de Moulton ΔABC, determine graficamente, a medida de cada um de seus lados e avalie a desigualdade triangular

a) $A = (-25; 5)$, $B = (15; 25)$ e $C = (0; 17, 5)$.

b) $A = (-20; 10)$, $B = (15; 20)$ e $C = (-2; 23)$.

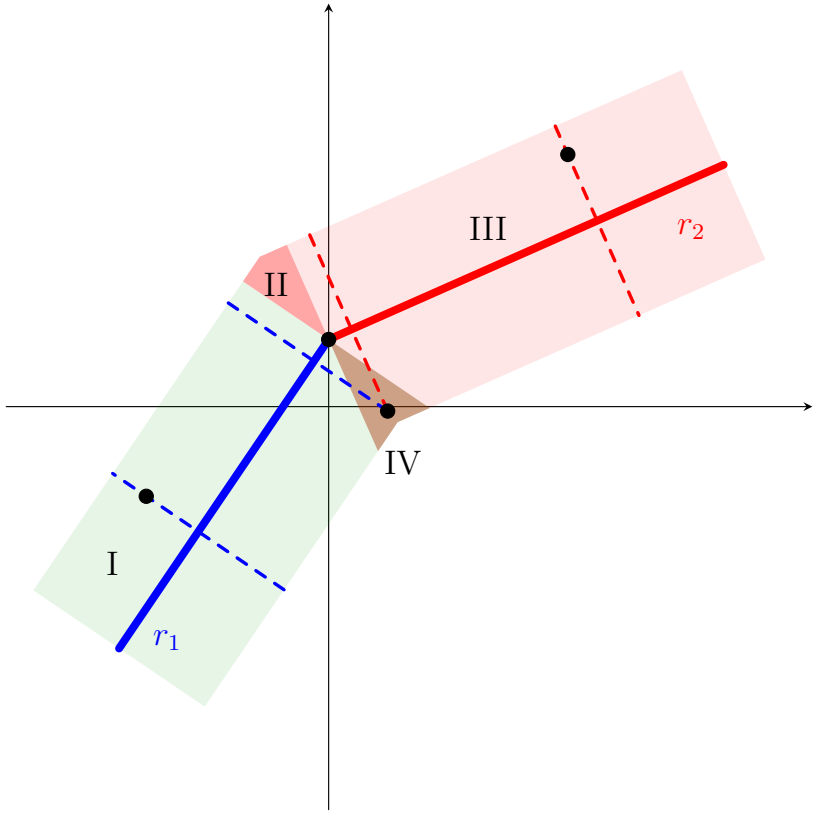
c) $A = (-8; 9)$, $B = (6; 20)$ e $C = (0; 15)$.

Sugestão: A partir de agora, deixamos como sugestão o uso do Software de Geometria Dinâmica - Geogebra, para além de atividades propostas. Entendemos já haver um conhecimento sobre o uso do mesmo, de forma que incentivamos seu uso para análises dinâmicas generalizadas.

4.8 Trilha de Aprofundamento 08: Paralelismo e Perpendicularismo

Esta Trilha, apresenta um estudo sobre a existencia ou não de retas perpendiculares à uma reta dada, e ainda, trata da unicidade ou não desta reta perpendicular, segundo Conceitos de Moulton.

Figura 12: Paralelismo e Perpendicularismo: Euclides $\times$ Moulton



$r = r_1 \cup r_2$.

Sejam p_1 e p_2 possíveis retas perpendiculares a r passando por um certo ponto P.

P $\in$ I: $\exists\ p_1 \mid p_1 \perp r_1$.

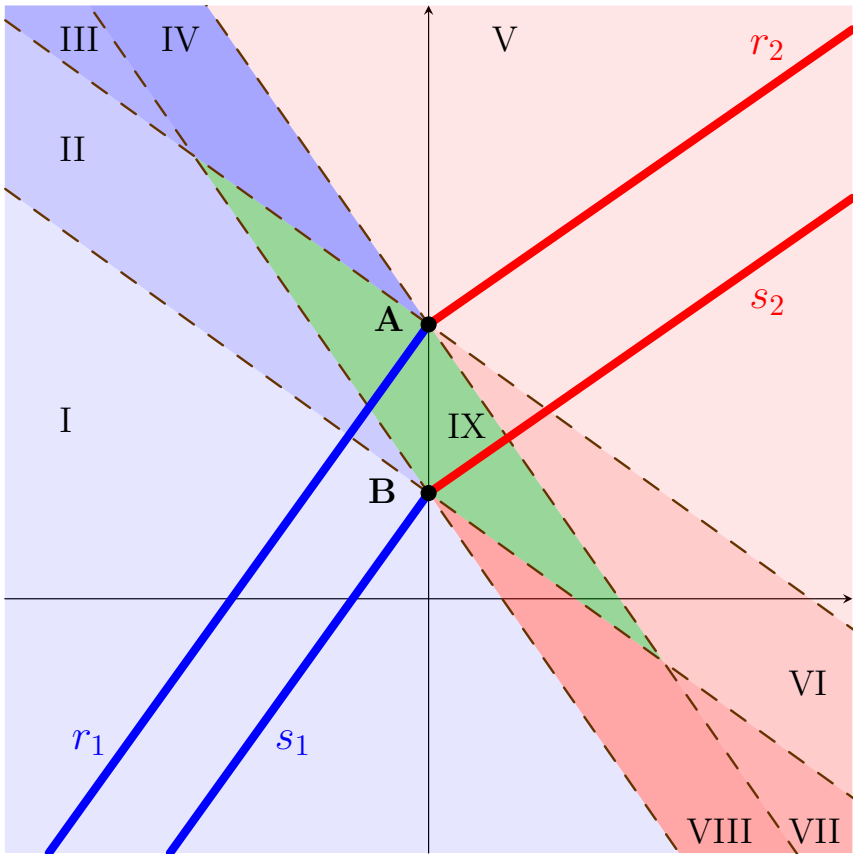
P $\in$ II: $\nexists \{p_1\ ,\ p_2\}$.

P $\in$ III: $\exists\ p_1 \mid p_1 \perp r_2$.

P $\in$ IV: $\exists \{p_1\ ,\ p_2\} \mid p_1 \perp r_1\ \ e\ \ p_2 \perp r_2$.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 13: Retas Paralelas Cortadas (ou não) por Retas Perpendiculares - Moulton



$r = r_1 \cup r_2 \;\; e \;\; s = s_1 \cup s_2 \;\; com \;\; r//s.$

Sejam p_1 e p_2 possíveis retas perpendiculares a r e a s passando por um certo ponto P.

P $\in$ I: $\exists \; p_1 \;\mid\; p_1 \perp r_1 \;\; e \;\; p_1 \perp s_1.$

P $\in$ II: $\exists \; p_1 \;\mid\; p_1 \perp r_1.$

P $\in$ III: $\nexists \, \{p_1 \, , \, p_2\}.$

P $\in$ IV: $\exists \; p_1 \mid \; p_1 \perp s_2.$

P $\in$ V: $\exists \; p_1 \mid \; p_1 \perp r_2 \;\; e \;\; p_1 \perp s_2.$

P $\in$ VI: $\exists \, \{p_1 \, , \, p_2\} \;\mid\; p_1 \perp r_2 \;\; , \;\; p_1 \perp s_2 \;\; e \;\; p_2 \perp r_1.$

P $\in$ VII: $\exists \, \{p_1 \, , \, p_2\} \;\mid\; p_1 \perp r_1 \;\; , \;\; p_1 \perp s_1 \;\; , \;\; p_2 \perp r_2 \;\; e \;\; p_2 \perp s_2.$

P $\in$ VIII: $\exists \, \{p_1 \, , \, p_2\} \;\mid\; p_1 \perp r_1 \;\; , \;\; p_1 \perp s_1 \;\; e \;\; p_2 \perp s_2.$

P $\in$ IX: $\exists \, \{p_1 \, , \, p_2\} \;\mid\; p_1 \perp r_1 \;\; e \;\; p_2 \perp s_2.$

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 08:

Recriar as figuras acima e construir possíveis retas perpendiculares passando por P, contido em cada uma das regiões apresentadas, conforme cada caso.

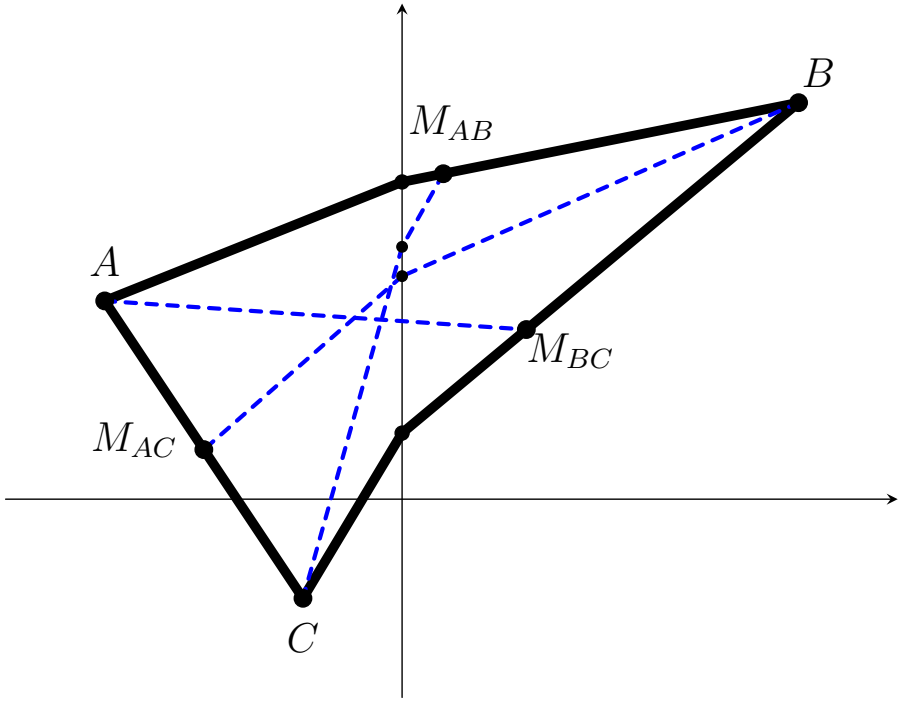
4.9 Trilha de Aprofundamento 09: Triângulo - Medianas

Mediana de um triângulo: É um segmento cujas extremidades estão num dos vértices desse triângulo e no ponto médio do lado oposto a esse ângulo.

Esta Trilha, propõe estudo sobre as medianas de um triângulo de Moulton, em que Baricentro já não é mais o ponto de encontro delas.

Importante aqui, que o estudante resgate os conceitos e ideias trabalhadas na Trilha 04.

Figura 14: Triângulo: Mediana - Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 09)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo de Moulton ΔABC, determine graficamente, as suas medianas.

a) $A = (-25; 5)$, $B = (15; 25)$ e $C = (0; 17, 5)$.

b) $A = (-20; 10)$, $B = (15; 20)$ e $C = (-2; 23)$.

c) $A = (-8; 9)$, $B = (6; 20)$ e $C = (0; 15)$.

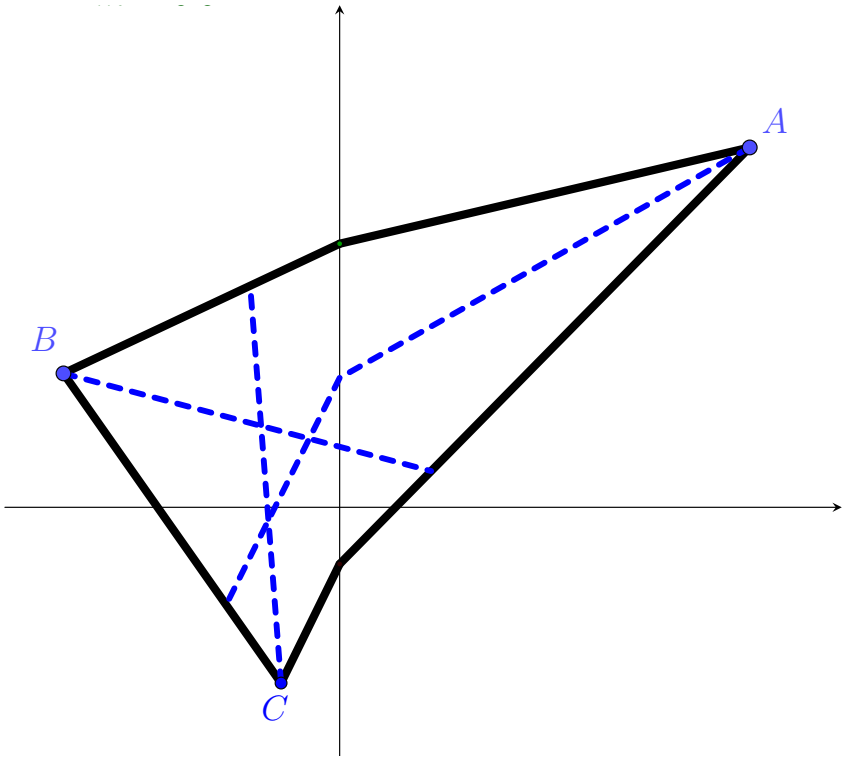
Sugestão: Software de Geometria Dinâmica - Geogebra: Construir um triângulo de forma dinâmica, e estudar comportamento de suas medianas, verificando que agora, pode não haver o cruzamento no Baricentro. Explorar linguagem de programação.

4.10 Trilha de Aprofundamento 10: Triângulo - Bissetrizes

Bissetriz interna de um triângulo: É o segmento, cujas extremidades estão no vértice de um dos ângulos desse triângulo e no lado oposto a esse ângulo, dividindo esse ângulo ao meio.

Esta Trilha, propõe estudo sobre as bissetrizes de um Triângulo de Moulton. Considerando que um Triângulo de Moulton pode se apresentar como um quadrilátero ou um pentágono euclidiano, verificar que nem sempre esses polígonos euclidianos possuem uma circunferência inscritível, ou seja, podemos não ter a existência do Incentro do triângulo, na Geometria de Moulton.

Figura 15: Triângulo: Bissetriz - Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 10)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo de Moulton ΔABC, determine graficamente, as suas medianas.

a) $A = (-25; 5)$, $B = (15; 25)$ e $C = (0; 17, 5)$.

b) $A = (-20; 10)$, $B = (15; 20)$ e $C = (-2; 23)$.

c) $A = (-8; 9)$, $B = (6; 20)$ e $C = (0; 15)$.

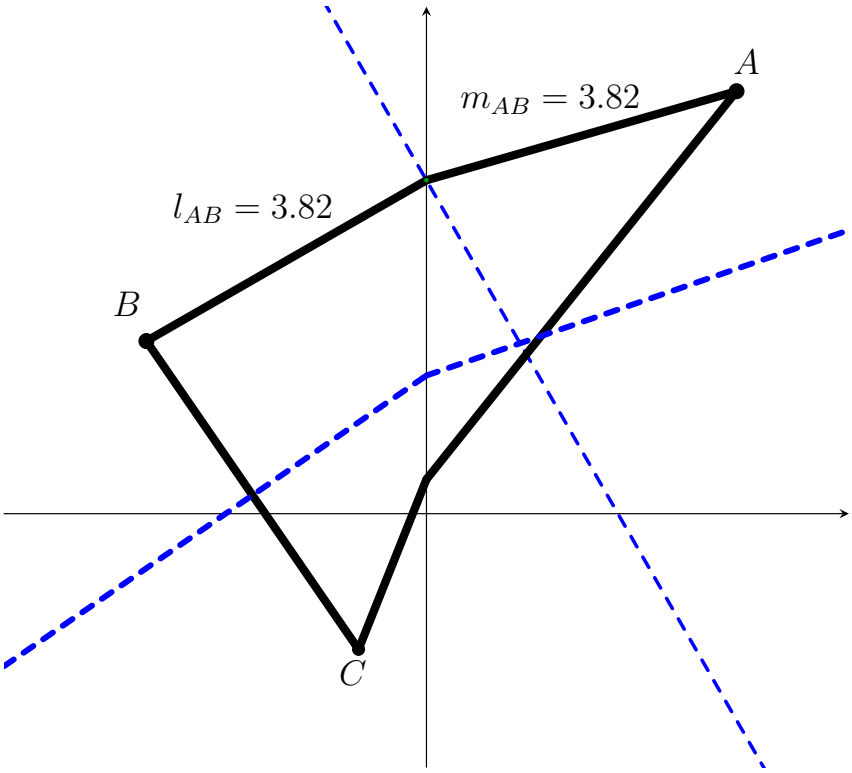
Sugestão: Software de Geometria Dinâmica - Geogebra: Construir um triângulo de forma dinâmica, e estudar comportamento de suas bissetrizes, verificando que agora, pode não haver o Incentro. Explorar linguagem de programação.

4.11 Trilha de Aprofundamento 11: Triângulo - Mediatrizes

Mediatriz do lado de um triângulo: é a reta perpendicular a esse lado, passando por seu ponto médio.

Esta Trilha, propõe estudo sobre as mediatrizes de um Triângulo de Moulton. Constatar que a mediatriz pode não vir a ser mais um Lugar Geométrico (LG), ou ainda, pode não haver o Circuncentro.

Figura 16: Triângulo: Mediatriz - Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 11)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo de Moulton ΔABC, determine graficamente, as suas mediatrizes.

a) $A = (-25; 5)$, $B = (15; 25)$ e $C = (0; 17, 5)$.

b) $A = (-20; 10)$, $B = (15; 20)$ e $C = (-2; 23)$.

c) $A = (-8; 9)$, $B = (6; 20)$ e $C = (0; 15)$.

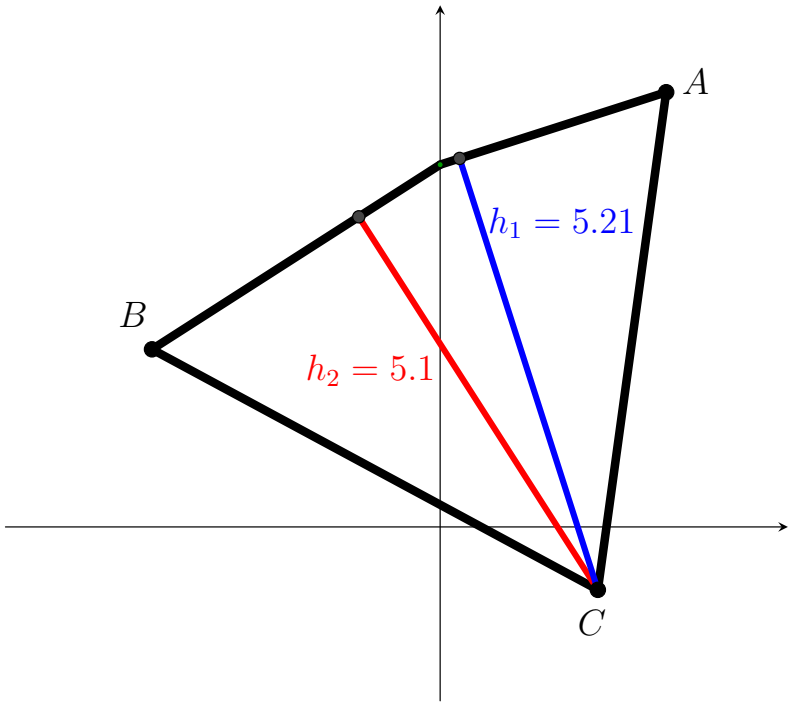
Sugestão: Software de Geometria Dinâmica - Geogebra: Construir um triângulo de forma dinâmica, e estudar comportamento de suas mediatrizes, verificando que agora, pode não haver o Circuncentro. Explorar linguagem de programação.

4.12 Trilha de Aprofundamento 12: Triângulo - Altura

Altura de um triângulo: É o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo cujas extremidades estão nesta reta suporte e no vértice oposto ao lado considerado.

Esta Trilha, propõe estudo sobre as alturas de um triângulo de Moulton. Constatar que, de acordo com as figuras 12 e 13, um dos lados de um triângulo pode ter até duas alturas, ou ainda, não ter a perpendicular que passe por um de seus vértices, ou seja, o triângulo pode não possuir altura..

Figura 17: Triângulo: Altura - Moulton



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 12)

Dados os pontos A, B e C, vértices do triângulo de Moulton ΔABC, determine graficamente, as suas medianas.

a) $A = (-25; 5)$, $B = (15; 25)$ e $C = (0; 17, 5)$.

b) $A = (-20; 10)$, $B = (15; 20)$ e $C = (-2; 23)$.

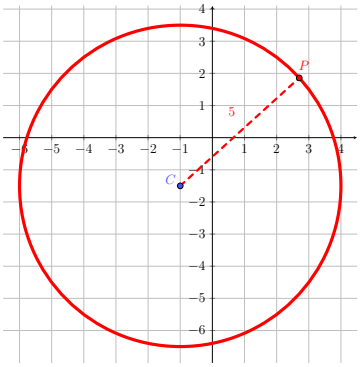
c) $A = (-8; 9)$, $B = (6; 20)$ e $C = (0; 15)$.

Sugestão: Software de Geometria Dinâmica - Geogebra: Construir um triângulo de forma dinâmica, e estudar comportamento de suas alturas, verificando que um lado do triângulo, agora pode haver duas alturas. Explorar linguagem de programação para a determinação automática de tais medidas.

4.13 Trilha de Aprofundamento 13: Circunferência

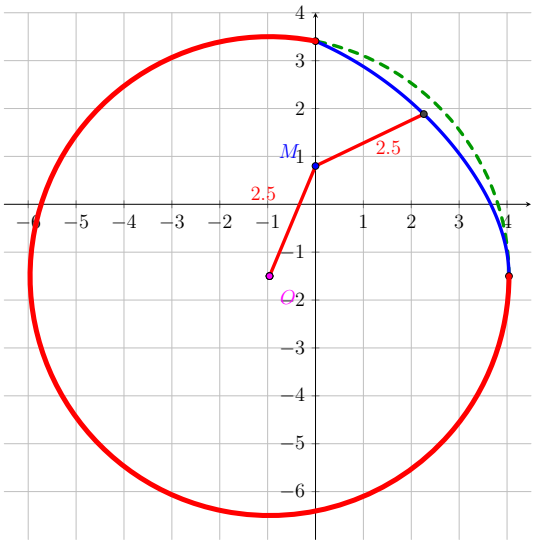
Esta Trilha, propõe estudo comparativo entre uma circunferência euclidiana e uma circunferência segundo conceito de Moulton. Incentivar a pesquisa científica por meio de análise proporcionada com o uso de software de geometria dinâmica. Partir do conceito de Circunferência como sendo o Lugar Geométrico (LG) dos pontos do plano, cuja distância a um ponto dado C (centro da circunferência), é constante e igual a medida do raio.

Figura 18: Circunferência (Euclidiana): Raio 5 de Centro (-1;-1,5)



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 19: Circunferência (Moulton): Raio 5 de Centro (-1;-1,5)



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Exercício 13:

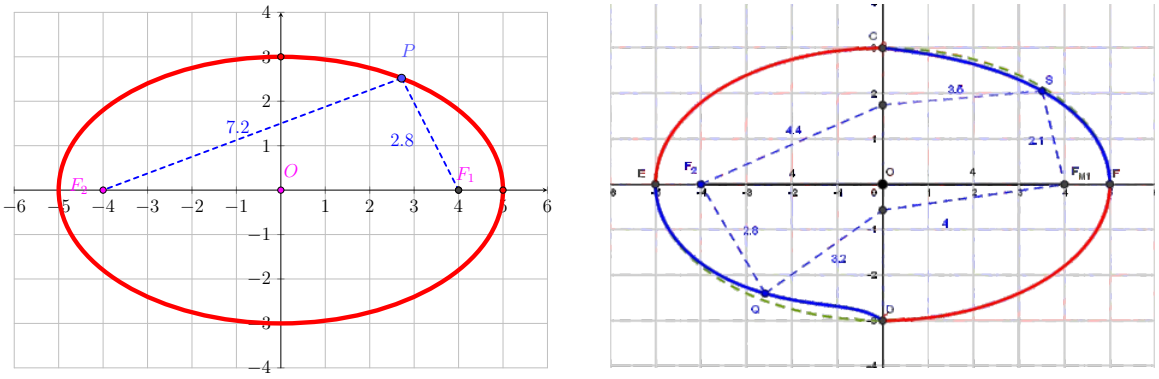
Explorar construção de circunferências de Moulton, por meio de funções pré-definidas no Geogebra, investigando comportamento geométrico das mesmas, quando sujeitas a modificações das coordenadas de seu centro. Fica como sugestão, provocar alterações também no fator de Moulton $(m = 0,5)$.

4.14 Trilha de Aprofundamento 14: Elipse

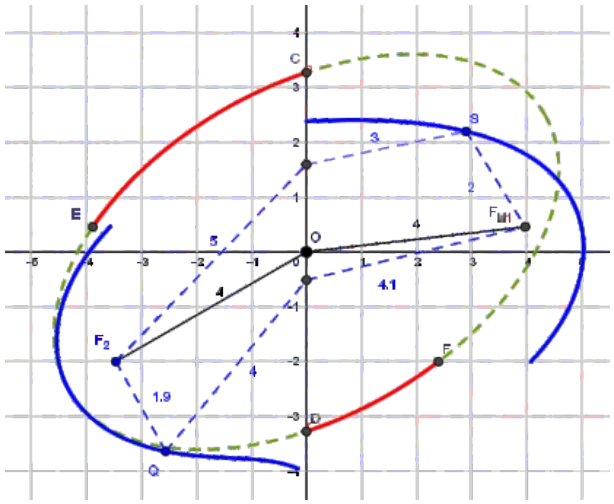
Esta Trilha, traz uma proposta de aplicação de conceitos da Geometria Euclidiana para conjecturar sobre figuras sujeitas ao conceito proposto por Moulton, e ainda extrapolar tais conceitos, por meio de análise computacional.

Elipse: É o Lugar Geométrico (LG) dos pontos do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2, chamados de Focos, é constante e igual à medida do eixo maior da elipse.

Figura 20: Elipse:



Elispe Euclidiana x Elipse de Moulton.



Elipse de Moulton - rotacionada de 30°.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

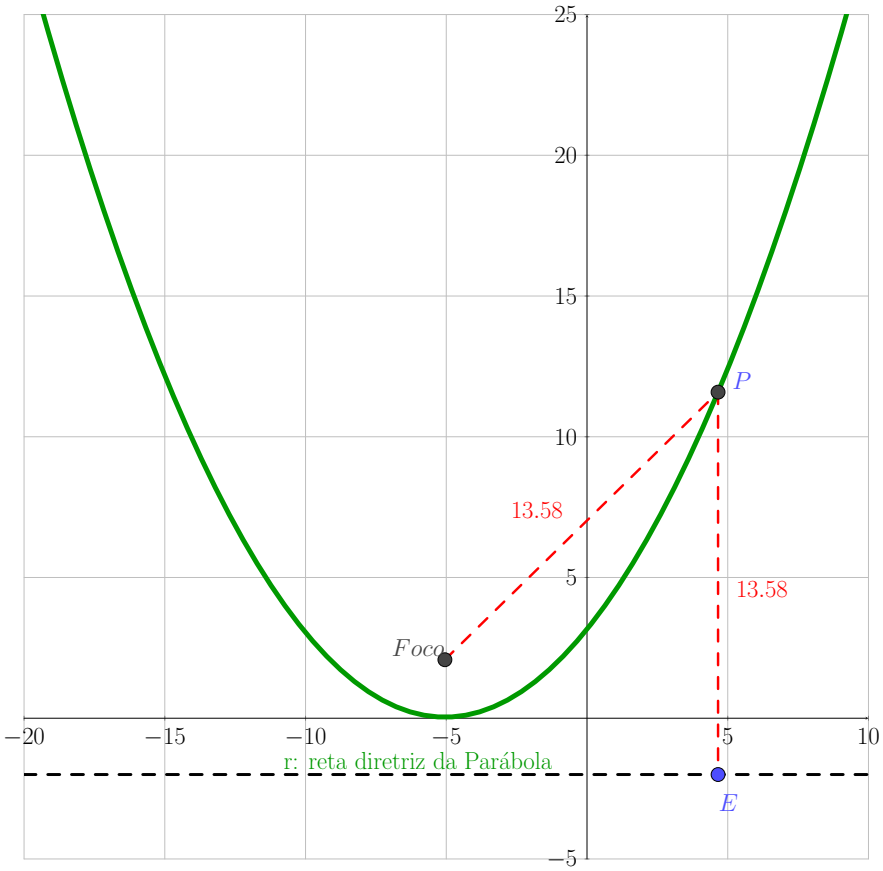
Exercício 14:

Explorar processos construtivos da Elipse de Moulton, por meio de funções pré-definidas no Geogebra, investigando comportamento geométrico das mesmas quando sujeitas a modificações das coordenadas de seu centro e das medidas de seus eixos. Fica como sugestão, provocar alterações também no fator de Moulton $(m = 0,5)$, bem como introduzir procedimentos de rotação de figuras.

4.15 Trilha de Aprofundamento 15: Parábola

Esta Trilha, tem por finalidade investigar o processo construtivo da Parábola, segundo o conceito de Moulton. Avaliar seu comportamento diante de sua Concavidade voltada para baixo ou para cima . Parábola: é o Lugar Geométrico (LG) dos pontos do plano, cuja distância a um ponto dado F (foco), e a uma reta dada (diretriz da parábola) são iguais.

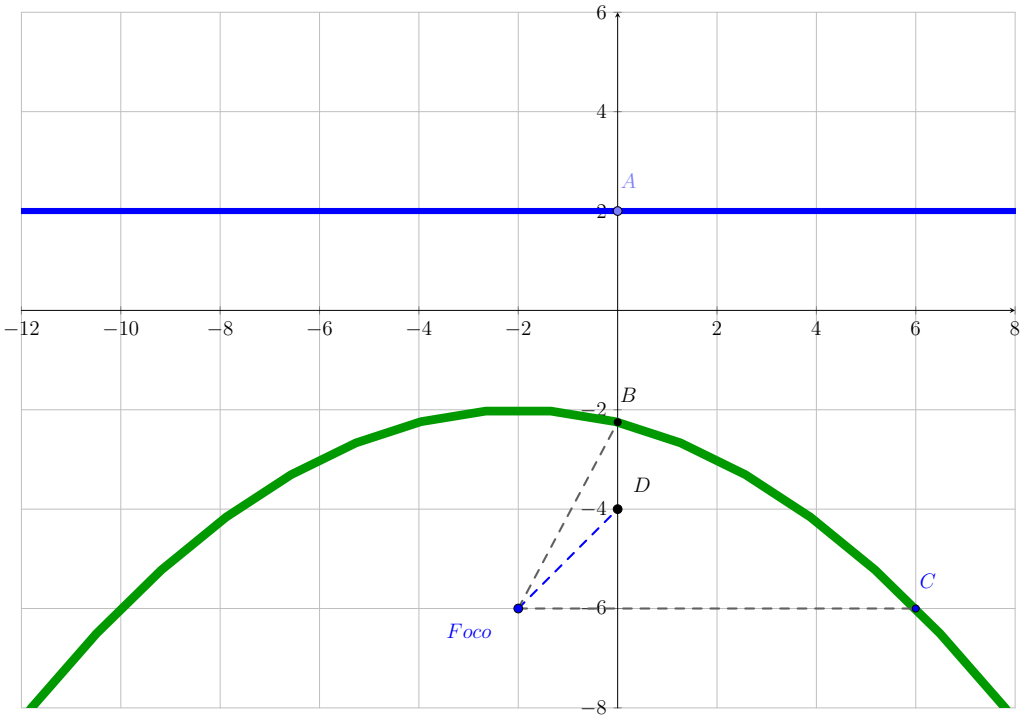
Figura 21: Parábola - Euclidiana



Fonte: Elaborada pelo Autor.

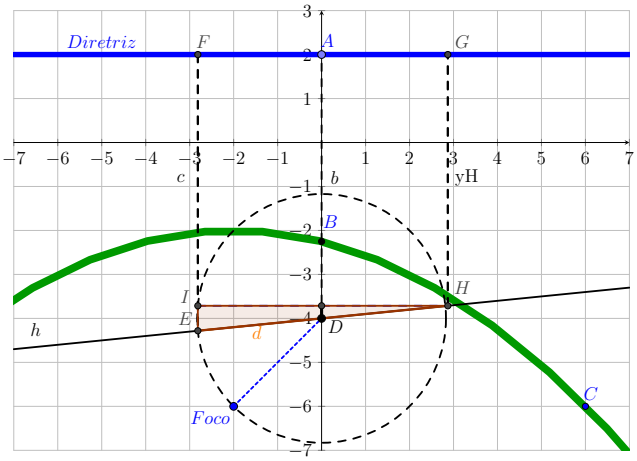
4.15.1 Parábola com a Concavidade Voltada para Baixo

Figura 22: Passo a Passo da Construção de uma Parábola de Moulton - Concavidade para Baixo



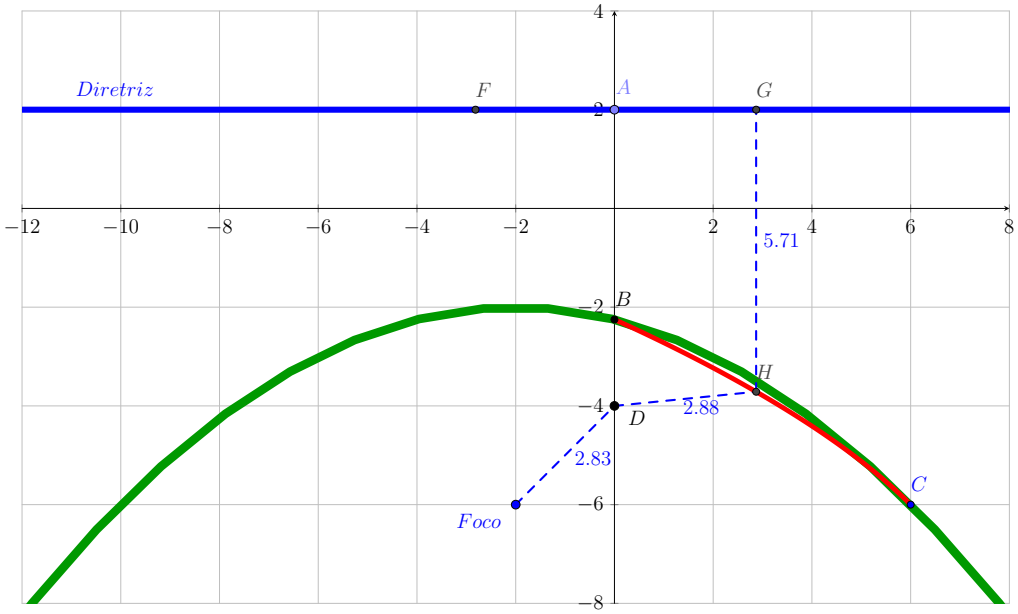
01 - $Foco(-2;-6)$ e $reta\ diretriz$ (horizontal) passando por $A(0;2)$
02 - $D=(0,y_D)$, $y_C<y_D<y_B$

Para uma melhor visualização, fazemos uma modificação no fator de Moulton de 0,5 para 0,1. Incentivamos aqui modificações dinâmicas para uma ampla compreensão daquilo que está em estudo.



03 - Traçar h ($\overleftrightarrow{EH}$ com fator de Moulton (modificado 0,1)
04 - Traçar circunferência λ de centro em D e passando pelo $Foco$
05 - Determinar E (h$\cap\lambda$) e F e G.

06 - Calcular y_H para determinar H, através de semelhança de ΔEHI , sabendo que $EH = y_H$, uma vez que $ED = DFoco$.

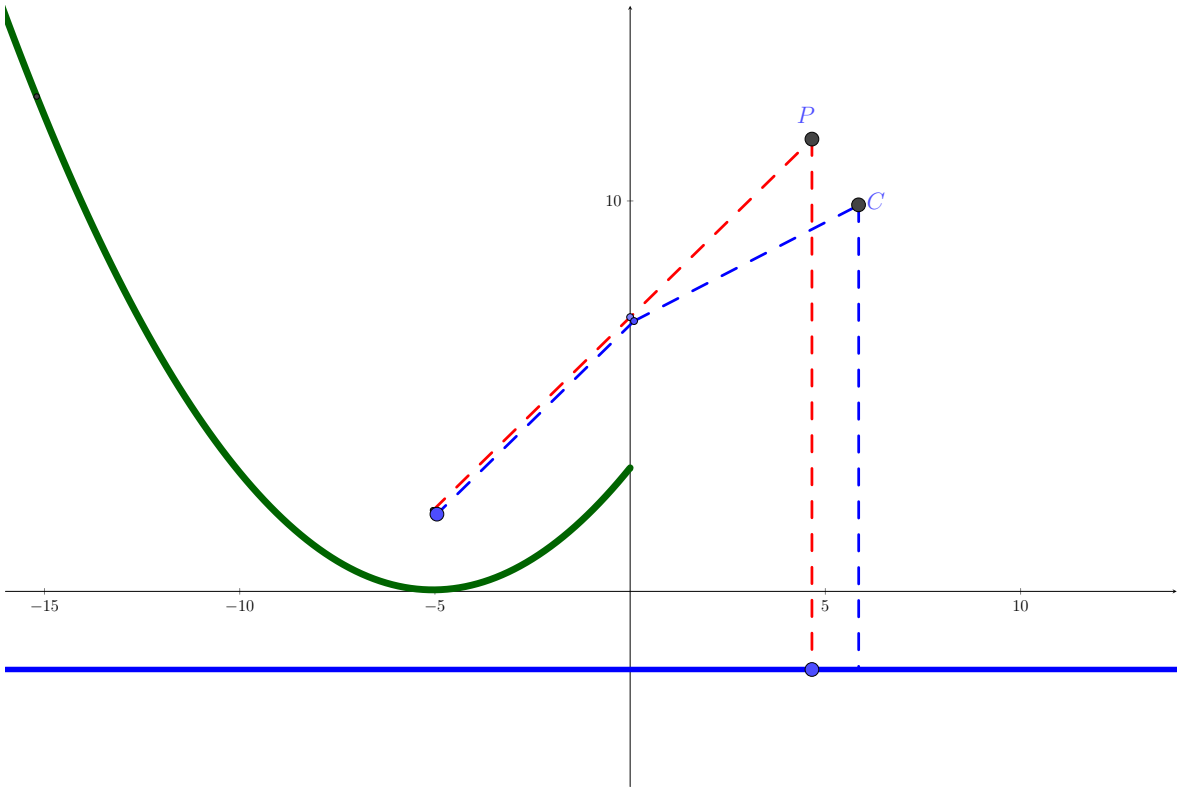


07 - com H determinado, usar a função Lugar Geométrico, cujos parâmetros são o ponto H e o Controle Deslizante y_H.

Fonte: Elaborada pelo Autor.

4.15.2 Parábola com a Concavidade Voltada para Cima

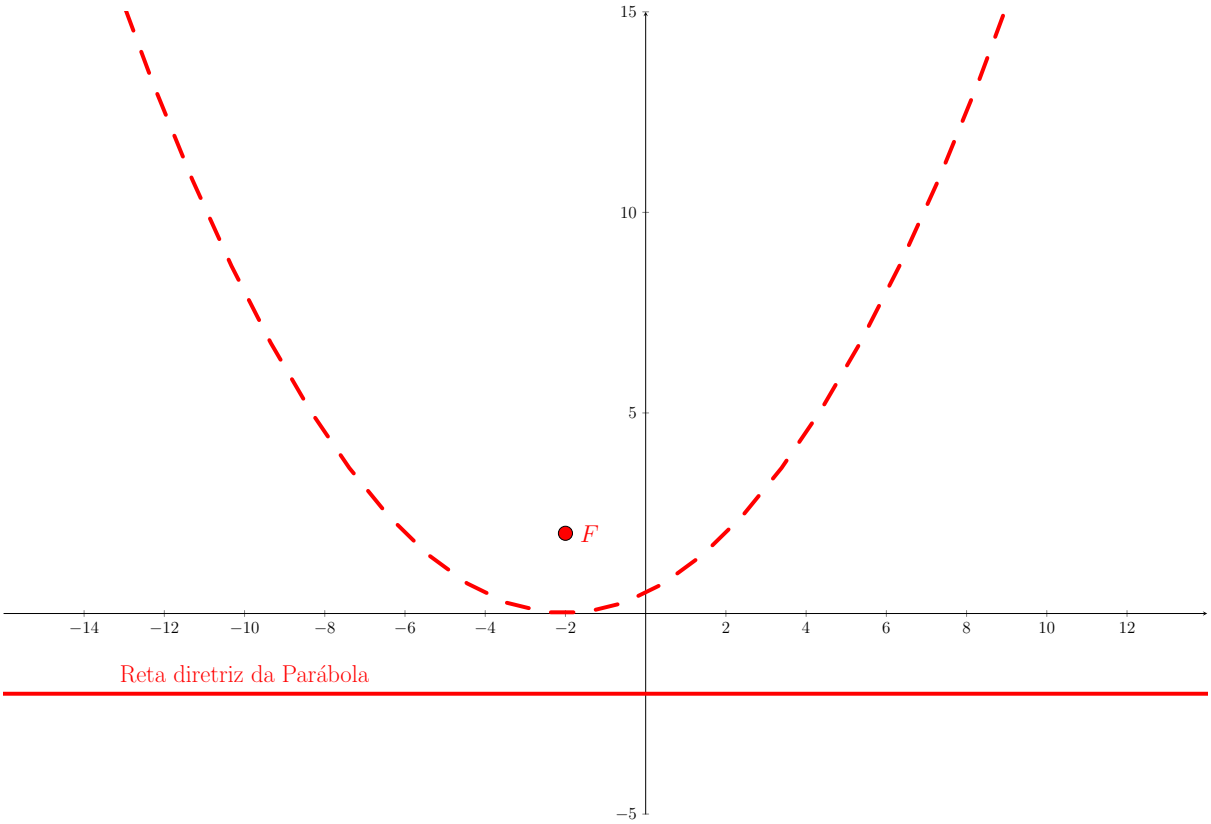
Figura 23: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Seja P um ponto pertencente à parábola euclidiana. Perceba nesta figura, que não existe ponto de abcissa positiva maior que a abcissa do ponto P que satisfaça a definição de parábola. Assim, vamos iniciar uma pesquisa para pontos cuja abcissa seja menor que a abcissa de P.

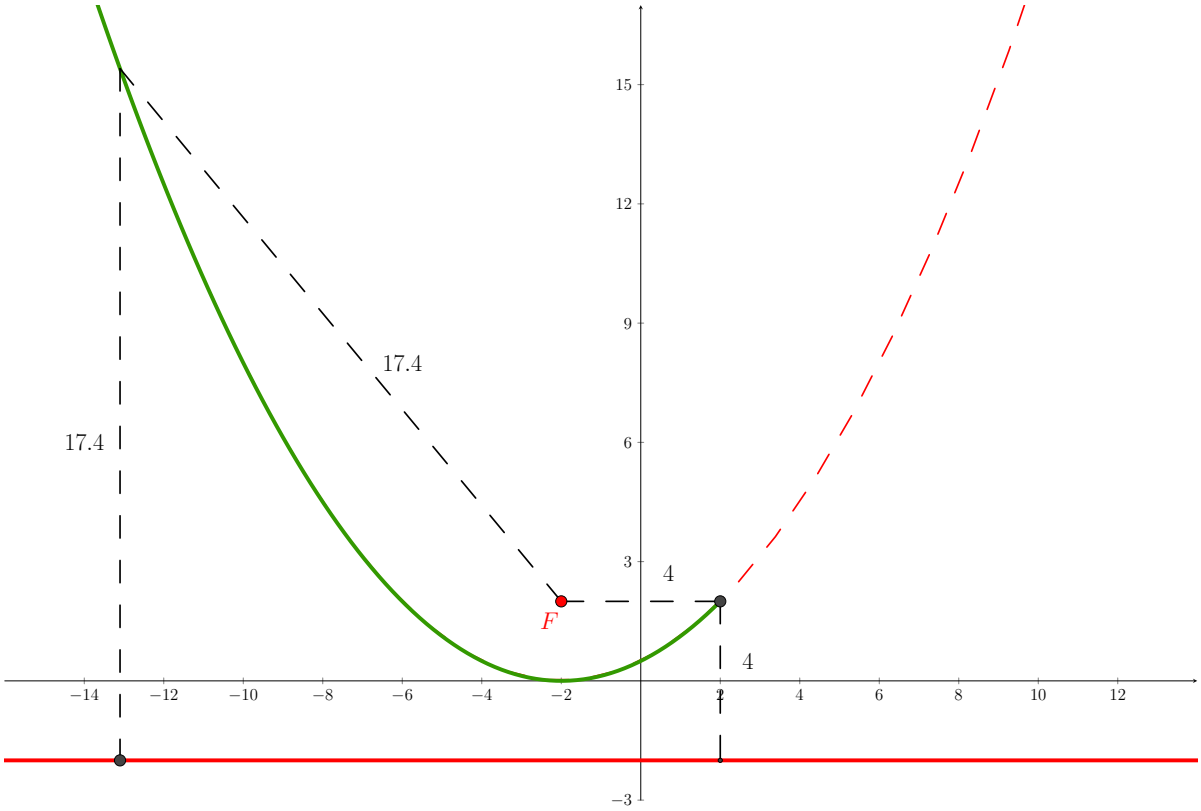
Figura 24: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 01



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Para nossos estudos nesta trilha, tomamos uma parábola de $Foco\ (-2, 2)$ e $reta\ diretriz$ $y = -2$, que é representada pela figura vermelha dada anteriormente.

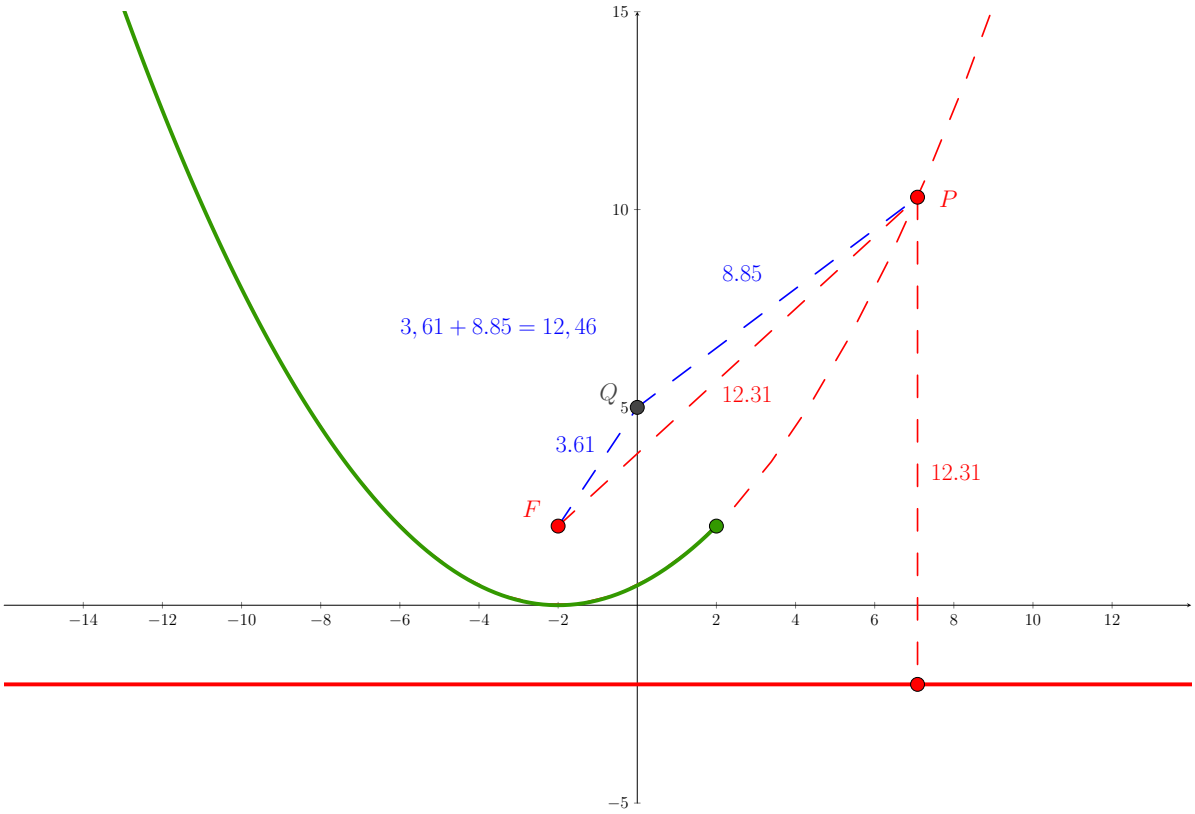
Figura 25: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 02



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Destacamos por meio da figura em cor verde, que seus pontos atendem a definição da parábola, utilizando-se de distância euclidiana.

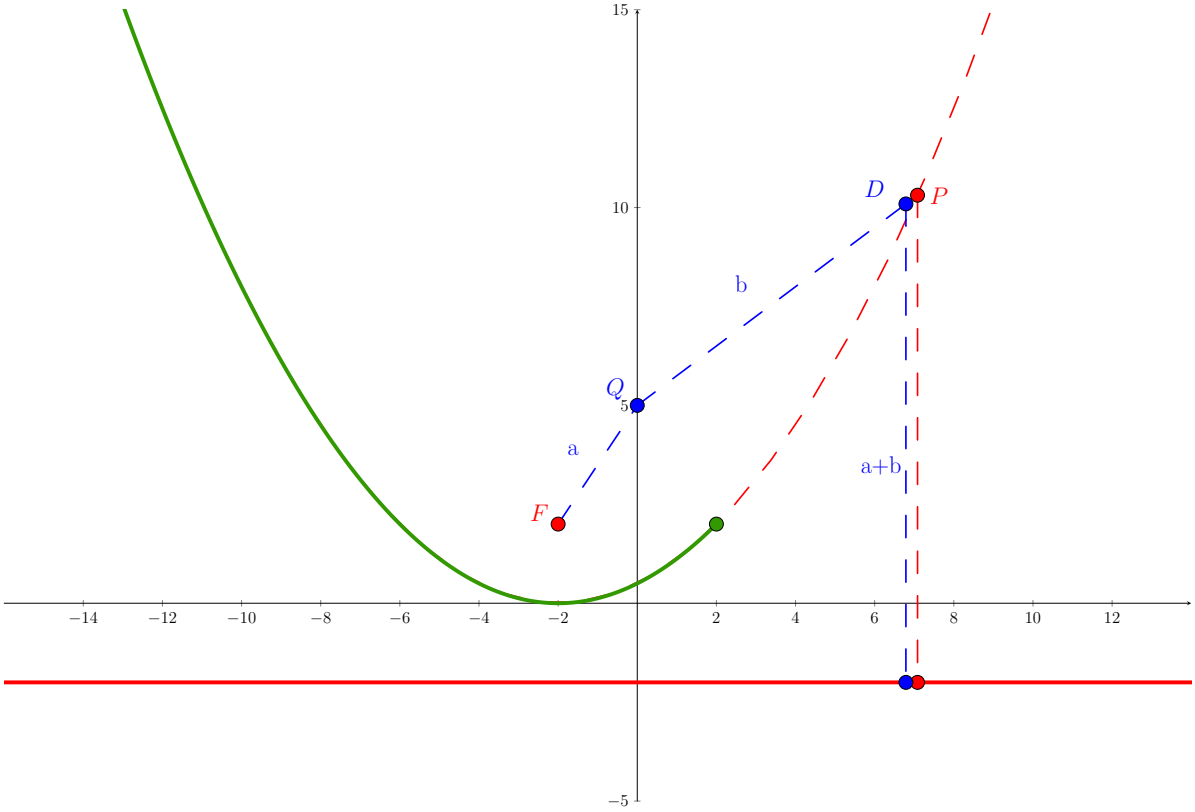
Figura 26: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 03



Fonte: Elaborada pelo Autor.

A partir da figura verde, os pontos $P's$ passam a não atender a definição da parábola, tendo em vista que agora, as distâncias passam a ser calculadas segundo o modelo de Moulton. Vejam, a soma das distâncias em azul é maior que a distância em vermelho.

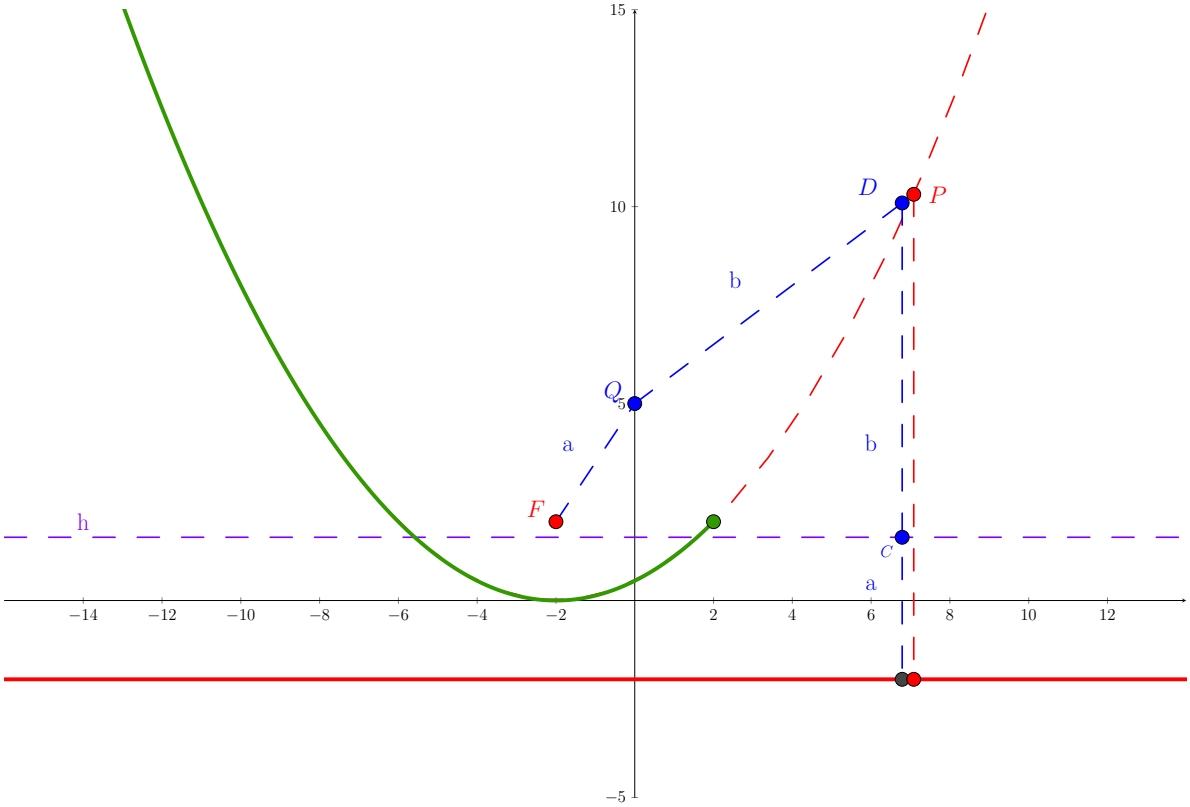
Figura 27: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 04



Fonte: Elaborada pelo Autor.

É nesse momento de nossa trilha que intensificamos nossa pesquisa e revisão de conceitos de Geometria Euclidiana, abordados na Educação Básica. Estamos diante da necessidade de determinar uma coleção de pontos $D's$, que satisfaçam a definição de lugar geométrico da parábola.

Figura 28: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 05



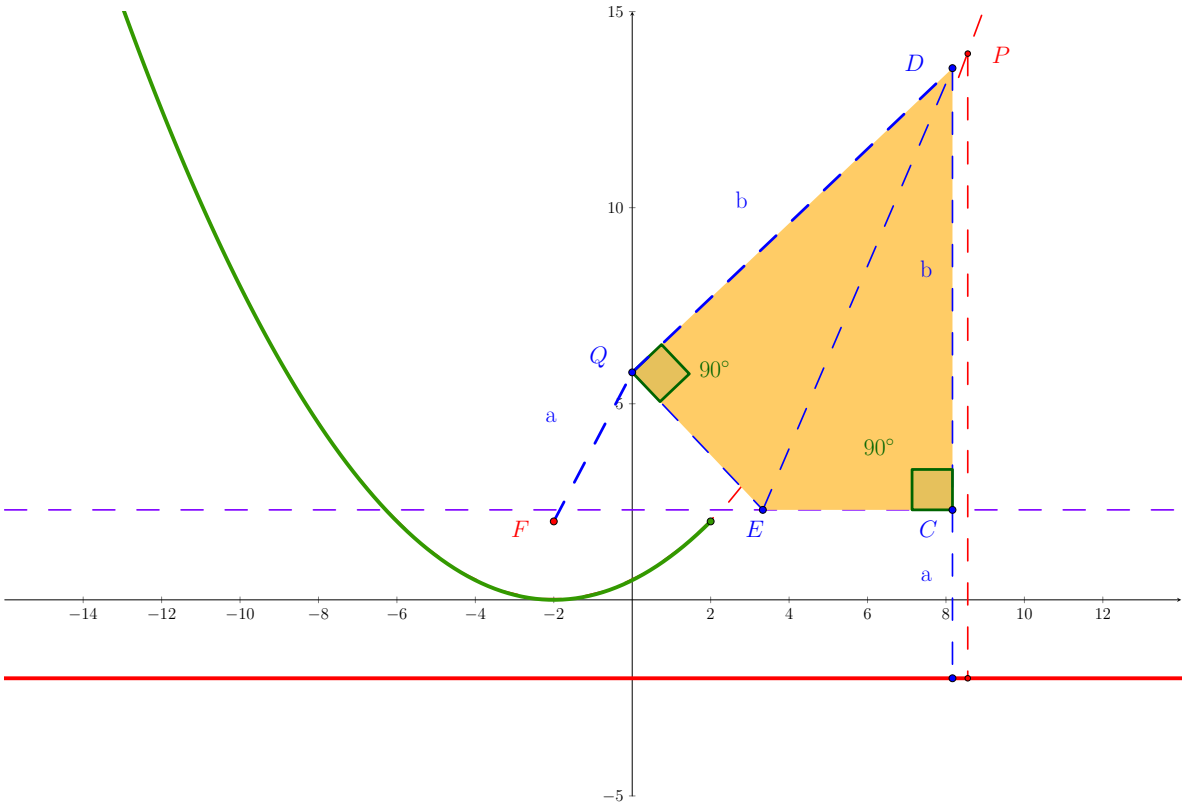
Fonte: Elaborada pelo Autor.

01 - Calcular a distância de FQ.
02 - Traçar a reta h, paralela à $reta\ diretriz$, mais próxima do foco, cuja distância entre elas seja a .

Agora, nossa missão é encontrar o ponto D, sobre o segmento de Moulton, em que a distância até Q, cuja medida é b, seja igual a distância até a reta paralela h que acabamos de traçar.

Para que $DQ = DC$, o ponto D deve estar sobre a mediatriz de CQ, na interseção com parte do segmento de Moulton QD.

Figura 29: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 06



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como conhecemos apenas a semi reta $\overrightarrow{QD}$, devemos traçar o quadrilátero QDCE dado na figura, em que $\overline{QD} \perp \overline{QE}$ e $\overline{DC} \perp \overline{CE}$, e ainda, $\overline{QD} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{QE} \equiv \overline{EC}$, construindo-o da seguinte forma:

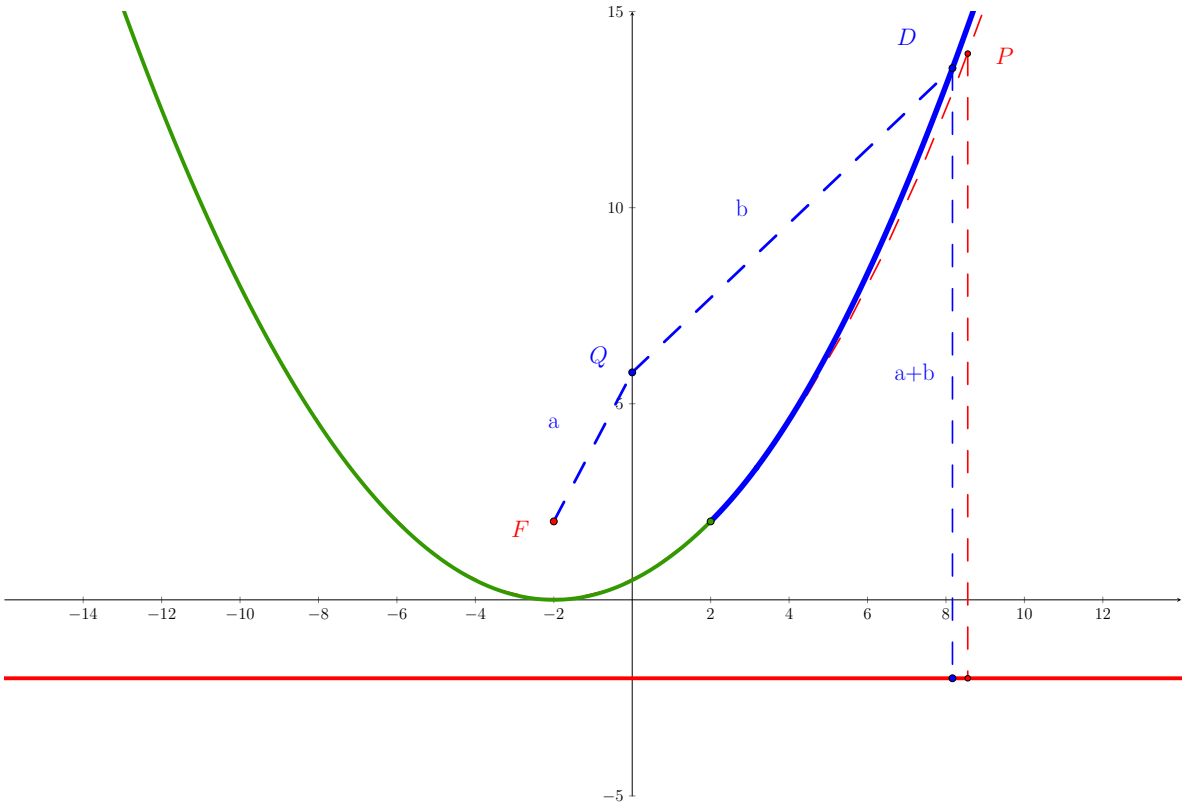
1) Conhecendo a inclinação da semi reta $\overrightarrow{CD}$, calcular o coeficiente angular da reta perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$, e acha a equação desta perpendicular que passa por Q ($\overleftrightarrow{QE}$).

2) Determinar a interseção de $\overleftrightarrow{QE}$ com h. Este ponto é o ponto E, vértice do quadrilátero.

3) Como $\overline{QE} \equiv \overline{EC}$, fazer o rebatimento de $\overline{EQ}$ sobre h, determinando o ponto C.

4) De posse da abcissa de C, traçar por ela uma perpendicular à reta h, determinando o ponto D na interseção com a semi reta $\overrightarrow{QD}$.

Figura 30: Parábola - Moulton - Concavidade para Cima - Passo 07



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Neste último passo, usamos o recurso de Lugar Geométrico do software Geogebra para materializar a coleção de pontos $D's$ encontrados por meio do procedimento descrito nos passos anteriores. Para isso, é necessário fazer uso da função Controle Deslizante do Geogebra, acrescentando uma dinamicidade na escolha do ponto Q. Assumimos que o ponto Q tenha abcissa 0 e a ordenada variando de acordo com o controle deslizante, adotando como valor mínimo a ordenada do foco.

Assim, na figura foi exibida em cor azul, a coleção de pontos $D's$, formando o que passa a representar, uma Parábola de Moulton.

Exercício 15)

Explorar construção de parábolas com a cavidade voltada para baixo e para cima, investigando suas diferenças no processo construtivo.

4.16 Trilha de Aprofundamento 16: Hipérbole

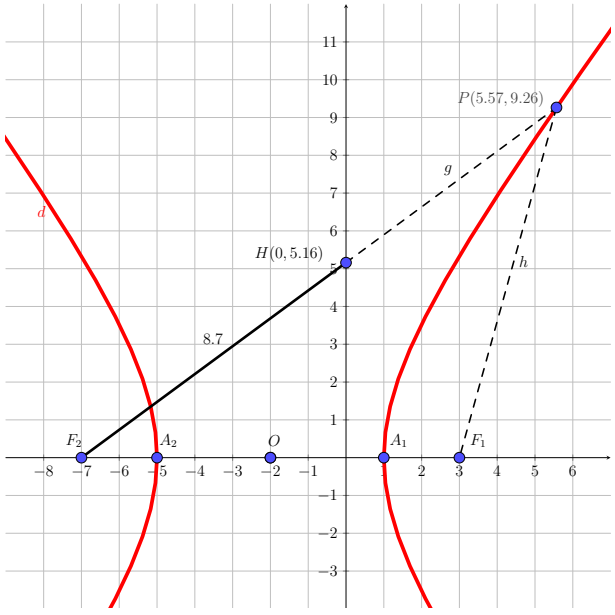
Esta Trilha, tem por finalidade apresentar um processo construtivo de uma hipérbole, segundo o conceito de Moulton. O objetivo aqui é explorar todo o conhecimento de Geometria Euclidiana necessário para percorrer as passagens desta construção, validando todo o aprendizado adquirido por meio das novas habilidades desenvolvidas .

Hipérbole: é o Lugar Geométrico (L.G.) dos pontos do plano, cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2 (focos da hipérbole), é constante e igual medida do eixo real da hipérbole.

Seja dada a hipérbole:
Centro: $O(-2, 0)$
Vértices: A_1 (1, 0) e A_2 (-5, 0)
Focos: F_1 (3, 0) e F_2 (-7, 0)
Um ponto pertencente a Hipérbole: $P = (5,57; 9,26)$. Desta forma, temos que a medida do eixo real é 6 e a distância focal mede 10. Chamando por (d_{P,F_1}) a medida da distância do ponto P ao ponto F_1, e por (d_{P,F_2}) a medida da distância do ponto P ao ponto F_2, Temos:

$$|d_{P,F_1} - d_{P,F_2}| = 2a = 6$$
$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-0)^2}{16} = 1$$

Figura 31: Hipérbole: Centro em $(-2, 0)$, Eixo Real=6, Eixo Imaginário=8



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Tomemos o ponto H, pertencente ao cruzamento entre o segmento PF_2 e o eixo y, ponto este em que ocorre a mudança de inclinação da reta que contém os pontos $P(5,27; 9,26)$ e $F_2 = (3, 0)$. Para isso, basta aplicarmos a condição euclidiana de alinhamento entre três pontos distintos no plano, ou seja, tomarmos o determinante formado por P, H e F_2 igual a zero. Assim obtemos

$H = (0; 5, 16)$.
Pelo Modelo de Moulton, a partir do cruzamento com o eixo y, sendo a inclinação positiva e no valor de $m_{HF_2} = tg(\alpha) = 0, 74$, temos uma nova inclinação para a semirreta com origem em H, sendo esta a metade da inclinação anterior, ou seja,

$$m_H = \frac{m_{HF_2}}{2} = \frac{tg(\alpha)}{2} = 0, 37,$$

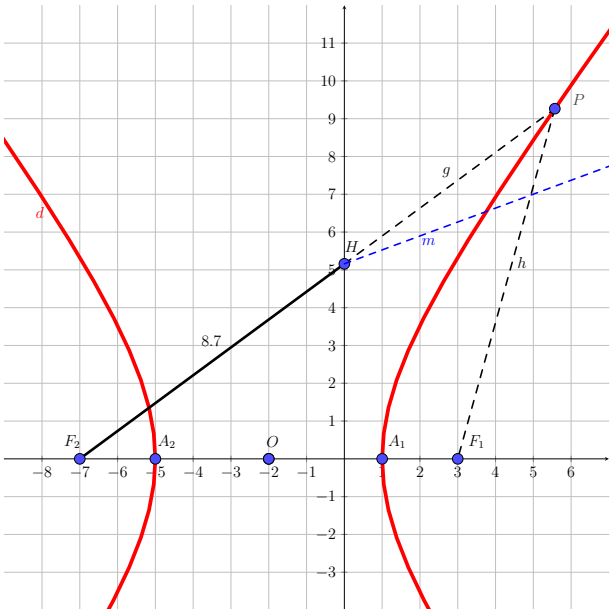
conforme é apresentado na Figura 32, pela semirreta m tracejada em azul. Para isso usamos a equação fundamental

$$m : \left(y - y_h) = \frac{tg(\alpha)}{2} \cdot (x - x_h\right),$$

isto é:

$$m : 1, 32x - 3, 57y + 18, 42 = 0.$$

Figura 32: Hipérbole: Passo 01



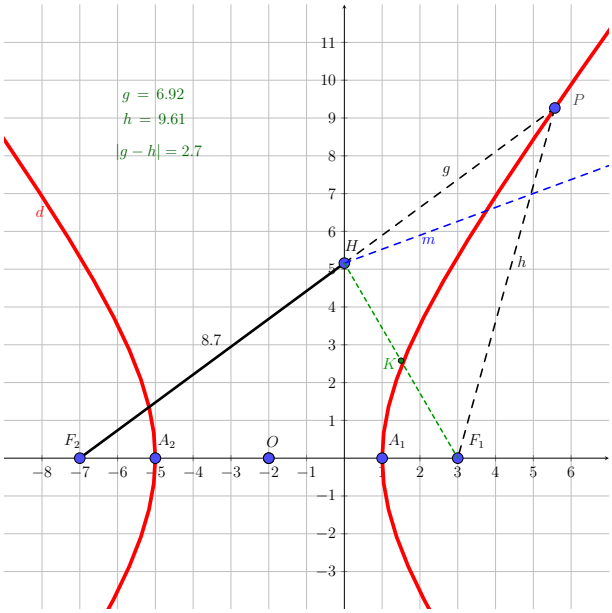
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Agora, afim de atender a definição de L.G. da Hipérbole, associada ao Modelo de Moulton, devemos procurar o ponto localizado em m, tal que o módulo da diferença entre suas distâncias aos Focos (F_1 e F_2) seja constante e igual a medida do eixo real da hipérbole. Para isso, vamos traçar o segmento de reta HF_1, e nele vamos marcar o seu ponto médio K, em que

$$x_k = \frac{x_H + x_{F_1}}{2} \text{ e } y_k = \frac{y_H + y_{F_1}}{2}.$$

Sendo H=(0; 5,16) e F_1=(3, 0), temos: K=(1.50, 2.58).

Figura 33: Hipérbole: Passo 02



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Como a medida de HF_2 permanece inalterada, ou seja, $HF_2 = 8,7$, devemos localizar o novo ponto da hipérbole que mantenha o módulo da diferença entre as distâncias apresentada na figura como $|g - h| = 2.7$. Para isso, vamos construir uma circunferência com centro em K e diâmetro cuja medida seja igual ao módulo apresentado acima, lembrando aqui, que a equação reduzida da circunferêcia é dada por:

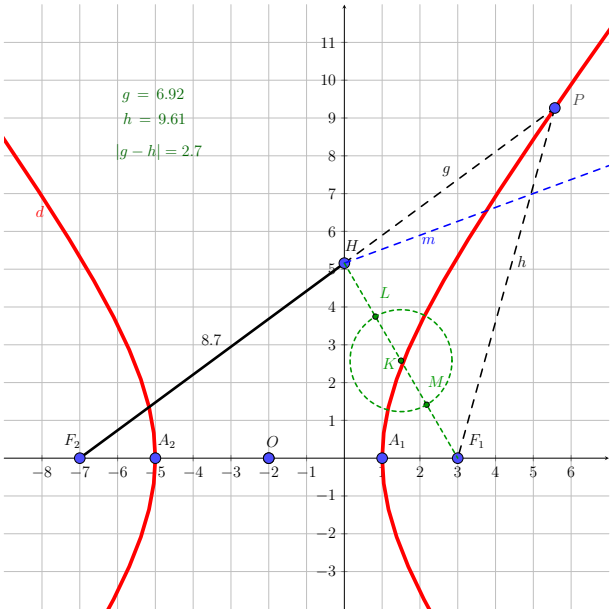
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2.$$

Com os pontos L e M, obtidos da interseção do segmento HF_1 e a Circunferência,

$$\begin{cases} m_{HF_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ F_1 = (-3, 0) \\ 5,16x + 3y = 15,48 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \left(\frac{LM}{2}\right)^2 \\ (x - 1.5)^2 + (y - 2.58)^2 = \left(\frac{2.7}{2}\right)^2 \end{cases}$$

construimos por eles uma nova hipérbole, sendo eles seus vértices e os pontos H e F_1 como sendo seus focos. Dessa maneira, garantimos que o módulo das diferenças entre as distâncias do novo ponto P aos pontos H e F_1 seja constante e igual ao $|g - h|$.

Figura 34: Hipérbole: Passo 03



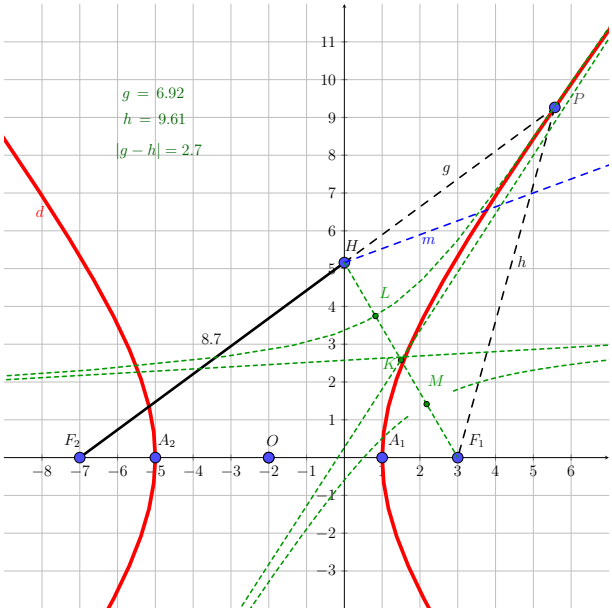
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Com a nova hipérbole traçada (em verde), basta tomarmos o ponto de interseção entre ela e a reta m.

Equação Paramétrica da Hipérbole:

$$\begin{cases} x = (1.50 \pm cos(120.17) \cdot 1.35 \cdot cosh(t) + sin(120.17) \cdot 2.66 \cdot sinh(t)) \\ y = (2.58 \pm sin(120.17) \cdot 1.35 \cdot cosh(t) + cos(120.17) \cdot 2.66 \cdot sinh(t)) \end{cases}$$

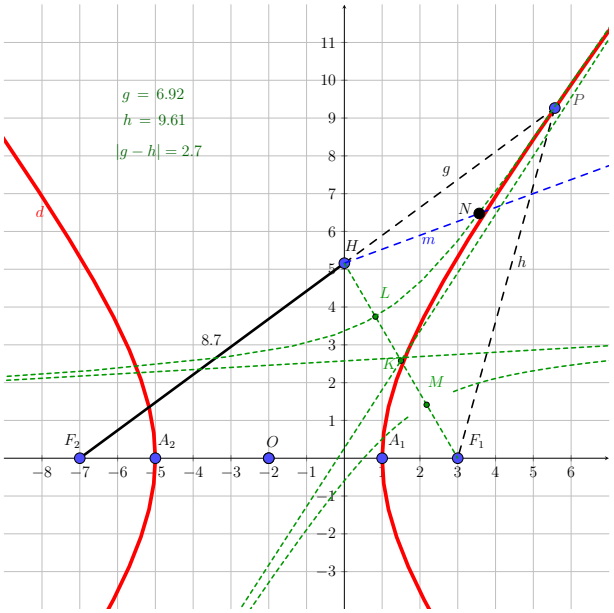
Figura 35: Hipérbole: Passo 04



Fonte: Elaborada pelo Autor.

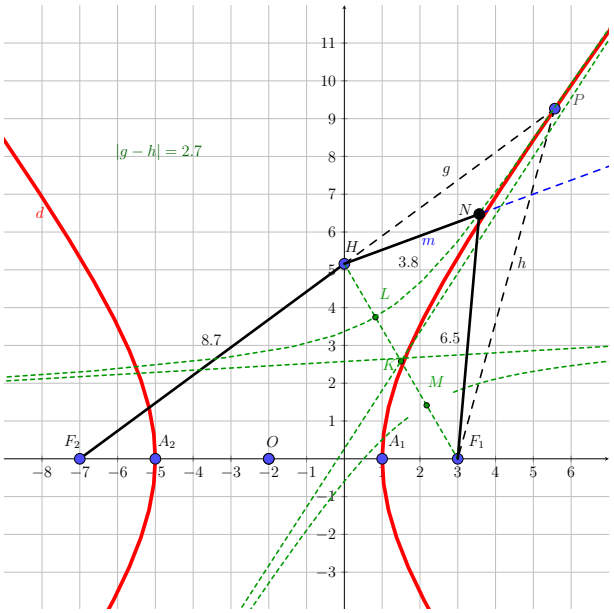
Assim, o ponto $N = (3.57, 6.48)$ atende às duas condições necessárias para ser um dos pontos da hipérbole, ou seja, pertence à reta m, e mantém constante o módulo da diferença entre as distâncias aos focos.

Figura 36: Hipérbole: Passo 05



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 37: Hipérbole: Passo 06

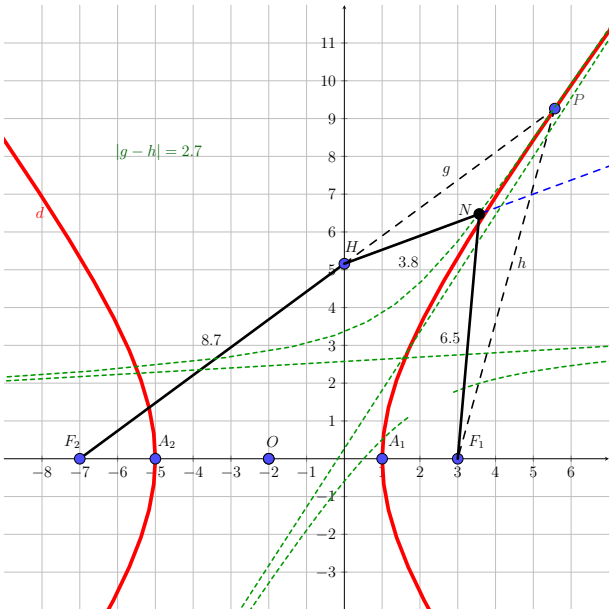


Fonte: Elaborada pelo Autor.

A partir de agora, basta variar a posição do ponto P sobre a Hipérbole inicial, e repetir

todo o processo anterior, de modo a encontrar todos os pontos N, obtidos das interseções propostas anteriormente.

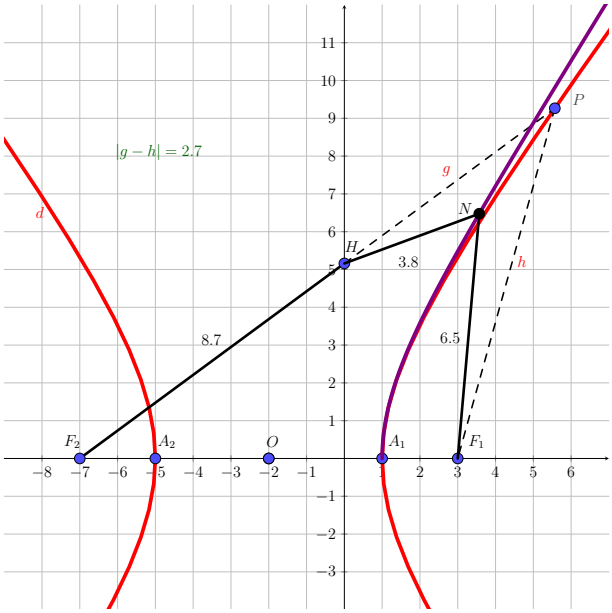
Figura 38: Hipérbole: Passo 07



Fonte: Elaborada pelo Autor.

E assim, obtemos o novo lugar geométrico dos pontos do plano que passam a atender às duas condições, ser hipérbole, e ser segundo o Modelo de Moulton.

Figura 39: Hipérbole: Passo 08



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Com auxílio do software GeoGebra, é possível de forma dinâmica, enchergar todas essas passagens matemáticas de forma instrutiva, permitindo uma análise mais profunda do comportamento da curva, atravéz de uma visualização animada com muitas possibilidades de estudos. Uma delas a ser proposta, seria a mudança da nova inclinação da reta após o eixo y, para um fator entre a e 1 a ser multiplicado pela $tg(\alpha)$.

Sugestão: Com auxílio do software de Geometria Dinâmica - Geogebra: é possível de forma dinâmica, enchergar todas essas passagens matemáticas de forma instrutiva, permitindo uma análise mais profunda do comportamento da curva, atravéz de uma visualização animada com muitas possibilidades de estudos. Uma proposta, é a mudança da nova inclinação da reta após o eixo y, para um fator entre 0 e 1 a ser multiplicado pelo coeficiente angular da reta, ou seja, sua inclinação dada por $tg(\alpha)$.

Exercício 16)

Explorar construção de hipérboles com eixo real disposto tanto na horizontal quanto na vertical .

5 CONCLUSÃO

Diante da percepção de que em minha própria trajetória educacional, foram vários os conhecimentos matemáticos deixados de serem apresentados, tudo em nome de um currículo de conteúdo fechado, vejo a importância do papel desenvolvido pela nova Base Nacional Comum Curricular – BNCC, a qual está sendo implantada na Educação Básica.

Sua proposta de aprendizagem está baseada no desenvolvimento de habilidades e competências que buscam garantir a formação integral do estudante.

Com ela, o conteúdo formal, extenso e velho conhecido nosso, deixa de ser o protagonista principal do processo de aprendizagem do estudante, passando a ser meio para que habilidades esperadas sejam alcançadas e, consequentemente o desenvolvimento das competências.

Para isso, a BNCC propõe uma flexibilização na hora de escolher conteúdos a serem trabalhados para a formação geral básica no Ensino Médio, se comparados com escolhas passadas. Em paralelo, ela também propõe, para formação diversificada, os chamados itinerários formativos, que são roteiros apresentados sob a forma de Projeto de Vida, Eletivas e Trilhas de Aprofundamento. Estes itinerários podem ser apreciados e escolhidos pelos estudantes, uma vez que estão totalmente abertos para a inserção destes pela Instituição de Ensino.

É aqui que a abordagem desta dissertação se encaixa com a importância da proposta feita pela nova Base.

Para aqueles alunos que desejarem prosseguir a sua vida acadêmica na área do conhecimento em Matemática, nossa proposta de criação do produto educacional, sob a forma de trilhas de aprofundamento, visa por meio de apresentação de outros modelos de Geometria, que nem sempre eram mencionados aos alunos sua existência, promover ampla discussão/revisão undamentada nas habilidades já desenvolvidas no Ensino Fundamental, relacionadas a unidade temática, Geometria.

Estamos num período propício para a produção de materiais didáticos, que apresentem um conhecimento mais amplo, contextualizado, que permita aos estudantes se capacitarem e se desenvolverem para a construção do conhecimento e como consequência, vislumbrarem um mundo melhor.

Parabenizo ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat, por contribuir em muito para esta transformação na vida de professores e estudantes.

6 REFERÊNCIA

[1] BRASIL. [Constituição (1988)]. Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF: Senado Federal, 2016. 496 p.
Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf. Acesso em: 28 janeiro 2023.

[2] BRASIL, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União de 23/12/1996, p. 27833, col. 1. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 28 janeiro 2023.

[3] BRASIL, Lei nº 13.415, DE 16 DE FEVEREIRO DE 2017. Conversão da Medida Provisória nº 746, de 2016. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Diário Oficial da União - Seção 1 - 17/2/2017, Página 1. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 28 janeiro 2023.

[4] BNCC - Base Nacional Comum Curricular.
Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/
Acesso em: 28 janeiro 2023.

[5] GOIÁS, DC-GOEF, Documento Curricular de Goiás – Etapa Ensino Fundamental.

[6] GOIÁS, DC-GOEM, Documento Curricular de Goiás – Etapa Ensino Médio. O novo Ensino Médio é caracterizado pela ampliação da carga horária e pela flexibilização do currículo. Disponível em: https://site.educacao.go.gov.br/novo-ensino-medio#documento-curricular. Acesso em: 28 janeiro 2023.

[7] Coutinho, Lázaro. Convite às geometrias não-euclidianas / Lázaro Coutinho - 2 ed. - Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

[8] Mlodinow, Leonard. A janela de Euclides: A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperspaço / Leonard Mlodinow, tradução de Enézio E. de Almeida Filho. - São Paulo: Geração Editorial, 2004.

[10] MARTIN, George E.. The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. Albany, New York, U.S.A: Springer, 1975. 511 p. (ISBN - 978-1-4612-5727-1).

[11] R. S. Millman, G. D. Parker, Geometry, a Metric Approach with Models, Springer–Verlag, Undergradute Text in Mathematics, 1991.

[12] CASTRUCCI, Benedito. Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978

[13] BICUDO, Irineu. Os Elementos/Euclides: Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009. 593 p. (ISBN 978-85-7139-935-8). Tradução Irineu Bicudo.

[14] Andrade, Plácido. Introdução à Geometria Projetiva / Plácido Andrade e Abdênago Barros - Rio de Janeiro: SBM, 2010.