Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Juliana de Oliveira Souza Gomes

A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos

Goiânia
2023

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Juliana de Oliveira Souza Gomes

3. Título do trabalho

A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [ ] SIM [X] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/03/2023, às 18:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Juliana De Oliveira Souza Gomes**, **Discente**, em 09/03/2023, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3574311** e o código CRC **75AECCA5**.

Referência: Processo nº 23070.008982/2023-54 SEI nº 3574311

Criado por sosteneg, versão 3 por kamila.andrade em 07/03/2023 18:51:25.

Juliana de Oliveira Souza Gomes

A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Kamila da Silva Andrade

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Gomes, Juliana de Oliveira Souza
A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos [manuscrito] / Juliana de Oliveira Souza Gomes. - 2023.
120 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2023.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui tabelas.

1. Divisibilidade. 2. Congruências. 3. Jogos. 4. Olimpíadas. 5. Ensino Fundamental. I. Andrade, Kamila da Silva, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **três** da sessão de Defesa de Dissertação de **Juliana de Oliveira Souza Gomes**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos dois dias do mês de março de dois mil e vinte três, a partir das 10 **horas**, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Kamila da Silva Andrade (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Elisabeth Cristina de Faria (IME/UFG) e o membro titular externo: Professor Doutor Wender José de Souza (UFJ). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora doutora Kamila da Silva Andrade, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dois dias do mês de março de dois mil e vinte três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/03/2023, às 12:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Elisabeth Cristina De Faria**, **Professora do Magistério Superior**, em 02/03/2023, às 12:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Wender José de Souza**, **Usuário Externo**, em 02/03/2023, às 13:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3535238** e o código CRC **57639293**.

Referência: Processo nº 23070.008982/2023-54 SEI nº 3535238

Criado por sosteneg, versão 6 por kamila.andrade em 02/03/2023 12:45:41.

Juliana de Oliveira Souza Gomes

Dedico este trabalho a meu pai (em memória)

Agradecimentos

Uma vez li uma frase que nunca me esqueci: “A gratidão é a memória do coração!”. E pra mim é a mais pura verdade. Quando penso em a quem agradecer, meu coração se enche de alegria.

Por isso, quero agradecer primeiramente ao meu bom Deus Jeová, que me deu força, sabedoria e paciência para fazer esse trabalho em meio a tantos desafios.

Ao meu querido e amado pai (em memória) que ficou tão orgulhoso de mim quando soube que sua menina seria Mestra, e que quando eu disse um dia que estava cansada e que iria desistir, ele bem bravo disse que isso não era o que ele tinha me ensinado, que nunca devemos desistir dos nossos objetivos mesmo que seja difícil e doloroso. “Termine o que você começou!”, essa expressão dele jamais vou esquecer. Ele deixou um grande exemplo, por lutar fortemente contra o câncer e nunca desistir apesar da dor. Seu exemplo me motiva em tudo que faço. Infelizmente ele hoje não está aqui para ver sua menina Mestra, mas devo a ele esse título.

Ao meu amado marido Douglas, que teve paciência, suportou minhas ausências e sempre me apoiou com carinho, segurando na minha mão quando estava cansada, dizendo sempre “descanse, mas não desista”.

Às minhas amadas irmãs, Patrícia e Sara, que me deram tanto apoio, ânimo, força, colo e carinho, e estavam super ansiosas pela fim de mais essa etapa.

À minha querida mãe, que mesmo dizendo todos os dias que eu ia enlouquecer de tanto estudar, sei que no fundo ela estava feliz e torcendo pelo meu sucesso nessa etapa.

Aos meus cunhados que sempre disseram: “Força! você consegue! Aguente mais um pouco que está acabando!”.

Às minhas queridas amigas que me deram apoio, me deixaram reclamar o quanto eu queria em seus colos e me fizeram sorrir em dias que queria chorar e desistir.

À todos meus colegas de mestrado e professores do PROFMAT. Que turma maravilhosa, unida e parceira eu tive o privilégio de pertencer. Obrigada a todos pela grande contribuição e aprendizado. Mas em especial gostaria de agradecer ao meu amigo Jefferson, que sem a sua ajuda eu não teria chegado até aqui. Obrigada meu amigo, prometo continuar te amolando.

À CAPES pelo apoio financeiro, com bolsa de estudos que foi fundamental durante parte do mestrado.

Um agradecimento muito especial a minha querida orientadora Kamila, pelo incentivo e por tanta dedicação, paciência e sabedoria que teve para me ensinar e me ajudar a progredir e nunca desistir. Obrigada de coração.

"Para todas as coisas tenho forças graças àquele que me dá poder."

Filipenses 4:13,
A Bíblia.

Resumo

Gomes, Juliana de Oliveira Souza. **A aritmética modular e o ensino de divisibilidade no 6º ano do ensino fundamental por meio de jogos**. Goiânia, 2023. 121p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho está relacionado às aplicações e aos conceitos de divisibilidade que constam no currículo dos anos finais do ensino fundamental. Com o intuito de fornecer um material de apoio ao professor do ensino básico, apresentam-se alguns conceitos e resultados inerentes à divisibilidade e congruência modular, com o foco na resolução de problemas. Devido a aplicabilidade das congruências modulares e sendo um instrumento facilitador na resolução de problemas, em especial problemas de olimpíadas, este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática para a introdução do conteúdo de congruência modular nos anos finais do ensino fundamental, mesmo este conteúdo não constando nos livros didáticos. Visto que muitos alunos apresentam dificuldades na aprendizagem de divisibilidade, são analisadas as contribuições das atividades lúdicas no processo de ensino aprendizagem. Por fim, este trabalho trás o relato de experiência de uma intervenção pedagógica para investigar a eficácia do uso de jogos nas aulas de matemática.

Palavras–chave

Divisibilidade, Congruências, Jogos, Olimpíadas, Ensino fundamental.

Abstract

Gomes, Juliana de Oliveira Souza. **Modular arithmetic and the teaching of divisibility in the 6^{th} year of elementary school through games**. Goiânia, 2023. 121p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work is related to applications and concepts of divisibility that appear in curriculum of the final years of elementary school. Aiming to provide a support material for basic education teachers, some concepts and results inherent to modular divisibility and congruence are presented, focusing on problem solving. Due to the applicability of modular congruences and being a facilitating instrument in problem solving, this work presents a proposal for a didactic sequence for the introduction of modular congruence content in the final years of elementary school, even though this content is not included in textbooks. Since many students have difficulties in learning divisibility, the contributions of ludic activities in the teaching-learning process are analyzed. Finally, this work brings the experience report of a pedagogical intervention investigating the effectiveness of using games in mathematics classes.

Keywords

Divisibility, Congruences, Games, Olympics, Elementary School.

Sumário

Introdução

São notórias as inúmeras dificuldades encontradas dentro da sala de aula, tanto pelos professores, quanto pelos alunos, que prejudicam o processo de construção de conhecimento matemático. Grande parte dessas dificuldades devem-se ao fato de os alunos verem a disciplina de maneira negativa e desinteressante por não conseguirem vincular os conteúdos a situações do seu cotidiano. Quanto ao professor, mediador do conhecimento, tem o grande desafio de formar um ambiente educativo, interessante e prazeroso, tornando a matemática cada vez mais próxima da realidade dos alunos.

Nesta perspectiva, afim de mudar essa realidade, o professor deve ministrar aulas capazes de despertar nos alunos o gosto pela disciplina e enfraquecer o senso comum de que a matemática é muito difícil e que pode ser entendida apenas por uma minoria. Em geral, as aulas de matemática são ministradas segundo o método tradicional de ensino, dando ênfase ao mecanismo da repetição. Dessa forma, esse método tem se mostrando insuficiente para garantir a aprendizagem efetiva dos alunos.

Quanto mais abstrato e conceitual o conteúdo, maiores são as dificuldades de concentração e interesse por parte dos alunos. Um exemplo é no estudo da Divisibilidade dos números naturais. Percebe-se uma grande dificuldade dos alunos ao se depararem com problemas que envolvem esse conteúdo, em especial ao realizarem as provas da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP). A causa dessa dificuldade, muitas vezes, é a maneira tradicional como esse conteúdo é apresentado aos alunos e, também, a falta de pré-requisitos, visto que muitos apresentam dificuldades em efetuar operações fundamentais - em especial a divisão - e a dificuldade em interpretar problemas.

Tal conjectura requer uma reflexão quanto a maneira como o conteúdo de Divisibilidade é apresentado aos alunos e a dificuldade que muitos professores tem em aprimorar suas práticas docentes. Além de uma análise a cerca da pertinência da apresentação de conteúdos que facilitam as resoluções de problemas, como o conceito de aritmética modular.

Como professora dos anos finais do Ensino Fundamental por mais de 15 anos e consciente dessa realidade e necessidade decidi retomar aos estudos e ingressar no mestrado profissional. E ao estudar a disciplina obrigatória de Aritmética, e especial ao estudar a Aritmética modular, conteúdo que estudei muito superficialmente na minha graduação e isso a mais de 15 anos, me senti motivada a pesquisar mais sobre o tema de divisibilidade.

O interesse por jogos matemáticos sempre fez parte de minha vida acadêmica, sendo este o tema do meu trabalho de Conclusão de curso na graduação e de um artigo escrito em uma especialização em Educação Matemática. Então, conversando com minha orientadora, começamos a pensar em como poderíamos unir esses dois interesses - divisibilidade e jogos - em um único trabalho.

A disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, foi fundamental para o desenvolvimento desse trabalho. As pesquisas propostas pela professora despertaram em mim algumas inquietações. Por exemplo, ao fazer um levantamento bibliográfico sobre o tema divisibilidade, aritmética modular e jogos, encontrei diversos trabalhos que que me inspiraram. Daí comecei a me questionar: Será que a maneira como nós professores ensinamos a divisibilidade é a mais eficaz? O que pode ser alterado na didática? Manter o tradicional ou inovar com o lúdico? O uso de jogos pode contribuir para garantir a aprendizagem efetiva do conteúdo de divisibilidade? Como? Será que podemos ir além dos livros didáticos e introduzir conceitos que facilitariam a resolução de problemas como a Aritmética Modular?

Diante desta problemática, este trabalho tem por objetivo: contribuir para a formação continuado do professor de matemática por meio do desenvolvimento de um material de apoio contemplando o tema de divisibilidade e o uso de metodologias diferenciadas o que contribuirá para o desenvolvimento do o raciocínio lógico do aluno e sua compreensão dos conceitos de múltiplos e divisores e estimular a resolução de situações-problema. Além disso, incentiva a dinamização das aulas de matemática de modo que os alunos participem ativamente da construção de seus conhecimentos de forma prazerosa.

Este trabalho aborda conceitos que envolvem a Teoria dos Números, em específico a Aritmética, uma área muito abrangente da matemática. No entanto, na base curricular do Ensino Fundamental, preveem para os anos finais, apenas o ensino de conceitos básicos como de números naturais e suas operações, múltiplos, divisores, números primos, números compostos, regras de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Porém a Aritmética é muito mais ampla. Existem alguns tópicos como Aritmética Modular, que são deixados de lado e não constam nos livros didáticos.

A Aritmética modular, tem grande aplicabilidade no nosso cotidiano e, seu conhecimento pode ser um facilitador na resolução de problemas, em especial problemas olímpicos, além de potencializar o entendimento do conteúdo de divisibilidade. Em vista disso, este trabalho apresenta algumas sugestões de atividades e exemplos envolvendo o conteúdo de divisibilidade e aritmética modular, tal que possa servir de fonte de pesquisa para professores que desejam inovar suas aulas tornando-as mais dinâmicas e atrativas.

Fornece também uma proposta de sequência didática que servirá como norteador de novos conceitos para docentes que desejam enriquecer suas aulas e se desprender dos livros didáticos, sem fugir dos objetivos previstos pelos documentos que normatizam o ensino do país referente ao ensino da matemática. Espera-se que a proposta de ensino apresentada nesse trabalho contribua para atingir tais objetivos dentre os quais, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), podemos destacar que, o ensino da matemática deve levar o aluno a

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;

Objetiva-se que este trabalho sirva de fonte de pesquisa para professores de matemática que assim como eu desejam trazer sentido à matemática e despertar nos alunos o gosto por essa ciência tão importante no cotidiano deles. Ele fornece um material de apoio contemplando o tema de divisibilidade e congruência modular. Também aborda como o uso de jogos favorecem o desenvolvimento do o raciocínio lógico do aluno e sua compreensão destes conteúdos, além de estimular a resolução de situações-problema.

Uma forma de dinamizar as aulas de matemática é pela inovação nas metodologias de ensino e a introdução do lúdico nas aulas de matemática. Um excelente recurso é o uso de jogos, pois com estes os alunos aprendem brincando, criando, desafiando, inventando situações para explicar determinados assuntos, além de se sentirem motivados a aprender, uma vez que desperta o interesse pela disciplina. Com o intuito de verificar na prática o impacto causado pelo uso de jogos na aprendizagem da matemática, este trabalho apresenta um relato de uma intervenção pedagógica com aulas diferenciadas para a exposição e fixação de conceitos relacionados a divisibilidade.

Nessa perspectiva, o trabalho está estruturado em cinco capítulos. O Capítulo 1 traz aspectos históricos da Aritmética, bem como os nomes de grandes matemáticos protagonistas da história da Teoria dos Números e suas contribuições para o desenvolvimento da matemática. Além disso, apresenta o que está previsto nos documentos que normatizam o ensino no Brasil de divisibilidade e todos os conceitos envolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental. O Capítulo 2 aborda definições, propriedades e resultados elementares da divisibilidade no conjunto dos números inteiros. Também, enfatiza o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum, o papel importante dos números primos, a aritmética modular e os critérios de divisibilidade. O Capítulo 3 ressalta a importância da aritmética modular, e como ela pode ser uma facilitadora na resolução de problemas. Apresenta uma sequência didática como proposta para a inserção do conteúdo nos anos finais do Ensino Fundamental, bem como uma lista de problemas olímpicos e soluções. O Capítulo 4 destaca como a inovação nas metodologias de ensino por meio do uso de jogos podem contribuir para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Por fim, o Capítulo 5 traz uma descrição detalhada de uma intervenção pedagógica realizada em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental II e incluiu a aplicação de um jogo como recurso pedagógico no ensino de divisibilidade.

CAPÍTULO 1

A Aritmética no Ensino Fundamental

Atualmente, os currículos de Matemática dos anos finais Ensino Fundamental prevêem o ensino de alguns tópicos da Teoria dos Números, ou Aritmética, como obrigatórios, por exemplo, os conjuntos dos números naturais e inteiros com suas propriedades e operações, múltiplos e divisores, números primos e compostos, relações de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Porém, outros conceitos importantes da Aritmética, como o de congruência modular, são deixados de lado. Neste capítulo abordamos alguns aspectos históricos da Aritmética, parte elementar da matemática e o que está previsto nos documentos que normatizam o ensino no Brasil, para os anos finais do ensino fundamental, com relação à Aritmética, em especial a divisão euclidiana.

1.1 Aspectos históricos da Aritmética

A Aritmética, palavra grega, *arithmós*, que significa número, é uma área abrangente da matemática, que lida com os números e as operações.Todos os outros ramos da matemática se baseiam nela. Como o matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) afirmou em sua sua importante obra *Disquisitiones Arithmeticae*: "A matemática é a rainha das ciências e a aritmética é a rainha da matemática".

Gauss foi um dos protagonistas da Teoria dos Números. Antes dele, porém, a Aritmética teve como marco inicial na obra *Os Elementos*, de Euclides (aprox. 300 a.C.), encontrando seu auge nos trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) o que a levou a tornar-se um dos principais pilares da Matemática. No entanto, foi a partir de Gauss que a Aritmética transforma-se em Teoria dos Números e começa a ter um desenvolvimento extraordinário.

Segundo Hefez (2016), aparentemente, Euclides não criou muitos resultados, mas teve mérito de estabelecer um padrão de apresentação e de rigor matemático jamais alcançado anteriormente, tido como exemplo a ser seguido nos milênios que se sucederam. Em três de seus 13 livros *Os Elementos*, Euclides desenvolve a teoria dos números naturais, conceitos de divisibilidade, de número primo, de máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, entre outros. No livro VII, encontra-se enunciada (sem demonstração), a divisão com resto de um número natural por outro, chamada divisão euclidiana. Com o uso inteirado dessa divisão, Euclides estabelece o algoritmo mais eficiente, até hoje conhecido, para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números inteiros, chamado de Algoritmo de Euclides. Euclides também prova que todo número natural se escreve de modo essencialmente único como produto de números primos, resultando no que conhecemos hoje como o *Teorema Fundamental da Aritmética*.

Após os trabalhos de Euclides, a aritmética não teve avanços por cerca de cinco séculos, ressurgindo com os trabalhos de Diofanto de Alexandria (aprox. 250 d.C.) envolvendo a álgebra, se tornando o pioneiro neste ramo da matemática. Mais de 1300 anos depois, os trabalhos de Diofanto inspiraram grandes matemáticos como o francês Pierre Fermat e o suíço Leonhard Euler, sendo este o responsável por introduzir a ideia de congruência modular para números naturais, teoria essa desenvolvida posteriormente por Gauss, na sua famosa obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801, onde trás uma abordagem mais moderna da aritmética modular.

Hefez (2016) também menciona o poder que Gauss teve em mudar os rumos da matemática a partir de seus trabalhos, sendo assim considerado, pelos seus contemporâneos e pelas gerações que sucederam, como *"um príncipe da rainha das ciências"*.

Visto que a aritmética é uma parte elementar da Matemática e está presente em tudo ao nosso redor, e a usamos todos os dias, como por exemplo ao quantificar, comprar ou vender algo, o ensino da dela, no Ensino Básico, deve ter por objetivo desenvolver no aluno a capacidade de produzir seu próprio conhecimento aritmético e utilizá-lo quando necessário frente a situações problema. Quando os princípios básicos da aritmética não são efetivamente absorvidos o indivíduo desenvolve problemas em várias áreas de conhecimento. Portanto, vejamos agora o que está previsto nos documentos que normatizam o ensino no Brasil, para os anos finais do ensino fundamental, com relação à Aritmética, em especial à Divisão Euclidiana.

1.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) surgiram em 1997 devido a necessidade de se construir referências nacionais comuns para a educação básica em todas as regiões brasileiras. Este documento contém uma proposta curricular norteadora das decisões regionais e locais sobre os currículos a serem adotados pelas redes de educação estadual ou municipal, escolas e professores, respeitando as diversidades regionais do nosso país. O objetivo é garantir que todos estudantes, tenham acesso ao conjunto de conhecimentos elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.

> A abrangência nacional dos Parâmetros Curriculares Nacionais visa criar condições nas escolas para que se discutam formas de garantir, a toda criança ou jovem brasileiro, o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania para deles poder usufruir. (BRASIL, 1998, p.49).

Os PCNs do Ensino Fundamental são organizados em ciclos, sendo que 1º e 2º ciclos, compreendem os anos inciais do Ensino Fundamental, ou seja, do 1º ao 5º ano, e o 3º e 4º ciclos referem-se aos anos finais do ensino fundamental, isto é, do 6º ao 9º ano.

1.2.1 Objetivos de Matemática para o terceiro ciclo

Os PCNs de matemática, apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las. De acordo com ele, nos anos finais do ensino fundamental espera-se o desenvolvimento

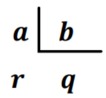
> do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> - ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
> - selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação problema proposta. (BRASIL, 1998, p.64).

1.2.2 O ensino de divisibilidade proposto pelos PCNs no terceiro ciclo

O ensino da divisibilidade é apresentado como conteúdo no bloco de Números e Operações dos PCNs, e assim como muitos outros conteúdos previstos para o 6º ano do ensino fundamental, muitos conceitos de divisibilidade já foram apresentados aos alunos nos anos anteriores, no entanto, é pouco provável que o aluno tenha, devido a complexidade dos conteúdos, desenvolvido as habilidades necessárias para resolver situações problemas envolvendo a divisibilidade.

Como exemplo, a divisão euclidiana, conhecida como divisão exata ou com resto, que é um dos conteúdos fundamentais de matemática apresentado aos alunos logo nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os alunos aprendem a realizar a divisão de dois números naturais a e b por meio do Algoritmo de Euclides, que resulta num quociente q e um resto r, ou seja, como ilustrado na Figura 1.1.

Figura 1.1: *Algoritmo da Divisão*



Fonte: Autoria própria

obtendo que $a = b.q + r,\ \text{com } 0 \leq r < b$.

No entanto, embora esta seja uma das operações básicas, muitos alunos chegam ao 6º ano do Ensino Fundamental com muitas dificuldades em realizá-la. E, embora alguns até operem com rapidez e facilidade o algoritmo da divisão, eles não apresentam compreensão dos conceitos envolvidos, realizando o processo apenas de maneira mecânica.

Neste sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) dos anos iniciais destacam:

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante no currículo do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final dessa fase de formação, com um conhecimento insuficiente sobre como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. (BRASIL, 1998, p. 95).

Por isso, é de suma importância que as ideias relacionadas à divisão sejam bem esclarecidas para os alunos para que eles possam dar significado ao cálculo que irão executar. Precisam entender mesmo nos anos iniciais do ensino fundamental que, quando falamos de divisão nem sempre queremos dividir em partes iguais.

Os PCNs sugerem também que ao apresentar este conteúdo na primeira serie do terceiro ciclo, este não seja apresentado de forma mecânica, apenas com exposição de regrinhas e técnicas, de modo que o aluno aprenda a calcular com agilidade ou mentalmente os cálculos propostos, como por exemplo, o máximo divisor comum ou o mínimo múltiplo comum entre dois números naturais. Antes, porém, o aluno deve aprender a resolver problemas com este conteúdo tão presente em situações do seu dia a dia.

> Conceitos como os de múltiplo e divisor de um número natural ou o conceito de número primo podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. (BRASIL, 1998, p.66).

1.3 A Base Nacional Comum Curricular

A BNCC faz parte do Plano Nacional da Educação (PNE), previsto na Constituição Federal de 1988, e ela não invalida os PCNs. No entanto, a Base é mais específica, determinando com mais clareza os objetivos de aprendizagem de cada ano escolar. Ela é obrigatória em todos os currículos de todas as redes do país, públicas e particulares, diferente dos PCNs que são documentos orientadores não obrigatórios.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).(BRASIL, 2018, p.7).

Este documento indica o que deve ser ensinado e desenvolvido, isto é, os conhecimentos e as competências mínimas que devem ser garantidos a todos os estudantes brasileiros em sua vida escolar. Cada área de conhecimento tem suas competências específicas. Veja a seguir as competências específicas de matemática:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos,

tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Para garantir o desenvolvimento dessas competências específicas, a BNCC apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades estão relacionadas a objetos de conhecimento que, por sua vez, são organizados em cinco unidades temáticas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

- (EF06MA01) EF (Ensino Fundamental) - 06 (ano/série que a habilidade será trabalhada) - MA (Área de conhecimento - Matemática) - 01 (Sequência da habilidade na série ou ano).

O foco desse trabalho está na unidade Números, uma vez que praticamente todos os conteúdos de Aritmética neste ciclo de ensino se concentram nessa unidade. O professor deve fazer seu plano de aula com base nas habilidades da BNCC.

1.3.1 O ensino de divisibilidade de acordo com a BNCC

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o estudo da divisão deve ser iniciado no 2º ano do ensino fundamental, com ideias de metade e terceira parte. Este estudo deve ser aprofundado no 3º e 4º ano, observando as habilidades:

- (EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.
- (EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.
- (EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
- (EF04MA13) "Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e divisão, para aplicá-las na resolução de problemas".

No 5º ano a BNCC sugere que fração é o resultado de uma divisão, como pode ser observado na habilidade a seguir:

- (EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

No 6º ano do ensino fundamental, tomando como objeto de conhecimento os conteúdos: divisão euclidiana, múltiplos e divisores de números naturais; divisibilidade; números primos e compostos e critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6, 9 e 10, sob a unidade temática de números, objetiva-se garantir o desenvolvimento das seguintes habilidades, de acordo com a BNCC:

- (EF05MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
- (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
- (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
- (EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

A divisão euclidiana merece uma atenção especial no 6º ano, pois nessa etapa o aluno ainda precisa revisitar esse conteúdo, objetivando seu aprofundamento e sua plena compreensão, de acordo com a orientação geral, tanto dos PCNs (BRASIL,1998, p.81) que recomendam explorar o conceito e a formalização ainda no 3º ciclo (6º e 7º ano), como também da BNCC (BRASIL,2018, p.255) de oportunizar-se, a cada ano escolar, não só uma retomada como também um aprofundamento do conteúdo.

CAPÍTULO 2

Divisibilidade

Neste capítulo aborda-se as definições e propriedades elementares acerca de divisibilidade e do resto no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). Enfatiza-se o algoritmo da divisão, a noção do máximo divisor, algoritmo de Euclides, mínimo múltiplo comum, o papel fundamental dos números primos, a aritmética modular e os critérios de divisibilidade. Além disso, uma importante e indispensável ferramenta matemática é apresentada: o Princípio da Indução Finita. Os exemplos apresentados nesse capitulo podem servir de motivação para a introdução desses conteúdos com os alunos nas séries finais do Ensino Fundamental.

2.1 O conjunto dos números inteiros

O ponto de partida deste trabalho é o estudo do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) (abreviatura do termo alemão *zahlen*, cujo significado é *número* ou *algarismo*). Os números inteiros surgiram da necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, devido a dificuldade em se efetuar a subtração entre quaisquer dois elementos de $\mathbb{N}$, por exemplo, não se tinha a formalização sobre com subtrair 5 de 2, além da inclusão ou não do zero.

Assim, esse novo conjunto a ser formado por números naturais, números negativos e zero, herda as operações e a relação de ordem ($<$) do conjunto dos números naturais, podendo ser assim representado:

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

em que o conjunto $-\mathbb{N}$ é formado pelos números simétricos dos elementos de $\mathbb{N}$, isto é, $-\mathbb{N} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Em $\mathbb{Z}$ estão definidas duas operações (as quais chamaremos de usuais): a adição ($+$) e a multiplicação ($\cdot$),

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}.$$

O conjunto $\mathbb{Z}$, munido dessas operações tem as seguintes propriedades que, neste trabalho, serão assumidas como axiomas:

(a) A adição e multiplicação são bem definidas: para quaisquer $a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{Z}$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$.
(b) A adição e multiplicação são comutativas: para quaisquer $a,\ b, \in \mathbb{Z}$, tem-se $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.
(c) A adição e multiplicação são associativas: para quaisquer $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, tem-se $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
(d) A adição e multiplicação possuem elementos neutros: para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$. Então, 0 é o elemento neutro da adição e 1 o da multiplicação.
(e) A adição possui elementos simétricos: para quaisquer $a \in \mathbb{Z}$, existe $\in \mathbb{Z}$ tal que $a + b = 0$. Logo, b é o simétrico de a, e será denotado por $-a$, isto é $b = -a$.
(f) A multiplicação é distributiva em relação à adição: para quaisquer $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, tem-se $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Observação 2.1. Um conjunto munido de operações de adição e multiplicação que possuem as propriedades de (a) a (f) é chamado de *anel*. Visto que existem muitos outros conjuntos numéricos com essas propriedades, por exemplo os conjuntos dos números racionais e reais, os axiomas acima não são exclusivos do conjunto dos números inteiros. Veremos mais adiante uma propriedade que diferencia a estrutura conjunto dos inteiros da estrutura desses outros conjuntos.

A partir das propriedades acima é possível concluir que:

(i) Para todo $a \in \mathbb{Z}$ tem-se $a \cdot 0 = 0$. De fato, em decorrências das propriedades (d) e (f) temos que:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

A propriedade (a) permite que um dado número seja somado a ambos os lados de uma igualdade sem alterá-la, assim, somando-se $-(a \cdot 0)$ aos dois membros da igualdade, e unindo as propriedades $(c), (d)$ e (e), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= -(a \cdot 0) + (a \cdot 0) \\ &= -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) \\ &= (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

(ii) A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade, isto é,

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Suponha que $a = b$. Pela propriedade (a) podemos adicionar c a ambos os lados e consegue-se o resultado. Por outro lado, se $a + c = b + c$, somando-se $(-c)$ a ambos os membros, obtém-se o desejado.

Observação 2.2. Dados dois números $a, b \in \mathbb{Z}$, quando somamos a com o simétrico de b realizamos a operação que usualmente chamamos de subtração, isto é,

$$a + (-b) = a - b.$$

Dizemos então que, $a - b$ é o resultado da subtração de a por b.

2.2 Ordenação no conjunto dos números inteiros

As propriedades enunciadas até aqui são bastante importantes, pois, ajudarão a discorrer sobre a ordenação no conjunto dos números inteiros, que permite comparar dois elementos de $\in \mathbb{Z}$. Para tanto faz-se necessário admitir que em $\mathbb{Z}$ também valem as seguintes propriedades:

(a) Fechamento de $\mathbb{N}$ com relação a soma e o produto, isto é, o conjunto de $\in \mathbb{N}$ é fechado para a adição e para a multiplicação, ou seja, para todos $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

(b) (Tricotomia) Dois elementos de $\mathbb{Z}$ são sempre comparáveis, isto é, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

    i. $a = b$;
    ii. $b - a \in \mathbb{N}$;
    iii. $-(b - a) = a - b \in \mathbb{N}$.

Quando a possibilidade (ii) for satisfeita, diz-se que a é *menor* do que b e simbolizamos $a < b$. Assim, a possibilidade (iii) equivale à $b < a$. Dessa forma, a tricotomia pode ser reescrita como: dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

i. $a = b$;
ii. $a < b$ (a é menor do que b);
iii. $b < a$ (b é menor do que a ou é maior que b).

Dizemos que a é maior do que b quando $a - b \in \mathbb{N}$, e indicamos por $a > b$. Além disso, como $a - 0 = a$, segue-se que $a > 0$ se, e somente se, $a \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pode-se escrever $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n > 0\}$ e $-\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n < 0\}$. Logo, $a > 0$ se, e somente se, $-a < 0$.

A relação *menor do que* é o que se chama de *relação de ordem*, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

(a) **Transitividade:** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$;

(b) **Cancelamento da adição:** $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}, a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$;

(c) **Cancelamento da multiplicação com respeito a relação *menor do que*:** $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$ e $\forall\ c \in \mathbb{N}, a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$;

(d) **Cancelamento da multiplicação com respeito a igualdade:** $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ e $\forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b$;

Demonstração. (a) De fato, supondo $a < b$ e $b < c$, temos $b - a \in \mathbb{N}$ e $c - b \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ é fechado, temos que $c - a = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{N}$, logo $a < c$.

(b) Se $a < b$ então $b - a \in \mathbb{N}$. Portanto, $(b + c) - (a - c) = b - a \in \mathbb{N}$, logo $a + c < b + c$. Reciprocamente, se $a + c < b + c$, então somando $(-c)$ a ambos os membros da desigualdade obtemos o resultado desejado.

(c) Se $a < b$ então $b - a \in \mathbb{N}$, e como $c \in \mathbb{N}$, pelo fechamento dos naturais temos que: $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c \in \mathbb{N}$. Portanto, $a \cdot c < b \cdot c$.
Reciprocamente, se $a \cdot c < b \cdot c$, com $c \in \mathbb{N}$. Pela tricotomia, temos três possibilidades a analisar:

i. $a = b$. O que implicaria que $ac = bc$, o que contradiz a hipótese.
ii. $b < a$. Daí, pela primeira parte da demonstração que $b.c < a.c$, visto que $c \in \mathbb{N}$, o que também é falso.
iii. $a < b$. Esta é a única opção possível.

(d) Observe que $a = b$ implica diretamente em $a \cdot c = b \cdot c$. Logo, não há nada mais a demonstrar. Suponha, agora, que $a \cdot c = b \cdot c$, então temos duas possibilidades:

i. Caso $c > 0$. Se $a < b$, temos que $a \cdot c < b \cdot c$, o que é uma contradição. Se $b < a$, pelo mesmo argumento temos que $b \cdot c < a \cdot c$, o que também é falso. Portanto, a única alternativa possível é $a = b$.
ii. Caso $-c > 0$. Análogo ao caso para $c > 0$.

Isto finaliza a demonstração. □

Observação 2.3. O conjunto dos números inteiros é um domínio de integridade, isto é, além das propriedades $(a) - (f)$ mencionadas anteriormente, satisfaz que se a e b são inteiros tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

De fato, se $a \neq 0$, então $a \cdot b = 0$ apenas se $b = 0$, devido a lei do cancelamento. Consequentemente, para todos $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tem-se $a \cdot b \neq 0$. Em $\mathbb{Z}$, temos também uma relação de ordem, que denotaremos por $\leq$ e $\geq$. Estas relações são definidas por: a é menor ou igual do que b, ou que b é maior ou igual do que a, escrevendo a $a \leq b$ ou $b \geq a$, se $a < b$ ou $a = b$. Note que $a \leq b$ se, somente se, $b - a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Com isso, é fácil verificar que essa nova relação é uma relação de ordem, pois satisfaz as seguintes propriedades:

(a) **Reflexiva:** $\forall\ a \in \mathbb{Z}, a \leq a$.
(b) **Antissimétrica:** $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b\ e\ b \leq a \Rightarrow a = b$.
(c) **Transitiva:** $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}, a \leq b\ e\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Agora definiremos a importante noção de valor absoluto. Definimos $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ da seguinte forma, se $a \in \mathbb{Z}$ então

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Observe que para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se que $|a| \geq 0$ e $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$. O número inteiro $|a|$ é chamado de módulo de a. Seguem enunciados das propriedades básicas do módulo. Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se:

(a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
(b) $|a| \leq r$ se, e somente se, $-r \leq a \leq r$;
(c) $-|a| \leq a \leq |a|$;
(d) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular).

As propriedades enunciadas até aqui não são exclusivas do conjunto dos números inteiros, pois os conjuntos dos números racionais e reais também as possuem. O conjunto dos números inteiros, no entanto, possui uma propriedade exclusiva que logo iremos enunciá-la. Antes porém, vamos destacar alguns subconjuntos de $\in \mathbb{Z}$:

(a) Conjunto $\mathbb{Z}^*$ dos inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

(b) Conjunto $\mathbb{Z}_+$ dos inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

(c) Conjunto $\mathbb{Z}_+^*$ dos inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{\ldots, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

(d) Conjunto $\mathbb{Z}_-$ dos inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$$

(e) Conjunto $\mathbb{Z}_-^*$ dos inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}.$$

Se fazem necessárias, também, algumas definições.

Definição 2.4. *Dizemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{Z}_+$ é, limitado inferiormente, se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$. Dizemos, também, que $a \in S$ é um menor elemento de S se $a \leq x$ para todo $x \in S$, e denotamos $a = \min S$.*

Note que, se $S \subset \mathbb{Z}$ possui menor elemento, então esse elemento é único. De fato, pois, se a e a' são menores elementos de S, então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, logo $a = a'$.

No subconjunto dos inteiros não negativos vale uma das propriedades fundamentais que usaremos como base para a demonstração de alguns resultados ao longo deste trabalho, é chamado de *Princípio da Boa Ordenação*, que é uma das características que diferencia o conjunto dos números inteiros dos conjuntos dos números racionais e reais.

Lema 2.5 (Princípio da Boa Ordenação). *Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.*

Demonstração. Por definição dizemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$ para todo $x \in S$. Dizemos também que $a \in S$ é um menor elemento de S se $a \leq x$ para todo $x \in S$, e denotamos $a = \min S$. Acordamos que o conjunto vazio, apesar de não possuir nenhum elemento, é limitado inferiormente, tendo qualquer número como cota inferior. Além disso, se $S \subset \mathbb{Z}$ possui menor elemento, então esse elemento é único. De fato, se a e a' são menores elementos de S, então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, logo $a = a'$.

Observe que, qualquer subconjunto dos $S \subset \mathbb{N}$ é limitado inferiormente por causa do 1. Logo, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui menor elemento. Por outro lado, tanto o conjunto dos números racionais e dos reais possuem subconjuntos que são limitados inferiormente, mas não possuem menor elemento, por exemplo, considerando o intervalo $(0, 1)$, temos que todos os números racionais dentro deste intervalo é limitado inferiormente pelo 0, mas não possui menor elemento, pois, dado qualquer número racional não nulo, estritamente entre 0 e 1, sempre existirá um número racional que seja menor do que esse número dado.o Princípio da Boa Ordenação também não vale em todo o conjunto $\mathbb{Z}$ pois não existe um menor inteiro negativo. $\square$

O Princípio da Boa Ordenação permite demonstrar mais algumas propriedades de $\mathbb{Z}$ necessárias ao estudo feito aqui. Destacam-se as seguintes.

Proposição 2.6. *Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a \leq 1$. Então $a = 0$ ou $a = 1$. Ou seja, não existe nenhum número inteiro n tal que $0 < n < 1$.*

Demonstração. Seja $S = \{a \in \mathbb{Z} | 0 < a < 1\}$. Queremos mostrar que $S = \emptyset$. Suponha por absurdo que $S \neq \emptyset$, ou seja, que exista $n \in \mathbb{Z}$ com essa propriedade. Como S é limitado inferiormente, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que existe $m = \min S$. Como $m \in S$ temos que S é não vazio, além de ser limitado inferiormente. Portanto, S possui um menor elemento m, com $0 < m < 1$. Multiplicando esta última desigualdade por a, obtém-se $0 < m^2 < m < 1$, logo $m^2 \in S$ e $m^2 < m$, o que é um absurdo. Portanto, $S = \emptyset$. □

Corolário 2.7. *Dado um número inteiro n qualquer, não existe nenhum número inteiro m tal que $n < m < n + 1$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um número inteiro m que satisfaça as desigualdades $n < m < n + 1$. Subtraindo n nessas desigualdades, obtém-se $0 < m - n < 1$, o que contradiz a Proposição 2.6. □

Corolário 2.8. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \cdot b = 1$, então $a = b = \pm 1$.*

Demonstração. Inicialmente, note que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois caso contrário, $a.b = 0$. Suponha que se tenha $a > 0$. Como $a.b = 1 > 0$, segue que $b > 0$. Segue-se da Proposição 2.6 que $a \geq 1$ e $b \geq 1$. Logo, $1 = a.b \geq b \geq 1$, o que implica que $b = 1$ e, como $a.b = 1$, isso acarreta que $a = 1$. □

Corolário 2.9. *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então $|a \cdot b| \geq |a|$.*

Demonstração. De fato, como $b \neq 0$, pela Proposição 2.6, tem-se que $|b| \geq 1$. Logo, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \geq |a|$. □

Corolário 2.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot b > a$.*

Demonstração. Como $b \neq 0$, segue a Proposição 2.6 que $|b| \geq 1$, logo $(|a| + 1)|b| \geq |a| + 1 > |a| \geq a$. □

2.3 Princípio de Indução Finita

Uma das mais importantes consequências do Princípio da Boa Ordenação é o Princípio da Indução Matemática. Usando o Princípio da Boa Ordenação podem-se deduzir duas formas do *Princípio da Indução Finita* bastante úteis para provar a veracidade de proposições definidas no conjunto dos números naturais.

No geral, se $p(n)$ é uma proposição em n, isto é, uma afirmação dependendo de n, e afirma-se que a mesma é válida para todo inteiro positivo n. Como verificar ou mostrar que tal afirmação é de fato verdadeira? Como existem infinitos números inteiros positivos, a rigor deveríamos verificar se são verdadeiras as afirmações: $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), p(6), p(7), \cdots$ ou seja, temos que verificar a validade de infinitas afirmações, sendo impossível tal fato.

Assim, usaremos Princípio da Indução Infinita para mostrar que uma proposição $p(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq n_0$, com n_0 fixado. Esse método consiste em verificar dois passos:

(i) $p(n_0)$ é válida;

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a validez de $p(n)$ implica na validez de $p(n+1)$. Então $p(n)$ é válida para qualquer que seja $n \geq n_0$.

Teorema 2.11 (Primeiro Princípio de Indução)**.** *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $p(n)$ uma proposição em $n \in \mathbb{N}$. Suponha que*

(i) $p(n_0)$ é verdadeiro;

(ii) $\forall\ n \geq n_0,\ p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdadeiro.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. A prova que apresentamos é por contradição. Suponhamos que, para algum n, $p(n)$ seja falsa. Então, $p(n-1)$ tem que ser falsa, assim como $p(n-2)$ e etc, até $p(n_0)$ tem que ser falsa, contradizendo (i). □

Uma variante do Princípio da Indução é muitas vezes chamado de Princípio da Indução Completa ou Segundo Princípio de Indução, é usado para provar proposições, quando é preciso confirmar a validade da proposição para valores menores que n.

Teorema 2.12 (Segundo Princípio de Indução)**.** *Seja $p(n)$ uma proposição relativa a $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:*

(i) $p(n_0)$ é válida.

(ii) Para todo $n > n_0 \in \mathbb{N}$ a validade de $P(k)$, para $n_0 \leq k \leq n$, implica a validade de $p(n+1)$. Então, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Consideremos a proposição $q(n) : p(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n$. Como, por (i), $p(1)$ é válida, então $q(1)$ também é. Suponhamos agora que $q(n)$ seja válida. Isto quer dizer que $p(k)$ é válida para todo $k \leq n$. Mas, por (ii), isto implica a validade de $p(n+1)$, que por sua vez implica que $p(k)$ seja válida para todo $k \leq n+1$. Logo, $q(n+1)$ também é válida. Portanto, pelo Primeiro Princípio da Indução, $q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde decorre a validade de $p(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Muitos dos resultados apresentados a seguir, serão provados usando essa ferramenta importantíssima, o *Princípio da Indução Finita* em suas duas formas.

2.4 A divisão no conjunto dos números inteiros

Como vimos, no conjunto dos números inteiros as operações da adição e multiplicação estão bem definidas, ou seja, para todo par (a, b) de números inteiros, a soma $a + b \in \mathbb{Z}$, e o produto $a \cdot b \in \mathbb{Z}$. No entanto, o quociente entre dois inteiros pode ser um inteiro ou não. Sendo o quociente inteiro podemos estabelecer relações de divisibilidade, e quando não existe uma relação de divisibilidade entre dois inteiros, notamos que, ainda é possível efetuar uma divisão com o menor resto possível. Neste sentido a divisão euclidiana (nome dado devido Euclides a ter usado em seus *Elementos*) munida de muitas propriedades nos garante sempre efetuar uma divisão entre dois números inteiros como veremos a partir do *Algoritmo da Divisão.*

O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por várias propriedades do conjunto dos números inteiros que iremos explorar a seguir.

2.4.1 O Algoritmo da Divisão

Definição 2.13. *Dados dois números inteiros a e b com $b \neq 0$ dizemos que b é divisor de a ou que a é divisível por b se é possível encontrar um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c$ e denotamos por $b|a$, neste caso a é múltiplo de b. Se a não é divisível por b escrevemos $b \nmid a$, e dizemos que a não é múltiplo de b.*

Exemplo 2.14.
- 3 é divisor de 15, pois $15 = 3 \cdot 5$. Logo $3|15$ e 15 é múltiplo de 3;
- 2 não é divisor de 15, pois não existe nenhum número inteiro que multiplicado por 2 é igual a 15. Logo $2 \nmid 15$ e 15 não é múltiplo de 2.

Naturalmente, há infinitos casos de pares de números inteiros tais que nenhum dos dois é divisor do outro. Por exemplo, 5 não é divisor de 8, nem vice-versa. Nestes casos, veremos que é possível realizar a divisão com o menor resto possível. Antes, porém, vejamos mais uma propriedade muito importante.

Proposição 2.15. *[Propriedade Arquimediana] Se a e b são números naturais, então existe um número natural n tal que $n \cdot a \geq b$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que a afirmação não seja verdadeira, isto é, para todo natural $n, n \cdot a < b$. Logo, o conjunto $S = \{b - n \cdot a : n \in \mathbb{N}\}$ é formado apenas por números naturais. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui elemento mínimo, digamos $m = \min(S)$. Como $m \in \S$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = b - n_0 \cdot a$. Por outro lado, o elemento $m_1 = b - (n_0 + 1) \cdot a$ pertence a S, pois S contém todos os elementos dessa forma. Além disso, $m_1 = b - (n_0 + 1) \cdot a = b - n_0 \cdot a - a = m - a < m$, pois $a > 0$. Assim, $m_1 \in S$ e $m_1 < m$, o que contraria o fato de m ser o menor elemento de S. Portanto a afirmação deve ser verdadeira, ou seja, existe n tal que $n \cdot a \geq b$. $\square$

Observação 2.16. A Propriedade Arquimediana nos diz em termos mais simples que o número a está situado entre dois múltiplos consecutivos do número b, isto é existe um inteiro q tal que $bq < a \leq b(q + 1)$. Daí, $0 < a - bq \leq b$.[1]

Teorema 2.17. *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, \quad \textit{com} \quad 0 \leq r < |b|,$$

onde q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b. Também, denomina-se a por dividendo e b por divisor. Se $r = 0$ diz-se que b é múltiplo de a.

Demonstração. Considere o conjunto:

$$S = \{x = a - bx; x \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Inicialmente, provaremos a existência dos números q e r. Pela Propriedade 2.15, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot (-b) > -a$, logo $a - n \cdot b > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento que chamaremos de r. Suponhamos que $r = a - bq$. Sabemos que $r \geq 0$, resta mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in Z \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Note que $s = r - |b| = a - bq - |b| = a - (q \pm 1)b$, o que é um absurdo. Isso prova que existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $s < r$.

Agora, provaremos a unicidade. Suponha que se pudesse determinar outro par de inteiros, q_1 e r_1, tais que $a = b \cdot q_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o

[1] Para facilitar a notação, na sequência do texto será omitido o sinal de $\cdot$ para indicar a multiplicação entre dois números, isto é o produto $x \cdot y$ será denotado simplesmente por xy.

que implica $|b||q-q'| = |r'-r| < |b|$, o que só é possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$. $\square$

Este teorema permite que o dividendo a seja negativo. Esta é uma das razões pelas quais o Teorema 2.17 contém a afirmação adicional de que o quociente q e o resto r são únicos. As restrições para o resto são importantes para que o problema da divisão tenha uma única solução. No entanto, apenas restringir que o resto seja menor que o divisor b não garante que um quociente ou resto único. Por exemplo, se $a = -15$ e $b = 2$, então existem duas possibilidades para q e r:

(i) $q = -7$ e $r = -1$, pois $-15 = 2 \cdot (-7) + (-1)$, com $-1 < 2$.

(ii) $q = -8$ e $r = 1$, pois $-15 = 2 \cdot (-8) + 1$, com $1 < 2$.

Observação 2.18. A restrição do Teorema 2.17 nos leva a condição primitiva de divisão por números positivos, usada por Euclides em seus Elementos (c. 300 a.C.).

Vejamos agora um problema retirado do trabalho de Oliveira (2012, p.96), que servirá de motivação para o estudo que se segue.

Exemplo 2.19. Um turista brasileiro chega a Cuba e troca parte de seu dinheiro na casa de Câmbio, recebendo 175 notas de 50 pesos e 213 notas de 20 pesos. Ele decide trocar este dinheiro pela maior quantidade possível das famosas moedas de 3 pesos cubanos, por que elas têm gravada a imagem do guerrilheiro Che Guevara. Quanto sobrou do dinheiro depois de fazer a troca pelas moedas?

Solução. Para resolver este problema basta achar o resto que deixa o número $n = 175 \cdot 50 + 213 \cdot 20$ quando é dividido por 3. Entretanto, queremos destacar que não é preciso fazer os produtos e a soma envolvidos no número n. Em lugar de fazer isto substituímos cada número que aparece em n pelo resto que este deixa na divisão por 3, formando assim um novo número n_1, ou seja,

$$n_1 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 2$$

Agora procuramos o reto que n_1 deixa na divisão por 3, que obviamente é 2. Verificando temos que $n = 13010 = 3 \cdot 4336 + 2$ deixa resto 2 na divisão por 3. Logo, sobraram 2 pesos depois de fazer a troca.

A solução deste exemplo é uma aplicação particular do seguinte lema que é de muita utilidade na resolução de problemas.

Lema 2.20 (Lema dos Restos)**.** *A soma e o produto de quaisquer dois números naturais deixa o mesmo resto que a soma e o produto dos seus restos, na divisão por um inteiro positivo a.*

Demonstração. Sejam n_1 n_2 $\in \mathbb{Z}$. Fazendo a divisão com resto de ambos os números por a temos que

$$n_1 = aq_1 + r_1 \text{ e } n_2 = aq_2 + r_2,$$

com $0 \leq r_1, r_2 < a$. Então,

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= (aq_1 + r_1)(aq_2 + r_2) \\ &= a^2 q_1 q_2 + aq_1 r_2 + aq_2 r_1 + r_1 r_2 \\ &= a(aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1) + r_1 r_2 \\ &= aq + r_1 r_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $q = aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1$. Agora dividimos $r_1 r_2$ por a para obtermos

$$r_1 r_2 = ap + r, \ p \in \mathbb{Z}, \ 0 \leq r < a. \tag{2.2}$$

Das igualdades (2.1) e (2.2) segue que

$$n_1 n_2 = aq + ap + r = a(p + q) + r, \ 0 \leq r < a. \tag{2.3}$$

Portanto, de (2.2) e (2.3) concluímos que os restos que deixam $n_1 n_2$ e $r_1 r_2$ na divisão por a são iguais, ficando provado o resultado para o produto. A prova da soma é análoga. □

Observação 2.21. A vantagem do lema é que em certos problemas que envolvem números muitos grandes podemos substituir estes por números muito menores e mais confortáveis para trabalhar.

2.4.2 Divisibilidade

Um caso interessante da divisão ocorre quando o resto é 0, ou seja, quando o divisor é um fator do dividendo. Neste caso podemos estabelecer relação de divisibilidade. No que segue, apresentaremos alguns resultados importantes de divisibilidade.

Proposição 2.22. *Quaisquer que sejam a, b, c e d números inteiros, temos que:*

(a) $a|0, \ 1|a, \ e \ a|a;$
(b) se $a|1$, *então* $a = \pm 1$;
(c) se $a|b$ *e* $b|c$, *então* $a|c$;
(d) se $a|b$ *e* $c|d$ *então* $ac|bd$;
(e) se a *e* b *são positivos e* $a|b$ *então* $0 < a \leq b$;

(f) *se* $a|b$ *e* $b|a$ *então* $a = b$ *ou* $a = -b$*;*

(g) *se* $a|b$ *e* $a|c$*, então* $a|(b \cdot x + c \cdot y)$*, para todo* x *e* y *inteiros;*

(h) *se* $a|(b \pm c)$*, então* $a|b \Leftrightarrow a|c$*;*

(i) *se* $a|b$ *e* $b|a \Rightarrow |a| = |b|$*.*

Demonstração. (a) Por definição, se $a|0$ então existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = a \cdot k_1$. Assim, basta tomar $k_1 = 0$, pois $0 = a \cdot 0$; se $1|a$ então existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 1 \cdot k_2$, assim $k_2 = a$ e $a = 1 \cdot a$; se $a|a$ então existe $k_3 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = a \cdot k_3$, assim $k_3 = 1$ e $a = a \cdot 1$.

(b) Se $a|1$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = a \cdot k$, o que implica que $a = 1$ e $k = 1$ ou $a = -1$ e $q = -1$. Logo, $a = \pm 1$.

(c) Por definição, se $a|b$ e $b|c$, então existem k_1 e k_2 $\in \mathbb{Z}$ tais que $b = k_1 \cdot a$ e $c = k_2 \cdot b$. Substituindo o valor de b na equação $c = k_2 \cdot b$ temos que $c = k_2 \cdot k_1 \cdot a$ o que implica que $a|c$.

(d) De fato, se $a|b$ e $c|d$ valem as igualdades:

$$b = a \cdot k_1, \quad \text{com} \quad k_1 \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

$$d = c \cdot k_2, \quad \text{com} \quad k_2 \in \mathbb{Z} \cdot \tag{2.5}$$

Multiplicando, membro a membro, (2.4) e (2.5) obtém-se:

$$b \cdot d = (a \cdot c)(k_1 \cdot k_2) \Rightarrow a \cdot c | b \cdot d.$$

(e) Se $a|b$ sendo ambos positivos, então $b = a \cdot k$ com k inteiro e $k \geq 1$, o que implica que $a \cdot k \geq a > 0$.

(f) Se $a|b$ e $b|a$ então $|a|$ divide b e b divide $|a|$. Portanto, pelo item (c) segue que $|a| \leq |b|$ e $|b| \leq |a|$. Logo, $|a| = |b|$ e, consequentemente, $a = b$ ou $a = -b$.

(g) Se $a|b$ e $a|c$, então

$$b = a \cdot k_1, \quad \text{com} \quad k_1 \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

$$c = a \cdot k_2, \quad \text{com} \quad k_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por $x \in \mathbb{Z}$ e (2.7) por $y \in \mathbb{Z}$ e somando, membro a membro, as duas equações obtém-se:

$$bx + cy = ak_1x + ak_2y = a(k_1x + k_2y),$$

e, portanto, $a|(bx + cy)$ para quaisquer x e y inteiros.

(h) Se que $a|(b \pm c)$, então

$$b \pm c = a.k_1, \quad \text{com} \quad k_1 \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Agora, se $a|b$, então

$$b = a \cdot k_2, \quad \text{com} \quad k_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.8), temos que:

$$a \cdot k_2 \pm c = a \cdot k_1, \ \Rightarrow \ c = a(k_1 \pm k_2).$$

Logo, $a|c$. A prova da recíproca é análoga.

(i) Se $a|b$ e $b|a$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $b = a \cdot k_1$ e $a = b \cdot k_2$. Visto que $a \neq 0$ segue que $a = a \cdot k_1 \cdot k_2$ se, e somente se $1 = k_1 \cdot k_2$, o que só é possível se $k_1 = k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = -1$. Assim, $b = a \cdot 1$ ou $b = a \cdot (-1)$ e, portanto, $|a| = |b|$.

Isto finaliza a demonstração. □

Observação 2.23. Se b divide a, então $a = b \cdot c$ para algum inteiro c. Portanto, $-a = b \cdot (-c)$, de modo que $b|(-a)$. Do mesmo modo $-a$ é também um divisor de a. Logo, a e $-a$ tem os mesmos divisores.

De fato, suponha que $a \neq 0$ e $b|a$, então $a = b.c$, de modo que $|a| = |b||c|$. Consequentemente, $0 \leq |b| \leq |a|$, o que equivale $-|a| \leq b \leq |a|$. Portanto,

(i) todo divisor inteiro de a diferente de 0 é menor ou igual a $|a|$;

(ii) um inteiro diferente de zero tem apenas um número finito de divisores.

2.5 O Máximo Divisor Comum

Nesta seção abordaremos um conceito fundamental que aparece em vários problemas de divisibilidade, e está relacionado a inteiros positivos que dividem simultaneamente a dois inteiros prefixados e é denominado *máximo divisor comum*. Um problema simples que servirá de motivação para esse estudo está no exemplo abaixo:

Exemplo 2.24. Os dois sétimos anos de uma escola vão participar de uma gincana. Para realizar as tarefas, a comissão organizadora decidiu dividir as duas turmas em equipes, de modo que todas as equipes tenham o mesmo número de alunos e em cada uma delas, os alunos sejam todos da mesma turma. Sabendo que o 7º A tem

40 alunos e 7º B 50, determine o número de alunos que devera ficar em cada equipe, de modo que este número seja o maior possível.

Solução. Vamos denotar por d o número de alunos em cada equipe. Pela natureza do problema, obviamente d é um inteiro positivo. Os 40 alunos da 7º A serão divididos em n equipes com d alunos cada uma, ou seja,

$$40 = dn.$$

Portanto, d é um divisor positivo de 40, logo $d \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Do mesmo modo, os 50 alunos do 7ºB serão divididos em m equipes com d alunos cada uma, ou seja,

$$50 = dm.$$

Como d é também um divisor positivo de 50, então $d \in \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$. Portanto, d é simultaneamente divisor de 40 e 50. Assim,

$$d \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\} \cap \{1, 2, 5, 10, 25, 50\} = \{1, 2, 5, 10\}.$$

Como queremos que o número d seja o maior possível, dentre os divisores comuns, devemos tomar o maior deles, no caso 10.

Concluímos assim que a comissão deverá dividir o 7º A em 4 equipes e o 7º B em 5 equipes, cada uma delas com 10 alunos.

O número $d = 10$, solução do problema anterior, é o maior dentre os divisores comuns dos inteiros 40 e 50, é o que chamados de *máximo divisor comum.*

Exemplo 2.25. O número inteiro 18 possui 12 divisores inteiros, que são:

$$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18.$$

Similarmente, o número inteiro 30 possui 16 divisores, sendo esses

$$-30, -15 - 10, -6, -5, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$$

Os divisores comuns de 18 e 30 são os números que dividem 18 e 30 ao mesmo tempo, ou seja, os números que aparecem em ambas as listas anteriores: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$. O maior desses divisores comuns, é o 6, ele é chamado de *máximo divisor comum* entre 18 e 30.

Estes são exemplos da definição abaixo.

Definição 2.26. *Sejam a e b números inteiros, (a e b diferentes de zero). O máximo divisor comum entre a e b, denotado por* mdc(a, b) *ou, simplesmente,* (a, b)*, é o maior* *inteiro d que divide a e b, ou seja, $d \in \mathbb{Z}$ se diz máximo divisor comum entre a e b se cumpre as seguintes condições:*

(i) $d \geq 0$;

(ii) $d|a$ e $d|b$;

(iii) Se d' é um inteiro tal que $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$ (ou seja, todo divisor comum de a e b também é divisor de d).

Exemplo 2.27. $(4, 6) = 2$, pois 2 é o único inteiro que satisfaz todas as condições listadas acima. É fácil ver que divisores comuns de 4 e 6, isto é $\pm 1, \pm 2$ todos são divisores de 2, conforme a condição (iii).

Seguem algumas propriedades imediatas do conceito de máximo divisor comum.

Proposição 2.28. *Sejam a e b dois inteiros. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) Se d e d' são máximos divisores comuns de a e b, então $d = d'$, ou seja, o mdc é único;

(b) Qualquer que seja $a \neq 0$, $|a|$ é o máximo divisor comum entre a e 0;

(c) Se d é o máximo divisor comum entre a e b, então d também é máximo divisor comum de $-a$ e b, a e $-b$ e $-a$ e $-b$;

(d) Se a é múltiplo de b, então $(a, b) = b$.

Demonstração. (a) De fato, devido a definição, $d|d'$ e $d'|d$. Como se tratam de números positivos, isso só é possível se $d = d'$. Logo, não é possível que um par de números inteiros tenha mais de um máximo divisor comum.

(b) Sabemos que $|a|$ é positivo, $|a|$ divide 0, porque todo número é divisor de 0 e, $|a|$ divide a. Se c divide $|a|$ e $c|0$, então $c|a$, pois $a = |a|(\pm 1)$. Portanto, qualquer que seja $a \neq 0$, $|a|$ é o máximo divisor comum entre a e 0.

(c) Isso decorre de que todo divisor de x é divisor de $-x$ e vice-versa.

(d) Por definição temos que todo divisor comum dos números a e b é um divisor de b. Sabendo que a é múltiplo de b, então todo divisor de b é também divisor de a, ou seja, um divisor comum dos números a e b. Portanto, o conjunto dos divisores comuns dos números a e b é igual ao conjunto dos divisores de b. Como o maior divisor de b é ele mesmo, resulta que $(a, b) = b$.

Isto finaliza a demonstração. □

É fácil ver que, a definição de máximo divisor comum entre dois números inteiros não garante por si só sua existência. Precisamos demonstrar sua existência, o que será justificado pela prova do teorema a seguir que garante a possibilidade de exprimir de maneira aritmética o *mdc* entre a e b como uma combinação linear envolvendo esses elementos.

Teorema 2.29. *Seja d o máximo divisor comum entre a e b, então existem inteiros n e m tais que $d = na + mb$.*

Demonstração. Seja $B = \{na + mb \text{ com } m, n \in \mathbb{Z}\}$. Este conjunto contém, claramente, números inteiros negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher n_0 e m_0 tais que $c = n_0a + m_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B, e provaremos que $c|a$ e $c|b$. Como as demonstrações são similares, mostraremos apenas que $c|a$. A prova é por contradição. Suponha que $c \nmid a$. Neste caso, pelo Teorema 2.17, existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$. Portanto, $r = a - qc = a - q(n_0a + m_0b) = (1 - qn_0)a - qm_0b$. Isso mostra que $r \in B$, pois $(1 - qn_0)$ e $(-qm_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B. Logo, $c|a$ e, de forma análoga, se prova $c|b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1d$ e $b = k_2d$ e, portanto, $c = n_0 + m_0b = n_0k_1d + m_0k_2d = d(n_0k_1 + m_0k_2)$ o que implica $d|c$. Do item (i) da Proposição 2.22, temos que $d \leq c$ (ambos são positivos) e como $d < c$ não é possível, uma vez que d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = c = n_0a + m_0b$. □

Observação 2.30. Na demostração deste teorema mostramos, não apenas que o máximo divisor comum entre a e b pode ser expresso como uma combinação linear comum destes números, mas que este número é o menor valor positivo dentre todas as combinações lineares.

O Teorema 2.29 é uma das ferramentas básicas na resolução de problemas que envolvem o *mdc* entre dois números. Este resultado foi provado pela primeira Vez por Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638), hoje conhecido como *Teorema (ou Identidade) de Bézout.* A proposição a seguir resume algumas consequências importantes da demostração dada ao Teorema de Bézout.

Proposição 2.31. *Sejam $d, \lambda \in \mathbb{N}$ e $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) Se $d|a$ e $d|b$, então $d|(a, b)$;

(b) $(\lambda a, \lambda b) = \lambda(a, b)$;

(c) Se $d|a$ e $d|b$, então $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$; Consequentemente,

$$\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1.$$

(d) $(a, b) = 1$ se, e somente se, então existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$;

(e) (Lema de Gauss) Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração. (a) A prova é consequência imediata da igualdade de $(a,b) = ax_0 + by_0$ anunciada pelo Teorema 2.29.

(b) Primeiro observamos que

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y = \lambda(ax+by), \text{ onde } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Usando o item (a) e o fato de λ ser positivo, da igualdade acima segue que

$$\begin{aligned}(\lambda a, \lambda b) &= \min\{(\lambda a)x + (\lambda b)y \ > 0;\ x, y\ in\mathbb{Z} \\ &= \lambda \min ax + by;\ x, y \in \mathbb{Z} \\ &= \lambda(a,b). \end{aligned} \tag{2.10}$$

(c) Esta afirmação segue diretamente de (b), observando que

$$(a,b) = \left(d\frac{a}{d}, d\frac{b}{d}\right) = d\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

(d) Suponha $(a,b) = 1$, segue pelo Teorema 2.29, que existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = (a,b) = 1$, o que prova a primeira parte da proposição. Reciprocamente, suponha que existam números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$. Se $d = (a,b)$, temos que $d|(ma+nb)$, o que mostra que $d|1$, e, portanto, $d = 1$.

(e) Se $a|bc$, então existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ax$. Se $(a,b) = 1$, então, pela Proposição **??**, temos que existem $m, n \ \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + mb = 1.$$

Multiplicando por c ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$c = mac + nbc.$$

Substituindo bc por ax nesta última igualdade, temos que

$$c = mac + nax = a(mc + nx)$$

e, portanto, $a|c$.

Isto finaliza a prova. □

Observação 2.32. Dois inteiros a e b são chamados de *primos entre si* se $mdc(a,b) = 1$.

Listar todos os divisores entre dois números inteiros grandes para encontrar o máximo divisor comum pode ser bem trabalhoso. Vejamos mais um teorema que ajuda a encontrá-lo de maneira relativamente mais simples como veremos em alguns exemplos.

Teorema 2.33. *Sejam a e b inteiros com $b \neq 0$, q e r, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b, isto é,*

$$a = bq + r, \ \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Então,

$$(a, b) = (b, r).$$

Demonstração. Suponha $d = (a, b)$. Vamos mostrar $d = (b, r)$. De fato, como $d = (a, b) \Rightarrow d|a$ e $d|b$. Pelo item (g) da Proposição 2.22, $d\underbrace{(a - br)}_{=r} \Rightarrow d|r$.

Assim, d é um divisor comum de b e r. Seja d' um inteiro, tal que $d'|b$ e $d'|r$ então $d'|\underbrace{(bq + r)}_{=a}$ logo, $d'|a$. Como $d = (a, b)$ e d' é divisor comum de a e b, segue da Definição 2.26, que $d'|d$. $\square$

O Teorema 2.17 afirma que se,

$$\underbrace{a}_{\text{dividendo}} = \underbrace{b}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{q}_{\text{quociente}} + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

então,

$$(a, b) = (b, r),$$

ou seja, na divisão euclidiana

mdc(dividendo, divisor) = mdc(divisor, resto).

Exemplo 2.34. Usando o Teorema 2.33, vamos calcular o $(138, 24)$.
Solução. Dividindo o número maior pelo menor obtemos:

$$138 = 24.5 + 18.$$

Então,

$$(138, 24) = (24, 18.)$$

Por sua vez,

$$24 = 18 \cdot 1 + 6 \ \Rightarrow (24, 18) = (18, 6).$$

E, como $18 = 6.3 + 0$, então

$$(138, 24) = (24, 18) = (18, 6) = (6, 0) = 6.$$

A última identidade segue do item (c) da Proposição 2.28.

Este exemplo ilustra um resultado muito importante de Euclides, que descreveremos a seguir.

Lema 2.35. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então, (a,b) existe e*

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Demonstração. Seja $d = (a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|(b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e portanto, $c|d$. Isso prova que $d = (a, b)$. □

O método de efetuar divisões sucessivas com o objetivo de encontrar o máximo divisor comum entre dois inteiros, foi demonstrado por Euclides *Os Elementos, livro VII* e ficou conhecido por *Algoritmo de Euclides.*

2.5.1 O Algoritmo de Euclides

Teorema 2.36 (Algoritmo de Euclides)**.** *Dados dois inteiros positivos, a e b, aplicamos sucessivamente a divisão euclidiana para obter a seguinte sequência de igualdades*

$$\begin{aligned}
b &= aq_1 + r_1, && 0 \leq r_1 < a,\\
a &= r_1q_2 + r_2, && 0 \leq r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, && 0 \leq r_3 < r_2,\\
\vdots \quad & \quad \vdots && \quad \vdots\\
r_{n-2} &= r_{n_1}q_n + r_n, && 0 \leq r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

até algum r_n dividir r_{n-1}. Assim, o $(a, b) = r_n$, ou seja, é o último resto não-nulo no processo de divisão anterior.

Demonstração. Primeiramente, observe que o processo de divisão (2.11) é finito. Com efeito, a sequência de números inteiros r_k é estritamente decrescente e está contida no conjunto $\{r \in \mathbb{Z};\ 0 \leq r < a\}$, portanto não pode conter mais do que a inteiros positivos. Examinando as igualdades (2.11) de cima para baixo e pelo item

(e) da Proposição 2.28 temos que

$$(a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n).$$

Isto prova o que queremos. $\square$

Podemos resumir o Algoritmo de Euclides para cálculo de *mdc* da seguinte forma:

Se a e b são inteiros não nulos, para calcular mdc(a, b), começamos dividindo o maior pelo menor dentre os inteiros $|a|$ e $|b|$ e, segue-se efetuando divisões sucessivas até obter um resto nulo, onde a divisão seguinte e sempre feita dividindo o divisor pelo resto da divisão anterior. Logo, (a, b) é igual ***ao último resto não nulo obtido nas sucessivas divisões.***

Este algoritmo pode ser sintetizado e realizado na prática como mostraremos a seguir:

Inicialmente, efetuamos a divisão $a = bq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos na seguinte tabela:

	q_1
a	b
r_1	

A seguir, continuamos efetuando a divisão $b = r_1q_2 + r_2$ e acrescentamos na tabela

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Exemplo 2.37. Precisamos remeter duas encomendas de sabonetes idênticos para dois compradores diferentes. Um pediu 372 sabonetes e o outro pediu 162 sabonetes. Queremos acondicionar os sabonetes em embalagens idênticas que sirvam para atender aos dois pedidos. Quantos sabonetes devem caber em cada uma das embalagens para que possamos atender as duas demandas utilizando a menor quantidade possível de embalagens?

Solução: Seja n a quantidade de sabonetes que cabem na embalagem e sejam x e y as quantidades de embalagens a serem enviadas para o primeiro comprador e para o segundo comprador, respectivamente. Então, $n \cdot x = 372$ e $n \cdot y = 162$. Assim, n é um divisor comum entre 372 e 162. Para que x e y tenham menor valor possível, deve-se tomar $(372, 162)$. Usando o Algoritmo de Euclides pelo método prático temos:

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6
48	18	12	6		

Visto que 6 é o último resto não nulo das divisões sucessivas, temos que $(372, 162) = 6$.

Observação 2.38. O processo de divisões sucessivas também serve para determinar os inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = d$, em que $d = (a, b)$.

Vamos ilustrar o procedimento para $a = 41$ e $b = 12$. Fazendo as divisões sucessivas temos:

$$\begin{aligned} 41 &= 12 \cdot 3 + 5 \\ 12 &= 5 \cdot 2 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como 1 é o último resto das divisões sucessivas temos que $(41, 12) = 1$. Note que se substituirmos de baixo para cima as igualdades (2.12), temos que

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5 + 12 \cdot (-2) \\ &= (41 - 12 \cdot 3) \cdot 5 + 12 \cdot (-2) \\ &= 41 \cdot 5 + 12 \cdot (-17). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Conseguimos escrever o $(41, 12) = 1$ na forma $1 = 41 \cdot 5 + 12 \cdot (-17)$.

Quando utilizamos o Algoritmo de Euclides para expressar (a, b) na forma $ma + nb$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, referimos a ele como *Algoritmo de Euclides Estendido*.

2.6 Mínimo Múltiplo Comum

Nesta seção abordamos mais um conceito muito importante que está relacionado com os inteiros positivos que são simultaneamente múltiplos de dois inteiros prefixados e é denominado *mínimo múltiplo comum*. Como motivação vamos retomar o exemplo mencionado no início da seção anterior.

Exemplo 2.39. Na gincana escolar, citada em 2.24, a turma que obtiver o maior número de pontos na realização das tarefas a será a vencedora e levará o prêmio, o qual consiste em N livros. A quantidade N de livros foi estabelecida de modo que possa ser igualmente dividida entre todos os alunos da turma vencedora, qualquer que seja ela. Determine o valor de N, sabendo que ele é o menor inteiro possível com essa propriedade.

Solução. Como N pode ser dividido de forma exata entre os alunos de quaisquer das turmas, então

$$40|N \text{ e } 50|N,$$

isto é, N é um **múltiplo positivo comum** entre ambos os inteiros. Assim, $N \in \{40, 80, 120, 160, 200, \cdots\} \cap \{50, 100, 150, 200, 250, \cdots\}$. Se N é o menor possível, então $N = 200$.

O inteiro $N = 200$ é o menor dentre os múltiplos positivos comuns entre os inteiros 40 e 50, logo ele é chamado de *mínimo múltiplo comum* entre esses inteiros, conforme definido a seguir.

Definição 2.40 (Mínimo Múltiplo Comum)**.** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O mínimo múltiplo comum entre a e b é o inteiro positivo m que satisfaz as seguintes condições:*

(a) m é múltiplo comum entre a e b, isto é, $a|m$ e $b|m$;

(b) m é o menor inteiro positivo com a propriedade (a).

Em qualquer caso, os números ab e 0 são sempre múltiplos comuns entre a e b. Então sempre existirá um mínimo múltiplo comum entre dois números inteiros a e b e é denotado por $mmc(a, b)$ ou por $[a, b]$.

É fácil ver que

$$[-a, b] = [a, -b] = [-a, -b] = [a, b].$$

Assim, para efeito do cálculo do *mmc* entre dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

É também fácil verificar que $[a, b] = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, se $[a, b] = 0$, então 0 divide ab, que é múltiplo de a e de b, logo $ab = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $b = 0$. Reciprocamente, se $a = 0$ ou $b = 0$, então 0 é o único múltiplo comum entre a e b, logo $[a, b] = 0$.

2.6.1 Relação entre o Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum

A próxima proposição estabelece uma relação entre o *mdc* e *mmc* entre dois inteiros não nulos, fornecendo assim, um algoritmo para o cálculo do *mmc*.

Proposição 2.41. *Sejam a e b inteiros não nulos, então*

$$(a, b) \cdot [a, b] = |ab|.$$

Demonstração. Seja $d = (a, b)$. Vamos mostrar que o inteiro $m = \frac{|ab|}{d}$ é o mínimo múltiplo comum entre a e b, isto é, $m = [a, b]$. De fato, temos que:

(i) $a|m$ e $b|m$. Observe que sendo $d = (a, b)$, então $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são números inteiros e como

$$m = |a|\frac{|b|}{d} = |b|\frac{|a|}{d} \;\Rightarrow\; a|m \text{ e } b|m.$$

(ii) m é menor dentre os múltiplos positivos comuns entre a e b. Seja $m' \in \mathbb{Z}$ tal que $a|m'$ e $b|m'$. Então existem inteiros k_1 e k_2, tais que:

$$m' = ak_1 = bk_1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{d}k_1 = \frac{b}{d}k_2 \;\Rightarrow\; \frac{b}{d}|\left(\frac{a}{d}k_1\right).$$

Como $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, segue da Proposição (e) que $\frac{b}{d}|k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{b}{d} \cdot k,$ *com* $k \in \mathbb{Z}$.

Como queríamos demostrar. □

Exemplo 2.42. Vamos calcular o $[24, 14]$.
Solução: Sabido que o $(24, 14) = 2$, então pela Proposição 2.41 temos:

$$[24, 14] = \frac{|24 \cdot 14|}{(24, 14)} = \frac{336}{2} = 168.$$

2.7 Números Primos

Esta seção trata de um dos conceitos mais importantes de toda a Matemática, os *números primos*. Esses números desempenham um papel fundamental na resolução de muitos problemas, que embora sejam simples de enunciar, desafiou e motivou por várias gerações, matemáticos brilhantes, como Fermat, Euler e Gauss. Apresentamos nessa seção apenas algumas propriedades básicas dos números primos, e alguns resultados interessantes que decorreram deles.

Definição 2.43. *Um número inteiro p diz-se primo se ele tem exatamente dois divisores positivos distintos,* 1 *e* $|p|$.

Denotamos por $D_+(a)$ o conjunto dos divisores positivos de um número inteiro a, então $p \in \mathbb{Z}$ é dito *primo* se $D_+(p) = \{1, |p|\}$, caso contrário, é dito *composto*.

Se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que

$$n = n_1 n_2, \quad \text{com } 1 < n_2 < n.$$

Observação 2.44. De modo geral o número 1 não é considerado nem primo nem composto.

Da definição de números primos decorrem as propriedades das a seguir:

Proposição 2.45. *Dados dois números primos p e q e números inteiros quaisquer a e b tem-se*

(i) Se $p|q$, então $p = q$;
(ii) Se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$;
(iii) Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração. (i) De fato, como $p|q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se qeu $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

(ii) De fato, se $(p, a) = d$, temos que $d|p$ e $d|a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente, $d = 1$.

(iii) Por hipótese temos que $p|ab$, então se $p|b$, a demonstração está encerrada. Se $p \nmid b$, pelo item (ii) temos que $mdc(p, b) = 1$ e pela Proposição (e), $p|a$.

Isso conclui a prova. □

O último item da proposição acima é um resultado muito importante de Euclides descrito em *Os Elementos*, Livro VII. Esta propriedade dos números primos os caracteriza totalmente. Assim, podemos estendê-la para um número $n \geq 2$.

Corolário 2.46. *Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e p números inteiros, com $n \geq 2$. Se p é um número primo e $p|(a_1 a_2 ... a_n)$, então $p|a_k$, para algum $1 \leq k \leq n$.*

Demonstração. Demostraremos por indução em n. Seja $P(n)$ a proposição enunciada pelo Corolário acima. Observe que para $n = 2$, temos, pelo item (iii) da Proposição 2.45, que $p|a_1 a_2$. Agora, suponha que $P(n)$ seja verdadeira para $n = k,\ k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$p|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \ \Rightarrow\ p|a_i,\ 1 \leq i \leq k.$$

Devemos mostrar que

$$p|a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \ \Rightarrow\ p|a_i,\ 1 \leq i \leq k+1.$$

Observe que

$$p|a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \;\Rightarrow\; p|m \cdot a_{k+1}, \quad \text{onde} \quad m = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k.$$

Novamente, pelo item (iii) da Proposição 2.45, temos que

$$p|m \cdot a_{k+1} \;\Rightarrow\; p|m \quad \text{ou} \quad p|a_{k+1},$$

o que nos dois casos segue o resultado. □

2.7.1 Teorema Fundamental da Aritmética

Teorema 2.47. *Todo inteiro $n > 1$ pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos, ou seja*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}, \tag{2.14}$$

onde $m \geq 1$ é um número natural, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ e p_i é primo para todo $1 \leq i \leq m$.

Demonstração. Para demonstrar a possibilidade de decomposição, usaremos a segunda forma do Princípio de Indução. Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demostrar. Suponhamos, então que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem número primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$ tais que $n_1 = p_1 \ldots p_r$ e $n_2 = q_1 \ldots q_s$. Portanto, $n = p_1 \ldots p_r q_1 \ldots q_s$.

Vamos agora, provar que essa decomposição é única. Suponha que tenhamos $n = p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_s$, onde os p_i e os q_j são números primos. Como, pelo Corolário 2.46, p_1 divide $q_1 q_2 \cdots q_r$ e ele divide pelo menos um de seus fatores q_j. Sendo apenas 1 e q_1 os divisores de q_1 e sendo $p_1 \neq 1$, então $p_1 = q_1$. Cancelando p_1 com q_1 na igualdade inicial, obtemos $p_2 p_3 \ldots p_s = q_2 q_3 \ldots q_r$. Repetindo essa argumentação o quanto for necessário, chegaremos à unicidade conforme o enunciado.

Como $p_2 \ldots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que as duas fatorações são idênticas, isto é, $r = s$, a menos da ordem, e os p_i e q_j são iguais aos pares. Portanto,

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s.$$

Visto que os primos na sequência $p_1 p_2 \ldots p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Portanto, todo inteiro $n > 1$, pode ser decomposto de forma única como um produto de fatores primos. $\square$

Através da decomposição de um número em fatores primos, podemos obter uma fórmula para o número de divisores de $a > 1$. De fato, um número positivo b é divisor de a se, e somente se,

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

em que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \cdots, m$. Como para cada expoente na decomposição de b existem $\alpha_i + 1$ possibilidades a fim de que b divida a, então o número de divisores positivos de a é:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1).$$

Teorema 2.48. *A sequência dos números primos é infinita.*

Demonstração. Suponhamos que a sequência dos primos $p_1, p_2, \dots, p_r$ seja finita. Considere o número natural $K = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. É claro que K não divisível por nenhum dos p_i. No entanto, pelo Teorema 2.47, K possui um fator primo p que, portanto, deve ser um dos $p_1, p_2, \dots, p_n$ e, consequentemente, divide o produto $p_1 p_2 p_n$. Mas isso implica que p divide 1, o que é um absurdo. Portanto, a sequência dos números primos não pode ser finita. $\square$

Euclides provou o teorema acima em seu livro XV dos *Elementos*. Agora que sabemos que existem infinitos números primos, resta-nos saber como obter uma lista contendo os números primos até uma certa ordem.

Um dos métodos mais antigos para elaborar uma sequência de números primos deve-se ao matemático grego Eratóstenes (aproximadamente 230 a.C.). O método, chamado de *Crivo de Eratóostenes*, permite determinar todos os números primos até a ordem que se desejar, mas não é muito eficiente para ordens muito elevadas.

Como exemplo, vamos elaborar uma tabela com todos os números primos inferiores a 100. O método de Eratóstenes consiste no seguinte

- Primeiramente escreve-se todos os números de 2 a 100 em uma tabela.
- Riscar todos os múltiplos de 2 maiores que 2, já que nenhum deles é primo.
- Riscar todos os múltiplos de 3 maiores que 3, pois esses também não são primos.
- Riscar todos os múltiplos de 5 maiores que 5, pois não são primos.
- Riscar todos os múltiplos de 7 maiores que 7, pois não são primos.

Devemos seguir esse procedimento até chegar no 100? O Teorema a seguir nos ajuda a determinar até quando devemos seguir esse procedimento.

Teorema 2.49. *Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a $\sqrt{n}$.*

Demonstração. Sendo n composto então $n = n_1 n_2$ onde $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$. Sem perda de generalidade vamos supor $n_1 \leq n_2$. Logo n_1 tem que ser menor ou igual que $\sqrt{n}$ pois, caso contrário, teríamos $n = n_1 n_2 \;\; > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$ o que é absurdo. Logo, pelo Teorema 2.47, n_1 possui algum fator primo p, este deve ser menor ou igual que $\sqrt{n}$. Como p, sendo um fator primo de n_1 é também um fator de n a demonstração está completa. □

Este resultado tem uma importante aplicação prática. Ele nos diz que para testarmos se um número é primo, é suficiente testarmos divisibilidade apenas pelos primos $\leq \sqrt{n}$.

Então, no exemplo, basta prosseguir com o procedimento até ao número primo p tal que $p \leq \sqrt{100}$, que no caso é o 10.

Assim, todos os múltiplos de $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 \quad < \quad \sqrt{100}$ são riscados. Então, os números primos inferiores ou iguais a 100 são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89$ e 97.

2.8 Congruência

Nessa seção discorremos sobre o conceito de congruência bem como algumas propriedades e resultados a partir delas, que podem ser compartilhados com os alunos do Ensino Fundamental, mesmo este conteúdo não fazendo parte do currículo nacional de ensino da matemática para Educação Básica.

Para dar a ideia da noção de congruência, iniciaremos, assim como nas sessões anteriores com um problema, talvez ingênuo, mas ilustrativo.

Exemplo 2.50. Se hoje é sexta-feira, que dia da semana será daqui a 1520 dias?
Solução. Para organizar o raciocínio, indiquemos por 0 o dia de hoje (sexta-feira), por 1 o dia de amanhã (sábado), e assim por diante. A partir dessa escolha, pode-se construir a seguinte tabela como na Figura 2.1 :

Agora, basta saber em que coluna da tabela se encontra o número 1520. Para isso basta observar que dois números da sequência $0, 1, 2, 3, \cdots$, estão na mesma coluna se, e somente se, sua diferença é divisível por 7. Suponhamos que o número 1520 se encontre na coluna encabeçada pelo número a, $\;0 \leq a \leq 6$. Então,

$$1520 - a = 7q$$

Figura 2.1: *Tabela dos dias da semana*

Sexta	*Sábado*	*Domingo*	*Segunda*	*Terça*	*Quarta*	*Quinta*
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
...	...	...	...	...	...	...

Fonte: Autoria própria

para algum inteiro positivo q. Daí:

$$1520 = 7q + a, \ \ (0 \leq a \leq 6).$$

Pelo unicidade do resto da divisão Euclidiana demonstrada no Teorema 2.17, segue dessa igualdade que a é o resto da divisão de 1520 por 7. Efetuando a divisão temos que $a = 1$. Visto que o resto é 1, o número 1520 estará na segunda coluna. Logo, daqui a 1520 dias será um sábado.

Definição 2.51. *Seja m um número natural. Diremos que inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se*

$$a \equiv b \mod m.$$

Por exemplo $21 \equiv 13 \bmod 2$, já que os restos das divisões de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.

Mas para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os restos, basta aplicar o seguinte resultado.

Proposição 2.52. *Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m|b - a$.*

Demonstração. Sejam $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$ e $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m|b - a$, já que $|r - r'| < m$. □

Quando a afirmação $a \equiv b \bmod m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes (ou são incongruentes) módulo m e escreveremos $a \not\equiv b \bmod m$.

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b \mod 1$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Isso torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Sendo assim, consideraremos sempre $m > 1$.

Vejamos agora algumas propriedades decorrentes da definição de congruência modular.

Proposição 2.53. *Sejam $m \in \mathbb{N}$. Para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que*

(i) ***Reflexividade****: $a \equiv a \mod m$;*
(ii) ***Simetria****: se $a \equiv b \mod m$, então $b \equiv a \mod m$;*
(iii) ***Transitividade****: se $a \equiv b$ mod m e $b \equiv c \mod m$, então $a \equiv c \mod m$.*

Demonstração. (i) De fato, $a - a = o$ é divisível por m.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$, então $m|b - a$, ou seja $b - a = mq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Daí $a - b = m(-q)$, e portanto $m|a - b$. De onde $b \equiv a \mod m$.

(iii) Por hipótese, $m|b - a$ e $m|c - b$. Logo $m|[(b - a) + (c - b)]$, ou seja, $m|c - a$. Daí, pelo item anterior, $m|a - c$ e, portanto, $a \equiv c \mod m$.

Isto prova o resultado. □

Esta proposição nos diz que a relação de congruência, definida no conjunto dos números inteiros, é uma relação de equivalência, pois acabamos de provar que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Já vimos que na divisão euclidiana por um inteiro $m > 1$, os possíveis restos pertencem ao conjunto: $R : \{0, 1, 2, \cdots, m - 1\}$.

Vejamos algumas propriedades relevantes, referentes a congruência, que podemos tirar sobre o conjunto R.

Proposição 2.54. *Se $a \equiv b$ mod m e $0 \leq b < m$, então b é o resto da divisão euclidiana de a por m. Do mesmo modo, se r é o resto da divisão de a por m, então $a \equiv r$ mod m.*

Demonstração. De fato, por hipótese, $a - b = mq$ para algum inteiro q. Daí $a = mq + b$ $(0 \leq b < m)$. A conclusão decorre da unicidade do quociente e do resto do algoritmo euclidiano. A demostração recíproca é imediata. □

Portanto, para achar o resto da divisão de um número a por m, basta achar o número natural r dentre os números pertencentes ao conjunto $R : \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ que seja congruente módulo m.

Definição 2.55. *Se a e b são dois números inteiros com $a \equiv b \mod m$, dizemos que b é um resíduo de a módulo m.*

O que torna útil e poderosa a noção de congruência é o fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e multiplicação no conjunto dos inteiros, conforme vemos na proposição a seguir.

Proposição 2.56. *Sejam* $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$.

(i) *Se* $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $a + c \equiv b + d \mod m$;
(ii) *Se* $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $a - c \equiv b - d \mod m$;
(iii) *Se* $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $ac \equiv bd \mod m$;
(iv) $a + c \equiv b + c \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod m$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$. Logo, temos $m|b-a$ e $m|d-c$, ou seja existem inteiros k e k_1 tais que $b - a = km$ e $d - c = k_1 m$.

(i) Basta observar que $m|(b-a)+(d-c)$ e, portanto, $m|(b+d)-(a+c)$, o que prova essa parte do resultado.
(ii) Subtraindo membro a membro $b - a = km$ e $d - c = k_1 m$ obtemos $(b-a)-(d-c) = (b-d)-(a-c) = (k-k_1)m$ o que implica $a - c \equiv b - d \mod m$.
(iii) Basta notar que $bd - ac = d(b-a) + a(d-c)$ e concluir que $m|bd - ac$.
(iv) Se $a \equiv b \mod m$, segue-se do item (i) que $a+c \equiv b+c \mod m$, pois $c \equiv c \mod m$. Reciprocamente, se $a+c \equiv b+c \mod m$, então $m|b+c-(a+c)$, o que implica que $m|b-a$ e, consequentemente, $a \equiv b \mod m$.

Provando o resultado. □

O último item da proposição acima nos diz que, para as congruências, vale o cancelamento com relação à adição. Entretanto, não vale, em geral, o cancelamento para a multiplicação, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.57. Como $6 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 24$ e $8|24$, temos que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \mod 8$, e, no entanto $9 \not\equiv 5 \mod 8$.

Um resultado relacionado com o cancelamento multiplicativo está descrito na proposição a seguir.

Proposição 2.58. *Sejam* $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Temos que*

$$ac \equiv bc \ mod\ m \Leftrightarrow a \equiv b \ mod\ \frac{m}{(c, m)}.$$

Demonstração. Como pelo item c da Proposição 2.31 $\frac{m}{(c,m)}$ e $\frac{c}{(c,m)}$ são primos entre si, temos que

$$ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow m|(b-a)c \Leftrightarrow \frac{m}{(c,m)}|(b-a)\frac{c}{(c,m)} \Leftrightarrow \frac{m}{(c,m)}|b-a \Leftrightarrow a \equiv b \mod \frac{m}{(c,m)},$$

provando o desejado. □

Corolário 2.59. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $(c, m) = 1$. Temos que*

$$ac \equiv bc \ mod\ m \text{ se, e somente se } a \equiv b \mod m.$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades adicionais das congruências relacionadas com a multiplicação que são bastante úteis na resolução de problemas.

Proposição 2.60. *Sejam $a, b, k, m, n, m_1, \ldots m_r$ inteiros maiores do que 1. Temos que:*

(i) *Se* $a \equiv b \mod m$, *então* $a^k \equiv b^k \mod m$;
(ii) *Se* $a \equiv b \mod m$ *e* $n|m$, *então* $a \equiv b \mod n$;
(iii) $a \equiv b \mod m_i$, $\forall\ i = 1, \cdots, r \Leftrightarrow a \equiv b$ *mod* $[m_1, \cdots, m_r]$;
(iv) *Se* $a \equiv b \mod m$, *então* $(a, m) = (b, m)$.

Demonstração. (i) Faremos a demonstração por indução em n.

Para $n = 2$, considerando o fato que $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, e que por hipótese $m|(a-b)$. Temos então que $m|(a-b)(a+b)$ se, e somente se, $m|a^2 - b^2$, logo $a^2 \equiv b^2 \mod m$.

Suponhamos agora que $a^k \equiv b^k \mod m$ para algum $k > 1$. Como por hipótese $a \equiv b \mod m$ e, por hipótese de indução $a^k \equiv b^k \mod m$, segue que pela item (iii) da Proposição 2.56 que $a^k \cdot a \equiv b^k \cdot b \mod m$ se, e somente se $a^{k+1} \cdot a \equiv b^{k+1} \cdot b \mod m$.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$, então $m|b - a$. Como $n|m$, segue-se que $n|b - a$. Logo $a \equiv b \mod n$.

(iii) Se $a \equiv b \mod m_i$, $i = 1, \cdots, r$, então $m_i|b - a$, para todo i. Sendo $b - a$ um múltiplo de cada m_i, segue-se que $[m_1, \cdots, m_r]|b - a$, o que prova que $a \equiv b \mod [m_1, \cdots, m_r]$. A recíproca decorre do item (i).

(iv) Se $a \equiv b \mod m$, então $m|b - a$ e, portanto, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo Lema 2.35, temos que $(a, m) = (a + tm, m) = (b, m)$.

Isto conclui a prova. □

Entre outras coisas, pode-se usar a congruência modular para estabelecer critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade são regras que nos permitem verificar se um número inteiro é divisor de um outro número inteiro, baseando-se em propriedades da sua representação decimal.

Um número inteiro $N = n_r n_{r-1} n_{r-2} \cdots n_2 n_1 n_0$ pode ser escrito na base decimal como: $N = n_r \cdot 10^r + n_{r-1} \cdot 10^{r-1} + n_{r-2} \cdot 10^{r-2} + \cdots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10^1 + n_0 \cdot 10^0$, em que os números $n_i \in \{0, \ldots, 9\}$ são chamados de dígitos de N.

Esse resultado é em decorrência do algoritmo de Euclides. De fato, aplicando esse algoritmo para o número N como dividendo e 10 como divisor, obtemos:

$$N = 10 \cdot 9 + r, \text{ em que } 0 \leq r \leq 9. \tag{2.15}$$

Se $0 \leq q \leq$, não a nada a demonstrar, pois a igualdade

$$N = r + q \cdot 10$$

está de acordo com a descrição de N, uma vez que $0 \leq q,\ r \leq 9$. Se $q > 9$, aplica-se novamente o algoritmo, agora com q como dividendo e 10 como divisor:

$$q = 10 \cdot q_1 + r_1, \text{ em que } 0 \leq r_1 \leq 9. \tag{2.16}$$

Substituindo (2.16) em (2.15), segue que

$$N = 10(10q_1 + r_1) + r = r + r_1 \cdot 10 + q_1 \cdot 10^2.$$

Se $0 \leq q_1 \leq 9$, a demonstração está concluída, pois $0 \leq r,\ q_1 \leq 9$. Prosseguindo nesse raciocínio, chegamos a uma expressão do tipo da qual foi dada por N.

Assim, o fato de N poder ser expresso, por uma expressão polinomial

$$N = n_r \cdot 10^r + n_{r-1} \cdot 10^{r-1} + n_{r-2} \cdot 10^{r-2} + \cdots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10^1 + n_0 \cdot 10^0,$$

permite que se represente esse número pela sequência $n_r n_{r-1} n_{r-2} \cdots n_2 n_1 n_0$, naturalmente subentendida a base dez. Por exemplo, o número $N = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9$ (nove unidades, três centenas e cinco unidades de milhar) é representado por 5309, onde o 0 indica ausência de dezenas.

Agora, utilizando congruência, demonstramos os critérios de divisibilidade pelos números de 2 a 11. Os critérios e as demostrações apresentadas aqui são fácies de serem apresentadas aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Ficando como sugestão ao professor que deseja demostrar tais critérios aos alunos, que normalmente são apresentados apenas como regrinhas a serem decoradas.

Para facilitar a notação, nas demonstrações, vamos denotar um número inteiro N, no sistema de numeração decimal, por $N = (n_r n_{r-1} \cdots n_0)_{10}$,

2.8.1 Divisibilidade por 2

Proposição 2.61. *Um número inteiro N é divisível por* 2 *se, e somente se, n termina em* $0, 2, 4, 6, 8$.

Demonstração. Como $10 \equiv 0 \mod 2$, segue-se da Proposição 2.56 item (iii) e da Proposição 2.60 item (i) que $10^i \cdot n_i \equiv 0 \mod 2$, para algum $i \geq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} N &= (n_r n_{r-1} \cdots n_0)_{10} \\ &= 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0 \\ &= 10 \cdot (10^{r-1} \cdot n_{r-1} + 10^{r-2} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^0 \cdot n_1) + n_0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

temos que: $N \equiv 0 \mod 2$ se, e somente se, n_0 é divisível por 2. Ou seja, se n_0 é par. □

2.8.2 Divisibilidade por 3

Proposição 2.62. *Um número inteiro N é divisível por* 3 *se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por* 3.

Demonstração. Como $10 \equiv 1 \mod 3$, segue-se da Proposição 2.56 item (iii) e da Proposição 2.60 item (i) que $10^i \cdot n_i \equiv n_i \mod 3$, para todo $i \geq 1$. Isto mostra que, se

$$N = 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0$$

então, $N \equiv (n_r + n_{r-1} + n_{r-1} + \cdots + n_1 + n_0) \mod 3$. □

2.8.3 Divisibilidade por 4

Proposição 2.63. *Um número inteiro N é divisível por* 4 *se, e somente se, os dois últimos algarismos de N formarem um número divisível por* 4.

Demonstração. Como $10 \equiv 2 \mod 4$, eda Proposição 2.60, teremos $10^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 0 \mod 4$ e segue da Proposição 2.56 que $10^i \cdot n_i \equiv 0 \mod 4$, para todo $i \geq 2$. Isto mostra que, se

$$N = 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0$$

então,

$$N \equiv 10^1 \cdot n_1 + n_0 \mod 4,$$

logo $N \equiv (n_1 n_0)_{10} \mod 4$. □

2.8.4 Divisibilidade por 5

Proposição 2.64. *Um número inteiro N é divisível por 5 se, e somente se, o último algarismo de N for 0 ou 5.*

Demonstração. Como $10 \equiv 0 \mod 5$, segue-se das Proposições 2.56 e 2.60 que $10^i \cdot n_i \equiv 0 \mod 5$, para todo $i \geq 1$. Isso mostra que, se

$$N = 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0$$

então, $N \equiv n_0 \mod 5$. □

2.8.5 Divisibilidade por 6

Proposição 2.65. *Um número N é divisível por 6 se, e somente se, N é divisível por 2 e 3.*

Demonstração. Uma justificativa desse critério vem do Teorema Fundamental da Aritmética 2.47, a partir dele obtemos a decomposição em fatores primos do 6, que é $6 = 2 \cdot 3$.

Se N é um número natural divisível por 6, tomando $N = 6 \cdot t = 2 \cdot (3t)$, se fizermos $x = 3 \cdot t$, então $N = 2 \cdot x$, com $x \in \mathbb{N}$, daí N é divisível por 2. Analogamente $N = 6 \cdot t = 3 \cdot (2 \cdot t)$, se fizermos $z = 2 \cdot t$, então $N = 3 \cdot z$, com $z \in \mathbb{N}$, assim $3|N$. Logo se N é divisível por 6, então N é divisível por 2 e por 3.

Por outro lado, suponhamos, que N seja divisível por 2 e por 3, como $2|N$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N = 2 \cdot k$, notemos que $3 - 2 = 1$, multiplicando essa igualdade por k, obtemos $3 \cdot k - 2 \cdot k = k \Rightarrow 3 \cdot k - N = k$, por outro lado, existe também $t \in \mathbb{N}$ tal que $N = 3 \cdot t$, pois $3|N$, logo, temos que $k = 3 \cdot k - 3 \cdot t = 3 \cdot (k - t)$, finalmente, fazendo $y = k - t$, e como $k - t \geq 0$, então $k = 3 \cdot y$, com $y \in \mathbb{N}$. Logo, $N = 2 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot y = 6 \cdot y$, com $y \in \mathbb{N}$ e isso garante que N é divisível por 6. Concluímos, portanto, que se N for divisível por 3 e 2, então N é divisível por 6. □

Este é o critério de divisibilidade que normalmente é apresentado aos alunos do ensino fundamental e que é de fácil memorização. No entanto, apresentaremos aqui um outro critério de divisibilidade para o 6, e a demonstração será por congruência modular.

Proposição 2.66. *Um número N é divisível por 6 se, e somente se, a soma do algarismo da unidade com o quádruplo de cada um dos outros algarismos é divisível por 6.*

Demonstração. Se $N = 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0$, observe que:

$$10^1 \equiv 4 \bmod 6,$$

$$10^2 \equiv 4^2 \bmod 6 \equiv 4 \bmod 6,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$10^r \equiv 4^r \bmod 6 \equiv 4 \bmod 6.$$

Daí temos que:

$$N = 10^r \cdot n_r + 10^{r-1} \cdot n_{r-1} + \cdots + 10^1 \cdot n_1 + 10^0 \cdot n_0 \equiv 4 \cdot (n_r + \cdots + n_2 + n_1) + n_0 \bmod 6.$$

Portanto, $6|N$ se, e somente se $4 \cdot (n_r + \cdots + n_1) + n_0 \equiv 0 \bmod 6$. □

Exemplo 2.67. Verifique se o número $N = 489324$ é divisível por 6.

Pelo segundo critério temos $4.(4+8+9+3+2)+4 = 16+32+12+8+4 = 108$, repetindo o processo, obtemos $4 \cdot (1 + 0) + 8 = 12$, que é divisível por 6. Portanto o número N também é divisível por 6.

2.8.6 Divisibilidade por 7

Definição 2.68. *Se $N = n_r n_{r-1} n_{r-2} \cdots n_8 n_7 n_6 n_5 n_4 n_3 n_2 n_1 n_0$, definimos a soma dos elementos que formam as classes ímpares de N por $S_{ci} = n_2 n_1 n_0 + n_8 n_7 n_6 + \cdots$, e a soma dos elementos que formam as classes pares de N por $S_{cp} = n_5 n_4 n_3 + n_{11} n_{10} n_9 + \cdots$.*

Exemplo 2.69. O número o número $N = 22389651536$ contém 4 classes, sendo a 1ª e 3ª classes ímpares e 2ª e 4ª as classes pares:

$$N = \underbrace{22}_{4^a\ Classe}\ \underbrace{389}_{3^a\ Classe}\ \underbrace{651}_{2^a\ Classe}\ \underbrace{536}_{1^a\ Classe}$$

Logo

$$S_{ci} = 536 + 389$$

e

$$S_{cp} = 651 + 22.$$

Proposição 2.70. *Um número $N = n_r n_{r-1} n_{r-2} \cdots n_2 n_1 n_0$, é divisível por 7 se, e somente se, $n_2 n_1 n_0 - n_5 n_4 n_3 + n_8 n_7 n_6 - n_{11} n_{10} n_9 + \cdots \equiv 0 \mod 7$, ou seja, quando a diferença entre a soma S_{ci}, e S_{cp}, for divisível por 7.*

Demonstração. Analisando os restos da divisão das potências de 10 por 7, temos

$$\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1 \bmod 7,\\
10^1 &\equiv 3 \bmod 7, \text{ ou } 10^1 \equiv -4 \bmod 7\\
10^2 &\equiv 2 \bmod 7, \text{ ou } 10^2 \equiv -5 \bmod 7\\
10^3 &\equiv 6 \bmod 7, \text{ ou } 10^3 \equiv -1 \bmod 7\\
10^4 &\equiv 4 \bmod 7, \text{ ou } 10^4 \equiv -3 \bmod 7\\
10^5 &\equiv 5 \bmod 7, \text{ ou } 10^5 \equiv -2 \bmod 7\\
10^6 &\equiv 1 \bmod 7, \text{ ou } 10^6 \equiv -6 \bmod 7,\\
\vdots &\equiv \vdots
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim por diante, até 10^r.

Seja $k \in \mathbb{N}$, note que se k for par, então $10^k \equiv 1$ ou 2 ou $-3 \bmod 7$, caso k seja ímpar $10^k \equiv -1$ ou -2 ou $3 \bmod 7$, logo:

$N = n_r.10^r + \cdots + n_8 \cdot 10^8 + n_7 \cdot 10^7 + n_6 \cdot 10^6 + n_5 \cdot 10^5 + n_4 \cdot 10^4 + n_3 \cdot 10^3 + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10^1 + n_0 \cdot 10^0 \equiv \ (n_0 + 3 \cdot n_1 + 2n_2) - (n_3 + 3 \cdot n_4 + 2 \cdot n_5) + (n_6 + 3 \cdot n_7 + 2n_8) - (n_9 + 3 \cdot n_{10} + 2 \cdot n_{11}) + \cdots + (n_{r-5} + 3 \cdot n_{r-4} + 2 \cdot n_{r-3}) - (n_{r-2} + 3 \cdot n_{r-1} + 2 \cdot n_r) \equiv (n_2n_1n_0 + n_8n_7n_6 + \cdots) - (n_5n_4n_3 + n_{11}n_{10}n_9 + \cdots) \bmod 7$, então N será divisível por 7 se, e somente se, $(S_{ci} - S_{cp})$ for divisível por 7. □

Exemplo 2.71. Verifique se o número $N = 22389651536$ é divisível por 7.

Aplicando o critério, ficamos: $536 - 651 + 389 - 22 = -115 + 367 = 252$, como 252 é divisível por 7, pois, $252 = 7 \cdot 36$ concluímos que N é divisível por 7.

Notemos que esse critério é interessante quando o número tem muitos algarismos na sua composição, no entanto ele não é o único critério de divisibilidade por 7 conhecido. Um critério simples que normalmente apresentamos aos alunos no Ensino Fundamental é enunciado a seguir.

Proposição 2.72. *Um número natural $N = n_rn_{r-1}n_{r-2}\cdots n_2n_1n_0$, é divisível por 7 se, e somente se, o número que não contém o último algarismo de N, isto é $(n_r \cdots n_2n_1)$, subtraído do dobro do último algarismo n_0 de N for divisível por 7. Se o número obtido for grande repita o processo até que seja possível verificar a divisão por 7.*

Demonstração. Sabemos que

$$n_r \cdots n_1n_0 = 10(n_rn_{r-1}\cdots n_1) + n_0.$$

Suponhamos que

$$n_rn_{r-1}\cdots n_1 - 2n_0 = 7k,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$n_r n_{r-1} \cdots n_1 = 7k + 2n_0.$$

Assim,

$$n_r \cdots n_1 n_0 = 10(n_r n_{r-1} \cdots n_1) + n_0 = 10(7k + 2n_0) + n_0 = 70k + 21n_0 = 7(10k + 21n_0),$$

que é divisível por 7.

Por outro lado, suponha que N seja divisível por 7, logo $N = n_r n_{r-1} \cdots n_1 n_0 = 7k_1$, com $k_1 \in \mathbb{Z}$. Se $n_r n_{r-1} \cdots n_1 - 2n_0 = l$, com $l \in \mathbb{Z}$, então $n_r n_{r-1} \cdots n_1 = l + 2n_0$. Assim,

$$n_r \cdots n_1 n_0 = 10(n_r n_{r-1} \cdots n_1) + n_0 = 10(l + 2n_0) + n_0 = 10l + 21n_0.$$

Como $n_r \cdots n_1 n_0$ é divisível por 7, então devemos ter $10l + 21n_0$ também divisível por 7. Mas isso só é possível se $l = 7k_2$, com $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Logo, $n_r n_r - 1 \cdots n_1 - 2n_0$ é divisível por 7. □

Exemplo 2.73. Vamos utilizar o método para verificar se 7315 é divisível por 7. Do número 7315 retiramos o algarismo da unidade, 5 e subtraindo o número obtido do dobro do algarismo retirado obtemos,

$$731 - 2 \cdot 5 = 721.$$

Repetindo o processo temos,

$$72 - 2 \cdot 1 = 70,$$

que é divisível por 7. Logo 7315 é divisível por 7.

2.8.7 Divisibilidade por 8

Proposição 2.74. *Um número N, com mais de três algarismos, é divisível por 8 se, e somente se, o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8.*

Demonstração. Analisando o resto da divisão das potências de 10 por 8, temos:

$$\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1 \bmod 8,\\
10^1 &\equiv 2 \bmod 8,\\
10^2 &\equiv 4 \bmod 8,\\
10^3 &\equiv 0 \bmod 8,\\
10^4 &\equiv 0 \bmod 8,\\
\vdots\ & \ \vdots\\
10^r &\equiv 0 \bmod 8.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Então, $N = n_r10^r + \cdots n_3 10^3 + n_2 10^2 + n_1 10^1 + n_0 \equiv 0 + \cdots + 0 + n_2n_1n_0 \bmod 8$. Portanto $8|N$ se, e somente se, $n_2n_1n_0 \equiv 0 \bmod 8$.

Observamos que $n_r10^r + \cdots n_3 10^3 = (n_r10^{r-3} + \cdots + n_3)1000$, como $1000 \equiv 0 \bmod 8$, $100 \equiv \ \bmod 8$ e $10 \equiv 2 \mod 8$, temos $(n_r10^{r-3} + \cdots + n_3)100 + n_2 100 + n_1 0 + n_0 \equiv 4n_3 + 2n_2 + n_0 \mod 8$, sendo assim, concluímos que um número N é divisível por 8 se o quádruplo do algarismo da centena somado com o dobro do algarismo da dezena somado com o algarismo da unidade também o for. □

2.8.8 Divisibilidade por 9

Proposição 2.75. *Um número N é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos algarismos de N é divisível por 9.*

Demonstração. Como $10 \equiv 1 \bmod 9$, segue pelas Proposições 2.56 e 2.60 que $n_i 10^i \equiv n_i \bmod 9$. Isso mostra que, se $N = 10^r n_r + 10^{r-1} + \cdots + 10^1 n_1 + n_0$, então, $N \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_1 + n_0 \bmod 9$. □

2.8.9 Divisibilidade por 10

Proposição 2.76. *Um número N é divisível por 10 se, e somente se, o último algarismo de N termina em 0.*

Demonstração. Como $10 \equiv 0 \mod 10$, segue pelas Proposições 2.56 e 2.60 que $n_i 10^i \equiv 0 \ \mathrm{mod} 10$. Isso mostra que, se $N = 10^r n_r + 10^{r-1} + \cdots + 10^1 n_1 + n_0)$, então, $N \equiv n_0 \bmod 10$. □

2.8.10 Divisibilidade por 11

Proposição 2.77. *Um número $N = n_r n_{r-1} n_{r-2} \cdots n_2 n_1 n_0$ é divisível por 11 se, somente se, é divisível por 11 o número $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 - n_5 + \cdots .$, isto é,* *a soma dos algarismos de ordem par menos a soma dos algarismos de ordem impar é divisível por 11.*

Demonstração. Como $10 \equiv -1 \mod 11$, pelas Proposições 2.56 e 2.60 segue que $10^i \equiv -1 \mod 11$ se i é ímpar e $10^i \equiv 1 \mod 11$ se i é par. Isso mostra que se, $N = 10^r n_r + 10^{r-1} + \cdots + 10^1 n_1 + n_0$, então:

$$\begin{aligned} n^0 &\equiv n_0 \mod 11, \\ 10n^1 &\equiv -n_1 \mod 11, \\ 10^2 n^2 &\equiv n_2 \mod 11, \\ \vdots &\quad \vdots \\ 10_r n^r &\equiv (-1)^r n_r \mod 11. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Logo, $N = 10^r n_r + 10^{r-1} + \cdots + 10^1 n_1 + n_0 \equiv n_0 - n_1 + n_2 - \cdots + (-1)^r \mod 11.$ $\square$

CAPÍTULO 3

A aritmética modular como facilitadora na resolução de problemas

Este capítulo trata da importância da inserção do conhecimento de aritmética modular nos anos finais do ensino fundamental, visto que o conhecimento do tema pode ser um facilitador para resolução de problemas pertinentes nessas séries e em provas de olimpíadas, além da aplicabilidade das congruências modulares em diversas áreas. Apresenta-se uma proposta de sequência didática, bem como uma lista de exercícios e soluções, alguns deles retirados de olimpíadas que podem ser solucionados por meio de congruência modular. Espera-se que esse material sirva de apoio para professores pesquisadores que desejam inovar suas aulas e ir além do que é proposto e apresentado nos atuais livros didáticos.

3.1 O ensino da aritmética modular no Ensino Fundamental

No processo de ensino e aprendizagem, os Parâmetros Curriculares Nacionais preveem como um dos objetivos gerais para o ensino fundamental que os estudantes sejam capazes de "saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos." (BRASIL, 1997, p. 69).

Neste sentido, o conhecimento de congruência modular pode ser um excelente instrumento e contribuir de maneira significativa para o sucesso deste processo nos anos finais do ensino fundamental. O ensino da Aritmética Modular pode iniciar-se no 6º ano do Ensino Fundamental, pois, conforme a BNCC, é nesta série que se inicia o aprofundamento do conteúdo da Divisão Euclidiana, a base do estudo de congruência. O conhecimento desta teoria pode ressignificar o processo de ensino e aprendizagem de divisão, contribuindo para a aquisição de competências e habilidades previstas para essa fase escolar nas leis e diretrizes que regem a educação no Brasil.

Dentre as competências específicas para a matemática, podemos destacar que o ensino de aritmética modular possibilita que o aluno seja capaz de "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados". (BRASIL, 2018, p.267), o que garante estabelecidas a aprendizagem do objeto de conhecimento em questão a aquisição da habilidade "(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora"(BRASIL, 2018, p.251).

Ressaltamos que este conhecimento de conceitos básicos da aritmética modular, contribui para o fortalecimento do estudo de divisibilidade sendo tratado sob nova abordagem, onde o aluno será capaz de experimentar novos caminhos de resolução de problemas, podendo estes serem facilitadores contribuindo para a resolução ágil e assertiva. Também preparará os alunos para conteúdos subsequentes da disciplina.

No entanto, é de suma importância que o professor compreenda bem tais conceitos matemáticos, e também saiba como apresentá-los aos alunos. Visto que o mundo está em constante mudança, para manter a qualidade do ensino é necessário que o professor além de estar em constante busca pelo conhecimento, também busque por novas metodologias de ensino. Dessa forma, ele realizará melhor o seu trabalho pedagógico tornando suas aulas mais atrativas e atuais.

3.2 A aritmética modular

A congruência modular ou a aritmética modular, é um conceito muito importante e que está relacionado com a divisibilidade e os restos de uma divisão entre números inteiros. A operação de *achar o resto* é chamada de operação módulo.

Segundo Hefez (2016), se m é um número natural, dizemos que dois números inteiros a e b são *congruentes* módulo m se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Como visto no Capitulo 2, quando a e b são congruentes *módulo* m, escreve-se

$$a \equiv b \mod m$$

Por exemplo, $21 \equiv 13 \mod 2$, já que os restos das divisões de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1. Do mesmo modo que $9 \equiv 2 \mod 7$, pois ambos deixam o resto 2 ao serem divididos por 7.

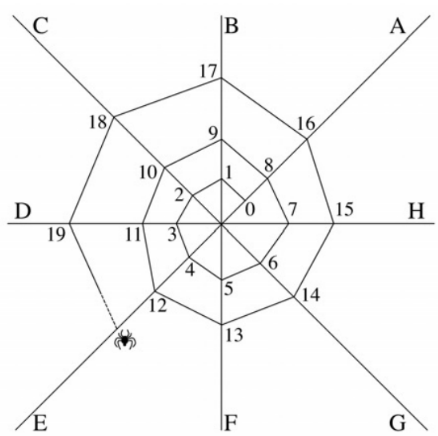
A teoria de congruências modulares abrange diversas propriedades e teoremas dos números inteiros que possibilitam a resolução de problemas desde os simples aos mais complexos. No entanto, destacaremos aqui os resultados que possibilitem resolver problemas mais básicos, como os abordados no ensino fundamental, em especial nas provas de olimpíadas. E com o objetivo de contribuir para uma aprendizagem adequada desse conteúdo essencial da matemática, apresentamos também uma sequência didática contendo uma abordagem inovadora com o uso de jogos no ensino de congruência modular.

3.2.1 Problemas resolvidos usando congruência modular

Apresentamos agora alguns problemas resolvidos usando congruência modular. Alguns deles foram retirados do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP). Interessante que, ao analisar alguns problemas envolvendo divisibilidade das provas da OBMEP, nota-se que ela cobra conceitos que não estão presentes nos livros didáticos, como teorema chinês dos restos, algoritmo de Euclides e congruência modular. No entanto, como veremos com alguns exemplos, esses conceitos podem facilitar a resolução das questões, o que deve motivar o professor a se apropriar desse conhecimento e compartilhar com seus alunos. O resultado pode ser até mesmo um aumento no índice de alunos aprovados em olimpíadas, e a melhora na qualidae de aprendizado do aluno como um todo.

Questão 1. (OBMEP, 2010) A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a Figura 3.1. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

Figura 3.1: *Teia da aranha*



Fonte: Banco de questões OBMEP

(a) B
(b) D

(c) E
(d) G
(e) H

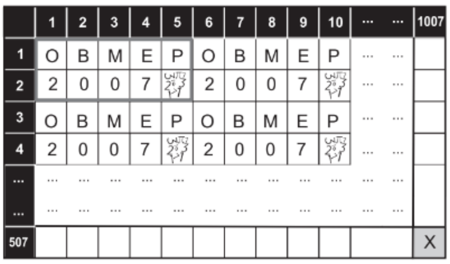
Solução sugerida pela OBMEP. Note que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Assim,

- sobre o fio A aparecem os (múltiplos de 8);
- sobre o fio B aparecem os (múltiplos de 8) + 1;
- sobre o fio C aparecem os (múltiplos de 8) + 2;
- sobre o fio D aparecem os números (múltiplos de 8) + 3;
- sobre o fio E aparecem os números (múltiplos de 8) + 4;
- sobre o fio F aparecem os números múltiplos de 8) + 5;
- sobre o fio G aparecem os números (múltiplos de 8) + 6;
- sobre o fio H aparecem os números (múltiplos de 8) + 7.

Na divisão de 118 por 8 encontrou-se o resto 6, o que significa que $118 = 14 \cdot 8 + 6$. Portanto, 118 está sobre o fio G.
Solução utilizando congruência: O número de fios é igual a 8. Dividindo 118 por 8, obtemos resto 6, então temos que $118 \equiv 6 \mod 8$, o que significa que o número 118 estará no mesmo fio que os números que deixam resto 6 na divisão por 8, portanto, no fio G.

Questão 2. (OBMEP, 2007) O professor Samuel preencheu uma tabela com 507 linhas e 1007 colunas de acordo com o padrão indicado na Figura 3.2 a seguir:

Figura 3.2: *Tabela*



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	...	1007
1	O	B	M	E	P	O	B	M	E	P	...	...	
2	2	0	0	7		2	0	0	7		...	...	
3	O	B	M	E	P	O	B	M	E	P	...	...	
4	2	0	0	7		2	0	0	7		...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
507													X

Fonte: Banco de questões da OBMEP

Como ele preencheu a casa marcada com o X?

(a) com o número 2
(b) com a letra B
(c) com a letra M
(d) com o número 7

(e) com o símbolo 

Solução sugerida pela OBMEP Observamos que nas linhas ímpares só aparece a sigla OBMEP, que se repete de 5 em 5 colunas. Assim, em qualquer dessas linhas aparece um P na 1005ª posição, e logo aparece um B na 1007ª posição. Como 507 é ímpar, vemos que no cruzamento da 507º linha com a 1007ª coluna aparece a letra B.

Figura 3.3: *Tabela preenchida*

	1	2	3	4	5	6	7	...	1005	1006	1007
1	O	B	M	E	P	O	B	...	P	O	B
2								...			
3	O	B	M	E	P	O	B	...	P	O	B
4								...			
5	O	B	M	E	P	O	B	...	P	O	B
...	...	...	...	...	...	...	...	⋱	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...
505	O	B	M	E	P	O	B	...	P	O	B
506								...			
507	O	B	M	E	P	O	B	...	P	O	B

Fonte: Banco de soluções da OBMEP

Solução utilizando congruência: Observamos que nas linhas ímpares só aparece a sigla OBMEP, que se repete de 5 em 5 colunas. Assim, em qualquer dessas linhas temos

- $O \equiv 1 \bmod 5$;
- $B \equiv 2 \bmod 5$;
- $M \equiv 3 \bmod 5$;
- $E \equiv 4 \bmod 5$;
- $P \equiv 0 \bmod 5$.

Fazendo a divisão euclidiana de 1007 por 5 obtemos resto 2, desse modo $1007 \equiv 2 \bmod 5$. Assim, concluímos que no cruzamento da 507º linha com a 1007ª coluna aparece a letra B.

Questão 3. (OBMEP, 2019) No Planeta Pemob (Figura 3.4 as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

(a) Aba

(b) Eba

Figura 3.4: *Planeta Pemob*

Fonte: Banco de questões da OBMEP

(c) Iba

(d) Oba

(e) Uba

Solução sugerida pela OBMEP No planeta Pemob, cada ano tem $6 \times 27 = 162$ dias. Se, em um certo ano, o primeiro dia do ano foi Eba, então dia 5 foi Aba, dia 10 também foi Aba, e assim sucessivamente, de 5 em 5, até o dia 160, que também foi Aba. Logo, o dia 161 foi Eba e o último dia, o de número 162, foi Iba.

Figura 3.5: *Tabela dos dias do ano*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Eba	Iba	Oba	Uba	Aba	Eba	Iba	Oba	Uba	Aba	...

Fonte: Banco de questões da OBMEP

Solução utilizando congruência: No planeta Pemob, cada ano tem $6 \times 27 = 162$ dias, e cada semana tem 5 dias. Quando efetuamos a divisão de 162 por 2, obtemos resto 2. Desse modo, temos que $162 \equiv 2$ *mod* 5. Visto que o primeiro dia deste ano foi Eba temos que o quinto dia é Aba. Assim, se $x \equiv 0 \mod 5$, sabemos que x é o dia Aba, consequentemente, Eba, é congruente a 1 mod 5; e Iba é congruente a 2 mod 5. Como, $162 \equiv 2$ *mod* 5, então o último dia do ano é Iba.

Observação 3.1. Podemos destacar também que os possíveis restos na divisão por 5 são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, explorando assim mais conceitos da Aritmética Modular.

Questão 4. (OBMEP, 2012) Cinco cartas, inicialmente dispostas como na Figura 3.6, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?

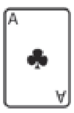
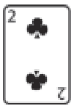
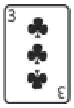
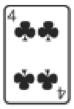
(a) 

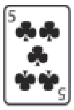
Figura 3.6: *Posição após primeiro embaralhamento*

Fonte: OBMEP

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

Solução sugerida pela OBMEP: Vamos listar as posições das cartas fazendo embaralhamentos sucessivos:

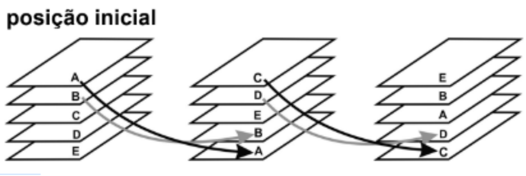
- posição inicial: A2345
- após o 1º embaralhamento: 3A524
- após o 2º embaralhamento: 534A2
- após o 3º embaralhamento: 4523A
- após o 4º embaralhamento: 24A53
- após o 5º embaralhamento: A2345, a posição inicial

Assim, de 5 em 5 embaralhamentos retornamos à posição inicial. Como $2012 = 5 \cdot 402 + 2$, a posição das cartas após o 2012º embaralhamento é a mesma que a posição após o 2º embaralhamento, quando a primeira carta é a de número 5.

Solução utilizando congruência: Observe que de 5 em 5 embaralhamentos retornamos à posição inicial. Como $2012 \equiv 2 \mod 5$, a posição das cartas após o 2012º embaralhamento é a mesma que a posição após o 2º embaralhamento, quando a primeira carta é a de número 5.

Questão 5. (OBMEP, 2008) Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura **??** mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas. Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

Figura 3.7: *Posição após primeiro e segundo embaralhamento*



Fonte: OBMEP

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E

Solução sugerida pela OBMEP: Se Estefânia embaralhar as cartas 6 vezes elas voltarão à posição inicial. Como $74 = 12 \times 6 + 2$, embaralhar as cartas 74 vezes tem o mesmo efeito que fazê-lo duas vezes, o que deixa a carta E no topo da pilha.
Solução utilizando congruência modular: Na Figura 3.8 observamos na tabela o empilhamento conforme o enunciado até chegar à posição inicial: Como no sexto

Figura 3.8: *Tabela: Posição do empilhamento*

Posição inicial	1º	2º	3º	4º	5º	6º
A	C	E	A	C	E	A
B	D	B	D	B	D	B
C	E	A	C	E	A	C
D	B	D	B	D	B	D
E	A	C	E	A	C	E

Fonte: Autoria Própria

empilhamento as cartas voltam à posição inicial, o que quer dizer que a cada seis empilhamentos, volta-se à posição inicial, ou seja, no 6º, 12º, 18º, 24º e assim por diante, se tem cartas iguais à posição inicial. Fazendo a divisão euclidiana de 74 por

6, temos que $74 = 12 \cdot 6 + 2$ ou seja $74 \equiv 2 \mod 6$, então a carta que estará no topo da pilha na posição 74º é igual a pilha de cartas na segunda posição, isto é, a carta E.

Questão 6. Sabendo que o ano de 2021 iniciou em uma sexta-feira, responda:

(a) Em que dia da semana cairá o último dia de 2021?

(b) Em que dia da semana cairá o 1º dia de 2024? E o último dia?

Solução utilizando congruência modular:

(a) Na Figura 3.9 a seguir, temos uma tabela onde foram listados os primeiros 16 dias de 2021.

Figura 3.9: *Primeiros 16 dias de 2021*

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16

Fonte: Autoria Própria

Analisando a tabela, observa-se que os múltiplos de 7 sempre estão na quinta-feira, os números que deixam resto 1 quando divididos por 7 estão na sexta-feira, os que deixam resto 2 no sábado, e restos 3, 4, 5 e 6, domingo, segunda, terça e quarta, respectivamente. Como o ano de 2021 têm 365 dias, ao dividir 365 por 7, obtém-se quociente 52 e resto 1 pois, $(365 = 52 \cdot 7 + 1)$. Logo, $365 \equiv 1 \mod 7$, de onde conclui-se que o último dia de 2021 cairá no mesmo dia da semana que o primeiro dia do ano, numa sexta-feira.

(b) Pelo item (a), o ano de 2021 encerra numa sexta-feira. Então o ano de 2022 iniciará num sábado e, como têm 365 dias, terminará num sábado. Assim, o ano de 2023 iniciará e terminará num domingo, pois têm 365 dias também. Desse modo, o ano de 2024 iniciará numa segunda-feira, mas têm 366 dias. Efetuando a divisão de 366 por 7 obtém-se quociente 52 e resto 2 $(366 = 52 \cdot 7 + 2)$. Logo, $366 \equiv 2 \bmod 7$. Portanto, o último dia de 2024 cairá no mesmo dia da semana do segundo dia deste ano, ou em outros termos, no dia seguinte ao do primeiro dia, ou seja, numa terça-feira.

Observação 3.2. Esse problema é oportuno para apresentar alguns resultados aos alunos. Isto é, se um ano é comum, com 365 dias, então termina no mesmo dia da semana que iniciou. Se for bissexto, com um dia a mais acrescentado no mês de fevereiro, termina no dia da semana seguinte ao dia da semana que iniciou.

Questão 7. João mora em Salvador e seus pais em Recife. Para matar a saudade, ele telefona para seus pais a cada três dias. O primeiro telefonema foi feito no domingo, o segundo telefonema na quarta feira, o terceiro telefonema no sábado, e assim por diante. Em qual dia da semana João telefonou para seus pais pela centésima vez?

Sugestão de solução utilizando congruência modular: Vamos listar os dias em que aconteceram as primeiras chamadas:

- Primeira chamada: domingo.
- Segunda chamada: quarta-feira.
- Terceira chamada: sábado.
- Quarta chamada: terça-feira.
- Quinta chamada: sexta-feira.
- Sexta chamada: segunda-feira.
- Sétima chamada: quinta-feira.
- Oitava chamada: domingo.
- Nona chamada: quarta-feira.

Como os telefonemas são realizados a cada três dias, a sequência de dias da semana se repete a cada 7 telefonemas então, para determinar o dia da centésima ligação, devemos encontrar o resto da divisão de 100 por 7. Como $100 = 7 \cdot 14 + 2$ temos que $100 \equiv 2 \mod 7$. Assim, o centésimo telefonema será realizado no mesmo dia da semana que o segundo telefonema, isto é, em uma quarta-feira.

3.3 Proposta de Sequência didática

Nesta sessão prepõe-se uma sequência didática contemplando o ensino da Aritmética Modular nos anos finais do Ensino Fundamental, podendo ser aplicada até mesmo no 6º ano. Objetiva-se que este material sirva de apoio e orientação para professores que tenham interesse em trabalhar a teoria nessa etapa de ensino e que desejam promover um amadurecimento da divisão euclidiana, bem como enriquecer o conceito que o resto tem em uma divisão euclidiana de números naturais ou inteiros. O aluno deve perceber que o resto da divisão euclidiana não significa apenas "o que sobra", como é apresentado nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

Segundo Silva (2020) uma sequência didática é uma estratégia para proporcionar uma aprendizagem significativa, onde a sequência de atividades propostas podem ser concebidas com base no que os alunos já sabem, e a cada etapa, aumentar o grau de dificuldade, ampliando a capacidade desses estudantes. Cita Peretti e Costa (2013), que diz que para que haja uma sequência didática "é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado, apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento." (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6, apud SILVA, 2020, p. 34).

Neste momento é esperado que os alunos tenham conhecimento de conceitos como múltiplos e divisores, e a divisão euclidiana, o que inclui o significado da divisão, do quociente e do resto. Para a aplicação no 6º ano devido ao não conhecimento do conjunto dos números inteiros é interessante que o professor se atente a restringir as definições e exemplos ao conjunto dos números naturais e também adaptar as atividades propostas. Uma vez a aplicação sendo feita no 7º ano, o professor deve aplicar as definições, teoremas e exemplos ao conjunto dos números inteiros.

A sequência sugerida está dividida em encontros que podem durar de 1 a 2 horas-aula.

3.3.1 Encontro 1 - Divisão Euclidiana

Neste primeiro momento o professor pode apresentar brevemente a história de Euclides, expondo a forma como em sua época era tratado o conceito de número, assim como mostrar a importância histórica de Euclides, devido ao seu importante trabalho, Os Elementos, onde encontramos a definição da divisão euclidiana.

Como motivação, o professor pode propor que os alunos realizem divisões utilizando materiais concretos, como palitos. Pode-se distribuir para cada aluno uma quantidade específica de palitos, por exemplo 50, e pedir que agrupe esses palitos em uma outra quantidade definida, por exemplo 6, então perguntar quantos grupos foram feitos e quantos palitos sobraram, destacando bem quem é o quociente e o resto nesta divisão.

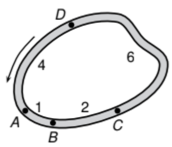
Ainda neste encontro o professor pode revisar de maneira dialogada os conceitos de múltiplos, divisores e os critérios de divisibilidades já estudados, e assim perceber quais conceitos os alunos ainda apresentam dificuldade de aprendizagem e memorização. Após enunciar a divisão euclidiana e fazer diversos exemplos, que visem buscar os significados do quociente e resto de uma divisão, o professor deve propor uma lista de exercícios, desde os mais simples aos mais elaborados como de olimpíadas. O objetivo é que o aluno compreenda os diferentes significados que o resto de uma divisão pode ter que vão além do que sobra, como é apresentado em muitos livros didáticos. A atividade a seguir contém alguns exemplos desses tipos de problemas.

Atividade 1 - Divisão Euclidiana

1. Na divisão de 145 por 11, qual é o quociente e o resto da divisão?
2. Numa escola de dança foram matriculados 100 alunos. A direção deseja formar turmas com exatamente 15 alunos em cada turma. Quantos alunos precisam ser matriculados para formar mais uma turma completa?

3. Contando a partir de domingo, em que dia da semana dia o milésimo dia?
4. Quantos múltiplos de 7 existem entre 1 e 234?
5. Quantos múltiplos de 5 existem entre 113 e 800?
6. (OBMEP, 2007) Uma turma tem 36 alunos e cada um deles tem um número de 1 a 36 na lista de chamada. Ontem, a professora chamou Lia ao quadro negro e mais os outros seis alunos cujos números eram múltiplos do número de Lia. Qual foi o maior número chamado?
   (a) 14
   (b) 20
   (c) 25
   (d) 32
   (e) 35
7. (OBMEP, 2006) A Figura 3.10 abaixo representa o traçado de uma pista de corrida. Os pontos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

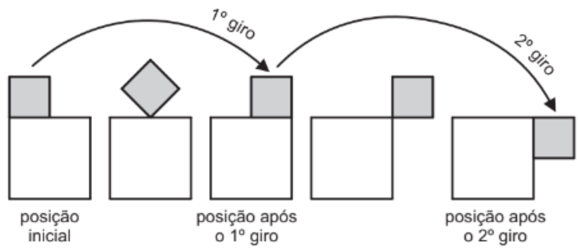
Figura 3.10: *Pista de corrida*



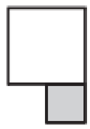
Fonte: OBMEP

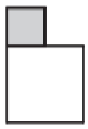
   (a) Quais são os pontos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
   (b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
   (c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.
8. (OBMEP, 2012) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na Figura 3.11, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.
   Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

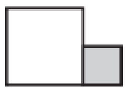
Figura 3.11: *Posição do quadrado após 1º e 2º giro*

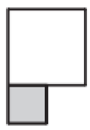


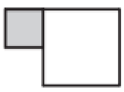
Fonte: OBMEP

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

3.3.2 Encontro 2 - Definição e Notação de Congruência

Neste encontro o professor poderá apresentar aos alunos a definição de congruência modular. Lembrando que o objeto aqui é mostrar com este conhecimento pode ser um facilitador na resolução de problemas, e que os alunos possam ver a aplicabilidade do conteúdo em situações cotidianas. Assim sugere-se iniciar esse momento propondo situações que ajude o aluno a construir a ideia de congruência modular.

Mais uma vez, usando algo concreto como motivação, sugerimos que o professor chame atenção para um relógio de parede analógico. A "aritmética do relógio" é uma excelente maneira de se introduzir a aritmética modular. Pergunte aos alunos:

- Quando são 14 horas, o ponteiro das horas está posicionado sobre qual número?

- E quando são 19 horas, onde estará posicionado o ponteiro das horas?
- Quando o ponteiro das horas está sobre o 9, isso significa que pode ser que horas da noite?
- Que relação tem o que acontece com os ponteiros das horas do relógio com a divisão euclidiana?

Os alunos deverão perceber que quando dividimos as horas por 12, o resto dessa divisão é o número onde o ponteiro das horas estará posicionado. De fato, quando dividimos 14 por 12 temos resto 2 pois, $14 = 1 \cdot 12 + 2$. Logo o ponteiro está posicionado no número 2.

Podemos dizer que o 14 é congruente a 2 são módulo 12. Pois ambos números divididos por 12 deixam resto 2. Além disso, destaque que $12|(14-2)$.

Observação 3.3. Verificar se todos os alunos conhecem a notação $b|a$ que significa que o número b divide ou é um divisor do número a.

Outro exemplo pode ser dado usando o calendário, mais um material concreto. Pergunta-se aos alunos que dia da semana caiu o primeiro dia do ano. Bem, suponhamos que o primeiro dia do ano tenha caído em uma terça-feira. Agora podemos propor as seguinte indagação: Sem olhar no calendário, que dia cairá o dia 15 de outubro? Podemos montar com os alunos uma tabela, como a Figura 3.12 com os 7 primeiros dias do ano e seus respectivos dias da semana.

Figura 3.12: *Tabela dos dias da primeira semana janeiro*

DIAS DO MÊS DE JANEIRO	1	2	3	4	5	6	7
DIAS DA SEMANA	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo	segunda

Fonte: Autoria própria

Verificamos aqui que estamos novamente diante de um caso de congruência, módulo 7 nesse caso. Para descobrirmos em que dia da semana cairá o dia 15 de outubro precisamos primeiro descobrir a posição que esse dia ocupa nos 365 dias do ano.

Considerando um ano que não é bissexto, ou seja, o mês de fevereiro tem 28 dias. Agora, é como se tivéssemos uma fila de 288 dias e desejamos saber, na congruência de módulo 7 (7 dias da semana) qual o correspondente ao 288.

Ao dividirem 288 por 7 obtemos o resto 1. Logo, 288 é congruente a 1, no módulo 7. Isso quer dizer que o 288º dia do ano (dia 15 de outubro) cairá no mesmo dia da semana do dia 1 de janeiro. Como o dia 1 de janeiro de ano suposto foi uma terça-feira, conforme a tabelinha, o 288º dia deste ano também cairá numa terça-feira. Portanto, dia 15 de outubro cairá numa terça-feira. Destaque com os alunos também que $7|(288-1)$.

Com esses exemplos os alunos observariam que em nosso cotidiano existem inúmeras situações onde se faz presente a noção de congruência. Agora, o professor pode ficar a vontade para apresentar a definição de congruência da seguinte forma:

Dado um número natural $n \neq 0$, dois outros inteiros a e b são ***congruentes módulo*** *n quando o resto da divisão euclidiana de a por n é igual ao resto da divisão euclidiana de b por n, e denota-se $a \equiv b$ mod n.* No Capítulo 2 temos esta definição e a demonstração de várias propriedades que podem ser apresentadas aos alunos sem muito rigor matemático.

Faça alguns exemplos de congruência, a fim de que os alunos possam entender e fixar bem a definição apresentada. Apresente problemas bem elaborados como os de olimpíadas e mostre que o conhecimento adquirido pode ser um facilitador na resolução desse tipo de problemas. Em 3.2.1 temos vários exemplos de problemas e sugestões de soluções utilizando a congruência modular. Além desses, com o objetivo de fixar bem os conceitos construídos pode-se incluir exercícios como os que estão propostos na atividade a seguir:

Atividade - 2 - Congruência Modular

1. Determine se cada item abaixo é verdadeiro ou falso. Em caso negativo, corrija a congruência usando o símbolo de não-côngruo, que é $\not\equiv$.
   (a) $20 \equiv 5 \mod 3$
   (b) $14 \equiv 6 \mod 8$
   (c) $19 \equiv 13 \mod 5$
   (d) $49 \equiv 19 \mod 10$
   (e) $15 \equiv 2 \mod 13$
   (f) $76 \equiv 7 \mod 10$
   (g) $35 \equiv 0 \mod 6$

2. Em uma coluna existem duas divisões euclidianas e na outra uma congruência. Relacione as colunas:

$73 = 3 \cdot 24 + 1$ e $52 = 3 \cdot 17 + 1$	$34 \equiv 22 \mod 4$
$43 = 5 \cdot 8 + 3$ e $88 = 5 \cdot 18 + 2$	$14 \not\equiv 4 \mod 3$
$28 = 2 \cdot 14 + 0$ e $3 = 2 \cdot 1 + 1$	$73 \equiv 52 \mod 3$
$14 = 3 \cdot 4 + 2$ e $4 = 3 \cdot 1 + 1$	$43 \equiv 88 \mod 5$
$21 = 4 \cdot 5 + 1$ e $25 = 4 \cdot 6 + 1$	$28 \not\equiv 3 \mod 2$
$34 = 4 \cdot 8 + 2$ e $22 = 4 \cdot 5 + 2$	$21 \not\equiv 25 \mod 1$

3. Verifique se as congruências são verdadeiras usando o fato que $a \equiv b \mod n \Leftrightarrow n|a - b$. Veja o exemplo

Exemplo 3.4. $15 \equiv 3 \mod 4$
Solução: Como $15 - 3 = 12$ e $4|12$ logo é verdadeira a congruência.

(a) $21 \equiv 14 \mod 7$
(b) $13 \equiv 53 \mod 10$
(c) $89 \equiv 13 \mod 5$
(d) $56 \equiv 3 \mod 4$
(e) $34 \equiv 27 \mod 6$

4. Estamos no mês de fevereiro de 2023. Daqui a 363 meses, estaremos em qual mês?
5. Sabendo que o dia 1º de janeiro de 2022 caiu em sábado, descubra em qual dia da semana cairá o feriado de 7 setembro desse mesmo ano.
6. Cinco amigas ganham um pacote de balas e começam a dividir: uma para Alice, uma para Bia, uma para Carla, uma para Dani e uma para Ester; novamente uma para Alice, uma para Bia, uma para Carla, uma para Dani e uma para Ester; e assim por diante até que termine as 1.786 balas que haviam no pacote. Qual das cinco meninas recebeu a última bala?

3.3.3 Encontro 3 - O jogo: Avançando com os Restos

Até aqui os alunos foram apresentados a um novo conhecimento e novas estratégias de resolução de problemas. Uma excelente maneira de verificar se a aprendizagem foi efetiva é pela realização de um jogo didático.

> Os jogos podem propiciar a construção de conhecimentos novos, um aprofundamento do que foi trabalhado ou ainda, a revisão de conceitos já aprendidos, servindo como um momento de avaliação processual pelo professor e de auto avaliação pelo aluno. (BRASIL, 2014, pag. 5).

Além disso, eles constituem uma forma interessante de propor problemas, sendo uma excelente alternativa para inovações das aulas, o que contribue para a otimização do processo de ensino e aprendizagem da Matemática pois, o aluno inserido na situação do jogo desenvolve o raciocínio lógico na resolução de problemas, além de despertar a curiosidade possibilita uma construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações acontecem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer do jogo, sem deixar marcas negativas.

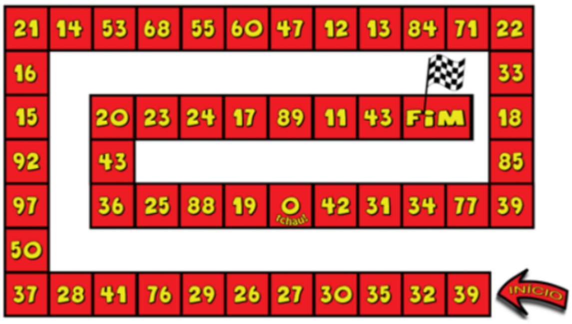
Falaremos no próximo capítulo sobre a importância dos jogos nas aulas de matemática. E também será apresentado um relato de experiência onde vimos na prática a comprovação desta teoria.

Sendo assim, propomos para essa aula o jogo que se encontra disponível no site do Laboratório de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências

Exatas – IBILCE da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de São José do Rio Preto - São Paulo. O jogo trabalha as operações de divisão e multiplicação, e o aluno percebe o papel do resto em uma divisão euclidiana.

Recursos necessários: um tabuleiro como 3.13, dois dados de seis faces e dois marcadores (sendo um para cada jogador, no caso de dois jogadores, ou um para cada equipe, no caso de duas equipes).

Figura 3.13: *Tabuleiro*



Fonte: IBILCE

Número de Participantes: Dois (um contra o outro) ou quatro (em equipes de 2 jogadores).

Objetivo: Ser a primeira equipe a levar um de seus marcadores para o espaço com a palavra FIM.

Regras:

(1) As equipes definem quem inicia o jogo no par ou ímpar.

(2) As equipes jogam alternadamente. Cada equipe movimenta dois marcadores. Em cada jogada apenas um deles. Todos os marcadores são colocados no 'início'.

(3) Para movimentar um marcador que esteja no "início", cada equipe, na sua vez, joga os dados, soma os resultados obtidos e efetua a divisão cujo dividendo é o número 39 (primeira casa do tabuleiro) e o divisor é a soma obtida no jogo dos dados. Em seguida, anda com o marcador tantas casas quanto o resto da divisão.

(4) Na sequência, a equipe adversária, joga os dados, soma os resultados obtidos, efetua as divisões cujo dividendo é o número da casas onde se encontram seu marcador e o divisor é a soma obtida no jogo dos dados. Se um dos restos for zero, o marcador no lugar onde está, e poderá lançar os dados mais uma vez e repetir o processo.

(5) A equipe que, na sua vez, efetuar um cálculo errado e o erro for denunciado pela equipe oponente, perde a sua vez de jogar.

(6) Ganha a equipe que primeiro alcançar, com seu marcador, a casa FIM.
(7) Para alcançar a casa FIM a equipe deve obter o número exato de movimentos, sem ultrapassá-la. Se houver excesso, deve-se retroceder o número de casas que excede o movimento até a casa FIM.
(8) A equipe que chegar exatamente na casa TCHAU sem ultrapassá-la, perde o jogo se e a equipe adversária tiver passado da casa TCHAU. O jogo se encerra, contando vitória para a equipe que já havia passado.

Depois de jogar algumas vezes com a classe, você pode propor problemas para explorar melhor a matemática envolvida no jogo:

- Quais são os possíveis valores para os restos das divisões pelos números que aparecem nos dados?
- Por que na casa com o número 0 está a palavra 'tchau'?
- O que é melhor, por exemplo, estar na casa com o número 51 ou na casa 96?
- Se a sua ficha estiver na casa com o número 80, por exemplo, quais são os números que devem sair na soma dos dados para que você ganhe o jogo?

Faça uma lista dos números que são divisíveis por 2, observando que são números que apresentam o resto 0 ao serem divididos por 2. A seguir, observe outros números que sejam divisíveis por 2, e questione:

- Como é possível saber se o número é divisível por 2 sem efetuar a divisão por 2?

Em outro momento, a partir deste jogo, repita essa discussão para a divisibilidade e múltiplos de 3, 4, 5 ou 6. Pinte, por exemplo, de vermelho os números (do tabuleiro) que são múltiplos de 2 (ou não divisíveis por 2) e de amarelo, aqueles que são múltiplos de 3 (ou são divisíveis por 3), e questione:

- Por quê alguns dos números foram pintados com as duas cores?
- Quais números são esses?
- Eles são múltiplos de qual número?

Repita a atividade, escolhendo os múltiplos de 3 e de 4, ou de 2 e de 5, ou de 2 e de 6, etc. Assim, os alunos poderão concluir que os múltiplos de dois números são também múltiplos do produto desses números.

3.3.4 Encontro 4 - Ensinando os critérios de divisibilidade por congruência modular

Finalizando essa sequência didática incentivamos que o professor apresente aos alunos as demonstrações dos critérios de divisibilidade por congruência modular, como apresentado nesse trabalho no Capítulo 2. Afinal neste momento os alunos já se apropriaram dos conceitos que envolvem a divisibilidade e, estão bem familiarizados com eles, e não precisam de apenas decorar esses critérios, sem saber o por que deles, para então resolver problemas futuros.

É importante que o professor se lembre que, essas “regrinhas”, que são apresentados aos alunos no 6º ano do Ensino Fundamental, são pré-requisitos de conteúdos para as séries subsequentes, além de muito cobrado em provas de olimpíadas. Nota-se que uma vez apresentado aos alunos no 6º ano, esses conteúdos não são mais revisitados nos livros didáticos das séries posteriores. Mas, o que na verdade acontece é que a maioria dos alunos muitas vezes não se apropriam desse conhecimento e apresentam muita dificuldade em assimilar conteúdos posteriores criando, assim, uma barreira em sua aprendizagem, apresentando muita dificuldade ao se depararem com problemas que envolvam divisibilidade e multiplicidade em olimpíadas de matemática, por exemplo, a OBMEP. Daí a importância de que este conteúdo seja apresentado de uma maneira que o aluno aprenda de maneira efetiva e o assimile de forma a utilizá-lo na resolução de situações problemas e, ainda, se aproprie do conhecimento adquirido e que essa aprendizagem seja prazerosa.

CAPÍTULO 4

Ensinando e aprendendo a matemática através de jogos

Este capítulo, destaca as dificuldades encontradas, tanto pelo professor como pelo aluno, no processo de ensino e aprendizagem. E visto que a matemática é conhecida como uma disciplina crítica, com altos índices de reprovação, este capítulo abordará como a inovação mas metodologias de ensino com a inserção do lúdico, especificamente os jogos, podem ser um possível instrumento facilitador para a aprendizagem matemática.

4.1 Metodologias tradicionais x Metodologias inovadoras

Um dos maiores desafios que o professor de matemática enfrenta é o de ministrar aulas capazes de despertar nos alunos o gosto pela disciplina e enfraquecer o senso comum de que a matemática é muito difícil e que pode ser entendida apenas por uma minoria. Em geral, as aulas de matemática são ministradas segundo o método tradicional de ensino, dando ênfase ao mecanismo da repetição.

Este método consiste basicamente em: passar o conteúdo no quadro; ensinar o conteúdo; aplicar exercícios e corrigi-los junto aos alunos; tirar dúvidas e posteriormente aplicar avaliações, como provas ou testes. O professor é o transmissor do conhecimento, a autoridade do saber, apresenta modelos prontos de resolução de questões e diz como deve ser feito. O aluno por sua vez, trabalha individualmente, é passivo e depende do professor para avaliar seu conhecimento. As avaliações são feitas por meio de testes ou provas objetivas e quantitativas, elaboradas sempre pelo professor. O ambiente escolar é silencioso e cheio de regras. E o resultado são aulas cansativas, monótonas onde os alunos se sentem desmotivados por não sentirem o prazer da descoberta, e não desenvolvem gosto pela disciplina, comprometendo o processo de ensino e aprendizagem. O fato é que, esse método tem se mostrado insuficiente para garantir a aprendizagem efetiva dos alunos.

Paralela a essa realidade, temos as aulas ministradas com metodologias inovadoras de ensino onde o professor compartilha seus conhecimentos por guiar, orientar e questionar os alunos, desafiando eles a buscarem soluções para os problemas propostos condizentes com sua realidade. O aluno trabalha cooperativamente, é ativo, independe do professor para avaliar seu conhecimento, é autônomo, protagonista do processo educacional. As avaliações são subjetivas e qualitativas, ocorrendo durante todo o processo educativo onde são usados vários instrumentos avaliativos. O ambiente escolar é mais dinâmico e desafiador. O resultado são aulas mais interessantes e prazerosas despertando a curiosidade e a atenção dos alunos, contribuindo assim para uma aprendizagem efetiva.

São notórias as inúmeras dificuldades encontradas dentro da sala de aula, tanto pelos professores, quanto pelos alunos, que prejudicam o processo de construção de conhecimento. Grande parte dessas dificuldades deve-se ao fato de os alunos verem a disciplina de maneira negativa e desinteressante por não conseguirem vincular os conteúdos a situações do seu cotidiano. Realidade esta que pode e deve ser mudada.

Não existe um caminho único para o ensino da matemática. E são diversas as linhas metodológicas, onde os alunos se tornam ativos na sua aprendizagem. Sendo assim, o professor deve conhecer e buscar essas novas metodologias de ensino. Dessa forma, ele realizará melhor o seu trabalho pedagógico tornando suas aulas mais atrativas e atuais. Todo processo inovador de ensino e aprendizagem contribui para o desenvolvimento de competências específicas da matemática que de acordo com a BNCC,

> em articulação com as competências gerais da Educação Básica, a área de Matemática e, por consequência, o componente curricular de Matemática devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. (BNCC, 2018, p.266).

Dentre essas competências podemos destacar:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo... Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BNCC, 2018, p.267).

Neste sentido, dentre as diversas metodologias inovadoras, o uso de jogos tem se mostrado promissor tanto no desenvolvimento teórico quanto no interesse dos alunos. De acordo com os PCNs, as atividades com jogos podem representar um importante recurso pedagógico, já que:

> "Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações" (PCN, 1998, p.47).

Os PCNs salientam ainda que os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes, pois o aluno inserido no jogo enfrenta desafios e vai em busca de soluções, desenvolvendo assim sua criatividade.

> . . . , um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (PCN, 1997, p. 48-49).

O jogo não tem apenas finalidade lúdica, mas também didática. Ele é um excelente recurso para a resolução de problemas, introdução, compreensão de conceitos matemáticos e visualização de situações-problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for muito abstrato ou de difícil compreensão. Por isso, as aulas com jogos não devem ser vistas apenas como divertimento ou descanso, o jogo deve ser inserido no planejamento do professor como instrumento de ensino.

Diversos autores, como Grando, Borin e Stocco, fazem referência a uma mudança em todo o desenvolvimento das aulas quando há utilização de jogos. Borin (1996) apresenta como justificativa à introdução de jogos nas aulas de Matemática a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Enfatiza também que, no jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo na aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo.

Segundo Stocco (2003), o jogo por si só não deve ser considerado um transmissor de conhecimento, mas quando levado para a sala de aula proporciona melhor aprendizado.

> Para ser usado em sala de aula, o jogo exige estrutura, planejamento. Deve-se manter o jogar por prazer, mas com intencionalidade. A tarefa da escola é ensinar. Qualquer recurso que ela use deve ir além da diversão, sem perder o lado lúdico, mas também não pode ocorrer sem planejamento e intervenção. (STOCCO, 2003, p. 3).

De acordo com Grando (2004) ao introduzir os jogos em seu planejamento o professor deve refletir sobre as consequências positivas e negativas, de um trabalho pedagógico com os uso de jogos. Em Grando (2004, p.31) a autora lista as vantagens que devem ser assumidas pelo professor ao trabalhar com jogos em sala de aula, sendo essas:

- (re)significação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;
- introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;
- desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);
- aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;
- significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;
- propiciar o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);
- o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento;
- o jogo favorece a interação social entre os alunos e a conscientização do trabalho em grupo;
- a utilização dos jogos é um fator de interesse para os alunos;
- dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso de linguagem e do resgate do prazer em aprender;
- as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver as habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;
- as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.

A autora também lista algumas "desvantagens" do uso de jogos quando estes são feitos sem um bom planejamento, sem estabelecer previamente os objetivos, ou seja, sem intencionalidade. Ela destaca que:

- quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um apêndice em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;
- o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;
- as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;

- a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
- a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
- a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Analisando todas essas considerações, podemos concluir que, para que o jogo atinga realmente seu objetivo didático e pedagógico, e contribua para a aprendizagem efetiva dos alunos, o professor deve planejar uma sequência didática com uma série de intervenções pedagógicas a fim de que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem significativa de um determinado conteúdo.

Por isso, o professor deve ter alguns cuidados ao escolher o jogo a ser aplicado. Deve estudá-lo antes de aplicá-lo, o que envolve jogar. Com o objetivo de despertar interesse o jogo deve ser adequado ao nível em que os alunos se encontram. Também ao escolher o jogo, o fator "sorte" não deve interferir nas jogadas, permitindo assim que vença aquele que descobri melhores estratégias e que tenha melhor e mais rápido raciocínio.

Com esse objetivo, é necessário que a atividade com jogo proposta, represente um verdadeiro desafio cognitivo para o sujeito. O uso de regras é fundamental, sendo estas previamente estabelecidas e propostas logo no início do jogo, podendo ou não ser modificadas no decorrer das rodadas. Com o objetivo de ter a interação social deve-se ter o cuidado de utilizar atividades que envolvam dois ou mais alunos. Além do que a competição gera situações provocadoras, onde de acordo com Grando (2000, p. 42) "o sujeito necessita coordenar diferentes pontos de vista, estabelecer várias relações, resolver conflitos e estabelecer uma ordem".

Smole (2007) ressalta que é importante lembrar que o aluno não aprenderá jogando apenas uma única vez. Assim, ao escolher o jogo o professor deve considerar que, na primeira jogada, o aluno às vezes mal compreende as regras. Portanto, para que haja a aprendizagem por meio do jogo, é necessário que ele seja realizado mais de uma vez, o que deve ser previsto e pelo professor quando for determinar o tempo para a realização do jogo em seu planejamento.

4.2 Porque usar os jogos nas aulas de Matemática?

É notória a dificuldade enfrentada por muitos alunos na aprendizagem da matemática. Ao longos dos anos, ela é uma disciplina temida por muitos educandos, pois a forma como vem sendo abordada nas salas de aula por alguns professores gera insegurança, causando medo e ansiedade. Infelizmente o ensino da matemática é caracterizado pela preocupação em “passar” aos alunos definições, regras, procedimentos, nomenclaturas e exemplos de maneira bem tradicional e o mais rápido possível a fim de cumprir a extensa lista de conteúdos previsto no currículo. Esse processo não permite ao aluno o prazer da descoberta, e, pior ainda, gera desinteresse, apatia e rejeição à disciplina.

Analisando essa realidade, surgem alguns questionamentos: A maneira tradicional como muitos professores ensinam a matemática é a mais eficaz? O que pode ser melhorado? O que pode ser alterado na didática? Manter o tradicional ou inovar com o lúdico? Seria a falta de aprimoramento das metodologias por parte de muitos professores um fator contribuinte para as dificuldades apresentadas pelos alunos e pelo desinteresse nas aulas? A dificuldade em matemática é um problema apenas do aluno?

É muito importante que o professor compreenda bem o conteúdo a fim de contribuir para a construção do conhecimento do aluno. O aprofundamento do conhecimento do objeto de aprendizagem dará ao professor maior confiança e propriedade ao apresentar o conteúdo, além da diversidade de maneiras de apresentação do conteúdo, desprendendo assim do livro didático, aguçando no aluno a curiosidade e o desejo de buscar novos conhecimentos.

No entanto, o professor não deve se preocupar apenas em adquirir cada vez mais conhecimento teórico matemático, ele deve também se preocupar com a forma de transmiti-lo. Daí a importância do professor estar em constante buscar por novas metodologias de ensino e a introdução do lúdico nas aulas de matemática é uma das formas de se fazer isso. Como já dito, um excelente recurso lúdico é o uso de jogos. Por meio deles os alunos aprendem brincando, criando, desafiando, inventando situações para explicar determinados assuntos, além de se sentirem motivados a aprender, pois desperta o interesse pela disciplina.

Uma das competências importantes a serem desenvolvidas no ensino da Matemática refere-se à capacidade de resolver de problemas, conforme enfatiza a BNCC. Problemas esses que podem ser propostos de diversas formas, além da tradicional, em que uma situação é descrita e o estudante deve buscar a alternativa mais adequada para encontrar a solução.

Nesta perspectiva o uso de jogos é uma excelente forma de apresentar situações-problema, pois neles as situações mudam constantemente, de acordo com o andamento da partida. Dessa forma, a cada nova etapa é necessária uma nova avaliação da situação e uma busca pela estratégia mais adequada.

Os jogos podem ser usados para a fixação do objeto de conhecimento que já foi estudado, bem como para introduzir o conteúdo de uma maneira descontraída, o que melhora a relação professor - aluno. Essa aproximação, dá ao professor a possibilidade de avaliar o desenvolvimento do aluno, sem ser preciso fazer um teste ou uma prova escrita para a verificação da aprendizagem. Logo, o jogo pode também ser usado como instrumento de avaliação, sendo que esta deve ser tratada como estratégia de ensino, conforme expõe os PCNs

> A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.(BRASIL, 1998, p.19).

Existe uma variedade de jogos matemáticos: os já comprados prontos, os que necessitam ser confeccionados e os virtuais. Cabe ao professor fazer a escolha adequada do jogo de acordo com seus objetivos, conteúdo a ser abordado, níveis de conhecimentos dos alunos, mas jamais subestimando sua capacidade cognitiva.

É importante que o professor se lembre que nenhum jogo é válido por si só. A simples introdução do jogo no ensino da matemática não garante melhor aprendizagem desta disciplina. Para que isso aconteça, como bem destacado nessa seção, é necessário que haja um objetivo vinculado ao jogo trabalhado. Então o professor deve estar atento a essa necessidade fundamental, pois a falta de objetivo pode transformar as aulas de matemática em recreação, ou “oba, oba”, com alunos ansiosos para brincar não para aprender.

CAPÍTULO 5

Relato de experiência

Este capítulo trata de um relato detalhado de uma intervenção pedagógica, cujo objetivo foi a exposição de metodologias inovadoras para o ensino de Divisibilidade por meio do jogo “Brincando com múltiplos e divisores”. A sequência didática foi inspirada no trabalho de Priscila Moreda Perroni, com o tema: “Brincando com múltiplos e divisores: O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula”. Espera-se que este relato detalhado auxilie professores durante a execução de ações similares.

5.1 O projeto de intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica em questão foi aplicada em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Alessandro Miguel na cidade de Inhumas-Goiás, escola na qual atuo como professora (atualmente em licença para a finalização do mestrado). A turma foi escolhida levando-se em conta a quantidade de alunos, o comprometimento da turma em participar do projeto, o nível de dificuldade de concentração e interesse que a turma em geral apresenta durante as aulas tradicionais e, também, os resultados obtidos após verificação de aprendizagem das turmas dos 6^{os} anos da escola. Uma vez que o conteúdo já havia sido apresentado aos alunos, então os mesmos já tinham feito avaliações para a verificação da aprendizagem.

A princípio foi apresentado o projeto à escola, que foi elaborado e submetido junto ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFG. Fui bem recebida na escola tanto a gestora como a professora se interessaram pela proposta de intervenção, e se colocaram à disposição para apoiar a execução do projeto. Por meio de uma conversa informal com a professora regente dos 6^{os} anos da Escola, foi feita a escolha da turma. A professora relatou que a turma tinha bom comportamento e era bem comprometida com as atividades que lhes eram propostas, logo acreditamos que todos os alunos da turma desejariam participar de maneira voluntária na execução do projeto. Ela relatou que ao apresentar o conteúdo em Divisibilidade, os alunos apresentaram dificuldades por falta de pré-requisitos, como a habilidade de resolver operações de multiplicação e divisão, e a memorização da tabuada da multiplicação. Disse que o conteúdo foi apresentado de maneira bem tradicional apenas com a exposição oral do conteúdo e fixação dos conceitos apresentados por meio de exercícios de fixação. Ao se verificar a aprendizagem por meio de avaliação escrita, os alunos apresentaram algumas dificuldades devido a não memorização das "regrinhas".

O primeiro contato com a turma foi com uma conversa bem interativa onde foi apresentado a eles como seria feita essa intervenção pedagógica motivada na preocupação quanto à dificuldade de aprendizagem que muitos alunos apresentam frente ao objeto de conhecimento em questão e que a inovação nas metodologias de ensino poderia contribuir para sanar tais dificuldades.

Os alunos responderam de maneira bem natural e sincera às perguntas: Quem gosta de Matemática? Quem tem dificuldade em aprender a Matemática? O que vocês acham das aulas de matemática? Como vocês acham que deveriam ser as aulas de matemática? O que tornaria as aulas de matemática mais interessantes? Quem gosta de jogos e brincadeiras? O que vocês preferem, jogos manuais ou jogos eletrônicos? Quem gostaria de aprender a Matemática de uma maneira mais divertida?

Muitos alunos expressaram com empolgação suas opiniões. No geral, disseram que acham a matemática difícil e que as aulas são cansativas e monótonas. Expressaram o desejo de ter aulas diferenciadas com mais frequência.

Com essa interação, os alunos puderam perceber que a opinião deles contribui muito para a melhoria das aulas.

Ao perguntar quem gostaria de participar do projeto, alguns alunos disseram: "É obrigatório professora?" Daí expliquei que não era, e logo pensei em como poderia motivá-los a participar de maneira voluntária, para não perder a ludicidade da ocasião. Pois o jogo não deve ser tido como obrigatório. O aluno deve querer participar.

Nesse sentido, os PCNs enfatizam:

> Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um "fazer sem obrigação externa e imposta", embora demande exigências, normas e controle.(Brasil, 1998, p.47).

Após explicar que essa pesquisa serviria de incentivo para que os professores de matemática possam inovar suas aulas, tornando-as mais atraentes e produtivas e que assim, às aulas "diferentes" que eles tanto pedem para os professores não aconteceria apenas raramente, mas sim com bastante frequência devido aos possíveis bons resultados, a aceitação foi total.

Os alunos puderam perceber que a intervenção seria algo bem divertido e que os ajudaria não apenas a desenvolver o gosto por essa disciplina tão temida pela maioria, como também sanaria as dúvidas e dificuldades apresentadas quanto ao conteúdo de divisibilidade. Os alunos assinaram o termo de consentimento[1] e levaram também para os pais assinar, concordando com a participação de seus filhos na execução do projeto. Também foi apresentado todo o cronograma do projeto, que foi planejado e dividido em encontros, inciando com a realização de uma atividade diagnóstica inicial com objetivo de identificar o grau de conhecimento dos participantes quanto ao conteúdo de divisibilidade. Em um segundo encontro seria realizado um jogo envolvendo conceitos de divisibilidade, com o objetivo de sanar as dificuldades de aprendizagem do conteúdo em questão. Em outro encontro faríamos a análise pós-jogo, e discussões a certa dos benefícios da metodologia aplicada, por fim, realizaríamos uma atividade diagnótica final, a fim de verificar se as dificuldades foram sanadas.

5.1.1 O jogo

O jogo escolhido foi: "Jogando com o múltiplos e divisores", que se encontra disponível no site do Laboratório de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de São José do Rio Preto. Através dele podem ser abordados, revisados e fixados vários conceitos matemáticos que incluem desde o sistema de numeração decimal, a adição de números naturais, conceitos básicos de múltiplos e divisores dos números naturais, critérios de divisibilidade até a aritmética modular.

O material necessário para cada mesa de jogos compreende: um tabuleiro, como na figura 5.1 , um dado, fichas ou marcadores de duas cores diferentes (uma para cada equipe), como na figura 5.2 e uma tabela de registro (uma para cada equipe), como na figura 5.3.

Regras do jogo

1. Decide-se a primeira equipe a jogar, no par ou ímpar, a equipe que ganhar será a equipe vermelha da tabela de registro e a outra será a equipe azul;
2. A primeira equipe joga o dado escolhe um número do tabuleiro que seja um múltiplo do número sorteado no dado, marcando-o com um dos seus marcadores. Se, ao lançar o dado, não houver múltiplos do número sorteado disponíveis para escolha, no tabuleiro, a equipe passa a vez;

[1] Em Anexo C

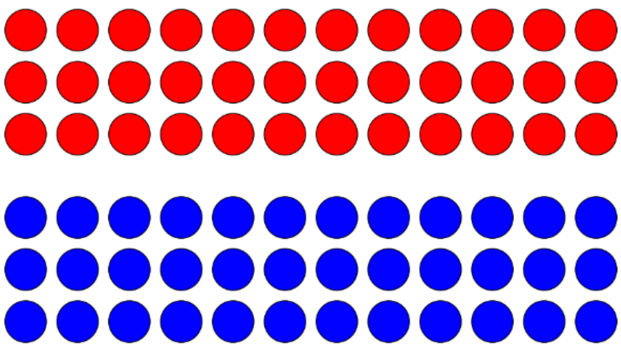
3. A segunda equipe marca com seus marcadores os divisores e múltiplos do número marcado pelo adversário e, em seguida, lança o dado e marca com seu marcador um novo número;
4. Se a equipe marcar um número que não é divisor ou múltiplo do último número assinalado pelo adversário, então, perde sua jogada e a equipe adversária ganha a pontuação do número marcado, passando a vez para a equipe adversária;
5. Cada número poderá ser marcado uma única vez;
6. Uma equipe não poderá marcar números após ter passado a sua vez;
7. A partida termina quando todos os números são marcados ou não houver possibilidade de finalizar uma rodada completa pelas duas equipes;
8. Os pontos de cada equipe será a soma de todos os números que ele marcou;
9. Vence a equipe que tiver mais pontos.

Figura 5.1: *Tabuleiro: Multiplos e divisores*

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50

Fonte: IBiILCE - Instito de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Figura 5.2: *Marcadores*



Fonte: IBiILCE - Instito de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Figura 5.3: *Tabela de registro de jogadas*

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª								
2ª								
3ª								

Fonte: PERRONI, 2021, p.16

5.2 Atividade diagnóstica inicial

No segundo momento, foi realizada uma atividade diagnóstica inicial que encontra-se no Apêndice A com o objetivo mapear o grau de conhecimento deles, frente ao objeto de conhecimento em questão. Antes de começarem a realização da atividade, relembramos alguns conceitos básicos sobre números primos e compostos, múltiplos e divisores, também os critérios de divisibilidade mais comuns. Os alunos foram aconselhados a lerem com calma, atenção e quantas vezes fossem necessárias as questões que fizessem o registro dos cálculos e até mesmo do raciocínio usado na resolução das questões. Também foi frisado que deveriam realizar de maneira autônoma sem ajuda dos colegas, dos livros ou da professora.

Na figura 5.4 podemos perceber a concentração dos alunos ao responder o questionário.

Figura 5.4: *Alunos respondendo questionário inicial*

Fonte: Autoria própria

Todos os alunos presentes realizaram a avaliação com muito empenho e num tempo hábil. Logo nas questões iniciais alguns alunos já apresentaram dúvidas, mas com apenas alguns lembretes e incentivos a releitura das questões muitos conseguiram resolver. Foi colocado no questionário algumas questões de olimpíadas. Nessas questões a maioria dos alunos apresentaram dificuldades, algo que acontece com muita frequência quando os alunos se deparam com problemas bem elaborados como os problemas olímpicos.

O próximo encontro foi a hora aguardada com muita ansiedade e empolgação pelos alunos: a hora do jogo!

5.3 A aplicação do jogo em sala de aula

Primeiramente foi apresentado o jogo, as regras e como deveriam fazer o registro na tabela. Formamos equipes com dois e três alunos e organizamos as mesas para que as equipes pudessem jogar.

O objetivo desta metodologia era estimular uma aprendizagem efetiva e divertida sobre a divisibilidade e alguns conceitos relacionados, o que contribuiria para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e sua compreensão dos conceitos de múltiplos e divisores e estimular a resolução de situações-problema. Além disso, a dinamização das aulas de matemática possibilitaria que os alunos participassem ativamente da construção de seus conhecimentos de forma prazerosa.

Logo no começo do jogo é notória a empolgação dos alunos. Os alunos levaram bem a sério a atividade lúdica desenvolvida. Entenderam que esta não era hora apenas para brincar, mas sim para aprender matemática brincando, como podemos ver na Figura 5.5.

Figura 5.5: *Alunos jogando*

Fonte: Autoria própria

Segundo Smole, o jogo não deve ser visto apenas como hora descanso ou passatempo. “Para que os alunos possam aprender e desenvolver-se enquanto jogam, é preciso que o jogo tenha nas aulas tanto a dimensão lúdica como educativa”. Ela destaca que:

> Todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos de matemática. Ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse. (Smole., 2007, p. 10).

Na hora do jogo a professora agia como observador e interferia apenas no que fosse realmente necessário, agindo assim como mediador do processo de descoberta do conhecimento, onde o aluno era o protagonista nesse processo de aprendizagem. As intervenções foram feitas por meio de questionamentos que levaram os alunos a refletir sobre suas jogadas. Com o passar das jogadas os alunos foram dominando e aperfeiçoando suas estratégias. A interação da equipe foi positiva para a tomada de decisões. Na ocasião em que isso não acontecia, a equipe acabava por não fazer uma boa jogada. Essa era uma oportunidade para o professor intervir e ensinar a importância de trabalhar em equipe, ouvir os colegas e aprender com os erros.

De fato,

> Podemos afirmar que, sem a interação social, a lógica de uma pessoa não se desenvolveria plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela se sente obrigada a ser coerente. Sozinha poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer e pela contingência do momento; porém no grupo, diante de outras pessoas, sentirá a necessidade de pensar naquilo que dirá, que fará, para que possa ser compreendida. (Smole, 2007, p.10).

Durante o jogo, os participantes puderam fazer várias descobertas. A primeira foi quanto à escolha de um "bom número", E qual seria esse bom número? De acordo com regra do jogo, a equipe adversária deveria marcar no tabuleiro todos os múltiplos e divisores do número escolhido. Aí a importância de escolher um "bom número". A princípio eles se preocuparam apenas na escolha de um número que tivesse poucos múltiplos e, ou divisores. Mas logo fizeram outra descoberta. Perceberam que às vezes escolhiam um número que tinham poucos múltiplos e, ou divisores, mas esses eram de valores maiores que o número escolhido. Logo a equipe adversária ficaria em vantagem com maior pontuação. Ou seja, o número escolhido não era um "bom número". Começaram a perceber que a melhor escolha seria um número maior que 25, pois este não teria múltiplos na tabela, e aquele que tivesse poucos ou nenhum divisor. Com isso perceberam que os números primos maiores que 25 eram ótimos números, pois não teriam divisores nem múltiplos, logo a equipe adversária não marcaria ponto. Boa jogada!

Um momento marcante foi quando saiu o número 1 no lançamento do dado de uma equipe. "E agora professora? O que faremos?" - indagou uma participante em voz alta e toda a sala parou para ver como ela lidaria com essa situação. Uma ocasião em que o professor deve agir como mediador para que o aluno seja o protagonista na construção do conhecimento.

Raciocinamos então que qualquer número da tabela é múltiplo de 1. Eles perceberam que sempre que saísse o número 1 no lançamento do dado, eles poderiam escolher qualquer número disponível na tabela. Agora era a hora de escolher um bom número! Mais uma vez perceberam que os maiores primos eram os melhores números.

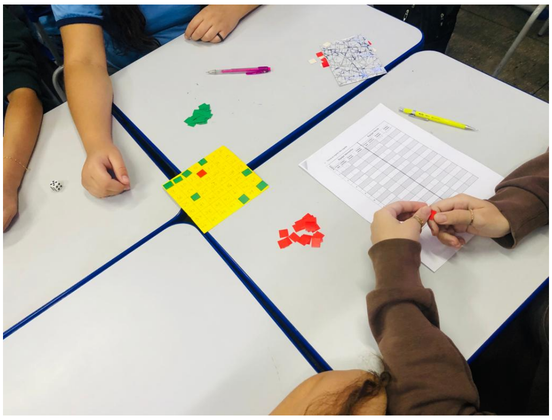
Este momento de discussão foi uma ótima oportunidade também para fazer uma avaliação da aprendizagem dos alunos.

Neste sentido, Smole sugere que:

> Durante o jogo, enquanto observa os alunos jogando, você pode pedir para que eles expliquem uma jogada, ou porque tomaram uma decisão e não outra, e até mesmo perguntar se não há uma jogada que dificulte a próxima ação. Vale a pena também se colocar como jogador em algumas ocasiões para observar como os alunos pensam, fazer uma jogada e discuti-la com o grupo no qual está jogando. (Smole, 2007, p.20).

Para finalizar o jogo fizemos a soma das pontuações de acordo com as anotações feitas na tabela, como mostra a Figura 5.6, e parabenizamos as equipes vencedoras. As equipes que perderam se sentiram desafiadas e queriam mais tempo para uma nova jogada. Mas infelizmente neste momento não foi possível.

Figura 5.6: *Mesa de jogos*



Fonte: Autoria própria

5.4 Após o jogo

Após a aplicação do jogo, em um próximo encontro, dedicamos um tempo para fazer uma análise oral do jogo, inspirada no trabalho de Perroni (2021).

Nesse momento onde situações foram simuladas, os alunos puderam analisar as jogadas possíveis, o que contribuiu para o desenvolvimento do pensamento crítico dos jogadores. As situações propostas foram as seguintes:

1. Imagine que sua equipe é a primeira a jogar e no lançamento do dado sai o número 1. Qual é a melhor escolha nesse caso, o número 47 ou o número 49? E por quê?
2. Imagine que os marcadores estejam posicionados como na Figura 5.7, e que você é o 2º jogador, peças verdes, e é a sua vez de jogar, você lança o dado e cai no número 3. Qual a melhor escolha nesta situação?

Figura 5.7: *Tabuleiro com preenchimento incompleto 1*

Fonte: PERRONI, 2021, p.65

3. Na situação seguinte, na sua vez de jogar, com os marcadores nas posições como na Figura 5.8, a dupla João e Maria tirou 2 no dado e escolheu o número 40 para sua dupla oponente marcar os múltiplos e divisores. Essa foi a melhor escolha que a dupla João e Maria poderiam fazer? Se não, qual a melhor escolha?
4. A dupla Ana e Ricardo estão num impasse, Ana quer marcar o número 39, pois diz que é um bom número por ser um número primo e Ricardo diz que 39 não é primo. Quem está certo(a)?
5. Quando se lança o dado a dupla que está jogando torce para sair o número 1, enquanto que a dupla oponente espera que o número seja 4. Por que tirar o número 1 é melhor do que tirar o número 4?

Os alunos interagiram bem diante dessas situações e até mesmo relembraram algumas de suas jogadas e expressaram sua ansiedade quanto a jogar novamente. Ficou evidente que, com o jogo, os conceitos de múltiplos, divisores e números primos ficaram bem definidos e agora, devido a essa ludicidade, dificilmente serão esquecidos. O mesmo pode-se perceber quanto aos critérios de divisibilidade que muitos utilizaram para agilizar as jogadas.

Figura 5.8: *Tabuleiro com preenchimento incompleto 2*

Fonte: PERRONI, 2021, p.65

5.5 Atividade diagnóstica final

Por fim, foi feita uma atividade diagnóstica final, questionário que encontra-se no Apêndice B, com o objetivo de avaliar os resultados da intervenção pedagógica aplicada, e analisar se o desempenho geral da turma melhorou em relação à avaliação inicial. Nessa atividade, assim como na primeira, deixamos os alunos à vontade para resolver as questões sem pressa e sempre recorrendo aos conceitos aprendidos, revisados e memorizados agora através do jogo.

Figura 5.9: *Alunos respondendo questionário final*

Fonte: Autoria própria

Observando os alunos, percebemos que, apesar de realizarem a atividade proposta com atenção como podemos notar na Figura 5.9, muitos ainda apresentaram dificuldades em resolver problemas de olimpíadas contidos no questionário. Diante disso, houve a necessidade de dedicar um tempo para se ensinar estratégias de resolução desse tipo de problema.

Tendo em vista esta dificuldade, e visto que a aritmética modular pode facilitar a resolução desse tipo de questões, foi feita uma exposição oral simples e objetiva do conteúdo de congruência modular, o que ajudou os alunos a trabalhar com os restos da divisão a fim solucionar problemas. Os alunos ficaram empolgados em aprender algo novo e partimos para a solução de algumas questões retiradas do banco de dados do portal da OBMEP, e outras de autoria própria que podem ser solucionadas usando a congruência modular. Lemos, analisamos, discutimos e resolvemos algumas das questões que encontra-se na seção 3.2.1 do Capítulo 3.

5.6 Análise da intervenção

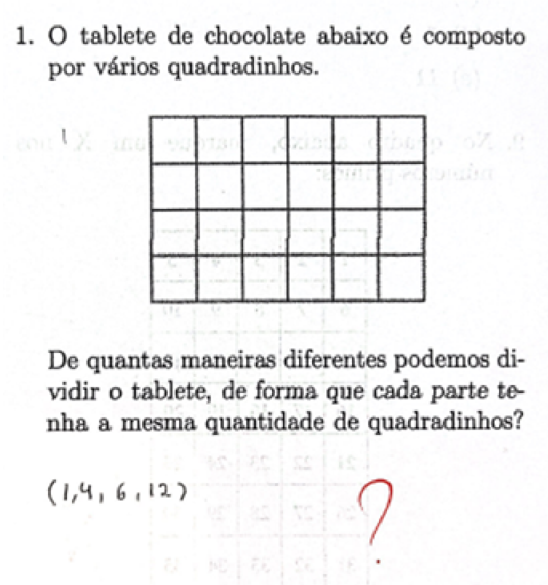
Este relato de experiência da intervenção pedagógica, mostrou que a inovação das metodologias de ensino com certeza contribui de maneira positiva para o processo de aprendizagem. Ao realizar a análise qualitativa do questionário inicial, analisamos a qualidade da solução das questões, ou seja, os meios que os alunos utilizaram para solucionar as questões. Essa análise mostrou que, metodologias tradicionais que haviam sido adotadas anteriormente, não resultaram positivamente no processo de aprendizagem. Pois, apesar dos alunos realizarem a atividade com muito empenho, muitos apresentaram diversas dificuldades tais como: lembrarem de conceitos e "regrinhas"; entender e solucionar os problemas, em especial os retirados das olimpíadas; e até mesmo na realização de operações básicas como a multiplicação e divisão. Além disso, foi evidente o quanto os alunos ficam entediados e se cansam ao resolver listas extensas de exercícios.

Uma vez identificadas essas dificuldades, elas foram destacadas na hora do jogo com o objetivo de saná-las, transformando essas dificuldades em estratégias de jogo. O resultado foi muito positivo. Foi notória a interação e empolgação dos alunos. O jogo despertou a atenção, interesse, concentração, disciplina, respeito e interação social entre os discentes. Eles puderam compreender os conceitos antes não entendidos de maneira autônoma, desafiadora e natural. De fato, o aluno só aprende aquilo que é interessante para ele.

Daí a importância de tornar a matemática atrativa e divertida, com o objetivo de conduzir à aprendizagem. Vale ressaltar que, diferentemente da aula tradicional em que o aluno fica contando os segundos para acabar, usando metodologias inovadoras, os alunos nem viram o tempo passar, e até expressaram o desejo que a aula durasse mais tempo.

Ao analisar a qualidade das resoluções do questionário final, percebeu-se que houve uma melhora na qualidade da resolução de algumas questões em comparação com o questionário inicial. Por exemplo na Figura 5.10 vemos uma questão proposta na atividade diagnóstica inicial e observamos que o aluno não conseguiu solucionar corretamente a questão.

Figura 5.10: *Questão 1 da atividade diagnóstica inicial*


1. O tablete de chocolate abaixo é composto por vários quadradinhos.

De quantas maneiras diferentes podemos dividir o tablete, de forma que cada parte tenha a mesma quantidade de quadradinhos?

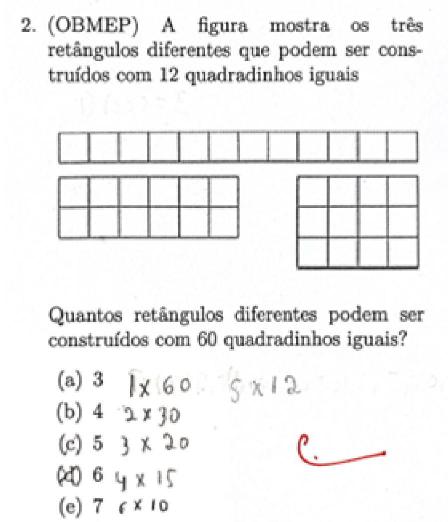
(1,4,6,12)

?

Fonte: Autoria própria

No entanto, no questionário final em uma questão com o mesmo raciocínio o mesmo aluno agora conseguiu solucionar corretamente e expressar bem seu raciocínio, como podemos ver na gravura 5.11.

Figura 5.11: *Questão 2 da atividade diagnóstica final*


2. (OBMEP) A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais

Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?

(a) 3 1x60 5x12
(b) 4 2x30
(c) 5 3x20
(d) 6 4x15
(e) 7 6x10

C

Fonte: Autoria própria

Em geral, nas questões onde devia-se aplicar conceitos básicos de divisibilidade que foram trabalhados no jogo, como as regrinhas de divisibilidade e conceitos de múltiplos, divisores e números primos, houve maior número de acertos.

Ademais, tratando-se de instrumento de ensino e avaliação, o uso de jogos, nesta experiência de intervenção, mostrou-se mais eficaz do que a resolução dos questionários. Pois no jogo, percebemos que os alunos mostraram maiores habilidades de raciocínio e cálculos, competências para resolução de problemas e, persistência e seriedade em busca das melhores soluções, do que na resolução dos questionários.

Nesta perspectiva, de acordo com Moura (1994, apud Alves, 2001), o aluno, por meio do jogo desenvolve suas habilidades de resolução de problemas matemáticos, estabelecendo planos de ação para alcançar seus objetivos e avaliando os resultados, o que auxilia a construção de conhecimentos mais elaborados dos alunos, o que não é possível quando a avaliação fica condicionada apenas a testes e provas escritas.

Também os PCNs incentivam o uso de jogos como instrumento avaliativo em Matemática.

> [...] na interpretação e na abordagem dos conteúdos matemáticos implicam repensar sobre as finalidades da avaliação, sobre o que e como se avalia, num trabalho que inclui uma variedade de situações de aprendizagem, como a resolução de problemas, o trabalho com jogos, [...] Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação [...] constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados [...]. (BRASIL, 1998, p.41.)

Portanto, comprovamos a importância da inserção dos jogos no planejamento das aulas de matemática como metodologias ativas de ensino, e instrumento de avaliação. Pois, sem dúvida, é possível ensinar brincando, jogando, divertindo, e principalmente, de maneira que o aluno seja o protagonista no processo de ensino e aprendizagem, construindo-se conhecimento de forma descontraída, prazerosa e acertiva.

Conclusão

O mundo atual requer a formação de indivíduos críticos, criativos, hábeis em tomar decisões, autoconfiantes, capazes de trabalhar cooperativamente juntos a um grupo, que tenham um raciocínio lógico aguçado, aptos para resolver com agilidade diferentes tipos de situações problema e com a capacidade de encarar o erro como um caminho para novas descobertas.

A fim de suprir tais exigências, a escola deve se preocupar em aprimorar o conhecimento e as metodologias de ensino de modo a formar indivíduos capazes de responder aos requisitos deste novo tempo. Para manter a qualidade do ensino é necessário que o professor invista em sua na formação continuada, desta forma ele realizará melhor o seu trabalho pedagógico tornando suas aulas mais atrativas e atuais.

Nesse sentido, a título de formação continuada e pós-graduação, o Mestrado Profissional em Matemática é um programa que atende prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, e tem por objetivo o aprofundamento da formação profissional do professor, com ênfase no domínio de conteúdos matemáticos relevantes para sua docência. As disciplinas do curso e as pesquisas sugeridas para a elaboração do trabalho de conclusão de curso, tem como objetivo não apenas o aprofundamento de conteúdos específicos pertinentes ao currículo de matemática da educação básica, mas também o aprimoramento da prática docente por meio de aplicações práticas. Com certeza, todo esse aprendizado contribuiu para auto-avaliar minha prática docente, afim de torná-la mais dinâmica e atraente, visando a melhoria no aprendizado, além de enriquecer a teoria matemática ampliando assim o conhecimento dos alunos.

Espera-se que este trabalho sirva de fonte de pesquisa para professores que desejam aprofundar seu conhecimento matemático e queiram inovar suas metodologias de ensino. Pois, ele foca e revisa objetos de conhecimento propostos para o ensino básico e que apresenta estes temas de maneira sucinta e direcionada, além de trazer sugestões de metodologias diferenciadas de ensino.

Este trabalho trouxe uma reflexão quanto a pertinência da apresentação de conteúdos, não necessariamente previstos nos PCNs e na BNCC, mas que quando apresentados com bom planejamento, podem ser ferramentas facilitadoras no processo de ensino e aprendizagem da matemática, como a congruência modular.

Como foi apresentado neste trabalho, a matemática é temida por muitos alunos, o que gera um bloqueio intelectual prejudicando a aprendizagem efetiva desta disciplina tão importante. No entanto, como foi ressaltado, é possível mudar este quadro, com a utilização do lúdico em sala de aula. Vimos na prática que um recurso lúdico bastante eficaz no ensino é o jogo, pois é indiscutível a motivação que ele desenvolve nos alunos, além de criar um ambiente agradável e descontraído, de forma que os alunos aprendem brincando. Nesta proposta, o aluno não será aquele que cumpre mecanicamente as atividades propostas, mas sim o sujeito que questiona, investiga, cria estratégias de solução e testa suas estratégias, enfrenta os desafios e que é capaz de utilizar diferentes alternativas para a resolução de um determinado problema.

De fato, trabalhar com jogos na sala de aula não é uma tarefa fácil, requer tempo, preparação, material e estudo. Apesar disso, é uma tarefa compensadora, pois os resultados, como evidenciados, são válidos.

Em suma, acreditamos ser possível ensinar brincando, jogando, divertindo, sentindo prazer e principalmente construindo conhecimento. Neste trabalho, verificamos que a utilização dos jogos em sala de aula torna o conteúdo mais interessante para os alunos, e que o conhecimento pode sim ser adquirido de forma autônoma, sendo o estudante o protagonista do processo de ensino aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, Eva Maria Siqueira. *A ludicidade e o ensino de Matemática*, Campinas/SP: Papirus, 2001.

[2] BEZERRA, Nazaré. *Teoria dos números: Um Curso Introdutório*. 1ª Edição. Belém: Editora EditAedi, 2018.

[3] BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

[4] BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] BORIN, Júlia. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.* São Paulo: IME/USP, 1996.

[6] CIRÍACO, Flávia Lima.*Utilizando jogos para ensinar Matemática.* Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 22, nº 34, 13 de setembro de 2022. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/34/utilizando-jogos-para-ensinar-matematica. Acesso em 25 de jan. de 2023.

[7] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson.*Álgebra Moderna.*São Paulo: Saraiva, 2003.

[8] GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. *A conquista da matemática: 6º ano.* São Paulo: FTD, 2018.

[9] GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. Tese (Doutorado) - Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

[10] GRANDO, Regina Célia. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.* 1º edição. São Paulo: Paulus, 2004.

[11] HEFEZ, Abramo *Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[12] HUNGERFORD, Thomas W. *Abstract Algebra an introduction.* 2ª Edição. Boston: Brooks/Cole, 2014.

pq

[13] IBILCE. *Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual de São Paulo*, Campus São José do Rio Preto, 2018. Página de Eventos - 2º CEJTA - Brincando com múltiplos e divisores. Disponível em <https://www.ibilce.unesp.br/!/departamentos/matematica/eventos/2-cejta/regras-dos-jogos/6-ano—brincando-com-multiplos-e-divisores/>. Acesso em: 18 de abr. de 2022.

[14] NETO, Oséas Guimarães Ferreira. *Aplicações de divisibilidade e congruência modular: do ensino básico ao superior*. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal do Pará, Bragança, 2021.

[15] OLIVEIRA, Krerly Irraciel Martins, FERNÁNDEZ, Andán José Corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números.* 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[17] SILVA, Jefson Glowascki da. *Divisibilidade no Ensino Fundamental: uma proposta com abordagem usando questões da OBMEP.* Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

[18] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela.*Cadernos do Mathema: Jogos de matemática de 6º a 9º ano.* Porto Alegre: Artmed, 2007.

[19] OBMEP – PROVAS E SOLUÇÕES.*Disponível em: http:www.obmep.org.br/provas.htm.* Acesso em: 18 de abril de 2022.

[20] SOUZA, Leticia Vasconcellos de. *Congruência modular nas séries finais do ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências exatas.Juiz de Fora.2015.

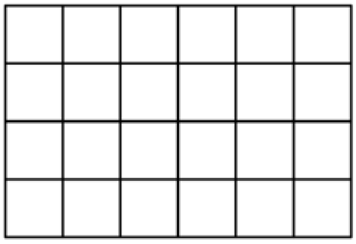
[21] PERRONI, Priscila Moreda. *Brincando com múltiplos e divisores: O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula.* Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, São José do Rio Preto, 2021.

APÊNDICE A

Questionário Inicial

Atividade Diagnóstica Inicial

1. O tablete de chocolate abaixo é composto por vários quadradinhos.



De quantas maneiras diferentes podemos dividir o tablete, de forma que cada parte tenha a mesma quantidade de quadradinhos?

2. Assinale a alternativa verdadeira:

   (a) Todo número divisível por 2 também é divisível por 4.
   (b) Todo número divisível por 8 também é divisível por 2.
   (c) Existe número ímpar que é divisível por 2.
   (d) Todo número cuja algarismo das unidades é 3 é divisível por 3.
   (e) Se a soma dos algarismos de um número é divisível por 7, então esse número é divisível por 7.

3. Qual dos números abaixo é divisível por 5?

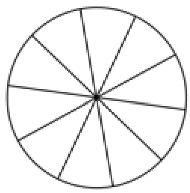
   (a) 32
   (b) 33
   (c) 35
   (d) 36
   (e) 38

4. Uma antiga brincadeira de programa de auditório consistia em um convidado da plateia dizer à sequência dos números naturais, substituindo os múltiplos de 4 pela palavra ”PIM”, ou seja, dizer a sequência: 1, 2, 3, PIM, 5, 6, 7, PIM, 9, e assim por diante. O convidado perdia se errasse a sequência. Dona Zoraide perdeu quando disse ...45, PIM, 47. Explique por que ela perdeu.

5. Qual dos números abaixo é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e 3?

(a) 334
(b) 335
(c) 336
(d) 337
(e) 338

6. Marcos e seus amigos foram a uma pizzaria. Ao chegar a pizza, conforme a figura, eles perceberam que poderiam dividi-la igualmente sem que sobrasse nenhum pedaço.



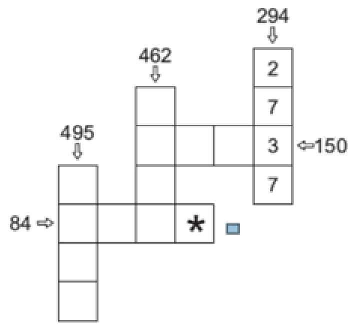
Qual alternativa indica uma possível quantidade de pessoas que dividiram a pizza?

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
(e) 7

7. Qual dos números abaixo é divisível por 9?

(a) 361
(b) 364
(c) 365
(d) 368
(e) 369

8. (OBMEP) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?



(a) 2
(b) 3
(c) 5
(d) 7
(e) 11

9. No quadro abaixo, marque um X nos números primos:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

10. Uma sala de aula tem 39 alunos. Ela deve ser dividida em grupos com a mesma quantidade de alunos. Qual é a maior quantidade de grupos possível?

(a) 9
(b) 12
(c) 13
(d) 15
(e) 16

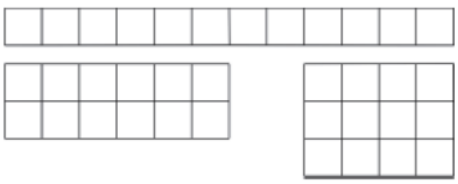
APÊNDICE B

Questionário Final

Atividade Diagnóstica Final

1. Qual dos números abaixo não é múltiplo de 15?
   (a) 135
   (b) 315
   (c) 55
   (d) 785
   (e) 915

2. (OBMEP) A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais



   Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?
   (a) 3
   (b) 4
   (c) 5
   (d) 6
   (e) 7

3. (OBMEP) Uma turma tem 36 alunos e cada um deles tem um número de 1 a 36 na lista de chamada. Ontem, a professora chamou Lia ao quadro negro e mais os outros seis alunos cujos números eram múltiplos do número de Lia. Qual foi o maior número chamado?
   (a) 14
   (b) 20
   (c) 25
   (d) 32
   (e) 35

4. (OBMEP) Juliana tem 8 cartões de papelão, retangulares e iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntado apenas lados de mesma medida, a maior fila que ela poderá obter terá comprimento 176 cm e a menor terá comprimento 96 cm. Qual é o perímetro de cada cartão?
   (a) 54 cm
   (b) 68 cm
   (c) 76 cm
   (d) 80 cm
   (e) 96 cm

5. (Olimpíada Canguru) Uma caixa tem menos de 50 biscoitos. Os biscoitos da caixa podem ser divididos

igualmente por 2, 3 ou mesmo 4 crianças. Entretanto, os biscoitos não podem ser divididos igualmente entre 7 crianças, porque para isso ser possível, serão necessários mais 6 biscoitos. Quantos biscoitos há na caixa?

(a) 12
(b) 24
(c) 30
(d) 36
(e) 48

6. É divisível por **2**, **3** e **5** simultaneamente o número:

(a) 235
(b) 520
(c) 230
(d) 510
(e) 532

7. Um ano é bissexto (fevereiro tem 29 dias) quando o número que representa o ano é divisível por 4 ou, no caso dos anos terminados em 00, é divisível por 400. Qual dos anos abaixo não é bissexto?

(a) 1600
(b) 1800
(c) 1872
(d) 1996
(e) 2016

8. O número $12c5$ é divisível por 3 e por 5.Qual é a soma dos possíveis algarismos que c pode assumir?

9. Num país, a eleição para presidente ocorre a cada 5 anos e para prefeito, a cada 4 anos. Se em 2012 houve coincidência das eleições para esses cargos, qual o próximo ano em que elas voltarão a coincidir?

(a) 2020
(b) 2022
(c) 2025
(d) 2028
(e) 2032

10. Um número é chamado de perfeito quando é igual à soma de seus divisores próprios. Qual dos números abaixo é um número perfeito?

(a) 7
(b) 12
(c) 18
(d) 28
(e) 30

APÊNDICE C

Termos de Consentimento e Assentimento

Seguem os termos apresentados

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROFMAT MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL UFG

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TALE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa associada à dissertação intitulada "A divisibilidade no ensino fundamental por meio de jogos". Meu nome é *Juliana de Oliveira Souza Gomes,* sou o(a) pesquisador(a) responsável e minha área de atuação é Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra ficará comigo. Esclareço que em caso de recusa na participação, em qualquer etapa da pesquisa, você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo(a) pesquisador(a) responsável, via e-mail *dejuliana@discente.ufg.br* e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do telefone *(62)99321-7582*. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (62)3521-1215, que é a instância responsável por dirimir as dúvidas relacionadas ao caráter ético da pesquisa. O Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás (CEP-UFG) é independente, com função pública, de caráter consultivo, educativo e deliberativo, criado para proteger o bem-estar dos/das participantes da pesquisa, em sua integridade e dignidade, visando contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos vigentes.

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver no aluno o raciocínio lógico, a compreensão dos conceitos de múltiplos e divisores e estimular a resolução de situações-problema e dinamizar as aulas de matemática de modo que os alunos participem ativamente da construção de seus conhecimentos de forma prazerosa. Você será convidado primeiramente a responder um questionário, com o objetivo de mapear o seu grau de conhecimento sobre o conteúdo. Em um segundo momento você será convidado a participar de uma atividade lúdica, um jogo envolvendo conceitos de divisibilidade. Após a análise do jogo você será convidado a responder um questionário final. Pretende-se com este questionário verificar se a intervenção por meio dos jogos sanou as dificuldades apresentadas no questionário inicial. O projeto será executado durante as aulas de matemática, contemplando um total de 5 aulas.

O desenvolvimento dessa pesquisa oferece risco ínfimo à integridade física, moral, intelectual e emocional. Sua participação é voluntária e livre de qualquer remuneração ou benefício. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A recusa em participar não acarretará qualquer penalidade. Caso sinta algum desconforto emocional, constrangimento, intimidação, angústia, mal-estar, irritação entre outros, você poderá desistir de sua participação na pesquisa. Em contrapartida, sua participação trará benefícios, tais como, contribuição para formação docente de outros profissionais e potencialização de práticas pedagógicas na educação básica.

Durante todo o período da pesquisa e na divulgação dos resultados, sua privacidade será respeitada, ou seja, seu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de alguma forma, identificar-lhe, será mantido em sigilo. As informações desta pesquisa são confidenciais e os dados coletados serão divulgados apenas em eventos, relatórios e/ou publicações acadêmicas e científicas. Todo material ficará sob minha guarda por um período mínimo de cinco anos.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos sua opinião em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

( ) Permito a divulgação da minha opinião nos resultados publicados da pesquisa.

( ) Não permito a divulgação da minha opinião nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver também a necessidade de utilizarmos sua imagem em publicações, faça uma rubrica entre os parênteses da opção que valida sua decisão:

( ) Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

( ) Não Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

Pode haver necessidade de dados coletados em pesquisas futuras, desde que seja feita nova avaliação pelo CEP/UFG. Assim, solicito a sua autorização, validando a sua decisão com uma rubrica entre os parênteses abaixo:

( ) Permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

( ) Não permito a utilização desses dados para pesquisas futuras.

Declaro que os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não. Os resultados de sua participação poderão ser consultados por você a qualquer momento, bastando manifestar interesse. Informamos que você tem o direito de pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros), garantida em lei, decorrentes da sua participação na pesquisa.

Consentimento da Participação na Pesquisa:

Eu,____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo desenvolvido pelo projeto intitulado "A divisibilidade no ensino fundamental por meio de jogos". Informo que tenho _____ anos de idade e destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) responsável *Juliana de Oliveira Souza Gomes* sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo, bem como sobre as garantias de assistência, confidencialidade e esclarecimentos permanentes. Também estou ciente que minha participação é isenta de despesas e poderei retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade, prejuízos ou perdas. Estou ciente de que os resultados desta pesquisa, favoráveis ou não, serão tornados públicos. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito

Inhumas, ___ de ____________ de 20___.

____

Assinatura por extenso do(a) participante

____

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROFMAT MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL UFG

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE - PAIS/RESPONSÁVEIS

Você/Sr./Sra, na qualidade de responsável por ____, está sendo convidado(a) a consentir que o(a) menor participe, como voluntário(a), da pesquisa intitulada "A divisibilidade no Ensino Fundamental por meio de jogos". Meu nome é Juliana de Oliveira Souza Gomes , sou o(a) pesquisador(a) responsável e minha área de atuação é Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você consentir na participação do(a) menor sob sua responsabilidade nesse estudo, rubrique todas as páginas e assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence (ao)à pesquisador(a) responsável. Esclareço que em caso de recusa de participação, não haverá penalização para nenhuma das partes. Mas se consentir, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo(a) pesquisador(a) responsável, via e-mail dejuliana@discente.ufg.br e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do telefone (62) 993217582. Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (62)3521-1215, que é a instância responsável por dirimir as dúvidas relacionadas ao caráter ético da pesquisa. O Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás (CEP-UFG) é independente, com função pública, de caráter consultivo, educativo e deliberativo, criado para proteger o bem-estar dos/das participantes da pesquisa, em sua integridade e dignidade, visando contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos vigentes.

A presente pesquisa tem como objetivo geral desenvolver no aluno o raciocínio lógico, a compreensão dos conceitos de múltiplos e divisores e estimular a resolução de situações-problema. A participação do(a) menor sob sua responsabilidade é importante para a realização desta pesquisa. Primeiramente ele(a) será convidado(a) a responder um questionário, com o objetivo de mapear o grau de conhecimento sobre o conteúdo. Em um segundo momento ele(a) será convidado(a) a participar de uma atividade lúdica, um jogo envolvendo conceitos de divisibilidade. Após a análise do jogo o(a) participante será convidado(a) a responder um questionário final. Pretende-se com este questionário verificar se a intervenção por meio dos jogos sanou as dificuldades apresentadas no questionário inicial. O projeto será executado durante as aulas de matemática, contemplando um total de 5 aulas.

Caso o menor se sinta constrangido(a), é garantida a total liberdade de recusar a participar ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem penalidade alguma.

A participação na pesquisa será voluntária, portanto, não haverá despesas pessoais ou gratificação financeira decorrente da participação, caso haja despesas, elas serão ressarcidas. Caso ocorra algum dano, o direito a pleitear indenização para reparação imediata ou futura, decorrentes da cooperação com a pesquisa está garantido em Lei.

O sigilo e anonimato da sua autorização e da participação da criança (ou adolescente) na pesquisa será preservada. A divulgação do nome dele(a) somente acontecerá se for permitida por você, solicito que rubrique no parêntese abaixo a opção de sua preferência:

( ) Permito a identificação do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

( ) Não permito a identificação do(a) menor sob minha responsabilidade nos resultados publicados da pesquisa.

Eu,____, abaixo assinado, concordo que meu(minha) filho(a) participe do estudo intitulado "A divisibilidade no ensino fundamental por meio de jogos". Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que a participação dele(a) nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) responsável Juliana de Oliveira Souza Gomes, sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele(a) no estudo, bem como sobre as garantias de assistência, confidencialidade e esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que a participação dele(a) é isenta de despesas e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade, prejuízos ou perdas e ainda estou ciente de que os resultados desta pesquisa sejam favoráveis ou não, serão tornados públicos. Declaro, portanto, que concordo com a participação dele(a) no projeto de pesquisa acima descrito.

Inhumas, ___ de ____________ de 20___.

____

Assinatura por extenso do(a) responsável

____

Assinatura por extenso do(a) pesquisador(a) responsável

Testemunhas em caso de uso da assinatura datiloscópica

____

Testemunha 1

____

Testemunha 2