JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

A RELEVÂNCIA DO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO NA OPINIÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
AGOSTO DE 2013

JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

A RELEVÂNCIA DO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO NA OPINIÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
AGOSTO DE 2013

JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

A RELEVÂNCIA DO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO NA OPINIÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 12 de Agosto de 2013.

Profª. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF

Profª. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IF Fluminense

Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico essa dissertação a minha mãe por investir tanto de si em mim. Muito obrigada.

Agradecimentos

Agradeço a Jesus, em quem estão todas as fontes da sabedoria e do conhecimento, por me permitir e capacitar a chegar até aqui.

A minha família por tanto amor e incentivo.

A Marcio Fillipe pelo apoio e pelas muitas vezes que abriu mão de estarmos juntos para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

Ao professor Oscar Paz por ter aceito me orientar.

As professoras Carmem Lúcia, Gilmara Barcelos, Juliana Barreto e Vera Lucia Fazoli pelas valiosas sugestões e críticas.

A colega Mylane Barreto pela ajuda com o LateX.

Aos professores e colegas de curso, por todo aprendizado e convívio.

Resumo

Tradicionalmente o conjunto dos números complexos é estudado no Ensino Médio, no entanto, não há um consenso sobre a relevância do estudo desse conjunto nesse nível de escolaridade. Ainda que conste nos livros didáticos, não está contemplado, por exemplo, na matriz de referência do Exame Nacioal do Ensino Médio (ENEM). Este trabalho objetivou descobrir a opinião dos professores de Matemática sobre este assunto e os fatores que influenciam esta opinião. Para isso, foi realizada uma pesquisa quantitativa com professores de Matemática que atuam no Ensino Médio. Também foram analisados livros didáticos e documentos que orientam a elaboração do currículo de Matemática. Os resultados da pesquisa apontaram que a maioria dos professores considera o ensino de números complexos relevante para o Ensino Médio. Os livros didáticos e os documentos oficiais tratam do tema, mas há uma tendência em considerá-lo opcional. Os resultados apontaram ainda que a falta ou o desconhecimento de aplicações compreensíveis para alunos do Ensino Médio é um dos principais fatores considerados ao se julgar a relevância do ensino de números complexos.

Palavras-chaves: Números complexos. Professor. Aplicações.

Abstract

Traditionally the set of complex numbers is studied in high school, however, there is no consensus about its relevance at this Educational Stage. Even Though it appears in textbooks, there isn't any reference to it within ENEM's (Brazilian High School National Exam) syllabus. This study aimed to find out Mathematics teachers' opinions on this issue and which factors influence those opinions. To that end, we performed a quantitative study with mathematics teachers who work at high school. Textbooks and documents that guide the development of the mathematics curriculum were also analyzed. The survey results indicated that most teachers consider the teaching of complex numbers relevant to high school. Textbooks and official documents deal with the issue but there is a tendency to consider it optional. The results also indicated that the absence or lack of understandable applications for high school students is one of the main factors considered when judging the relevance of teaching complex numbers.

Key-words: Complex Number. Teacher. Aplications.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio é questionada por alunos e professores. O cálculo da raiz quadrada de um número negativo, a resolução de equações polinomiais e o vestibular são respostas que não convencem muitos alunos do estudo, por vezes sem significância, desse tópico da Matemática. Afinal, para extrair a raiz quadrada de um número negativo bastaria saber que $i^2 = -1$. Além disso, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que hoje é a porta de acesso a muitas das universidades públicas no país, não contempla em sua matriz os números complexos.

Apesar das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) reconhecerem que tradicionalmente os números complexos compõem o currículo da Matemática, não consideram este tema indispensável, podendo "ser tratado na parte flexível do currículo das escolas", pois "isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área"(BRASIL, 2007, p.122).

Durante o mestrado, na disciplina Polinômios e Equações Algébricas, o estudo do conjunto dos números complexos foi retomado e aprofundado. E após uma palestra sobre o ensino deste conjunto numérico, foi solicitado aos discentes um trabalho sobre o mesmo que contemplasse sua história e aplicações, estendendo para os quatérnios.

Esse trabalho motivou uma pesquisa sobre aplicações dos números complexos e dos quatérnios que fossem acessíveis a alunos do Ensino Médio.

No entanto, durante o levantamento bibliográfico, uma dúvida persistia: Qual é a opinião dos professores de matemática sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio? Eles o consideram relevante? Por quê? Qual é a resposta dada por eles aos seus alunos? Assim, o foco da pesquisa foi alterado e enveredou-se por um novo caminho.

Deste modo, delinea-se o objetivo da pesquisa: descobrir a opinião dos professores de matemática sobre a relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio; as razões e os fatores que influenciam esta opinião e de que forma essa visão interfere o modo do professor abordar o tema em sala de aula.

Outras pesquisas já foram realizadas com o objetivo de investigar as concepções dos professores de Matemática sobre a Matemática ou temas específicos e a influência dessas concepções no trabalho docente.

Linardi (2006) pesquisou de que maneira os conhecimentos matemáticos adquiridos durante a licenciatura organizam a prática docente dos professores de Matemática.

Ferreira(2009) investigou a compreensão e concepção dos professores sobre Álgebra e como elas ressoam na concepção dos alunos sobre esse tema.

Braga (2009) investigou o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, na visão de professores de Matemática do Ensino Médio.

Novaes (2011) analisou as concepções de professores de Matemática da Educação Básica sobre objetos da Estatística Descritiva na elaboração e execução de sequências didáticas sobre esse tema.

O presente trabalho está estruturado em sete capítulos.

No Capítulo 1, **O conjunto dos números complexos**, fazemos um apanhado histórico do surgimento e estabelecimento desse conjunto e em seguida apresentamos a definição do mesmo e das operações.

No Capítulo 2, **Metodologia de pesquisa**, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados e o instrumento de coleta de dados.

O Capítulo 3, **Pesquisa com professores**, traz os resultados da pesquisa e a análise dos mesmos.

O Capítulo 4, **Análise de livros didáticos**, tem em vista verificar como os números complexos são abordados e de que forma esses livros podem influenciar a opinião e o tratamento dado pelo professor a esse tópico.

O Capítulo 5, **Os números complexos nos documentos oficiais**, analisa documentos oficiais que orientam a elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio.

No Capítulo 6, **A relevância dos números complexos na Matemática e em outras Ciências**, são apresentadas algumas aplicações dos números complexos.

No Capítulo 7, **Considerações finais**, são tecidas as considerações finais sobre trabalho.

Capítulo 1

O conjunto dos números complexos

Neste capítulo apresentaremos alguns fatos históricos que contribuíram para o "surgimento" e estabelecimento dos números complexos. Posteriormente, definiremos o conjunto e suas operações, com ênfase no significado geométrico.

1.1 História dos números complexos

Nas linhas que se seguem procuraremos pontuar alguns fatos e aspectos importantes que contribuíram para que, historicamente, os "imaginários" (como eram chamados os números complexos no século XVIII) ganhassem o status de número que conhecemos hoje. Essa história se mistura à evolução do conceito de número e do desenvolvimento da matemática.

Muitos professores e livros didáticos introduzem o estudo dos números complexos com a resolução de equações quadráticas de raízes não reais. No entanto, historicamente, essas equações não motivaram a "descoberta" desse novo conjunto numérico. Essa descoberta foi motivada pela resolução das equaçoes cúbicas.

Segundo Júnior (2009), as equações quadráticas que apareciam na matemática grega eram resultantes de problemas geométricos que utilizavam, por exemplo, círculos e parábolas. Os problemas que não pudessem ser resolvidos por meio dessas construções eram considerados sem solução.

Entre os árabes, soluções não reais de equações quadráticas continuaram não sendo admitidas, pois eles, assim como os gregos, justificavam geometricamente seus métodos algébricos.

> Mesmo quando as equações quadráticas já eram resolvidas por métodos de solução por radicais, sempre que a fórmula levava a resultados associados a números negativos ou a raízes quadradas de números negativos, indicava-se a inexistência de soluções (JÚNIOR, 2009, p. 11, 12).

Há registros na matemática grega de problemas envolvendo as equações cúbicas. Júnior (2009) cita como exemplo o problema clássico da duplicação do cubo, que consistia em encontrar duas médias proporcionais entre o comprimento da aresta de um cubo dado e o dobro da medida dessa aresta. Esta situação pode ser traduzida, por $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Outro exemplo apresentado em Júnior (2009) encontra-se na *Aritmética de Diofanto*. Esse problema escrito em linguagem atual corresponde à equação $x^3 + x = 4x^2 + 4$. O número 4 é dado como solução, porém não se sabe como ela foi encontrada.

Matemáticos árabes também contribuíram na solução de alguns tipos de equações cúbicas. Sesiano (2009) cita o matemático persa Umar ibn Ibrahim al-Khayyami (cerca de 1048 - 1130), mais conhecido como Omar Khayyam Em seu livro de álgebra Omar Khayyam além de resolver aritmética e geometricamente seis equações (lineares e quadráticas), também resolveu geometricamente equações cúbicas (para ele essas equações não podiam ser resolvidas aritmeticamente). Este livro reuniu e completou estudos anteriores sobre equações cúbicas.

As cúbicas eram representadas por diversos casos particulares envolvendo apenas coeficientes positivos que levavam à soluções positivas. Para construir essas soluções Omar Khayyam usava circunferências, hipérboles e parábolas. Um exemplo encontrado em Sesiano (2009) é a equação $x^3 + bx = c$, que era apresentada retoricamente como "um cubo e lados [do cubo] são iguais a um número". Tomando $p = \sqrt{b}$ e $q = \frac{c}{b}$, reescreve-se a equação na forma $x^3 + p^2x = p^2q$. Traçam-se a semicircunferência de diâmetro q e a parábola de (duplo) parâmetro p e vértice intersectando perpendicularmente a semicircunferência em um ponto extremo do diâmetro (Figura 1).

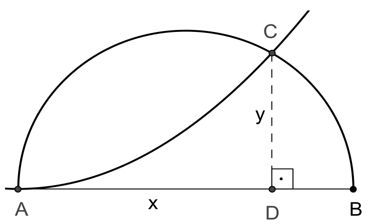


Figura 1: Construção geométrica da solução da equação $x^3 + p^2x = p^2q$.
Fonte: autora.

Considerando o triângulo retângulo ABC inscrito na semicircunferência tem-se que: $\frac{q-x}{y} = \frac{y}{x}$.

Além disso, pela propriedade da parábola: $\frac{y}{x} = \frac{x}{p}$.

Logo, $\frac{q-x}{y} = \frac{x}{p} \Rightarrow pq - px = xy = \frac{x^3}{p} \Leftrightarrow x^3 + p^2x = p^2q$.

Isto é, o segmento x é a solução desejada.

Apenas no Renascimento encontraram-se métodos algébricos gerais para a solução das equações cúbicas.

Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha (Itália) foi o primeiro a resolver algebricamente equações cúbicas da forma $x^3 + px = q$. Provavelmente sua descoberta se baseia em fontes árabes. Apesar de não ter publicado a solução ele a revelou, antes da sua morte, a um grupo de estudantes, entre os quais estava Antônio Maria Fior (ou Floridus em latim).

Niccolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia, (cerca de 1500-1557), motivado pela possibilidade de existência de solução algébrica para uma cúbica, dedicou-se a encontrar um método de resolvê-la. Por volta de 1541 Tartaglia chegou ao método.

Uma competição matemática entre Fior e a Tartaglia foi organizada. Cada um propôs 30 questões para que o outro resolvesse num tempo previamente determinado. Tartaglia venceu, resolvendo todas as 30 questões propostas por Fior, enquanto este não resolveu nenhuma das questões propostas por Tartaglia.

Isto porque Fior só sabia resolver equações do tipo $x^3 + px = q$ (p, q positivos), ao passo que Tartaglia também sabia resolver equações do tipo $x^3 + mx^2 = n$.

Tartaglia não publicou o método, mas o revelou a Gerônimo Cardano (1501-1576), após este ter feito um solene juramento de segredo. E em 1545 Cardano o publicou em *Ars magna*, que traz além da solução das cúbicas, a solução das quárticas. "Este é o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra"(EVES, 2008, p. 307).

Após resolver a equação $x^3 + 6x = 20$, Cardano concluiu com uma formulação verbal da regra para solução desse tipo de equação.

Escrita em linguagem atual, as equações do tipo $x^3 + px = q$ eram resolvidas da seguinte forma: substitua x por $u - v$ e suponha que u e v estão relacionados de modo que seu produto (pensado como área) é um terço do coeficiente de x na equação cúbica. A partir dessas duas equações ($3uv = p$ e $u^3 - v^3 = q$) resolva o sistema para u e v. O valor de x fica, portanto, determinado:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}}.$$

Cardano passou então a outros tipos, como por exemplo, $x^3 = px + q$. Neste, faz-se a substituição de x por $u + v$. Ao aplicar a regra à equação $x^3 = 15x + 4$, o resultado é $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Mesmo ciente da inexistência da raiz quadrada de número negativo, conhecia uma das raízes: 4. Contudo, não entendia como dar sentido a essa situação.

Em outro problema propunha que se dividisse 10 em duas partes tal que o produto das partes fosse igual a 40. A solução é $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Apesar de operar com os números complexos, Cardano se referia às raízes quadradas de números negativos como "sofísticas" e considerava um resultado como esse "tão sutil quanto inútil".

> A resolução de equações cúbicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de matemática. Soluções aproximadas de algumas equações cúbicas já eram conhecidas na antiguidade, e Al-Kashi, um século antes de Cardano, podia resolver com qualquer grau de aproximação qualquer equação cúbica resultante de um problema prático. A fórmula de Tartaglia-Cardano é de grande importância lógica, mas não é nem de longe tão útil para as aplicações quanto os métodos de aproximações sucessivas (BOYER, 2001, p. 197).

Em *Ars magna* encontra-se a primeira observação significativa dos números imaginários. Era inevitável deparar-se com a raiz quadrada de um número negativo em uma equação cúbica, ainda que sua solução fosse um número real conhecido. Isto porque em equações do tipo $x^3 = px + q$, com $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ negativo (chamado caso irredutível), as três raízes são reais. Mas, pela fórmula de Cardano-Tartaglia, essas raízes se escrevem como diferença de duas raízes cúbicas de números complexos imaginários.

Em 1572 Raffael Bombelli (cerca de 1526 - 1573), discípulo de Cardano, retomou os estudos das equações cúbicas e mostrou que só aparentemente, no caso irredutível, as raízes são imaginárias. Ele introduziu ainda as quantidade *piu di meno*, correspondente a $\sqrt{-1}$, e *meno de meno*, correspondente a $-\sqrt{-1}$. Em *l'Álgebra* (1572) chegou à mesma solução de Cardano para a equação $x^3 = 15x+4$, considerando, no entanto, a possibilidade de escrever a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$, como uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$. Sendo 4 raiz da equação, verificou que $(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4 \Leftrightarrow a = 2$. Calculou então que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$.

Segundo Miles (1994), Bombelli operou livremente com os números complexos ainda que os tenha considerado "sofísticos". E apesar de não conseguir demonstrar geometricamente, tratou da multiplicação dando regras para mais e menos.

Abaixo as regras enunciadas por ele e sua escrita em notação atual.

Piú via piú di meno fa piú di meno	$+ \cdot (+i) = +i$
Meno via piú di meno fa meno di meno	$- \cdot (+i) = -i$
Piú via meno di meno fa meno di meno	$+ \cdot (-i) = -i$
Meno via meno di meno fa piú di meno	$- \cdot (-i) = +i$
Piú di meno via piú di meno fa meno	$(+i) \cdot (+i) = -$
Meno di meno via piú di meno fa piú	$(-i) \cdot (+i) = +$
Meno di meno via meno di meno fa meno	$(-i) \cdot (-i) = -$

Atribui-se a Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1790) a prova do Teorema Fundamental da Álgebra: uma equação polinomial complexa $p(x) = 0$, de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz complexa.

Em sua dissertação sobre os ventos (1747) d'Alembert afirmou que uma quantidade qualquer composta de tantos imaginários quanto desejarmos pode ser simplificada na forma $A + B\sqrt{-1}$, com A e B reais. Se a quantidade for real isto significa que $B = 0$. Ele também estudou os logaritmos de números negativos, que para ele, seriam números reais.

Jean Bernoulli, no estudo do cálculo infinitesimal, chegou à conclusão equivocada quanto ao logaritmo de números negativos. Escrita em linguagem atual temos:

$$x^2 = (-x)^2 \Leftrightarrow logx^2 = log(-x)^2 \Leftrightarrow 2logx = 2log(-x) \Leftrightarrow logx = log(-x)$$

Em 1728 Leonard Euler (1707-1783), matemático suíço, em carta enviada a Bernoulli, tratou da contradição do resultado acima. E entre os anos de 1747 e 1748 enviou diversas cartas a d'Alembert demonstrando que os números negativos não possuem logaritmos reais, como este pensava. Sabedor de que $e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1$ (escrito em notação atual), concluiu que $ln(-1) = i\pi$. Deste modo, os logaritmos de números negativos são imaginários, e não reais. Euler estabeleceu ainda que todo número real não-nulo r tem uma infinidade de logaritmos (para uma dada base). Se $r < 0$, todos são imaginários, se $r > 0$, todos, exceto um, são imaginários.

Em sua obra *Recherches sur les racines imaginairesdes équations*, de 1749, Euler afirma que toda fração composta por adição, subtração, multiplicação ou divisão de números da forma $M+N\sqrt{-1}$ (M e N reais) será da mesma forma. Se $N = 0$, então trata-se de um número real.

Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francês residente na Inglaterra, mostrou que um número imaginário unitário pode ser representado por $cos\theta \pm \sqrt{-1}sen\theta$. Em *Miscellanea analytica* (1730), além de tratar do estudo de probabilidades fez um tratamento analítico da trigonometria. O assim chamado teorema de De Moivre, $(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$, é dado implicitamente. Nesse mesmo trabalho, ao fatorar $x^{2n} + 2xcos(n\theta) + 1$ em fatores quadráticos da forma $x^2 + 2xcos\theta + 1$, ele exprimiu o equivalente a $(cos\theta \pm isen\theta)^{\frac{1}{n}} = cos\frac{2k\pi\pm\theta}{n} \pm isen\frac{2k\pi\pm\theta}{n}$.

Em 1738, De Moivre afirmou que expressões do tipo $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}$ admitem n valores, todos da forma $p+q\sqrt{-1}$, em que p e q são números reais. Este resultado decorre da demonstração da expressão particular $\sqrt[n]{cos\theta+\sqrt{-1}\cdot sen\theta}$, em que os n valores são obtidos por meio da divisão do arco θ.

A primeira tentativa de interpretação geométrica para os números complexos deve-se a John Wallis (1616-1703), professor de Geometria de Oxford. Em seu trabalho de 1673, após diversos exemplos nos quais os números negativos são interpretados como segmentos sobre uma reta orientada, ele tenta uma interpretação para as quantidades imaginárias, assumindo que "agora, o que era admitido para retas, também deveria ser, pela mesma razão, permitido para planos[1]"(WALLIS, 1685, apud JÚNIOR, 2009, p.61).

A contribuição de Caspar Wessel (1745-1818, Noruega) sobre a representação gráfica dos números complexos veio em um artigo, ignorado por cerca de noventa e oito anos, apresentado à Real Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas Atas dessa Academia em 1799.

Nesse artigo, Wessel propôs uma representação analítica para segmentos de retas orientados (vetores) no plano e no espaço e definiu operações entre segmentos. Essa representação permitiu identificar segmentos orientados no plano com os números imaginários e operá-los como tais, mantendo inclusive suas propriedades operatórias.

Jean Robert Argand (1768-1822) no artigo publicado em 1806, combinou as ideias de grandeza absoluta e orientação, não apenas como uma oposição (como fez para a representação geométrica dos números negativos), mas incluiu uma nova direção, perpendicular a primeira. A multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida como uma rotação no sentido anti-horário e no sentido horário se multiplicado por $-\sqrt{-1}$. O zero não é mais um ponto neutro, mas o centro de uma rotação.

Com Gauss a representação geométrica dos números complexos foi amplamente aceita. Carl Friederich Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático de renome a defender publicamente os números complexos. Em 1831 ele publicou o que denominava "metafísica das grandezas imaginárias", no artigo "*Theoria residuorum biquadraticum*"(Teoria dos resíduos biquadráticos).

Gauss introduziu o termo número complexo e difundiu o uso do símbolo i para $\sqrt{-1}$, embora Euler, em 1777, tenha sido o primeiro a utilizá-lo. Deve-se a ele a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

> Para Gauss, os números complexos não precisam ser 'realizados'; tratava-se de relações abstratas que deviam ter plena cidadania em matemática. Essa conceitualização faz eco à sua visão de que a abstração é a característica essencial da matemática (ROQUE, 2012, p.451).

[1] Wallis, J. A Treatise of Algebra, London (1685), p.265

Na Europa, no final do século XVIII, os números negativos e os imaginários eram utilizados com certo grau de liberdade na resolução de equações algébricas, ainda que não houvesse uma definição precisa deles. Embora a representação geométrica dos números imaginários tenha favorecido sua compreensão, tal representação não foi suficiente para que eles fossem amplamente aceitos como objetos matemáticos de fato.

> A transição do conceito de quantidade para o de número foi marcante para a noção de rigor que se constituiu a partir do século XIX. Enquanto os números eram associados a quantidades geométricas, não se concebiam operações abstratas e arbitrárias sobre eles (ROQUE, 2012, p. 409).

A insatisfação com a falta de clareza e precisão em relação a utilização dos números imaginários motivaram Hamilton a tentar estruturá-los algebricamente. Para ele, a doutrina dos números negativos e imaginários tornava-se desacreditada ao usar ideias tais como: uma magnitude maior poder ser subtraída de uma menor e o resultado ser menor do que nada; dois números negativos ou números denotando magnitudes menores do que nada poderem ser multiplicados e o produto ser um número positivo ou um número denotando uma magnitude maior do que nada. O problema estava diretamente relacionado à ideia de ordenação.

Sobre os números imaginários Hamilton escreveu:

> até aqueles números, chamados de imaginários, podem ser encontrados ou concebidos ou determinados e operados segundo todas as regras dos números positivos e negativos, como se estivessem sujeitos a estas regras, embora tenham quadrados negativos e devam então não ser supostos nem positivos, nem negativos e nem números nulos, e assim suas magnitudes são supostas não denotar nem algo maior do que nada, nem menor do que nada, nem igual a nada [2] (HAMILTON, 1837, apud NEVES, 2008, p.38).

No artigo *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Álgebra as the Science of Pure Time*, publicado em 1837, Hamilton apresenta as estruturas algébricas para os conjuntos numéricos, desde os inteiros positivos até os pares numéricos (x, y), identificando estes com os números imaginários.

Hamilton conseguiu, sem a necessidade de considerações geométricas, provar que os números complexos de fato existem, introduzindo "uma visão moderna do conceito de número, não mais atrelada à idéia [sic] grandeza"(NEVES, 2008, p.53).

[2] Hamilton, W. R. Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17, p. 293-422, 1837.

1.2 O conjunto dos números complexos

Há várias formas de apresentação do conjunto dos números complexos. Uma definição para este conjunto numérico comumente apresentada em livros didáticos de Matemática é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Mathias (2008, p. 84), considera esta definição inadequada para o Ensino Médio e expõe as suas fragilidades:

a) Uma definição que busca situar o que é um número complexo não pode utilizar um número complexo (i) sem antes tornar preciso o seu significado, individualmente.

b) Ao escrever $a + bi$ e $i^2 = -1$, omiti-se o fato de que as operações de soma e produto presentes não são as mesmas utilizadas em $\mathbb{R}$ (conjunto numérico sobre o qual se desenvolve a maior parte da matemática estudada no Ensino Médio).

Segundo Mathias (2008, p.78)

> O conceito de número complexo, como veremos, é um conceito cuja compreensão fundamental se dá sobre *argumentos geométricos e algébricos*. Qualquer tratamento puramente algébrico, ainda que bem apresentado, será pouco revelador no que diz respeito ao imenso potencial deste conceito, que vai muito além da grande conquista chamada Teorema Fundamental da Álgebra.

Neste trabalho optou-se por enfatizar os aspectos geométricos. Considera-se a representação geométrica muito relevante no estudo deste tema no Ensino Médio, pois permite estabelecer conexões com outros tópicos da matemática estudados nesse nível de escolaridade.

Seja $\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos munido das operações:

- adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \tag{1.1}$$

- multiplicação:

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{1.2}$$

Podemos identificar cada número complexo (a, b) com o ponto $P(a, b)$ do plano ou com o vetor (segmento orientado) no plano com ponto inicial na origem do sistema de coordenadas e ponto final em P, que será chamado de *afixo* ou *imagem* do número complexo. Ao eixo horizontal chamamos de eixo real (Re), ao eixo vertical de eixo imaginário (Im) e ao plano de Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss (Figura 2).

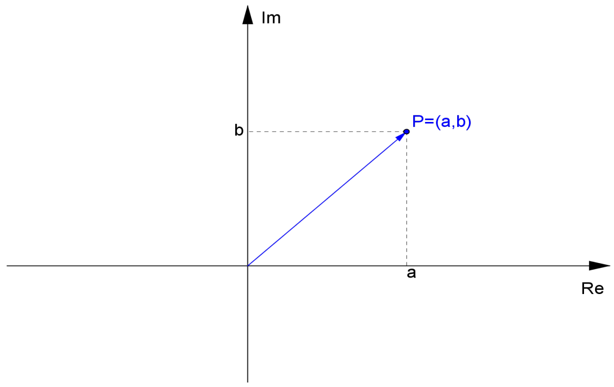


Figura 2: Representação geométrica do número complexo

Fonte: autora.

A soma $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ corresponde a soma usual de vetores em $\mathbb{R}^2$ (Figura 3).

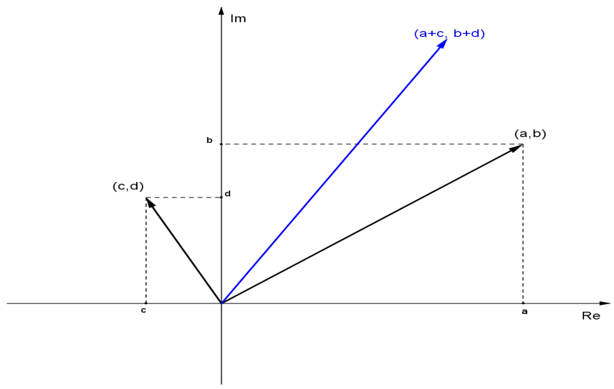


Figura 3: Representação geométrica da soma $(a, b) + (c, d)$

Fonte: autora.

1.2.1 Módulo

O módulo ou comprimento do número complexo $z = (a, b)$ é o número real $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente corresponde à distância da origem ao ponto P(a,b) (Figura 4).

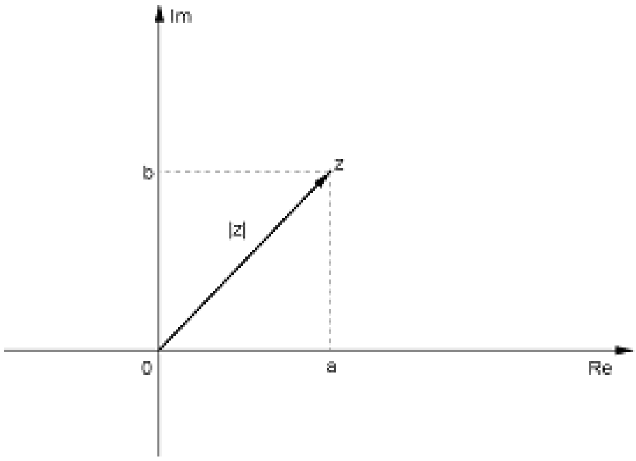


Figura 4: Módulo de z
Fonte: autora.

1.2.2 Conjugado

O conjugado de um número complexo $z = (a, b)$, representado por $\bar{z}$, é o complexo $\bar{z} = (a, -b)$.

Geometricamente, $\bar{z}$ corresponde a reflexão de z em torno do eixo horizontal (Figura 5)[3].

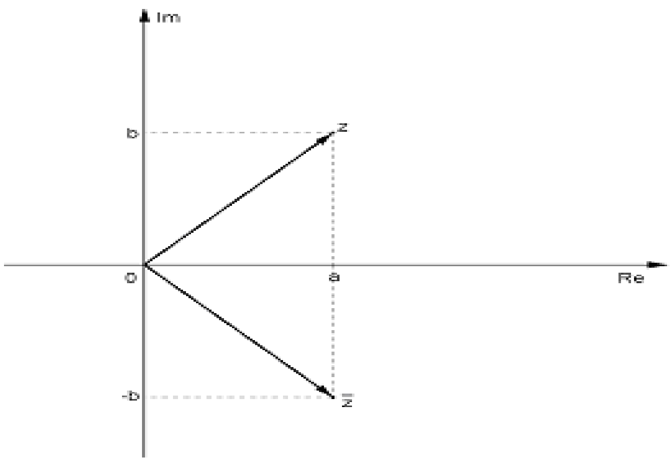


Figura 5: Conjugado de z.
Fonte: autora.

1.2.3 $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$

O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) identifica-se com a reta por meio de uma correspondência biunívoca, onde cada número real a está associado a um único ponto A distante $|a|$ de um ponto O dado (origem). Se $a > 0$, A está a direita de O, se $a < 0$, A está a esquerda. $a = 0$ identifica-se com o ponto O. Esta reta é denominada reta real ou eixo real (Figura 6).

[3] Algumas propriedades do módulo e do conjugado de um número complexo são apresentadas no Apêndice A

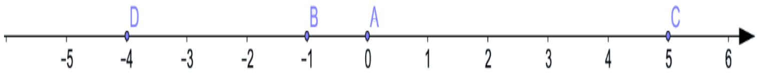


Figura 6: Reta real
Fonte: autora.

Considerando uma reta perpendicular à reta real passando pelo zero, têm-se um par de eixos coordenados. O número real a identifica-se com o ponto de ordenada zero $(a, 0)$, que corresponde a um número complexo (Figura 7). Operando com os complexos $(a, 0)$ e $(c, 0)$, têm-se que:

$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ identifica-se com o número real $a + c$

$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$ identifica-se com o número real ac

Verifica-se que $\mathbb{R}$ "está contido"em $\mathbb{C}$.[4]

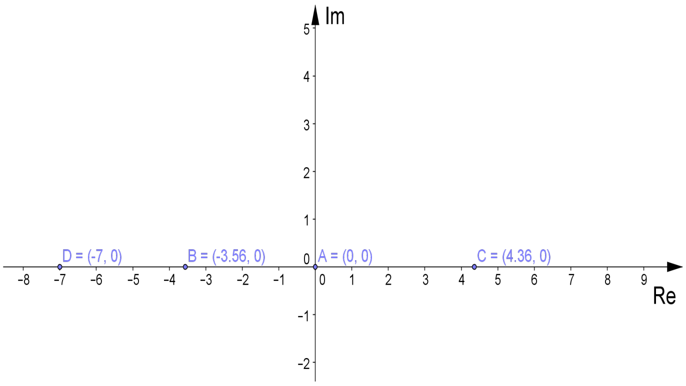


Figura 7: Números reais no plano complexo
Fonte: autora.

1.2.4 Multiplicação de um número complexo por um número real

A homotetia de uma figura F de centro O e razão c corresponde a uma transformação geométrica que associa a cada ponto A de F o ponto A', sobre a reta $\overleftrightarrow{OA}$, tal que $\overrightarrow{OA'} = c\overrightarrow{OA}$.

A multiplicação de um vetor $\vec{v}$ por um número real c corresponde, geometricamente, a uma homotetia, isto é, o módulo de $\vec{v}$ fica multiplicado por $|c|$ (Figura 8). Se $c < 0$, o vetor muda de direção. Deste modo, o produto $(a, b) \cdot c$ corresponde ao produto de números complexos

$$(a, b) \cdot (c, 0) = (ac - 0, 0 + bc) = (ac, bc)$$

[4] Dizemos que $\mathbb{R}$ está imerso em $\mathbb{C}$. Para mais detalhes veja o Apêndice A.

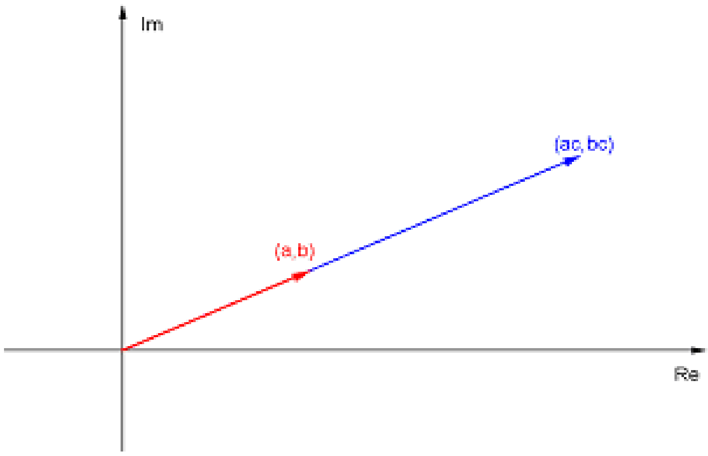


Figura 8: Representação geométrica de $c \cdot (a, b), c > 0$
Fonte: autora.

1.2.5 O número complexo i

Seja o vetor $\vec{v} = (a, b)$. Rotacionando-o $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário tem-se o vetor $\vec{v'} = (x, y)$, conforme a Figura 9.

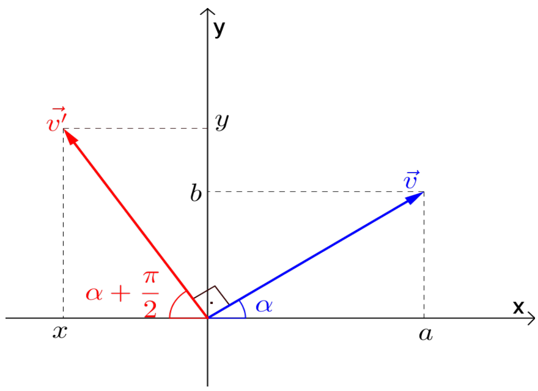


Figura 9: Rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário do vetor $\vec{v} = (a, b)$
Fonte: autora.

As coordenadas do vetor $\vec{v'}$ escritas em função das coordenadas de $\vec{v}$ são:

$$x = -|\vec{v}|cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = -|\vec{v}|sen\alpha = -b \text{ e } y = |\vec{v}|sen(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = |\vec{v}|cos\alpha = a$$

Ou seja, a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário sobre um vetor $\vec{v} = (a, b)$ transforma-o no vetor $\vec{v'} = (-b, a)$.

Identificaremos o par $(0, 1)$ com i, a unidade imaginária.

Multiplicando um número complexo (a, b) por $i = (0, 1)$ temos:

$$(a, b) \cdot i = (a, b) \cdot (0, 1) = (0 - b, a + 0) = (-b, a),$$

que corresponde uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos sobre (a, b) (Figura 10).

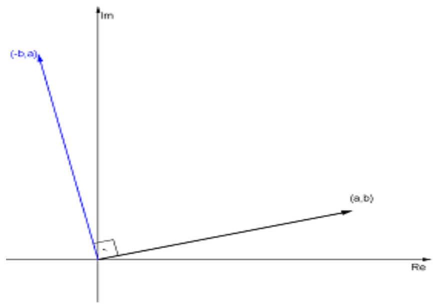


Figura 10: Representação geométrica do produto $(a, b) \cdot (0, 1)$.
Fonte: autora.

A rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos do vetor $i = (0, 1)$ leva a $(-1, 0)$, que corresponde ao produto:

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$

Isto é, o complexo i^2 identifica-se com o número real -1.

1.2.6 Forma algébrica do número complexo

Seja o número complexo $z = (a, b)$. Podemos escrever:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) \Leftrightarrow z = a + bi, \tag{1.3}$$

dita forma algébrica do complexo z.

O número real a é chamado de parte real de z $(a = Re(z))$ e b, a parte imaginária de z $(b = Im(z))$.

Se $b = 0$, z é um número real. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, z é dito imaginário puro.

Assim:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i \tag{1.4}$$

$$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{1.5}$$

> A forma algébrica é muito útil operacionalmente pois, tanto para a soma quanto para o produto de complexos, ela sugere que operamos como se estivéssemos operando em $\mathbb{R}$ os polinômios do primeiro grau na variável x, onde i faz o 'papel' do x, tal que $x^2 = -1$ (RIBEIRO, 2007, p. 118).

Historicamente vimos que alguns matemáticos assumiram esta postura ao resolver equações algébricas, mesmo considerando os números complexos "fictícios"ou "imaginários".

1.2.7 Forma trigonométrica

Dado o número complexo $z = (a, b)$, cujo módulo é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ é o ângulo que z forma com o eixo real. θ é chamado de argumento de z. Então,

$$cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = rcos\theta \text{ e } sen\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = rsen\theta.$$

$$z = (a, b) = (rcos\theta, rsen\theta) = r(cos\theta, sen\theta) \Leftrightarrow z = r(cos\theta + isen\theta) \tag{1.6}$$

Veja a Figura 11.

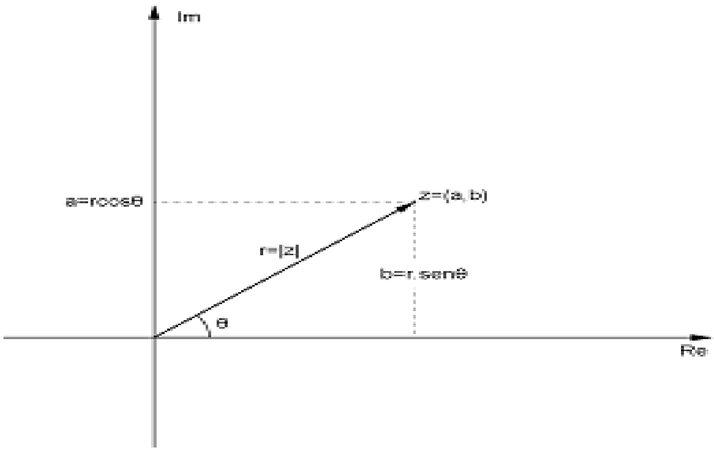


Figura 11: Forma trigonométrica de z.
Fonte: autora.

1.2.8 Multiplicação de números complexos

Considere dois complexos de módulo 1, $z_1 = (cos\theta, sen\theta)$ e $z_2 = (cos\alpha, sen\alpha)$.

$z_1 \cdot z_2 = (cos\theta, sen\theta) \cdot (cos\alpha, sen\alpha)$

$= (cos\theta \cdot cos\alpha - sen\theta \cdot sen\alpha, cos\theta \cdot sen\alpha + sen\theta \cdot cos\alpha)$

$= (cos(\theta + \alpha), sen(\theta + \alpha))$

Geometricamente, o produto $z_1 \cdot z_2$ corresponde a uma rotação positiva de ângulo α do complexo z_1 (Figura 12).

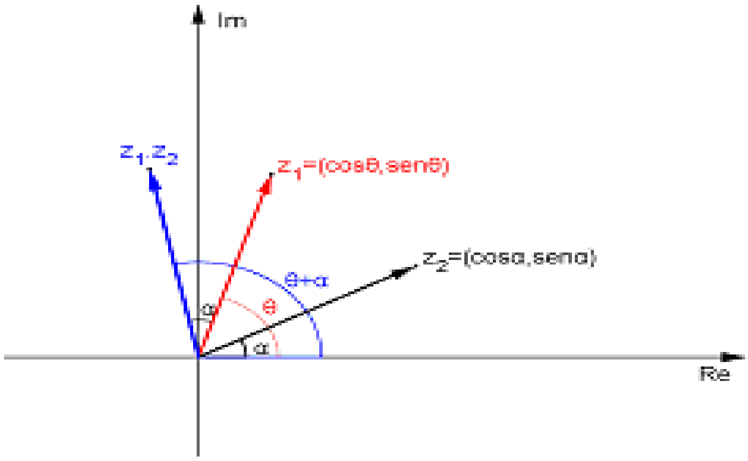


Figura 12: Representaçao geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$
Fonte: autora.

De modo geral,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(cos\theta, sen\theta) \cdot r_2(cos\alpha, sen\alpha) = r_1 r_2(cos(\theta + \alpha), sen(\theta + \alpha)) \qquad (1.7)$$

Geometricamente este produto representa, sobre z_1, uma rotação de ângulo α, positivo, e uma homotetia de fator r_2 (Figura 13).

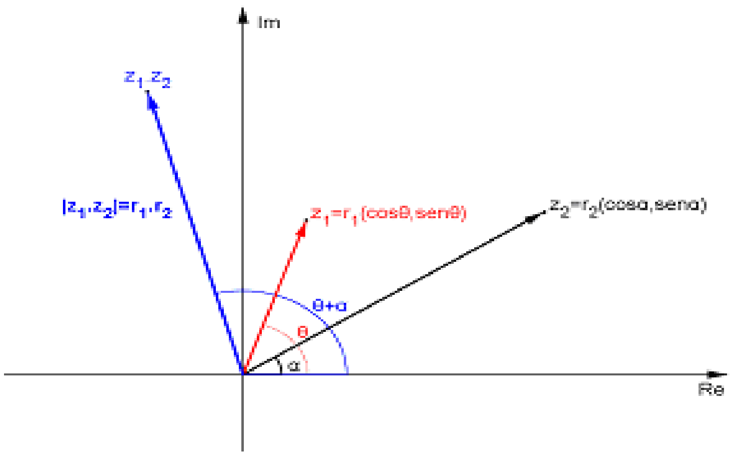


Figura 13: Interpretação geométrica do produto
Fonte: autora.

1.2.9 Potência n-ésima de um número complexo

Uma consequência do produto de números complexos é a expressão conhecida como *fórmula de De Moivre*:

$$[r(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)), \qquad (1.8)$$

onde n é um número inteiro positivo.

Da equação (1.7):

$[r(cos\theta + isen\theta)]^n = \underbrace{r(cos\theta + isen\theta) \cdot r(cos\theta + isen\theta) \cdot ... \cdot r(cos\theta + isen\theta)}_{nfatores}$

$= r^n(\underbrace{\theta + \theta + ... + \theta}_{nfatores}) = r(cos(n\theta) + isen(n\theta))$

Geometricamente, considerando o complexo unitário $z = cos\theta + isen\theta$, a fórmula acima corresponde a n rotações sucessivas de ângulo θ, sobre z. A Figura 14 mostra exemplos de potências de z.

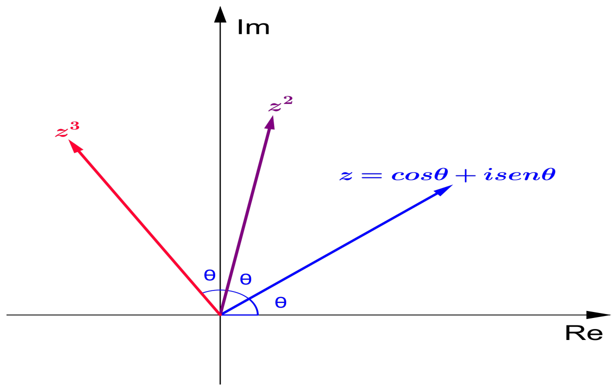


Figura 14: Potências de z.
Fonte: autora.

1.2.10 A raiz n-ésima de um complexo

Dado um número complexo w, achar a raiz n-ésima de w corresponde a determinar o complexo z, tal que $w = z^n$.

Supondo $w \neq 0$ (se $w = 0, z = 0$), $w = |w|(cos\theta + isen\theta)$ e $z = |z|(cos\phi + isen\phi)$, temos que:

$w = z^n$

Das equações (1.6) e (1.7):

$|w|(cos\theta + isen\theta) = |z|^n(cos(n\phi) + isen(n\phi))$

o que resulta em:

$|w| = |z|^n \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$ e

$cos\theta = cos(n\phi)$ e $sen\theta = sen(n\phi)$

$n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$,

$w_k = \sqrt[n]{|w|}(cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n}))$

é uma raiz de w.

Às raízes $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$, correspondem os ângulos

$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, ..., \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$,

respectivamente.

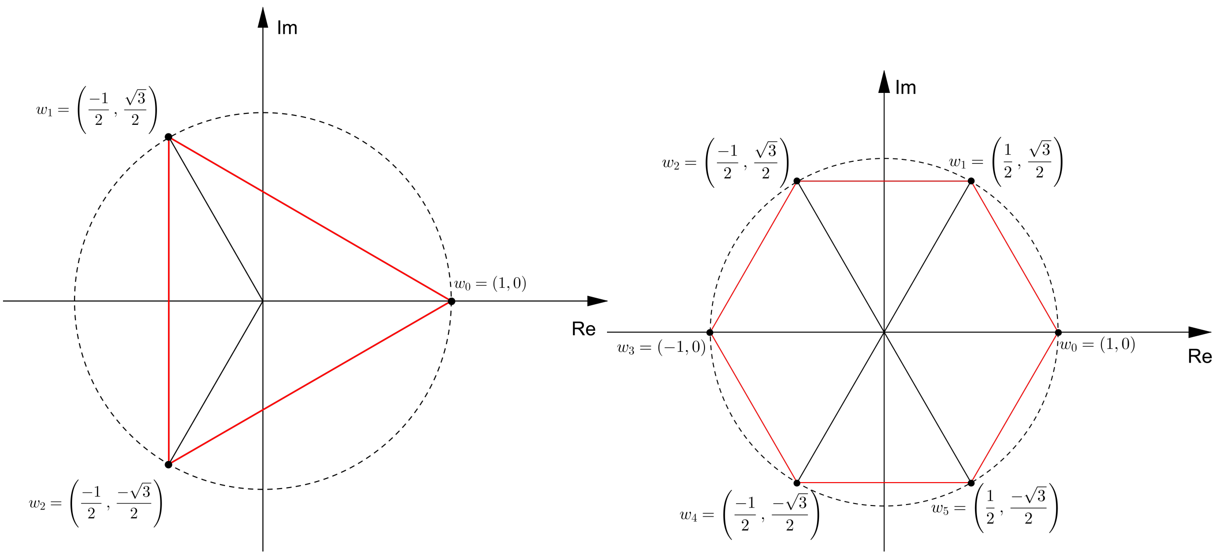
Para os valores de $k \geq n$, os ângulos começam a se repetir. Os valores negativos de k fornecem tão somente as raízes já obtidas. Conclui-se então que um número complexo tem exatamente n raízes de ordem n.

Em especial, a determinação das raízes n-ésimas da unidade equivale à divisão da circunferência de centro na origem e raio 1 em n partes iguais. Ou ainda, as raízes n-ésimas ($n \geq 3$) da unidade correspondem aos vértices do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de centro na origem e raio 1.

$1 = cos(0) + isen(0)$

$\sqrt[n]{1} = cos(\frac{2k\pi}{n}) + isen(\frac{2k\pi}{n}), k = 0, 1, 2, ..., n-1$

A Figura 15 traz exemplos de raízes da unidade e os respectivos polígonos regulares.



(a) Raízes cúbicas de 1. (b) Raízes sextas de 1.

Figura 15: Interpretação geométrica das raízes cúbicas e sextas de 1.
Fonte: autora.

De modo geral, as raízes n-ésimas de w dividem a circunferência de centro (0,0) e raio $r = \sqrt[n]{|w|}$ em n partes iguais.

Capítulo 2

Metodologia de pesquisa

Neste capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa.

O objetivo deste trabalho é descobrir a opinião dos professores de matemática sobre a relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio; as razões e os fatores que influenciam esta opinião e de que forma essa visão interfere o modo do professor abordar o tema em sala de aula.

Com o fim de alcançá-lo, foi realizada uma pesquisa com professores de matemática que lecionam em turmas do Ensino Médio.

Optou-se pela pesquisa quantitativa-descritiva. Segundo Tripodi [1] (1975, apud Marconi e Lakatos, 2011) este tipo de pesquisa empírica tem por objetivo delinear ou analisar características de fatos ou fenômenos, avaliar programas ou isolar variáveis chave. Para isto, utiliza artifícios quantitativos de coleta de dados e técnicas de amostragem. Em estudos de descrição de população espera-se a exata descrição de certas características quantitativas de populações como um todo. Quando se trara de aspectos qualitativos como atitudes e opiniões, empregam-se escalas que permitem a quantificação.

Desejava-se ter respostas às questões de pesquisa que refletissem o modo de pensar de um número significativo de professores com diferentes formações e inseridos em diferentes contextos escolares. Por isso, foram convidados para participar da pesquisa discentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), membros do Grupo Nacional de professores de Matemática (https://groups.google.com/forum/?hl=pt-BR#!forum/profmat) e professores de Matemática residentes no estado do Rio de Janeiro. Os professores deste último grupo foram escolhidos de acordo com os e-mails a que se tinha acesso.

[1] Tripod, T. et al. **Análises da pesquisa social:** diretrizes para o uso de pesquisa em serviço social e em ciências sociais. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1975.

A seleção da amostra se fez por conveniência, isto é, a amostra foi formada pelos professores que aceitaram o convite para participar da pesquisa. Ainda que este tipo de amostragem tenha pouco rigor, ela foi escolhida pela facilidade e rapidez.

Para coleta de dados optou-se pelo questionário *on-line*. Para isto utilizou-se a ferramenta Google Docs. Marconi e Lakatos (2011) destacam algumas vantagens do questionário:

- ✓ atinge um maior número de pessoas simultaneamente;
- ✓ abrange uma área geográfica mais ampla;
- ✓ obtém respostas mais rápidas e mais precisas;
- ✓ há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato;
- ✓ há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador.

O questionário é composto de perguntas abertas, fechadas e, em sua maioria, de múltipla escolha. Segundo Marconi e Lakatos (2011) as respostas de múltipla escolha facilitam a tabulação e proporcionam uma exploração em profundidade quase tão boa quanto as respostas abertas.

As questões elaboradas estão divididas em três Eixos, embora não estejam ordenadas segundo os mesmos. São eles:

I- A formação do professor e os números complexos em sua formação (questões 1, 2, 5, 6, 7, e 10).

Desejamos aqui responder as perguntas:

- Qual é a formação do professor de matemática do Ensino Médio?
- Em que etapa da sua formação ele estudou números complexos?
- O que ele estudou sobre os números complexos?

II- A relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio (questões 8, 9 e 11).

Este é o eixo central dessa pesquisa, cujo propósito é responder a indagação:

- O ensino dos números complexos é relevante no Ensino Médio? Por quê?

III- A prática docente e o ensino dos números complexos (questões 3, 4, 12, 13, 14, 15, 16 e 17).

Quanto à prática docente o questionário busca identificar o tempo de magistério, alguns aspectos relacionados ao preparo das aulas e, de forma mais específica, os tópicos sobre números complexos ensinados e a abordagem.

2.1 O questionário

A seguir são apresentadas as questões e os aspectos a serem observados em cada uma delas.

Questão1: Titulação máxima

( ) Graduação

( ) Especialização

( ) Mestrado

( ) Doutorado

( ) Outro

Questão 2: Ano de conclusão da titulação máxima:

O objetivo destas duas questões é traçar o perfil dos professores quanto a sua formação.

Questão 3: Tempo de atuação no Ensino Médio

( ) Até 1 ano

( ) de 1 a 5 anos

( ) de 5 a 10 anos

( ) acima de 10 anos

Esta questão tem como propósito verificar o tempo de experiência dos docentes no Ensino Médio.

Questão 4: Com que frequência você utiliza os recursos abaixo como fonte de pesquisa para o preparo de suas aulas?

RECURSO	sempre	algumas vezes	raramente	nunca
Livro didático do Ensino Médio				
Livro paradidático				
Livro de História da Matemática				
Outros livros de Matemática				
Revistas de Matemática e/ou Educação				
Internet (sites, applets, revistas digitais, blogs, anais de eventos, etc)				
Outros				

Esta pergunta tem em vista identificar os principais recursos utilizados pelos professores e a importância deles no preparo das aulas.

Questão 5: Você estudou números complexos no Ensino Médio (antigo 2.º grau)?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não me lembro

Questão 6: Você estudou números complexos na graduação?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não me lembro

Procura-se identificar nestas duas questões em que etapa da sua formação o professor estudou números complexos.

A questão 7 destina-se apenas aos que responderem **Sim** na questão anterior.

Questão 7: Marque os tópicos, relacionados aos números complexos, que você estudou na graduação.

( ) História dos números complexos

( ) Corpo dos números complexos: definição; propriedades; representação geométrica; complexos conjugados; valor absoluto; forma polar; produtos, potências e quocientes; raízes e regiões do plano complexo.

( ) Função complexa de variável complexa: limite, continuidade, diferenciação

( ) Funções elementares: exponencial, logarítmica, trigonométrica, hiperbólica, etc

( ) Função analítica

( ) Integração no plano complexo

( ) Sequências e séries complexas

( ) Cálculo de resíduos

( ) Aplicações dos números complexos na Matemática

( ) Aplicações dos números complexos em outras ciências

Com esta pergunta deseja-se além de elencar os tópicos estudados, perceber o nível de aprofundamento dos professores sobre o tema.

Questão 8: Na sua opinião, qual é o grau de relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio?

( ) Irrelevante

( ) Pouco relevante

( ) Relevante

( ) Indispensável

Esta é a pergunta central do questionário. As demais questões têm em vista entender o porquê da resposta dada a ela e a influência dessa opinião na prática do professor ao ensinar números complexos.

A nona questão está condicionada à resposta da questão 8. Inicialmente a nona questão era igual para os que respondessem **Pouco Relevante** ou **Irrelevante**, porém durante a aplicação do questionário percebeu-se a necessidade de separá-los para melhor entender as opiniões apresentadas. Então, para os que responderem **Pouco Relevante** a questão se desdobra em duas.

Para os que responderem **Indispensável** ou **Relevante**:

Questão 9: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) As aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento

( ) Preparação para o Vestibular

( ) Outros:

Para os que responderem **Pouco Relevante**:

Questão 9a: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) As aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento

( ) Preparação para o Vestibular

( ) Outros:

Questão 9b: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a pouca relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Não tem aplicação no dia a dia

( ) A maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois

( ) Os alunos tem muita dificuldade com esse conteúdo

( ) Não é cobrado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

( ) Outros:

Para os que responderem **Irrelevante**:

Questão 9: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a irrelevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Não tem aplicação no dia a dia

( ) A maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois

( ) Os alunos tem muita dificuldade com esse conteúdo

( ) Não é cobrado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

( ) Outros:

Baseados na experiência docente procurou-se listar algumas das justificativas mais comumente dadas pelos que são pró ou contra o ensino dos números complexos no Ensino Médio, havendo ainda a possibilidade do professor citar outras razões.

Questão 10: Quais das seguintes aplicações dos números complexos você conhece?

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) Operações com vetores no plano

( ) Fractais

( ) Engenharia elétrica

( ) Aerodinâmica

( ) Computação gráfica

( ) Outros:

Questão 11: Na sua opinião, qual o nível de compreensão destas aplicações para alunos de Ensino Médio?

APLICAÇÃO	compreensível	pouco compreensível	incompreensível	Não sei responder
Resolução de equações polinomiais				
Operações com vetores no plano				
Fractais				
Engenharia elétrica				
Aerodinâmica				
Computação gráfica				

Nota-se na prática docente que uma das principais indagações dos alunos ao estudarem números complexos é sobre as aplicações. Assim, com essas duas questões busca-se identificar as aplicações conhecidas pelos professores e se eles as consideram acessíveis a alunos do Ensino Médio.

Questão 12: Na escola em que você trabalha o conteúdo Números Complexos está no planejamento da disciplina Matemática?

( ) Sim ( ) Não

O objetivo desta pergunta é verificar se esse conteúdo está presente no planejamento de Matemática das escolas.

Questão 13: Ao lecionar em turmas do 3º ano do Ensino Médio você trabalha o conteúdo Números Complexos?

( ) Sim

( ) Não

( ) Nunca lecionei em turmas do 3.° ano do Ensino Médio

Nesta questão espera-se saber se o professor segue o planejamento no que diz respeito aos números complexos e se sua opinião sobre a relevância do ensino desse tema interfere na sua decisão de trabalhá-lo ou não em sala de aula.

Apenas os que responderem **Sim** na questão 13, responderão as questões 14 a 17.

Questão 14: Quais dos seguintes tópicos você aborda ao ensinar Números Complexos?

( ) Forma algébrica

( ) Representação geométrica

( ) Complexos conjugados

( ) Operações na forma algébrica

( ) Valor absoluto (módulo)

( ) Forma trigonométrica ou polar

( ) Produtos e quocientes na forma trigonométrica

( ) Potência

( ) Raízes

( ) História

( ) Aplicações

O propósito deste questionamento é fazer um levantamento dos tópicos abordados e o enfoque dado.

Questão 15:De que forma você costuma introduzir esse assunto?

( ) Com comentários históricos

( ) Com exemplos de raízes quadradas de números negativos

( ) Com exemplo de equação quadrática de raízes não reais

( ) Com a definição

( ) Outros:

A maneira como um assunto é introduzido pode servir de motivação para o seu estudo e despertar ou não o interesse do aluno.

Questão 16: Qual(is) justificativa(s) você apresenta aos seus alunos para o estudo dos Números Complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) Apresenta aplicações

( ) Preparação para o vestibular

( ) Não apresenta justificativa

( ) Outros:

Além de saber quais as justificativas dadas aos alunos, busca-se relacioná-las com as justificativas para o grau de relevância atribuído ao ensino de números complexos (questão 9).

Questão 17: Quais das seguintes aplicações dos números complexos você costuma mostrar aos seus alunos?

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) Operações com vetores no plano

( ) Fractais

( ) Engenharia elétrica

( ) Aerodinâmica

( ) Computação gráfica

( ) Nenhuma

( ) Outros:

Essa pergunta tem em vista saber as aplicações ensinadas, se elas coincidem com as que os professores conhecem e se estão de acordo com o nível de compreensão atribuído a elas para alunos do Ensino Médio.

Na parte final do questionário há um espaço para que, caso queira, o professor deixe algum comentário que julgue importante considerar no ensino de números complexos.

No capítulo seguinte serão apresentados os resultados da pesquisa. A análise seguirá os três Eixos apresentados.

Capítulo 3

Pesquisa com professores

Neste capítulo serão apresentados os resultados da pesquisa com professores.

Após a elaboração do questionário *on-line* foi realizado um teste exploratório com dois professores de Matemática de diferentes cidades e contextos escolares, tendo em vista verificar a clareza dos enunciados, o funcionamento da ferramenta eletrônica e o tempo necessário para preenchimento do mesmo. As correções que se julgaram necessárias estavam relacionadas à ferramenta eletrônica.

Feitas as correções, o convite para participar da pesquisa foi enviado por e-mail com um *link* (https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?from Email=true& formkey=dE16bkNIbkRwS1lLc1M1N3VyUWxiUGc6MQ) de acesso ao questionário, que ficou disponível de 23 de janeiro a 13 de fevereiro de 2013.

O pré-requisito para responder o questionário era ser professor de Matemática e atuar em turmas do Ensino Médio. Durante os 22 dias em que ele esteve acessível, cento e cinquenta e um professores o responderam. Não é possível saber com exatidão de quais regiões do país eles são, mas por alguns comentários sabe-se que participaram professores dos estados do Rio de Janeiro, Minas Gerais e Paraná.

Eles serão identificados segundo a ordem em que seus questionários foram recebidos. Assim, por exemplo, **P1** corresponde ao professor cujo questionário foi o primeiro a ser recebido.

A análise das questões será feita segundo os Eixos: A formação do professor e os números complexos em sua formação (questões 1, 2, 5, 6, 7, e 10); A relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio (questões 8, 9 e 11) e A prática docente e o ensino dos números complexos (questões 3, 4, 12, 13, 14, 15, 16 e 17).

3.1 A formação do professor e os números complexos em sua formação.

As questões 1 e 2 diziam respeito a titulação máxima e ao ano de conclusão da mesma. As Figuras 16 e 17 apresentam os resultados.

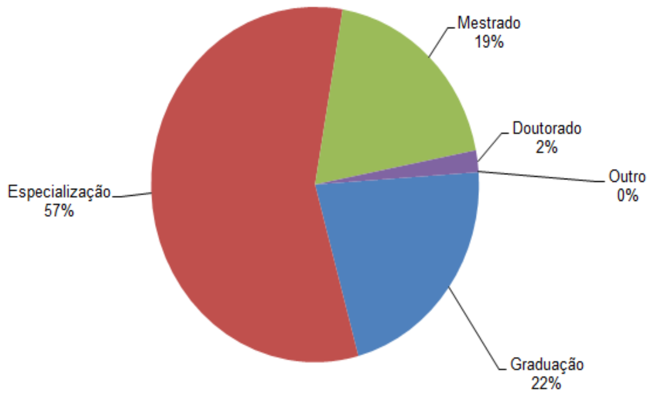


Figura 16: Titulação máxima
Fonte: autora.

Observamos que 57% dos professores são especialistas e 22% têm apenas a graduação, o que indica uma busca por qualificação. Destacamos ainda o pequeno número de professores doutores lecionando em turmas de Ensino Médio.

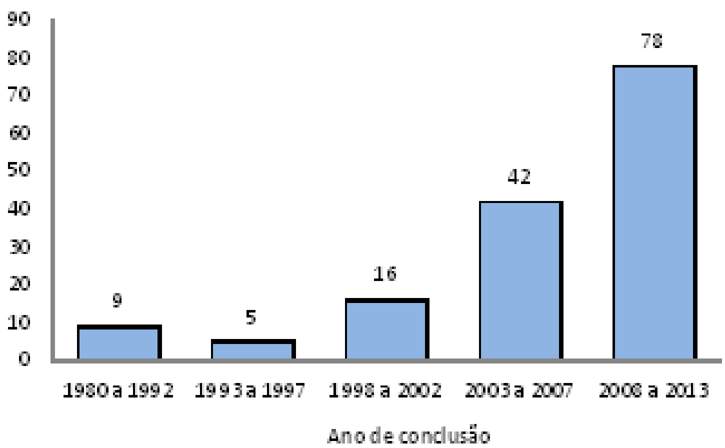


Figura 17: Ano de conclusão da titulação máxima

Fonte: autora.

Como podemos observar na Figura 17, a maioria dos professores concluiu a titulação máxima nos últimos cinco anos. Um professor ao invés de responder o ano, citou o nome do curso.

A Figura 18 relaciona as respostas das questões 1 e 2.

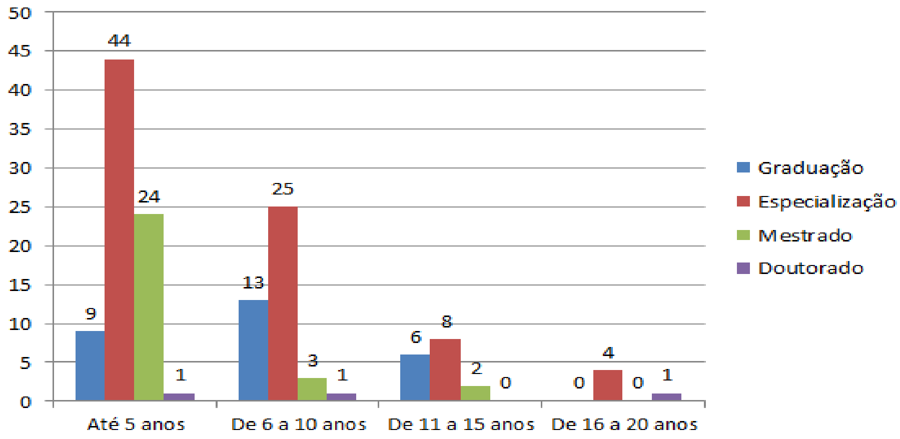


Figura 18: Titulação máxima de acordo com o tempo de conclusão da mesma.
Fonte: autora.

Analisando os dados vemos que mais de 50% dos especialistas obtiveram o título nos últimos cinco anos e aproximadamente 83% dos mestres também. Se considerarmos os últimos dez anos esses percentuais sobem para 80% e 93%, respectivamente. Estes dados sugerem que nos últimos 10 anos houve um investimento maior em qualificação. Apesar de não ser este o objetivo do trabalho, podemos fazer algumas conjecturas sobre os fatores que favoreceram esse cenário: maior oferta de cursos, maior incentivo a qualificação, um mercado mais competitivo (ainda que haja carência de professores).

Na questão 5 desejava-se saber se o professor estudou números complexos no Ensino Médio (antigo 2º grau). Cento e quatro professores responderam **Sim**, trinta e oito **Não** e nove responderam **Não me lembro**. Apesar de não ter sido questionado o ano de conclusão, vemos que tradicionalmente os números complexos integram o currículo de Matemática do Ensino Médio (ou antigo 2.° grau).

A sexta questão indagava sobre o estudo dos números complexos na graduação. Cento e vinte e quatro participantes estudaram, vinte responderam que não e sete não se lembraram.

Dos professores que estudaram números complexos no Ensino Médio, doze não estudaram na graduação e seis não se lembram de terem estudado. Juntos eles correspondem a cerca de 12% dos pesquisados. Caso não tenham buscado por conta própria, seu conhecimento sobre o assunto limitou-se ao que foi visto por eles no Ensino Médio.

Sete professores responderam não ter estudado números complexos no Ensino Médio e na graduação, um não estudou na graduação e não se lembra de ter estudado no Ensino Médio e um não se lembra de ter estudado em nenhuma das etapas de formação citadas. Juntos correspondem a aproximadamente 6% que provavelmente tiveram que buscar sozinhos ou em outras etapas da sua qualificação profissional, estudar e aprender números complexos.

A sétima questão foi respondida apenas pelos que marcaram **Sim** na questão anterior. Nela os professores deveriam marcar os tópicos relacionados aos números complexos estudados na graduação. A Figura 19 apresenta os resultados.

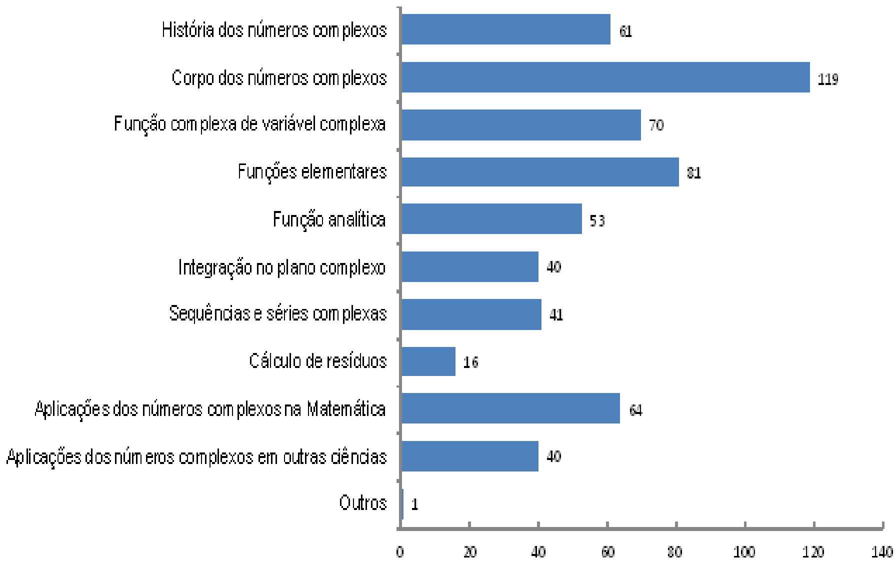


Figura 19: Tópicos relacionados aos números complexos estudados na graduação
Fonte: autora.

Como podemos observar na Figura 19, dos tópicos elencados, o mais estudado (aproximadamente 96%) é o Corpo dos números complexos, que inclui: definição, propriedades, representação geométrica, complexos conjugados, valor absoluto, forma polar, produtos, potências e quocientes, raízes e regiões do plano complexo. Este tópico (sem considerar o grau de aprofundamento) corresponde ao que, em geral, se propõe para o estudo dos números complexos no Ensino Médio.

Estes dados estão em consonância com o Parecer CNE/CES 1.302/2001 que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura que prevê, nos cursos de licenciatura, a inclusão de conteúdos da Educação Básica considerados nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2001, p.5).

De acordo com a Figura 19, o segundo tópico mais estudado, são as Funções elementares (exponencial, logarítmica, trigonométrica, hiperbólica, etc) e a Função complexa de variável complexa (limite, continuidade, diferenciação) com aproximadamente 65% e 56%, respectivamente. Tópicos pouco explorados são a Integração no plano complexo e as Sequências e séries complexas. Talvez sejam considerados de pouca relevância em um curso de licenciatura.

Observamos ainda que apenas 49% dos professores estudaram a História dos números complexos na graduação. Quanto às aplicações, apenas 52% viram aplicações na Matemática e cerca de 32%, em outras ciências. Isso é um prejuízo na formação do professor, pois caso não busque em outras fontes, corre o risco de reproduzir em suas aulas o estudo de um conteúdo "solto", sem relação com outros tópicos da Matemática e sem aplicação prática.

O professor **P53** escreveu: *"Acho que o conteúdo é muito complicado. Como não aprendi o assunto com a sua aplicação prática também tenho dificuldade em explicar sua aplicação"*.

O professor que marcou a opção **Outro** não especificou o tópico estudado.

A questão 10 perguntava quais aplicações dos números complexos o professor conhecia (Figura 20).

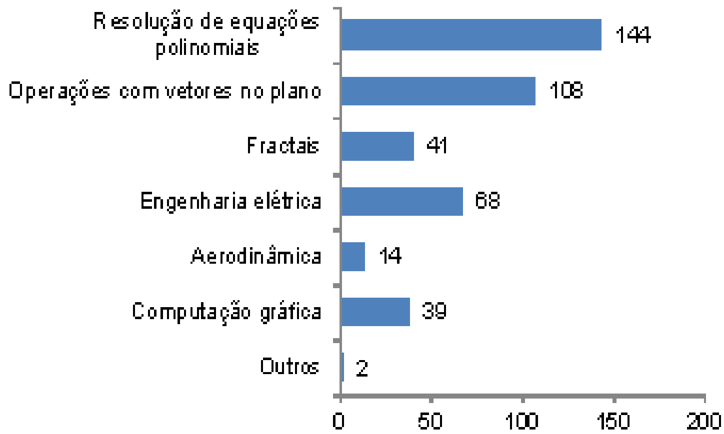


Figura 20: Aplicações dos números complexos conhecidas dos professores

Fonte: autora.

A partir do dados da Figura 20, podemos notar que a aplicação mais conhecida é a resolução de equações polinomiais. Ela é também a mais encontrada nos livros didáticos. Em segundo lugar estão as operações com vetores no plano, conhecidas por cerca de 72% dos professores. Da segunda para a terceira colocação há uma redução expressiva. Apenas, cerca de, 45% dos professores conhecem a aplicação dos números complexos na engenharia elétrica. As aplicações menos conhecidas são a aerodinâmica e a computação gráfica.

O professor **P42** em **Outros**, escreveu conhecer muito pouco de fractais. Um outro professor que marcou a mesma opção não citou a aplicação.

Apesar de mais de 50% dos professores não ter visto aplicações na graduação, vemos que mais da metade conhece pelo menos duas das citadas.

3.2 A relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio.

Na Questão 8 o professor deveria marcar o grau de relevância que ele atribuía ao estudo dos números complexos no Ensino Médio. Na Figura 21 vemos os resultados.

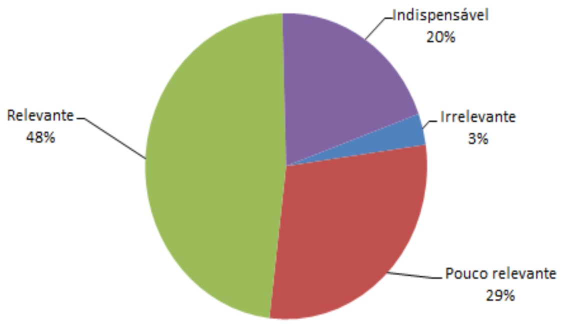


Figura 21: Grau de relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio

Fonte: autora.

Para grande parte dos professores (48%) o estudo dos números complexos no Ensino Médio é relevante. 20% deles o consideram indispensável. Apenas 3% o consideram irrelevante e uma parcela significativa (29%) vê pouca relevância nesse estudo.

A Figura 22 relaciona as questões 1 e 8.

Fonte: autora.

Ao confrontar a oitava questão com a primeira, que se refere à titulação do professor, notamos que nenhum graduado ou mestre considera o ensino de números complexos irrelevante no Ensino Médio e nenhum doutor o julga indispensável. Para cerca de 50% dos graduados, especialistas e mestres esse tópico da Matemática é relevante.

Tão logo o convite para participar da pesquisa foi enviado, questionários respondidos começaram ser recebidos e a ferramenta utilizada na elaboração do questionário (Google Docs) efetuava automaticamente a tabulação das respostas. O alcance e a "velocidade"de resposta da ferramenta eletrônica motivaram o monitoramento dessa tabulação durante as primeiras horas.

Desde o início da coleta de dados chamou a atenção o grupo de professores que respondeu **Pouco Relevante**. Nas primeiras duas horas e meia em que o questionário

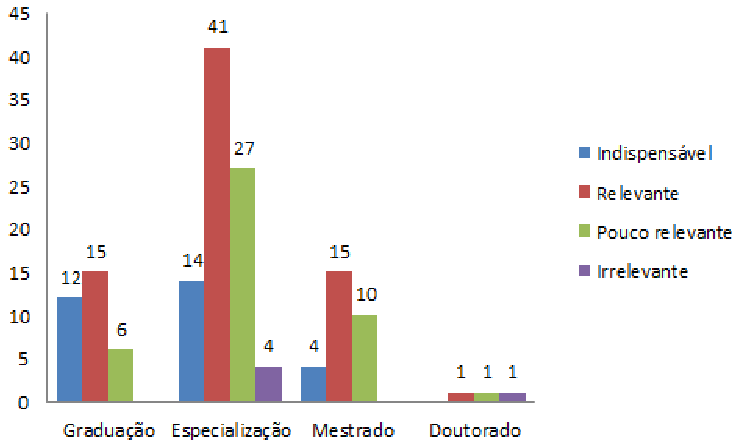


Figura 22: Relação entre a relevância atribuída ao ensino de números complexos e a titulação dos professores

ficou disponível na internet, dezoito professores o responderam. Destes, dez consideraram de pouca relevância o estudo, no Ensino Médio, dos números complexos. Quis-se, então, olhar com mais atenção para este grupo e por isso, fez-se uma alteração no questionário.

A questão 9 estava atrelada a resposta da questão 8. Ela elencava itens que confirmam a relevância (ou irrelevância) atribuída ao estudo dos números complexos.

Os que responderam **Indispensável** ou **Relevante** deveriam marcar os itens que, segundo eles, confirmam a relevância. Os resultados estão na Figura 23.

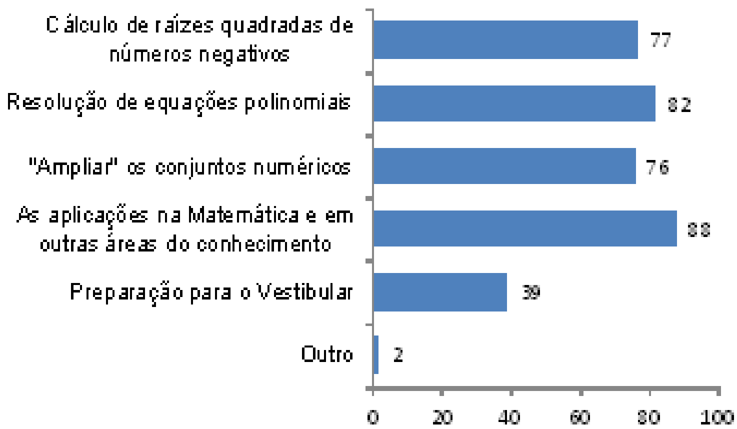


Figura 23: Itens que confirmam a relevância do esino de números complexos no Ensino Médio

Fonte: autora.

As aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento são, na opinião dos professores, as principais razões para o ensino dos números complexos. Em segundo lugar está a resolução de equações polinomiais.

Por último, dos itens elencados, está a preparação para o vestibular. Além de a matriz de referência do ENEM não contemplar este conteúdo, em muitos vestibulares ele é cobrado apenas na segunda fase, em provas para as carreiras de exatas.

Sobre isto o professor **P121** escreveu: *"Como professor de escola pública não dou tanta ênfase no ensino dos números complexos por não ser cobrado no Enem. Dessa forma, prefiro reforçar conteúdos do EF [ensino fundamental] e do próprio EM [ensino médio]"*.

Dois professores marcaram a opção **Outros**. O professor **P32** citou o estudo de polinômios e trigonometria e **P66** *"mesclar álgebra e geometria"*.

Os que responderam **Irrelevante** deveriam marcar os itens que, para eles, confirmam a irrelevância. A Figura 24 apresenta os resultados.

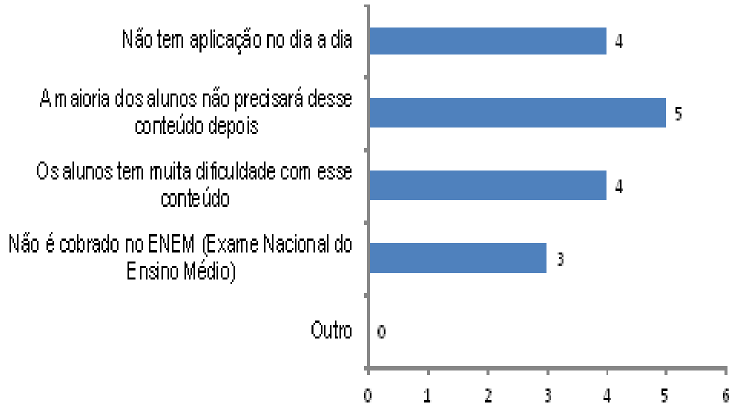


Figura 24: Itens que confirmam a irrelevância do esino de números complexos no Ensino Médio

Fonte: autora.

Todos os professores concordam que a maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois. 80% deles consideram que a falta de aplicação no dia a dia e a dificuldade dos alunos confirmam a irrelevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio.

P125 comentou:

"Sou professor da rede estadual e ensino números complexos porque este conteúdo faz parte do currículo mínimo, embora ache que não deveria mais fazer parte do programa do ensino médio. A incidência deste conteúdo nos principais vestibulares é pequena e no ENEM por muito tempo não é abordado. Acho que poderia ser comentado, citar conteúdo dentro da história da matemática, não como um assunto que preencha todo um bimestre".

Os professores que responderam **Pouco Relevante** inicialmente estavam agrupados, para a nona questão, junto ao grupo que respondeu **Irrelevante**. Porém, julgou-se necessário separá-los para buscar entender o que há, na visão deste grupo, de relevante e ao mesmo tempo irrelevante no estudo dos números complexos.

Por isso, para esse grupo, a questão 9 se desdobra em duas: Quais itens confirmam a relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio? (Figura 25) e Quais itens confirmam a pouca relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio? (Figura 26). Os resultados a seguir referem-se às respostas dos 34 professores que preencheram o questionário após a alteração.

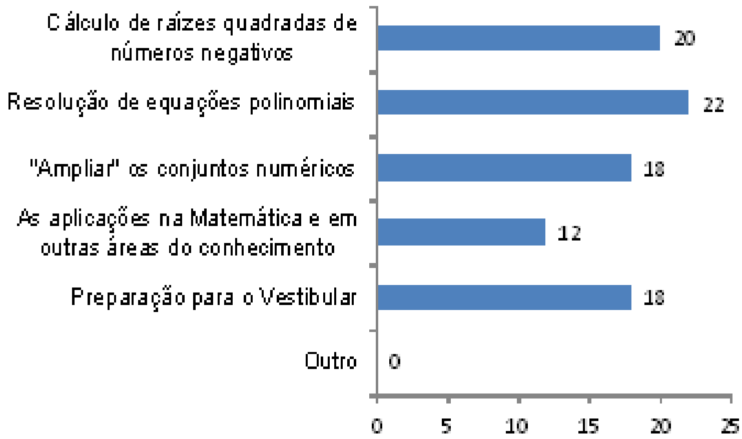


Figura 25: Itens que confirmam a relevância do esino de números complexos no Ensino Médio para professores que o consideram pouco relevante

Fonte: autora.

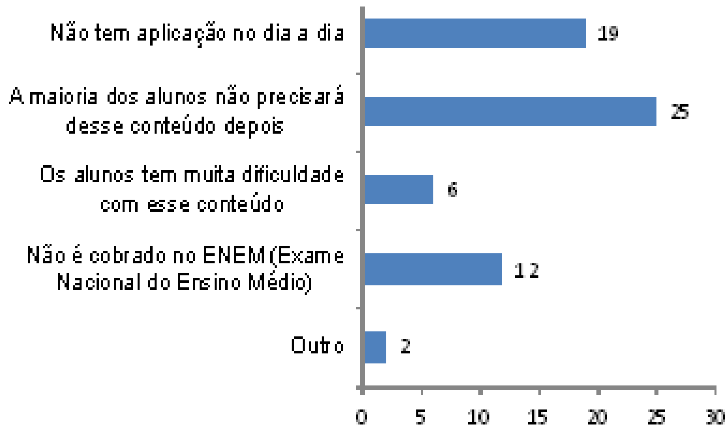


Figura 26: Itens que confirmam a pouca relevância do esino de números complexos no Ensino Médio

Fonte: autora.

Observamos que para este grupo as principais razões para o estudo dos números complexos é a resolução de equações polinomiais e o cálculo de raízes quadradas de números negativos. Essas duas justificativas estão relacionadas à forma algébrica dos complexos. A falta de aplicação no dia a dia, na opinião desses professores, tem um peso maior em tornar esse tópico de pouca relevância do que as aplicações na Matemática e em outras ciências têm em torná-lo relevante. Além disso, para quase 74% deles, a maioria dos alunos não precisará desse conhecimento depois.

É interessante notar que enquanto para 52% dos professores o vestibular torna o ensino dos números complexos relevante, apenas 35% deles vêem no ENEM razão para não ensinarem esse conteúdo. Esse fato sinaliza que o ENEM ainda não é, para a maioria deles, determinante na elaboração do currículo de Matemática.

Sobre o ENEM o professor **P147** comenta:

"É lamentável que por decisões governamentais feitas por gestores de mentes obtusas esse importante quesito do estudo da Matemática esteja fora da matriz de referência do ENEM.

Para esse 'doutos' gestores do MEC esse conteúdo logo estará fora da grade curricular do ensino médio por ser 'irrelevante'.

É mais uma lástima na educação brasileira!"

Para **P4** "*o conteúdo sobre números complexos só deveria ser usado no ensino técnico de eletrônica, eletrotécnica e nas aplicações de física*".

Na questão 11 o professor deveria marcar, de acordo com a sua percepção, o nível de compreensão das aplicações citadas para alunos do Ensino Médio (Figura 27).

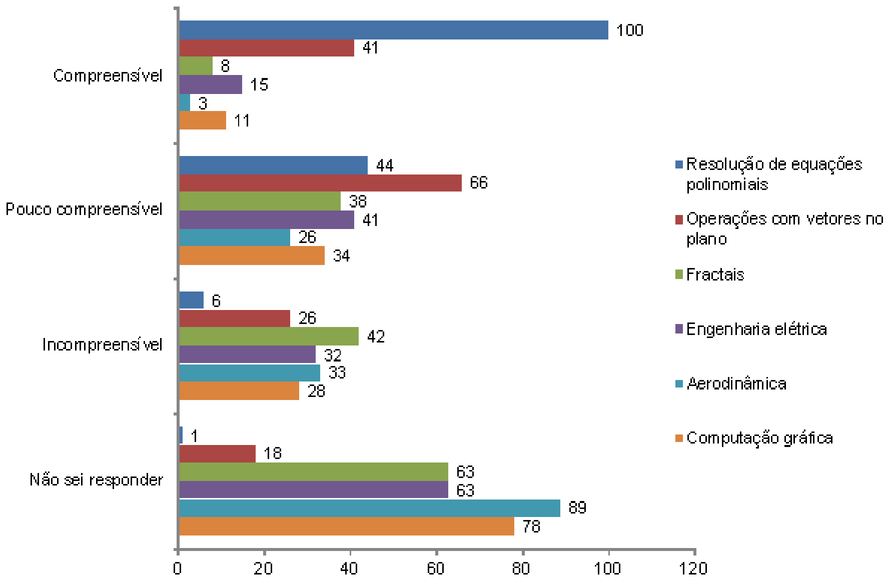


Figura 27: Percepçao dos professores quanto ao nível de compreensão das aplicaçoes dos números complexos para alunos do Ensino Médio

Fonte: autora.

A única aplicação considerada compreensível por mais de 50% dos professores é a resolução de equações polinomiais. As operações com vetores figuram em segundo lugar, porém, são consideradas pouco compreensíveis por cerca de 44% dos docentes.

Os fractais foram considerados os mais incompreensíveis para alunos do Ensino Médio. No entanto, parece haver divergência nas respostas, uma vez que apenas 41 professores responderam conhecer esta aplicação. Como julgar incompreensível algo que não se conhece?

Sobre aerodinâmica e computação gráfica, 59% e 52%, respectivamente, não souberam responder. Estas são as aplicações menos conhecidas dos professores. Quanto aos fractais e a engenharia elétrica, 42% também não souberam responder.

As respostas a essa questão parecem indicar que a resolução de equações algébricas é a (principal) aplicação dos números complexos que justifica seu estudo no Ensino Médio. Ao mesmo tempo elas confirmam a opinião dos que consideram esse tópico irrelevante ou de pouca relevância nesse nível de escolaridade, uma vez que para muitos as aplicações são, em quase sua totalidade, incompreensíveis.

3.3 A prática docente e a prática de ensino dos números complexos.

Na terceira questão o professor deveria informar o tempo de atuação no Ensino Médio. A maior parcela dos docentes está entre os que têm acima de 10 anos de magistério no Ensino Médio (71). Em seguida estão os que têm de 1 a 5 anos (38), depois de 5 a 10 anos (33) e por último aqueles com até 1 ano de atuação em turmas de Ensino Médio (9).

As Figuras 28 e 29 relacionam o tempo de docência no Ensino Médio com o grau de relevância atribuído ao ensino de números complexos no Ensino Médio.

Fonte: autora.

Observamos que os professores com até um ano de magistério são minoria em todas as classificações, o maior percentual (20%) está entre os que consideram irrelevante o ensino dos números complexos no Ensino Médio. E este valor diminui à medida que o grau de relevância aumenta. No entanto, a maior parcela dos que classificaram como **Irrelevante** está entre os professores com 1 a 5 anos de magistério (40%). Estes também são maioria (com mesmo percentual) entre os que consideram o ensino indispensável. Os professores mais experientes são maioria na classificação Pouco Relevante e Relevante, 43% e 57%, respectivamente.

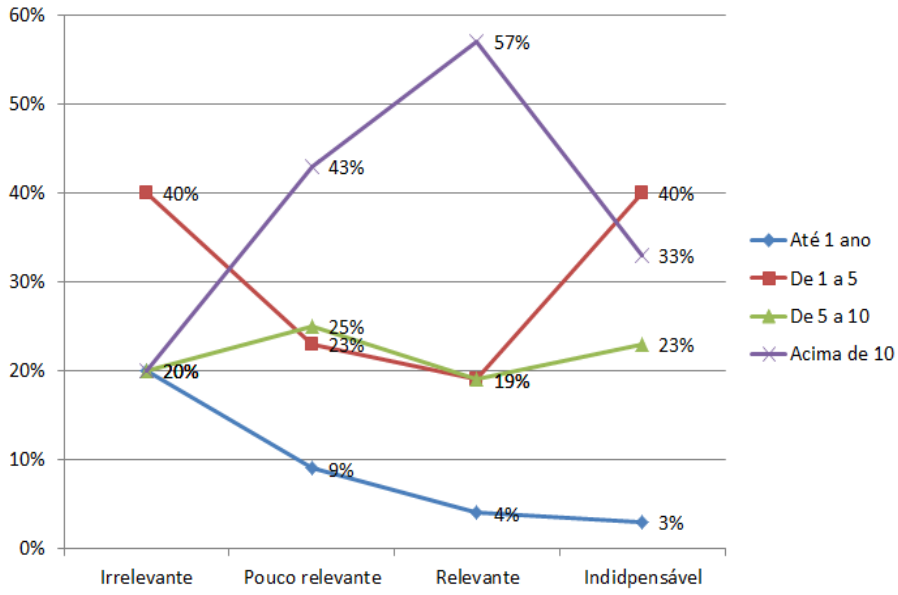


Figura 28: Grau de relevância atrubuído ao esnino de números complexos de acordo com o tempo de magistério no Ensino Médio

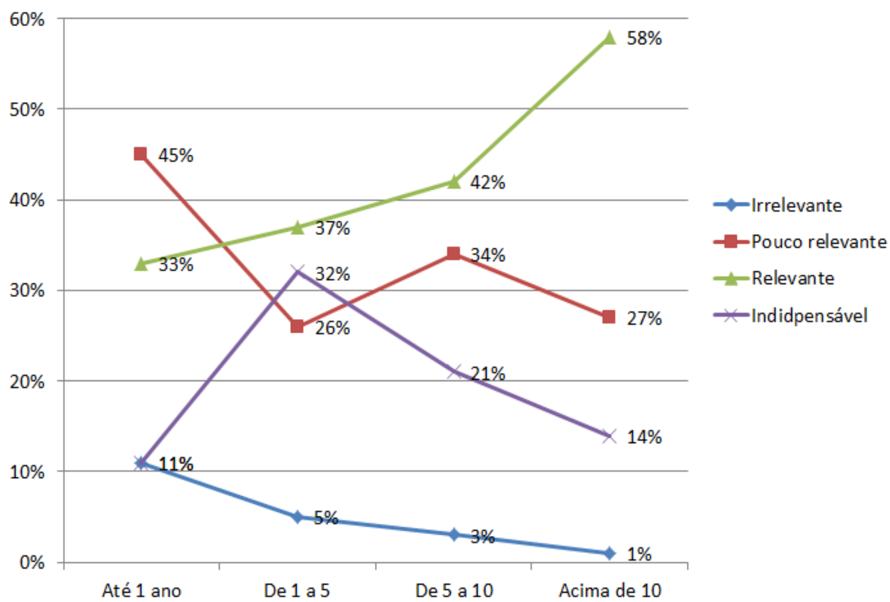


Figura 29: Tempo de atuaçao no Ensino Médio de acordo com o grau de relevância atribuído ao ensino de números complexos

Fonte: autora.

Conforme mostrado na Figura 29, o percentual de professores que classificaram como irrelevante o ensino de números complexos no Ensino Médio diminui à medida que o tempo de magistério aumenta. O mesmo ocorre, a partir de 1 ano de magistério, com o grupo que classificou como **Indispensável**. No entanto, o número de professores que responderam **Relevante** aumenta com o passar dos anos. Eles formam a maior parcela dos que têm mais de 1 ano de experiência no Ensino Médio. Entre aqueles que têm até 1 ano de experiência prevalece a classificação **Pouco Relevante** (45%).

Na questão 4 os professores responderam com que frequência utilizam os recursos didáticos listados como fonte de pesquisa para o preparo das aulas, conforme a Figura 30.

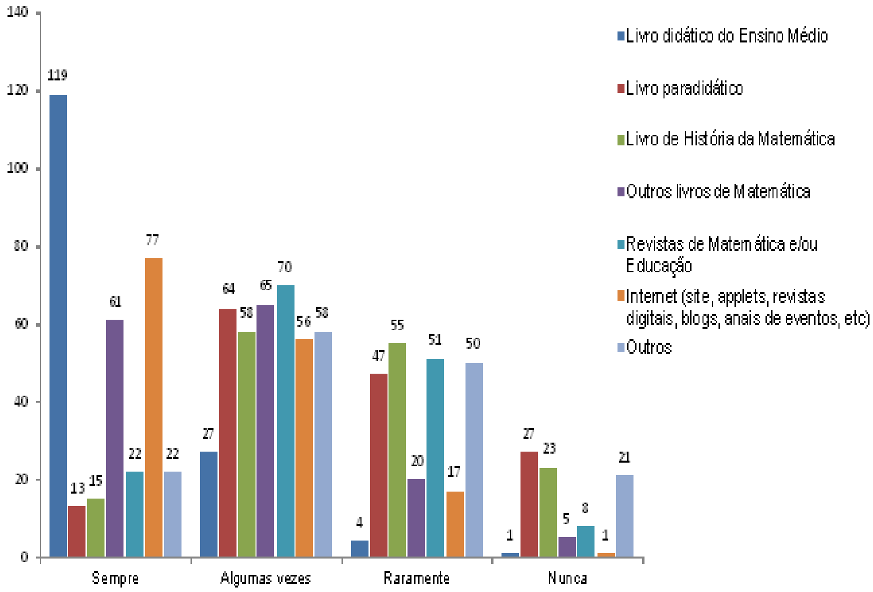


Figura 30: Frequência de utilização de recursos didáticos como fonte de pesquisa para preparo das aulas

Fonte: autora.

Os dados apontam, como podemos observar na Figura 30, que o livro didático continua a ser o principal recurso utilizado pelo professor no preparo de suas aulas. Trinta e cinco professores marcaram o livro didático como único recurso **sempre** utilizado. Vemos a importância da escolha do livro didático a ser adotado, pois a abordagem e o enfoque dados no livro para cada tópico irão muitas vezes influenciar e nortear a abordagem e o enfoque dados pelo professor.

Um percentual expressivo (40%) utiliza sempre outros livros de matemática no preparo de suas aulas. O uso desses livros contribui para o aprofundamento do assunto que em alguns casos pode estar tratado de forma superficial no livro didático do Ensino Médio.

A Internet, depois do livro didático, é o recurso mais utilizado pelos professores (cerca de 51% a utilizam sempre). O acesso rápido a uma grande gama de informações e recursos torna-a uma importante fonte de pesquisa.

As revistas de Matemática e/ou Educação não são utilizadas sempre, mas são um recurso do qual 46% dos professores lançam mão algumas vezes no preparo de suas aulas. Dentre os recursos raramente ou nunca utilizados, os principais são os livros de História da Matemática e paradidáticos, correspondendo a 52% e 49% respectivamente.

Na questão 12 foi perguntado se na escola em que o professor trabalha o conteúdo Números Complexos está no planejamento da disciplina Matemática. Cento e trinta e cinco pessoas responderam **Sim** e os demais **Não**. Nota-se que este tópico continua a fazer parte do currículo de Matemática da maioria das escolas.

Já na questão 13 o professor deveria responder se trabalha esse assunto ao lecionar em turmas do 3º ano do Ensino Médio. Cento e trinta e três responderam **Sim**, onze responderam **Não** e sete nunca lecionaram em turmas do 3º ano do Ensino Médio. Dentre os que não trabalham esse assunto, três deles trabalham em escolas nas quais os números complexos fazem parte do planejamento de Matemática. Chama atenção o fato de apenas um dos professores que responderam **Não** considerar este conteúdo pouco relevante, os demais o consideraram indispensável ou relevante.

As questões 14 a 17 dizem respeito especificamente ao ensino dos números complexos e foram respondidas apenas pelos cento e trinta e três que marcaram a opção **Sim** na questão 13. Nas Figuras 31 a 34 podemos ver tabuladas as respostas dadas em cada questão, respectivamente.

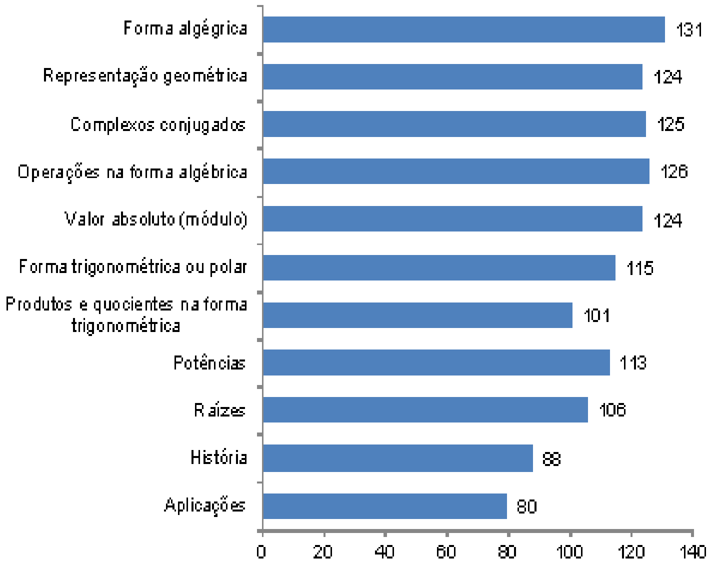


Figura 31: Tópicos abordados ao ensinar números complexos
Fonte: autora.

A forma algébrica dos números complexos, incluindo as operações, é o tópico mais explorado (mais de 80%). As aplicações e a história são os menos abordados, tal como na graduação (questão 7).

Sobre a representação geométrica, alguns professores comentaram:

P1: "*Deve-se dar ênfase às manipulações geométricas, as quais deverão conduzir à manipulação de um operador algébrico, que será chamado de i com a finalidade de se encontrar ou descobrir um número (não real) cujo quadrado vale -1, dentro de um contexto significativo*".

P11: "*É preciso explorar aspectos geométricos relacionados aos números complexos, uma vez que as operações com esses números estão relacionadas a rotações, simetrias, ampliações e reduções no plano de Argand-Gauss. Se essa mudança ocorrer, acreditamos que fará sentido para os alunos de ensino médio o estudo dos números complexos*".

P32: "*Creio que seja extremamente útil trabalhar a representação gráfica do complexo, em conjunto com o estudo de trigonometria*".

E ainda sobre o uso de softwares gráficos para auxiliarem o estudo:

P12: "*Alguns programas auxiliam a representação do número complexo no plano, GeoGebra*".

P29: "*Julgo que seja importante apresentar este conteúdo tendo um software como recurso para construção deste conceito.*

A Figura 32 refere-se a forma como o professor introduz o assunto.

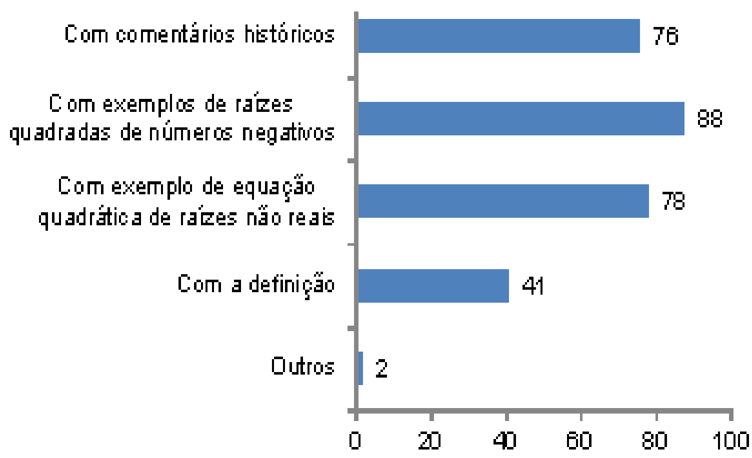


Figura 32: Forma como o professor costuma introduzir o assunto

Fonte: autora.

Exemplos de raízes quadradas de números negativos são a forma mais comum dos participantes da pesquisa introduzirem o assunto. Em segundo lugar estão os exemplos de equações quadráticas de raízes não reais. Dos setenta e oito professores que marcaram esta opção, quarenta e dois também marcaram Comentários históricos. O comentário do professor **P9** é um exemplo disso.

"*Todo nº real, quando elevado ao quadrado, resulta não negativo. Logo na [equação] x ao quadrado mais 1=0, não tem solução real. Na equação do segundo grau, calculamos* *inicialmente o discriminante para verificar se =0 ou maior que. Caso contrário, não tem solução real. Eles foram criados para sanar essas insuficiências no conjunto dos Reais. No ensino médio, fazemos comentário dos matemáticos Cardano e Bombelli, nas suas pesquisas e solução de equações. Partindo do princípio i ao quadrado é = -1, o professor desenvolve o assunto, calmamente, verificando sempre as dúvidas, e seu trabalho fica muito simples, já que o assunto é complexo*".

O uso de equações quadráticas pode induzir a equívocos históricos, levando os alunos a pensar que foram elas que historicamente motivaram o estudo dos números complexos, quando na verdade foram as equações cúbicas. O professor **P22** foi o único a fazer referência a elas ao marcar a opção **Outro** e escrever "*Equação de Cardano*".

O professor **P32** também marcou a opção **Outro** e respondeu introduzir o assunto "*geometricamente como um ponto no plano*".

A Figura 33 aponta as principais justificativas dadas pelos professores para o estudo dos números complexos no Ensino Médio.

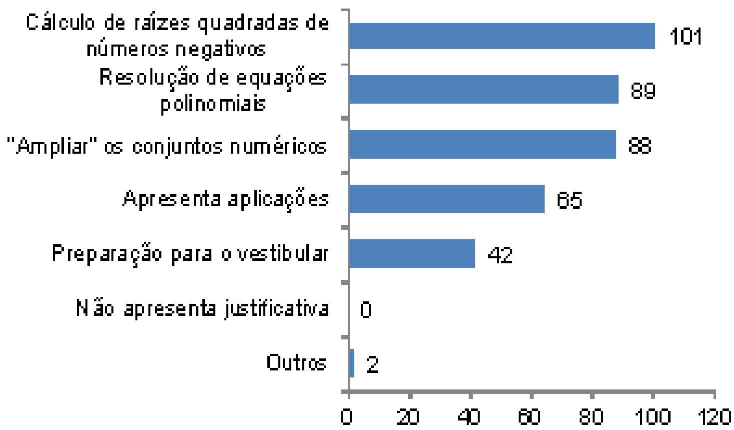


Figura 33: Justificativa apresentada aos alunos para o estudo dos números complexos no Ensino Médio

Fonte: autora.

Observamos que a principal forma de introduzir o assunto é também a principal justificativa dada para o seu estudo no Ensino Médio.

A resolução de equações polinomiais e a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos também estão entre as justificativas mais dadas. Apenas dezoito professores marcaram uma única opção.

O vestibular foi a opção menos selecionada (aproximadamente 32% dos professores).

As respostas dadas nesta questão vão ao encontro das respostas à questão 9, sobre os itens que confirmam a relevância do ensino dos números complexos no Ensino Médio.

A importância dos números complexos para algumas engenharias é uma das justificativas dadas pelo professor **P18**, enquanto para **P66** é "*mesclar álgebra e geometria*". As questões anteriores indicam que tanto as aplicações quanto essa "*mescla*" não são muito exploradas. **P17** comenta: "*para falar sobre este assunto deve-se obrigatoriamente mostrar uma aplicação prática*".

As aplicações dos números complexos que os professores apresentam aos seus alunos estão listadas na Figura 34.

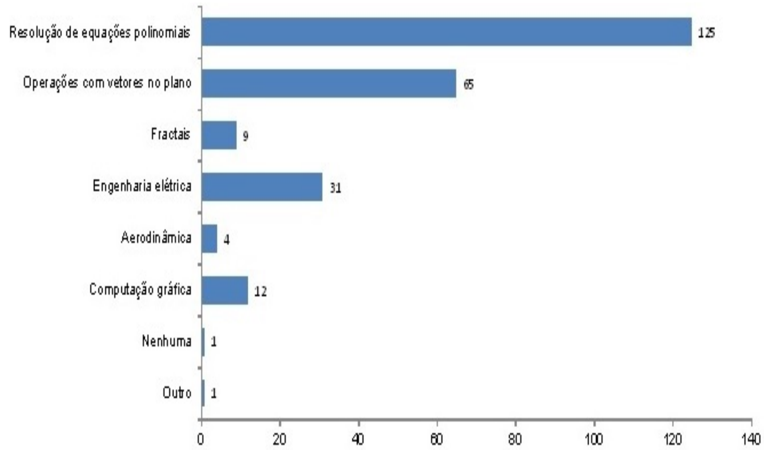


Figura 34: Aplicações dos números complexos apresentadas aos alunos

Fonte: autora.

Os resultados mostrados nesta figura coadunam com o comentário feito na questão 7 sobre as aplicações e com as respostas das questões 10 e 11. Aqui, a ordem da frequência das aplicações é a mesma do nível **Compreensível** da questão 11. Em relação às aplicações que os professores conhecem (questão 10) apenas permutam Computação gráfica e Fractais.

O professor **P28** que marcou a opção **Outro** apenas escreveu que apresenta as aplicações por ele selecionadas se requisitado por outra disciplina técnica.

Os resultados dessa pesquisa indicam que a relevância do ensino de números complexos, do ponto de vista do professor, está fortemente ligada à aplicabilidade desse conteúdo. Muitos não estudaram aplicações durante a graduação e levam esse desconhecimento para sala de aula. Outros não consideram a maior parte delas compreensíveis para alunos do Ensino Médio, sendo o estudo desse conjunto numérico relevante apenas para o cálculo de raízes quadradas de números negativos e na resolução de equações polinomiais. Por isso a ênfase na forma algébrica. Os que partilham dessa opinião argumentam que os números complexos deveriam ser ensinados somente em cursos técnicos e de graduação em exatas.

Ao mesmo tempo são justamente as aplicações que validam, na opinião de vários professores, o ensino deste tópico da matemática no Ensino Médio.

Capítulo 4

Análise de livros didáticos

O livro didático continua a ser a principal fonte de pesquisa para a maioria dos professores no preparo de suas aulas. Segundo Azevedo (2005), desde meados do século XX os livros didáticos passaram a ser um instrumento pedagógico central na sala de aula: "para aprender e ensinar, do livro didático dependem alunos e professores"(AZEVEDO, 2005, p.5). Os resultados da pesquisa realizada nesse trabalho confirmam este fato – 79% dos participantes responderam sempre utilizar o livro didático.

Como aponta Díaz (2011, p.615),

> Ao oferecer aos professores uma organização de conteúdos, um modelo didático de trabalho com esses conteúdos, atividades para os alunos desenvolverem e, em muitos casos, um manual para o professor, o livro didático se configura como um importante material na prática pedagógica, na medida em que ajuda a "clarear" parte significativa da atividade profissional diária, por exemplo, planejar as ações didático-curriculares a serem desenvolvidas em nas aulas.

Díaz (2011) salienta ainda o papel mediador do livro didático entre o currículo prescrito e o currículo praticado. Segundo ele, o livro didático mostra-se como um organizador eficiente dos conhecimentos escolares e, em muitos casos, determina o que deve ser ensinado. Ele chega a afirmar que o currículo escolar não é definido por diretrizes governamentais ou planejamentos dos professores – ainda que sejam fundamentais –, mas por meio das orientações do livro didático.

Devido à importância desse instrumento, considerou-se pertinente analisar os enfoques e o grau de relevância dado nos livros didáticos ao conteúdo *Números Complexos*. Foram analisados os capítulos referentes ao tema em questão nos livros de Matemática e no Manual do professor das sete coleções aprovadas no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2012 – Matemática. Em todas as coleções esse conteúdo se encontra no volume

3. Considerou-se pertinente a análise do Manual do professor por ele conter orientações e sugestões para o trabalho em sala de aula.

Os livros serão identificados do seguinte modo:

L1: Matemática: Contexto e aplicações. Luiz Roberto Dante. Editora Ática.

L2: Conexões com a Matemática. Juliana Matsubara Barroso (org.). Editora Moderna.

L3: Matemática: ciência e aplicações. Gelson Iezzi [et all]. Editora Saraiva.

L4: Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. Jackson Ribeiro. Editora Scipione.

L5: Matemática - Paiva. Manoel Paiva. Editora Moderna.

L6: Novo olhar - Matemática. Joamir Roberto de Souza. Editora FTD

L7: Matemática: ensino médio. Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. Editora Saraiva.

Citações referentes ao Manual do professor serão indicadas com um apóstrofo. Por exemplo, **L1'** refere-se ao Manual do professor do livro **L1**.

Análises de livros didáticos têm sido feitas em diversos trabalhos que versam sobre Números Complexos. Enquanto Rosa (1998) analisou a forma como o tema é abordado, com um foco especial na história e Ferreira (2006) fez uma análise específica sobre a história dos números complexos nos livros didáticos, Araújo (2006) enfatizou a forma de apresentação do conteúdo. De modo semelhante, Neto (2009) analisou a estrutura organizacional quantitativa dos capítulos dedicados aos números complexos em cada livro didático e a forma de apresentação do conteúdo.

A presente análise tem em vista tentar verificar a relevância atribuída pelos autores dos livros didáticos ao ensino de Números Complexos no Ensino Médio e como essa visão delineia a abordagem do tema. Sobre esse aspecto, encontramos no Guia de livros didáticos – PNLD 2012 – Matemática:

> Todas as coleções aprovadas incluem o estudo dos números complexos, em menor ou maior nível de aprofundamento. Considerar os números complexos como tópico obrigatório no ensino médio não é consenso entre os educadores. Muitos só os consideram indispensáveis para aqueles alunos que vão utilizar modelos matemáticos mais avançados em suas profissões. Por exemplo, engenheiros (ou técnicos nas áreas da Engenharia), físicos, matemáticos, entre outros. Mesmo nesses casos, é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano e com as equações algébricas. No entanto, nas coleções aprovadas isso não é levado em consideração (BRASIL, 2011, p. 28).

A maioria dos livros traz explicitamente os objetivos do capítulo sobre números complexos. Estes objetivos estão descritos abaixo:

L2:

- comprender o conjunto dos números complexos do ponto de vista histórico;
- ampliar a visão em relação aos conjuntos numéricos;
- operar algébrica e geometricamente com números complexos;
- aplicar os números complexos em diversas áreas do conhecimento.

L3

- compreender o contexto histórico que envolve o surgimento e reconhecimento dos números complexos da Matemática;
- identificar os números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica, bem como compreender sua representação geométrica;
- trabalhar com as operações envolvendo números complexos;
- estabelecer relações entre os números complexos e a geometria analítica.

L4

- compreender o conceito de números complexos;
- representar e identificar um número complexo na sua forma algébrica;
- interpretar e representar geometricamente os números complexos no plano de Argand-Gauss;
- compreender e utilizar o conceito de igualdade de números complexos;
- realizar operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números complexos;
- compreender o conceito de módulo de um número complexo;
- compreender o conceito de argumento de um número complexo z;
- representar a forma trigonométrica de z;
- realizar operações que envolvam os conceitos de números complexos na forma trigonométrica, bem como interpretar geometricamente os resultados dessas operações;

- compreender e aplicar os conceitos que envolvem números complexos, relacionando-os à geometria;
- utilizar os conceitos que envolvem números complexos na resolução de situações-problema.

L6

- compreender a necessidade matemática do conjunto dos números complexos;
- perceber que todos os números reais são também números complexos;
- identificar os números complexos em suas variadas representações, sejam algébricas, geométricas ou trigonométricas;
- resolver equações cujas raízes não sejam reais;
- efetuar operações envolvendo números complexos.

L7

- Não é o tratamento exaustivo dos números complexos e de suas propriedades, mas sim que os alunos conheçam um pouco da história de como a Matemática foi se construindo pelas mãos, de seres humanos, em sua cultura e tempo, bem como possam rever e aprofundar os conhecimentos que possuem sobre as operações e suas aplicações na resolução de equações.

L1 e **L5** não trazem de forma explícita os objetivos do capítulo.

Pelos objetivos listados percebe-se que a ênfase está na compreensão do conceito de números complexos e nas operações com estes em suas diferentes representações. Em termos das aplicações, o objetivo principal é a resolução de equações algébricas.

De modo geral os manuais dos professores dos livros didáticos analisados trazem na seção referente ao capítulo sobre números complexos a resolução dos exercícios propostos (ocupam a maior parte) e comentários sobre alguns tópicos e/ou exercícios específicos do capítulo. Em alguns livros encontramos textos complementares sobre a parte histórica (**L5'** e **L6'**) e algumas demonstrações (**L2', L4', L5' e L6'**). Apenas em **L1**' há sugestão de atividades suplementares e de leitura para aprofundamento do tema.

Todos os livros analisados abordam os seguintes tópicos relacionados aos números complexos: forma algébrica, representação geométrica, complexos conjugados, operações na forma algébrica, módulo, forma trigonométrica, produto e quociente na forma trigonométrica, potência, história e aplicações.

Destes tópicos destacamos a presença, tímida ou marcante, da História da Matemática. Vemos que ela tornou-se importante recurso didático na abordagem dos números complexos. O surgimento dos números complexos é contado em **L1** a partir de Cardano, passando por Rafael Bombelli, Euler, até chegar a Gauss. Ao final do capítulo tem-se o texto *Um pouco de história*. Em **L2**, o texto introdutório traça uma linha do tempo que vai de Tartaglia a Gauss e chama a atenção para o erro de relacionar a *origem* dos números complexos à resolução de equações do 2º grau. Os comentários históricos em **L3** iniciam com Cardano, para justificar a resolução de uma equação quadrática de discriminante negativo, seguindo até Hamilton. **L4** também faz uso da história para iniciar o capítulo, indo de Tartaglia, com a resolução das equações cúbicas, a Gauss.

L5 inicia com um pequeno comentário sobre o processo de evolução do conceito de número. Em seguida, por meio de um problema, chega-se a uma equação cúbica. Ao tentar resolvê-la pelo método proposto por Tartaglia depara-se com $\sqrt{-16}$. Um brevíssimo comentário histórico é feito. Em **L6** e **L7** também são feitos comentários históricos. Percebe-se que alguns livros ainda comentem o equívoco de atribuir à resolução de equações quadráticas o surgimento dos complexos.

Outro ponto que chama a atenção é a potenciação e radiciação. Em **L3** e **L7**, mesmo sendo abordados, no Manual do professor esses tópicos são dados como opcionais. Para o autor de **L7'** eles "de modo algum são essenciais em um curso de Ensino Médio" (SMOLE e DINIZ, 2010b, p.37). **L5** e **L6** não abordam esse tópico. **L5'** traz considerações sobre a radiciação em $\mathbb{C}$, afirmando não ser esta uma operação: "por exemplo, há 3 raízes cúbicas complexas distintas de 8 e, portanto, como o resultado não é único, a radiciação não é operação em $\mathbb{C}$" (PAIVA, 2009b, p.36). Os demais livros trazem esses dois tópicos.

As justificativas dadas nos livros para o estudo dos números complexos são a resolução de equações polinomiais e a "ampliação" dos conjuntos numéricos. O único livro que não utiliza como exemplo uma equação quadrática é **L5**. Apenas **L7** traz o capítulo sobre números complexos entre os capítulos sobre polinômios e equações polinomiais, reforçando a ideia de que o objetivo principal do estudo dos números complexos no Ensino Médio é a resolução destas equações.

Essa tendência dos livros didáticos se assemelha a dos professores. Os dados da pesquisa mostraram que 59% e 58% dos pesquisados justificam o estudo dos números complexos no Ensino Médio com a resolução de equações polinomiais e a "ampliação" dos conjuntos numéricos, respectivamente.

Quanto a essa "ampliação", a coleção da qual **L1** faz parte é a única, dentre as coleções dos livros analisados, que traz no volume 1 uma introdução ao conjunto dos números complexos ao tratar dos conjuntos numéricos. Por meio de um exemplo de equação quadrática com raízes não reais o livro justifica a necessidade de um novo conjunto numérico e comenta, de forma rápida, as operações com números complexos na forma algébrica.

Sobre isso o professor **P70** comentou:

Muitas vezes ao apresentar o conteúdo de equações do segundo grau e abordar soma e produto de raízes, alunos ficam confusos com equações em que se tem a soma e o produto das raízes porém a equação não tem raízes reais e isso causa inquietação. O professor então diz ao aluno que a equação tem raízes, mas de um tipo que ainda será estudado. Alguns livros já abordam o conjunto dos números complexos ao apresentar os conjuntos numéricos no primeiro ano do ensino médio. Talvez essa apresentação seja importante, pelo menos como uma introdução para dar conta desse tipo de problema.

Para o professor **P92** o "*ensino de complexos deveria ser iniciado no 1º ano médio (noções básicas), continuado no 2º com operações e terminado no 3º com aplicações*".

A Figura 35 mostra as aplicações dos números complexos presentes em cada um dos livros analisados.

Aplicações \ Livro	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7
Resolução de equações polinomiais	X	X	X	X	X	X	X
Operações com vetores no plano		X		X		X	
Fractais	X						
Engenharia elétrica	X	X		X		X	
Aerodinâmica						X	X
Rotação de pontos no plano	X			X	X	X	X

Figura 35: Aplicações dos números complexos nos livros didáticos

Fonte: autora.

Alguns autores trazem logo no início do capítulo aplicações dos números complexos, ainda que não as explique detalhadamente. Isto pode ser visto em **L1** (fractais), **L5** (centro de massa), **L6** (aerodinâmica) e **L7** (eletricidade e movimento dos fluidos).

Em **L1**, além do exemplo inicial, após a representação geométrica dos números complexos, é feito um brevíssimo comentário sobre operações com vetores no plano e aplicações na engenharia elétrica que "o aluno que optar por um curso superior na área de exatas descobrirá" (DANTE, 2010a, p.145). O capítulo traz ainda a resolução de equações binômias e trinômias. Ao final também são mostrados exemplos de rotação de pontos no plano e de circuito de corrente alternada.

No último parágrafo do texto introdutório de **L2** cita-se a existência de aplicações na engenharia (modelagem de circuitos elétricos, movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na aerodinâmica, na geometria fractal e em sistemas dinâmicos. O livro faz uma abordagem vetorial dos números complexos. No entanto os exemplos relacionados às operações com vetores e à engenharia elétrica aparecem na forma de exercícios, que podem passar despercebidos.

Em **L3** vemos apenas as aplicações relacionadas à resolução de equações polinomiais. Este fato pode ser entendido pelo comentário no Manual do professor:

> Os capítulos referentes a "números complexos, polinômios e equações algébricas"representam os assuntos mais "áridos" de toda a Coleção, **com poucas relações com o cotidiano e aplicações práticas**. Não constituem partes fundamentais na formação geral de um estudante de educação básica e, possivelmente, os assuntos abordados só serão necessários aos alunos que prosseguirem os estudos em cursos universitários e em carreira de Exatas. Desse modo, sugerimos que o professor não invista um tempo grande no planejamento dessas aulas (grifo nosso). (IEZZI, 2010b, p.32).

Este comentário coaduna com os resultados apresentados no capítulo anterior. Cerca de 29% dos professores consideraram o ensino de números complexos no Ensino Médio pouco relevante ou irrelevante. Destes, cerca de 59% justificaram suas respostas marcando que não tem aplicação no dia a dia e para cerca de 77% a maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois.

Com respeito às aplicações encontramos em **L4'**:

> Mas citar exemplos não é uma tarefa simples, pois a grande maioria envolve linguagens específicas da área e métodos pouco convencionais. Logo, dentre vários exemplos, foi abordada uma importante aplicação dos números complexos, presente no cotidiano de grande parte da população: a geração e manipulação das tensões alternadas. (RIBEIRO, 2011b, p. 275.4).

Comparando com as respostas dadas no questionário verifica-se que, de fato, para a maioria dos participantes da pesquisa, aplicações não "imediatas" dos números complexos não são consideradas compreensíveis para alunos do Ensino Médio. Entendam-se aplicações "imediatas" a resolução de equações polinomiais e operações com vetores no plano. Excetuando-se estas, aplicações na engenharia elétrica são as mais conhecidas pelos professores (45%) e as mais ensinadas por eles (21%).

Sobre as operações com vetores no plano, o professor **P22** escreveu no questionário: "*A ideia de vetor associada aos números complexos deveria ser mais difundida nos livros didáticos.*" Esta observação confere com os dados da Figura 34, que mostra que apenas 3 dos livros didáticos analisados trazem esta aplicação.

Ainda, segundo **P97**, "*pouco se desenvolve a parte em que os afixos formam lugares geométrico, nos atuais livros didáticos. É um momento importante para relacionar a Geometria analítica com números complexos*".

Na abertura do capítulo de **L5** sobre números complexos há um problema sobre a determinação do centro de massa do sistema Terra-Lua. No entanto sua resolução encontra-se apenas no livro do professor e ele não é retomado em nenhum momento do capítulo. Além disso, a resolução desse problema é mais "natural" utilizando os conceitos estudados nos capítulos anteriores sobre geometria analítica. Desse modo, não é um exemplo muito significativo de aplicação dos números complexos.

Apesar de não dar detalhes sobre a aplicação, o texto sobre aerodinâmica, na introdução do capítulo de **L6**, pode ser um elemento motivador. Segundo o autor este exemplo teve como objetivo

> ... levar os alunos a constatar que na construção de equipamentos sofisticados, como a asa de um avião [...], estão envolvidos conceitos matemáticos que, por mais avançados que sejam [...], necessitam de conceitos básicos para a sua compreensão, como os relacionados ao estudo dos números complexos (SOUZA, 2010b, p.69).

Por meio dessa análise verificamos que, de modo geral, para os autores dos livros analisados, a relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio está na ampliação dos conjuntos numéricos tendo em vista a resolução de equações algébricas. Nota-se alguma preocupação em mostrar a existência de aplicações desse novo conjunto numérico em outras áreas do conhecimento. No entanto, as conexões com outros tópicos da matemática são pouco explorados.

Capítulo 5

Os números complexos em documentos oficiais

Neste capítulo analisaremos alguns documentos oficiais que norteiam a elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio. Procuraremos identificar nas orientações dadas a relevância e enfoque atribuídos aos números complexos.

O primeiro documento a ser analisado são as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), por ser um documento de referência nacional. Em seguida serão analisados três documentos de âmbito estadual: Currículo Mínimo (Rio de Janeiro), Conteúdos Básicos Comuns (Minas Gerais) e Diretrizes Curriculares da Educação Básica (Paraná). A escolha desses documentos estaduais deve-se as referências feitas a eles por professores que participaram da pesquisa.

5.1 Os números complexos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Um dos objetivos centrais desse documento é facilitar a organização do trabalho escolar e para isso, entre outras coisas, apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos, estabelecendo temas estruturadores do ensino disciplinar em cada área.

Os conteúdos matemáticos estão divididos em três eixos estruturadores: Álgebra (números e funções), Geometria e medidas e Análise de dados. Os objetivos do primeiro eixo estruturador são "os campos numéricos dos números reais e, *eventualmente*, os números complexos e as funções e equações de variáveis reais"(grifo nosso) (BRASIL, 2007, p. 120). Especificamente quanto aos números complexos encontramos:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2007, p.122).

A citação acima sugere que a única aplicação dos números complexos acessível a alunos do Ensino Médio é a resolução de equações polinomiais. Isto pode induzir o leitor (professor) a considerar que a forma algébrica dos números complexos é a única parte relevante de ser ensinada. Além disto, este conteúdo não é considerado indispensável, mas opcional, não constando na distribuição dos conteúdos proposta para as três séries.

No entanto, uma abordagem adequada dos números complexos pode contribuir no desenvolvimento de competências propostas no PCN+.

Quanto à investigação e compreensão:

- ✓ o estudo dos números complexos em suas variadas representações dá ao aluno condições de frente a uma situação ou problema, decidir-se pela utilização da forma algébrica, geométrica ou trigonométrica;
- ✓ também contribui para uma visão sistematizada de diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, sendo possível estabelecer conexões com outros temas e conteúdos, aplicando o conhecimento de forma integrada e articulada. Um exemplo são as operações com pontos (ou vetores) no plano, em que é possível relacionar geometria analítica, matrizes e números complexos.

Quanto à contextualizaçao sócio-cultural:

- ✓ o uso da história dos números complexos em sala de aula propicia a compreensão da construção do conhecimento matemático como processo histórico, sem dogmatismos ou certezas definitivas;
- ✓ ainda que não seja possível explicar com detalhes a alunos do ensino médio muitas das aplicações dos números complexos, citá-las contribui para que eles percebam o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia, por exemplo na aerodinâmica e na geração de energia elétrica.

5.2 Os números complexos no Currículo Mínimo do estado do Rio de Janeiro

O Currículo Mínimo é um documento elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro que serve de referência a todas as escolas públicas estaduais. E tem como finalidade "orientar, de forma clara e objetiva, os itens que não podem faltar no processo de ensinoaprendizagem, em cada disciplina, ano de escolaridade e bimestre" (RIO DE JANEIRO, 2012, p.2).

Em 2011 foram desenvolvidos os Currículos Mínimos de algumas disciplinas, dentre elas Matemática. Em 2012 eles foram revisados e as demais disciplinas contempladas.

A revisão do Currículo proposto para Matemática levou em conta três fatores, considerados de maior relevância:

> **1.** Análise das críticas ao Currículo Mínimo implementado, recebidas por e-mail durante o ano letivo de 2011;
>
> **2.** Análise da distribuição dos conteúdos nos livros aprovados pelo PNLD;
>
> **3.** Análise e alinhamento do Currículo Mínimo às matrizes de referência das avaliações externas, tais como SAEB, ENEM, SAERJ (RIO DE JANEIRO, 2012, p.3).

Importante destacar que os números complexos não constam na matriz de referência de nenhuma das avaliações externas supracitadas.

No Currículo Mínimo os números complexos figuram no terceiro bimestre da terceira série do Ensino Médio (Figura 36).

Figura 36: Recorte do layout do Currículo Mínimo, 3ª série do Ensino Médio

Fonte: Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, p.20

Ao contrário do PCN+, aqui eles são item obrigatório. No entanto, aborda-se apenas sua forma algébrica. Esta visão pode gerar um aprendizado estanque, sem conexão com outros conteúdos ou restrito a resolução de equações algébricas (conteúdo do quarto bimestre).

Na opinião do professor **P144**:

"O assunto números complexos embora pareça deslocado, para alguns, no currículo de matemática é um assunto muito rico de se explorar, possui aplicações interessantes, principalmente, no Estudo das Correntes Alternadas. O problema para algumas escolas é o tal curriculo mínimo do Estado do RJ, com ele, qualquer proposta de conteúdo vai por água abaixo, é uma proposta muito pobre".

Diveras aplicações dos números complexos estão relacionadas a sua forma trigonométrica e a representação geométrica. Se essas relações não são apresentadas, o aluno fica privado de tais conhecimentos.

5.3 Os números complexos nos Conteúdos Básicos Comuns do estado de Minas Gerais

Este documento fundamenta-se nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais e seu objetivo é "tornar operacionais alguns princípios esboçados naquele documento, especificando e detalhando mais as unidades temáticas e sugerindo estratégias de ensino" (CARNEIRO, SPIRA, SABATUCCI, 2007, p.31).

São propostos três eixos temáticos: Números, contagem e análise de dados; Funções elementares e modelagem e Geometria e medidas.

A distribuição dos conteúdos no Ensino Médio foi feita seguindo as etapas de formação básica (1º ano), passando pelo aprofundamento (2º ano) e finalizando com conteúdos complementares (3º ano). Com respeito ao terceiro ano, o texto diz que a escola *poderá eleger* tópicos complementares dentre os propostos.

Sobre isto um dos professores participantes da pesquisa comenta: *"Para o Governo de Minas número complexo é tópico complementar. Será trabalhado se por acaso houver tempo. As prioridades são os tópicos do CBC"* (**P18**).

De fato, os números complexos compõem o eixo temático Números, Contagem e Análise de Dados e constam nas sugestões de tópicos complementares para o 3º ano (Figura 37).

Eixo Temático VII

Números, Contagem e Análise de Dados

Tema 15: Números

TÓPICOS	HABILIDADES
37. Números complexos	37.1. Reconhecer a necessidade da ampliação do conjunto dos números reais. 37.2. Representar geometricamente um número complexo. 37.3. Operar com números complexos e identificar suas partes real e imaginária: somar, subtrair; multiplicar, dividir, calcular uma potência, raízes, o conjugado e o módulo de um número complexo. 37.4. Resolver equações do segundo grau. 37.5. Forma polar ou trigonométrica de números complexos.

Figura 37: Recorte do layout dos Conteúdos Básicos Comuns, 3ª série do Ensino Médio
Fonte: Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, p.56

Na parte final do documento há sugestões de atividades e orientações para o trabalho em sala de aula. A Figura 38 mostra sugestões referentes aos números complexos.

Tópicos 3º Ano

Eixo Temático VII

Números, Contagem e Análise de Dados

Tema 15: Números

- Propor problemas que envolvam a resolução de equações de segundo grau com discriminante negativo.
- Representar geometricamente, no plano complexo, as operações de adição e multiplicação, bem como a conjugação, relacionando-as com simetrias, rotações e semelhança. Dar ênfase à geometria que acompanha os números complexos.

Figura 38: Recorte do layout dos Tópicos do CBC, 3ª série do Ensino Médio
Fonte: Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, p.75

Este documento, dentre os analisados, é o que trata de forma mais ampla e detalhada o conjunto dos números complexos. O texto deixa claro que o aluno deve reconhecer a necessidade de ampliação do conjunto dos números reais justificando assim, o estudo dos números complexos. Fica subentendido que este reconhecimento deva vir pormeio da resolução de equações quadráticas com discriminante negativo. É dada ênfase à representação geométrica dos números complexos, relacionando as operações em $\mathbb{C}$ com as transformações no plano. Porém, por ser um tópico complementar, a proposta para o ensino do conjunto $\mathbb{C}$ pode não ser levada a cabo.

5.4 Os números complexos nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná

Este documento apresenta a concepção de currículo para a educação básica e as diretrizes curriculares de cada disciplina adotados pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná.

Concebe-se um currículo disciplinar que dá ênfase à escola como lugar de socialização do conhecimento e destaca

> a importância dos conteúdos disciplinares e do professor como autor de seu plano de ensino, contrapondo-se, assim, aos modelos de organização curricular que vigoraram na década de 1990, os quais esvaziaram os conteúdos disciplinares para dar destaque aos chamados temas transversais (PARANÁ, 2008, p.24).

Especificamente quanto à Matemática o texto diz resgatar a importância do conteúdo matemático e da disciplina Matemática. Considera imprescindível o estudante se apropriar do conhecimento de forma que "compreenda os conceitos e princípios matemáticos, raciocine claramente e comunique ideias matemáticas, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança [1]"(LORENZATO e VILA, apud PARANÁ, 2008, p.47).

O currículo é construído a partir de conteúdos estruturantes e destes organizam-se os conteúdos básicos. Os conteúdos estruturantes em Matemática são: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação.

Os números complexos compõem o bloco Números e Álgebra. Eles são contados entre os conjuntos numéricos e seu nascimento atribuído a etapa de desenvolvimento da álgebra a partir do século XVII, com a resolução de equações algébricas. Segundo as Diretrizes, os números devem ser compreendidos de forma ampla, uma vez que estão presentes em contextos articulados com os demais conteúdos da Matemática. Quanto aos números complexos, espera-se que o aluno os compreenda e as suas operações.

Diante da proposta de currículo apresentada, inferimos que o ensino dos números complexos deva trazer para os alunos o contexto do desenvolvimento histórico da matemática que motivou o seu “surgimento” e dar condições aos alunos de operar nesse conjunto e estender os conceitos a outros campos da matemática e de outras ciências.

O professor **P65** escreveu: *"Achei uma pena ter caído das diretrizes para o ensino médio do Paraná. Quem sabe, com a ampliação da carga horária, seja possível retomar"*.

[1] LORENZATO. S.; VILA, M. C. Século XXI: qual matemática é recomendável? Revista Zetetiké. Campinas, ano 1, n. 1, p. 41-49. 1993.

No entanto, em outro documento, intitulado Caderno de Expectativas de Aprendizagem, de 2012, os números complexos continuam sendo tratados como conteúdos básicos e espera-se que o aluno:

> ✓ identifique a unidade imaginária (i) como elemento do conjunto dos números complexos e reconheça as formas algébricas, gráficas e trigonométricas destes números;
>
> ✓ identifique e represente as formas algébricas, gráficas e trigonométricas dos números complexos;
>
> ✓resolva situações-problema envolvendo o cálculo de equações cujas raízes não são reais (PARANÁ, 2012, p.92).

Não há um consenso, nos documentos analisados, sobre a relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio, mas, considerando os parâmetros de relevância utilizados na pesquisa, para a maioria deles esse conteúdo pode ser classificado como pouco relevante.

Capítulo 6

A relevância dos números complexos para a Matemática e outras Ciências

A importância do conjunto dos números complexos não se limita ao estudo das equações algébricas, mas estende-se a outros tópicos da Matemática, com aplicações em outras Ciências.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, cada disciplina deve tratar, dentre outras coisas, das dimensões tecnológicas a ela correlatas e "prover os alunos de condições para desenvolver uma visão de mundo atualizada, o que inclui uma compreensão mínima das técnicas e dos princípios científicos em que se baseiam" (BRASIL, 2000, p.8).

Dentre os objetivos do ensino de Matemática no nível médio apontados nesse documento, estão levar o aluno a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
>
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
>
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo (BRASIL, 2000, p.42).

Consideramos o ensino de números complexos no Ensino Médio relevante por sua importância histórica no desenvolvimento da Matemática, pelas várias conexões possíveis de serem estabelecidas com outros tópicos da Matemática estudados nesse nível de escolaridade e por suas diversas aplicações.

Entendemos, contudo, que a abordagem adotada pelo professor pode tornar evidente ou não essa relevância. Não é nossa intenção neste trabalho propor uma abordagem para o ensino de números complexos no Ensino Médio. Diferentes propostas foram feitas em outros trabalhos que versam sobre esse tema.

Rosa (1998) propôs uma abordagem histórica dos números complexos. A sequência didática inicia com a resolução de equações cúbicas pelo método de Cardano-Tartaglia até que em dada equação o aluno perceba a necessidade de extrair a raiz quadrada de um número negativo, por saber *a priori* a solução da equação. Sugere então que o aluno opere com números da forma $a + b\sqrt{-1}$, sendo $\sqrt{-1} = i$, para resolver as equações cúbicas, introduzindo desta forma os números complexos. Neto (2009) elaborou uma sequência didática com ênfase na representação geométrica a partir de operações na reta numérica, passando para pontos e vetores no plano. A proposta de Oliveira (2010) para a aquisição do conceito de números complexos também enfatizou a representação geométrica dos mesmos como vetores no plano, com o auxílio do *software* Geogebra.

Entendemos que além de uma abordagem não restrita a decorar regras, mas que dê significado às operações, o conhecimento de aplicações desse conteúdo pode tornar seu ensino e aprendizado mais significativo e relevante para professores e alunos.

Por essa razão, neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações dos números complexos, relacionando-as com outros tópicos da Matemática e com outras áreas do conhecimento científico.

Embora concordemos que algumas delas talvez não sejam compreensíveis em seus detalhes para alunos do Ensino Médio, mostrá-las, ainda que em linhas gerais, permitirá que eles vejam a importância e presença (ainda que não aparente) desse conteúdo em seu dia a dia. Desta forma, as aplicações não serão tratadas em detalhes, mas em um nível que possa ser acessível a alunos do Ensino do Médio.

6.1 Os números complexos e as equações algébricas

As equações polinomiais são as aplicações dos números complexos mais comumente apresentadas aos alunos do Ensino Médio. De modo geral, elas junto com os polinômios, são estudadas na sequência do estudo do conjunto $\mathbb{C}$.

Denomina-se equação polinomial ou algébrica toda equação escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

$a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}$. n é o grau da equação.

O número complexo α é raiz da equação polinomial se satisfaz a equação, ou seja,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$$

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau $n(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa.

Utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra é possível provar que todo polinômio pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Consequentemente, toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas.

Se a equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi(b \neq 0)$, então admite como raiz o conjugado de $z, \bar{z} = a - bi$.

De fato, dado o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ com coeficientes reais, que admite como raiz o número complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$, isto é, $p(z) = 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + ... + a_1(\overline{z}) + a_0 \\ &= \overline{a_n}\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

6.2 Complexos, matrizes e vetores no plano

Representando vetores na forma matricial, podemos relacionar as operações com números complexos com transformações no plano e operações com matrizes.

Considere o número complexo z, escrito na forma matricial $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e as seguintes transformações no plano:

a) Reflexão em torno do eixo x.

Matriz de reflexão: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$A \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \overline{z}$

b) Homotetia de fator $|c|$.

Matriz de homotetia: $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$B \cdot z = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix} = z \cdot c, c \in \mathbb{R}$$

c) Rotação de ângulo θ positivo.

Matriz de rotação: $C = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$.

$$C \cdot z = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acos\theta - bsen\theta \\ asen\theta + bcos\theta \end{pmatrix} = zw, \text{ sendo } w = (cos\theta, sen\theta)$$

Em especial,

c.1) se $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianos,

$$\begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sen\frac{\pi}{2} \\ sen\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = zi$$

c.2) se $\theta = \pi$ radianos, a rotação corresponde a uma reflexão em torno da origem.

$$\begin{pmatrix} cos\pi & -sen\pi \\ sen\pi & cos\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -z$$

Softwares de geometria dinâmica auxiliam na visualização destas transformações.

Esses conceitos são aplicados na computação gráfica, em especial as rotações. Para imagens tridimensionais utilizam-se os quatérnios, uma "extensão" dos números complexos para quádruplos ordenados.

6.3 Fractais

Fractais são objetos, matemáticos ou naturais (podem ser encontrados em formas da natureza), que se caracterizam pela repetição infinita de um determinado padrão (autossimilaridade). Cada parte de um fractal é similar ao todo. Mandelbrot (1988) criou o termo fractal a partir do adjetivo latim *fractus*, que significa "irregular". O verbo latim correspondente é *frangere*, que significa "quebrar": criar fragmentos irregulares. Nas Figuras 39 a 41 vemos exemplos de fractais.

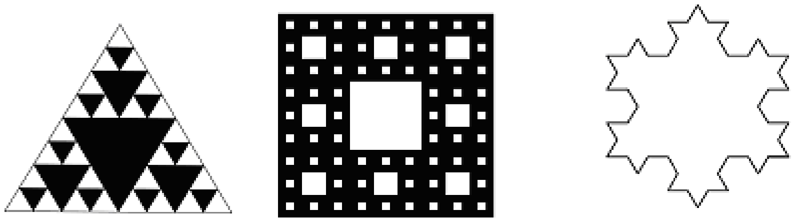


Figura 39: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e Curva de Koch
Fonte: autora.

Figura 40: Samambaia
Fonte: http://fractalmatematico.blogspot.com.br/2011/09/o-que-e-um-fractal.html

Figura 41: Couve-flor
Fonte: http://deumtudo2.blogspot.com.br/2009/09/fractais-na-natureza-parte-ii-12.htmlh

Vários matemáticos nos séculos XIX e XX estudaram diferentes formas de fractais, considerados na época "monstros matemáticos".

Em 1979, Benoît B. Mandelbrot (1924 – 2010), criou uma imagem no plano complexo a partir da função $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde $z_n (n \in \mathbb{N})$ e c são números complexos e $z_0 = 0$.

Forma-se então a sequência: $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ...$

Vejamos alguns exemplos numéricos:

Para $c = 1$:

1, 2, 5, 26, ...

Para $c = i$:

$i, -1 + i, -i, -1 + i, ...$

O conjunto de Mandelbrot é então definido como o conjunto de todos os números complexos c para os quais o processo iterativo $z_{n+1} = z_n^2 + c$ não tende ao infinito, isto é, as partes real e imaginária de z não tendem para o infinito (exemplo $c = i$). No plano complexo este conjunto tem a forma de uma região limitada por um fractal. A Figura 42 traz ampliações de partes do conjunto de Mandelbrot.

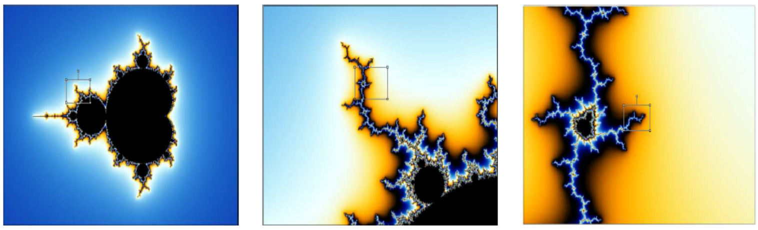


Figura 42: Algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot
Fonte: NUNES, 2006, p. 52

Os conjuntos de Mandelbrot têm aplicações na criptografia, codificação e decodificação de áudio e vídeo e no mercado de capitais.

6.4 Complexos e circunferências no plano

O conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ representa geometricamente o conjunto dos pontos cuja distância à origem é igual a 1. Isto é, S é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, de equação $x^2 + y^2 = 1$ (Figura 43).

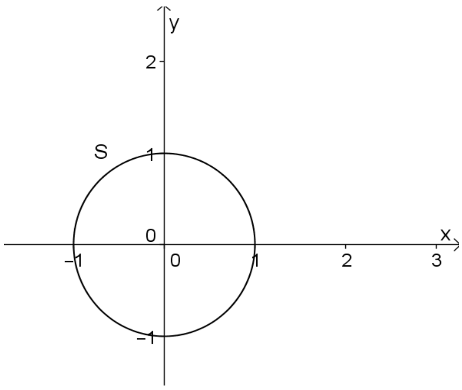


Figura 43: $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$
Fonte: autora

De modo geral, o conjunto $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r, r \in \mathbb{R}_+\}$ corresponde à circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$.

O conjunto $S^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - c - di| = r, c, d \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+, i^2 = -1\}$ corresponde à circunferência de centro (c, d) e raio r, ou seja, $S^2 : (x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$. A Figura 44 é um exemplo.

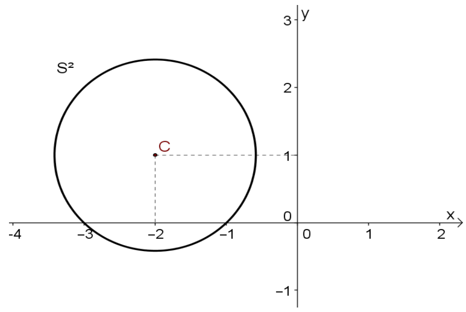


Figura 44: $S^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z + 2 - i| = 2, i^2 = -1\}$

Fonte: autora

O número complexo $c + di$ desloca S^1 $|c|$ unidades no eixo horizontal e $|d|$ unidades no eixo vertical. Se $c < 0$, o deslocamento é para esquerda, se $c > 0$, para direita. Se $d > 0$ o deslocamento é para cima, se $d < 0$, para baixo.

6.5 Aerodinâmica

A aerodinâmica estuda a atuação de forças sobre os objetos no ar. Aviões, barcos, automóveis, ou qualquer outro móvel que se desloque no ar sofre a ação de forças aerodinâmicas. Na construção de um avião, por exemplo, os engenheiros se fundamentam nos princípios da aerodinâmica.

Um aerofólio é uma seção bidimensional, projetada para provocar variação na direção da velocidade de um fluido, ocasionando diferença de pressão. Em aeronaves, o uso do aerofólio está nas seções da asa e nas empenagens (profundor e leme). Ele influencia na força de sustentação dos aviões, responsável por mantê-lo no ar (Figura 45).

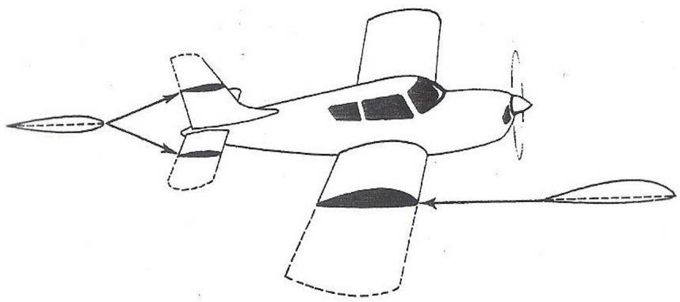


Figura 45: Aerofólios em um avião

Fonte: Adaptado de http://livrepouso.com.br/porqueoaviaovoa/

Dentre os diversos conceitos envolvidos no estudo dos aerofólios estão os números complexos.

Uma função cujo domínio e contradomínio estão contidos em $\mathbb{C}$ é chamada de função complexa.

Considere o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ que geometricamente corresponde a circunferência unitária centrada na origem. E f a função de variável complexa $f(z) = z+\frac{1}{z}$, $z = a + bi$. Esta funçao é um caso particular da Transformaçao de Joukowski.

A função f com domínio em S pode ser reescrita na forma:

$f(z) = f(a + bi) = a + bi + \frac{1}{a+bi} = a + bi + a - bi = 2a$

Geometricamente esta função transforma a circunferência unitária em um segmento de reta no eixo real do plano complexo (Figura 46).

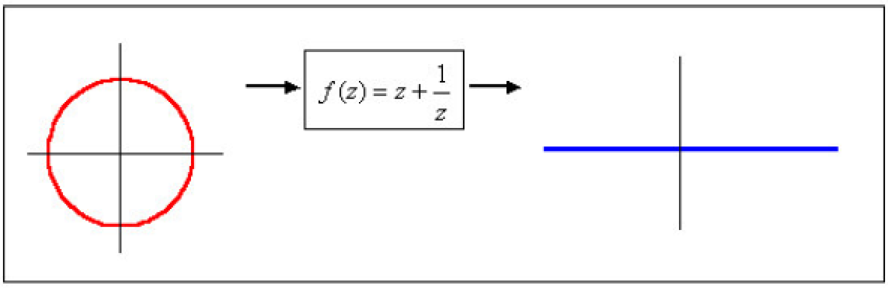


Figura 46: Transformaçao do círculo unitário num segmento mediante a função $f(z) = z + \frac{1}{z}$

Fonte: PAZOS, 2005, p.8

Realizemos agora sobre S a seguinte transformação: deslocamento em $|d|$ unidades para a esquerda e dilatação do raio em $1 + d$ unidades. Para isto definimos o conjunto $S' = \{z \in \mathbb{C}; |z + d| = 1 + d, d \geq -1\}$ (Figura 47).

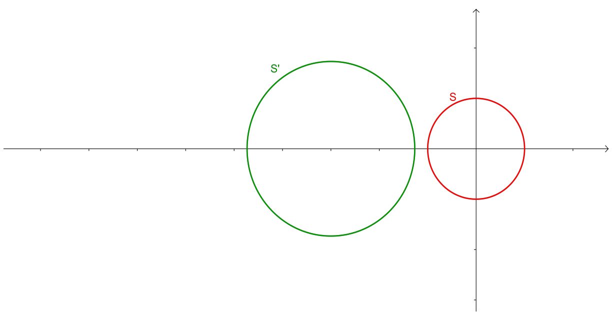


Figura 47: Conjuntos S e S'
Fonte:autora

Aplicando a transformação f sobre S', o conjunto resultante é o aerofólio mostrado na Figura 48.

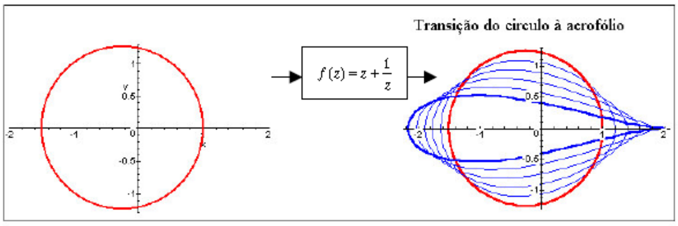


Figura 48: Transformação do círculo unitário devidamente deslocado e dilatado no aerofólio.
Fonte: PAZOS, 2005, p.8

A transformação de Joukowski aplicada a modelos matemáticos de aerofólios cilíndricos permite que engenheiros aeronáuticos estabeleçam previsões das forças de sustentação e arrasto nas asas de um avião.

6.6 Engenharia elétrica

Circuitos elétricos trabalham com tensões e correntes contínuas ou alternadas. Em diversos dispositivos, a forma de onda da corrente depende da forma de onda da tensão neles aplicada, além da natureza dos mesmos.

O sinal contínuo (CC - corrente contínua) tem sempre a mesma polaridade e intensidade. Um exemplo de geradores de corrente contínua são as pilhas e baterias. A Figura 49 mostra o aspecto físico, o símbolo e a curva da tensão deste tipo de gerador, em função do tempo.

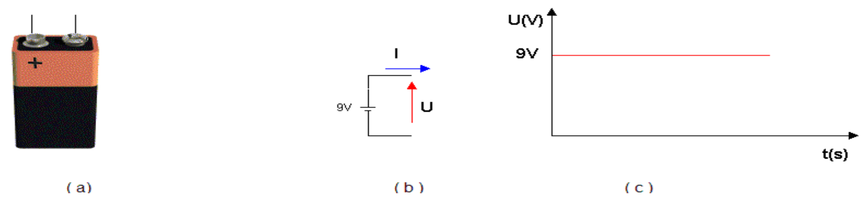
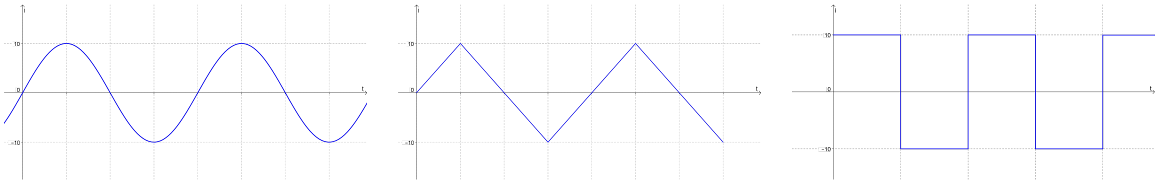


Figura 49: Gerador de tensão contínua – (a) Aspecto físico (b) Símbolo e (c) Gráfico da tensão em função do tempo
Fonte: http://www.eletronica24h.com.br/Curso% 20CA/aparte1/aulas/aula001.html

A corrente alternada (CA) é a forma mais eficaz de transmissão de energia elétrica por longas distâncias, pois pode ser transformada em alta tensão e depois convertida para tensões menores. Ela é aplicada na transmissão de energia elétrica das usinas geradoras até os centros residenciais e comerciais.

O sinal alternado varia de polaridade e valor ao longo do tempo. De acordo com a variação, têm-se diferentes tipos de corrente alternada: senoidal, quadrada, triangular, etc (Figura 50).



(a) Onda senoidal (b) Onda triangular (c) Onda quadrada

Figura 50: Exemplos de corrente alternada

Fonte: autora.

A corrente alternada mais importante é a senoidal. A energia gerada nas usinas e a maioria dos equipamentos usam tensão e corrente alternadas senoidais.

Uma tensão senoidal pode ser representada graficamente por uma senóide (Figura 51) cuja amplitude corresponde à amplitude máxima (positiva ou negativa) que a tensão senoidal pode atingir (tensão de pico V_p). O ângulo ϕ do sinal é chamado de ângulo de fase (ϕ_0 é o ângulo de fase inicial). A frequência ou velocidade angular ω, corresponde à variação de ϕ no tempo $\left(\omega = \frac{\phi}{t}\right)$.

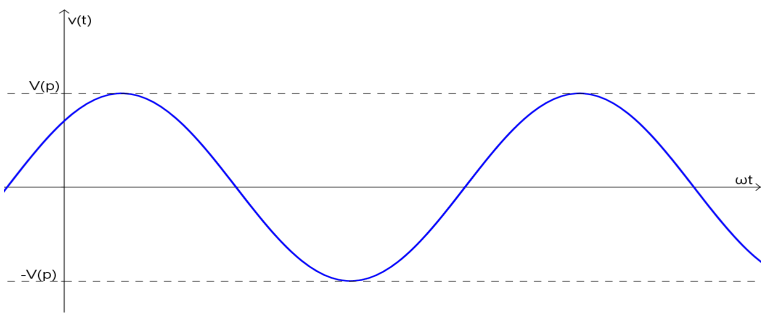


Figura 51: Onda senoidal

Fonte:autora

Este gráfico pode ser descrito pelas equações

$$v(t) = V_p \cdot sen(\omega t + \phi_0) \text{ ou } v(\phi) = V_p \cdot sen\phi$$

Outra representação gráfica é por meio de um fasor ou vetor girante, cujo módulo é igual a tensão de pico V_p e gira no sentido anti-horário com velocidade angular ω. Este tipo de representação é chamado de diagrama fasorial, conforme Figura 52.

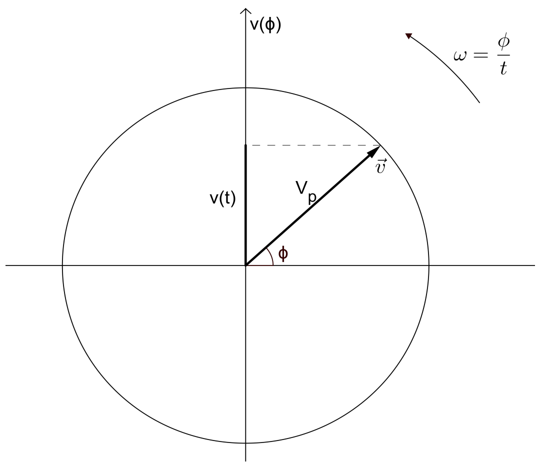


Figura 52: Diagrama fasorial de um sinal senoidal
Fonte:autora

A projeção vertical de $\vec{v}$ corresponde à tensão senoidal.

Também podemos representar um sinal senoidal por um número complexo. A amplitude e a fase inicial correspondem ao módulo e ao argumento, respectivamente. Em eletricidade, a unidade imaginária é representada pela letra **j**, para não confundir com a corrente elétrica. Além disso, o complexo $z = a+bi$ ou $z = \rho(cos\phi+isen\phi)$ é representado por $z = a + jb$ ou mais comumente, $z = \rho\underline{|\ \phi}$.

Desta forma, a tensão, escrita na forma complexa, relativa a $v(t)$ é dada por:

$$v = V_p\underline{|\ \phi_0} \text{ ou } v = V_p \cdot cos\phi_0 + jV_p \cdot sen\phi_0$$

Segundo Albuquerque (1997) a representação na forma complexa é mais simples que a trigonométrica por informar apenas a amplitude e a fase inicial, no entanto, facilita as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de vários sinais.

Outras grandezas físicas relacionadas ao estudo das correntes alternadas também são representadas por números complexos.

Capítulo 7

Considerações Finais

O estabelecimento dos números complexos enquanto conjunto numérico foi um processo histórico de levou cerca de 300 anos (de Cardano a Hamilton) e que acompanhou o desenvolvimento da Álgebra. Foi necessário romper com o conceito de número atrelado a ideia de grandeza e ao uso da geometria na resolução de equações. Os números complexos se mostraram úteis não apenas para resolvê-las, mas, hoje se aplicam em diversos ramos da Matemática e fora dela.

No entanto, a relevância do seu ensino no Ensino Médio é questionada. Alguns documentos oficiais que orientam a elaboração do currículo de Matemática tratam esse tópico como complementar, não sendo, portanto, um conteúdo indispensável. Além disso, instrumentos de avaliação como ENEM e SAEB não trazem em suas matrizes o conjunto dos números complexos.

Os livros didáticos analisados abordam esse conteúdo, alguns com maior ênfase que outros. Em geral não estabelecem muitas conexões com outros tópicos da Matemática além das equações polinomiais. Privilegia-se a forma algébrica, explorando-se pouco os aspectos geométricos, ainda que abordem a forma trigonométrica. Há uma tentativa de apresentar aplicações, porém, para alguns autores, essa não é uma tarefa fácil, pois, segundo eles, elas não seriam, em sua maioria, acessíveis para alunos do Ensino Médio. Dessa forma, os números complexos só teriam relevância para os que prosseguirem seus estudos na área de exatas.

O livro didático tem influência direta sobre o trabalho dos professores, sendo o principal recurso no preparo das aulas da maioria deles. Porém, a falta de conexão identificada nos livros, pode induzi-los a pensar que de fato não exista conexões, nem aplicações.

A pesquisa com professores mostrou que além do livro didático, outro fator que influencia a opinião dos mesmos sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio é a forma como eles estudaram esse assunto na graduação. Em certo sentido, podemos dizer que o professor repete para os alunos o que ouviu e viu na graduação. Ou ainda, que por não ter visto e ouvido, não fala nem mostra aos seus alunos. Isto se revelou especialmente verdadeiro no que diz respeito a história e aplicações dos números complexos.

O parecer CNE/CES 1.302/2001 prevê que os cursos de licenciatura em Matemática incluam em seus programas os conteúdos que compõem o currículo de Matemática do Ensino Médio. Porém, não é suficiente aprofundar conceitos, ensinar propriedades e teoremas. É necessário que se façam conexões entre os outros conteúdos, sejam mostradas aplicações e/ou se instigue os alunos a procurá-las. Além disso, a História da Matemática não deve ser apenas conteúdo de uma disciplina específica. Dentro do possível, enquanto aprendem o conteúdo, os professores em formação devem ser expostos aos fatos históricos que contribuíram para o estabelecimento de tal conceito.

Por outro lado o professor deve buscar constante atualização e aperfeiçoamento dos conhecimentos adquiridos na graduação, tanto os relacionados à Matemática quanto à prática docente. E a pesquisa sinalizou essa busca. Não apenas em termos de titulação, mas no uso de diferentes recursos no preparo das aulas.

Reconhece-se que alguns fatores que podem influenciar a opinião dos professores não foram contemplados na pesquisa, por exemplo, a rede de ensino (privada ou pública - municipal, estadual ou federal) e a região do país em que o professor atua.

Contudo, os resultados da pesquisa apontam que o estudo dos números complexos no Ensino Médio é considerado relevante pela maioria dos docentes, principalmente para a resolução das equações polinomiais, o cálculo de raízes quadradas de números negativos, a "ampliação" dos conjuntos numéricos e por suas aplicações. Compartilha-se desta opinião e entende-se que para o aluno, essa relevância torna-se mais evidente quando ele é capaz de perceber a presença desse conteúdo a sua volta e em outros tópicos da Matemática.

Nesse sentido, como perspectiva de pesquisas futuras tem-se a de prosseguir investigando as aplicações dos números complexos, selecionando dentre elas as que são adequadas para o Ensino Médio e reunindo-as em um material, com linguagem clara e acessível a este nível de escolaridade, que sirva de apoio para professores de Matemática.

Referências

ALBUQUERQUE, R. O. **Circuitos em corrente alternada**. 2 ed. São Paulo: Érica, 1997.

ARAÚJO, N. B. **Números complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

AZEVEDO, E. M. de. **Livro didático: uma abordagem histórica e reflexões a respeito de seu uso em sala de aula**. Cadernos da FUCAM. v.4, n.4. 2005. Disponível em: <http://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/view/69>, Acesso em 29 jun. 2013.

BARROSO, J. M.(Org.) **Conexões com a Matemática**. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BARROSO, J. M.(Org.) **Conexões com a Matemática - Manual do professor**. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BRAGA, K. A. **O processo de ensino e aprendizagem da análise combinatória:** uma visão dos professores de matemática de Floriano/PI. Dissertação (Mestrado) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Naci-**

onais: Ensino Médio - Parte III. Brasília (DF), 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 23 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em 23 jun. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília (DF), 2007. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 26 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação:** SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília (DF): MEC, SEB, Inep, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Acesso em 26 jun. 2013.

BRASIL. **Guia de livros didático – PNLD 2012 – Matemática**. Brasília, 2011. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio>. Acesso em 26 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência ENEM - Matemática**. Brasília (DF), 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em 23 abr. 2013.

CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J.**Conteúdos Básicos Comuns - Matemática**. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Minas Gerais, 2007. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?&usr=pub&id_projeto=27&id_objeto=39143&id_pai=38935&tipo=txg&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Matem%C3%A1tica&b=s&ordem=campo3&cp=B53C97&cb=mma>. Acesso em 23 abr. 2013.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações**. v.3. São Paulo: Ática, 2010a.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações - Manual do professor**. v.3. São Paulo: Ática, 2010b.

DÍAZ, O. R. T. **A atualidade do livro didático como recurso curricular**. Brasília: Linhas Críticas, v. 17, n. 34, p. 609-624, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2008.

FERREIRA. M. S. F. **Uma análise dos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2006.

FERREIRA, M. L. **Álgebra:** como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos. Diisertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. v.3. São Paulo: Saraiva, 2010a.

IEZZI, G. et all. **Matemática: ciência e aplicações - Maual do professor**. v.3. São Paulo: Saraiva, 2010b.

JÚNIOR, U. P. **A história dos números complexos: "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.

LIMA, R. N. de. **Resolução de equações de terceiro grau através de cúbicas**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São PAulo, 1999.

LINARDI, P. R. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de Matemática**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

MANDELBROT, B.B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa**. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MATHIAS, C. Novas Tecnologias no Ensino da Matemática: Repensando Práticas. Rio de Janeiro: CECIERJ/CAPES/UAB/MEC, 2008.

MILES, F. C. P. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, n. 24, p. 5 - 15, 1994.

NETO, R. M. R. **Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2009.

NEVES, R. C. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

NOVAES, D. V. **Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística**. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de Sã Paulo, São Paulo, 2011.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2013.

OLIVEIRA, C. N. C, de. **Números complexos: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**, v.3. São Paulo: Moderna, 2009a.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva - Manual do professor**, v.3. São Paulo: Moderna, 2009b.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educaçao do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educaçao do Paraná. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem**. Paraná, 2012. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf>. Acesso: 23 abr. 2013.

PAZOS, R. P. **Visualizando funções complexas**. III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas (RS), 2005. Disponível em: <http://rpanta.com/downloads/artigo/RPP_ComplexVisual.PDF,>. Acesso: 23 jun. 2013.

RIBEIRO, N. F. M. **Trigonometria e Números Complexos**. Rio de Janeiro, 2007, 140 p. Apostila do curso de extensão para professores de Matemática - CEDERJ.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**, v.3. São Paulo: Scipione, 2011a.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia - Manual do professor**, v.3. São Paulo: Scipione, 2011b.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. **Matriz de Referência para Avaliação – SAERJ – Matemática**. CAEd/UFJF, 2009.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro. **Currículo Mínimo, Matemática**. Rio de Janeiro, 2012.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M. S. **Números complexos: Uma abordagem histórica para a aquisição do conceito**. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

SESIANO, J. **An Introduction to the History of Álgebra: solving equations from Mesopotamian times to the Renaissance**. Mathematical World, v. 27. American Mathematical Society, 2009.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. v.3. São Paulo: Saraiva, 2010a.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio - Manual do professor**. v.3. São Paulo: Saraiva, 2010b.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar - Matemática**. v. 3. São Paulo: FTD, 2010a.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar - Matemática - Manual do Professor**. v. 3. São Paulo: FTD, 2010b.

Bibliografia Consultada

ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de circuitos em corrente alternada**. 10 ed. São Paulo: Érica, 1997.

ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de circuitos em corrente alternada**. Disponível em: <http://www.eletronica24h.com.br/Curso% 20CA/aparte1/aulas/aula001.html>. Acesso em: 26 jun. 2013.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C. O.; WAGNER, E. **Trigonometria e números complexos**. 3 ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

COSTA, M. A. F. da; COSTA, M. F. B. da. **Metodologia de pesquisa**:conceitos e técnicas.2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v.6. 3 ed. São Paulo: Atual, 1977.

NETO, A. L. **Funções de uma variável complexas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

Apêndices

APÊNDICE A

O corpo dos números complexos

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, definido por:

$$\mathbb{C} = \{(a,b); a,b \in \mathbb{R}\}$$

e munidos das operações de adição

$$(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)$$

e multiplicação

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

e a igualdade

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Teorema A.1 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *é um corpo, tal que:*

$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{C} : (x,y) + (a,b) \in \mathbb{C}$

$\forall (x,y), (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} : ((x,y) + (a,b)) + (c,d) = (x,y) + ((a,b) + (c,d))$

$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{C} : (x,y) + (a,b) = (a,b) + (x,y)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{C} : (x,y) + (0,0) = (x,y)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{C} : (x,y) + (-x,-y) = (0,0)$

$\forall (x,y), (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} : (x,y) \cdot ((a,b) + (c,d)) = (x,y) \cdot (a,b) + (x,y) \cdot (c,d)$

$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{C} : (x,y) \cdot (a,b) \in \mathbb{C}$

$\forall (x,y), (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} : ((x,y) \cdot (a,b)) \cdot (c,d) = (x,y) \cdot ((a,b) \cdot (c,d))$

$$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{C} : (x,y)\cdot(a,b) = (a,b)\cdot(x,y)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C} : (x,y)\cdot(1,0) = (x,y)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}\backslash(0,0) : (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

A.1 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

Seja R' o subconjunto de $\mathbb{C}$ definido por: $R' = \{(a,b) \in \mathbb{C}; b = 0\}$.

Seja f uma aplicação de $\mathbb{R}$ em R', que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x,0) \in R'$ (Figura 53).

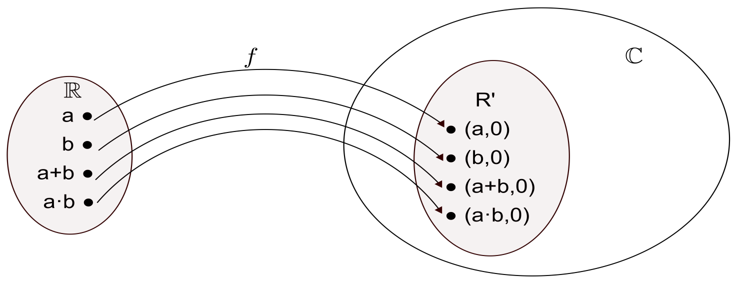


Figura 53: Aplicação f
Fonte: autora

f é bijetiva, pois:

(a) todo par $(x,0) \in R'$ é o correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$ (ou seja, f é sobrejetiva);

(b) dados $x, x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus respectivos correspondentes $(x,0),(x',0) \in R'$, são distintos (isto é, f é injetiva).

Verifica-se também que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

(a) à soma $a+b$, com $a,b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a+b,0) = (a,0)+(b,0)$:

$$f(a+b) = (a+b,0) = (a,0)+(b,0) = f(a)+f(b)$$

(b) ao produto ab, com $a,b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(ab,0) = (a,0).(b,0)$:

$$f(ab) = (ab,0) = (a,0).(b,0) = f(a).f(b)$$

Por ser $f : \mathbb{R} \rightarrow R'$ uma aplicação bijetiva que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e R' são isomorfos.

Justifica-se assim a igualdade $x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais está imerso no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. $\mathbb{R}$ passa a ser considerado subconjunto de $\mathbb{C} : \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

A.2 Correspondência entre as representações algébrica e geométrica dos números complexos

Da definição de multiplicação tem-se que $(0, 1).(0, 1) = (-1, 0)$. Denotando $(0, 1)$ por i, tem-se que $i^2 = -1$.

Pode-se, portanto, reescrever o número complexo $z = (x, y)$ como:

$$\text{(x,y)} = \text{(x,0).(1,0)} + \text{(y,0).(0,1)}$$

Estando $\mathbb{R}$ imerso em $\mathbb{C}$, os complexos $(x, 0), (y, 0)$ e $(1, 0)$ correspondem aos números reais x, y e 1, respectivamente.

E assim,

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + yi,$$

chamada de forma algébrica do número complexo.

O número $x = Re(z)$ é chamado de parte real de z e $y = Im(z)$ parte imaginária de z.

Por outro lado, definindo o conjunto dos números complexos por

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\},\ z = x + yi \text{ e } w = x' + y'i \in \mathbb{C}$$

defini-se a soma por:

$$z + w = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$$

e o produto por

$$z \cdot w = (x + yi) \cdot (x' + y'i) = xx' + xy'i + x'yi + yy'i^2 = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Identifica-se o plano $\mathbb{R}^2\{(x,y); x,y \in \mathbb{R}\}$ com o conjunto $\mathbb{C} = \{z = x+yi; x,y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1\}$ por meio do isomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, tal que $g(x,y) = x + yi$.

Da definição de soma e produto de números complexos, vê-se que se u e v são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, $g(u + \lambda v) = g(u) + \lambda g(v)$. Logo g é $\mathbb{R}$-linear. E $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$, isto é, g é sobrejetiva. Por outro lado, se $u = (x,y)$ e $u' = (x', y')$ são tais que $g(u) = g(u')$, então

$$x + yi = x' + y'i \Leftrightarrow x - x' = i(y - y') \Rightarrow (x - x')^2 = -(y - y')^2$$

Como o quadrado de um número real é não negativo, conclui-se que $x = x'$ e $y = y'$. Logo g é injetiva e, portanto, um isomorfismo. Pode-se assim representar geometricamente o conjunto dos números complexos por um plano, tal como o $\mathbb{R}^2$.

A.3 Propriedades dos números complexos

O conjugado de $z = x + yi$ é definido por $\bar{z} = x - yi$. O módulo de z é o número real não negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Algumas propriedades decorrem diretamente das definições.

Dados os números complexos z e w:

(P.1) $\overline{(z \pm w)} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(P.2) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(P.3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(P.4) $\overline{\overline{z}} = z$

(P.5) $|\overline{z}| = |z|$

(P.6) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

(P.7) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

(P.8) $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(P.9) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(P.10) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z \cdot \overline{w})$

APÊNDICE B

O questionário

Prezado(a) Professor(a)

Visando desenvolver uma pesquisa que é parte do meu trabalho de conclusão de curso, gostaria de contar com a sua colaboração para responder o questionário, disponível no link abaixo, sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio.
Ele destina-se a professores de Matemática que lecionam em turmas do Ensino Médio.
Não é necessário se identificar. Você levará poucos minutos para respondê-lo.
Desde já agradeço sua contribuição na realização deste trabalho e coloco-me à disposição para quaisquer esclarecimentos.
Atenciosamente,

Juliana S. B. Chagas
PROFMAT/ UENF

Questão1: Titulação máxima

( ) Graduação

( ) Especialização

( ) Mestrado

( ) Doutorado

( ) Outro: ______________________________

Questão 2: Ano de conclusão da titulação máxima: ______________

Questão 3: Tempo de atuação no Ensino Médio

( ) Até 1 ano

( ) de 1 a 5 anos

( ) de 5 a 10 anos

( ) acima de 10 anos

Questão 4: Com que frequência você utiliza os recursos abaixo como fonte de pesquisa para o preparo de suas aulas?

RECURSO	sempre	algumas vezes	raramente	nunca
Livro didático do Ensino Médio				
Livro paradidático				
Livro de História da Matemática				
Outros livros de Matemática				
Revistas de Matemática e/ou Educação				
Internet (sites, applets, revistas digitais, blogs, anais de eventos, etc)				
Outros				

Questão 5: Você estudou números complexos no Ensino Médio (antigo 2.º grau)?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não me lembro

Questão 6: Você estudou números complexos na graduação?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não me lembro

A questão 7 destina-se apenas aos que responderem **Sim** na questão anterior.

Questão 7: Marque os tópicos, relacionados aos números complexos, que você estudou na graduação.

( ) História dos números complexos

( ) Corpo dos números complexos: definição; propriedades; representação geométrica; complexos conjugados; valor absoluto; forma polar; produtos, potências e quocientes;

raízes e regiões do plano complexo.

( ) Função complexa de variável complexa: limite, continuidade, diferenciação

( ) Funções elementares: exponencial, logarítmica, trigonométrica, hiperbólica, etc

( ) Função analítica

( ) Integração no plano complexo

( ) Sequências e séries complexas

( ) Cálculo de resíduos

( ) Aplicações dos números complexos na Matemática

( ) Aplicações dos números complexos em outras ciências

Questão 8: Na sua opinião, qual é o grau de relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio?

( ) Irrelevante

( ) Pouco relevante

( ) Relevante

( ) Indispensável

. . . .

Para os que responderem **Indispensável** ou **Relevante**:

Questão 9: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) As aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento

( ) Preparação para o Vestibular

( ) Outros: ____

. . . .

Para os que responderem **Pouco Relevante**:

Questão 9a: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) As aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento

( ) Preparação para o Vestibular

( ) Outros: ____________________

Questão 9b: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a pouca relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Não tem aplicação no dia a dia

( ) A maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois

( ) Os alunos tem muita dificuldade com esse conteúdo

( ) Não é cobrado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

( ) Outros: ____________________

. . . .

Para os que responderem **Irrelevante**:

Questão 9: Na sua opinião, quais dos itens abaixo confirmam a irrelevância do ensino de números complexos no Ensino Médio?

( ) Não tem aplicação no dia a dia

( ) A maioria dos alunos não precisará desse conteúdo depois

( ) Os alunos tem muita dificuldade com esse conteúdo

( ) Não é cobrado no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)

( ) Outros: ____________________

. . . .

Questão 10: Quais das seguintes aplicações dos números complexos você conhece?

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) Operações com vetores no plano

( ) Fractais

( ) Engenharia elétrica

( ) Aerodinâmica

( ) Computação gráfica

( ) Outros: ____________________

Questão 11: Na sua opinião, qual o nível de compreensão destas aplicações para alunos de Ensino Médio?

APLICAÇÃO	compreensível	pouco compreensível	incompreensível	Não sei responder
Resolução de equações polinomiais				
Operações com vetores no plano				
Fractais				
Engenharia elétrica				
Aerodinâmica				
Computação gráfica				

Questão 12: Na escola em que você trabalha o conteúdo Números Complexos está no planejamento da disciplina Matemática?

( ) Sim ( ) Não

Questão 13: Ao lecionar em turmas do 3º ano do Ensino Médio você trabalha o conteúdo Números Complexos?

( ) Sim

( ) Não

( ) Nunca lecionei em turmas do 3.° ano do Ensino Médio

As questões 14 a 17 destinam-se apenas aos que responderam **Sim** na questão 13.

Questão 14: Quais dos seguintes tópicos você aborda ao ensinar Números Complexos?

( ) Forma algébrica

( ) Representação geométrica

( ) Complexos conjugados

( ) Operações na forma algébrica

( ) Valor absoluto (módulo)

( ) Forma trigonométrica ou polar

( ) Produtos e quocientes na forma trigonométrica

( ) Potência

( ) Raízes

( ) História

( ) Aplicações

Questão 15: De que forma você costuma introduzir esse assunto?

( ) Com comentários históricos

( ) Com exemplos de raízes quadradas de números negativos

( ) Com exemplo de equação quadrática de raízes não reais

( ) Com a definição

( ) Outros: ____

Questão 16: Qual(is) justificativa(s) você apresenta aos seus alunos para o estudo dos Números Complexos no Ensino Médio?

( ) Cálculo de raízes quadradas de números negativos

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) "Ampliar" os conjuntos numéricos

( ) Apresenta aplicações

( ) Preparação para o vestibular

( ) Não apresenta justificativa

( ) Outros: ____

Questão 17: Quais das seguintes aplicações dos números complexos você costuma mostrar aos seus alunos?

( ) Resolução de equações polinomiais

( ) Operações com vetores no plano

( ) Fractais

( ) Engenharia elétrica

( ) Aerodinâmica

( ) Computação gráfica

( ) Nenhuma

( ) Outros: ____________________

Caso queira, deixe o seu comentário sobre algum aspecto que julgue importante considerar no ensino de números complexos.