VICENTE LOURENÇO GONÇALVES

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

IFSP
SÃO PAULO
2023

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

VICENTE LOURENÇO GONÇALVES

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

IFSP

SÃO PAULO

2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

g635c Gonçalves, Vicente Lourenço
Cardinalidade de conjuntos infinitos na educaÇÃo bÁsica / Vicente Lourenço Gonçalves, Vicente Lourenço Gonçalves, Vicente Lourenço Gonçalves. São Paulo: [s.n.], 2023.
85 f.

Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2023.

1. Conjuntos Infinitos. 2. Cardinalidade. 3. Educação Básica. 4. História da Matemática. 5. Sequência de Atividades. I. Gonçalves, Vicente II. Gonçalves, Vicente III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IV. Título.

CDD 510

VICENTE LOURENÇO GONÇALVES

CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada e aprovada em 13 de abril de 2023 como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
IFSP – Campus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Campus São Paulo
Membro da Banca

Profa. Dra. Débora Vieira de Souza Carneiro
SESI – São Paulo
Membro da Banca

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha amada mãe, que, durante o início da elaboração do mesmo, no mês de janeiro de 2022, foi morar no céu, junto de Deus, de onde acredito que ela está sempre olhando por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de ingressar no curso de mestrado, por ter me dado forças, perseverança e dedicação, necessárias para realização desta dissertação.

Meu muito obrigado também a todos os professores deste curso, em especial ao meu orientador, Rogério Ferreira da Fonseca, ao professor Henrique Marins de Carvalho, e aos professores da disciplina de TCC – MMA 24, Amari Goulart e Flávia Milo dos Santos.

Jamais deixaria de agradecer também a todos os meus colegas de curso, que sempre estiveram ao meu lado, e me auxiliaram em todos os sentidos.

RESUMO

O presente trabalho trata da cardinalidade de conjuntos infinitos, com enfoque para a Educação Básica.

Uma vez identificada, a frequente dificuldade dos alunos do Ensino Fundamental II e Médio em entenderem as cardinalidades dos conjuntos infinitos, principalmente quando comparamos conjuntos como os $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, a confusão da noção de cardinalidade com a de inclusão, além das dificuldades enfrentadas pelos docentes ao abordarem este tema em suas aulas de matemática do ensino básico, tomamos como objetivo principal criar algumas tarefas para auxiliar professores e alunos nesta abordagem.

Baseados em uma abordagem histórica e nos referenciais teóricos das situações didáticas de Brousseau, elaboramos uma sequência didática, como proposta para tentar ajudar os professores de matemática a tratarem as cardinalidades de conjuntos infinitos com seus alunos na Educação Básica. Nesta sequência sugerimos quatro tarefas que abordam conjuntos finitos e mais quatro que exploram conjuntos infinitos, especialmente a noção de cardinalidade.

Palavras-chaves: Conjuntos infinitos; Cardinalidade; Educação Básica; História da Matemática; Sequência de Atividades.

ABSTRACT

The present work deals with the cardinality of infinite sets, focusing on Basic Education.

Once identified, the frequent difficulty of elementary and high school students in understanding the cardinalities of infinite sets, especially when comparing sets such as $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$, the confusion between the notion of cardinality and inclusion, in addition to the difficulties faced by teachers when approaching this topic in their basic education mathematics classes, we took as our main objective to create some tasks to help teachers and students in this approach.

Based on a historical approach and on the theoretical references of Brousseau's didactic situations, we elaborated a didactic sequence, as a proposal to try to help mathematics teachers to deal with the cardinalities of infinite sets with their students in Basic Education. In this sequence, we suggest four tasks that address finite sets and four more that explore infinite sets, especially the notion of cardinality.

Keywords: Infinite sets; Cardinality; Basic Education; History of Mathematics; Sequence of Activities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

É com grande prazer que inicio este trabalho por meio de uma breve apresentação sobre minha trajetória até o presente momento. Nasci na cidade de São Paulo em 10 de junho de 1974, cresci no bairro do Alto da Lapa, onde estudei em escolas públicas estaduais desde a infância até os últimos anos da Educação Básica.

No início da década de 1990 terminei o Ensino Médio e ingressei na Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC, onde iniciei a graduação cursando Mecânica de Projetos. Posteriormente, mudei para o curso de Edificações, e, ao término desse, no ano de 1997, recebi o título de Tecnólogo.

De forma inesperada e ainda cursando minha primeira graduação, em 1994 iniciava-se minha vida profissional como professor de matemática e física para a Educação Básica na rede Estadual de Educação de São Paulo, onde permaneci até o ano de 1996, quando passei a trabalhar na área de construção civil.

No ano 2000 conclui o curso de Engenharia Civil pela Faculdade de Engenharia de São Paulo – FESP, e trabalhei por mais quase duas décadas como engenheiro, prestando serviços para construtoras e para o Poder Judiciário do Estado de São Paulo, elaborando laudos judiciais na área de engenharia civil. Porém, minha paixão sempre foi ensinar matemática, e neste mesmo ano de 2000 voltei a lecionar na rede pública estadual de educação, mantendo por muitos anos as funções de engenheiro e professor, paralelamente.

Formado em Licenciatura Plena em Matemática pela Faculdade Oswaldo Cruz no ano de 2002, logo em seguida iniciei, nesta mesma instituição de ensino, o curso de pós-graduação *Lato Sensu* em Educação Matemática, o qual conclui em 2004.

Em 2003, lecionei pela primeira vez em um colégio particular na cidade de São Paulo, e, a partir de então, continuei minha carreira como professor de matemática para o Ensino Fundamental II e Ensino Médio, passando por vários colégios privados e escolas públicas durante as últimas duas décadas.

Em 2010 conclui a pós-graduação *Lato Sens*u em Avaliações e Perícias de Engenharia, pela Faculdade Armando Álvares Penteado – FAAP – curso que contribuiu consideravelmente para minha evolução técnica na função de perito judicial em engenharia civil.

Prestei concurso público para o cargo de professor de matemática para o Ensino Fundamental II e Ensino Médio na rede Municipal de Educação de São Paulo, e em 2017 tomei posse como professor efetivo da rede, e desde então leciono na mesma escola até os dias atuais.

No início de 2021, ingressei no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP. Já no primeiro semestre deste curso, na disciplina “MA11 – Números e Funções Reais”, tive pela primeira vez um contato mais profundo com o tema “conjuntos infinitos” em matemática, assunto que já despertava meu interesse há muitos anos.

Foi durante as aulas desta disciplina que, a partir de uma análise mais detalhada sobre as noções de inclusão e de cardinalidade de conjuntos infinitos, senti-me provocado a me aprofundar sobre o assunto que virou tema desta dissertação.

2 INTRODUÇÃO

O termo infinito costuma ser utilizado na linguagem coloquial para descrever quantidades extremamente grandes, que dificilmente se conseguem calcular. Questiona-se a infinitude do tempo, se o espaço é infinito, e em diversos outros assuntos observamos a utilização desse termo. Porém, a proposta deste trabalho é tratar sobre o infinito matemático, mais especificamente sobre os conjuntos numéricos infinitos e as noções de inclusão e de cardinalidade desses conjuntos.

Durante anos lecionando matemática na Educação Básica, sempre me deparava com o desafio de ensinar noções que envolviam conjuntos infinitos, seus “tamanhos” e as relações de inclusão entre eles, desde a apresentação do conjunto dos números naturais no sexto ano do Ensino Fundamental, depois o conjunto dos números inteiros no sétimo ano, as operações com esses conjuntos, as comparações entre eles, e assim em todas as séries seguintes, inclusive inseridos em outros temas do currículo de matemática, por exemplo, em progressões e em funções.

O “assunto infinito” nos traz curiosidade e questionamentos, além de algumas dificuldades que por diversas vezes sentimos ao abordar noções relacionadas ao infinito em aulas de matemática. Mas foi nas aulas da disciplina “MA11 – Números e Funções Reais”, durante o primeiro semestre de 2021, no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que tive, pela primeira vez, entendimento mais profundo sobre as noções de inclusão e de cardinalidade dos conjuntos infinitos, o que me levou a perceber a necessidade de obter maior conhecimento sobre o tema, principalmente para melhorar o processo de ensino e aprendizagem nas aulas da Educação Básica.

Provocados por esta percepção, iniciamos a pesquisa sobre assunto, encontrando artigos científicos, dissertações e teses que discorrem sobre a dificuldade dos alunos da Educação Básica em compreenderem algumas noções acerca do infinito, como as noções de inclusão e de cardinalidade quando tratamos de conjuntos infinitos, além da dificuldade de professores na abordagem destes assuntos.

O artigo intitulado “Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário” de Sampaio (2009), relata uma pesquisa realizada com alunos de sete escolas públicas localizadas no norte de Portugal. As idades dos estudantes variaram entre 15 e 25 anos, sendo 98,4% deles com idades entre 15 e 19 anos. Do total de alunos envolvidos na pesquisa, 335 eram do 10º ano (correspondente ao primeiro ano do Ensino Médio no Brasil), 228 do 11º ano e 266 do 12º ano (correspondentes aos segundo e terceiro anos, respectivamente, do Ensino Médio brasileiro).

Neste estudo foram apresentadas aos alunos seis questões de múltipla escolha e de “verdadeiro ou falso” abordando temas relacionados ao infinito, com o intuito de identificar e analisar as concepções que estes estudantes possuem a respeito do assunto.

Em uma das questões apresentadas na pesquisa, cerca de 64% dos alunos afirmaram que a igualdade $200 = 100 + 50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + \ldots$ é falsa, considerando assim que essa divisão sucessiva do número 200 é um processo inacabado, com referência portanto ao infinito potencial, e apenas a minoria dos estudantes afirmou que a igualdade é verdadeira, considerando a soma como um todo, ou seja, relacionada com o infinito atual (SAMPAIO, 2009).

Outra questão apresentada aos alunos neste estudo foi sobre quantos elementos tem o intervalo [1,3]. Curiosamente, apenas 31,2% dos estudantes afirmou ter infinitos elementos. Em cada ano de escolaridade as porcentagens foram 22,4% no 10º ano; 31,6% no 11º ano; e 42,1% no 12º ano, o que mostra grande diferença entre os três anos de escolaridade.

A última, que consideramos a mais relevante questão deste estudo para nosso trabalho, refere-se à cardinalidade de conjuntos infinitos, e foi exatamente nela que se identificou a maior dificuldade dos alunos participantes. Ao comparar a quantidade de elementos de conjuntos infinitos, a porcentagem de respostas corretas foi baixa em todos os três anos de escolaridade, mostrando a dificuldade dos alunos quanto a noção de cardinalidade quando se trata de conjuntos infinitos.

A intuição, neste caso, pode conduzir ao erro, devido à confusão que estudantes podem apresentar quanto ao entendimento da noção de cardinalidade quando tratamos de conjuntos infinitos. Assim a autora relata:

> A única comparação de cardinais que obteve uma percentagem de respostas correctas superiores a 50% foi entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais, em que 56% dos estudantes consideram que $\#Q < \#R$, mas neste caso a intuição não os induz em erro já que $Q \subset R$. (SAMPAIO, 2009, p. 138)

Esta questão mostra, portanto, como a intuição criada por nossa realidade finita pode influenciar na compreensão da noção de cardinalidade quando analisamos ou comparamos conjuntos infinitos. Inclusive provocando confusões entre as noções de inclusão e de cardinalidade.

A noção de inclusão é intuitiva e é aprendida ainda no ensino básico, já a de cardinalidade, que fundamenta a teoria de conjuntos de Cantor, não é intuitiva, entrando em conflito, frequentemente, com a de inclusão e não é obrigatoriamente aprendida no ensino secundário (FISCHBEIN, 1978). A respeito dessa intuitividade Sampaio (2009, p. 139) afirma:

> Fischbein foi o pioneiro no estudo sobre as intuições do infinito. Daí a confusão que se gera ao afirmar, por exemplo, que o conjunto dos números naturais pares é uma parte própria do conjunto dos números naturais e, no entanto, ambos apresentam o mesmo cardinal. Para compreender a ideia de cardinalidade de um conjunto infinito é necessário aceitar o *infinito actual*, tema muito controverso ao longo da história da Matemática.

De acordo com Amadei (2005), John Monaghan escreve em 2001 o artigo “Young People´s Ideas of Infinity”, em que relata pesquisa realizada com jovens pré-universitários ingleses, sobre as percepções destes estudantes a respeito do infinito. Nas quatro seções deste artigo, Monaghan desenvolve assuntos relativos à cognição e conceito de infinito.

Este trabalho de Monaghan explora o nível de entendimento dos alunos sobre o infinito matemático, verificando que, para a grande maioria, a noção de infinito está relacionada a um processo que nunca acaba, o infinito potencial, e uma pequena parte dos estudantes apresentou uma visão do infinito como objeto, o infinito atual (AMADEI, 2005).

Outra constatação de Monaghan é que, de modo geral, a intuição do infinito demonstrada pelos alunos é intrinsicamente contraditória, uma vez que vivemos em um mundo finito, formado por objetos finitos.

Amadei (2005) conta ainda que essa dualidade do infinito como processo e objeto, infinito potencial e infinito atual, respectivamente, pode levar a contradições quando se comparam as cardinalidades de conjuntos infinitos, o que muitas vezes gera confusão para os alunos entre as noções de inclusão e de cardinalidade.

De acordo com Pereira (2015), o estudo de Fischbein, Tiroh e Hess (1979), “The intuition of infinity – Education Studies in Mathematics”, relata observações sobre a natureza contraditória e as interpretações em relação ao conceito de infinito, com um grupo de alunos do Ensino Fundamental e iniciantes do Ensino Médio dos Estados Unidos.

Este estudo, segundo Pereira (2015), concluiu que existe uma natureza contraditória na intuição dos estudantes sobre o infinito divisível, apresentando concepção “finitista” que prevaleceu para a maioria dos alunos. Outra conclusão do estudo é que o processo de ensino influencia significativamente nas respostas dos estudantes.

Outro artigo relacionado ao tema foi escrito por Efraim Fischbein, em 2001, intitulado “Tacit Models And Infinity”, o qual analisa vários exemplos da influência dos modelos mentais na interpretação de diversos conceitos matemáticos no que tange ao infinito atual (AMADEI, 2005).

Segundo Amadei (2005), neste artigo de Fischbein fica evidente que o conceito de infinito leva a contradições inerentes, afirmando ainda que nossa mente é adaptada à realidade finita e que nossa lógica pode lidar apenas com conceitos que expressam realidades finitas.

Neste trabalho realizado por Fischbein, foram apresentados aos estudantes, de quinta a oitava séries, dois segmentos de reta com comprimentos diferentes e perguntado se os conjuntos formados pelos pontos de cada segmento eram equivalentes. A minoria dos alunos (cerca de 30% a 40%) estimou, intuitivamente, que em ambos os conjuntos existem uma infinidade de pontos, e a grande maioria desses estudantes considerou que no segmento de reta de maior comprimento havia mais pontos que no menor. E, ainda, menos de 30% dos alunos afirmaram que os conjuntos eram equivalentes.

Outro dado interessante é que, dentre as respostas, uma criança de treze anos concluiu que há o mesmo número de pontos nos dois conjuntos, mas que os pontos do segmento de reta de maior comprimento são maiores (AMADEI, 2005).

Na obra de Kill (2010), "Conceituações sobre o Infinito na História, nos Livros Didáticos e no Pensar de Futuros Professores de Matemática", a pesquisa concluiu que, apesar de 90% dos professores entrevistados considerarem o conceito de infinito importante, poucos fazem uso desse conceito em seus trabalhos (PEREIRA, 2015), mostrando a dificuldade também por parte dos professores ao abordarem este tema.

Em sua tese de doutorado, Lorin (2018) analisa os obstáculos epistemológicos e conhecimentos falsos que os estudantes possuem em relação ao conceito de infinito, principalmente quando se trata do infinito atual, e as consequentes dificuldades enfrentadas no entendimento desse conceito nas situações de ensino e aprendizagem na Educação Básica. Segundo Lorin (2018), um exemplo de obstáculo que pode causar essa dificuldade é a relação de identificação do infinito com o ilimitado, considerando apenas o infinito potencial e não o atual.

Lorin (2018) afirma que Waldegg (1996) já chamava a atenção para o tratamento inadequado na abordagem do conceito de infinito em programas escolares do ensino básico, concebendo o infinito somente como processo inacabado e não como um objeto de estudo, o que pode causar ainda mais dificuldade na aprendizagem de tal conceito, considerado um obstáculo para o ensino da matemática.

Segundo Lopes (2011), os alunos aceitam a ideia de infinito como algo que continua e continua, sem fim, ligada ao infinito potencial, mas não conseguem aceitar, por exemplo, que no conjunto dos números reais, entre o número zero e o número um possam existir infinitos números. Para os estudantes essa é uma ideia muito forte que dificulta a aprendizagem da noção de infinito pois, se vivemos num mundo finito, de espaços finitos, como imaginar algo sem fim?

Ainda de acordo com Lopes (2011), o infinito atual, também chamado de completo, geralmente não é aceito por contrariar o senso comum, ou seja, é um conceito contraintuitivo, uma vez que não conseguimos encontrar um modelo do infinito atual em nossa realidade, mas apenas na matemática.

Com base no que foi apresentado e nas conclusões obtidas nesses trabalhos, podemos afirmar que a maioria dos alunos apresenta dificuldades na compreensão desses conceitos, principalmente da noção de cardinalidade ao tratarmos de conjuntos infinitos, em decorrência da intuição contraditória sobre o infinito, uma vez que os objetos presentes no mundo real são finitos.

Assim, consideramos que não tem sido uma tarefa fácil para os professores da Educação Básica abordar esse tema nas aulas de matemática, justificando o interesse em realizarmos um trabalho que possa vir a auxiliá-los.

Quando comparamos “tamanhos” de conjuntos finitos, ou seja, sua quantidade de elementos, os alunos comumente entendem que, se um conjunto finito A é parte própria de um conjunto finito B, então A está contido em B, e A tem menos elementos que B. Assim, a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B. Porém, intuitivamente, a maioria dos estudantes tende a pensar que isso ocorre também com conjuntos infinitos, o que nem sempre é verdade.

Em vista das dificuldades apresentadas, e considerando a possibilidade de favorecer a superação de obstáculos ou as dificuldades que os alunos costumam apresentar ao comparar quantidades de elementos de conjuntos infinitos, este trabalho propõe o seguinte questionamento:

Como abordar a noção de cardinalidade de conjuntos infinitos nas aulas de matemática para a Educação Básica, sem que se confunda essa noção com a de inclusão entre tais conjuntos?

Podemos dizer que tal questionamento é relevante para o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que as noções relacionadas ao infinito estão presentes em vários outros temas do currículo de matemática da Educação Básica, por exemplo, na comparação entre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, em progressões aritméticas e geométricas, limites, funções, e tantos outros.

Portanto, um melhor entendimento dos conjuntos infinitos, de suas cardinalidades, e de como eles se comportam, será fundamental para que o aluno construa o conhecimento matemático de outros assuntos, o que evidencia a relevância do estudo.

Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho consiste em propor uma sequência didática que possa auxiliar os professores de matemática no processo de ensino e aprendizagem do tema infinito em suas aulas para o ensino básico, e, consequentemente, proporcionar aos estudantes a possibilidade de assimilar o assunto de uma forma “mais adequada”, mais interessante e que faça sentido para eles.

Assim, apresentamos no capítulo 3 uma abordagem histórica a respeito das noções do infinito matemático, desde a Grécia Antiga, percorrendo dezenas de séculos, chegando às grandes contribuições de Georg Cantor e até a atualidade. Observando, de acordo com a época e sociedades, as diversas concepções e representações do infinito matemático, e o quanto o conhecimento da sua história contribui para o melhor entendimento do tema.

No capítulo 4, encontra-se a caracterização do objeto matemático e um embasamento teórico sobre as noções de: conjunto, função, conjuntos finitos, conjuntos infinitos, cardinalidade, conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis.

Apresentamos no capítulo 5 o referencial teórico, que embasa nossa sugestão de sequência didática, com a “*Teoria das Situações Didáticas*” do educador e matemático francês Guy Brousseau, as noções de *Conceito Imagem* e *Conceito Definição*, segundo Tall e Vinner (1981), e um pouco sobre as noções de *Obstáculos Epistemológicos*. Ainda neste capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados neste trabalho, o método de pesquisa empregado e o levantamento bibliográfico realizado por meio de bibliotecas virtuais e repositórios de trabalhos acadêmicos.

No capítulo 6 sugerimos uma sequência didática para abordar o tema com os alunos nas aulas de matemática da Educação Básica, trabalhando mais especificamente as noções de cardinalidades e relações de inclusão entre conjuntos numéricos infinitos.

E, em seguida, encerramos com nossas considerações finais.

3 ABORDAGEM HISTÓRICA

3.1 Visão geral da importância histórica

O infinito é um tema que sempre nos despertou interesse, provocando curiosidades, e, consequentemente, o desejo de maior aprofundamento sobre seu estudo.

Popularmente utilizado pela sociedade em geral, encontramos o conceito de infinito em diversos campos, por exemplo, nos diálogos sobre o tempo, sobre a dimensão do Universo, ou sobre quantidades consideradas extremamente grandes, como o número de grãos de areia em todas as praias do planeta, das estrelas no céu, ou o número de átomos do Universo. Matematicamente falando, sabemos que, tanto as quantidades de grãos de areia nas praias, estrelas no céu, ou até o número de átomos do universo, são quantidades finitas. Mas, na linguagem cotidiana, em vários momentos, a ideia de infinito está ligada àquilo que vai além da nossa imaginação.

No campo da ciência, o termo infinito aparece em muitas áreas do conhecimento. Porém, o objetivo deste capítulo é abordar, de forma histórica, o infinito matemático, com ênfase nos conjuntos numéricos infinitos e na contribuição de Georg Cantor para a compreensão desses conjuntos.

Desde a época em que o ser humano começou a contar, podemos encontrar o conceito de infinito em matemática, utilizando o que chamamos hoje de números naturais, elementos do conjunto infinito que denotamos por $\mathbb{N}$.

Como veremos no decorrer deste trabalho, a complexidade e a predominante oposição à intuição deste tema têm provocado curiosidade e desafios à mente humana há mais de dois mil e quinhentos anos, desde civilizações antigas como a dos egípcios e babilônios, passando pela Grécia Antiga, percorrendo dezenas de séculos, e chegando até a atualidade.

Considerando toda a história da civilização humana, o conceito de infinito claramente está entre aqueles que ocuparam uma enorme quantidade de pensadores de maneira intensa e duradoura, haja vista tantos nomes conhecidos no meio científico, em especial no campo da matemática, dos quais alguns abordaremos neste trabalho, cujos pensamentos e obras relacionados ao infinito ganharam grande destaque ao longo da história.

Por muitas vezes, pela sua própria grandiosidade, o infinito é tão admirado que passa a ser associado ao papel de divindade, podendo ser tanto infinitamente grande como infinitamente pequeno, o infinitesimal. Capaz de causar, ao mesmo tempo, grande perplexidade e desconforto (SENA, 2011).

De acordo com a época e sociedades, o infinito passa por diversas concepções e representações. Um conceito abstrato que, por ser tão complexo e, de certa forma, contrário à intuição humana, muitas vezes causa perplexidade e confusão aos que buscam entendê-lo, o que parece intrigar e suscitar interesse ainda maior por conhecimentos que nos ajudem a compreendê-lo.

Tema de intensas reflexões filosóficas e responsável pelo surgimento de diversos paradoxos, o infinito é controverso tanto na sua forma potencial como atual, sendo um conceito que percorre todo o desenvolvimento da matemática (MACHADO *et al*., 2013).

Sendo o infinito, portanto, um tema que historicamente sempre despertou não somente dúvidas, questionamentos e contradições, mas também grande interesse e admiração, fato este que permanece até os dias atuais.

3.2 Grécia Antiga

O conceito de infinito matemático começou a se formar, pouco a pouco, a partir de diversas reflexões e discussões filosóficas, passando pelos pensamentos de Anaximandro no século V a.E.C., Platão no século IV a.E.C., da escola pitagórica e tantos outros pensadores.

Segundo Sena (2011), os pitagóricos defendiam um mundo extremamente organizado, de estrutura refinada, que revelava uma ordem absolutamente divina e inabalável, uma organização que só poderia ser observada e compreendida por aqueles que dominassem as manipulações matemáticas, atribuindo aos números uma relação direta com a realidade.

Nesse sentido, para o pensamento pitagórico, o infinito estava longe desta estrutura organizada e perfeita, pelo contrário, o infinito representava o desconhecido, o indeterminado, aquilo que não tem limite ou fim (infinito potencial), e que, portanto, apresentava um valor moral negativo, considerando-o horrível e diabólico.

Para a escola pitagórica, o infinito representava algo terrível, abominável, pois constituía um campo inacessível à razão. Assim, os pitagóricos enxergavam o infinito como uma aberração, por apresentar ausência de determinação.

Os pitagóricos evitavam, portanto, todo o problema que envolvesse o conceito de infinito. Porém, ao tentarem comparar as medidas da diagonal com o lado de um quadrado, ou da aresta de um cubo com sua diagonal, não eram capazes de encontrar uma unidade de medida em comum que coubesse um número inteiro de vezes em ambas as grandezas, por menor que ela fosse. Hoje sabemos que tais grandezas são incomensuráveis entre si, e que os números racionais, apesar de formarem um conjunto de infinitos números, não são contínuos, mas, na época, sequer conheciam os números irracionais da forma como conhecemos hoje.

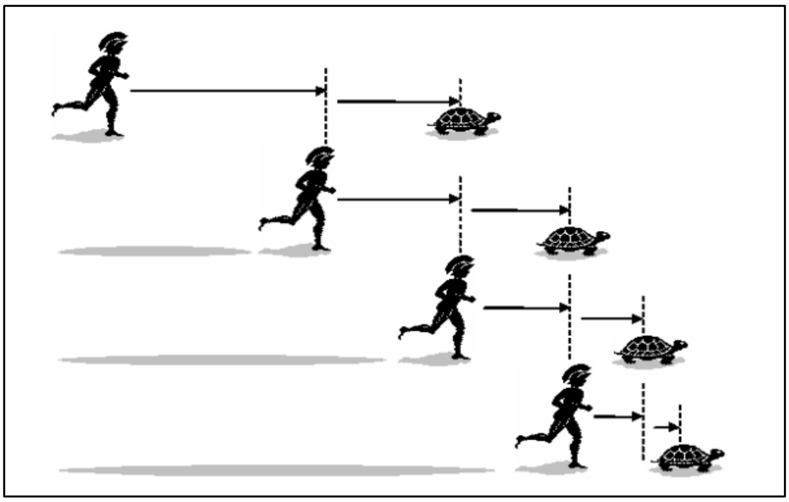
Essa contradição, por assim dizer, entre as formas geométricas e o universo dos números, ocasionou uma série de impactos, não somente para a escola pitagórica, mas para os matemáticos de uma forma geral, provocando inclusive a criação de várias discussões e paradoxos, dos quais abordaremos neste trabalho os de autoria de Zenão de Eleia.

Zenão viveu de 490 a.E.C. a 425 a.E.C., era discípulo de Parmênides de Eleia, e contestava fortemente os pensamentos dos pitagóricos, principalmente a ideia de que uma reta é pensada pela justaposição de pontos e que o espaço e o tempo são constituídos de pontos e instantes, mostrando a impossibilidade de se compreender o movimento caso esta ideia fosse aceita, argumentando sobre a inconsistência dos infinitésimos. Segundo Sena (2011), foi contra este pensamento que Zenão propôs seus paradoxos.

Um dos mais famosos paradoxos propostos por Zenão é o de Aquiles e a tartaruga, por meio do qual Zenão contraria o senso comum, causando grande perplexidade ante à ideia de continuidade e de infinito. Esse paradoxo conta a história de uma corrida entre um herói da mitologia grega, Aquiles, e uma tartaruga.

Por ser muito veloz, Aquiles concede certa distância de vantagem para a tartaruga ao iniciarem a corrida. Porém, Zenão afirma que Aquiles, mesmo sendo muito mais rápido que a tartaruga, jamais a alcançaria, pois, quando o herói alcança o ponto de partida da tartaruga, que podemos chamar de ponto A, essa já teria percorrido uma certa distância, encontrando-se em um ponto B a frente. Assim, quando Aquiles chegasse ao ponto B, a tartaruga já estaria em um outro ponto C, a frente de B, e assim sucessivamente, como ilustra a Figura 1. Ou seja, por mais que Aquiles fosse veloz e a tartaruga lenta, ela sempre estaria a frente de Aquiles, por menor que chegasse a ser essa distância entre eles.

Figura 1 - Paradoxo de Aquiles

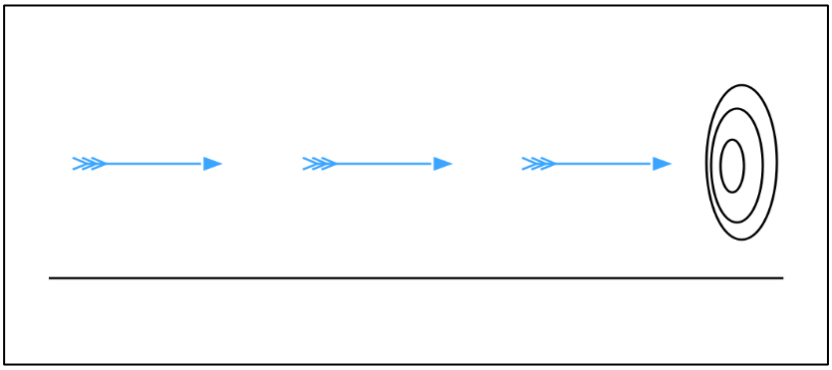


Fonte: Mello e Lorin (2014, p. 06).

A contradição apresentada por Zenão no paradoxo de Aquiles está no fato de se considerar o intervalo de tempo e a distância como grandezas constituídas por uma quantidade infinita de pontos indivisíveis (SANTOS, 2008). Com isso, Zenão pretende mostrar que a existência de pontos indivisíveis em quantidade infinita nos leva a um raciocínio cuja conclusão é um absurdo.

Outro paradoxo muito conhecido de autoria de Zenão de Eleia é o paradoxo da Seta, ou do Arqueiro e a Flexa, no qual afirma que, se o tempo é constituído de momentos e cada momento ocupa um certo espaço, uma determinada posição, então um objeto está em repouso quando ocupa um espaço com dimensões iguais às suas, conforme Figura 2. Assim, ao atirar uma flexa, essa estará sempre em repouso, uma vez que a cada momento ela estará em uma posição.

Figura 2 - Paradoxo da Seta

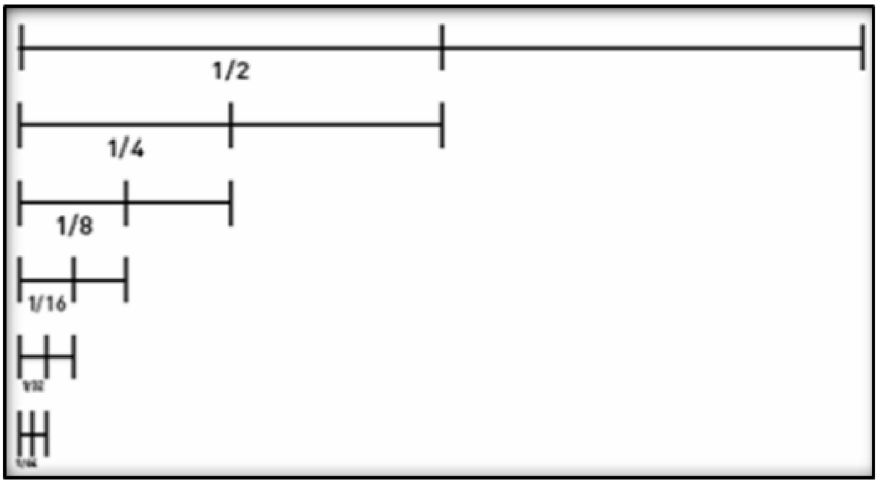


Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeno_Arrow_Paradox.png>. Acesso em 26 de maio de 2022.

Ainda sobre os paradoxos de Zenão, podemos citar também o da Dicotomia, que possui ideia semelhante ao paradoxo de Aquiles, porém adotando um sentido inverso no que tange às distâncias percorridas.

Neste paradoxo, que Zenão intitulou de Dicotomia, afirma que, para que um determinado corpo percorra uma certa distância, por exemplo d (m), ele precisa primeiro percorrer a metade dela, ou seja, d/2 (m), porém, para percorrer esta metade da distância inicial, ele precisa percorrer a metade desta última, ou seja, a metade de d/2 (m), que equivale a d/4 (m), e assim sucessivamente.

Figura 3 - Paradoxo da Dicotomia



Fonte: Mello e Lorin (2014, p. 05).

Zenão então alega que, desta forma, o movimento do corpo estaria restrito a infinitas subdivisões do espaço, como mostra a Figura 3, impossibilitando o início do movimento, concluindo, assim, que o movimento não existe, o que nos leva novamente a um raciocínio absurdo.

De acordo com Sena (2011), muitos argumentos foram dados aos paradoxos de Zenão, mas falta linguagem mais adequada ao se falar de infinito, causando desconforto e negando a realidade que observamos, mostrando que o movimento não pode ser considerado como uma sucessão de estados particulares, assim como o tempo não é uma sucessão de instantes, mas é contínuo.

Apesar de tais paradoxos terem aumentado o horror que os gregos antigos já sentiam pelo infinito, uma vez que apresentavam raciocínios e propriedades contraintuitivas, contribuíram de maneira inestimável para a história da ciência, em especial da matemática e física, ao despertarem reflexões sobre o contínuo, e fornecendo argumentos que fizeram crescer a discussão a respeito do infinito potencial e do infinito atual.

Para Aristóteles (século IV a.E.C.), o infinito constitui um problema lógico e conceitual, mas sem descartar a importância da sua natureza e de suas possibilidades empíricas, para a compreensão deste conceito.

Nesta época, Eudoxo de Cnido (408-355 a.E.C.) cria o método da exaustão para cálculo de áreas e volumes fazendo uso das quantidades infinitesimais, utilizando, por exemplo, a aproximação sucessiva de uma área por comparação a outras já conhecidas. Segundo Amadei (2005), com esse método, Eudoxo mostrou que precisamos pressupor a existência real das quantidades infinitamente múltiplas, mas que existem quantidades "tão pequenas quanto desejarmos" pela divisão continuada. Observamos aqui uma introdução ao conceito de infinito potencial, inspirando muitos matemáticos do século XIX a introduzir o conceito de limite no cálculo.

No século III a.E.C., outro importante e conhecido matemático, Arquimedes de Siracura (287–212 a.E.C.) expande as ideias de Eudoxo e, além de utilizar o método da exaustão, também empregou o infinito potencial para criar métodos que os ajudavam a encontrar áreas e volumes por meio das quantidades infinitesimais. Assim, Arquimedes conseguiu concluir que o volume de um cone com base máxima inscrito em uma esfera é igual a um quarto do volume da esfera que o circunscreve (AMADEI, 2005).

Arquimedes também aplicou o método da exaustão em vários problemas de quadraturas, em especial da parábola e do círculo, contribuindo assim para o desenvolvimento do conceito de infinito matemático no campo da geometria.

A partir do século II a.E.C., e por quase dois milénios, pouco se avançou no desenvolvimento do conceito e das propriedades matemáticas do infinito.

3.3 Idade Média

Durante a Idade Média, principalmente devido a predominância do teocentrismo, não identificamos grandes avanços das atividades científicas, e as concepções acerca do infinito eram abordadas apenas pelos teólogos cristãos.

Entre os séculos IV e V, um desses teólogos que merece destaque é Santo Agostinho de Hipona (354-430). Teólogo e filósofo, Agostinho acreditava que todo o conhecimento provinha de Deus, e que aquele, portanto, não podia ser contrário às afirmações bíblicas.

Em sua obra *Civitate Dei*, Santo Agostinho diz que uma sequência de números inteiros seria um infinito atual, fazendo-se pensar que o infinito seria uma qualidade de Deus. (REZENDE, 2003).

No século XIII, algumas discussões sobre o infinito começam a ser retomadas, e as considerações de Aristóteles a respeito da matemática voltam a provocar interesse de alguns filósofos, gerando preocupação e descontentamento da Igreja Católica com a ciência, pois alguns pensamentos aristotélicos contrariavam mandamentos das Escrituras.

São Tomás de Aquino (1225-1274), apesar de considerado mestre da Igreja Católica, contrariando vários teólogos da época, não acreditava que todo conhecimento era proveniente de uma luz divina. Seus pensamentos e reflexões ajudaram a recuperar as discussões e o interesse pelo estudo do infinito.

3.4 Séculos XVI ao XIX

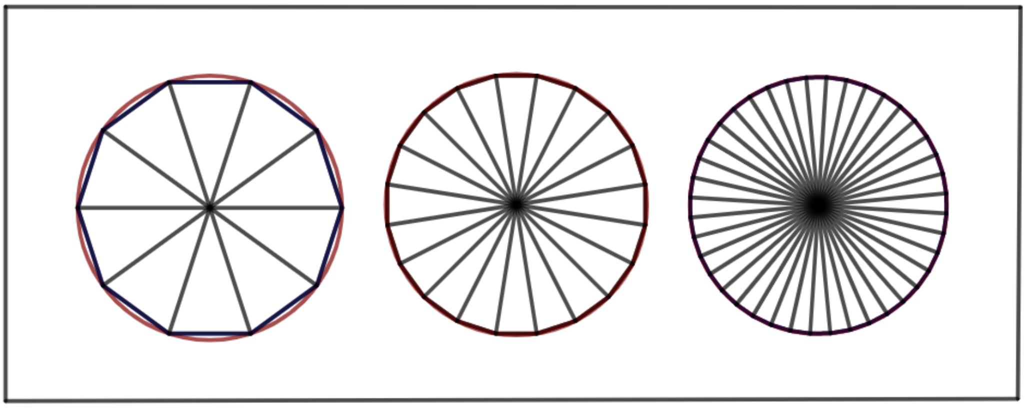
Já no fim do Renascimento, na segunda metade do século XVI, o filósofo Giordano Bruno (1548-1600) foi um dos principais nomes na concepção de um universo infinito e descentralizado. “Aliás, para ele eram infinitos os infinitos mundos infinitamente povoados” (MACHADO *et al.*, 2013, v. 6, p. 291-292).

Para Giordano a ideia de infinito estava ligada à divindade, mas acreditava em um infinito baseado na percepção sensível, para ele a natureza era Deus e Deus era a natureza, sendo ambos infinitos (SANTOS, 2008).

Na primeira metade do século XVII, um dos mais importantes matemáticos da época, Galileu Galilei (1564-1642) faz descobertas importantíssimas para o desenvolvimento do conceito de infinito matemático, em especial de infinito atual.

Em 1638, Galileu escreve *Diálogos sobre as duas novas ciências*, obra na qual discute aspectos do infinito de forma inovadora e surpreendente. Galileu explica a divisão de um círculo em uma “quantidade infinita” de triângulos infinitesimais, como podemos observar na Figura 4, argumentando que o círculo poderia então ser imaginado como um polígono com um número infinito de lados, tratando o conceito de infinito como uma “quantidade completa, acabada”, um ato único, o infinito como um objeto final, e não como processo sem fim.

Figura 4 - Divisão do círculo em triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Mas foi após, ainda nesse mesmo tratado que, seguramente, Galileu apresentou sua maior contribuição para a evolução do conceito de infinito, proporcionando grande salto do infinito potencial para o infinito atual ao estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os números naturais e o conjunto de todos os seus quadrados.

Tal correspondência mostra que todo o número natural possui um, e somente um, número igual ao seu quadrado, e todo número quadrado perfeito possui um, e somente um, número natural cujo quadrado equivale ao quadrado perfeito tomado, conforme Figura 5.

Figura 5 - Relação biunívoca

1	2	3	4	5	6	...	n	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
1	4	9	16	25	36	...	n^2	...

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Assim, Galileu nos mostra que existem tantos números quadrados perfeitos quanto números naturais, o que provoca grande espanto para os matemáticos da época, uma vez que, por vários séculos, uma verdade era indiscutível: “o todo é sempre maior que uma de suas partes”, fato que leva tal demonstração ficar conhecida como *Paradoxo de Galileu* (SENA, 2011).

Afirmar que o conjunto formado por todos os números naturais e o conjunto formado por todos os números quadrados perfeitos possuem o mesmo número de elementos, dada a correspondência biunívoca estabelecida, provoca profunda estranheza principalmente pelo até então pouco desenvolvido entendimento sobre a diferença entre os conceitos de inclusão e de tamanho de conjuntos, em especial quando tratamos de conjuntos infinitos.

Galileu conclui então que o conjunto formado pelos números quadrados perfeitos é um subconjunto próprio do conjunto dos números naturais e que a famosa afirmação sobre o todo ser sempre maior que uma de suas partes é verdadeira sempre que tratamos de conjuntos finitos, mas não para conjuntos infinitos.

De posse dessas constatações, Galileu afirma que, as propriedades de “maior” ou “menor” não fazem sentido quando nos referimos a quantidades infinitas, que se comportam de maneira diferente de quantidades finitas (LORIN, 2018).

Apesar dessa importante descoberta, Galileu sentiu-se bem confuso e desnorteado, pois até para ele ainda era muito estranho imaginar que não sobrariam os números que não eram quadrados perfeitos.

Podemos assim afirmar que Galileu Galilei foi o primeiro a introduzir na história a ideia de um infinito atual, mas apenas com conjuntos enumeráveis. Discorrer sobre o conceito de infinito atual em uma abordagem com o *continuum* seria tarefa para o matemático Bernard Bolzano, que deu sequência aos trabalhos de Galileu, aprimorando de forma considerável o conceito de infinito atual (AMADEI, 2005).

Assim, começa-se a romper a visão aristotélica de infinito apenas como potencial e, segundo Moreno e Waldegg (1991), foi necessário admitir o infinito como adjetivo para que se pudesse constituir o infinito atual. Porém, fez-se necessário que novos objetos conceituais fossem concebidos, e esses foram os conjuntos.

Já no início da Idade Moderna (1453-1789), alguns eventos como as navegações e a separação da Igreja e do Estado contribuíram para uma mudança de pensamento, e a necessidade de cálculos mais precisos provocou uma importante evolução no estudo dos infinitesimais.

O matemático francês, René Descartes (1596-1650) não concordava com o conceito de infinito reduzido simplesmente à negação do finito, para ele o infinito não era algo tão negativo, mas um conceito positivo e atual, como unidade e não somente como um processo sem fim. Descartes acreditava em uma visão racionalista do infinito, defendendo que seria possível desvendá-lo a partir da razão.

Ainda no século XVII, um matemático professor da Universidade de Bolonha e aluno de Galileu, o italiano Boaventura Cavalieri (1598-1647) merece destaque por suas contribuições a respeito do infinito, especialmente no campo da geometria, quando apresentou um método para cálculo de áreas e volumes a partir do uso de quantidades “infinitamente pequenas”, que posteriormente ganharam o nome de “infinitésimos”.

Cavalieri mostrou ser possível calcular o volume de sólidos supondo que estes eram formados por infinitas quantidades de lâminas (secções planas paralelas entre si) de espessuras infinitamente finas que chamou de indivisíveis.

Os métodos utilizados por Cavalieri foram muito criticados por seus contemporâneos, principalmente porque o matemático italiano nunca conseguiu explicar com clareza como um sólido de tamanho finito poderia ser formado por um número infinito de elementos. Mas, ainda assim, deu um dos primeiros passos em direção ao conceito de infinitésimo (MORRIS, 1998).

Em 1655, o matemático britânico John Wallis (1616-1703) publica a obra *Arithmetica Infinitorum*, em uma tentativa de tornar a geometria dos indivisíveis de Cavalieri mais próxima da aritmética.

Os métodos utilizados por John Wallis não eram considerados muito rigorosos, porém, deve-se a ele a primeira utilização do símbolo ∞ conhecido como lemniscata para representar a fração $\frac{1}{0}$, iniciando o estudo de sucessões infinitas, (SAMPAIO, 2016).

No final do século XVII e início do século XVIII, o britânico Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) forneceram importantes contribuições para o desenvolvimento dos infinitesimais, principalmente no estudo de cálculo.

Newton explorou as quantidades infinitamente pequenas, chamadas de fluxões (do termo inglês *fluxions*), utilizando a percepção de que uma curva era gerada por um ponto se movendo continuamente no tempo.

Já Leibniz desenvolvia um cálculo novo, diferentemente de Newton. Para Leibniz, as variáveis x e y eram grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos (MACHADO *et al*., 2013).

Outro importante matemático do século XVII foi o suíço Leonhard Euler (1707-1783) que, segundo Sampaio (2016), foi um dos mais produtivos da sua época, resolvendo muitas questões até então controversas no cálculo infinitesimal.

Mas, foi somente no início do século XIX, com o notável matemático tcheco Bernard Bolzano (1781-1848) que ocorre uma grande mudança no conceito e na compreensão do infinito, principalmente do infinito atual, o qual defendia brilhantemente.

Em sua obra póstuma *Os Paradoxos do Infinito* (1851), retoma a discussão acerca do infinito em matemática como objeto de estudo, tratando o infinito não como um processo interminável, mas como um todo.

Segundo Waldegg (2008), Bolzano entende que a maneira mais adequada para se referir ao conceito de infinito é por meio do conceito de conjunto.

Para Bolzano, a matemática trata de conjuntos abstratos, e acreditava que era preciso inovar os critérios para validação da existência dos conjuntos infinitos.

Afirmava que distinguir um conjunto por suas características já era suficiente, dispensando a necessidade de enumerar cada um de seus elementos.

Assim, Bolzano concebia o conjunto como um todo, sem a necessidade de se pensar em cada elemento separadamente (MORENO e WALDEGG, 1991). Essa concepção de Bolzano ajudará de forma fundamental para a evolução do entendimento sobre os conceitos de cardinalidade e de inclusão de conjuntos infinitos, principalmente da diferença entre ambos, que será posteriormente tratada nos trabalhos de Georg Cantor, como veremos mais adiante.

Bolzano também percebeu que os conjuntos infinitos não se comportavam de maneira idêntica aos conjuntos finitos, no que tange, por exemplo, às operações e propriedades. Segundo Sampaio (2016), apesar de compartilhar com o pressuposto de Arquimedes, que o todo é maior que as partes, percebeu que para os conjuntos infinitos as regras não eram tão categóricas, e por isso a intuição humana, acostumada com uma realidade finita, levava a muitas contradições ao operar com conjuntos infinitos.

Mas apesar de Bolzano entender que o infinito se comporta de maneira paradoxal, isso não o impediu de admitir a existência do infinito em seu sentido atual. Bolzano afirmava que, mesmo o infinito muitas vezes desafiando a mente humana por meio de seus paradoxos, é possível dar sustentação suficiente para abordá-los.

Uma das mais sensacionais constatações de Bolzano foi a de que dois conjuntos infinitos também podem ser relacionados entre si, de tal maneira que cada um dos elementos de cada um dos conjuntos seja associado a um elemento do outro, não restando elementos sem correspondência e sem que um elemento seja associado a dois elementos do outro conjunto. Ou seja, existem relações biunívocas entre conjuntos infinitos. Superando assim um forte obstáculo epistemológico, que perdurava desde Euclides em *Os Elementos*, e presente no *Paradoxo de Galileu*, que “o todo é maior que a parte”.

Sobre essa nova visão de Bolzano a respeito das obras de Euclides e de Galileu, Lorin (2018, p. 47) relata:

> Uma nova interpretação para a relação parte-todo de conjuntos infinitos é dada por Bolzano em seu trabalho, e relações até então consideradas paradoxais começam a ser arimetizadas, como, por exemplo, a possibilidade de relacionar biunivocamente um subconjunto infinito (parte) com um conjunto infinito (todo). Para

> Galilei, isso era contraditório, pois estava sob a égide do princípio estabelecido por Euclides. (LORIN, 2018, p. 47).

Bolzano apresenta então diversos exemplos de relações entre conjuntos de números, representados por intervalos, argumentando que esses possuem infinitos números e que, portanto, são conjuntos infinitos, e ainda que um desses conjuntos pode ser considerado subconjunto próprio do outro.

E afirma também que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos de cada um dos conjuntos.

A respeito do *Paradoxo de Galileu*, Bolzano analisou a bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos, iniciando persistentes tentativas de estabelecer relações biunívocas entre conjuntos infinitos.

Os estudos de Bolzano o levaram a importantes constatações, como o fato de perceber que dois conjuntos infinitos poderiam ter mesmo tamanho, como também poderiam ter tamanhos diferentes. Porém, faltou a Bolzano "a cereja do bolo", concluir que a possibilidade de estabelecer uma relação biunívoca entre dois conjuntos é condição necessária e suficiente para garantir que ambos os conjuntos possuam a mesma cardinalidade.

> Apesar de postular princípios, demonstrar a existência de diferentes infinitos e definir operações entre conjuntos infinitos, baseando-se no critério intraobjeto, isto é, comparando conjuntos com subconjuntos próprios, Bolzano não conseguiu, de modo mais geral, o que denominamos hoje de arimetização do infinito. Pudemos, a partir da estruturação proposta por Bolzano, conceber conjuntos infinitos como um objeto na matemática e estabelecer relações e propriedades com esses conjuntos. (LORIN, 2018, p. 48)

Outro grande matemático do século XIX, o alemão Richard Dedekind (1831-1916), responsável pelos primeiros estudos mais sistemáticos sobre teoria dos conjuntos, estabeleceu relação biunívoca entre a reta e o conjunto dos números reais, ou seja, entre conjuntos infinitos, passando assim do infinito potencial para o infinito atual e chegando a uma importante conclusão: um conjunto é infinito se existir uma correspondência biunívoca entre ele e alguma de suas partes próprias, conceito até hoje usado na teoria de conjuntos.

3.5 Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), nascido em São Petersburgo, no Império Russo, ainda jovem mudou-se com a família para a Alemanha, onde descobriu sua aptidão para a Filosofia, Física e Matemática.

Iniciou seus estudos em Zurique, e posteriormente fez doutorado em Berlim, apresentando uma tese sobre a teoria dos números, que mais tarde o estimulou à realização de novos trabalhos sobre a teoria dos conjuntos como técnica para desenvolver novas formas de operar com o infinito. Na Figura 6 apresentamos um retrato de Cantor ainda jovem.

Figura 6 - Georg Cantor

Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/pictdisplay/>. Acesso em 04 de junho de 2022.

Cantor revolucionou a teoria dos conjuntos, estabelecendo nova concepção para o infinito atual e para a cardinalidade de conjuntos infinitos. Podemos dizer que Georg Cantos abalou a comunidade matemática ao mostrar a possibilidade de um novo rigor matemático no tratamento do infinito, em especial para conjuntos infinitos.

Com Cantor, o infinito atual ganhou, além de rigor, verdadeiro conteúdo matemático, e pela primeira vez alcançou uma posição definitiva como objeto de estudo. De acordo com Santos (2008), com essa nova estruturação do infinito proposta por Cantor, caem por terra princípios que sustentavam “paradigmas finitistas” como o de que o todo é sempre maior que uma de suas partes, ou de que na matemática podemos trabalhar apenas com quantidades finitas.

Essa inovadora teoria dos conjuntos infinitos proposta por Cantor não foi de imediato aceita pela comunidade acadêmica, e, pelo contrário, foi duramente criticada por muitos matemáticos da época. Grande foi o impacto ao demonstrar, por exemplo, que o conjunto dos números inteiros tem o mesmo número de elementos que o conjunto dos números racionais, e que existem infinitos de diferentes magnitudes. Além disso, Cantor mostrou ainda que a reta, o plano e o espaço tridimensional têm o mesmo número cardinal.

Essas afirmações de Cantor entram em conflito com a intuição humana, provocando revolta de muitos de seus contemporâneos, que o criticaram fortemente, dificultando inclusive a publicação de seus trabalhos.

Leopold Kronecker (1823-1891), um dos professores de Cantor na Universidade de Berlim, chegou a classificá-lo como “charlatão científico” e “corruptor da juventude”. Já o matemático Henri Poincaré (1854-1912) considerou a teoria dos números transfinitos como uma “enfermidade”. Mas a genialidade de Cantor no desenvolvimento dessas teorias fez com que a comunidade matemática, aos poucos, fosse se convencendo e admitindo que essa estruturação proposta para o tratamento dos conjuntos infinitos proporcionou grande desenvolvimento para matemática (LORIN, 2018).

A partir da cardinalidade dos conjuntos numéricos, e com o objetivo de mostrar que existem diferentes infinitos, com tamanhos diferentes, Cantor criou o conceito de “Conjunto Enumerável” para todo conjunto que, ou fosse finito, ou pudesse ser colocado em relação biunívoca com o conjunto dos números naturais.

Como vimos, desde Galileu, já se sabia que o conjunto formado pelos números naturais poderia ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto formado pelos números que são quadrados perfeitos, sendo, portanto, esse último também um conjunto enumerável. O mesmo acontece entre os naturais e os inteiros. Porém, Cantor conseguiu demonstrar que existe uma bijeção entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números naturais, por mais estranho que isso pudesse parecer.

Intuitivamente, o conjunto dos números naturais, e até mesmo o dos números inteiros, pode parecer menor que o conjunto formado pelos números racionais, mas Cantor provou, brilhantemente, que essa intuição não é verdadeira, estabelecendo uma relação biunívoca entre eles e concluindo, assim, que o conjunto dos números racionais é também enumerável. Mostrou, mais uma vez, o quanto a ideia de infinito pode ser contraintuitiva, negando o senso comum.

Surge então a seguinte dúvida que instiga Cantor e toda a comunidade matemática da época: seriam, portanto, todos os conjuntos infinitos equipotentes? Ou seja, será que os conjuntos infinitos teriam todos a mesma cardinalidade? O próprio Cantor conseguiu provar que a resposta para esta pergunta seria negativa.

Cantor enxergava o conjunto dos números reais como uma junção infinita de outros conjuntos. Caso todos estes conjuntos fossem enumeráveis, como os conjuntos dos números naturais, dos inteiros e dos racionais, consequentemente o conjunto dos reais também o seria.

Georg Cantor já sabia que o intervalo de números reais compreendidos entre 0 e 1 podia ser colocado em relação biunívoca com o conjunto dos números reais, e assim utiliza o que ficou conhecido como “método da diagonalização” para verificar se este intervalo (0,1) também possuiria alguma bijeção com o conjunto dos números racionais. Caso a bijeção existisse, o intervalo seria enumerável, e, consequentemente, o conjunto dos números reais também.

Foi então que Cantor verificou a falta de elementos do intervalo (0,1) na lista utilizada no método da diagonalização com os números racionais, constatando assim que não existe uma correlação biunívoca entre os elementos do intervalo e os racionais, concluindo, portanto, que o conjunto dos números reais não era enumerável (LORIN, 2018).

Tal descoberta levou Cantor a perceber que o conjunto dos números reais, o qual denominou de contínuo, possui uma cardinalidade maior que a do conjunto dos números racionais, e, consequentemente, maior que a dos naturais e a dos inteiros, o que caracterizou um marco na história do estudo do infinito pois, a partir dessas constatações, Cantor provou que existem infinitos de tamanhos diferentes.

Nesse momento, o matemático russo observou então duas classes de infinitos: aos conjuntos infinitos da primeira classe, equipotentes com o conjunto dos números naturais, deu o nome de “enumeráveis”; e, aos conjuntos da segunda classe, aqueles que não possuem bijeção com os naturais, chamou de “não enumeráveis”.

Em 1877, Georg Cantor demonstrou que a potência de um conjunto de pontos em um segmento de reta é a mesma de uma superfície de um plano qualquer, ou ainda de um conjunto de pontos do espaço tridimensional, concluindo que, existem tantos pontos em um segmento de reta, por menor que ele seja, quanto em todo o universo. Ao chegar a esta conclusão, Cantor escreveu para Dedekind dizendo: “Eu vejo isso, mas não acredito!” (SENA, 2011).

Outra questão instigou Cantor após esta constatação: se todos os conjuntos não-enumeráveis seriam equipotentes, resultando em apenas dois “tamanhos” diferentes de infinitos, ou se existiriam infinitos com cardinalidades maiores que a do conjunto dos números reais. E ainda: existiria alguma cardinalidade maior que a dos naturais e menor que a dos reais?

Trabalhando para encontrar respostas a essas perguntas, Cantor demonstrou que um conjunto S não pode ser equipotente com o conjunto que contém todas as partes de S. E que, para qualquer número cardinal, sempre existirá um cardinal maior que o número dado, chegando, assim, à conclusão de que os conjuntos infinitos podem apresentar uma infinidade de tamanhos.

Com a finalidade de classificar os diferentes “tamanhos de infinitos”, Georg Cantor cria os “números transfinitos”, os quais identificariam a classe a que um conjunto infinito pertenceria. Para tal, escolheu a letra hebraica $\aleph$ (Aleph).

Assim, para representar a classe dos conjuntos enumeráveis utilizou a notação $\aleph_0$ (Aleph zero) e à classe do conjunto dos números reais chamou de $\aleph_1$ (Aleph um). Posteriormente a cardinalidade dos reais recebe também a denominação de *continuum* (c), porém esta notação não é de autoria de Cantor.

Surpreendentemente, Georg Cantor não parou por aí, e conseguiu demonstrar também que a cardinalidade dos reais era igual a cardinalidade do conjunto que contém as partes do conjunto dos números naturais, ou seja, que:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = c = card(\mathbb{R})$$

Designando por $\aleph_1$ o menor cardinal depois de $\aleph_0$, e por $\aleph_2$ o menor cardinal depois de $\aleph_1$, Cantor ainda se perguntava: seria possível encontrar uma sequência de infinitos tamanhos de infinitos? Uma sequência de Alephs da forma:

$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots < \aleph_n < \cdots$?

Ou ainda: poderia existir algum transfinito entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$?

Cantor acreditava não existir nenhum transfinito entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$, essa questão ficou conhecida como a “Hipótese do Continuum”, mas infelizmente morreu sem conseguir demonstrar respostas conclusivas a essas perguntas, o que absolutamente não retira o brilho de suas espetaculares descobertas a respeito do, nada intuitivo, infinito.

Segundo Lorin (2018), uma das implicações das teorias criadas por Cantor era a de que, para além da existência de conjuntos infinitos de diferentes tamanhos, não existe um cardinal infinito maior do que todos os outros.

Não ter conseguido demonstrar a Hipótese do Continuum e responder a alguns questionamentos que ainda perduravam no seu estudo sobre o infinito abalou consideravelmente Georg Cantor, levando-o à profunda tristeza, depressão e isolamento. Por volta de 1884, Cantor começou a sentir os primeiros sinais de esgotamento e uma crescente depressão que o acompanharia até os últimos dias de sua vida, em uma instituição para pacientes com doenças mentais, onde faleceu em 6 de janeiro de 1918.

De acordo com Sena (2011), em 1938 o matemático austríaco Kurt Godel (1906-1978) provou que a Hipótese do Continuum é consistente com a Teoria dos Conjuntos de Cantor, isto é, pode ser aceita sem gerar contradições, mas não conseguiu negar que sua negação também estaria de acordo com a Teoria dos Conjuntos, o que em 1963 foi demonstrado por Paul Cohen (1934-2007), mostrando que a Hipótese do Continuum pode ser tanto verdadeira como falsa, não podendo ser, portanto, nem provada nem negada no atual sistema. Tal fato rendeu a Cohen, em 1966, a medalha Fields.

Apesar de duramente criticado, Cantor também despertou a admiração de matemáticos notáveis. Considerado um dos maiores matemáticos do início do século XX, o alemão David Hilbert (1862-1943) era grande admirador de Georg Cantor. Hilbert descrevia a aritmética transfinita de Cantor como o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível (SENA, 2011).

Em 1900, durante o II Congresso Internacional de Matemática em Paris, Hilbert apresentou uma lista com 23 problemas que até então não possuíam respostas, e o primeiro deles foi a Hipótese do Continuum de Cantor. Posteriormente, em 4 de junho de 1925, no congresso organizado pela Sociedade Matemática de Westfália, em Münster, Hilbert afirmou: “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

Durante a segunda metade do século XIX e até os dias atuais, o infinito matemático continua despertando atenção, interesse e admiração, e até hoje provoca a intuição humana. Porém, se atualmente o compreendemos melhor, boa parte é por méritos do brilhante Cantor e suas contribuições para o desenvolvimento do estudo do infinito.

4 CARACTERIZAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO

Como referencial teórico para o presente trabalho, no que tange às noções de: conjuntos, funções, conjuntos finitos, conjuntos infinitos e cardinalidade, adotamos como parâmetro a obra de Elon Lages Lima, "Um curso de análise – volume 1".

4.1 Noção de conjunto

Em matemática, um conjunto é um grupo (uma coleção) formado por objetos, que chamamos de elementos. Dizemos que cada um desses elementos que compõe o conjunto pertence a esse conjunto. Assim, há uma relação de pertinência entre o objeto e o conjunto.

Para exemplificar, tomemos um conjunto A e um objeto x. Se x for um elemento do conjunto A, então dizemos que x pertence a A, e representamos por:

$x \in A$.

Caso x não seja um objeto do conjunto A, então podemos afirmar que x não pertence a A, e escrevemos:

$x \notin A$.

Normalmente, os elementos formadores de um conjunto possuem uma característica em comum que define este conjunto, ou seja, todos os elementos de um mesmo conjunto gozam de uma certa propriedade em comum.

Imaginemos o conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Podemos dizer que tanto o número 1 quanto o número 2 são elementos desse conjunto, pois (ambos) possuem a característica de serem números naturais, propriedade que define tal conjunto.

É possível observar que muitos conjuntos não são definidos especificando-se elemento por elemento, mas por uma característica comum a todos os seus objetos. Sendo assim, uma maneira de definir um conjunto é por meio de alguma propriedade presente em todos os seus elementos.

Por exemplo, consideremos um elemento genérico $x \in \mathbb{N}$ que possui a propriedade de ser maior que 8. Esta propriedade de um número natural ser maior que 8, define o conjunto $X = \{9,10,11,12, \dots\}$, o qual também podemos escrever na forma: $X = \{x \in \mathbb{N}; x > 8\}$. Ou seja, X é o conjunto dos elementos x pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que x é maior que 8.

Caso nenhum objeto goze da propriedade que caracteriza o conjunto, esse não possuirá elemento, e se chamará conjunto vazio, representado pelo símbolo Ø. Como exemplo podemos tomar o conjunto A dos números naturais que são menores que zero. Ora, nenhum elemento do conjunto $\mathbb{N}$ goza da propriedade de ser menor que zero. Portanto, o conjunto A não possui nenhum elemento, e assim, é chamado de conjunto vazio, e escrevemos: A = Ø ou A = { }.

Uma noção muito importante é a relação de inclusão entre conjuntos. Se todos os elementos de um conjunto X são também elementos do conjunto Y, então dizemos que X está incluído em Y, ou que X está contido em Y, ou ainda que X é parte de Y, e denotamos por: $X \subset Y$. Podemos também afirmar que se $X \subset Y$, então X é um subconjunto de Y.

No caso descrito acima, ambos os conjuntos podem ser iguais, $X = Y$. Porém, se $X \subset Y$ e $X \neq Y$, então X é chamado de parte própria, ou subconjunto próprio de Y.

Assim, analisando a relação de inclusão entre os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e reais ($\mathbb{R}$), podemos dizer que $\mathbb{N}$ é um subconjunto próprio (ou parte própria) de $\mathbb{Z}$, que é um subconjunto próprio de $\mathbb{Q}$, que por sua vez é um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$, ou seja: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Falaremos mais adiante sobre a relação de inclusão, comparando-a com a noção de cardinalidade dos conjuntos, noções estas que podem levar a erros caso confundidas, principalmente quando se trata de conjuntos infinitos.

Se quisermos demonstrar que um conjunto X não é subconjunto de um certo conjunto Y, basta encontrarmos um elemento de X que não pertença a Y. Por exemplo, não podemos afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ pois o número –3 pertence a $\mathbb{Z}$, mas não pertence a $\mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{Z}$ não é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Pelo exposto acima, podemos então concluir que o conjunto vazio Ø é subconjunto de qualquer conjunto X, pois, caso não fosse, existiria algum elemento no conjunto vazio que não pertence a X, o que seria um absurdo pois o conjunto vazio não possui elemento. Ou seja, Ø $\subset X$, qualquer que seja o conjunto X dado.

Indicamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos elementos que são partes de X, ou simplesmente "*conjunto das partes de* X". $\mathcal{P}(X)$ nunca será vazio, pois possuirá obrigatoriamente pelo menos dois elementos, sejam eles: o conjunto vazio Ø que é uma parte de X, e o próprio conjunto X que é uma parte dele mesmo.

Vejamos um exemplo:

Seja o conjunto X = {4, 5, 6}. Então o conjunto das partes de X será:

$\mathcal{P}$(X) = {Ø, {4}, {5}, {6}, {4, 5}, {4,6}, {5, 6}, X}

4.2 Noção de Função

Considerando dois conjuntos numéricos quaisquer, podemos relacionar seus elementos a partir de algum critério. Uma função é um caso especial de relação entre dois conjuntos, mais precisamente entre os elementos de um conjunto com os elementos do outro.

Essa relação envolve três componentes, um conjunto A chamado domínio da função, um conjunto B denominado contradomínio, e uma lei de formação, uma regra, que associa, de modo determinado, a cada elemento do conjunto A, um único elemento pertencente ao conjunto B.

Formalizando essa ideia, podemos dizer que:

Sejam $x \in A$ e $f(x) \in B$. Escrevemos a função de A em B:

$f: A \rightarrow B$. E usamos a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

É comum dizermos "a função f" em vez de "a função $f: A \rightarrow B$", ficando subentendido neste caso que o conjunto A é o domínio de f e o conjunto B o seu contradomínio.

Devemos sempre alertar para o cuidado em não confundir f com $f(x)$. Podemos dizer que f é a função propriamente dita, enquanto $f(x)$ é o valor que a função assume para um valor x do seu domínio.

Outra consideração importante é lembrar que, para que a relação seja uma função, todo elemento do domínio deve ser associado a apenas um, e apenas um, elemento do contradomínio. Ou seja, o domínio não pode apresentar elemento sem um correspondente no contradomínio da função.

Vejamos alguns exemplos:

a) Seja P o conjunto dos quadrados de um plano, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e f a função que associa cada quadrado de lado x de P à sua área $A = f(x)$.

Podemos escrever a função f da seguinte forma:

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

b) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, podemos escrever a função f que associa cada elemento $x \in \mathbb{N}$ com o seu sucessor escrevendo:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $f(x) = x + 1$

Alguns casos particulares de funções recebem denominação específica, tais como as funções injetivas, as sobrejetivas e as bijetivas.

Uma função $f: A \to B$ é dita injetiva quando dados x e y quaisquer pertencentes a A, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$. Ou seja, quando $x \neq y$ em A, $f(x) \neq f(y)$ em B.

Um exemplo de função injetiva é $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; $f(x) = 2x - 1$

Outro caso particular é o grupo das funções sobrejetivas. Seja $f: A \to B$, a função f chama-se sobrejetiva quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Isso significa que todo elemento do conjunto B está associado a algum elemento do conjunto A.

Como exemplo de uma função sobrejetiva podemos citar a função:

$f: \mathbb{Z}^* \to \mathbb{N}^*$; $f(x) = x^2$

Quando uma função f for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo é denominada bijetiva. Neste caso, dizemos que a função f é uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca, ou ainda, uma correspondência um a um.

Um exemplo bastante simples de bijeção é a chamada função identidade, dada por:

$f: A \to A$; $f(x) = x$ para todo $x \in A$

Um outro conceito importante é o de imagem de uma função. Dados os conjuntos A e B, e a função $f: A \to B$, chama-se imagem o conjunto formado pelos valores $f(x)$ de B. Claramente podemos verificar que a imagem estará sempre contida no contradomínio B. Caso a imagem coincida com o contradomínio, temos uma função sobrejetiva.

4.3 Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos

Consideremos o seguinte conjunto formado pelos números naturais:

$I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Um conjunto X será finito se for vazio ou se existir, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma relação biunívoca, ou seja, uma bijeção (relação um a um) $I_n \rightarrow X$.

Sobre os dois casos citados acima, no primeiro, quando X é vazio, dizemos que ele não possui elemento; e, no segundo caso, o número natural n é o número de elementos do conjunto finito X.

Desta definição de conjuntos finitos, podemos concluir que:

- Cada conjunto In é finito e possui um número n de elementos.
- Se $Y \rightarrow X$ é uma bijeção, um desses conjuntos é finito se, e

somente se, outro é finito também.

Como exemplo, tomemos o conjunto X dos números pares maiores que 2 e menores que 12. Veja que cada elemento x do conjunto X goza da propriedade de ser par e de ser, ao mesmo tempo, um número maior que 2 e menor que 12. Assim, podemos escrever $X = \{4, 6, 8, 10\}$.

Observe que no exemplo acima existe a bijeção $I_4 \rightarrow X$ pois:

$I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ e podemos relacionar cada elemento de I_4 com um elemento de X:

$1 \rightarrow 4$

$2 \rightarrow 6$

$3 \rightarrow 8$

$4 \rightarrow 10$

Portanto, podemos afirmar que o conjunto X é finito e possui quatro elementos.

Considerando o que foi dito até aqui, vale citar alguns teoremas e corolários. Como não é o objetivo principal deste trabalho, não apresentamos aqui as demonstrações, porém, essas encontram-se disponíveis no livro “Um curso de análise – volume 1” de Elon Lages Lima.

Teorema: Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$, então $A = I_n$

Corolário: Se existir uma bijeção $f: I_m \rightarrow I_n$ então $m = n$. Consequentemente, se existem duas bijeções $\psi: I_n \rightarrow X$ e $\phi: I_m \rightarrow X$, deve-se ter: $m = n$.

Corolário: Não pode existir uma bijeção f: $X \to Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$.

Teorema: Se X é um conjunto finito então todo subconjunto $Y \subset X$ é finito. O número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando Y = X.

Uma outra maneira de definir conjunto finito foi dada por Dedekind, afirmando que um conjunto é finito se, e somente se, não admite bijeção com suas partes próprias.

Podemos dizer que um conjunto será denominado infinito quando não for finito. Porém, considerando a definição de Dedekind para conjuntos finito, acreditamos que uma definição mais conveniente para conjunto infinito pode ser escrita da seguinte forma: um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção f: $X \to Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.

Como exemplos de conjuntos infinitos podemos citar os conjuntos dos números: naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e reais ($\mathbb{R}$), e alguns subconjuntos desses, como o intervalo real [1, 4], o conjunto dos números pares, o conjunto dos números primos, dos números quadrados perfeitos, a progressão aritmética {3, 7, 11, ...}, a progressão geométrica {1, 3, 9, 27, ...}, entre outros.

4.4 Cardinalidade

Como já abordado anteriormente neste trabalho, Georg Cantor contribuiu de forma inigualável para a evolução da teoria dos conjuntos e estabeleceu novas classes de equivalências entre eles. Dizemos que dois conjuntos são equipotentes quando existir uma bijeção entre eles, e, nesse caso, pertencem a mesma classe de equivalência, possuindo, assim, o mesmo número cardinal, ou seja, a mesma cardinalidade.

Existindo a bijeção $f: X \to Y$, então o conjunto X tem a mesma cardinalidade do conjunto Y, e denotamos por: $card(X) = card(Y)$. De acordo com o que apresentamos acima, podemos concluir que dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos.

4.5 Conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis

Um conjunto X é dito *enumerável* se for vazio ($X = \emptyset$) ou se existir uma bijeção de X com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ ou seja, se $f: \mathbb{N} \to X$ for bijetiva. Neste último caso dizemos que o conjunto X é *infinito enumerável* e que a cardinalidade de X é igual a cardinalidade de $\mathbb{N}$, ou seja, que $card(X) = card(Y)$.

Por exemplo, sendo P o conjunto dos números naturais pares, a bijeção $f: \mathbb{N} \to P$; $f(x) = 2x$ mostra que o conjunto P é infinito enumerável, pois existe a correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e P.

A respeito do conceito de conjuntos enumeráveis, apresentamos a seguir alguns teoremas e corolários que novamente não serão aqui demonstrados, porém, tais provas estão disponíveis no livro "Um curso de análise – volume 1" de Elon Lages Lima.

Teorema: Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.

Corolário: Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f: X \to Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.

Teorema: Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Corolário: Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou ainda: se $f: X \to Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.

Corolário: Dado um subconjunto infinito $Y \subset X$, existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to X$.

Teorema: Seja X um conjunto enumerável. Se $f: X \to Y$ é sobrejetiva, então, Y é enumerável.

Caso um conjunto X seja infinito e não exista a bijeção $f: \mathbb{N} \to X$, então $card(X) \neq card(\mathbb{N})$ e o conjunto X é chamado de *não enumerável*.

Como exemplo de conjuntos não enumeráveis, podemos citar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, ou qualquer intervalo real contido nele.

5 REFERENCIAIS TEÓRICOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Fundamentação teórica

Para elaboração da sequência didática que sugerimos neste trabalho, utilizamos como fundamentação a “Teoria das Situações Didáticas” do educador e matemático francês Guy Brousseau, segundo a qual a preparação de uma sequência de atividades considera permitir que o aluno tenha autonomia para construção dos seus saberes, sem desconsiderar seus conhecimentos já adquiridos.

Esta teoria de Brousseau é um modelo teórico que utiliza situações fundamentais para o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos e tem servido de fundamentação para novos trabalhos de pesquisa em didática e para prática de professores de matemática em suas aulas, permitindo que estes orientem os aprendizes no desenvolvimento de atividades que propiciam a aquisição de novos saberes (TEIXEIRA e PASSOS, 2013).

Assim, acreditamos que as atividades devem possibilitar que os estudantes vivenciem suas realidades, trazendo seus conhecimentos e, de maneira autônoma, construam o seu saber. Dessa forma, as situações provocam o uso dos conhecimentos prévios que os alunos trazem, de forma espontânea e em condições apropriadas.

Para Brousseau, uma situação é um modelo de interação do sujeito com um determinado meio (*milieu*), e, de acordo com sua teoria das situações didáticas, as atividades têm como objetivo o ensino de saberes matemáticos específicos, análises, explicações, conceitos e teorias, sem deixar de considerar os comportamentos cognitivos dos alunos, as situações e os fenômenos de comunicação do saber.

Estudando as condições que levam o sujeito a usar seus conhecimentos para tomada de decisões, Brousseau esclarece a integração das dimensões cognitivas, epistemológicas e sociais na Educação Matemática, o que nos ajuda a compreender melhor as interações que ocorrem entre professores e estudantes na sala de aula, assim como a relação entre as condições e a forma como os conhecimentos matemáticos podem ser aprendidos (TEIXEIRA e PASSOS, 2013).

A teoria de Brousseau tem como característica principal o processo de aprendizagem por meio de situações didáticas que estabelecem fatores para a evolução do comportamento dos alunos, identificando as interações entre professores, alunos e o saber matemático.

Neste processo, devem-se criar condições favoráveis para a aprendizagem dos estudantes, de modo envolvente, enriquecedor, e que possa realmente ter significado e sentido para quem aprende, propondo condições didáticas que sustentem essas situações.

Segundo Teixeira e Passos (2013), quando o professor propõe um problema para seus alunos, é necessário que algum dispositivo seja acionado para ajudá-lo na resolução, permitindo que, por meio da análise da situação ao longo do processo, o aluno possa chegar à solução do problema proposto, ocorrendo assim o efeito de ensinar.

Em algumas atividades, é comum o aluno utilizar certos conhecimentos matemáticos que já domina para solucionar problemas de diferentes temas. Assim, podemos dizer que os estudantes trazem para a sala de aula certos conhecimentos que utilizam na construção do saber.

“As crianças são hábeis em achar respostas para questões propostas, sem mesmo examinar seu sentido e sua validade, em alguns casos. O aluno, nessa situação, mostra conhecimento, mas não, necessariamente, o saber matemático” (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 162).

Na aprendizagem por adaptação é necessário que o aluno tente adequar a sua cognição a uma situação problema, enquanto a aprendizagem formal prioriza a técnica e a memorização. A natureza da técnica de resolução de problemas caracteriza uma situação didática. O papel do professor não deve ser apenas de ensinar ou restringir-se somente a comunicação do saber, cabe a ele propor problemas que provoquem a busca por um novo saber, iniciando o processo de aprendizagem.

Analisando as atividades específicas da aprendizagem de matemática, Brousseau desenvolveu uma tipologia das situações didáticas, as quais descrevemos, de forma sucinta, a seguir:

“Situação didática de devolução”: o professor divide com o aluno a responsabilidade do processo de aprendizagem, incluindo-o nesse processo e assumindo os riscos por esses atos.

“Situação didática de ação”: o aluno, ao definir um procedimento para resolução em um esquema de adaptação, interagindo com o meio, reflete e simula tentativas, tomando decisões para organizar a resolução do problema.

“Situação didática de formulação”: ocorrem as trocas de informações entre o estudante e o meio, utilizando uma linguagem mais adequada, mas ainda sem a obrigatoriedade de uma linguagem matemática explicitamente formal, podendo inclusive ocorrer alguma redundância, ou até mesmo ambiguidade.

“Situação didática de validação”: os alunos utilizam uma linguagem matemática mais apropriada, formal (geralmente demonstrações), para convencer os envolvidos sobre as conclusões a que chegaram. O papel do professor se restringe ao de mediador.

“Situação didática de institucionalização”: estabelece convenções sociais. O professor revela sua intenção, retomando a parte da responsabilidade cedida aos alunos na “situação de devolução”, formalizando, generalizando e, completando, caso seja necessário, a solução do problema. Finalmente nesta situação didática, o papel do professor revela-se, e o novo saber é reconhecido pelo educador.

Atuando como um mediador da situação, o docente permite maior autonomia aos estudantes. Assim

> O professor, obedecendo àqueles procedimentos, não fornece, ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. O aluno pode, então, desenvolver novos saberes com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio. (TEIXEIRA e PASSOS, 2013, p. 162)

Considerando o tema deste trabalho e a sugestão de sequência didática que apresentamos, exploramos alguns conceitos que nos ajudam a embasar nossa fundamentação teórica e principalmente auxiliam na identificação do conhecimentos prévios dos estudantes, visto que esses têm um papel fundamental na teoria das situações didáticas e na construção do conhecimento matemático Para tanto, utilizamos como um dos materiais de suporte as ideias de Tall e Vinner (1981), no qual os autores discorrem sobre as noções de *conceito imagem* e de *conceito definição*, que se relacionam com o processo cognitivo de aquisição de um conceito pelo sujeito.

Segundo Tall e Vinner (1981), o *conceito imagem* é aquele associado à estrutura cognitiva da mente do indivíduo, construído por ele próprio por meio da sua vivência em uma comunidade que pode ser científica ou não. Esse conceito imagem de cada sujeito nem sempre é aceito globalmente, e muitas vezes difere da definição formal, podendo inclusive causar conflitos cognitivos.

A associação entre a estrutura cognitiva e o conceito imagem contém representações mentais, como imagens visuais, experiências, impressões e propriedades, elaboradas pelos processos de pensamento sobre representações mentais (DIAS, 2002).

Comparando com outros campos, a matemática tem seus próprios critérios de verdade, o que de certa forma difere das realidades psicológicas. A estrutura cognitiva presente na mente de cada indivíduo é complexa e produz uma grande variedade de imagens mentais bastante pessoais. O cérebro de cada pessoa não é totalmente lógico, e a complexa forma como ele funciona pode, em diversos momentos, estar em desacordo com a lógica matemática (TALL e VINNER, 1981).

Neste trabalho, em acordo com a teoria de Tall e Vinner (1981), optamos por utilizar o termo *conceito imagem* como a estrutura cognitiva total, associada ao conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. E, como já apresentado, é construído ao longo da vida do indivíduo, por meio de todas as suas experiências, acadêmicas ou não, podendo inclusive modificar-se ao longo do tempo à medida que aparecem novos estímulos.

Tall e Vinner chamam de *conceito imagem evocada* a parte que é evocada em um determinado momento. Alguns aspectos conflitantes podem ocorrer em diferentes instantes, porém, quando são evocados simultaneamente, dizemos que acontece um senso real de conflito ou confusão.

Já o *conceito definição*, que também é formado na estrutura cognitiva do indivíduo, está relacionada à especificação do conceito que o sujeito expressa assim que é diretamente questionado sobre tal conceito.

Para Tall e Vinner (1981), o *conceito definição* consiste em uma forma de utilizar palavras para especificar um conceito, que pode ser aprendido pelo indivíduo de forma mecânica ou de uma forma mais significativa, relacionando-se em maior ou menor grau ao conceito como um todo, podendo, assim, ser entendida como reconstrução pessoal de uma definição feita pelo aluno, ou seja, a forma como ele utiliza para explicar um conceito imagem.

Ainda segundo Tall e Vinner (1981), as imagens conceituais sobre determinados conteúdos podem entrar em conflito com a definição formal do conceito. Em alguns casos isso ocorre de forma sutil e pode inclusive nem ser notada pelo sujeito, mas tem condições, muitas vezes, de causar confusão quando lidamos com a teoria formal, relacionada ao conceito definição, geralmente reconhecido pelos matemáticos, caso esse coincida ou seja equivalente à definição formal.

Quando uma parte do conceito imagem (ou do conceito definição) pode entrar em conflito com uma outra parte do conceito imagem (ou do conceito definição), dizemos que há um potencial fator de conflito. No caso em que fatores são evocados em situações que causam conflito cognitivo real, estes são denominados *fatores de conflito cognitivo*.

Existem circunstâncias em que fatores de conflito cognitivo manifestam-se apenas por uma vaga sensação de desconforto, de inquietação, de conflito, muito comum em atividades com resolução de problemas. Em diversas situações a razão para o conflito é posteriormente compreendida, dependendo do processo de aprendizagem.

Uma situação que pode tornar-se mais preocupante corresponde ao fator de conflito potencial quando o conceito imagem não está em desacordo com outra parte do conceito imagem, mas sim com parte da própria definição formal de tal conceito, o que pode levar até ao impedimento da aprendizagem da teoria formal, uma vez que podem se tornar fatores de conflito cognitivo real.

Comumente nos deparamos com situações em que os alunos possuem um conhecimento já consolidado sobre certo tema, considerando um determinado domínio desse conhecimento. Porém, quando esse conhecimento já não fornece mais explicações adequadas para uma evolução do nível de conhecimento, ou seja, para avançar a um outro domínio mais elevado, estamos diante de um obstáculo epistemológico, e neste momento se fazem necessárias rupturas nesse processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Lorin (2018), essas rupturas no processo de aprendizagem do aluno são fundamentais, mas, para que isso aconteça, é preciso que, anteriormente, o indivíduo supere alguns obstáculos.

As noções relacionadas aos obstáculos epistemológicos podem ser estudadas na prática da educação e por meio do desenvolvimento histórico do pensamento científico (BACHELARD, 1993).

De acordo com Bachelard (1993), o conhecimento é construído a partir da ratificação de erros, a incerteza da realidade é necessária no processo de aprendizagem e destaca a necessidade de romper com o conhecimento comum pré-existente para que haja o desenvolvimento. Assim, o professor deve auxiliar na superação de obstáculos gerados ao longo da vida do estudante, substituindo o saber estático e inflexível por aquele aberto às possibilidades de aprendizagem.

Segundo Lorin (2018), o matemático francês Guy Brousseau apresenta três tipos de obstáculos presentes na didática matemática. Ao primeiro deles chamou de obstáculos de origem ontogenética, relacionada a individualidade genética de cada sujeito ou do seu processo de maturação cognitiva. O segundo tipo denominou obstáculos de origem didática, decorrentes de situações didáticas experimentadas pelo indivíduo. E, por fim, a terceira espécie consiste nos obstáculos de origem epistemológica, que surgem como consequência da resistência do próprio conhecimento matemático.

Brousseau considera que uma boa teoria epistemológica é fundamental para conseguirmos responder a diversas questões para a pesquisa em didática da matemática, e que a análise epistemológica permite identificar obstáculos e dificuldades no processo de aprendizagem (IGLIORI, 1999).

Segundo Igliori (1999), em seu artigo “Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática”, publicado em 1983, Brousseau introduz a noção de obstáculo epistemológico como sendo a resistência de um saber mal adaptado. Essa concepção, de acordo com Brousseau, mostra que o erro não é apenas o efeito da ignorância, ou da incerteza, mas de um conhecimento anterior, que em momentos passados já teve seu valor, mas que agora se revela falso ou mal adaptado.

Um exemplo de obstáculo epistemológico clássico é o conhecimento que os alunos do Ensino Fundamental já possuem sobre as relações entre os números naturais e então começam a aprender as operações com os números decimais, deparando-se com o fato de o produto de um número natural por um número decimal entre zero e um ser menor do que este natural. Nesse momento, o estudante pode precisar enfrentar uma barreira a ser superada, um obstáculo epistemológico.

5.2 Procedimentos metodológicos

O presente trabalho é de cunho bibliográfico, e foi elaborado a partir de vários aspectos que contemplam características fundamentais de uma pesquisa dessa natureza, a qual, em especial, “é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (GIL, 2002, p.44).

De acordo com Gil (2002) uma das potencialidades desse tipo de pesquisa está na possibilidade de “[...] cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (GIL, 2002, p. 45). Ou seja, com esse tipo de pesquisa é possível pesquisas já desenvolvidas presentes em teses, artigos, dissertações e Internet. Aqui desenvolvemos os seguintes procedimentos metodológicos:

Primeiramente realizamos um levantamento bibliográfico de trabalhos acadêmicos, artigos científicos, dissertações de mestrado e teses de doutorado, além de livros que tratam a respeito do infinito matemático, tanto em sua forma potencial como na forma atual.

A pesquisa dos trabalhos acadêmicos foi realizada principalmente de forma online, em sites de repositórios, como o portal de periódicos da CAPES, o Google Acadêmico, e o banco de dissertações do PROFMAT, além de bibliotecas virtuais como a Pearson, e revistas científicas.

Uma estratégia utilizada foi analisar as citações e referências bibliográficas de cada trabalho e, de acordo com os temas que apresentaram afinidade, aqueles nos levaram a outros trabalhos também utilizados.

Dentre todas as referências utilizadas, demos maior enfoque àquelas que tratam das dificuldades dos alunos da Educação Básica em compreenderem algumas noções acerca dos conjuntos infinitos e dos obstáculos que muitos professores enfrentam ao abordarem estes assuntos em suas aulas, o que nos ajudou a justificar a existência dessas dificuldades não somente no Brasil.

Em um segundo momento, a pesquisa foi dedicada à criação de uma fundamentação teórica, e, para tanto, pesquisamos autores e obras com reconhecido conhecimento no assunto em questão. Nesta etapa foi necessária a leitura de diversos livros, dos quais analisamos importantes teorias que foram consideradas neste trabalho.

Durante e após a leitura desse material, selecionamos aqueles que contribuíram de forma mais intensa para a criação deste trabalho, tanto para a abordagem histórica sobre o infinito, quanto para a caracterização do objeto matemático, e para a fundamentação teórica, que embasa toda a sequência didática que sugerimos.

Por fim, o foco de nossa pesquisa se voltou para a busca por trabalhos, relatos, experiências e teorias que nos auxiliassem a responder, ao menos de forma parcial, ao questionamento proposto, como abordar a noção de cardinalidade de conjuntos infinitos nas aulas de matemática para a educação básica, fornecendo assim bases para criação de uma sequência didática que possa ajudar professores e alunos.

6 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Embasados pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau, pelos conceitos *imagem* e *definição*, de acordo com Tall e Vinner (1981), e das noções de obstáculos epistemológicos, conforme apresentamos no capítulo 5 desta dissertação, propomos uma sequência didática com atividades que podem auxiliar os professores e alunos ao abordarem o tema infinito matemático, mais especificamente a respeito das noções de inclusão e cardinalidade de conjuntos infinitos, nas aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental II, ou seja, com oitavos e nonos anos.

Destacamos que tal sequência de atividades é uma sugestão para tratamento do assunto em sala de aula, com o intuito de provocar e despertar os conhecimentos prévios dos estudantes, suas curiosidades e interesses pelo tema, ajudando em sua compreensão e na construção de novos saberes.

Ressaltamos que essa sequência didática está fundamentada na "Teoria das Situações Didáticas", de Brousseau, uma vez que os estudantes terão a possibilidade de serem protagonistas da ação, vivenciarem suas realidades, utilizarem seus conhecimentos e, de maneira autônoma, construir um novo saber. Assim, as situações da sequência provocam o uso dos conhecimentos prévios dos alunos, de forma espontânea e em condições apropriadas.

Além disso, veremos que a sugestão da sequência proposta contempla as etapas previstas nas situações didáticas, quais sejam, situações didáticas de devolução, de ação, de formulação, de validação, e de institucionalização, conforme apresentado no capítulo 5 dessa dissertação.

Também gostaríamos de evidenciar que as atividades da sequência didática sugerida podem ser adaptadas a cada sala de aula com que será trabalhada, de acordo com a realidade dos alunos, de seus conhecimentos e do grau de escolaridade, podendo inclusive ser aplicada ao Ensino Médio.

Pensando em aulas de aproximadamente 45 a 50 minutos, sugerimos que cada atividade seja realizada em duas aulas, a primeira criando situações para que o aluno se sinta desafiado e envolvido pelo problema, perpassando pelas situações didáticas de devolução, de ação e de formulação, agindo o professor como mediador do processo; e a segunda aula deve ser empregada para realização das situações didáticas de validação e de institucionalização, essa em que o professor estabelece convenções sociais, propõe discussão sobre as soluções apresentadas pelos alunos, revela suas intenções e formaliza os objetos, completando assim o processo de aprendizagem, conforme exposto nos referenciais teóricos deste trabalho.

Apresentamos a seguir a sequência didática de atividades, como sugestão para que professores possam aplicá-la com as últimas séries do Ensino Fundamental II, ou seja, com oitavos e nonos anos.

Consideramos conveniente iniciar a sequência de atividades com aquelas que envolvem apenas conjuntos finitos, pois durante estas atividades, além de possibilitar que o estudante utilize seus conhecimentos prévios, o docente pode identificar com mais clareza o *conceito imagem* que o aluno trás, os quais serão úteis para identificação dos obstáculos epistemológicos que podem levá-lo ao erro nas atividades seguintes, durante as quais serão aprimorados tanto o *conceito imagem* quanto o *conceito definição* nesta construção de um novo saber para o estudante. Assim, podemos considerar que as quatro primeiras atividades da sequência didática servirão como preparação para as atividades posteriores.

A partir da quinta atividade abordaremos também os conjuntos infinitos, momento em que surgem, de forma mais evidente, os obstáculos epistemológicos apresentados no capítulo 5, os quais serão primordiais para o processo de aprendizagem do aluno. É durante essas atividades que o conceito definição poderá passar a um nível de rigor mais elevado para os estudantes, superando os obstáculos epistemológicos anteriormente presentes.

6.1 Atividade 1

Convide os estudantes a imaginarem o conjunto formado por todos os alunos daquela turma, o qual podem chamar, por exemplo, de conjunto A. Em seguida, considere o conjunto formado pelos alunos desta turma que gostam de matemática, que chamaremos de conjunto M.

Por meio desse procedimento, o docente cria condição favorável para a aprendizagem dos estudantes, que fazem parte dela, como protagonistas da ação, e eles se sentem inseridos na atividade como elementos dos conjuntos, como propõe Brousseau em sua teoria abordada no capítulo 5 deste trabalho.

O professor pode então sugerir que os alunos respondam a alguns questionamentos, por exemplo:

a) Qual desses conjuntos é maior, o conjunto A ou o conjunto M? Por quê?

b) Eles poderiam ter o mesmo tamanho? Explique em que situação isso ocorreria.

c) Podemos afirmar que o conjunto M está contido no conjunto A? Justifique.

d) E, você, consegue imaginar alguma situação em que o conjunto A estaria contido no conjunto M? Qual?

Observe que, em acordo com o que apresentamos nos referenciais teóricos, o professor não traz uma resposta pronta, mas problematiza a situação para que os alunos busquem uma solução para o problema com os conhecimentos que já detêm, sem ainda um rigor matemático.

Propomos que, na situação didática de institucionalização desta atividade, o professor oriente a discussão sobre as respostas apresentadas pelos estudantes e apresente suas considerações, formalizando as noções de inclusão e de cardinalidade dos conjuntos, trabalhando o *conceito definição*, apresentado nos referenciais teóricos.

Dessa forma, a atividade está propensa a atingir seu principal objetivo, permitir que os estudantes aprimorem seus conhecimentos sobre noções de inclusão e cardinalidade, de forma autônoma, participando efetivamente da elaboração da cognição. Assim, como propõem Teixeira e Passos (2013), os alunos podem desenvolver novos saberes a partir de suas experiências pessoais, a partir da sua própria interação com o meio.

6.2 Atividade 2

Nesta atividade, o professor sugere aos estudantes que imaginem dois conjuntos, por exemplo, um formado pelos alunos do 8º ano A (conjunto A), e outro formado pelos alunos do 8º ano B (conjunto B). Agora, propõe que pensem em formar duplas de alunos que não sejam da mesma turma, ou seja, cada aluno do 8º ano A fará par com um aluno do 8º ano B.

O objetivo consiste em trabalhar os conhecimentos que os alunos possuem sobre a noção de relação entre os elementos de dois conjuntos, envolvendo também a noção de inclusão e a possibilidade de estabelecer a relação biunívoca quando ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

O professor propõe as seguintes questões:

a) O que podemos afirmar, a respeito do tamanho desses conjuntos, se algum aluno do 8º ano A ficar sem dupla?

b) E se for aluno do 8º ano B?

c) E se não sobrar nenhum aluno sem dupla?

d) Podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?

Ao final desta atividade, sugerimos que o docente comente sobre a relação entre os alunos de salas diferentes ao formarem as duplas, abordando o conceito de relação biunívoca, aproveitando o momento para apresentar aos estudantes este termo.

Dependendo das soluções apresentadas pelos alunos, o professor pode reforçar os conceitos de inclusão e de intersecção entre conjuntos, trabalhando o *conceito definição* e mostrando porque neste caso a intersecção entre eles será necessariamente vazia.

Podemos observar que desta forma, conforme a teoria de Brousseau apresentada no capítulo 5, a atividade poderá criar condições favoráveis para a aprendizagem dos estudantes que, de modo enriquecedor, passará a ter significado e sentido para quem aprende.

6.3 Atividade 3

Vamos considerar, agora, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Brasil, as quais recebem a denominação de “brasileiras”, a esse conjunto daremos o nome de B; e, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Estado de São Paulo, denominadas “paulistas”, o qual será chamado de conjunto P. Considerando que a população do Brasil sempre cresça mais (em quantidade absoluta) que a população do Estado de São Paulo, comente sobre as questões a seguir:

a) Podemos afirmar que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B? Por quê?

b) Todo paulista é brasileiro? E todo brasileiro é paulista?

c) Com base no item anterior, podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro?

Mais uma vez o professor pode, nesta atividade, reforçar as noções de inclusão e de cardinalidade de conjuntos, possibilitando que o aluno consiga trabalhar com essas noções de forma prática.

É possível fazer várias adaptações em tal atividade, por exemplo, alterar os conjuntos a serem utilizados, com outros estados, países, ou até mesmo fazendo uso de conjuntos mais próximos à realidade dos estudantes envolvidos.

Por considerar os conhecimentos prévios trazidos pelos estudantes, passar pelas situações didáticas, proporcionar autonomia aos alunos e criar condições favoráveis à aprendizagem, esta atividade está em consonância com a teoria de Brousseau apresentada nessa dissertação, tendo assim grandes chances de sucesso.

6.4 Atividade 4

Nesta atividade vamos propor uma situação bem divertida e trabalhar com conjuntos utilizando formas geométricas, de maneira lúdica e simples.

O professor pode pedir aos alunos da sala que tirem os calçados e, em seguida, separem-se em dois grupos, um com aproximadamente um terço dos alunos da sala e o outro com os outros dois terços. Essa divisão pode ser feita de forma autônoma pelos estudantes ou pelo professor se esse assim achar conveniente. A quantidade de alunos em cada grupo também pode variar, o importante é que um grupo tenha mais alunos do que o outro.

A autonomia e protagonismo proporcionada aos alunos, e as condições favoráveis para que a aprendizagem ocorra, presentes nesta atividade, estão em consonância com a teoria de Brousseau que utilizamos como referencial teórico.

O professor sugere então que o grupo menor construa, no chão da sala de aula, uma forma geométrica utilizando os seus calçados, de maneira que a parte da frente de cada calçado encoste na parte de trás do outro, e assim sucessivamente, formando uma fila de calçados, até que o último encontre o primeiro, fechando a linha, formando por exemplo um polígono. Em seguida, o grupo maior tenta construir uma outra forma geométrica semelhante à do primeiro grupo, de modo que a construção do primeiro grupo fique interna a esta formada pelo grupo maior.

Feito isso, o professor pode, caso deseje, fotografar as formas construídas com os calçados, como registro da atividade, e propor os seguintes questionamentos:

a) a forma geométrica de qual grupo possui mais calçados?

b) podemos afirmar que uma delas está contida na outra?

c) considerando cada calçado como uma unidade de medida de comprimento, quais os perímetros das formas geométricas de cada grupo?

O principal objetivo desta atividade é o de retomar as noções de tamanho (número de elementos) e de inclusão entre conjuntos finitos, de maneira lúdica e prática.

Sugerimos que, após as colocações dos alunos sobre os questionamentos, o que caracteriza a situação didática de validação, o professor faça todas as considerações e observações que julgar necessárias, sistematizando o conhecimento e institucionalizando o novo saber.

6.5 Atividade 5

Nas próximas atividades vamos abordar as comparações entre conjuntos infinitos, com foco nas noções de inclusão e de cardinalidade desses conjuntos. Nossa sugestão é a de que, a partir desse momento, o docente apresente o termo cardinalidade, explicando seu significado e começando a utilizá-lo sempre que se referir a quantidade de elementos dos conjuntos estudados.

O professor pode iniciar essa quinta atividade propondo aos alunos que digam algum exemplo de conjunto infinito que conheçam. Se algum estudante citar como exemplo um conjunto finito, proponha à turma uma reflexão, analise e discuta se esse conjunto seria mesmo infinito, tomando como embasamento as definições que utilizamos no capítulo sobre a caracterização do objeto matemático. Caso essa situação aconteça, pode ser utilizada como uma grande oportunidade pelo docente para trabalhar os conceitos imagens e possíveis obstáculos epistemológicos, trazidos pelos estudantes.

Desta forma, proporcionamos a que os alunos tenham maior participação na atividade, mais autonomia e sejam protagonistas do processo. Pode-se aproveitar a situação para incentivar a reflexão e a criatividade dos estudantes para pensarem em diversas possibilidades de subconjuntos dos naturais.

Caso os alunos citem o conjunto formado pelos números naturais, proponha que eles tomem um subconjunto desse, que também seja infinito, como o conjunto dos números primos positivos, ou dos números que são quadrados perfeitos, ou ainda dos números ímpares, ou mesmo qualquer outro subconjunto infinito deste. Em seguida, proponha que eles conversem entre si e comparem os dois conjuntos escolhidos, o conjunto dos números naturais e o subconjunto dele, questionando, por exemplo, qual deles é o maior, justificando suas conclusões.

Após os alunos (ou grupos) que desejarem, apresentarem suas respostas, questione se seria possível relacionar cada número de um conjunto com um número do outro, estabelecendo uma relação biunívoca, ou seja, de modo que não falte ou sobre elementos sem associação em algum dos conjuntos.

Vamos apresentar a seguir um exemplo de dois conjuntos para realização dessa atividade, porém, lembrando que existe uma variedade enorme de possibilidades para tal escolha, valorizando inclusive as escolhas dos próprios estudantes.

Chamemos então de $\mathbb{N}$ o conjunto formado pelos números naturais, e de X o conjunto formado por todos os números quadrados perfeitos. Nesse momento, o professor pode pedir para que alguns alunos representem esses conjuntos na lousa, utilizando as notações que conheçam, por exemplo:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e $X = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Então sugerimos que os alunos se reúnam em grupos e, em seguida, conversem sobre as questões abaixo:

a) Qual desses dois conjuntos é maior? Ou seja, qual deles tem mais elementos?

b) Explique como chegou à conclusão apresentada no item anterior.

Após cada grupo se reunir e elaborar os procedimentos que considerarem apropriados, os alunos tomarem suas decisões, e exporem suas considerações para o professor e demais colegas, perpassando assim pelas situações didáticas de devolução, de ação, e de formulação, promova um debate entre eles, sugerindo que cada grupo defenda para os demais as suas conclusões, justificando-as, ocorrendo então a situação didática de validação.

Verifique se algum grupo apresentou a relação biunívoca entre os elementos de um conjunto e os elementos do outro. Por fim, conte para os alunos como Galileu Galilei, na primeira metade do século XVII, propôs essa relação e o impacto que este fato teve na época, evidenciando assim, a importância da história para o tema (vide capítulo 1 – “Abordagem histórica”).

Caso nenhum grupo tenha apresentado a relação biunívoca entre os dois conjuntos, o docente pode fazê-lo, por exemplo, associando na lousa cada um dos primeiros números naturais ao seu quadrado:

$0 \to 0$, $1 \to 1$, $2 \to 4$, $3 \to 9$, $4 \to 16$, $5 \to 25$, $6 \to 36$ ...

Mostrando assim que nesta associação estarão presentes todos os elementos de ambos os conjuntos, e, portanto, possuem o mesmo número de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade.

É interessante também que o professor comente como os resultados desta atividade seguem no sentido contrário à nossa intuição. Algum aluno poderia, por exemplo, estranhar que haja a mesma quantidade de números naturais e de números que são quadrados perfeitos, uma vez que todos os quadrados perfeitos são naturais, mas vários números naturais não são quadrados perfeitos. Será que essa confusão apareceria se estivéssemos comparando conjuntos finitos?! Neste momento, é esperado que os estudantes apresentem alguns obstáculos epistemológicos, devido ao conhecimento que já possuem sobre o comportamento dos conjuntos finitos.

Para encerrar a discussão dessa atividade, caso os estudantes ainda não tenham percebido, mostre que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade, se, e somente se, for possível estabelecermos uma relação biunívoca entre eles. Assim, ocorre a situação didática de institucionalização desta atividade, com a sistematização do conhecimento pelo professor, que institucionaliza esse novo saber, completando assim o processo de aprendizagem, objetivo da atividade proposta.

6.6 Atividade 6

Nesta atividade, que também pode ser realizada em grupos, propomos aos alunos que comparem as quantidades de elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{N}$ (naturais), por meio dos seguintes questionamentos:

a) Qual conjunto tem mais elementos: o dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o dos números naturais $\mathbb{N}$?

b) Qual dos dois conjuntos é maior?

c) É possível estabelecer uma relação biunívoca entre os dois conjuntos?

d) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está contido no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$?

e) Quais são os elementos do conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$?

Justifique suas respostas.

Mesmo após a atividade anterior, é comum que os alunos novamente deixem que a intuição os leve ao erro, uma vez que ainda é relativamente cedo para que já ocorram todas as rupturas necessárias para superar os obstáculos epistemológicos e alguns conceitos imagens trazidos pelos seus conhecimentos prévios, pois, nesse momento, estamos comparando conjuntos infinitos, os quais se comportam de maneira diferente dos conjuntos finitos, com os quais os alunos estão acostumados.

Enquanto os grupos apresentam suas reflexões sobre os questionamentos propostos, o professor mantém seu papel de mediador, orientando sobre a execução da atividade, mas sem sugerir respostas ou dar muitas dicas, a não ser aquelas que apenas provoque o aluno a pensar, uma delas é relembrar sobre a relação biunívoca entre os elementos de dois conjuntos e a condição para que ambos tenham a mesma cardinalidade, passando assim pelas etapas das situações didáticas de formulação e de validação.

Durante a situação didática de institucionalização desta atividade, é recomendável que o professor confirme as possíveis relações entre os conjuntos apresentadas pelos estudantes, inclusive fornecendo outros exemplos de relações biunívocas para estes conjuntos, além das apresentadas pelos alunos.

Ainda nessa etapa, o professor deve complementar a discussão mostrando que, a partir das relações biunívocas que podemos estabelecer, confirmamos que os conjuntos têm o mesmo número de elementos e, portanto, a mesma cardinalidade.

Em seguida, o docente apresenta a noção de inclusão e mostra que o conjunto $\mathbb{N}$ está contido no conjunto $\mathbb{Z}$, apesar de ambos terem o mesmo número de elementos. É nesse momento que o professor precisa deixar clara a diferença entre as noções de inclusão e de cardinalidade entre conjuntos infinitos, evitando assim a confusão entre elas, criada por nossa intuição acostumada a operar apenas com objetos finitos, e pelos obstáculos epistemológicos presentes na mente dos estudantes. Assim acontece a sistematização e a institucionalização de um saber, característica da situação didática de institucionalização.

Ao final desta atividade, com o objetivo de verificar se ficou realmente claro para os estudantes a diferença entre as noções de inclusão e de cardinalidade de conjuntos infinitos, o docente pode ainda acrescentar a seguinte questão:

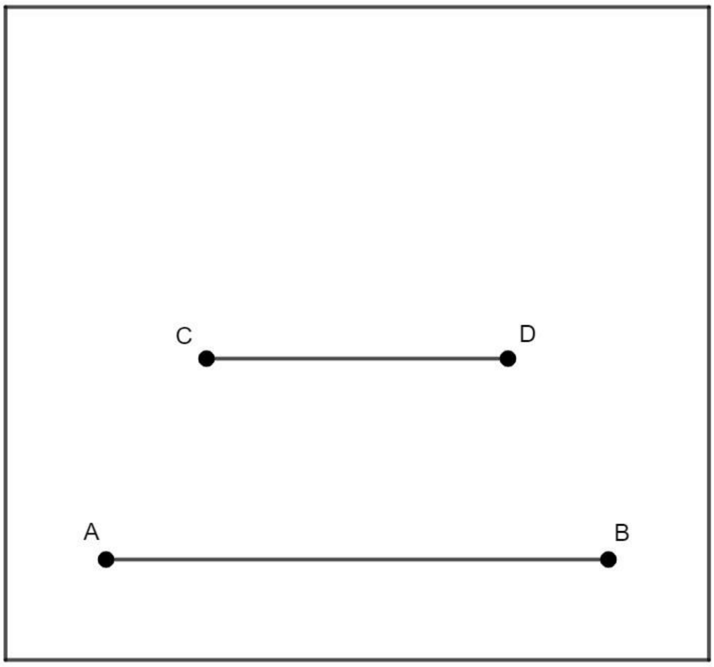
“Como pode o conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ não ser vazio, se ambos têm a mesma quantidade de elementos?”

O docente, porém, deve tomar cuidado para não criar, com essa pergunta, outro obstáculo epistemológico na mente do aluno, mas deixar claro, por meio das relações biunívocas, e dos conceitos de inclusão e de cardinalidade, o porquê isso acontece quando estamos tratando de conjuntos infinitos.

6.7 Atividade 7

Para esta atividade, o professor deve apresentar aos estudantes uma figura com dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, AB e CD, como no exemplo abaixo:

Figura 7 - Atividade 7 - a



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Em seguida, a respeito da Figura 7, o docente pergunta aos alunos:

a) Qual dos dois segmentos tem comprimento maior?

b) Qual deles tem mais pontos?

c) Onde existem mais pontos, no segmento de reta AB da figura, no segmento CD, em uma reta ou em um plano?

d) Qual dos conjuntos a seguir possui mais elementos, ou seja, qual é o maior?

- A: conjunto dos pontos que formam um segmento de reta.
- B: conjunto dos pontos que formam uma reta.
- C: conjunto dos pontos que formam um quadrado.
- D: conjunto dos pontos que formam um plano.
- E: conjunto dos pontos que formam um cubo.

Permita que os alunos pensem, conversem entre si, reflitam e analisem, com base no que já aprenderam, as possíveis respostas para as questões sugeridas.

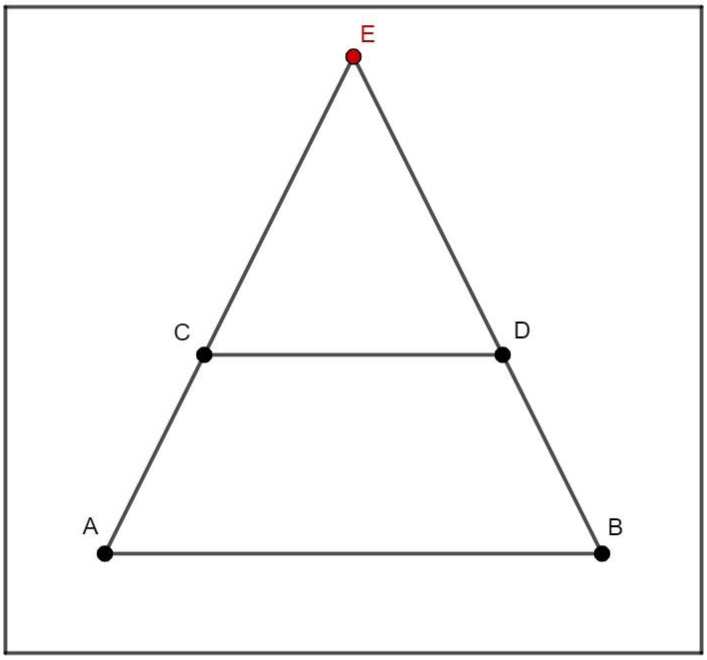
Assim, o docente promove a autonomia dos estudantes e possibilita que a atividade didática passe pelas situações de devolução, de ação, de formulação e de validação.

Os estudantes devem justificar suas conclusões ao apresentarem as respostas, sugerimos que seja permitido também que cada aluno comente o que achou da resposta dos colegas.

Durante a situação de institucionalização desta atividade, o professor pode complementar as respostas dos alunos, chamando a atenção para o conceito de ponto, lembrando que um ponto não tem dimensão, e que não tem definição, pois se trata de um conceito primitivo em matemática. O professor deve ficar atento aos conceitos imagens que os alunos possam apresentar neste momento. Espera-se, contudo, que os discentes saibam que os segmentos de reta da figura, AB e CD, apesar de terem comprimentos diferentes, ambos são formados por infinitos pontos. Porém, é possível que os alunos não enxerguem ainda que os segmentos possuem o mesmo número de pontos, ou seja, são conjuntos de pontos com o mesmo número de elementos. Essa conclusão pode ser mostrada pelo docente conforme a sugestão que apresentamos logo a seguir.

Para que os alunos visualizem este fato mais facilmente, peça que eles liguem a extremidade A de um dos segmentos com a extremidade C do outro, e a extremidade D de um deles com o ponto B do outro segmento. Prolongando os novos segmentos AC e BD, determinamos o ponto E, conforme Figura 8.

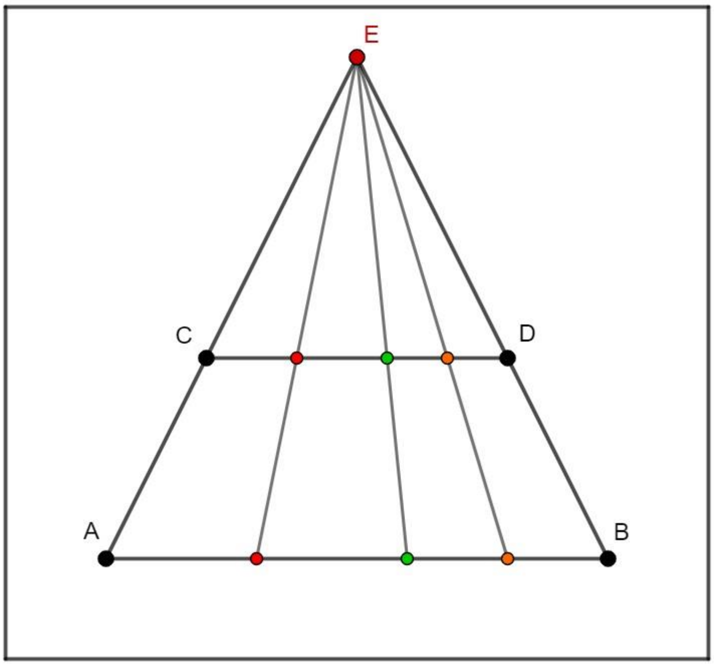
Figura 8 - Atividade 7 - b



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

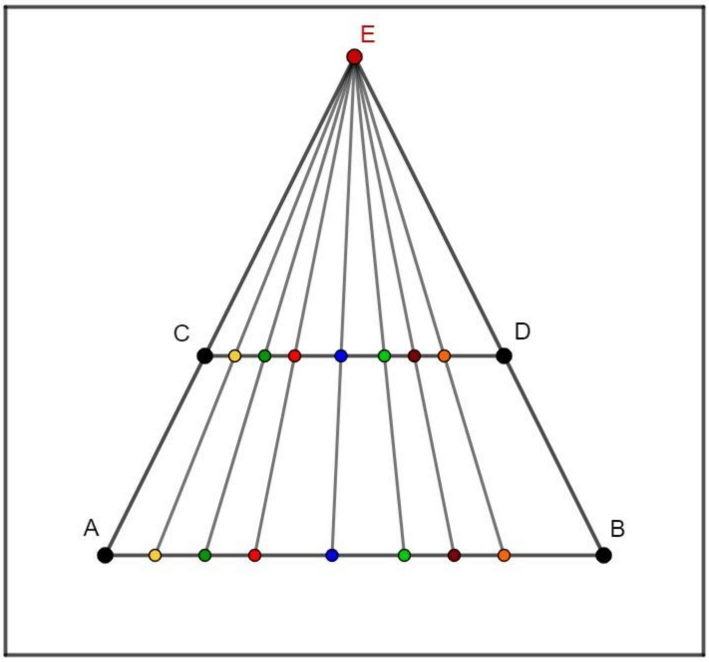
Em seguida, marcamos aleatoriamente alguns pontos sobre o segmento AB e cada um destes ligamos com o ponto E, observando que todos os novos segmentos traçados intersectam CD em exatamente um ponto. Repetimos esse procedimento marcando mais pontos sobre o segmento AB e verificamos que, para cada um destes novos pontos marcados, obtemos um novo ponto sobre o segmento CD, conforme figuras 10 e 11.

Figura 9 - Atividade 7 - c



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 10 - Atividade 7 - d



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Assim, cada ponto do segmento AB associa-se a um ponto do segmento CD, concluindo que ambos os segmentos possuem a mesma quantidade de pontos, o que pode, em um primeiro momento, parecer contraditório por terem comprimentos diferentes. Novamente a oportunidade aqui para o professor analisar os conceitos imagens e obstáculos epistemológicos trazidos pelos alunos.

Neste momento, recomendamos que o docente evidencie o fato de que um ponto não tem dimensão, não existe tamanho de um ponto, assim comprimentos diferentes não significam quantidades de pontos diferentes. O professor pode, inclusive, abordar com os alunos as noções de conceito imagem e conceito definição, apresentadas no capítulo 3 deste trabalho, para ajudar na compreensão deste fato.

Com base em todos esses argumentos citados, os alunos já terão condições de responder aos itens “c” e “d” desta atividade, mesmo que essas respostas pareçam negar suas intuições. O que confirma que, para trabalharmos com conjuntos infinitos, não podemos nos limitar às nossas intuições, pois aqueles não se comportam como os conjuntos finitos com os quais os alunos estavam acostumados.

Nestes dois últimos itens é interessante que o docente observe e valide as diferentes maneiras que os alunos possam apresentar para justificar a igualdade de número de pontos em todos os casos, provocando inclusive que os estudantes sugiram novos exemplos de conjuntos infinitos, ou figuras que, apesar de terem dimensões diferentes, possuam o mesmo número de pontos. Uma sugestão: mostre que, em um pequeno segmento de reta de comprimento 1 centímetro, existem tantos pontos quanto em uma reta qualquer, e até mesmo que em um plano.

Contudo, o docente deve alertar que nem todos os conjuntos infinitos possuem o mesmo número de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade, evitando assim criar obstáculos epistemológicos na mente dos estudantes. Como essa sequência de atividades é recomendada para os anos finais do Ensino Fundamental II, não ajudaria realizar uma demonstração muito rigorosa que prove a existência de infinitos de diferentes tamanhos. Porém, o professor pode comentar a impossibilidade de estabelecer relações biunívocas entre alguns conjuntos, como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, mostrando inclusive um pouco do referencial histórico que apresentamos no segundo capítulo dessa dissertação, principalmente tendo por base os trabalhos de Georg Cantor.

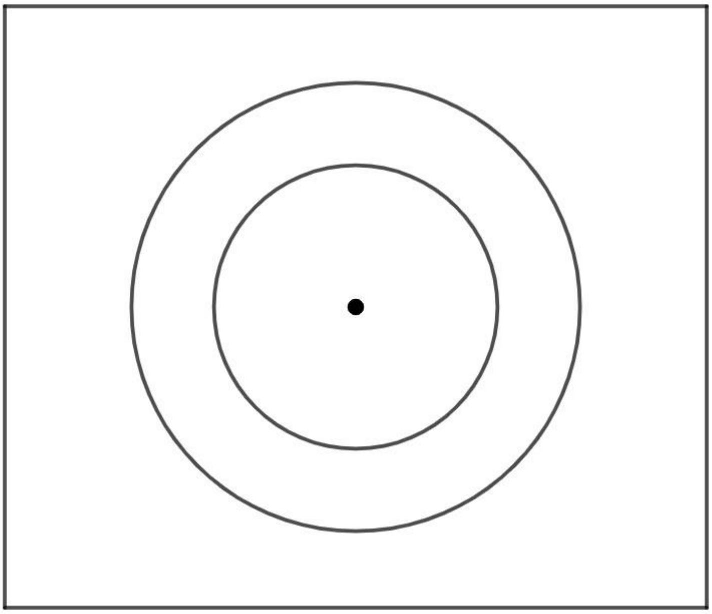
6.8 Atividade 8

A próxima e última atividade desta sequência didática é muito semelhante à anterior. Portanto, espera-se que os alunos tenham um pouco mais de facilidade do que tiveram na atividade 7.

Sabemos que, assim como os polígonos, as circunferências são formadas por infinitos pontos. Com base neste fato, podemos propor o seguinte problema:

Considere as duas circunferências concêntricas da Figura 11 a seguir. Qual delas possui mais pontos?

Figura 11 - Atividade 8 - a



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Recomendamos que, com base no que já foi visto nas atividades anteriores, cada estudante tente responder de forma individual e depois apresente suas justificativas para toda a sala.

Espera-se que os alunos percebam que ambas as circunferências possuem o mesmo número de pontos, e justifiquem estabelecendo uma relação biunívoca entre elas.

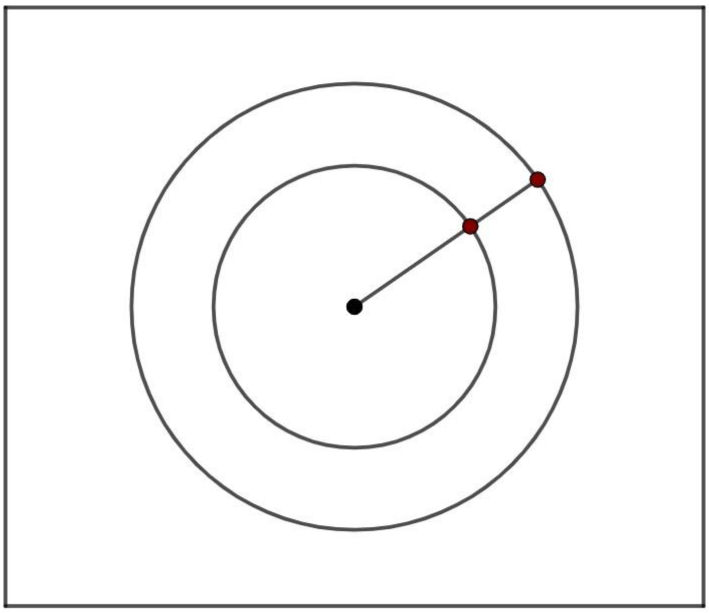
Após os estudantes colocarem suas conclusões para sala, o docente deve validá-las e acrescentar as considerações que julgar importantes. Caso seja necessário, o professor pode ressaltar novamente, assim como na atividade anterior, que os pontos não possuem dimensões e que dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos quando podemos estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos de um conjunto e os elementos do outro.

Assim, é importante que os alunos apresentem alguma bijetividade entre os pontos da circunferência interna e os pontos da externa, justificando que elas representam conjuntos com o mesmo número de elementos (pontos). Porém, ressaltamos que os estudantes devem ter total autonomia para tentar estabelecer essa relação biunívoca.

Durante a etapa didática de institucionalização da atividade, caso o professor considere relevante, pode mostrar um exemplo de relação biunívoca que podemos estabelecer para o problema. Apresentamos a seguir uma sugestão didática para tal:

Considerando a Figura 11 apresentada, tracemos um raio qualquer da circunferência maior. Obviamente este raio intersecta a circunferência menor, interna à maior, associando assim um ponto de uma circunferência com um ponto da outra, conforme Figura 12 a seguir:

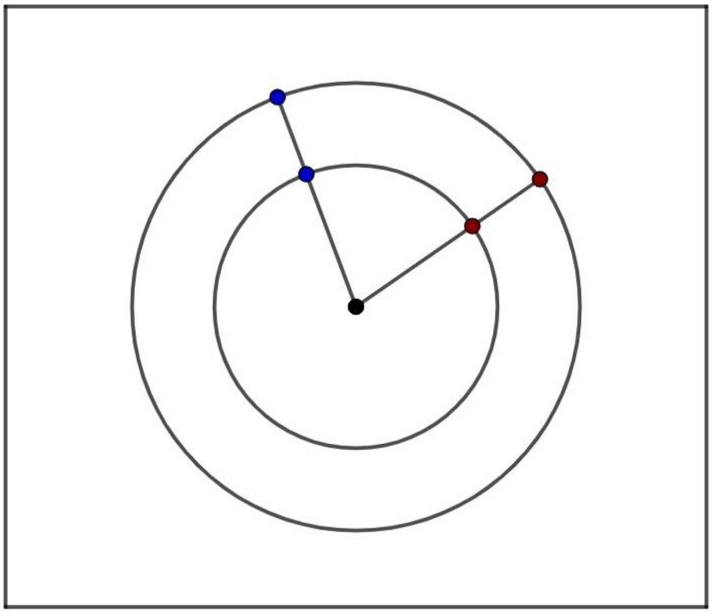
Figura 12 - Atividade 8 - b



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Repetimos esse processo, determinando um novo ponto na circunferência maior e consequentemente um outro na circunferência menor (Figura 13), apresentando assim a associação entre eles por meio do raio traçado.

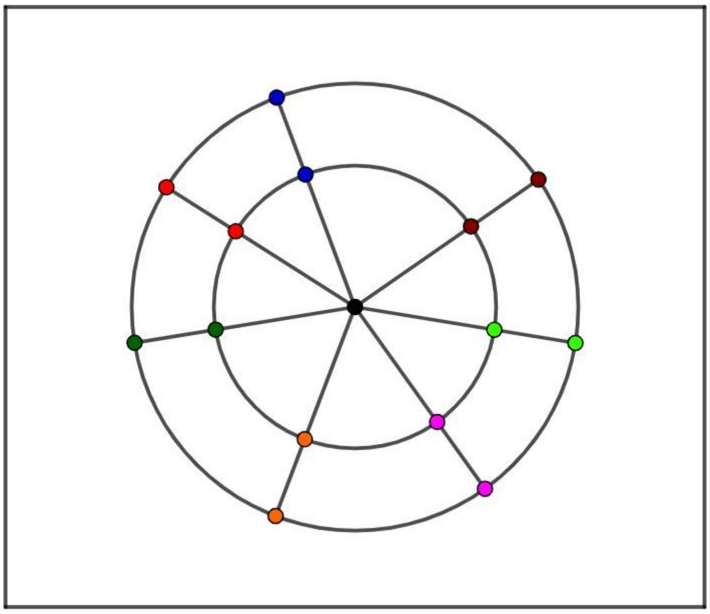
Figura 13 - Atividade 8 - c



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

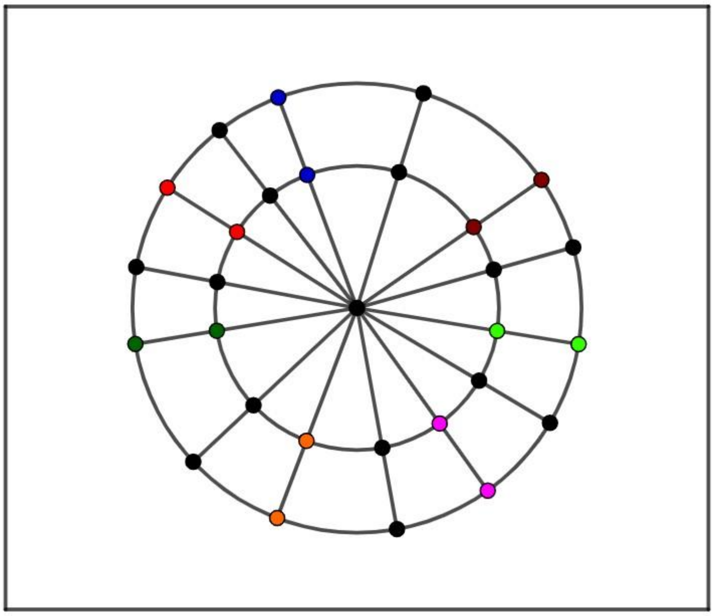
Podemos assim, traçar na figura quantos raios da circunferência maior desejarmos, mostrando que, para todo ponto determinado na circunferência maior por um raio traçado, associa-se um ponto da circunferência menor, determinado pela interseção deste raio com a circunferência interna (figuras 14 e 15).

Figura 14 - Atividade 8 - d



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 15 - Atividade 8 - e



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Utilizando o mesmo raciocínio da atividade anterior, observamos nas figuras apresentadas que, para todo ponto da circunferência maior, associa-se um ponto da circunferência menor, estabelecendo-se assim uma relação biunívoca entre os pontos que formam uma circunferência e os pontos que formam a outra.

Portanto, podemos concluir que as duas circunferências possuem exatamente o mesmo número de pontos. Porém, mais uma vez alertamos para que o docente tome cuidado de, com essas últimas atividades da sequência didática, não induzir os estudantes a pensarem que todos os conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos. Sugerimos, então, que o professor novamente lembre aos alunos que nem sempre é possível estabelecer uma relação biunívoca entre dois conjuntos infinitos, condição essa necessária e suficiente para que dois conjuntos tenham a mesma cardinalidade.

Novamente ressaltamos a importância de, durante todas as etapas das atividades, o docente proporcionar condições favoráveis para a aprendizagem e permitir que os alunos participem com autonomia, contribuindo com seus conhecimentos prévios, sugerindo exemplos, caminhos e formas de resoluções, e com o auxílio dos colegas e do professor, construírem juntos um novo saber, completando assim um verdadeiro processo de aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o desenvolvimento deste trabalho, a partir dos resultados obtidos, gostaríamos de apresentar, a seguir, algumas observações que consideramos relevantes.

A pesquisa que realizamos, principalmente por meio dos artigos científicos, das dissertações e das teses, confirma a frequente dificuldade dos alunos para compreenderem a noção de cardinalidade quando tratamos de conjuntos infinitos, principalmente sem confundir essa noção com a de inclusão de conjuntos. Essa dificuldade, segundo retrata nossa pesquisa, não é somente vivenciada pelos estudantes, mas também por professores ao abordarem esse tema em suas aulas de matemática da Educação Básica.

Uma das explicações para a presença dessa dificuldade são os obstáculos epistemológicos que se constituem a partir do conhecimento já adquirido sobre os conjuntos finitos. Ao estudarmos os conjuntos infinitos, identificamos que esses não se comportam da mesma forma que os finitos, gerando alguns conflitos de entendimento, principalmente no que tange às noções de inclusão e de cardinalidade.

Assim, podemos concluir que esses obstáculos epistemológicos, que podem ser gerados pela forma como se comportam os conjuntos finitos, criam algumas barreiras que precisam ser superadas para o entendimento das cardinalidades de conjuntos infinitos.

Ainda nessa linha de raciocínio, podemos observar que o infinito é contraintuitivo, pois vivemos em uma realidade formada por objetos finitos, e assim nossa mente é condicionada a enxergar apenas o comportamento do que é finito, e, portanto, nossa intuição caminha em um sentido contrário ao comportamento do que é infinito.

Em virtude de toda a dificuldade de alunos e professores ao abordarem o tema, como confirma nossa pesquisa, o principal objetivo do nosso trabalho é o de tentar auxiliar os professores nessa abordagem em suas aulas com o ensino básico, e para tanto sugerimos uma sequência didática de atividades baseada na teoria das situações didáticas de Brousseau.

Com base em todo referencial teórico apresentado no capítulo 5 desta dissertação, acreditamos que tal sequência de atividades proposta possa ajudar aos professores ao tratarem este tema com seus alunos, com grande chance de sucesso.

A sequência sugerida não foi aplicada, e, portanto, fica como uma sugestão para os professores de matemática que desejarem utilizá-la com seus alunos quando tratarem de cardinalidade de conjuntos infinitos, e também como sugestão para novos trabalhos sobre o tema.

REFERÊNCIAS

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito um Obstáculo no Estudo da Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

BACHELARD, Gaston. **La formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance**. Paris: Vrin, 1993.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistémologiques et les problemes en mathématiques**, RDM, Grenoble, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques**. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, p. 41-63, 1989.

DIAS, Marisa da Silva. **Reta Real: conceito imagem e conceito definição**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

FISCHBEIN, Efraim. Intuition and mathematical education. **2nd International Conference for the Psychology of Mathematics Educational**, Osnabruck, Germany, p. 148-176, 1978.

FISCHBEIN, Efraim; TIROSH, Dooren; HESS, P. A. U. L. The intuition of infinity. **Educational studies in mathematics**, v. 10, p. 3-40, 1979.

FISCHBEIN, Efraim. Tacit Models and Infinity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 48, n. 2, p. 309-329, 2001.

GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. **Educação Matemática: uma introdução**, p. 155-196, 1999.

KILL, Tercio Girelli. **Conceituações sobre o infinito na história, nos livros didáticos e no pensar de futuros professores de matemática**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, v. 1. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

LOPES, Silvio Joaquim. **A noção de infinito em livros didáticos do Ensino Básico**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

LORIN, João Henrique. **Relações entre teoremas-em-ação e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina/PR, Londrina, 2018.

MACHADO, Rosilene Beatriz *et al*. Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 1, p. 283-317, 2013.

MCTUTOR. **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**. MT Mc Tutor. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/pictdisplay/>. Acesso em: 4 jun.2022.

MELLO, Amanda Priscila Nunes; LORIN, João Henrique. **O infinito: uma abordagem histórico-filosófica antiguidade até o século XI**. In: IX Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 9., 2014. Campo Matão: FECILCAM, 2014. p. 311-323.

MONAGHAN, John. Young peoples' ideas of infinity. **Educational studies in Mathematics**, v. 48, n. 2, p. 239-257, 2001.

MORENO, Luis E.; WALDEGG, Guillermina. **The conceptual evolution of actual mathematical infinity**. Educational Studies in Mathematics, v. 22, n. 3, p. 211-231, 1991.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito:** dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

PEREIRA, Luiz Marcos Cavalcanti. **A Noção de Infinito na Educação Básica: Reflexões e Proposta**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy” UNIGRANRIO, Duque de Caxias, 2015.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, São Paulo, 2003.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito uma história a contar. **Millenium-Journal of Education, Technologies, and Health**, Viseu, n. 34, p. 205-222, 2016.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009.

SANTOS, Eberth Eleutério dos. **O Infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática**. Tese (Doutorado em Filosofia) – UNICAMP – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2008.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. **Uma história sobre o infinito atual**. Monografia (Especialização em Matemática para Professores do Ensino Básico) – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Belo Horizonte, 2011.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, p. 151-169, 1981.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Revista Zetetiké – FE/Unicamp**, Campinas, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

WALDEGG, Guillermina. Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. **Revista mexicana de investigación educativa**, México, v. 1, n. 1, 1996.

WALDEGG, Guillermina. **El acercamiento de Bolzano a Las paradojas del infinito:** implicaciones para la enseñanza (in) HOMENAJE A UNA TRAYECTORIA: GUILLERMINA WALDEGG. Irma Fuenlabrada (compiladora), México, 2008.

WIKIMEDIA. **Zeno Arrow Paradox.png**. Wikimedia Commons. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeno_Arrow_Paradox.png>. Acesso em: 26 mai.2022.

APÊNDICE – Atividades sugeridas

Atividade 1:

Convide os estudantes a imaginarem o conjunto formado por todos os alunos daquela turma, o qual podem chamar, por exemplo, de conjunto A. Em seguida, considere o conjunto formado pelos alunos desta turma que gostam de matemática, que chamaremos de conjunto M.

O professor pode então sugerir que os alunos respondam a alguns questionamentos, por exemplo:

a) Qual desses conjuntos é maior, o conjunto A ou o conjunto M? Por quê?

b) Eles poderiam ter o mesmo tamanho? Explique em que situação isso ocorreria.

c) Podemos afirmar que o conjunto M está contido no conjunto A? Justifique.

d) E, você, consegue imaginar alguma situação em que o conjunto A estaria contido no conjunto M? Qual?

Atividade 2:

Nesta atividade, o professor sugere aos estudantes que imaginem dois conjuntos, por exemplo, um formado pelos alunos do 8o ano A (conjunto A), e outro formado pelos alunos do 8o ano B (conjunto B). Agora, propõe que pensem em formar duplas de alunos que não sejam da mesma turma, ou seja, cada aluno do 8o ano A fará par com um aluno do 8o ano B.

O professor propõe as seguintes questões:

a) O que podemos afirmar, a respeito do tamanho desses conjuntos, se algum aluno do 8o ano A ficar sem dupla?

b) E se for aluno do 8o ano B?

c) E se não sobrar nenhum aluno sem dupla?

d) Podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?

Atividade 3:

Vamos considerar, agora, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Brasil, as quais recebem a denominação de “brasileiras”, a esse conjunto daremos o nome de B; e, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Estado de São Paulo, denominadas “paulistas”, o qual será chamado de conjunto P. Considerando que a população do Brasil sempre cresça mais (em quantidade absoluta) que a população do Estado de São Paulo, comente sobre as questões a seguir:

a) Podemos afirmar que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B? Por quê?

b) Todo paulista é brasileiro? E todo brasileiro é paulista?

c) Com base no item anterior, podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro?

Atividade 4:

O professor pode pedir aos alunos da sala que tirem os calçados e, em seguida, separem-se em dois grupos, um com aproximadamente um terço dos alunos da sala e o outro com os outros dois terços. Essa divisão pode ser feita de forma autônoma pelos estudantes ou pelo professor se esse assim achar conveniente. A quantidade de alunos em cada grupo também pode variar, o importante é que um grupo tenha mais alunos do que o outro.

O professor sugere então que o grupo menor construa, no chão da sala de aula, uma forma geométrica utilizando os seus calçados, de maneira que a parte da frente de cada calçado encoste na parte de trás do outro, e assim sucessivamente, formando uma fila de calçados, até que o último encontre o primeiro, fechando a linha, formando por exemplo um polígono. Em seguida, o grupo maior tenta construir uma outra forma geométrica semelhante à do primeiro grupo, de modo que a construção do primeiro grupo fique interna a esta formada pelo grupo maior.

Feito isso, o professor pode, caso deseje, fotografar as formas construídas com os calçados, como registro da atividade, e propor os seguintes questionamentos:

a) a forma geométrica de qual grupo possui mais calçados?

b) podemos afirmar que uma delas está contida na outra?

c) considerando cada calçado como uma unidade de medida de comprimento, quais os perímetros das formas geométricas de cada grupo?

Atividade 5:

Chamemos então de $\mathbb{N}$ o conjunto formado pelos números naturais, e de X o conjunto formado por todos os números quadrados perfeitos. Nesse momento, o professor pode pedir para que alguns alunos representem esses conjuntos na lousa, utilizando as notações que conheçam, por exemplo:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e $X = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Então sugerimos que os alunos se reúnam em grupos e, em seguida, conversem sobre as questões abaixo:

a) Qual desses dois conjuntos é maior? Ou seja, qual deles tem mais elementos?

b) Explique como chegou à conclusão apresentada no item anterior.

Caso nenhum grupo tenha apresentado a relação biunívoca entre os dois conjuntos, o docente pode fazê-lo, por exemplo, associando na lousa cada um dos primeiros números naturais ao seu quadrado:

$0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 9$, $4 \rightarrow 16$, $5 \rightarrow 25$, $6 \rightarrow 36$ ...

Atividade 6:

Nesta atividade, que também pode ser realizada em grupos, propomos aos alunos que comparem as quantidades de elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{N}$ (naturais), por meio dos seguintes questionamentos:

a) Qual conjunto tem mais elementos: o dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o dos números naturais $\mathbb{N}$?

b) Qual dos dois conjuntos é maior?

c) É possível estabelecer uma relação biunívoca entre os dois conjuntos?

d) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está contido no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$?

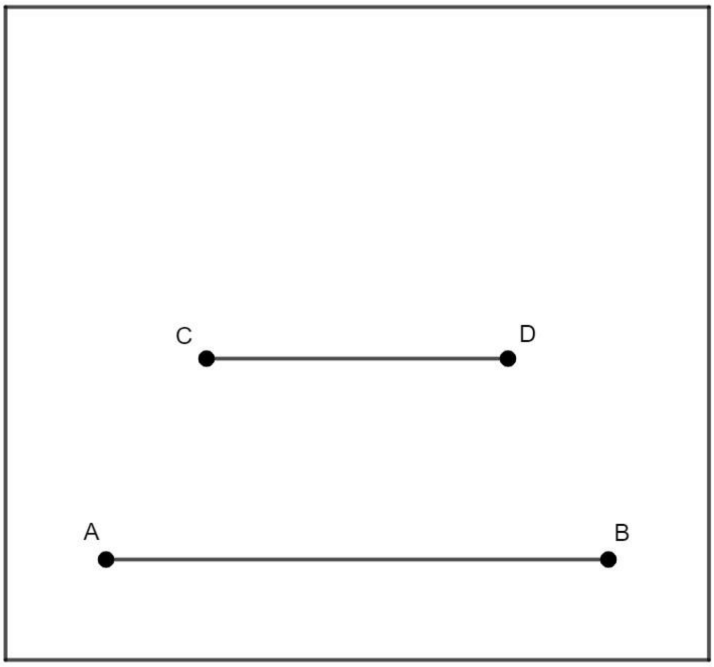
e) Quais são os elementos do conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$?

Justifique suas respostas.

<u>Atividade 7</u>:

Para esta atividade, o professor deve apresentar aos estudantes uma figura com dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, AB e CD, como no exemplo abaixo:

Figura 16 - Atividade 7 - a



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Em seguida, a respeito da Figura 7, o docente pergunta aos alunos:

a) Qual dos dois segmentos tem comprimento maior?

b) Qual deles tem mais pontos?

c) Onde existem mais pontos, no segmento de reta AB da figura, no segmento CD, em uma reta ou em um plano?

d) Qual dos conjuntos a seguir possui mais elementos, ou seja, qual é o maior?

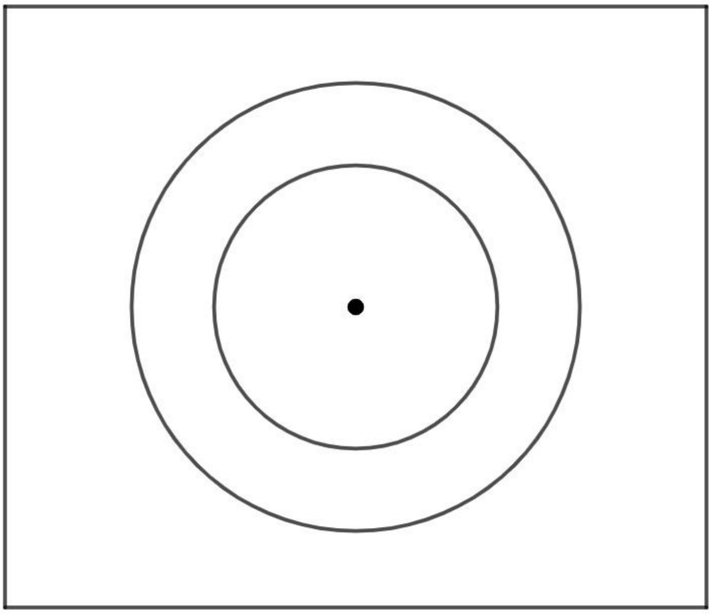
- A: conjunto dos pontos que formam um segmento de reta.
- B: conjunto dos pontos que formam uma reta.
- C: conjunto dos pontos que formam um quadrado.
- D: conjunto dos pontos que formam um plano.
- E: conjunto dos pontos que formam um cubo.

<u>Atividade 8</u>:

Sabemos que, assim como os polígonos, as circunferências são formadas por infinitos pontos. Com base neste fato, podemos propor o seguinte problema:

Considere as duas circunferências concêntricas da Figura 11 a seguir. Qual delas possui mais pontos?

Figura 17 - Atividade 8 - a



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)