Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Kenneby Lemos Barbosa

O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais

Goiânia
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Kenneby Lemos Barbosa

3. Título do trabalho

O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [ ] SIM [X] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2023, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Kenneby Lemos Barbosa**, **Discente**, em 14/04/2023, às 09:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3669901** e o código CRC **F21FB5A0**.

Kenneby Lemos Barbosa

O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Barbosa, Kenneby Lemos
O ensino de expressões algébricas [manuscrito] : uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais / Kenneby Lemos Barbosa. - 2023.
107 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2023.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.

1. Anéis de Polinômios. 2. Ensino de expressões algébricas. 3. Metodologias ativas. 4. Peer instruction e gamificação. 5. Tangram na educação matemática. I. Andrade, Kamila da Silva, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **04** da sessão de Defesa de Dissertação de **Kenneby Lemos Barbosa**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

Aos treze dias do mês de abril de dois mil e vinte e três, a partir das 14 **horas**, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de defesa de Dissertação intitulada **"O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Kamila da Silva Andrade (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Rosane Gomes Pereira (IME/UFG) e membro titular externo, Professor Doutor Diogo Gonçalves Dias (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Kamila da Silva Andrade, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos treze dias do mês de abril de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Kamila Da Silva Andrade**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2023, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Gonçalves Dias**, **Usuário Externo**, em 13/04/2023, às 16:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Rosane Gomes Pereira**, **Professora do Magistério Superior**, em 13/04/2023, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3538933** e o código CRC **BA866D26**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Severino e Zilda, e a minha irmã Kamila. Embora eu esteja triste por não poder celebrar esta conquista com vocês ao meu lado, sei que estão orgulhosos, no céu onde estão, de tudo aquilo que aqui conquistei, e estarão comigo guardados na caixinha das melhores lembranças e pensamentos.

Agradecimentos

Gostaria de começar expressando minha gratidão a Deus, que colocou pessoas incríveis ao meu lado para me apoiar e me incentivar. Quero compartilhar um dos meus versículos favoritos e fonte de minha resiliência: “Com Deus, todas as coisas são possíveis” (BÍBLIA, Mateus, 19, 26). Se hoje estou aqui, celebrando esta conquista, é porque Ele esteve comigo a cada etapa do meu caminho, me protegendo e me guiando.

Não posso deixar de expressar minha gratidão à minha amada esposa, Aline. O ano de 2021 foi um dos mais difíceis que já passamos, pois perdemos meu pai e minha mãe, uma de minhas irmãs e minha tia. Eu busquei, como válvula de escape, trabalhar mais, e não percebi o quanto você sofria até chegar a depressão e com isto quase perdi você também. No entanto, agora estamos mais fortes. Descobri que a dor, quando não nos mata, nos fortalece e mesmo em meio as profundas cicatrizes que ficaram, estamos aqui juntos, e é isso que espero que continue até que a morte nos separe.

Agradeço também aos meus filhos queridos, Kenneth e Ana, que são a minha fonte constante de amor e alegria. Eles sempre me fazem achar um tempo para brincarmos juntos. Não posso deixar de mencionar um agradecimento à minha irmã, Danila, que muitas vezes cuidou deles para que eu tivesse um tempinho extra e à minha cunhada, Stella, que me ajudou muito com o inglês acadêmico.

É claro que não posso deixar de agradecer à minha orientadora, Dra. Kamila Andrade, pela paciência, compreensão, dedicação e atenção aos detalhes que contribuíram para o sucesso desta dissertação. Também fica um agradecimento a todos os membros do corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Federal de Goiás, pela dedicação e empenho na minha formação acadêmica e profissional.

Ademais, não posso deixar de agradecer às escolas, Patronato Madre Mazzarello e SESI Jundiaí, por terem me proporcionado a oportunidade de colocar em prática meus conhecimentos e ampliar minha experiência. Por fim, meu agradecimento aos meus colegas de trabalho, das instituições mencionadas, por terem sempre acreditado em mim e me oferecido apoio em todos os momentos que precisei.

Este mestrado é uma conquista ímpar na minha formação e sou imensamente grato a todos os que contribuíram, direta ou indiretamente, para mais esta conquista. Obrigado por terem sido meus companheiros de viagem e por terem acreditado em mim. Vocês não precisam me chamar de mestre, pois os mestres foram todos vocês que me ensinaram a chegar aqui.

Com Deus, todas as coisas são possíveis.

Mateus 19:26,
Bíblia Sagrada.

Resumo

Barbosa, Kenneby Lemos. **O ensino de expressões algébricas: uma proposta de sequência didática com o uso do Tangram e jogos digitais**. Goiânia, 2023. 107p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino voltada ao uso de expressões algébricas para alunos de 8º e 9º ano do ensino fundamental. Com o intuito de alcançar esse objetivo, será empregado o Tangram como jogo físico, além do uso de um jogo digital desenvolvido especificamente para esse propósito. Além disto, essa abordagem tem como finalidade aprimorar o processo de aprendizagem das expressões algébricas, visando superar a resistência e o desinteresse, por parte dos alunos, nas aulas de matemática. Primeiramente, são mencionados alguns aspectos históricos da álgebra e sua importância nos documentos educacionais brasileiros, como os PCN's, a BNCC e o DC-GO em Goiás. Em seguida, é apresentado o Tangram como ferramenta lúdica para o ensino da matemática. Para embasar as operações com expressões algébricas, foi realizado um estudo da estrutura de anéis de polinômios e de como elas são relevantes para o professor que ministra aulas para a educação básica. A seguir, foi feita uma exposição sobre duas metodologias ativas de ensino - *peer instruction* e a gamificação - que foram usadas na sequência didática de forma direta e indireta, respectivamente, para tornar o aprendizado mais dinâmico e participativo. Por fim, propõe-se uma sequência didática que une o estudo da álgebra, a ludicidade do Tangram e as metodologias ativas para ensinar expressões algébricas.

Palavras–chave

Anéis de Polinômios; ensino de expressões algébricas; metodologias ativas; peer instruction e gamificação, Tangram na educação matemática.

Abstract

Barbosa, Kenneby Lemos. **The teaching of algebraic expressions: a proposal of didactic sequence using Tangram and digital games.**. Goiânia, 2023. 107p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work presents a teaching proposal focused on the use of algebraic expressions for 8th and 9th grade students of elementary school. In order to achieve this goal, Tangram will be used as a physical game, in addition to the use of a digital game developed specifically for this purpose. Furthermore, this approach aims to improve the process of learning algebraic expressions, and it intends to overcome resistance and lack of interest on the part of students in mathematics classes. Firstly, some historical aspects of algebra and its importance in Brazilian educational documents are mentioned, such as the PCN's, the BNCC and the DC-GO in Goiás. Then, Tangram is presented as a playful tool for teaching mathematics. To support the operations with algebraic expressions, a study was carried out on the structure of polynomial rings and how they are relevant to professional who teaches classes for basic education. Next, an exposition was made on two active teaching methodologies - peer instruction and gamification - which were used in the didactic sequence directly and indirectly, respectively, to make learning more dynamic and participatory. Finally, a didactic sequence is proposed that unites the study of algebra, the ludicity of Tangram and active methodologies to teach algebraic expressions.

Keywords

Polynomial rings; Algebraic expression teaching; Active methodology; Gamification and Peer instruction; Tangram in mathematics education.

Sumário

Introdução

O ensino de expressões algébricas é uma tarefa desafiadora para muitos professores, especialmente quando se trata de manter os alunos motivados e engajados. Pretendemos fazer uma abordagem pedagógica que visa ensinar expressões algébricas de maneira mais eficiente e envolvente, utilizando ferramentas lúdicas como o Tangram e também jogos digitais criados para esta sequência didática utilizando metodologias ativas e inovadoras.

Essas abordagens pedagógicas oferecem aos alunos a oportunidade de aprender expressões algébricas de maneira divertida e interativa desenvolvendo habilidades cognitivas e sociais essenciais para a convivência em sociedade. A ludicidade, oferecida com uso do Tangram, por exemplo, pode ajudar os alunos a visualizar conceitos abstratos e compreender melhor a estrutura das expressões algébricas, o que pode ser compartilhado com os colegas durante a resolução de problemas em grupo contribuindo para a motivação e engajamento dos alunos. Já a experimentação, oferecida pelos jogos digitais, pode tornar o aprendizado mais atraente, ao transformar o processo em um jogo ou desafio. Todavia, é importante que os professores se interessem por essas metodologias e as incluam em suas aulas para proporcionar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e efetivo.

Este trabalho surge como um desafio e, ao mesmo tempo, uma necessidade de ensinar a matemática de forma mais prazerosa e menos metódica. É um desafio, pois a tendência de quem aprendeu com métodos tradicionalistas como aula expositiva, quadro e giz, é o de reproduzir o que se aprendeu. Todavia, estamos em uma era cada vez mais digital em que a tecnologia está na "palma da nossa mão" e, assim, o professor precisa ser um "agente de mudanças", cabendo a ele despertar no aluno o prazer de estudar, usando metodologias ativas que coloquem o aluno como protagonista de seu aprendizado.

Segundo Cortella (2016), "A escolarização é apenas uma parte do educar, não é tudo". Neste contexto, compete a escola: o ensino, a formação social e construção da cidadania.

Walle (2009) diz que o pensamento matemático só faz sentido, se eles forem úteis para resolver outros problemas:

> As ideias matemáticas são "importantes" se elas forem úteis ao desenvolvimento de outras ideias, se vincularem umas às outras ou servirem para ilustrar a disciplina de matemática como um empreendimento humano. (WALLE, 2009, p. 21).

Freire (2002) completa afirmando que a educação só faz sentido, se ela for transformadora e com ela, o indivíduo tome as decisões que surgirem no seu cotidiano baseadas no seu conhecimento adquirido na escola.

O tema central deste trabalho é o estudo de expressões algébricas. A escolha se baseou na vivência escolar de um professor que trabalha com o 9º ano do ensino fundamental há mais de 9 anos e a percepção de que os estudantes vêm apresentando, cada vez mais, deficiências na aprendizagem. E, com a pandemia, as deficiências encontradas têm sido muito mais notórias.

Um trabalho que se aproxima deste tema foi apresentado por Oliveira, et al. (2019), no VII ENID, Encontro de Iniciação a Docência da Universidade Estadual da Paraíba, mas com o objetivo de investigar a eficácia da utilização do Tangram no ensino. O presente trabalho se diferencia do mencionado por vários aspectos, pois além de utilizar metodologias ativas aliadas aos jogos digitais, também fornece um amplo material de formação continuada de professores a respeito do da álgebra especialmente o estudo dos anéis de polinômios e coeficientes reais, com uma e duas variáveis.

É sabido que o pensamento algébrico está presente em toda estrutura de pensamento e generalização de conceitos e ideias, não necessariamente, apenas na disciplina de matemática. Esta estruturação é o que permite que possamos organizar e criar soluções que possam ser usadas para resolver problemas em nosso dia a dia.

É fácil notar que a utilização de jogos, brincadeiras e atividades lúdicas na matemática proporcionam ao aluno uma experiência de aprendizagem mais acessível a todos, pois a ludicidade permite que os alunos aprendam a partir da experiência e da experimentação, o que facilita a compreensão dos conceitos e das operações matemáticas. Além disso, a ludicidade também pode estimular a criatividade, o raciocínio lógico e a resolução de problemas, habilidades essenciais para o aprendizado matemático.

A ludicidade no ensino de matemática proporciona, dentre os inúmeros benefícios, um ambiente mais descontraído e menos intimidador para os alunos, o que pode reduzir a ansiedade e o medo em relação à disciplina. Isso contribui para o aumento da autoestima dos alunos e para o desenvolvimento de uma postura mais positiva em relação à matemática tornando a aprendizagem mais significativa e duradoura. Assim, escolhemos como objeto de estudo o Tangram que é um quebra-cabeças chinês, formado por sete peças com características únicas, para ser o pilar de desenvolvimento do estudo das expressões algébricas.

O Tangram, como objeto de estudo, nos proporcionará um ambiente menos formal e mais adaptativo a diversos cenários de aprendizagem. Algumas propostas didáticas utilizando o Tangram já existem, principalmente no ensino de geometria e frações. Mas neste trabalho pretendemos utilizar o Tangram, no estudo da álgebra para tornar o aprendizado de expressões algébricas mais eficaz e, ao mesmo tempo, mais prazeroso.

Com este intuito, este trabalho contempla um resgate de conceitos, definições e práticas mais aprofundadas da álgebra, mais especificamente no estudo dos anéis de polinômios com uma ou duas variáveis, muitas das vezes esquecidas pela própria vivência de não se trabalhar em sala de aula com tanta formalidade. Sendo assim, esta parte do trabalho servirá como um material de apoio a uma formação continuada para professores, apresentando as estruturas algébricas chamadas Anéis de polinômios, em uma e duas variáveis, e revisitando as principais operações entre esses objetos, a saber: adição e multiplicação. Além disso, com o intuito de fazer um paralelo com as operações conhecidas e bem assimiladas para o anel dos números inteiros, em ambos os casos a teoria é estendida até uma versão do algoritmo da divisão (ou algoritmo de Euclides). Assim, é importante salientar que o professor deve estar preparado para avançar em conceitos, quando necessário ou solicitado pelo estudante que deseja se aprofundar em algum destes temas.

É preciso buscar novas formas de ensinar a matemática, pois seu aprendizado não só desenvolve o raciocínio lógico, como também incentiva uma boa tomada de decisões diante dos problemas que permeiam nosso cotidiano. Neste contexto, abordamos alguns documentos educacionais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), para embasar em que contexto, espera-se que a álgebra deva ser abordada na educação básica.

A educação precisa ser transformada para estimular o prazer pelo aprendizado no aluno. Nesse sentido, as metodologias ativas são eficientes para tornar o aluno o protagonista do processo de aprendizagem. A presente sequência didática adota a metodologia "peer instruction"(PI), desenvolvida pelo professor Eric Mazur da Universidade de Harvard, que promove a aprendizagem em grupos. Como iremos utilizar um jogo digital, veremos também um pouco da teoria da metodologia de “gamificação” a qual não será diretamente aplicada nesta sequência didática. Contudo, seu objetivo é fornecer subsídios aos professores para que possam transformar suas aulas em aulas gamificadas, nas quais os alunos participem da criação de jogos similares aos utilizados nesta sequência. Combinando essas ideias com as tecnologias disponíveis, é possível criar uma aprendizagem significativa. Enquanto a metodologia PI incentiva o trabalho em grupos, os jogos digitais incentivam a competição, atendendo assim às diferentes necessidades dos alunos. Desta maneira, os estudantes que possuem dificuldades na aprendizagem em grupo podem se sobressair nos jogos digitais, e vice-versa, o que permite uma perspectiva mais abrangente do desenvolvimento intelectual do estudante.

Essa sequência foi elaborada para ajudar os professores a transformar suas salas de aula em ambientes inovadores e agradáveis, utilizando diversas metodologias e ferramentas didáticas. Além disso, ela pode ser uma alternativa útil para auxiliar os alunos a superar as dificuldades de aprendizagem agravadas pela pandemia. Entretanto, é importante que os professores estejam preparados para utilizar esses recursos de forma eficaz e que a infraestrutura esteja adequada ao ambiente de aprendizagem. É fundamental que os professores equilibrem o uso de metodologias ativas e lúdicas com o aprendizado formal para garantir que os alunos obtenham um aprendizado completo e significativo ao final da sequência didática.

A proposta de sequência didática começa com um questionário inicial para se ter um parâmetro de comparação do antes e o depois. Partindo disto, o professor faz uma exploração do Tangram seguido de uma explicação resumida de expressões algébricas e a partir daí, utilizando a peer instruction e jogos digitais, aprofundar no tema proposto. Ao final o professor aplica novamente o mesmo questionário e analisa os resultados. Assim, espera-se que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida sobre expressões algébricas, que lhes permita aplicar esse conhecimento na resolução de problemas e na modelagem de situações diversas.

No Capítulo 1, abordamos os aspectos históricos relacionados as origens da álgebra e como ela era ensinada, especialmente no Brasil. Conhecemos, em seguida, a trajetória do surgimento da álgebra moderna. Vemos também, como a álgebra aparece e deve ser apresentada segundo os documentos educacionais nacionais como a BNCC e os PCN's , e finalizamos o capítulo com um breve histórico do Tangram.

O Capítulo 2, traz um estudo dos anéis de polinômios com uma e duas variáveis reais, com intuito de estabelecer uma base sólida para o professor revisar e aperfeiçoar seus estudos. Neste contexto, apresentamos as definições e propriedades de um anel bem como trazemos algumas demonstrações e exemplos destas estruturas. A seguir aprofundamos nos anéis de polinômios com uma variável e coeficientes reais, mostrando as operações de soma e produto e finalizando com o algoritmo da divisão. A partir daí, estendemos os conceitos, definições e propriedades para os anéis de polinômios com duas variáveis e coeficientes reais mostrando a necessidade de uma organização lexicográfica, seguindo o axioma da boa ordem para realizar as operações de soma e produto e divisão polinomial para duas variáveis. O capítulo termina comentando sobre a relevância do estudo do anel de polinômios na formação do professor que vai ensinar expressões algébricas.

O Capítulo 3 apresenta duas metodologias ativas que serão usadas na sequência didática de forma direta ou indireta. Assim, inicia-se explicando onde, como e quando surgiu a metodologia peer instruction bem como ela foi implementada na educação. Da mesma forma abordamos a seguir a metodologia de gamificação e como deve ser pensada e aplicada na educação.

Por fim, o Capítulo 4 apresenta a proposta de sequência didática, preparada para 3 encontros de duas horas aulas de 50 minutos cada totalizando 300 minutos, relatando no passo a passo, as instruções para auxiliar o professor nas aulas, colocando nas observações as possibilidades de aplicação e adaptação dos conceitos aqui apresentados para o desenvolvimento da metodologia aplicada com os jogos criados para esta finalidade. Ao final o professor pode encontrar nos Apêndices A e B, sugestões do questionário e das atividades que podem ser propostas para o desenvolvimento da sequência didática.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS HISTÓRICOS

A matemática sempre foi desenvolvida de maneira sequencial, isto é, de maneira organizada e progressiva, com cada novo conceito ou técnica sendo construído a partir dos anteriores para que todas as suas conclusões sejam sempre baseadas no pensamento construtivo lógico e dedutivo. Desta forma, entender a construção e evolução histórica do tema, nos leva a compreender a Álgebra que utilizamos nos dias atuais.

Neste capítulo apresentaremos um pouco das origens da Álgebra, como ela era ensinada no Brasil, como as expressões algébricas aparecem nos livros didáticos, seguido de uma breve seção sobre a ascensão da Álgebra moderna. Para a finalização deste capítulo, faremos uma síntese de como a Álgebra aparece na segunda fase do ensino fundamental no Documento Curricular para Goiás (DC-GO). Deste modo pretende-se mostrar que o ensino da Álgebra já percorreu um longo caminho até os dias atuais, mas ainda tem muito a evoluir.

Precisamos sair do conforto das aulas com metodologias tradicionais e abrir espaço para as metodologias ativas e assim, que o estudante faça parte do processo de ensino aprendizagem, produzindo assim uma aprendizagem significativa.

1.1 Origens da Álgebra

Para construirmos um pensamento sequencial, primeiro precisamos entender um pouco da história das expressões algébricas. É importante separar o pensamento algébrico e o uso de letras ou símbolos para representar incógnitas, pois elas caminham juntas, mas não necessariamente surgiram juntas.

Segundo Darela, Cardoso e Rosa (2011, p. 209, grifo do autor), “Al-Khwarizmi é considerado o “Pai da Álgebra””. Ainda, segundo os autores, foi do livro mais famoso de Al-Khwarizmi com título “Hisab al-jabr wa-al-muqabala” é que veio o termo *Álgebra* que significa *restauração* ou *completação* e era utilizado no contexto de termos desconhecidos na resolução de equações, mesmo não utilizando símbolos para representá-los.

Abu Abdallah Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi nasceu em Khiva, no Uzbequistão, e foi um matemático, astrônomo, geógrafo e historiador. Pouco se sabe de sua vida pessoal, mas seus textos traduzidos para o latim percorreram e encantaram as mais ilustres mentes pelos ensinamentos que deixou. Na Figura 1.1 tem-se uma estátua construída em sua homenagem e está localizada em Khiva no Uzbequistão, local do seu nascimento.

Figura 1.1: *Estátua em homenagem a Al-Khwarizmi.*

{Fonte: Wikimedia Commons (2023) .

Uma curiosidade, não matemática, relatada por Eves é que na Espanha, os profissionais da medicina que se especializavam em reparar ossos eram conhecidos como algebristas e assim, os barbeiros que as vezes se ocupavam desta função se autodenominavam algebristas.

Sabe-se que o pensamento algébrico era desenvolvido em 2000 a.C. pelos babilônios que propunham soluções para equações.

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma Álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Encontrou-se uma tábula que fornece, além de uma tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a sequência de valores de $n^2 + n^3$ correspondente a esse intervalo. São dados muitos problemas que levam a cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$, os quais podem ser resolvidos usando-se a tábua de $n^3 + n^2$. (EVES, 1997, p. 61).

Segundo Silva (2013), a Álgebra pode ser dividida em duas fases: a fase antiga, chamada de Álgebra clássica ou elementar, e a fase moderna, chamada de Álgebra moderna ou abstrata. Na fase antiga, que compreende o período de aproximadamente 1700 a.C. a 1700 d.C., a preocupação era a resolução de equações e o simbolismo foi surgindo gradualmente de acordo com as necessidades, mas sem se preocupar com tanta formalização. Imagine o ganho de tempo na escrita matemática ao trocar uma frase como "cinco é igual a dois mais três" por "$5 = 2 + 3$". Já a fase da Álgebra moderna foi concentrada no estudo das estruturas matemáticas como anéis, corpos e outras mais.

Conforme Silva (2013, p. 10), "as ideias algébricas evoluíram e pode-se mencionar a Álgebra egípcia, babilônica, pré-diofantina, diofantina, chinesa, hindu, arábica e europeia renascentista". Mas foi somente a partir do século XIX que a Álgebra se apropriou de uma linguagem formal e mais objetiva e isto fez com que ela se desenvolvesse em diversos caminhos.

> Quando finalmente se desenvolveu uma notação apropriada (empregando letras para representar coeficientes e variáveis de uma equação), foi possível determinar "fórmulas gerais" de resolução de equações e discutir métodos de trabalho também "gerais". Porém, mesmo nestes casos, tratava-se de situações relativamente concretas. As letras representavam sempre algum tipo de números (inteiros, racionais, reais ou complexos) e utilizavam-se as propriedades destes de forma mais ou menos intuitiva. (MILIES, 2004, p. 4).

1.2 A Álgebra moderna

A partir do século XVI novos conceitos e notações começaram a aparecer com frequência, como o uso de letras para representar variáveis, e com isto a Álgebra foi tomando uma forma mais generalizada, o que facilitou trabalhar alguns problemas científicos e tecnológicos. Durante esse período histórico, diversos matemáticos se destacaram, entre eles John Napier, que se tornou um pioneiro no uso de logaritmos para a resolução de equações. O seu trabalho, além de ter contribuído para o desenvolvimento do cálculo de logaritmos, também estabeleceu uma base sólida para a Álgebra moderna. Outro matemático que se destacou foi François Viète que introduziu o uso de letras para representar incógnitas em equações tornando-as mais simples e intuitivas e suas notações são usadas até hoje.

Outros matemáticos no século XVII, como Isaac Newton e Gottfried Leibniz, os precursores do cálculo, também contribuíram de maneira significativa para a Álgebra moderna. Newton aprimorou a representação algébrica, em equações, e Leibniz desenvolveu o cálculo infinitesimal, que é a essência da Álgebra.

No século XVIII, podemos destacar Joseph Louis Lagrange que foi um dos que desenvolveu a teoria dos grupos e Leonhard Euler que fez importantes contribuições para a teoria dos números e a teoria das equações algébricas.

A partir do século XIX, a matemática precisou estruturar todas as informações que já se tinha obtido dos séculos anteriores e este processo de estruturação da Álgebra foi a base dos estudos dos anéis e dos corpos.

Segundo Eves (1997, p. 546) "No início do século XIX, a Álgebra era considerada simplesmente como aritmética simbólica". Na busca pela organização da matemática em estruturas, várias categorias puderam ser separadas e em seguida unidas por suas similaridades. George Peacock (1791-1858) foi um matemático muito importante nesta organização, pois ele separou a Álgebra em Álgebra aritmética e Álgebra simbólica, temas de duas de suas obras. Segundo Selbach (2015, p. 10), "Peacock publicou seu *Treatise on Algebra* onde buscou rigor lógico para a Álgebra, semelhantemente ao livro *Os Elementos de Euclides*. Esse rigor foi um dos primeiros fundamentos para a criação das estruturas algébricas".

Selbach (2015, p.10), ainda relata:

> Historicamente vemos que os séculos XVII e XVIII foram séculos predominantemente de descobertas científicas e matemáticas e já o século XIX foi predominante a organização desses novos conhecimentos. Dentro do espírito organizacional e catalogante os matemáticos do século XIX definiram mais de 200 estruturas algébricas, entre elas estão as que são foco deste trabalho, a saber anéis, subanéis, ideais e corpos.

Toda a Álgebra a partir do século XX evoluiu para um patamar muito mais significativo onde grandes descobertas e o desenvolvimento de teorias apareceram, como os aneis, grupos e corpos.

As expressões algébricas fazem parte de uma estrutura maior que são os anéis de polinômios que tem propriedades e características específicas, as quais abordaremos no Capítulo 2.

1.3 O ensino da Álgebra no Brasil

A história da Álgebra é rica e diversa, começando com as obras de Al-Khwarizmi, que o fizeram ser conhecido como o pai da Álgebra. Desde então, muitos matemáticos importantes contribuíram para o desenvolvimento da disciplina. A Álgebra é uma disciplina fundamental tanto no mundo quanto no Brasil, e sua importância é amplamente reconhecida em muitas áreas da ciência e da tecnologia, incluindo física, economia, engenharia, computação, criptografia e análise de dados. Exploraremos a seguir a história do ensino da Álgebra no Brasil.

A preocupação na organização do currículo e do ensino de matemática surgiu no século passado, mais precisamente quando, em 1908, foi organizado, em Roma, um encontro de modo a universalizar a matemática. Vários outros encontros se sucederam a partir de então até que, em 1912, chegou-se a um consenso de que era necessário uma reforma no ensino da matemática.

No Brasil, o movimento de estruturar a matemática teve grande presença com Euclides Roxo, professor do Colégio Pedro II. Até por volta de 1927, no Brasil não existia a disciplina intitulada de matemática, mas sim as disciplinas de aritmética, Álgebra e geometria (incluindo trigonometria) separadamente e muito fragmentadas. Em 1927, o Professor Euclides Roxo, nesta época também diretor do mesmo colégio, fez uma proposta de unificar estas disciplinas criando assim a disciplina de matemática como a conhecemos hoje. Esta unificação foi homologada pelo decreto 18.564, de 15 de Janeiro de 1929. Francisco Campos, ministro da educação a partir de 1930, se encarregou de difundir e aplicar as mudanças gradativas no ensino da matemática no Brasil. Porém estas mudanças não foram suficientes para dar à matemática a importância necessária.

Segundo Gil e Portanova, o estudo da Álgebra até 1960 era mecânico e não trazia contexto com a realidade do aluno ou de alguma situação problema e ninguém se importava com isto.

> ...desde o início do estudo da Álgebra até o início da década de 60, quando se inicia o Movimento da Matemática Moderna, o seu ensino era predominantemente de caráter mecânico e reprodutivo, sem clareza alguma, já que seu ensino era, na maioria das vezes, apresentado por meio de procedimentos que conduziam a uma aprendizagem mecânica.(GIL, PORTANOVA, 2008, p. 22).

Com o surgimento da matemática moderna um movimento de tentativa foi realizado para tornar o aprendizado em matemática mais coerente com o contexto em que estamos inseridos, mas ainda hoje muitos objetivos não tem sido alcançados, visto que tem-se uma precária formação continuada dos professores.

O ensino de expressões algébricas no Brasil quase não evoluiu, mesmo com a ascensão da matemática moderna. Bortoletti, em 2015, comparou dois livros didáticos com 39 anos de diferença em suas publicações, um de 1970 e outro de 2009.

> Apesar das abordagens dadas aos casos de fatoração serem distintas nas coleções, os exercícios apresentados são semelhantes. Em geral, são repetições de uma receita a ser aplicada. A divisão de polinômios é apresentada de maneira idêntica nas coleções: um passo-a-passo do Algoritmo de Euclides, seguido de uma série de exercícios de aplicação direta da teoria.(BORTOLETTI, 2015, p. 33).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ainda, em Goiás, o Documento Curricular de Goiás (DC-GO) destacam a Álgebra como uma parte fundamental da formação escolar, visto que é considerado um eixo fundamental para a formação do pensamento lógico e crítico do estudante. A seguir, examinaremos como a Álgebra é apresentada nestes documentos.

1.3.1 A Álgebra nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN's tiveram sua origem no Brasil, em 1997, e foi criado pelo Ministério da Educação (MEC). Seu objetivo era o de padronizar o ensino, estabelecendo as diretrizes a ser seguidas para uniformizar a educação, de forma qualitativa, em todas as regiões do país. É ele quem oferece as bases para a elaboração dos currículos fornecendo as orientações para as práticas pedagógicas formando assim, cidadãos críticos e conscientes.

Os PCN's de 1998, já previam que a Álgebra é uma ferramenta matemática essencial que capacita os estudantes a lidar com problemas abstratos e aplicar modelos matemáticos para solucionar situações do mundo real pois a sua compreensão possibilita aplicar conceitos abstratos em situações práticas e relevantes.

A Álgebra é uma das principais ferramentas da matemática e deve ser ensinada de forma a desenvolver a capacidade dos estudantes em lidar com problemas abstratos e em utilizar modelos matemáticos para resolver situações do mundo real. Assim, o ensino da Álgebra deve ser uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de generalização, da representação simbólica e da resolução de problemas, sendo estas habilidades fundamentais para a formação matemática dos estudantes.

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. (BRASIL, 1998. p. 121).

Tal importância, mencionada nos PCN's sobre a Álgebra, mostra que precisamos nos dedicar a garantir que os estudantes recebam uma educação de qualidade nessa área, incluindo aulas desafiadoras e atividades práticas que os ajudem a desenvolver suas habilidades matemáticas. Além disso, é importante que os professores tenham recursos adequados, como livros didáticos atualizados e tecnologias educacionais, para ensinar a Álgebra de maneira clara e eficaz. A preparação adequada em Álgebra é essencial para que os estudantes tenham sucesso em sua formação matemática e em suas futuras carreiras.

Em suma, a Álgebra é uma área fundamental da matemática e sua importância para a formação matemática e profissional dos estudantes é inegável. Por isso, deve-se garantir que eles recebam uma educação de qualidade nessa área, com professores bem preparados e recursos adequados, para que possam desenvolver suas habilidades e alcançar os índices adequados de educação básica, dos quais necessitam.

1.3.2 A Álgebra na Base Nacional Comum Curricular

A BNCC foi criada em 2017 pelo Ministério da Educação como parte de uma reforma educacional no Brasil. Seu principal objetivo é de estabelecer diretrizes comuns para o ensino em todo o país, garantindo que todos os alunos tenham acesso a uma educação de qualidade e, para garantir a qualidade do ensino, ela é revista e corrigida periodicamente para se adaptar às mudanças e necessidades do mundo atual.

Em resumo, a BNCC é uma iniciativa do governo brasileiro para garantir que o ensino em todo o país seja padronizado e de qualidade, com o objetivo de preparar os alunos para o futuro e formar cidadãos críticos e capacitados.

Segundo a BNCC (2017), a Álgebra é considerada uma disciplina comum e obrigatória que é ensinada desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio na disciplina de matemática. A BNCC destaca a importância da Álgebra como uma ferramenta eficaz para entender e resolver problemas, além de desenvolver habilidades de pensamento lógico e abstração. O objetivo é que os alunos aprendam a aplicar fórmulas e equações para modelar e solucionar situações do mundo real.

Diversas competências previstas na BNCC estão ligadas à Álgebra como: a *resolução de problemas*, pois os alunos devem ser capazes de aplicar conceitos de Álgebra para resolver problemas matemáticos e de outras áreas; o *pensamento lógico*, pois os alunos devem desenvolver habilidades de pensamento lógico e abstração ao aplicar fórmulas e equações para solucionar problemas; a *modelagem matemática*, pois os alunos devem ser capazes de usar a Álgebra para modelar e descrever situações do mundo real; a *comunicação matemática*, pois os alunos devem ser capazes de explicar suas soluções de problemas de forma clara e precisa, usando a notação matemática apropriada e o *trabalho colaborativo*, pois os alunos devem ser capazes de trabalhar em equipe para resolver problemas matemáticos, compartilhando ideias e soluções.

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2018, p.270).

Mais uma vez, a BNCC reforça a importância da Álgebra como uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de abstração, que serão valiosas em muitos aspectos da vida e do trabalho. Ao passo que, o ensino da Álgebra vai além da mera memorização de fórmulas e equações, é um processo que requer compreensão profunda e aplicação prática dos conceitos aprendidos, tornando-se uma habilidade valiosa para toda a vida.

1.3.3 A Álgebra no Documento Curricular para Goiás

O Documento Curricular para Goiás é um documento oficial criado em 2018 que define as diretrizes, objetivos e conteúdos da educação pública no estado de Goiás que foi idealizado por profissionais da educação, seguindo os passos da BNCC, que vem para padronizar o ensino, mas considerando alguns aspectos regionais.

No DC-GO, a Álgebra aparece como uma disciplina obrigatória em todos os anos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, sendo fundamental para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e de pensamento lógico. Além disso, ela é abordada em várias outras disciplinas além da matemática, como física e química, sendo importante para o entendimento de conceitos científicos.

Dentro do DC-GO, a Álgebra é tratada com muita ênfase no estudo de polinômios e, com isto, boa parte do que vemos sobre expressões algébricas está dentro do estudo de polinômios.

Segundo Sousa (2020, p. 3), “O estudo dos polinômios inicia-se no Ensino Médio”, porém é importante ressaltar que as bases para o estudo de polinômios são as expressões algébricas, cujo estudo se inicia na segunda fase do ensino fundamental na rede estadual de Goiás. Se observarmos o currículo adotado na rede, perceberemos que a Álgebra está presente desde o 6º ano. Está implícito na redação do DC-GO, na descrição da habilidade 14 de matemática no sexto ano do ensino fundamental (EF06MA14):

> Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. (GOIÁS, 2018, p. 669).

Assim, a noção de valor desconhecido pela troca por uma letra que a represente sugere a percepção e construção do pensamento algébrico.

Já no mesmo documento, a primeira parte da habilidade 13 de matemática do sétimo ano do ensino fundamental (EF07MA13-A) descreve de forma explicita a presença de uma variável inclusive diferenciando-a de uma incógnita: "Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita, com ou sem uso de jogos e materiais manipuláveis" (GOIÁS, 2018, p. 674).

A formalização do título expressão algébrica já ocorre no oitavo ano do ensino fundamental. As partes "A" e "B" da habilidade seis (EF08MA06) inclusive menciona a palavra polinômio:

> (EF08MA06-A) Reconhecer e compreender uma expressão algébrica, destacando dentre elas os monômios e polinômios, bem como os seus elementos como coeficientes e partes literais.
> (EF08MA06-B) Identificar monômios e polinômios (binômio, trinômio, entre outros) com os seus respectivos graus, coeficientes e partes literais. (Goiás, 2018, p. 678).

A importância da Álgebra na formação escolar não pode ser subestimada, e é necessário que a forma como é ensinada seja motivadora para os estudantes. Como professores, precisamos tornar as aulas mais atrativas e interativas, colocando o aluno como protagonista e não como mero expectador. Desta forma, podemos melhorar a compreensão e a relevância da Álgebra no cotidiano dos estudantes.

1.4 O Tangram

O Tangram é um antigo jogo quebra-cabeças chinês originado de uma peça quadrada que foi dividida em sete peças. A origem exata do Tangram é desconhecida, mas acredita-se que tenha surgido na China há mais de 2.000 anos. Porém não há documentos que podem comprovar isto. O documento mais antigo que se tem sobre o Tangram é uma gravura de 1780.

Segundo Forster e Horbach (2012), a origem do Tangram remonta ao século XVIII, tendo como referência mais antiga uma gravura em madeira datada de 1780 de Utamaro. O livro mais antigo sobre o jogo foi publicado na China em 1813, evidenciando que o Tangram já era conhecido e popular nessa época. Estudiosos afirmam que o Tangram se originou no Oriente antes do século XVIII e se difundiu para o Ocidente, tendo publicações sobre o jogo surgido em diversos países europeus e nos Estados Unidos por volta de 1818.

O tangram se popularizou na China durante o século XIX e se espalhou pelo mundo, especialmente após ser levado para a Europa pelos missionários jesuítas. O jogo ganhou popularidade entre a nobreza europeia, que o usava como forma de entretenimento e exercício mental.

Existem diversas lendas que remontam a história do surgimento do Tangram. Uma das histórias populares afirma que o nome tem sua origem na expressão chinesa “Tchi Tchiao Pan”, que se traduz como "sete peças da sabedoria". Outra lenda narra que um imperador deixou cair o seu espelho, o qual se despedaçou em sete partes que poderiam ser utilizadas para criar diversas formas. Outra diz que uma pedra valiosa se quebrou em sete pedaços, os quais podiam ser combinados para formar diversas figuras, como animais, plantas e pessoas. Outra história diz que o tangram foi inventado por um sábio chinês que queria ensinar matemática e geometria aos seus alunos de maneira divertida.

Barros (2016), conta uma das lendas do Tangram.

> Há uma curiosa lenda sobre um sábio chinês, chamado Tan, que deveria levar ao imperador uma placa de jade, cujo formato era de um quadrado. Contudo, tal placa caiu no chão quando o sábio Tan tropeçou e partiu-se em sete pedaços geometricamente perfeitos. Ao tentar remontá-la, Tan obteve diversos formatos, após muitas tentativas, o que, de certa forma, acabou tornando-se para ele uma diversão. Quando, enfim, conseguiu remendar o quadrado, levou-o ao imperador. Os sete pedaços representariam as sete virtudes chinesas: Criatividade, Humildade, Paciência, Perfeição, Perseverança, Sabedoria e União. (BARROS, 2016, p. 4).

O Tangram possui duas regras fundamentais em sua concepção original. A primeira regra é que todas as figuras formadas pelo jogo devem utilizar todas as sete peças disponíveis. A segunda regra diz que é expressamente proibido o sobreposição de uma peça sobre outra.

Além de ser um passatempo divertido, o Tangram também tem sido utilizado na educação matemática. O jogo é desafiador e coloca os jogadores para pensar bastante e, de forma criativa e lógica, montar as figuras, o que ajuda a desenvolver habilidades matemáticas como resolução de problemas, pensamento espacial e conhecimento de formas geométricas.

O Tangram, na educação, pode ser usado para ensinar conceitos da geometria, como simetria, congruência e propriedades das figuras geométricas. Na aritmética podemos usá-lo para exemplificar frações e efetuar operações envolvendo-as. Na Álgebra, propomos usa-lo para trabalhar com expressões algébricas utilizando, paralelamente, conceitos referentes a perímetros e áreas de formas planas.

Vimos até agora que a Álgebra é uma parte importante da matemática que teve suas raízes na antiga Pérsia e Índia. No Brasil, a matemática tem sido abordada como uma disciplina fundamental nas escolas conforme mostram os documentos educacionais oficiais como os PCN's e a BNCC. Conhecemos também a história do Tangram, que é um jogo chinês antigo, mas que até hoje ajuda a desenvolver habilidades matemáticas. Agora, no Capítulo 2 iremos abordar as principais estruturas algébricas que formalizam a compreensão das operações entre expressões algébricas.

CAPÍTULO 2

ANÉIS DE POLINÔMIOS

As estruturas algébricas são conjuntos de elementos com operações definidas, que obedecem certas propriedades, como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Essas estruturas são estudadas para simplificar e generalizar problemas e, com isto, ampliar as técnicas de resolução de problemas em outras áreas da matemática.

Neste capítulo, foram utilizados como base teórica e referencial autores como Hefez (2016), Gonçalves (2017), Sousa (2020), Santos (2021), Coelho (2018), dentre outros. A escolha desses autores foi o que permitiu as considerações e conclusões aqui apresentadas.

Percorreremos a seguir, uma estrutura algébrica específica: os anéis, mais precisamente, anel de polinômios em uma variável sobre $\mathbb{R}$. Essa estrutura é fundamental para o estudo das operações polinomiais e assim, o estudo das operações entre expressões algébricas. Iniciamos apresentando o que é um anel e as suas principais propriedades e após isso especificamos as características de anéis de polinômios.

2.1 Anéis

Um anel é uma estrutura algébrica composta de um conjunto não-vazio munido de duas operações, adição e multiplicação. Essas operações precisam satisfazer certas propriedades, como associatividade, existência de elemento neutro e inversibilidade, dentre outras. O estudo de anéis é fundamental para compreender diversos conceitos matemáticos, desde a teoria dos números até a teoria da computação. Além disso, são amplamente utilizados em diversas áreas, como a Álgebra e a criptografia.

Definição 2.1. *Anel* é todo conjunto A, não vazio, onde são definidas duas operações, chamadas de *soma* e *produto* em A e denotadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente. Se $a, b \in A$ definimos a soma como uma operação binária que associa cada par de elementos a, b a um elemento $a + b \in A$, e o produto associa cada par de elementos a, b a um elemento $a \cdot b \in A$. Estas são munidas de seis propriedades.

$$\begin{array}{rccc} + : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

i) Para quaisquer $a, b \in A$, tem-se $a + b = b + a$ (comutativa da soma);

ii) Para quaisquer $a, b, c \in A$, tem-se $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa da soma);

iii) Existe, em A, um elemento n tal que $a + n = n + a = a$, para todo $a, n \in A$. Neste caso, n é dito ser o elemento neutro da soma em A (elemento neutro da soma);

iv) Dado $x \in A$, existe $y \in A$, tal que $x + y = y + x = n$. Neste caso, denota-se $y = -x$ e diz-se que y é o simétrico de x em A. (simétrico da soma)

v) Para quaisquer $a, b, c \in A$, tem-se $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa do produto);

vi) Para quaisquer $a, b, c \in A$, tem-se $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributivas do produto em relação a soma).

Exemplo 2.1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido das operações usuais $+$ e $\cdot$ é um anel.

De fato as Propriedades i) a vi) são satisfeitas nas operações usuais, pois a adição de números inteiros são números inteiros e é comutativa, associativa, existe elemento neutro, que é o 0 (zero), admite elementos simétricos pois se $x \in \mathbb{Z}$ então $-x \in \mathbb{Z}$ e $-x$ é o simétrico de x pois $x + (-x) = -x + x = 0$. Além disto o produto, em $\mathbb{Z}$, é associativo e vale a associatividade do produto e as distributividades do produto em relação a soma. Vale ressaltar que $\mathbb{Z}$ munido das operações usuais satisfaz mais propriedades como: comutatividade e existência de elemento neutro para a multiplicação. Tais propriedades serão discutidas adiante.

Do mesmo modo temos que, os conjuntos $\mathbb{Q}$, dos números racionais, e $\mathbb{R}$, do conjunto dos números reais, também são anéis pois satisfazem as Propriedades i) a vi).

Obs. 2.1. Quando não tiver prejuízo na interpretação, iremos omitir o ponto referente ao produto de a por b. Assim $a \cdot b = ab$.

Exemplo 2.2. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido das operações $\oplus$ e $\otimes$, definidas a seguir é um anel.

$$\begin{cases} a \oplus b = a + b - 1 \\ a \otimes b = a + b - ab \end{cases}, \quad \text{onde } + \text{ e } \cdot \text{ são as operações usuais em } \mathbb{Z}.$$

Para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}$, munido destas operações, é um anel, basta verificar que valem as seis propriedades que caracterizam um anel. Sejam a,b e $c \in \mathbb{Z}$, então:

i) Devemos mostrar que $a \oplus b = b \oplus a$. Como em $\mathbb{Z}$, com as operações usuais, vale a propriedade comutativa da soma teremos:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a + b - 1 \\ &= b + a - 1 \\ &= b \oplus a. \end{aligned}$$

Logo, $a \oplus b = b \oplus a$ e, portanto, vale a propriedade comutativa da soma.

ii) Devemos mostrar que $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 1) \oplus c \\ &= a + b - 1 + c - 1 \\ &= a + (b + c - 1) - 1 \\ &= a + (b \oplus c) - 1 \\ &= a \oplus (b \oplus c). \end{aligned}$$

Logo, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ e, portanto, vale a propriedade associativa da soma.

iii) Devemos mostrar que $\exists\ n \in \mathbb{Z}$, tal que, $n \oplus a = a \oplus n = a$. Observe que, se existir tal n, então:

$$n \oplus a = a \text{ , ou seja, } n + a - 1 = a.$$

Como as operações usuais em $\mathbb{Z}$ são comutativas, então

$$a = n \oplus a = n + a - 1 = a + n - 1 = a \oplus n.$$

Também,

$$n + a - 1 + (1 - a) = a + (1 - a), \text{ ou seja, } n = 1.$$

Portanto, $n = 1$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{Z}$.

iv) Devemos mostrar que $\exists\ s \in \mathbb{Z}$, tal que $s \oplus a = a \oplus s = 1$. Note que

$s \oplus a = 1$ é equivalente à $s + a - 1 = 1$. Então, se $s = 2 - a$, teremos

$$s \oplus a = (2-a) + a - 1 = 1.$$

Portanto, existe simétrico e o simétrico de a é $2-a$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$.

v) Devemos mostrar que $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$. Ora, como as operações usuais em $\mathbb{Z}$ são comutativas, teremos:

$$\begin{aligned}
(a \otimes b) \otimes c = (a+b-ab) \otimes c &= a+b-ab+c-(a+b-ab) \\
&= a+b-ab+c-ac-bc+abc \\
&= a - \underbrace{ab-ac+abc}_{-a(b+c-bc)} + b + c - bc \\
&= a - a(b+c-bc) + (b+c-bc) \\
&= a - a(b \otimes c) + (b \otimes c) \\
&= a + (b \otimes c) - a(b \otimes c) \\
&= a \otimes (b \otimes c).
\end{aligned}$$

Portanto, é válida a propriedade associativa para o produto.

vi) Devemos mostrar que $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$ e $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
a \otimes (b \oplus c) = a + (b \oplus c) - a(b \oplus c) &= a+b+c-1-a(b+c-1) \\
&= a+b+c-1-ab-ac+a \\
&= \underbrace{a+b-ab}_{a \otimes b} + \underbrace{a+c-ac}_{a \otimes c} - 1 \\
&= a \otimes b + a \otimes c - 1 \\
&= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).
\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \otimes c = (a \oplus b) + c - (a \oplus b)c &= a+b-1+c-(a+b-1)c \\
&= a+b-1+c-ac-bc+c \\
&= \underbrace{a+c-ac}_{a \otimes c} + \underbrace{b+c-bc}_{b \otimes c} - 1 \\
&= (a \otimes c) + (b \otimes c) - 1 \\
&= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).
\end{aligned}$$

Portanto, valem as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição. Assim, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido das operações $\oplus$ e $\otimes$ é um anel.

Adicionalmente, se algumas outras propriedades são satisfeitas no anel A, este recebe nomes específicos de acordo com a propriedade complementar apresentada.

Definição 2.2. Se A, munido das operações $+$ e $\cdot$ é um anel e

vii) existe $1 \in A$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in A$, dizemos que A é um *anel com unidade*, e 1 é chamado de unidade de A (ou *elemento neutro da multiplicação* em A);

viii) para quaisquer $x, y \in A$ tem-se $xy = yx$, A é dito ser um *anel comutativo*;

ix) para quaisquer $x, y \in A$ com $xy = 0$, tem-se que $x = 0$ ou $y = 0$, diz-se que A é um *anel sem divisores de zero*;

x) para todo $x \in A$, $x \neq 0$, existir $y \in A$ tal que $xy = yx = 1$, denotamos $y = x^{-1}$ e dizemos que y é o *inverso multiplicativo* de x em A.

Se A satisfaz as propriedades vii), viii) e ix), A é chamado de *domínio de integridade*. Se A satisfaz as propriedades vii), viii) e x), A é chamado de *corpo*.

Obs. 2.2. Note que, se A é um corpo então é, também, um domínio de integridade. De fato, se $x, y \in A$ com $xy = 0$ e $x \neq 0$, então multiplicando a igualdade por x^{-1} obtemos $0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1} \cdot (xy) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$. Portanto, A não tem divisores de zero. O contrário não é verdade, isto é, nem todo domínio de integridade é um corpo, como é o caso do conjunto dos números inteiros munido das operações usuais.

Exemplo 2.3. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, munido das operações usuais, é um domínio de integridade.

De fato, nas operações usuais, as propriedades vii) a ix) são válidas, pois em $\mathbb{Z}$, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, $x \cdot d = d \cdot x = x$. Basta tomar $d = 1$. Além disto o produto de números inteiros é associativo. Para finalizar, note que, $xy = 0$ implica que $x = 0$ ou $y = 0$.

Portanto, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, munido das operações usuais, é um domínio de integridade.

Obs. 2.3. Vale ressaltar que apesar de $\mathbb{Z}$ ser um domínio de integridade, a propriedade x) não é satisfeita, pois sendo x, $y \in \mathbb{Z}$, $x \cdot y = 1$ só é válida em $\mathbb{Z}$, se $x = y = -1$. Assim, nem todo elemento de $\mathbb{Z}$ tem inverso multiplicativo e, portanto, o conjunto $\mathbb{Z}$, munido das operações usuais, não é um corpo.

Exemplo 2.4. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido das operações usuais de soma e produto, denotadas por $+$ e $\cdot$, é um corpo.

Se nos atentarmos que para as operações usuais em $\mathbb{R}$ são válidas as propriedades comutativas, associativas, distributivas, existem elementos neutros da adição e da multiplicação, e além disto existem elementos simétricos (da soma) e inversos (da multiplicação).

Portanto, $\mathbb{R}$, munido das operações usuais é um corpo.

O estudo dos anéis é fundamental no estudo dos polinômios. Vimos que o conjunto dos números reais é um exemplo de anel, e agora podemos explorar os anéis de polinômios. Entender esta relação nos permite realizar operações matemáticas de maneira generalizada com o rigor necessário que a matemática exige.

2.2 Polinômios em uma variável

Podemos conceituar polinômios como expressões algébricas formadas por variáveis e coeficientes, que são combinados através de operações de adição, subtração e multiplicação, geralmente escritos na forma de uma soma de termos, onde cada termo é um produto de uma constante (chamada coeficiente) e uma ou mais variáveis elevadas a expoentes inteiros e não negativos. Neste trabalho, nos restringimos ao estudo dos anéis de polinômios onde os coeficientes são números reais.

Os anéis de polinômios são importantes ferramentas matemáticas, empregadas em muitas áreas como a teoria de números, a criptografia e codificação, entre outras. Sua compreensão é crucial para a abordagem de conceitos algébricos e para a solução de problemas em diferentes aplicações. Especificamente, os anéis de polinômios são essenciais para a resolução de equações e sistemas algébricos e usado para definir as operações entre expressões algébricas, nosso principal objeto de estudo.

Seja x um símbolo que chamaremos de variável ou incógnita. Dado um número inteiro positivo j, a j-ésima potência de x é

$$x^j = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{j \text{ vezes}}.$$

Por completude, denotamos $x^0 = 1$.

Definição 2.3. Um *polinômio*, em uma variável, com coeficientes em $\mathbb{R}$ é uma expressão do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_j \in \mathbb{R}$, $\forall\ 0 \leq j \leq n$ e $a_n \neq 0$. As expressões da forma $a_j x^j$ são chamadas de *termos de ordem* j, os números a_j são chamados de *coeficientes* do termo de ordem j e n é denominado de grau do polinômio $f(x)$, que será denotado por $\partial(f(x))$.

Definição 2.4. *Monômios* são os termos da forma $a_j x^j$ de um polinômio.

Assim, podemos dizer que um polinômio é a soma de monômios com graus diferentes.

Definição 2.5. Sendo os monômios $a_j x^j$ e $b_i x^i$ a operação de adição de monômios é chamada de *soma* e fica assim definida:

$$a_j x^j + b_i x^i = \begin{cases} (a_j + b_j)\, x^j, & \text{se } i = j, \\ a_j x^j + b_i x^i, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Definição 2.6. Se $a_j x^j$ e $b_i x^i$ são dois monômios, a *multiplicação* ou *produto* entre eles é definida por

$$a_j x^j \cdot b_i x^i = (a_j b_i) x^{j+i}.$$

Note que $a_j x^j \cdot b_i x^i = b_i x^i \cdot a_j x^j$, pois das propriedades comutativas em $\mathbb{R}$ tem-se

$$a_j x^j \cdot b_i x^i = (a_j b_i) x^{j+i} = (b_i a_j) x^{i+j} = b_i x^i \cdot a_j x^j.$$

Obs. 2.4. Seguem algumas observações e notações:

- Em um monômio de uma variável e coeficientes reais, podemos dizer que temos um coeficiente a_j e uma parte literal x^j;
- Se tivermos exatamente dois dos coeficientes do polinômio diferentes de zero, então temos um *binômio*;
- Temos um *trinômio* se tivermos três dos coeficientes do polinômio diferentes de zero e os demais iguais a zero;
- Se um termo de um polinômio de ordem i não aparece, então $a_i = 0$;
- Se todos os coeficientes de um polinômio forem iguais a zero chamamos de *polinômio (identicamente) nulo* e denotamos por $O(x) = 0$;
- Um polinômio da forma $f(x) = a_0 x^0$, será representado, simplesmente, por $f(x) = a_0$ e o chamaremos de *polinômio constante*;
- Um polinômio é usualmente escrito na ordem crescente ou decrescente das potências dos termos;
- o grau de um polinômio é dado pelo expoente da parte literal de maior grau e coeficiente respectivo não nulo.

No que segue, consideraremos o conjunto

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + \cdots + a_n x^n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

formado por todos os polinômios, em uma variável, com coeficientes reais.

Exemplo 2.5. A expressão $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \sqrt{5}x^2 - 2x + 3$ é um polinômio em uma variável com coeficientes reais. Neste caso, de grau 3, isto é $\partial(g(x)) = 3$.

Definição 2.7. Dados dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, dizemos que estes polinômios são iguais se, e somente se, $a_j = b_j$, para todo $0 \leq j \leq n$ e escreveremos $f(x) = g(x)$.

Em outras palavras podemos dizer que dois polinômios são iguais se os coeficientes dos termos de ordens correspondentes forem iguais.

Definição 2.8. Considere dois polinômios $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j \in \mathbb{R}[x]$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in \mathbb{R}[x]$. A adição, ou soma, em $\mathbb{R}[x]$ é definida por

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{k} c_jx^j,$$

onde $k = max\{n, m\}$, $c_j = a_j + b_j$, $0 \leq j \leq k$, sendo $a_j = 0$ se $j > n$ e $b_j = 0$ se $j > m$.

Exemplo 2.6. Dados $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 3$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 2$ determine $f(x) + g(x)$.

Note que a adição de polinômios pode ser associada com a soma de números reais e, assim, ensinada da mesma forma montando uma operação e somando os coeficientes dos termos de mesmo grau. Logo podemos escrever

$$\begin{array}{rr} & 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 - x + 3 \\ + & \underline{0x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2} \\ & 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 5 \end{array}$$

ou seja

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x^4 - 2x^2 - x + 3 + \left(2x^3 + x^2 - 4x + 2\right) \\ &= (3 + 0)x^4 + (0 + 2)x^3 + (-2 + 1)x^2 + (-1 - 4)x + (3 + 2) \\ &= 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 5. \end{aligned}$$

Definição 2.9. Sejam os polinômios $f\,(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ e $g\,(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$. A multiplicação, ou *produto*, de $f(x)$ por $g(x)$ é definido por

$$f(x) \cdot g\,(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k.$$

Onde $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j$ e $0 \leq k \leq n{+}m$ e, ainda, considerando $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$.

Observe que os coeficientes da multiplicação podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \cdot b_0, \\ c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0, \\ c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0, \\ \vdots \\ c_j = a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \cdots + a_j \cdot b_0, \\ \vdots \\ c_{n+m} = a_0 \cdot b_{m+n} + a_1 \cdot b_{m+n-1} + \cdots + a_{n+m} \cdot b_0. \end{cases}$$

Como consequência da Definição 2.9 segue que o grau do polinômio produto de $f(x)$ por $g(x)$ é

$$\partial(f(x) \cdot g(x)) = n + m.$$

Em outras palavras, o grau de um polinômio é dado pela soma dos graus de cada um dos polinômios.

Exemplo 2.7. Dados os polinômios $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ e $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ determine $f(x) \cdot g(x)$.

É fácil notar que o grau do polinômio resultante será 5 pois:

$$\partial(f(x) \cdot g(x)) = n + m = 3 + 2 = 5.$$

Agora vamos calcular cada coeficiente do produto $f(x) \cdot g(x)$:
Coeficientes de $f(x)$:

$$a_0 = -3; \;\; a_1 = 0; \;\; a_2 = 2; \;\; a_3 = 1; \;\; a_4 = 0; \;\; a_5 = 0.$$

Coeficientes de $g(x)$:

$$b_0 = 1; \;\; b_1 = -3; \;\; b_2 = 2; \;\; b_3 = 0; \;\; b_4 = 0; \;\; b_5 = 0.$$

Vamos calcular cada um dos coeficiente do produto de $f(x)$ por $g(x)$:

$$\text{Calculando } c_5: \begin{cases} c_5 = a_0 \cdot b_5 + a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1 + a_5 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ \quad = 2 \end{cases}$$

$$\text{Calculando } c_4: \begin{cases} c_4 = a_0 \cdot b_4 + a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ \quad = 1 \end{cases}$$

$$\text{Calculando } c_3: \begin{cases} c_3 = a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \\ \quad = -5 \end{cases}$$

$$\text{Calculando } c_2: \begin{cases} c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \\ \quad = -4 \end{cases}$$

$$\text{Calculando } c_1: \begin{cases} c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ \quad = 9 \end{cases}$$

$$\text{Calculando } c_0: \begin{cases} c_0 = a_0 \cdot b_0 \\ \quad = -3 \cdot 1 \\ \quad = -3 \end{cases}$$

Portanto, $f(x) \cdot g(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9x - 3$.
Outra forma de resolver, envolve a propriedade distributiva do produto em relação a soma. Assim teremos

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^3 + 2x^2 - 3) \cdot (2x^2 - 3x + 1) \\ &= x^3 \cdot 2x^2 + x^3 \cdot (-3x) + x^3 \cdot 1 + 2x^2 \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot (-3x) + 2x^2 \cdot 1 \\ &\quad - 3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot (-3x) - 3 \cdot 1 \\ &= 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x^2 + 9x - 3 \\ &= 2x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9x - 3 \end{aligned}$$

Logo $f(x) \cdot g(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9x - 3$.

Definidas as operações e soma e adição em $\mathbb{R}[x]$, obtemos ferramentas para investigar a estrutura algébrica deste conjunto, como mostra o próximo resultado.

Proposição 2.8. $\mathbb{R}[x]$ é um domínio (ou anel) de integridade.

Demonstração. Considere os polinômios $p(x)$, $q(x)$, $t(x) \in \mathbb{R}[x]$, com graus n, m, k, respectivamente. Então, estes polinômios podem ser escritos das seguintes formas,

$$p\,(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j,$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j,$$

$$t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{k-1}x^{k-1} + c_kx^k = \sum_{j=0}^{k} c_jx^j.$$

Vamos, então, verificar a validade das propriedades que caracterizam um domínio de integridade.

i) Devemos mostrar que $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j + \sum_{j=0}^{m} b_jx^j &= \sum_{j=0}^{\max\{n,m\}} (a_j + b_j)x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\max\{n,m\}} (b_j + a_j)x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} b_jx^j + \sum_{j=0}^{m} a_jx^j = q(x) + p(x). \end{aligned}$$

Assim, $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$ e, portanto, vale a propriedade comutativa da adição.

ii) Devemos mostrar que $p(x) + [q(x) + t(x)] = [p(x) + q(x)] + t(x)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} p(x) + [q(x) + t(x)] &= \sum_{j=0}^{n} a_jx^j + \left(\sum_{j=0}^{m} b_jx^j + \sum_{j=0}^{k} c_jx^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_jx^j + \sum_{j=0}^{\max\{m,k\}} (b_j + c_j)x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\max\{n,m,k\}} (a_j + b_j + c_j)x^j \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j + \sum_{j=0}^{m} b_jx^j\right) + \sum_{j=0}^{k} c_jx^j \\ &= [p(x) + q(x)] + t(x). \end{aligned}$$

Assim, $p(x)+[q\,(x)+t\,(x)]=[p\,(x)+q\,(x)]+t\,(x)$ e, portanto, a propriedade associativa da adição é válida.

iii) Veja que o polinômio $O(x)=0$ é o elemento neutro da adição pois,

$$p(x)+O(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j+0=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j=p(x)$$

Portanto, existe o elemento neutro da soma e é $O(x)$.

iv) Devemos mostrar que existe um polinômio $s(x)$ que seja o simétrico de $p(x)$, isto é, tal que $p(x)+s(x)=O(x)=0$. Vejamos.

Seja, $s(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_nx^n=\sum\limits_{j=0}^{n}(-a_j)x^j$.

Como, $p(x)+s(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jx^j+\sum\limits_{j=0}^{n}(-a_j)x^j=\sum\limits_{j=0}^{n}(a_j+(-a_j))x^j=0=O(x)$,

então $s(x)$ é o simétrico de $p(x)$ e, portanto, todo polinômio em $\mathbb{R}[x]$ admite simétrico aditivo.

v) Devemos mostrar que $[p(x)\cdot q(x)]\cdot t(x)=p(x)\cdot[q(x)\cdot t(x)]$. Pela Definição 2.9,

$$p(x)\cdot q(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j\cdot\sum_{j=0}^{m}b_jx^j=\sum_{j=0}^{n+m}d_jx^j,\ \text{onde } d_j=\sum_{r+s=j}a_rb_s.$$

Agora, $$[p(x)\cdot q(x)]\cdot t(x)=\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n+m}d_jx^j\right)}_{[p(x)\cdot q(x)]}\cdot\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k}c_jx^j\right)}_{t(x)}=\sum_{i=1}^{n+m+k}e_ix^i,$$

onde $e_i=\sum\limits_{j+l=i}d_jc_l$.

Daí, substituindo d_j na expressão de e_i, obtemos

$$e_i=\sum_{j+l=i}\underbrace{\left(\sum_{r+s=j}a_rb_s\right)}_{d_j}c_l=\sum_{r+s+l=i}a_rb_sc_l. \tag{2.1}$$

Além disto,

$$q(x)\cdot t(x)=\sum_{j=0}^{m} b_jx^j\cdot\sum_{j=0}^{k} c_jx^j=\sum_{j=0}^{m+k} f_jx^j,\ \text{onde } f_j=\sum_{s+l=j} b_sc_l.$$

$$\text{Agora, } p(x)\cdot[q(x)\cdot t(x)]=\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\right)}_{p(x)}\cdot\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m+k} f_jx^j,\right)}_{[q(x)\cdot t(x)]}=\sum_{i=0}^{n+m+k} g_ix^i,$$

onde $g_i=\sum_{r+j=i} a_rf_j$.

Daí, substituindo f_j em g_i obtemos

$$g_i=\sum_{r+j=i} a_r\left(\sum_{s+l=j} b_sc_l\right)=\sum_{r+s+l} a_rb_sc_l. \tag{2.2}$$

Das equações (2.1) e (2.2) conclui-se que $[p(x)\cdot q(x)]\cdot t(x)=p(x)\cdot[q(x)\cdot t(x)]$ portanto, vale a propriedade associativa da multiplicação.

vi) Devemos mostrar que $p(x)\cdot[q(x)+t(x)]=p(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot t(x)$. Temos que

$$\begin{aligned}p(x)\cdot[q(x)+t(x)]&=\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\cdot\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} b_jx^j+\sum_{j=0}^{k} c_jx^j\right)}_{[q(x)+t(x)]}\\&=\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\cdot\sum_{j=0}^{\max\{m,k\}}(b_j+c_j)x^j=\sum_{j=0}^{n+\max\{m,k\}} d_jx^j,\end{aligned}$$

onde $d_j=\sum_{r+s=j} a_r\left(b_s+c_s\right)$.

Além disto,

$$\begin{aligned}p(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot t(x)&=\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\cdot\sum_{j=0}^{m} b_jx^j+\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\cdot\sum_{j=0}^{k} c_jx^j\\&=\sum_{j=0}^{n+m} e_jx^j+\sum_{j=0}^{n+k} f_jx^j\end{aligned}$$

onde $e_j=\sum_{r+s=j} a_rb_s$ e $f_j=\sum_{r+s=j} a_rc_l$.

Para concluir que os $p(x) \cdot [q(x) + t(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot t(x)$, basta mostrar que

$$\sum_{j=0}^{n+\max\{m,k\}} d_j x^j = \sum_{j=0}^{n+\max\{m,k\}} (e_j + f_j)\, x^j.$$

Como, $e_j = \sum\limits_{r+s=j} a_r b_s$ e $f_j = \sum\limits_{r+s=j} a_r c_s$, então,

$$e_j + f_j = \sum_{r+s=j} a_r b_s + \sum_{r+s=j} a_r c_s = \sum_{r+s=j} (a_r b_s + a_r c_s) = \sum_{r+s=j} a_r (b_s + c_s) = d_j$$

Portanto, vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e, assim, $\mathbb{R}[x]$ é um anel.

Para mostrar que forma um anel de integridade, deve-se mostrar as outras 3 propriedades.

vii) Note que existe um polinômio $n(x) = 1$, elemento neutro multiplicativo, tal que $p(x) \cdot n(x) = n(x) \cdot p(x) = p(x)$ igual a $n(x) = 1$ (um), pois para todo $p(x) \in \mathbb{R}$ temos:

$$p(x) \cdot n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \cdot 1 = 1 \cdot \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = p(x) \tag{2.3}$$

Portanto existe elemento neutro multiplicativo e ele vale 1.

viii) Devemos mostrar que $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$. Ora, pela Definição 2.9 temos

$$p(x) \cdot q(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k. \tag{2.4}$$

Onde $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j$ e $0 \leq k \leq n+m$ e, ainda, considerando $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$.

Também temos

$$q(x) \cdot p(x) = \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} d_k x^k. \tag{2.5}$$

Onde $d_k = \sum\limits_{j+i=k} b_j \cdot a_i$ e $0 \leq k \leq m+n$ e, ainda, considerando $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$. Assim para mostrar que $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$ basta mostrar que nas equações (2.4) e (2.5), $c_k = d_k$ são iguais. De fato são iguais pois

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j = \sum_{j+i=k} b_j \cdot a_i = d_k$$

Logo, $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$ e, portanto, vale a propriedade comutativa da multiplicação. Assim, as seis propriedades são satisfeitas e portanto $\mathbb{R}[x]$ é um anel. Agora, para mostrar que $\mathbb{R}[x]$ é um domínio de integridade precisamos verificar se satisfaz as outras três propriedades.

ix) Devemos mostrar que que $p(x)q(x) = 0$, se, e somente se, $p(x) = 0$ ou $q(x) = 0$. Sejam $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ e $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$p(x) \cdot q(x) = O(x) = 0, \text{ com } q(x) \neq 0 \text{ e } \partial(q(x)) = m.$$

Então

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j = 0, \text{ com } d_j = \sum_{i+k=j}^{n+m} a_i b_j.$$

Logo, $d_j = 0 \quad \forall\ j = 0, 1, \cdots, n+m$.

Ora, $d_{n+m} = a_n b_m$ com $b_m \neq 0$, pois $\partial\left(q(x)\right) = m$. Logo $a_n = 0$. Agora

$$0 = d_{n+m-1} = \sum_{i+j=n+m-1} a_i b_j = \underbrace{a_n}_{a_n=0} b_{m-1} + a_{n-1} b_m = a_{n-1} b_m$$

Como $b_m \neq 0$, segue que $a_{n-1} = 0$. Procedendo de forma similar, obteremos

$$a_i = 0\ \forall\ i = 0, 1, \cdots, n, \text{ donde } p(x) = O(x)$$

Portanto, $\mathbb{R}[x]$, munido das operações usuais, é um anel de integridade. □

2.2.1 O algoritmo da divisão em $\mathbb{R}$

Vimos até agora que as operações de adição e multiplicação em um anel de polinômios em uma variável tem propriedades muitos específicas como a comutatividade, associatividade, elemento neutro, inverso aditivo, etc. Estas propriedades serão fundamentais para realizar a divisão entre polinômios.

A divisão euclidiana de um polinômio qualquer por um polinômio de menor grau, possibilita a simplificação de expressões algébricas complexas, a resolução de equações polinomiais e a análise das propriedades dos anéis de polinômios. Nesta seção estudaremos como é feita divisão euclidiana de polinômios conhecendo os conceitos que necessitamos sobre dividendo, divisor, quociente e resto.

Dado um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$,

Definição 2.10. Chamamos de *monômio líder* ou *termo líder* o monômio de maior grau do polinômio. E chamamos de *coeficiente líder*, o coeficiente do monômio de maior grau deste polinômio.

Definição 2.11. Um número real $y \in \mathbb{R}$ é invertível se existe y^{-1}, tal que $y \cdot y^{-1} = 1$.

Note que todo número real, diferente de zero é invertível, pois $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\exists\, y^{-1}$, tal que, $y \cdot y^{-1} = 1$.

Definição 2.12. Dizemos que o coeficiente líder do polinômio $p(x)$ é invertível se o coeficiente líder a_n for invertível e denotamos por a_n^{-1}.

Vale ressaltar que o coeficiente líder de qualquer polinômios em $\mathbb{R}[x]$ é invertível desde que este coeficiente não seja nulo, então, todo polinômio não nulo tem coeficiente líder invertível. Isto se deve ao fato de $\mathbb{R}[x]$ ser um corpo, pois satisfaz as seis propriedades e além disto as Propriedades vii), viii) e x).

Definição 2.13. Sejam $p(x)$, $t(x) \in [x]$, com $t(x) \neq 0$, diz-se que Um polinômio $p(x)$ é divisível por $t(x)$,ou que $p(x)$ é um múltiplo de $t(x)$, se existir, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que $p(x) = t(x) \cdot q(x)$. Neste caso, dizemos que $t(x)$ *divide* $p(x)$ e denotamos $t(x) \mid p(x)$.

Teorema 2.1. Sendo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio qualquer e $t(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio cujo coeficiente líder é invertível, temos que existem únicos $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{R}(x)$ tais que

$$p(x) = q(x) \cdot t(x) + r(x), \text{ onde } \partial(r(x)) < \partial(t(x)).$$

Chamamos $q(x)$ de quociente, $t(x)$ de dividendo e $r(x)$ de resto.

Demonstração. Sejam os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $t(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, com $n \geq m$. Sabemos que se $p(x) = 0$ ou $\partial(p(x)) < \partial(t(x))$, então $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$. Logo, basta considerar o caso em que $\partial(p(x)) \geq \partial(t(x))$. Devemos começar mostrando que existem $q(x)$ e $r(x)$ satisfazendo o que se pede e depois mostrar que $q(x)$ e $r(x)$ são unicamente determinados.

Como b_m é invertível em $\mathbb{R}[x]$, teremos

$$b_m \cdot \frac{1}{b_m} = 1 \qquad \text{com } \frac{1}{b_m} \in \mathbb{R}[x] \text{ e portanto, } \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} \in \mathbb{R}[x].$$

Então, $p(x)$ pode ser escrito como,

$$p(x) = \frac{1}{b_m} \cdot a_n x^{n-m} \cdot t(x) + p_1(x)$$

sendo,

$$p_1(x) = \left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) \cdot x^{n-1} + \cdots + \left(a_{n-m} - \frac{a_n b_0}{b_m}\right) \cdot x^{n-m} + \cdots .$$

Note que se $p_1(x) = 0$ ou $\partial(p_1(x)) < \partial(t(x))$ o resultado já foi alcançando, pois $r(x) = p_1(x)$ e $q(x) = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$.

Se $p_1(x) \neq 0$ e $\partial(p_1(x)) \geq \partial(t(x))$ repetimos o processo. Para isto, agora trocando $p(x)$ por $p_1(x)$. Vamos considerar $\partial(p_1(x)) = s$ e

$$p_1(x) = d_s x^s + d_{s-1}x^{s-1} + \cdots + d_0.$$

com $n-1 \geq s \geq m$ sendo $d_s \neq 0$. Desta forma $p_1(x) = \dfrac{1}{b_m} \cdot d_s x^{s-m} \cdot t(x) + p_2(x)$. Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(x) &= t(x) \cdot \frac{1}{b_m} a_n x^{n-m} + t(x) \cdot \frac{1}{b_m} d_s x^{s-m} + p_2(x) \\ &= t(x) \cdot \left[\frac{1}{b_m} a_n x^{n-m} + \frac{1}{b_m} d_s x^{s-m} \right] + p_2(x). \end{aligned}$$

Novamente se, $p_2(x) = 0$ ou $\partial(p_2(x)) < \partial(t(x))$ a divisão terminou com,

$$r(x) = p_2(x) \text{ e } q(x) = \frac{1}{b_m}\left[a_n x^{n-m} + d_s x^{s-m}\right].$$

Se $p_2(x) \neq 0$ e $\partial(p_2(x)) \geq \partial(t(x))$ repetimos o processo i vezes até que o grau de $p_i(x)$ seja menor que o grau de $t(x)$ ou que $p_i(x) = 0$. É importante notar que o processo tem fim, visto que

$$\partial(p(x)) > \partial(p_1(x)) > \partial(p_2(x)) > \cdots > \partial(p_i(x)) \geq 0.$$

Assim, $r(x) = p_i(x)$ será o resto da divisão.

Agora falta mostrar que $q(x)$ e $r(x)$ são únicos. Suponha que existam $q_0(x)$, $q_1(x)$, $r_0(x)$ e $r_1(x)$ tais que:

$$p(x) = t(x) \cdot q_0(x) + r_0(x) \tag{2.6}$$

e

$$p(x) = t(x) \cdot q_1(x) + r_1(x). \tag{2.7}$$

com $0 \leq \partial(r_0(x)), \partial(r_1(x)) < \partial(t(x))$.

Como as duas equações representam $p(x)$, de (2.6) e (2.7), obtemos

$$t(x) \cdot q_0(x) + r_0(x) = t(x) \cdot q_1(x) + r_1(x).$$

Então,

$$r_0(x) - r_1(x) = t(x) \cdot q_1(x) - t(x) \cdot q_0(x) = t(x) \cdot [q_1(x) - q_0(x)] \, .$$

Note agora que $t(x)$ divide $r_0(x) - r_1(x)$. Contudo, o grau de $r_0(x)$ e o grau de $r_1(x)$ são menores que o grau de $t(x)$ e, assim, o grau de $r_0(x) - r_1(x)$ é menor que o grau de $t(x)$. Isto só é possível se $r_0(x) - r_1(x)$ for zero.

Daí temos que $r_0(x) = r_1(x)$ e, consequentemente, $q_0(x) = q_1(x)$ uma vez que $t(x) \neq 0$ e $\mathbb{R}[x]$ é domínio de integridade.

Portanto, $q(x)$ e $r(x)$ são unicamente determinados. $\square$

Exemplo 2.9. Sejam $p(x) = x^2 + 4x + 4$ e $t(x) = x + 2$ polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $t(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 4x + 4 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^2 - 2x } & x + 2 \\
2x + 4 & \\
\underline{-2x - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

A divisão acaba aqui pois $r(x) = 0$ e neste caso, dizemos que a divisão é exata e o quociente é $q(x) = x + 2$. Observe que $p(x)$ é um múltiplo de $t(x)$.

Exemplo 2.10. Sejam $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ e $t(x) = x^2 - 3$ polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $p(x)$ por $t(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 & x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3 + 0x^2 + 6x } & 2x - 4 \\
-4x^2 + 11x + 2 & \\
\underline{+4x^2 + 0x - 12} & \\
11x - 10 &
\end{array}$$

Veja que a divisão acabou pois $\partial(r(x)) < \partial(q(x))$. Assim temos o resto $r(x) = 11x - 10$ e o quociente $q(x) = 2x - 4$. Isto quer dizer que $p(x) = q(x)t(x) + r(x)$.

2.3 Polinômios em duas variáveis

Os polinômios em duas variáveis são expressões matemáticas que envolvem coeficientes seguidos de duas partes variáveis, representadas por letras com expoentes inteiros e não negativos. Eles são amplamente usados na matemática e em outras áreas para modelar e descrever situações em que duas quantidades estão inter-relacionadas.

Definição 2.11. Um monômio em duas variáveis é uma expressão algébrica formada pelo produto de uma constante, e duas variáveis (ou incógnitas), com seus respectivos expoentes, sem adição ou subtração de outros monômios. Chamamos a constante de *parte numérica* e as variáveis de *parte literal*.

Obs. 2.5. Quando dois monômios tem a mesma parte literal, dizemos que eles são *monômios semelhantes*.

Definição 2.12. O grau de um monômio $p(x, y)$, em duas variáveis, é dado pela soma dos expoentes das variáveis deste monômio e denotamos por $\partial(p(x, y))$.

Obs. 2.6. Quando o expoente da variável for zero, não colocamos esta variável, isto é, a variável em questão não aparecerá no monômio.

Exemplo 2.13. A seguir alguns monômios com seus respectivos graus:

- O grau do monômio $p(x, y) = 3x^3y^4$ é $\partial(p(x, y)) = 7$ pois a soma dos expoentes de x e y dá 7.
- O grau do monômio $q(x, y) = -2xy^2$ é $\partial(q(x, y)) = 3$ pois a soma dos expoentes de x e y dá 3.
- O grau do monômio $t(x, y) = y^4$ é $\partial(t(x, y)) = 4$ pois a soma dos expoentes de x e y dá 7 (neste caso o expoente de x é 0).

Um polinômio em duas variáveis e coeficientes em $\mathbb{R}$ é uma expressão matemática da forma:

$$P(x, y) = a_{m,n}x^my^n + a_{m,n-1}x^my^{n-1} + \cdots + a_{m,0}x^my^0 + a_{m-1,0}x^{m-1}y^n + \cdots + a_{0,0}x^0y^0$$

onde $a_{m,n}, a_{m,n-1}, ..., a_{0,0}$ são constantes reais, chamadas de coeficientes do polinômio, e m e n são números inteiros não negativos que indicam o grau de x e y no termo correspondente.

Definição 2.14. O grau de um polinômio em duas variáveis é dado pelo grau do maior monômio deste polinômio.

Exemplo 2.15. Determine o grau de cada um dos polinômios abaixo:

- $q(x, y) = 2x^3y^2 + 5x^2y^4 - 3xy^3 + 4x^4$:
  Solução: tem grau 6, que é o grau do monômio de maior grau, $5x^2y^4$.
- $r(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 7x^3y^2 + 3y^3$
  Solução: tem grau 5, que é o grau do monômio de maior grau, $7x^3y^2$.
- $s(x, y) = 4x^2y^2 - 2x^4y + 6xy$
  Solução: tem grau 5, que é o grau do monômio de maior grau, $-2x^4y$.
- $t(x, y) = 3x^5 + 2y^6$
  Solução: tem grau 6, que é o grau do monômio de maior grau, $2y^6$.
- $u(x, y) = 5xy - 2x^2$
  Solução: tem grau 2, que é o grau do monômio de maior grau, $5xy$ ou $-2x^2$.

Em um polinômio, a ordem em que aparecem os monômios, pode ser alterada, seguindo o princípio da boa ordenação em $\mathbb{N}$.

Axioma 2.3.1. Todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento. Este axioma é conhecido como *axioma da boa ordenação.*

Na prática, organizar conjuntos na matemática é um princípio muito comum, visto que facilita as operações envolvidas.

Definição 2.16. Uma *ordem monomial* em $\mathbb{R}[x, y]$ é uma relação $>$ em $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $>$ é uma ordem linear em $\mathbb{N}$, isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ com $a \neq b$, podemos dizer que $a > b$ ou $b > a$, e, neste caso, os organizamos em ordem decrescente.
ii) Se α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\alpha > \beta$, então $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$;
iii) É uma boa ordenação em $\mathbb{N}$. Isto significa que cada subconjunto não vazio de elementos em $\mathbb{N}$, admite um menor elemento.

Na prática, ordem monomial é uma maneira de organizar monômios seguindo uma ascendência ou uma descendência de termos. Por exemplo, os monômios de uma variável ficam melhor organizados para uma operação de soma ou produto se estiverem com suas potências de variáveis em ordem decrescente. Neste caso a boa ordenação facilita a verificação das operações com monômios.

Porém, para estender as operações de adição e multiplicação para polinômios com duas variáveis, precisamos determinar uma melhor ordem para os monômios deste polinômio. Assim temos a *ordem lexicográfica.*

Definição 2.17. *Ordem lexicográfica*
Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Diz-se que $\alpha >_{lex} \beta$ se na

diferença do vetor $\alpha - \beta \in \mathbb{N}^n$, o elemento não nulo mais a esquerda é positivo e escrevemos $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se $\alpha >_{lex} \beta$.

Ao lidar com polinômios que possuem duas ou mais variáveis, como o exemplo de x, y e z, é necessário considerar a ordem alfabética das variáveis para definir a ordem lexicográfica. Assim, a ordem $x > y > z$ deve ser assumida para estabelecer a ordem dos termos no polinômio.

Exemplo 2.18. Considere o polinômio $p(x, y) = 4xy^5 + 6x^3y + 5x^2y^3 + 3x^3y^2 + 2x^2y^4 + 7xy^2$. Podemos organizar este polinômio na lexicografia do alfabeto crescente e dos expoentes decrescentes. Assim,

$$p(x, y) = 3x^3y^2 + 6x^3y + 2x^2y^4 + 5x^2y^3 + 4xy^5 + 7xy^2.$$

Veja que colocamos as potências de x em ordem decrescente e quando estas potências são iguais, colocando as potências de y em ordem decrescente.

Porém quando se trata da divisão de polinômios em duas variáveis, a ordem lexicográfica em si, pode não ser a melhor ordenação, e assim temos a ordem lexicográfica graduada definida por

Definição 2.19. *Ordem lexicográfica graduada*
Dados dois monômios $a_{m,n}x^my^n$ e $b_{p,q}x^py^q$ com grau $m+n$ e $p+q$, respectivamente, sendo $a_{m,n}$ e $b_{p,q}$ os coeficientes dos respectivos monômios, a ordem lexicográfica graduada é dada por:

i) Se $m + n > p + q$, então $a_{m,n}x^my^n > b_{p,q}x^py^q$.
ii) Se $m + n = p + q$, então:
   (a) Se $m > p$, então $a_{m,n}x^my^n$ é maior do que $b_{p,q}x^py^q$.
   (b) Se $m = p$ e $n \geq q$, então $a_{m,n}x^my^n$ é maior do que $b_{p,q}x^py^q$.
   (c) Se $m = p$ e $n = q$ e $|a_{m,n}| \geq |b_{p,q}|$ então $a_{m,n}x^my^n$ é maior do que x^py^q. Caso contrário, $b_{p,q}x^py^q$ é maior do que $a_{m,n}x^my^n$.

Na ordem lexicográfica graduada, a ordenação dos monômios é feita primeiro pelo grau e, caso os monômios tenham o mesmo grau, pela ordem lexicográfica usual da Definição 2.17.

Exemplo 2.20. Para ordenar o polinômio $p(x, y) = 3x^3y^2 + 4x^4y + x^2y^4 + 2xy^5 + 2x^2y^3$ na ordem lexicográfica graduada, precisamos comparar o grau de cada monômio:

- $3x^3y^2 : 3 + 2 = 5$
- $4x^4y : 4 + 1 = 5$

- $x^2y^4 : 4+2=6$
- $2xy^5 : 1+5=6$
- $2x^2y^3 : 2+3=5$

Como temos dois monômios de grau 6, os organizamos seguindo a lexicografia usual considerando os graus em ordem decrescente. O mesmo ocorre par a os de grau 5 encontrados.

Portanto, a ordem lexicográfica graduada para o polinômio $p(x, y)$ é:

$$p(x, y) = x^2y^4 + 2xy^5 + 4x^4y + 3x^3y^2 + 2x^2y^3.$$

Nos ensinos fundamental e médio, quando se trata de monômios com uma, duas ou mais variáveis, as operações de adição, multiplicação e divisão são trabalhadas, mas com pouca ênfase na divisão. Porém quando se trata destas mesmas operações para polinômios, praticamente, são esquecidas as operações com duas ou mais variáveis. Especula-se que, na maioria das vezes, isto ocorre por conta das operações com partes literais, não serem assim tão bem compreendidas pelos estudantes. Neste viés, a proposta em questão é que após os conceitos de operações ficarem bem esclarecidos, propor um avanço para operações com monômios com pelo menos duas variáveis.

A adição de monômios e polinômios com duas variáveis é similar, a de com uma variável, e pode ser definida como:

Definição 2.14. Considere dois polinômios $f(x, y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{j,i}x^jy^i \in \mathbb{R}[x, y]$ e $g(x, y) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{s} b_{j,i}x^jy^i \in \mathbb{R}[x, y]$. A *adição*, ou *soma*, em $\mathbb{R}[x, y]$ é definida por:

$$f(x, y) + g(x, y) = \sum_{j=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{r+s} c_{j,i}x^jy^i,$$

onde $c_{j,i} = a_{j,i} + b_{j,i}$, $0 \leq j \leq k$, sendo $a_{j,i} = 0$ se $j > n$ ou $i > m$ e $b_{j,i} = 0$ se $j > r$ ou $i > s$.

Exemplo 2.21. Dados $f(x, y) = 3x^2y^2 - 2x^2y - x + 3$ e $g(x, y) = 2xy^2 + x^2y - 4xy + 2x^2$ determine $f(x, y) + g(x, y)$.

Para realizar a operação iremos colocar os polinômios $f(x, y)$ e $g(x, y)$ na ordem lexicográfica graduada e, nos termos faltantes, os colocamos com coeficiente 0. Como o maior expoente é 2, consideramos o polinômio com grau 4 para explicar, pelo principio da boa ordem. Assim

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2y^2 - 2x^2y^1 + 0x^1y^2 + 0x^2y^0 + 0x^1y^1 + 0x^0y^2 - 1x^1y^0 + 0x^0y^1 + 3x^0y^0 \\ g(x,y) &= 0x^2y^2 + 1x^2y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^0 - 4x^1y^1 + 0x^0y^2 + 0x^1y^0 + 0x^0y^1 + 0x^0y^0 \end{aligned}$$

Veja que a adição destes polinômios pode ser feita assim:

$$\begin{array}{r} 3x^2y^2 - 2x^2y^1 + 0x^1y^2 + 0x^2y^0 + 0x^1y^1 + 0x^0y^2 - 1x^1y^0 + 0x^0y^1 + 3x^0y^0 \\ \underline{+0x^2y^2 + 1x^2y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^0 - 4x^1y^1 + 0x^0y^2 + 0x^1y^0 + 0x^0y^1 + 0x^0y^0} \\ 3x^2y^2 - 1x^2y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^0 - 4x^1y^1 + 0x^0y^2 - 1x^1y^0 + 0x^0y^1 + 3x^0y^0 \end{array}$$

Portanto, $f(x,y) + g(x,y) = 3x^2y^2 - 1x^2y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2 - 4x^1y^1 - 1x^1 + 3$.

Todavia, a ordem lexicográfica no caso da adição não precisa necessariamente ser usada, pois basta adicionar os monômios que tem a mesma parte literal, e repetir os que não são.

A definição de produto também é similar a de polinômios com uma variável, pois utilizando o principio da boa ordem e a ordenação lexicográfica podemos definir.

Definição 2.15. Sejam os polinômios $f(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{m} a_{j,i}x^jy^i \in \mathbb{R}[x,y]$ e $g(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{r}\sum\limits_{i=0}^{s} b_{j,i}x^jy^i \in \mathbb{R}[x,y]$. A multiplicação, ou *produto*, do polinômio $f(x,y)$ por $g(x,y)$ é definido por

$$f(x,y)\cdot g(x,y) = \left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{j,i}x^jy^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{s} b_{j,i}x^jy^i\right) = \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{l=0}^{r+r} c_{k,l}x^ky^l,$$

onde

$$c_{k,l} = \sum_{j+i+u+v=k} a_{j,i}\cdot b_{u,v} \text{ e, } 0 \le k \le n+m+r+s,$$

e ainda considerando $0 \le j \le n$, $0 \le i \le m$, $0 \le u \le r$ e $0 \le v \le s$.

Como consequência desta definição segue que o grau do polinômio produto de $f(x,y)$ por $g(x,y)$ é dada por:

$$\partial(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \partial(f(x,y)) + \partial(g(x,y)) = n+m+r+s.$$

De modo geral, todas as operações são definidas de forma a satisfazer as propriedades da definição de anel.

Obs. 2.7. Vale notar que, em um polinômio $p(x,y)$, quando todos os coeficientes são iguais a zero dizemos que ele é o *polinômio nulo* e denotamos por, $O(x,y) = 0$.

O algoritmo da divisão também vale para polinômios em duas variáveis, e será enunciado a seguir, sem a demonstração, porém a demonstração para múltiplas variáveis pode ser encontrada em "O ALGORITMO DA DIVISÃO PARA POLINÔMIOS EM VÁRIAS VARIÁVEIS" por Coelho, (2018).

Teorema 2.2 (Algoritmo da divisão de polinômios em duas variáveis)**.** Fixada uma ordem monomial e dado $t(x,y) \in \mathbb{R}[x,y] - 0$, para qualquer polinômio $p(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$, existem $q(x,y)$, $r(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$, unicamente determinados, tais que,

$$p(x,y) = q(x,y) \cdot t(x,y) + r(x,y)$$

com $r(x,y) = 0$ ou $\partial(r(x,y)) < \partial(t(x,y))$.

Exemplo 2.22. Sejam $p(x,y) = 4x^4+4x^3y+x^2y^2+8x^2y+8xy^2+2y^3$ e $t(x,y) = 2x+y$ polinômios em $\mathbb{R}[x,y]$. Calcule o quociente $q(x,y)$ e o resto $r(x,y)$ da divisão de $p(x,y)$ por $t(x,y)$.

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 + 4x^3y + x^2y^2 + 8x^2y + 8xy^2 + 2y^3 & \;2x + y \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4 - 2x^3y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & 2x^3 + x^2y + 4xy + 2y^2 \\
2x^3y + x^2y^2 + 8x^2y + 8xy^2 + 2y^3 & \\
\underline{-2x^3y - x^2y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
0 + 8x^2y + 8xy^2 + 2y^3 & \\
\underline{-8x^2y - 4xy^2 \qquad\quad} & \\
4xy^2 + 2y^3 & \\
\underline{-4xy^2 - 2y^3} & \\
0 &
\end{array}$$

Veja que a divisão acabou pois $\partial(r(x,y)) < \partial(t(x,y))$. Assim temos o resto $r(x,y) = 0$ e o quociente $q(x,y) = 2x^3 + x^2y + 4xy + 2y^2$.

A ordem lexicográfica graduada, garante que os polinômios fiquem em uma boa ordem nas quais as divisão fica facilitada e o quociente já fica também em uma ordem graduada.

As definições, operações e propriedades apresentadas, são válidas para polinômios com mais de duas variáveis também.

2.4 Relevância dos anéis de polinômios na formação do professor da educação básica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) destacam a importância do ensino da Álgebra desde o ensino fundamental, incluindo o estudo de anéis de polinômios e suas relações com as expressões algébricas trabalhadas nessa etapa de ensino. Enquanto a BNCC interpreta a Álgebra como um instrumento de linguagem poderoso para a representação, a comunicação e a análise de relações matemáticas e de fenômenos da vida real, inclusive enfatizando a importância do uso de tecnologias digitais, como a utilização de softwares de Álgebra e gráficos, os PCN's descrevem a Álgebra como instrumento do desenvolvimento do raciocínio lógico, para a formação de hábitos de organização, análise e síntese de dados e informações.

O conhecimento dos anéis de polinômios, passa muitas das vezes despercebido tanto pelo professor da educação básica, como pelo aluno que, por desconhecer, deixa de aprender muitos dos conceitos que o ajudariam a aprimorar um aprendizado mais profundo sobre o assunto.

Outro fator, é a contextualização que se tem de expressões algébrica que na maioria das vezes é apresentada apenas como regras que o aluno tem que memorizar e aplicar de forma mecânica que geralmente causa traumas ao se falar de expressões algébricas.

Os anéis de polinômios são uma extensão natural das expressões algébricas que são trabalhadas no ensino fundamental, e o conhecimento dessas relações é de grande importância para o professor da educação básica. No ensino médio a situação fica mais complicada pois o aluno pouco evolui, visto que as operações realizadas com expressões algébricas, aparentemente, são apenas mudadas de nome para polinômios pois não se ensina nada novo. As operações se mantém a mesma e são vista em apenas uma variável, restringindo assim a oportunidade de crescer no assunto.

As expressões algébricas trabalhadas no ensino fundamental devem ser vistas como um caso particular dos polinômios e assim não podem ser ignoradas ou mal vistas, visto que as operações são de fundamental importância no estudo das equações do primeiro e segundo grau e das funções afins e funções quadráticas. Além disto elas fornecem uma base sólida para o estudo das demais funções exponenciais, logarítmicas, os sistemas lineares, etc e suas propriedades fornecem padrões que podem ser aplicados em situações diversas.

Assim, o professor deve ser capaz de ensinar o assunto de forma clara e eficaz. Para isto, deve dominar bem o assunto para saber reconhecer as principais dificuldades que os alunos possam encontrar no aprendizado.

Por fim, é importante destacar que o conhecimento das relações entre anéis de polinômios e as expressões algébricas trabalhadas no ensino fundamental pode preparar os alunos para assuntos mais avançados, como as equações algébricas e as funções polinomiais, que são fundamentais para o estudo da matemática no ensino médio e superior.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIAS ATIVAS NA APRENDIZAGEM

Visto que os livros didáticos pouco evoluíram no ensino da álgebra, caberia então, ao professor, inovar suas aulas proporcionando uma experiência mais agradável e mais produtiva colocando o aluno como personagem principal no processo de ensino - aprendizagem.

O aluno precisa pensar de forma autônoma para atingir os objetivos de aprendizagem requeridos. Assim, as metodologias ativas tem ganhado destaque neste sentido pois elas oferecem uma experiência de aprendizagem na qual o aluno caminha no seu ritmo e chega às suas conclusões de forma independente, compartilhando uns com os outros para que todos cheguem ao mesmo objetivo de aprendizagem.

Existem diversas metodologias centradas nos estudantes que podem tornar as aulas mais interativas, mais participativas e mais significativas. Elas são comumente chamadas de "metodologias ativas".

As metodologias ativas na aprendizagem são uma forma de abordagem pedagógica que tem como objetivo tornar o aluno o protagonista do seu próprio processo de aprendizagem visando incentivar o aluno a ser ativo na busca pelo conhecimento, fazendo com que ele desenvolva habilidades como pensamento crítico, autonomia, criatividade e trabalho em equipe.

Essas metodologias são baseadas em uma visão de que o conhecimento é construído de forma colaborativa, e que o aluno é um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento. Elas buscam estimular a participação dos alunos na construção do seu aprendizado, através de atividades práticas, debates, trabalhos em grupo, pesquisa e outras atividades que promovem a reflexão e a interação entre os alunos e o professor e, dependendo de características específicas levam nomes e abordagens diferentes.

As metodologias ativas na aprendizagem têm sido cada vez mais adotadas por escolas e universidades em todo o mundo, como forma de tornar o processo de ensino mais dinâmico, participativo e efetivo. Elas têm se mostrado eficazes na promoção do engajamento dos alunos no processo de aprendizagem, na melhoria da compreensão dos conteúdos e na preparação dos alunos para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Dentre as muitas metodologias ativas existentes, abordaremos apenas as duas que utilizaremos na sequência didática proposta: a metodologia *peer instruction* (PI) e a *gamificação*, esta de forma indireta.

3.1 Aprendizagem em grupos ou peer instruction

A metodologia denominada *Peer Instruction*, que em uma tradução informal, poderia ser "instrução em pares" ou "aprendizagem em grupos" foi desenvolvida pelo professor Eric Mazur, na Universidade de Harvard, na década de 90.

Segundo Müller et al. (2017), o professor Eric Mazur, lecionava nos cursos de introdução a física entre os anos de 1984 e 1990, com aulas expositivas e demonstrações seguidas de exercícios mecânicos com aplicação direta de fórmulas, na maioria das vezes memorizadas. Mazur após ter contato com o teste, "Force Concept Inventory" (FCI), percebeu que mudanças no processo de ensino e aprendizagem eram necessárias:

> Entre os anos de 1984 e 1990, Mazur ensinava seus estudantes, em cursos introdutórios de Física, de maneira convencional, com aulas expositivas acompanhadas de demonstrações. De maneira geral, seus estudantes tinham um desempenho bom em resolução de problemas considerados difíceis e avaliavam as aulas de maneira positiva. Ao aplicar o FCI em uma turma de graduandos em Física de Harvard, Mazur percebeu alguns alertas. O primeiro veio por meio de uma pergunta feita por uma estudante: "Professor Mazur, como devo responder a essas questões? De acordo com o que o senhor ensinou ou conforme o meu jeito de pensar a respeito dessas coisas?". Apesar do alerta, os estudantes tiveram um desempenho um pouco superior no FCI do que obtiveram em um exame de metade do semestre da disciplina. (MÜLLER, 2017, p. 3).

A partir disto o professor passou a colocar em suas provas questões qualitativas simples e questões quantitativas difíceis o que fez com que percebesse que boa parte dos estudantes conseguia resolver as questões difíceis atingindo conceitos relativamente altos, porém, as questões de caráter qualitativas simples não apresentavam desempenhos adequados. Deste modo podia-se ter uma falsa impressão de que a aprendizagem foi satisfatória.

A aprendizagem em grupos é baseada na ideia de que, ao discutir e explicar conceitos uns aos outros, os alunos não apenas consolidam o conhecimento, mas também aprendem a aplicá-lo de maneira mais eficaz. Além disso, a metodologia incentiva a participação ativa dos alunos, aumentando o engajamento e a motivação. Esta metodologia é amplamente utilizada em disciplinas de ciências e matemática, mas pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento. No entanto, é importante que os professores sejam treinados e estejam familiarizados com a metodologia para aplicá-la de maneira eficaz.

Para aplicar a metodologia ativa PI, é de extrema importância que o professor seja um facilitador, incentivando os alunos a participarem ativamente e a trabalharem juntos para alcançar uma compreensão mais profunda do conceito. O professor também pode ajustar a dificuldade das perguntas e fornecer devolutivas para garantir que os alunos estejam progredindo. A metodologia pode ser aplicada em diversos níveis de escolaridade, fazendo as devidas adaptações de conceitos e conteúdos a serem trabalhados. Além disso, é importante que o professor crie um ambiente seguro e respeitoso para que os estudantes possam expressar suas ideias e opiniões livremente, tanto nos grupos quanto individuais.

Segundo Müller et al. (2017) a proposta de metodologia de Mazur (1997) pode ser sintetizada pelos passos:

> 1. Uma curta apresentação oral sobre os elementos centrais de um dado conceito ou teoria é feita por cerca de 20 minutos.
> 2. Uma pergunta de múltipla escolha, geralmente conceitual, denominada Teste Conceitual, é colocada aos alunos sobre o conceito (teoria) apresentado na exposição oral.
> 3. Os alunos têm entre um e dois minutos para pensarem silenciosamente sobre a questão apresentada.
> 4. Os estudantes registram suas respostas individualmente e as mostram ao professor usando algum sistema de respostas (por ex., clickers ou flashcards).
> 5. De acordo com a distribuição de respostas, o professor pode passar para o passo seis (quando a frequência de acertos está entre 35% e 70%), ou diretamente para o passo nove (quando a frequência de acertos é superior a 70%).
> 6. Os alunos discutem a questão com seus colegas por um a dois minutos.
> 7. Os alunos registram suas respostas revisadas e as mostram ao professor usando o mesmo sistema de respostas do passo 4.
> 8. O professor tem um retorno sobre as respostas dos alunos a partir das discussões e pode apresentar os resultados para os alunos.
> 9. O professor então explica a resposta da questão aos alunos e pode ou apresentar uma nova questão sobre o mesmo conceito ou passar ao próximo tópico da aula, voltando ao primeiro passo.

Com o tempo, o método de ensino foi aperfeiçoado através da aplicação por outras pessoas. Uma das mudanças foi a inclusão de leituras e questionários prévios para que assim, pudessem compreender os temas que seriam abordados. O professor Mazur teve sucesso com sua inovadora abordagem de ensino e seus métodos têm sido comprovadamente eficazes no processo de ensino e aprendizagem, se bem aplicados. Caso queira conhecer mais sobre a metodologia *Peer Instruction* o leitor pode baixar o manual do usuário na página do professor Mazur.

Após a pandemia, constata-se uma crescente utilização de metodologias ativas por parte dos docentes, uma vez que estes tiveram que redefinir a prática educativa, levando a um uso cada vez mais frequente e aprimorado dessas estratégias de ensino.

Ravera (2019, p. 83), no que se diz respeito as metodologia PI relata que "Os alunos gostaram do novo ambiente gerado em sala, tendo mais diálogo e interação".

Já Rachelli (2020 p. 3) destaca que:

> Embora a metodologia Peer Instruction venha sendo apontada como um dos possíveis caminhos para colocar os alunos em um papel ativo diante do conhecimento científico e do processo de aprendizagem, no Brasil, há poucas pesquisas realizadas na área de Educação Matemática para avaliar os efeitos potenciais na aprendizagem dos alunos.

Isto mostra que precisamos incentivar os demais colegas, professores, a importância de ensinar utilizando metodologias ativas, para que possamos medir com mais eficácia os efeitos da metodologia aplicada a educação, especialmente a educação matemática.

É importante observar que independente da metodologia adotada, o professor deve conduzir o processo de ensino e aprendizagem de modo a observar o desenvolvimento dos seus alunos, fazendo as adaptações para atender as particularidades da turma. É de responsabilidade do professor garantir o acesso a aprendizagem significativa criando e/ou modificando suas estratégias quando se fizer necessário.

3.2 Gamificação

Outra metodologia ativa que ganhou destaque, principalmente durante a pandemia da Covid-19, foi a gamificação devido a sua utilização nas aulas remotas. Mas a gamificação pode ser usada tanto nas aulas presenciais quanto nas aulas remotas, inclusive pode ser utilizada de maneira assíncrona.

A gamificação é uma técnica de ensino que utiliza jogos em seu contexto educacional. Embora o uso de jogos no ensino não seja uma prática nova, o termo "gamificação"é relativamente recente e se popularizou com o avanço das tecnologias digitais. De fato, a ideia de ensinar através de jogos é algo presente há muito tempo nas escolas, sendo citada nos PCN's como uma estratégia pedagógica que pode ser utilizada em diversas disciplinas. No entanto, a gamificação traz uma abordagem diferenciada, na qual os jogos são projetados especificamente para transmitir conceitos e habilidades específicas, enquanto jogos lúdicos, na sua essência, focam mais na distração e passatempo. A gamificação, portanto, pode ser vista como uma evolução da utilização de jogos no ensino, pois busca explorar o potencial pedagógico dos jogos de maneira mais intencional e estruturada.

A abordagem ativa proposta pela gamificação, envolve os jogadores na experiência do jogo traçando metas pessoais e conhecendo seu potencial. Isto gera mudanças comportamentais tanto do pensar quanto do agir. Acredita-se que os principais motivadores destas mudanças comportamentais decorrem dos desafios, recompensas, avanço de níveis e devolutiva instantânea proporcionando ao estudante menos constrangimento em errar. Esta metodologia é amplamente utilizada tanto em ambientes corporativos quanto em ambientes educacionais e, dependendo dos objetivos de aprendizagem, estas mudanças no pensar e no agir, são muito significativas positivamente.

Na sala de aula, a gamificação tem sido amplamente utilizada como uma ferramenta pedagógica eficaz, pois aumenta a motivação, a participação e o rendimento dos alunos em matérias como matemática, ciências e línguas. Além disso, a gamificação pode ser útil para ajudar os alunos a desenvolver habilidades importantes, como resolução de problemas, pensamento crítico e trabalho em equipe, além de ajudar na concentração dos estudantes e ser uma alternativa para alguns casos de estudantes com necessidades especiais. Alguns dos benefícios da gamificação incluem, segundo Bussarello (2016):

- **Motivação**: A gamificação pode ajudar a aumentar a motivação e o interesse dos estudantes em tarefas escolares que eles possam considerar chatas ou desafiadoras. Os jogos despertam nos estudantes a vontade de mudar para a próxima fase, que mesmo sendo difícil, os levam a uma recompensa maior ao fim do jogo.
- **Habilidades sociais**: Jogos que envolvam trabalho em equipe e consequentemente interação social, podem ajudar a desenvolver habilidades sociais de comunicação dos estudantes. Assim, os estudantes percebem que as interações entre eles produzem melhores resultados.
- **Desenvolvimento de habilidades**: Muitos jogos gamificados podem desafiar os estudantes, colocando-os a desenvolver habilidades importantes, como resolução de problemas, pensamento crítico e coordenação motora.

- **Experiência positiva**: A gamificação aumenta a autoestima e o bem-estar emocional, pois no mundo virtual os estudantes se sentem mais confiantes em expressar suas necessidades e dificuldades e este alívio os motiva a querer crescer mais a cada dia.
- **Aprendizado personalizado**: A gamificação permite a adaptação a qualquer tipo de necessidades e particularidades de cada um dos estudantes e cabe ao professor personalizar o ritmo e o nível de dificuldade empregado para se adequar às necessidades de cada um deles.

Segundo Morais (2018), a gamificação tem suas raízes aplicadas em empresas, onde as técnicas de jogo eram associadas às situações corporativas. Ela foi mencionada pela primeira vez em 1984, quando Charles A. Coonradt publicou o livro "A Game of Work", que ligava as principais características dos jogos com o ambiente empresarial.

O termo gamificação, foi dado por Nick Pelling, segundo Navarro,

> A aplicação de elementos, mecanismos, dinâmicas e técnicas de jogos no contexto fora do jogo, ou seja, na realidade do dia a dia profissional, escolar e social do indivíduo, como foi visto nas situações reais citadas acima, é compreendida como gamificação, que é a tradução do termo gamification criado pelo programador britânico Nick Pelling, em 2003. (NAVARRO, 2013, p. 8)

A gamificação preenche o vazio do ócio e, se ela tiver objetivos bem definidos, pode ser usada para modificar o jogador e com isto transformar o ócio em produção objetiva. Segundo McGonigal (2012), a gamificação une as pessoas, ao contrário do que a sociedade faz atualmente:

> Na sociedade atual, os jogos de computador e videogames estão satisfazendo as genuínas necessidades humanas que o mundo real tem falhado em atender. Eles oferecem recompensas que a realidade não consegue dar. Eles nos ensinam, nos inspiram e nos envolvem de uma maneira pela qual a sociedade não consegue fazer. Eles estão nos unindo de maneira pela qual a sociedade não está. (MCGONIGAL, 2012, p. 14).

A importância do uso de recursos tecnológicos na educação é tanta que a BNCC já se atentou para a importância do uso das tecnologias digitais em sua competência 5 que diz:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p.9).

Para que se tenha sucesso na aplicação da gamificação em sala de aula é necessário que tenha em mente os seguintes passos:

- **Objetivos de aprendizagem**: Esta parte é a primeira a ser pensada pois o foco do professor, é que o aluno aprenda, não encarando como um jogo ou diversão, mas sim oportunidade de aprender de forma divertida. Assim, defina claramente o que você quer que os alunos aprendam com o jogo.
- **Seleção do jogo**: O professor deve pensar em qual tipo de jogo pode ser pensado/adaptado que cumpram com objetivos de aprendizagem e ainda que se encaixe na faixa etária de seus alunos, que é seu público alvo.
- **Definição da narrativa e regras do jogo**: Dependendo do jogo pode ser necessário que seja desenvolvido uma história para o jogo bem como as regras de como ele será jogado.
- **Design do jogo**: a aparência do jogo é fundamental e deve ser pensada e adequada a cada faixa etária pois os interesses dos estudantes mudam conforme suas idades mudam. Neste contexto, crie um esboço visual do jogo, incluindo as atividades, níveis, desafios, e recompensas. use cores e/ou desenhos que despertem interesse em jogar.
- **Desenvolvimento, testes e ajustes**: Se for a primeira vez que utilizará o jogo, desenvolva de acordo com o design criado, fazendo os testes em pequenos grupos e faça os ajustes necessários, caso seja possível a modificação.
- **Implementação**: Use o jogo em sala de aula com todos os alunos e monitore a progressão deles ao longo do jogo.
- **Avaliação**: Avalie os resultados obtidos com o uso do jogo e verifique se os objetivos de aprendizagem foram alcançados. Peça para que eles também façam a autoavaliação pois eles precisam fazer parte deste processo também. Não esqueça que as devolutivas, individuais e/ou coletivas, são importantes para que os alunos fiquem motivados a participar e melhorar as interações no jogo, com os colegas e com o professor.

Segundo Barbosa (2021), é fundamental esclarecer que a gamificação não pressupõe a necessidade de que os indivíduos envolvidos joguem ou utilizem brinquedos e/ou jogos eletrônicos. Na verdade, a gamificação refere-se a uma abordagem que utiliza elementos e mecânicas de jogos em contextos que vão além do lazer, como a educação, o treinamento profissional e a resolução de problemas complexos. Essa técnica tem ganhado destaque nos últimos anos, pois pode contribuir para o aumento da motivação, do engajamento e da retenção de conhecimento dos participantes. Barbosa ainda menciona o uso de tecnologias móveis nas quais ele define:

> A aprendizagem móvel, também chamada de Mobile Learning ou M-Learning, é definida pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) como o ensino que envolve o uso de aparelhos digitais e portáteis. Esse aprendizado permite que o conhecimento seja encontrado de forma ubíqua, ou seja, não apenas na sala de aula, com um professor, mas a qualquer hora e em qualquer lugar.

Assim, a gamificação pode ser empregada em diversos ambientes em que o estudante esteja disposto a utilizá-la, desde que haja acesso ao jogo. Além disso, a utilização de metodologias ativas é capaz de incentivar a participação ativa dos alunos, elevando a motivação e a retenção de conhecimento.

Nesse sentido, juntamente com a gamificação, a PI se destaca como uma estratégia que favorece a colaboração e o diálogo entre os estudantes, enquanto o uso de jogos em sala de aula cria um ambiente estimulante de desafio e competição saudável, que contribui para a participação ativa e a motivação dos alunos. Deste modo, no próximo capítulo será apresentada uma sequência didática que utiliza algumas dessas estratégias de ensino.

CAPÍTULO 4

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Considerando o baixo rendimento escolar dos estudantes após a pandemia, propomos uma metodologia que combina duas ferramentas, uma física e outra digital, para aprimorar o processo de ensino de maneira lúdica e divertida. Dessa forma, os alunos terão mais liberdade para expressar suas ideias e se envolver uns com os outros, além de trazer o mundo digital para a sala de aula e, assim, chamar a atenção dos estudantes que são mais interessados e familiarizados com estas tecnologias.

A proposta de sequência didática compreende um total 6 horas-aula distribuídas em três encontros de 2 horas-aula cada um. Como é uma proposta baseada em vivência de sala de aula, cabe ao professor regente adapta-la, inclusive alterando a quantidade de aulas previstas, de acordo com as necessidades de seus estudantes.

Em uma aula anterior ao início da sequência proposta, o professor entrega um material direcionador de uma revisão sobre alguns conceitos que serão abordados nas próximas aulas. Este material, pode ser uma vídeo aula, ou até impresso e caso haja dúvidas, eles podem complementar pesquisando na internet sobre os temas:

- Classificação de formas geométricas de acordo com seus lados (triângulos e seus tipos, quadriláteros e seus tipos, etc.);
- Perímetro e área de formas geométricas planas;
- Expressões algébricas e suas operações.

Mesmo que nem todos os alunos pesquisem o material fornecido, este material poderá deixar os estudantes mais confortáveis em conhecer os temas que aparecerão nas próximas aulas.

Os materiais e estruturas necessários para o desenvolvimento da sequência didática proposta, incluem um Tangram para cada estudante no momento apropriado. Caso não haja Tangram suficiente para todos, o professor deverá providenciar, no mínimo, um conjunto de Tangram por grupo formado. Por exemplo, se a turma for composta por 40 alunos divididos em grupos de quatro integrantes, serão necessários no mínimo dez jogos. Se o professor desejar reduzir os custos ainda mais, é possível imprimir os Tangram em papel para serem utilizados em sala de aula ou fornecer papel para que os alunos construam o seu próprio Tangram durante o processo de construção. Se a escola tiver recursos tecnológicos, como computadores e acesso à internet para apresentação de slides, o professor pode conduzir quase todo o processo digitalmente, coletando respostas através do Google Forms ou plataformas similares, o que facilita a coleta e contabilização de respostas corretas e incorretas. No entanto, caso não haja infraestrutura suficiente, o professor deve providenciar placas de identificação com as escolhas A, B, C e D para que os alunos possam levantá-las de acordo com as respostas escolhidas por eles.

Os três encontros propostos serão assim desenvolvidos: No primeiro encontro, os alunos respondem um questionário inicial, o professor conta sobre uma das lenda do Tangram e os alunos constroem figuras planas para se familiarizar com o Tangram. No segundo encontro, após a nova distribuição de grupos, é explicada a metodologia PI em seguida ela será desenvolvida com perguntas perímetros com expressões algébricas, finalizando com uma atividade de fixação. No terceiro encontro, a metodologia PI é desenvolvida novamente com perguntas sobre áreas com expressões algébricas seguida de um jogo. Para finalizar este terceiro encontro, o mesmo questionário do primeiro encontro será aplicado para verificar a evolução dos conteúdos abordados.

4.1 Primeiro encontro

Este primeiro encontro terá duração de 2 horas-aulas totalizando 100 minutos e será dividido em seis etapas, conforme descrito a seguir.

Etapa 1. Conversa inicial (Duração sugerida: 10 minutos): O professor conduzirá uma conversa inicial onde explicará o decorrer dos encontros e fará um breve comentário sobre o material que foi disponibilizado na aula anterior ressaltando os principais pontos.

Etapa 2. Questionário Diagnóstico (duração sugerida: 20 min): Os alunos devem ser orientados a responder o questionário do Anexo A que trata de conhecimentos sobre os temas propostos para a pesquisa.

Etapa 3. Sorteio dos grupos (duração sugerida: 5 min): Nesta etapa os professor irá fazer o sorteio de grupos com até quatro estudantes. por papéis com os nomes dos alunos ou caso a escola tenha internet, pode ser usado sorteadores online que são facilmente encontrados na internet.

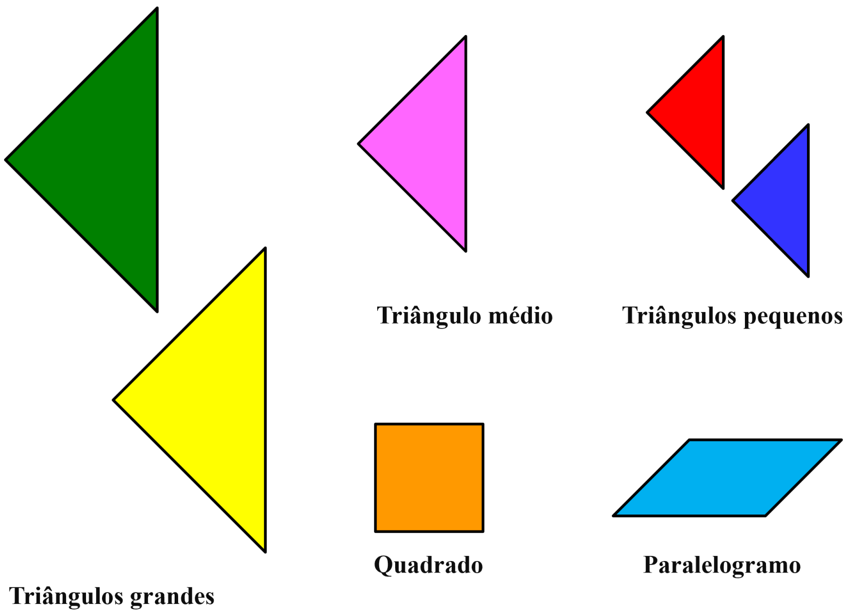
Etapa 4. Lenda do Tangram (duração sugerida: 5 min): Nesta etapa o professor irá apresentar o Tangram aos estudantes contando uma de suas lendas. Miranda e Duarte (2011) descreve:

> Uma delas diz que o Tangram foi inventado por um jovem chinês que ao despedir-se de seu mestre para sua viagem pelo mundo, recebeu um espelho de formato quadrado. Seu mestre pediu para que ele registrase tudo o que visse nesse espelho para mostra-lhe na volta da viagem. O discípulo indagou seu mestre, questionando de que forma poderia registrar a viagem apenas com um simples espelho. No mesmo momento, o espelho caiu de suas mãos quebrando-o em sete peças e então o mestre disse: "Agora, com essas sete peças, você poderá construir figuras para ilustrar o que verá durante a viagem". E assim o jovem foi ilustrando as figuras que foi vendo, através das peças do espelho. Após essa descoberta os chineses batizaram o espelho quebrado em sete peças de Tangram. (MIRANDA; DUARTE, 2011, p. 2)

Após contar a lenda o professor pode explicar a construção matemática do Tangram a partir de um quadrado desenhado no papel.

Etapa 5. Conhecendo as peças do Tangram (duração sugerida: 25 min) O professor distribui um Tangram físico para cada grupo e define-se os nomes destas peças e como as mesmas serão referidas durante as aulas. O Tangram é composto por 5 Triângulos, sendo dois grandes, um médio e dois pequenos, um quadrado e um paralelogramo como mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1: *Peças do Tangram com seus respectivos nomes*

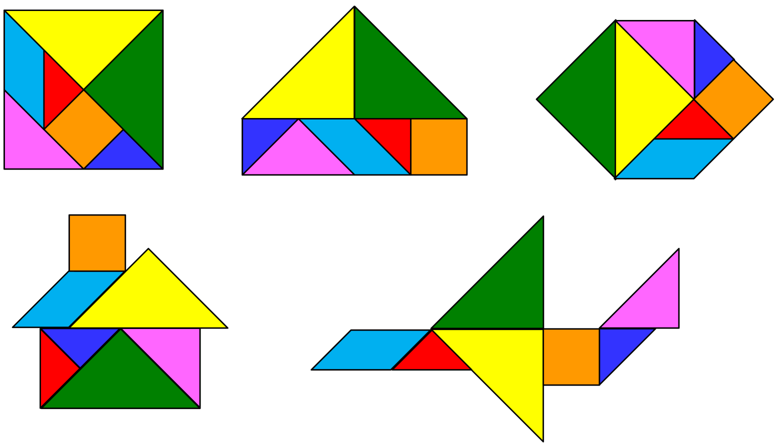


Fonte: autoria própria

O professor deverá orientar os alunos que as construções com o Tangram deve obedecer duas regras. Primeiro é que todas as peças são usadas nas construções com o Tangram e segundo é que nenhuma peça pode se sobrepor a outra, isto é as peças se encaixam lateralmente mas nunca uma sobre a outra.

No intuito de trazer a memória as principais forma planas, o professor pode citar o nome de algumas formas que sejam possíveis de construir com o Tangram (triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, ...). Assim o estudante pode relembrar algumas formas e assim facilitar a comunicação dos comandos a serem dados pelo professor. Algumas formas geométricas são mostradas na Figura 4.2.

Figura 4.2: *Formas diversas com o Tangram*



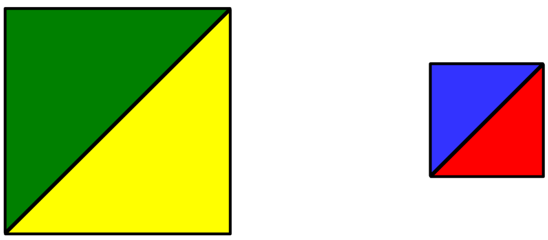
Fonte: autoria própria

Etapa 6. Desafios com o Tangram (duração sugerida: 35 min) Os alunos participarão dos desafios de construção de formas planas seguindo as orientações do professor. Apresentamos a seguir algumas sugestões de desafios e suas soluções.

1. Construa, com exatamente duas peças, um quadrado.

   Solução: O quadrado com duas peças pode ser obtido de duas maneiras. Veja as duas construções na Figura 4.3 onde são formadas com os dois triângulos pequenos ou com os dois triângulos grandes.

Figura 4.3: *Quadrado com duas peças do Tangram*

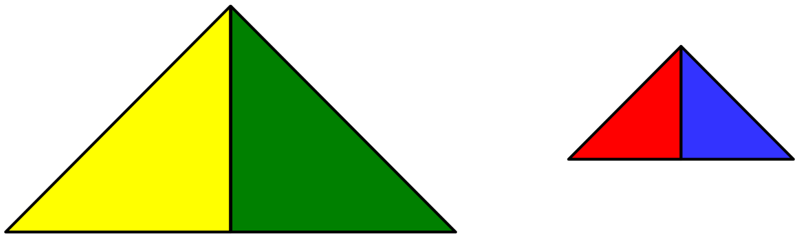


Fonte: autoria própria

2. Construa, com exatamente duas peças, um triângulo.

   Solução: Da mesma forma, o triângulo com duas peças pode ser obtido de duas maneiras. Uma com os dois triângulos pequenos e outra com os dois triângulos grandes conforme mostramos na Figura 4.4.
   Ressalte com os alunos, na devolutiva das respostas, que com dois triângulos sempre é possível formar, um quadrado ou um triângulo maior. E saber destes conceito poderá ajudar nas próximas atividades.

   Figura 4.4: *Triângulo com duas peças do Tangram*

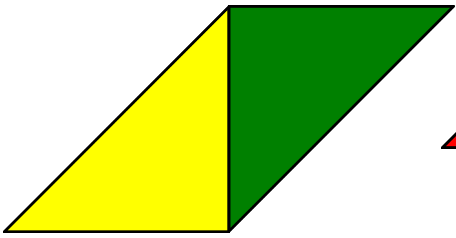
   

   Fonte: autoria própria

3. Construa, com exatamente duas peças, um paralelogramo que não seja quadrado e nem retângulo.

   Solução: podemos obter o paralelogramo pedido, conforme mostramos na Figura 4.5 utilizando as mesmas peças do desafio anterior.

   Figura 4.5: *Paralelogramo com duas peças do Tangram*

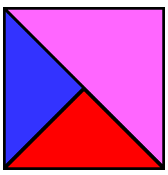
   

   Fonte: autoria própria

4. Construa, com exatamente três peças, um quadrado.

   Solução: podemos obter o quadrado pedido, conforme mostramos na Figura 4.6 utilizando dois triângulos pequenos e um triângulo médio.

   Figura 4.6: *Quadrado com três peças do Tangram*

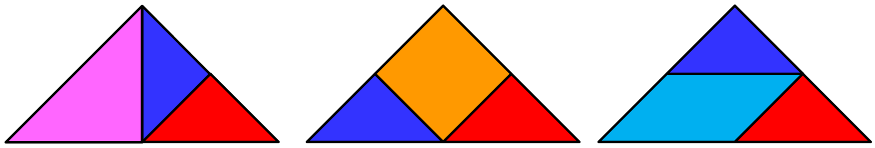
   

   Fonte: autoria própria

5. Construa, com exatamente três peças, um triângulo.

   Solução: podemos obter o triângulo do desafio, utilizando dois triângulos pequenos e um triângulo médio conforme mostra a Figura 4.7. Ainda nesta figura, note também que podemos substituir o triângulo médio por um quadrado ou um paralelogramo do Tangram e ainda assim conseguimos formar o triângulo pedido.

Figura 4.7: *Triângulo com três peças do Tangram*

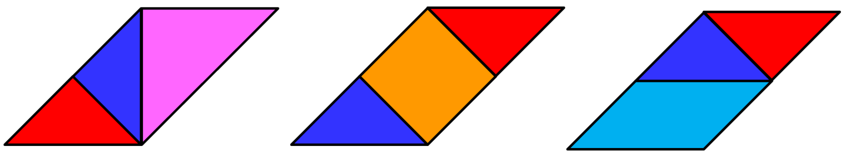


Fonte: autoria própria

6. Construa, com exatamente três peças, um paralelogramo não retângulo.

   Solução: podemos obter o paralelogramo utilizando as mesmas peças do desafio anterior conforme mostra a Figura 4.8.

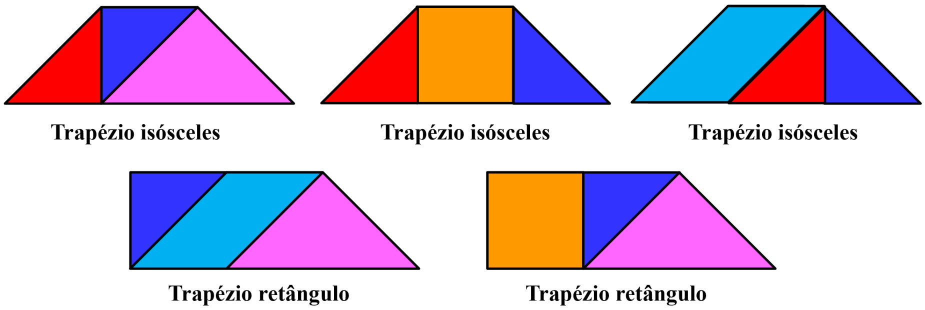
Figura 4.8: *Paralelogramo com três peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

7. Construa, com exatamente três peças, um trapézio.
   Solução: Existem três classificações para um trapézio, que são: trapézio isósceles, trapézio retângulo e trapézio escaleno. É possível construir um trapézio isósceles ou um trapézio retângulo, não sendo possível construir com o Tangram o trapézio escaleno. Veja algumas das maneiras de construir alguns trapézios na Figura 4.9.

Figura 4.9: *Trapézio com três peças do Tangram*

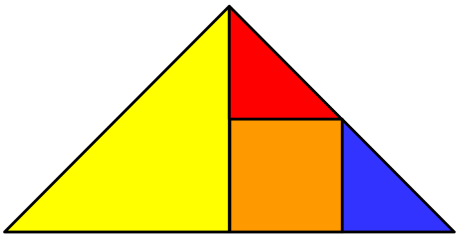


Fonte: autoria própria

8. Construa, com quatro peças, um triângulo.

   Solução: podemos obter o triângulo conforme mostramos na Figura 4.10.

Figura 4.10: *Triângulo com quatro peças do Tangram*

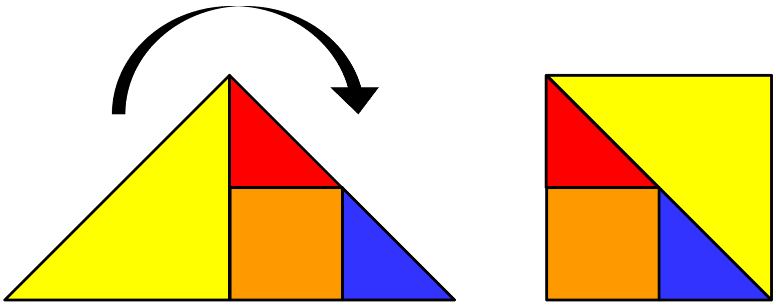


Fonte: autoria própria

9. Construa, com quatro peças, um quadrado.

   Solução: Com o triângulo de 4 peças montado, giramos o triângulo grande encaixando o maior lado no maior lado oposto até que forme o quadrado. Veja a Figura 4.11.

Figura 4.11: *Quadrado com quatro peças do Tangram*

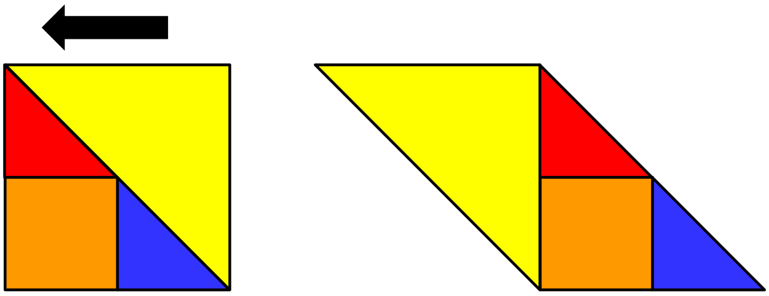


Fonte: autoria própria

10. Construa, com quatro peças, um paralelogramo, não retângulo.

    Solução: Com o quadrado de 4 peças montado, deslocamos o triângulo grande encaixando-o em um dos lados congruentes no lado oposto, conforme a Figura 4.12.

Figura 4.12: *Paralelogramo com quatro peças do Tangram*

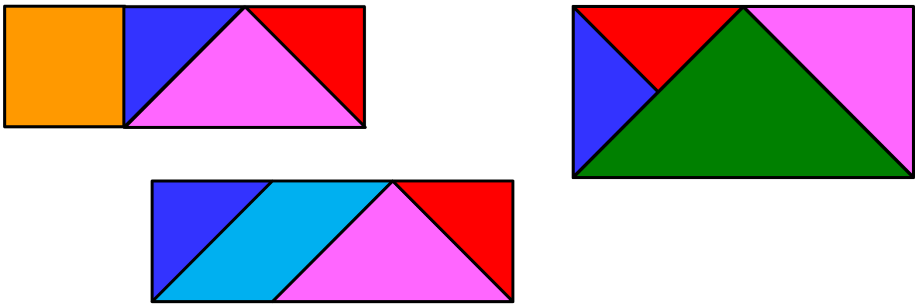


Fonte: autoria própria

11. Construa, com quatro peças, um retângulo.

    Solução: Algumas construções de retângulo estão na Figura 4.13.

Figura 4.13: *Retângulo com quatro peças do Tangram*

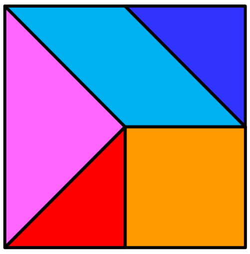


Fonte: autoria própria

12. Construa, com cinco peças, um quadrado.

    Solução: O quadrado com cinco peças pode ser construído ficando de fora apenas os dois triângulos grandes, conforme mostra a Figura 4.14.

Figura 4.14: *Quadrado com cinco peças do Tangram*

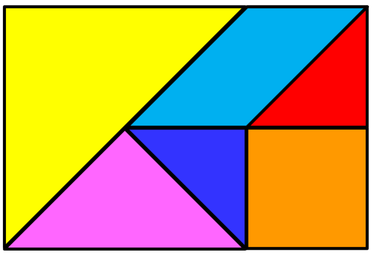


Fonte: autoria própria

13. Construa, com seis peças, um retângulo.

    Solução: O retângulo com seis peças pode ser construído ficando de fora apenas um dos triângulos grandes, conforme mostra a Figura 4.15.

Figura 4.15: *Retângulo com seis peças do Tangram*

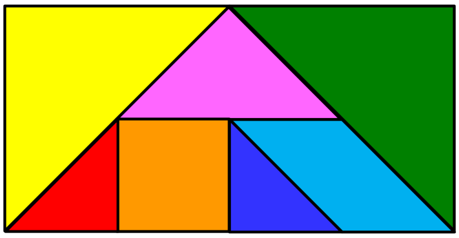


Fonte: autoria própria

14. Construa, com as sete peças, um retângulo.

    Solução: O retângulo com todas as peças pode ser construído, conforme mostra a Figura 4.16. Veja que pode ser construído com mais de uma configuração das peças.

Figura 4.16: *Retângulo com sete peças do Tangram*

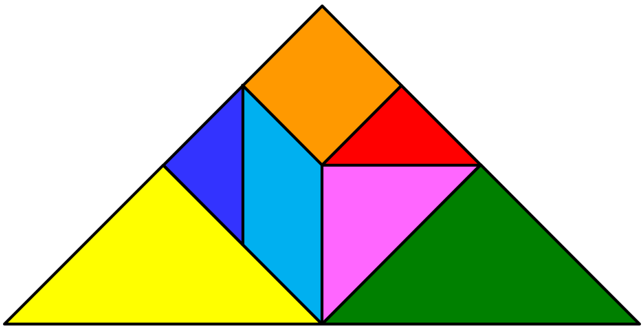


Fonte: autoria própria

15. Construa, com as sete peças, um triângulo.

    Solução: O triângulo com todas as peças pode ser construído, conforme mostra a Figura 4.17.

Figura 4.17: *Triângulo com sete peças do Tangram*

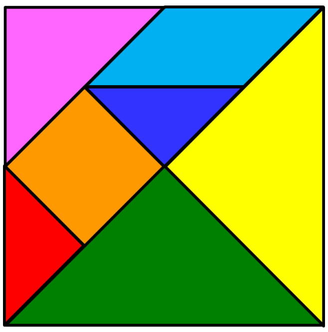


Fonte: autoria própria

16. Construa, com as sete peças, um quadrado.

    Solução: O quadrado com todas as peças pode ser construído, conforme mostra a Figura 4.18.

Figura 4.18: *Quadrado com as sete peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

Esperamos que, ao final deste primeiro encontro, os estudantes tenham tido uma experiência de manipulações com o Tangram para que estejam à vontade para trabalhar com ele nas próximas aulas.

4.2 Segundo encontro

Em nosso segundo encontro de duas horas-aula, totalizando 100 minutos, utilizaremos a metodologia PI para responder 10 questões de múltipla escolha sobre perímetro de formas com Tangram envolvendo expressões algébricas. Os tempos de discussão sugeridas pela metodologia PI pode ser adaptados complexidade das perguntas. O professor deverá fornecer uma folha de cartão resposta, conforme o Anexo B para cada aluno para que eles registrem as informações descobertas durante a realização da atividade referente a metodologia PI.

No desenvolvimento da metodologia PI, sugerimos que cada aluno tenha seu próprio Tangram para facilitar algumas manipulações. Caso o professor não tenha para todos, orientar os alunos a construir em papel e recortar conforme sugerido no início do capítulo.

Para finalizar, utilizaremos uma lista com cinco exercícios a serem respondidas pelos grupos, para fixação dos conceitos apresentados.

Este encontro será desenvolvido em 6 etapas.

Etapa 1. Conversa inicial (Duração sugerida: 15 minutos) Nesta conversa inicial explicaremos como funcionará a metodologia PI e como os alunos contribuirão para as respostas.

O professor deve orientar que irá fazer uma separação dos grupos novamente, mas deixar claro que na metodologia PI, a primeira resposta de cada uma das perguntas, deverá ser pensada por até dois minutos e respondida individualmente. Assim, caso a quantidade de acertos seja superior a 70%, o professor confirma a resposta comentando os principais pontos e passa para a próxima pergunta. Todavia, se o número de acertos estiver menor que 70% o professor orienta que os estudantes discutam a questão e sua resposta nos grupos, por até dois minutos, para que cheguem a um consenso sobre qual alternativa marcar. Novamente se o número de acertos for superior a 70%, o professor confirmará a resposta e fará comentários, se necessário. Se mesmo assim as respostas estiverem incorretas ou muito divergentes, o professor fará uma correção de conceitos para que os mesmos cheguem a respostas corretas.

Etapa 2. Separação dos grupos (Duração sugerida: 3 minutos) Neste momento o professor faz a separação dos grupos com até 4 integrantes através de sorteio. Ele pode ser feito por plataformas de sorteio online ou papéis com nome dos alunos.

Etapa 3. Distribuição nos grupos (Duração sugerida: 3 minutos) O professor distribui um conjunto de Tangram para cada integrante do grupo formado.

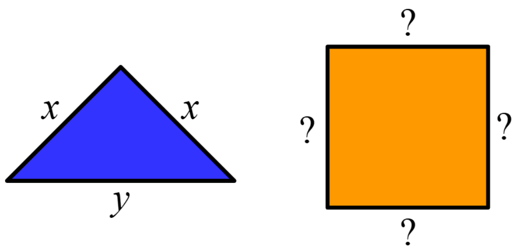
Etapa 4. Metodologia PI em ação (Duração sugerida: 60 minutos) O professor desenvolve efetivamente a metodologia PI seguido os 9 passos.

Passo 1. O professor inicia o passo 1 da metodologia PI explorando os conceitos relacionados ao objeto de estudo com duração de 10 minutos. É importante que o professor relembre o que foi trabalhado no encontro anterior e com isto possa relacionar as formas construídas com o Tangram ao cotidiano do aluno. Não será difícil perceber que existem casas, lotes, telhados, etc., que traduzem algumas das figuras vistas.

Passo 2. Neste passo o professor irá fazer uma pergunta de múltipla escolha. A seguir a pergunta inicial sugerida.

Questão 1. A Figura 4.19 mostra duas peças de um Tangram. Uma delas é um dos triângulos pequenos e a outra é o quadrado.

Figura 4.19: *Triângulo pequeno e quadrado do Tangram*



Fonte: autoria própria

Sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno do Tangram são representadas pelos monômios x, x e y, quais as representações que deverão ter as medidas dos lados do quadrado que compõem o Tangram?

(A) x, x, x, x.
(B) x, x, y, y.
(C) y, y, y, y.
(D) $x + y$, $x + y$, $x + y$, $x + y$.

Passo 3. Os alunos pensam, silenciosamente e individualmente sobre a pergunta por até 1 minuto.

Passo 4. Os alunos registram suas respostas pelo meio escolhido pelo professor. As plaquinhas numeradas ou as plataformas digitais.

Passo 5. O professor verificará as respostas dadas e avançará para o próximo passo, se o número de acertos for menor que 70%, ou avançará para o passo 9 se o número de acertos for superior a 70%.

Passo 6. O professor deve agora fornecer um tempo de até 2 minutos para que os alunos discutam no seu grupo e cheguem a um consenso sobre a resposta a ser marcada.

Passo 7. O professor refaz a pergunta novamente e os alunos registram novamente suas respostas pelo mesmo meio usado no passo 4.

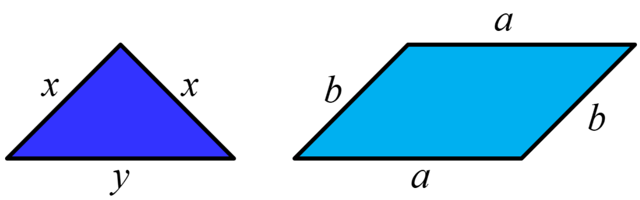
Passo 8. O professor recebe o retorno das respostas dos alunos e em seguida verifica se as respostas apresentadas superaram os 70%. Se sim, deverá avançar para o passo 9. Porém, se este número de acertos for abaixo de 70% o professor deve revisar os conceitos gerais explicando detalhadamente a questão e, após isso, avançar para o passo 9.

Passo 9. O professor confirma a resposta e tira eventuais dúvidas que ficarem. Em seguida solicita aos estudantes que anotem esta medidas no cartão de respostas do grupo conforme o Anexo B. Então apresenta uma nova questão se for o caso até que os objetivos da aprendizagem sejam cumpridos.

Algumas outras questões que podem ser usadas para repetição dos passos da metodologia PI estão relacionadas a seguir:

Questão 2. A Figura 4.20 mostra duas peças de um Tangram. Uma delas é um dos triângulos pequenos e a outra é o paralelogramo.

Figura 4.20: *Triângulo pequeno e paralelogramo.*



Fonte: autoria própria

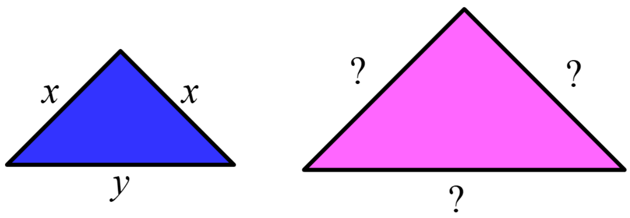
Sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno do Tangram são representadas pelos monômios x, x e y, podemos afirmar que as medidas de a e b são respectivamente?

(A) x e y.

(B) y e x.
(C) y e y.
(D) x e x.

Questão 3. A Figura 4.21 mostra duas peças de um Tangram. Uma delas é um dos triângulos pequenos e a outra é o triângulo médio.

Figura 4.21: *Triângulo pequeno e triângulo médio.*



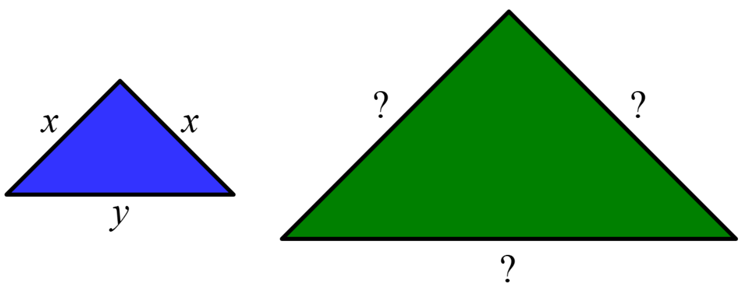
Fonte: autoria própria

Sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno do Tangram são representadas pelos monômios x, x e y, podemos afirmar que as medidas dos lados do triângulo médio são:

(A) x, x e $2y$.
(B) y, y e $2x$.
(C) x, x e $2x$.
(D) y, y e $2y$.

Questão 4. A Figura 4.22 mostra duas peças de um Tangram. Uma delas é um dos triângulos pequenos e a outra é um dos triângulos grandes.

Figura 4.22: *Triângulo pequeno e triângulo grande.*



Fonte: autoria própria

Sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno do Tangram são representadas pelos monômios x, x e y, podemos afirmar que as medidas dos lados do triângulo grande são:

(A) $2x$, $2x$ e $2y$.

(B) $2y$, $2y$ e $2x$.
(C) $2x$, $2x$ e $2x$.
(D) $2y$, $2y$ e $2y$.

Questão 5. Qual das seguintes opções melhor define o perímetro de uma forma geométrica plana?

(A) A medida da área interna de uma forma geométrica.
(B) A distância entre dois pontos específicos na figura.
(C) A medida da extensão total da linha que delimita a figura.
(D) O comprimento total da diagonal da figura.

Questão 6. Qual a expressão algébrica representa o perímetro P do triângulo pequeno do Tangram sabendo que as medidas de seus lados são x, x e y?

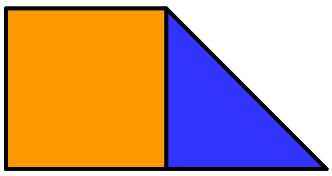
(A) $P = 2x + y$.
(B) $P = 2x + 2y$.
(C) $P = x^2 + y$.
(D) $P = 2xy$.

Questão 7. Qual a expressão algébrica representa o perímetro P do quadrado do Tangram sabendo que a medida dos lados do triângulo pequeno são x, x e y?

(A) $P = 2x + y$.
(B) $P = 4y$.
(C) $P = 4x$.
(D) $P = 2x + 2y$.

Questão 8. A Figura 4.23 mostra um trapézio retângulo construído com um triângulo pequeno e o quadrado do Tangram.

Figura 4.23: *Trapézio retângulo com duas peças do Tangram.*



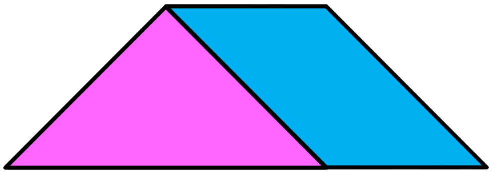
Fonte: autoria própria

Qual a expressão algébrica que representa o perímetro P do trapézio retângulo formado com estas peças, sabendo que a medida dos lados do triângulo pequeno são x, x e y?

(A) $P = 4x + y$.
(B) $P = 6x + 2y$.
(C) $P = 6x + y$.
(D) $P = 4x + 2y$.

Questão 9. A Figura 4.24 mostra um trapézio isósceles construído com um triângulo médio e o paralelogramo do Tangram.

Figura 4.24: *Trapézio isósceles com duas peças do Tangram.*



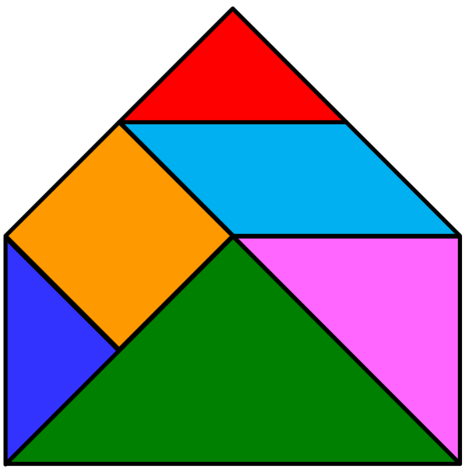
Fonte: autoria própria

Qual a expressão algébrica que representa o perímetro P do trapézio isósceles formado com estas duas peças, sabendo que a medida dos lados do triângulo pequeno do Tangram são x, x e y?

(A) $P = 4x + 2y$.
(B) $P = 2x + 4y$.
(C) $P = 4x + 4y$.
(D) $P = 6x + 3y$.

Questão 10. A Figura 4.25 mostra um pentágono construído com seis peças do Tangram.

Figura 4.25: *Pentágono com seis peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

Qual a expressão algébrica que representa o perímetro P deste pentágono, sabendo que a medida dos lados do triângulo pequeno do Tangram são x, x e y?

(A) $P = 4x + 2y$.
(B) $P = 2x + 4y$.
(C) $P = 4x + 4y$.
(D) $P = 6x + 3y$.

Perceba que esta atividade é muito ampla, pois permite construir uma enorme quantidade de figuras geométricas com duas, três ou todas as sete peças do Tangram e com isto a metodologia pode ser adaptada com mais ou menos questões dependendo da assimilação dos alunos ou o tempo destinado a atividade.

Etapa 5. Exercícios de Fixação e Aperfeiçoamento (Duração sugerida: 20 minutos) O professor entregará uma lista com 6 questões a serem respondidas por cada um dos estudantes para fixação e aperfeiçoamento dos conceitos apresentados nesta aula.

Observação 1. Colocamos uma sugestão de exercícios que podem ser trabalhados nesta lista com os alunos. Esta lista foi programada para responder individualmente, mas nada impede que possa ser realizada em grupos.

Deste modo, concluímos este segundo encontro. É de grande importância que o professor verifique as respostas e forneça comentários, uma vez que isso incentiva os alunos a realizarem as atividades com qualidade cada vez melhor. Para o próximo encontro, sugere-se que os alunos pesquisem em casa sobre os conceitos e fórmulas relacionados às áreas das principais figuras planas, pois serão empregados como ferramentas para trabalharmos com expressões algébricas.

4.3 Terceiro Encontro

No último encontro estão previstas três atividades. A primeira delas, é relacionar o produto de expressões algébricas aos conceitos de áreas, utilizando a metodologia PI, no qual o professor utilizará os mesmos recursos de coleta de respostas utilizado no encontro anterior. Esta atividade tem previsão de 50 minutos de duração. A segunda é aplicar um jogo, criado na plataforma wordwall, e a realização desta atividade depende de recursos como internet, computadores ou celulares para que cada aluno possa jogar e esta atividade tem previsão de 20 minutos de duração. A terceira atividade é que os alunos devem responder novamente a atividade do Anexo A para que depois o professor possa comparar os resultados obtidos pela proposta metodológica utilizada, com previsão de 30 minutos.

É importante ressaltar, que intervenções podem ocorrer com mais frequência, pois as operações envolvem outros conceitos que possivelmente devem ser revisados, como as propriedades de potências. No entanto, mesmo tendo mais interferências do professor, os alunos estarão mais familiarizados com a metodologia e isto compensará no tempo gasto com a maioria dos comentários adicionais. A seguir as etapas contempladas neste encontro

Etapa 1. Conversa Inicial (Duração sugerida: 5 minutos) Para iniciar esta etapa, o professor revisita, através de um diálogo, os conceitos abordados nos encontros anteriores. É necessário que o professor relembre as formas geométricas e as medidas, expressas por monômios, bem como os conceitos de perímetro estudados e que os estudantes tenham em mãos as atividades da aula anterior para revisitar quando for necessário.

Etapa 2. Separação dos grupos (Duração sugerida: 3 minutos) O professor irá fazer novamente o sorteio dos grupos, utilizando as mesmas estratégias de separação de grupos feitas nos demais encontros.

Etapa 3. Distribuição nos grupos (Duração sugerida: 2 minutos) O professor distribui um conjunto de Tangram para cada integrante do grupo formado.

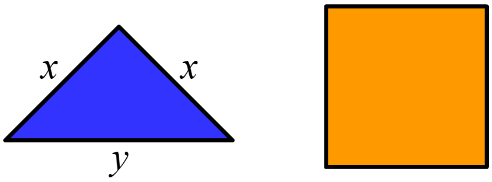
Etapa 4. Metodologia PI em ação (Duração sugerida: 50 minutos) Iremos novamente utilizar a metodologia PI, para responder as 5 questões sobre áreas de forma planas.

Assim iniciaremos o Passo 1 da metodologia PI onde o professor deve relacionar o produto de expressões algébricas, utilizando como ferramenta, à área das principais figuras planas como quadrados, retângulos, triângulos, trapézios e paralelogramos. Entretanto, pode ser necessário revisar conceitos como: a utilização de parênteses em multiplicações de polinômios; como utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e ainda revisar que o produto de incógnitas com mesma parte literal, deve-se utilizar as propriedades de potências. Para finalizar esta etapa, é aconselhável efetuar ao menos uns dois exemplos de produtos de expressões algébricas comentando possibilidades de resolução, inclusive localizando outras expressões equivalentes que representam a mesma situação.

Seguimos com o Passo 2, que é a pergunta conceitual de múltipla escolha, e iremos percorrer os 9 passos que a metodologia PI sugere. A seguir as sugestões de perguntas para o desenvolvimento desta atividade.

Questão 1. A Figura 4.26 mostra duas peças de um Tangram. Uma delas é um dos triângulos pequenos e a outra é o quadrado.

Figura 4.26: *Triângulo pequeno e quadrado do Tangram*



Fonte: autoria própria

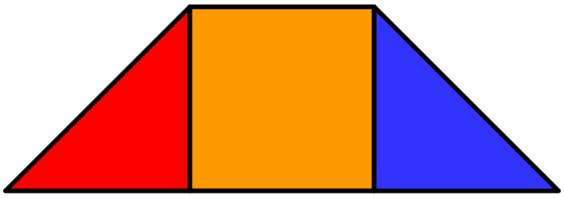
Sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno do Tangram são representadas pelos monômios x, x e y. Determine as expressões A_1 e A_2 que representam as áreas do triângulo pequeno e do quadrado do Tangram, respectivamente?

(A) $A_1 = \frac{y^2}{2}$ e $A_2 = x^2$.
(B) $A_1 = \frac{x^2}{2}$ e $A_2 = y^2$.
(C) $A_1 = \frac{x^2}{4}$ e $A_2 = y^2$.
(D) $A_1 = \frac{x^2}{2}$ e $A_2 = x^2$.

Em seguida continuamos com os demais passos de 3 a 9 em suas ordens corretas, conforme já descritos na atividade do dia anterior. As demais sugestões de perguntas e seus possíveis comentários estão descritas a seguir.

Questão 2. A Figura 4.27 mostra um trapézio isósceles que foi construído com 3 peças do Tangram, sendo elas, os dois triângulos pequenos e o quadrado.

Figura 4.27: *Trapézio isósceles com 3 peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

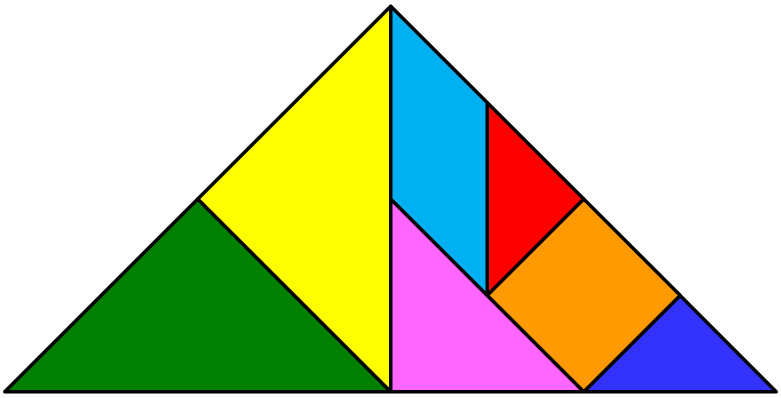
Sabendo que o menor dos triângulos do Tangram tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y, determine a área deste trapézio e marque a alternativa que a representa:

(A) $2x^2$.
(B) $4x^2$.
(C) $\frac{3x^2}{2}$.
(D) $6x^2$.

Questão 3. Determine a área do triângulo construído com as sete peças do Tangram representado na Figura 4.28, sabendo que o triângulo pequeno tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y.

(A) $4x^2$.
(B) $8y^2$.
(C) $4x^2y^2$.
(D) $8x^2$.

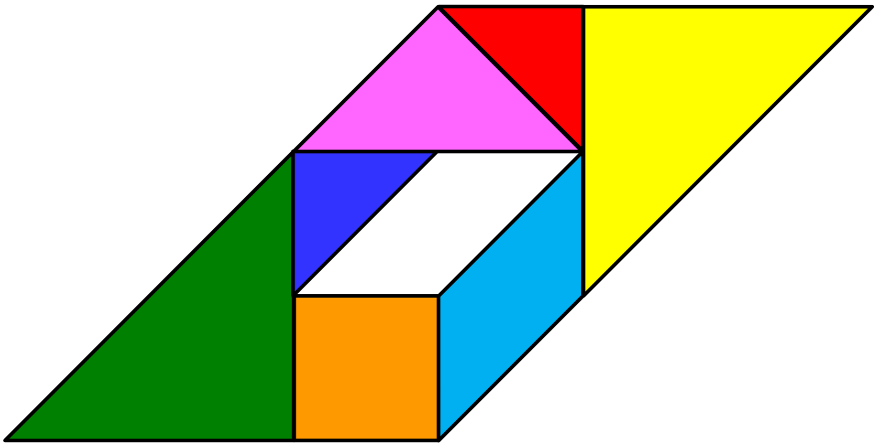
Figura 4.28: *Triângulo isósceles com 7 peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

Questão 4. A Figura 4.29, é um paralelogramo vazado, isto é a parte sem cor interna da figura é um buraco, e foi construída com as sete peças do Tangram.

Figura 4.29: *Paralelogramo vazado, com 7 peças do Tangram*



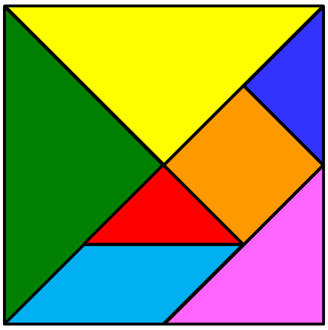
Fonte: autoria própria

Sabendo que o menor triângulo do Tangram tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y, determine a área A ocupada por esta figura, caso esta figura não fosse vazada, isto é, se ela fosse totalmente preenchida, qual seria sua área?

(A) $4x^2$.
(B) $8y^2$.
(C) $4x^2y^2$.
(D) $8x^2$.

Questão 5. A Figura 4.30 mostra um quadrado utilizando as 7 peças do Tangram.

Figura 4.30: *Quadrado com 7 peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

Sabemos que a área deste quadrado com setes peças é representada pelo monômio $32z^2$. Nestas condições, determine a medida do cateto do menor triângulo do Tangram contido neste quadrado.

(A) $4z$.
(B) $2z$.
(C) $10z$.
(D) $16z$.

Após o cumprimento dos passos 1 a 9 para as cinco perguntas desta etapa, como feito no segundo encontro, o professor pode explorar possibilidades de construção de formas para favorecer um aperfeiçoamento dos temas trabalhados.

Etapa 5. O Jogo (Duração sugerida: 20 minutos) O professor aplica o jogo criado para trabalhar expressões algébricas utilizando o Tangram. a versão do jogo criada pode ser acessada através do link https://wordwall.net/play/52849/849/674 ou do QR code da Figura 4.31.

Figura 4.31: *QR code do Jogo: Aposta Quanto? Expressões algébricas, perímetros e áreas com o Tangram*

Fonte: gerado em me-qr.com/pt/qr-code-generator

Mais detalhes da criação do jogo estão descritas na Observação 6.

Etapa 6. Questionário Final (Duração sugerida: 20 minutos) Os alunos devem ser orientados a responder o questionário do Anexo A para fazer uma comparação das respostas e verificar a evolução dos estudantes antes e depois de aplicada a sequência didática.

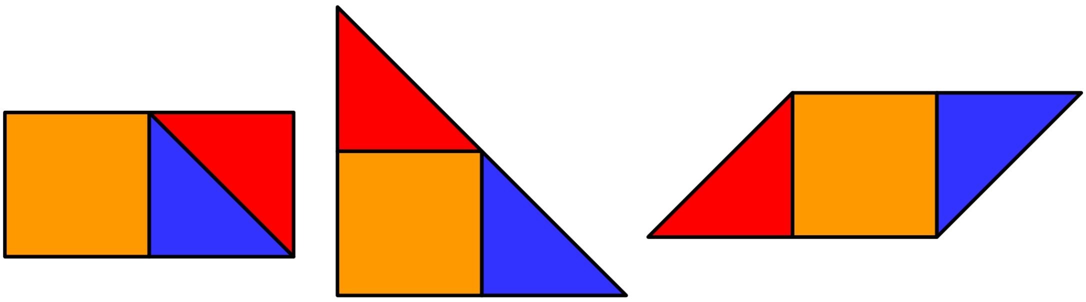
4.3.1 Observações e outras sugestões

Observação 2. Uma das maneiras de aperfeiçoar estes conceitos, pode ser discutida na Questão 2 que fala sobre cálculo de área de um trapézio isósceles construído com o Tangram. Nesta questão, o professor pode estimular os alunos a desenvolverem habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas ao mudar a posição das peças criando novas formas e fazendo perguntas sobre o que acontece com a área delas. Seguem algumas sugestões de perguntas:

- Será que a área mudará se transformarmos esta figura em um retângulo? e em um triângulo? e em um paralelogramo?
- Será que se calcularmos a área de cada uma das peças, a soma destas áreas equivale a área total?

Como sugestão, para esta finalidade, o professor pode modificar o trapézio de três peças construindo outras figuras, como mostrado na Figura 4.32 com as mesmas peças e pedindo para que eles calculem suas áreas e façam as devidas comparações.

Figura 4.32: *Formas com 3 peças do Tangram*

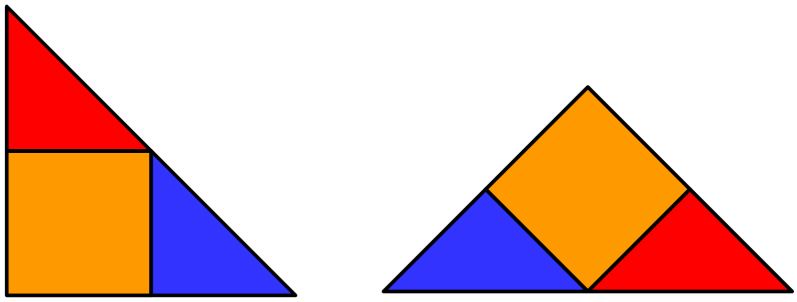


Fonte: autoria própria

Dependendo do nível da turma, o professor poderá sugerir que se calcule a área do triângulo isósceles de 3 peças, utilizando os lados congruentes de base e a hipotenusa de base, como mostra a Figura 4.33, comparando os resultados.

Com esta comparação, espera-se que os alunos questionem o porque das expressões serem diferentes, se as áreas das duas figuras são iguais. Daí o professor

Figura 4.33: *Triângulo isósceles com 3 peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

pode mostrar que existe uma relação entre x e y, visto que em um quadrado de lado x e a diagonal y deve-se ter $y = x\sqrt{2}$ por consequência do Teorema de Pitágoras.

Podemos mostrar a relação entre x e y através do cálculo de áreas. Como os triângulos da Figuras 4.33 são iguais, por rotação, e utilizando as suas respectivas base e alturas nas posições, consideremos A, a área que pode ser representada de duas formas:

$$A = \frac{2x \cdot 2x}{2} = 2x^2 \quad \text{ou, ainda,} \quad A = \frac{2y \cdot y}{2} = y^2$$

.

Desta forma, como as duas expressões representam a área da mesma figura e sendo x e y números positivos, por serem medidas de lados, teremos:

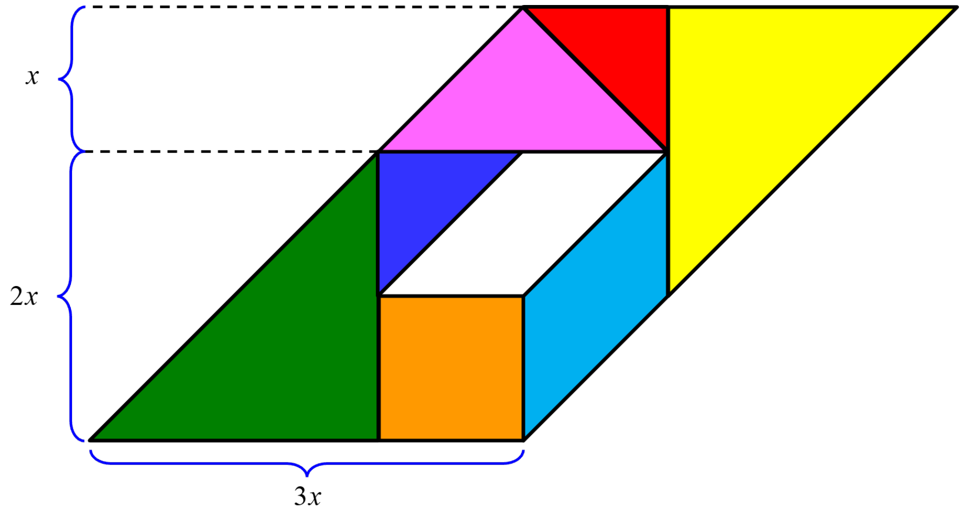
$$\begin{aligned} y^2 &= 2x^2 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{2x^2} \\ y &= x\sqrt{2} \end{aligned}$$

Perceba que esta relação pode ajudar a responder diversos problemas, o que na prática significa que qualquer um dos problemas relacionados ao nosso Tangram de estudo pode ser dado em função de x ou y, e com isto o ganho nas compreensões são notáveis.

Observação 3. Vale observar que na questão 4 podemos determinar a área de duas formas diferentes. Esta exploração através de formas diferentes produzem conceitos de áreas que não sejam mecânicos. Veja duas formas de explorar estes conceitos a seguir

Forma 1: Considerando o paralelogramo da Figura 4.34, podemos observar que suas medidas de base e altura podem ser representadas por $3x$ e $3x$.

Figura 4.34: *Medidas paralelogramo vazado*



Fonte: autoria própria

Assim, considerando a fórmula do cálculo de área, teremos:

$$A = 3x \cdot 3x = 9x^2$$

Portanto, a área desta figura será $9x^2$.

Forma 2: É fácil perceber que a área pedida será a área do paralelogramo formado pela área das sete peças e mais uma peça paralelogramo do Tangram. Teremos então:

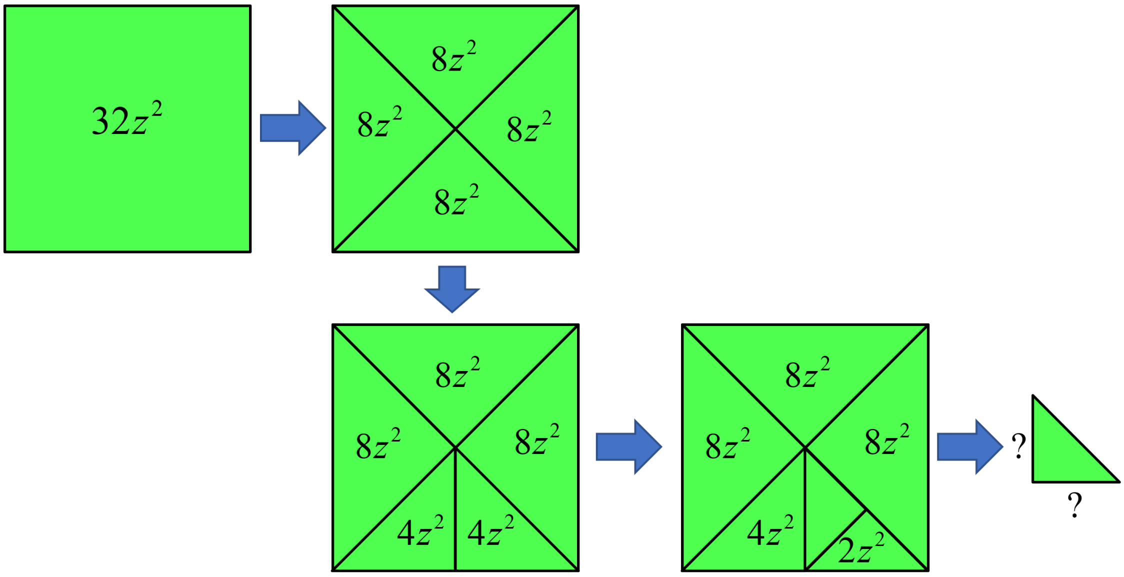
$$A = 8x^2 + x^2 = 9x^2$$

Observação 4. Vimos nesta seção que as medidas dos lados das formas podem ser calculadas em função de x ou de y. Mas note que quando calculamos a área do triângulo da Figura 4.28 em função de y não encontramos resposta dentre as alternativas dadas. Porém aos se calcular a área em função de x encontramos a alternativa correta.

Observação 5. Vale ressaltar que na Questão 5, foi dado a área total do Tangram e pede-se a medida do lado do triângulo pequeno em função de z. Espera-se que os alunos utilizem-se dos conceitos aprendidos para determinar esta medida. Caso eles não consigam chegar a resposta correta, pode-se apresentar a Figura 4.35, onde mostra-se visualmente como podemos determinar a área do triângulo pequeno e assim calcular a medida de seu lado utilizando a fórmula de área apropriada.

Com isto, sendo c, um número positivo, a medida de cada cateto do triângulo pequeno e sabendo que a área A do menor triângulo é $2z^2$, e que ainda ela pode ser dada pela metade do produto dos catetos teremos:

Figura 4.35: *Quadrado com 7 peças do Tangram*



Fonte: autoria própria

$$A = \frac{c \cdot c}{2} = 2z^2 \Rightarrow \frac{c^2}{2} = 2z^2$$
$$\Rightarrow c^2 = 4z^2$$
$$\Rightarrow c = 2z$$

Esperamos que, ao término desta atividade, os estudantes compreendam que todas as formas fechadas, construídas com as peças do Tangram têm a mesma área, desde que tenham as mesmas peças em sua composição. Isto ocorre pois ao decompor uma figura plana em partes, a soma das áreas dessas partes equivale à área total da figura original.

Observação 6. O Wordwall é uma plataforma educacional que permite aos professores criar atividades interativas personalizadas, incluindo jogos e quebra-cabeças para diversas disciplinas, incluindo matemática. Através dessa ferramenta, os educadores podem proporcionar uma aprendizagem significativa para seus alunos, utilizando atividades dinâmicas e envolventes, tanto em sala de aula quanto em ambientes virtuais de ensino a distância.

Os jogos digitais têm um papel importante na educação matemática, pois podem fornecer uma experiência de aprendizado interativa, significativa além de desenvolver habilidades de trabalho em grupos e competição saudável. Eles oferecem uma maneira prática e divertida de os alunos aprenderem conceitos matemáticos complexos, desenvolvendo habilidades cognitivas e lógicas.

Para utilizar o jogo e acompanhar a classificação e evolução dos estudantes o professor deverá se cadastrar na plataforma Wordwall, acessar o jogo e depois clicar na opção “Definir atribuição” e escolher o nome que dará a esta atividade.

Pensando na proposta do uso de jogos na educação, criamos então um jogo, específico para esta proposta de sequência didática, em formato de apostas, que na plataforma recebe o nome do estilo do jogo de "Ganhe ou perca o quiz". As perguntas do jogo tem relação com o que foi discutido nos encontros e pode ser adaptada, na versão paga, de acordo com as necessidades específicas dos estudantes ou dos objetivos pretendidos pelo professor. Na versão gratuita o professor pode utilizar normalmente o jogo, porém não é possível modificar as perguntas. O nome escolhido para se colocar no Jogo foi: “Aposta Quanto? Expressões algébricas, perímetros e áreas com o Tangram”.

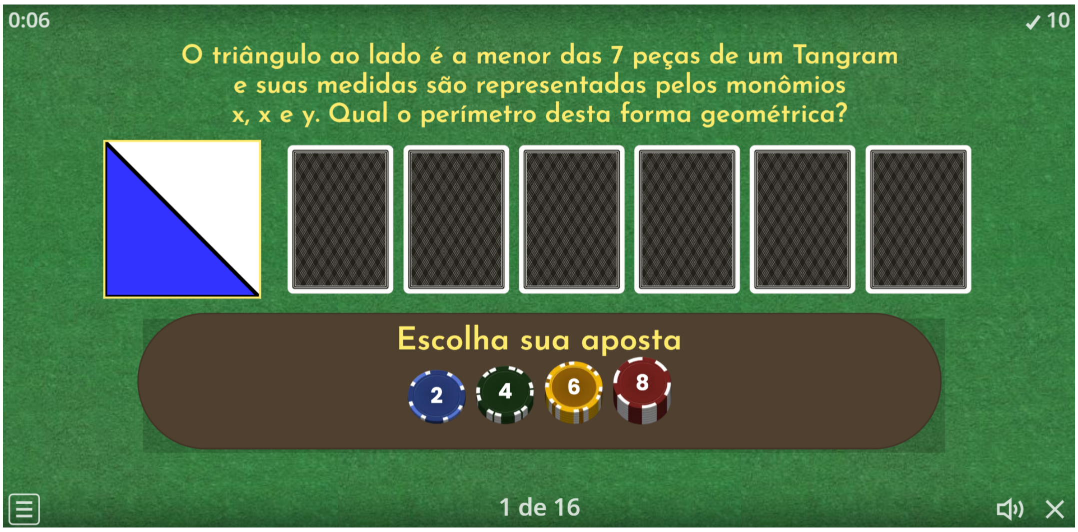
Ao abrir o link, os estudantes deverão se identificar para definir as classificações e depois clicar em *Começar*. Veja Figura 4.36.

Figura 4.36: *Abrindo o jogo: Aposta Quanto? Expressões algébricas, perímetros e áreas com o Tangram*

Fonte: extraído do site wordwall.net/pt.

O jogo é um quiz de apostas onde os jogadores usam fichas para apostar em suas respostas a perguntas feitas durante o jogo. Os jogadores recebem uma carta com uma pergunta e quatro opções de resposta. Assim, o jogador aposta uma certa quantidade de fichas em sua resposta escolhida. Em seguida, a resposta correta é revelada e se o jogador responder corretamente ganha fichas, e caso responda incorretamente perde as fichas apostadas. Cada estudante inicia com 10 fichas, mas inicialmente pode apostar 2, 4 , 6 ou 8 delas no jogo. A aparência visual do jogo está demonstrada na Figura 4.37.

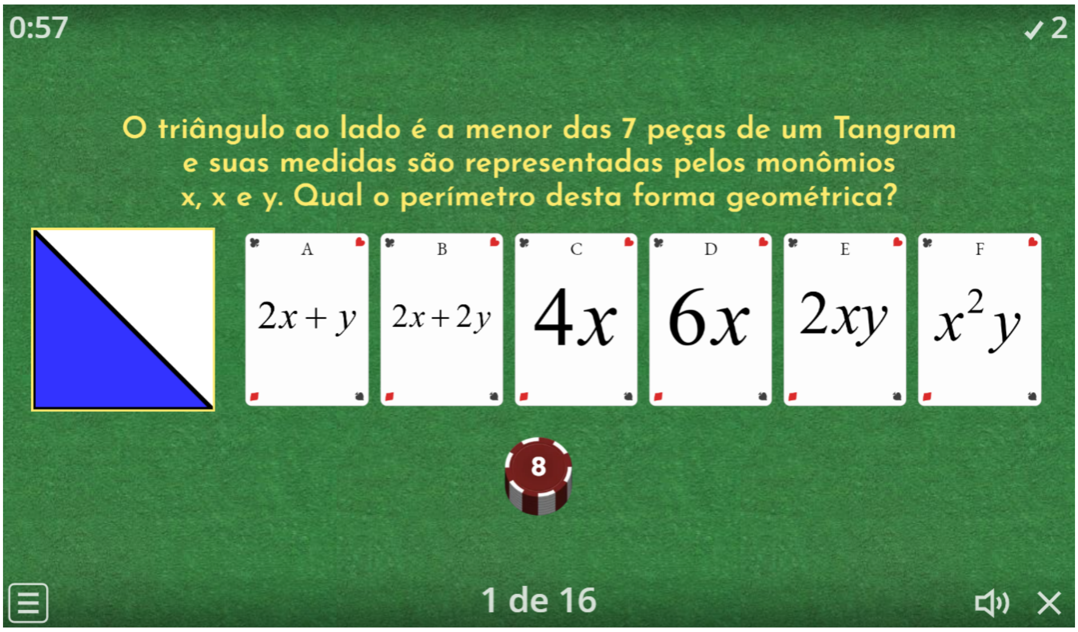
Figura 4.37: *Primeira pergunta do jogo*



Fonte: extraído do site wordwall.net/play/52849/849/674

Quanto mais o aluno acerta, maior poderá ser a aposta posterior até que termine as 16 perguntas. Caso haja empate de pontuação a classificação se dará por quem fez em menos tempo. A Figura 4.38, as opções de reposta após fazer a aposta de 8 fichas.

Figura 4.38: *Opções de respostas para a primeira pergunta.*



Fonte: extraído do site wordwall.net/play/52849/849/674

Um jogo similar foi apresentado por Barbosa (2022), no VIII Encontro Goiano de Educação Matemática (VIII EnGEM), como uma proposta de ensino aprendizagem sobre as expressões algébricas utilizando o Tangram. O jogo começa com uma tela de perguntas e respostas, onde cada pergunta é representada por um ícone de nuvem. Os jogadores devem ler a pergunta e escolher a resposta correta, que é uma das nuvens na tela. Depois de escolher a resposta, o jogador pilota o avião em direção à nuvem que contém a resposta correta. Ele pode ser acessado na integra pelo link https://wordwall.net/play/36837/464/856 ou o QR code da Figura 4.39.

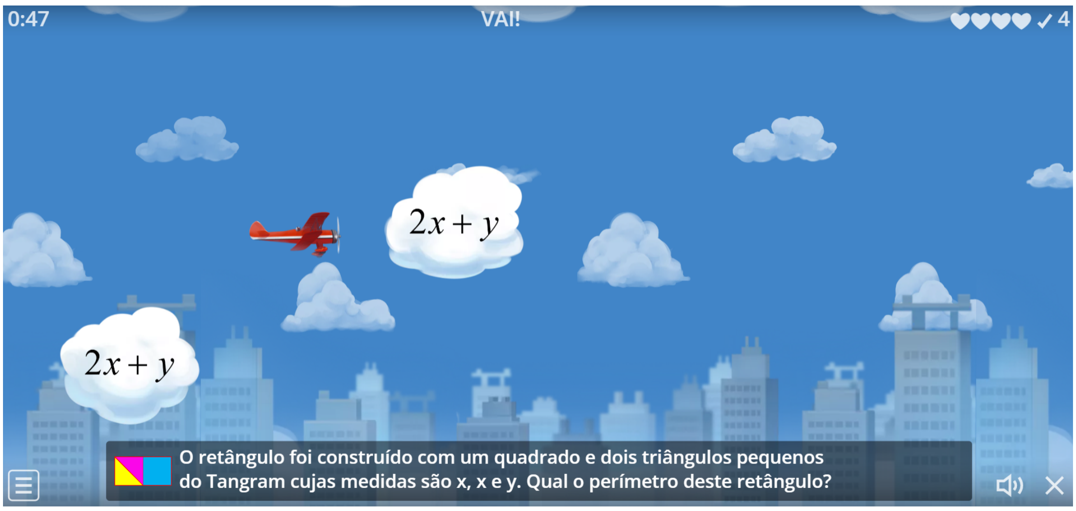
Figura 4.39: *QR code do Jogo: Expressões algébricas e perímetros com o Tangram (Avião)*

Fonte: verificar como citar figura do meu artigo.

Este jogo contemplava o uso de expressões algébricas para se calcular perímetros e para tal, foi utilizada a versão gratuita da plataforma com um jogo que segue o modelo de um avião. Neste jogo, o jogador deve acertar a nuvem que contém a resposta correta a pergunta feita.

A Figura 4.40 mostra a aparência do jogo e uma de suas perguntas.

Figura 4.40: *Jogo: Expressões algébricas e perímetros com o Tangram (Avião)*



Fonte: wordwall.net/play/36837/464/856

Neste contexto, agora iremos realizar a última atividade onde os alunos responderão novamente o questionário que foi feito no inicio do primeiro encontro para que o professor possa fazer uma análise quantitativa e qualitativa do desenvolvimento dos estudantes. No entanto, é importante notar que todas as etapas podem ser usadas para o processo avaliativo. Espera-se que se tenha uma melhoria significativa nas respostas, mas caso não haja, é sinal de que a intervenção precisará de outros momentos como este para aprofundar os conceitos aprendidos.

Observação 7. O questionário final é importante para que uma avaliação seja feita do desenvolvimento dos estudantes e este questionário se encontra no Anexo B. A previsão do tempo para esta atividade é de 30 minutos, incluindo 5 minutos para considerações finais. Estes 5 minutos serão importantes para dar e receber feedbacks sobre o desenvolvimento geral desde o primeiro encontro até aqui. Se este questionário tiver sido feito pelo Google Forms, conforme sugerido, é possível verificar também um feedback imediato das respostas antes e depois de aplicada a proposta didática.

O ensino de matemática pode ser aprimorada através de metodologias inovadoras. Essas abordagens permitem que os alunos se envolvam ativamente no processo de aprendizagem, trabalhando em equipe e resolvendo problemas de forma criativa e lúdica. Após este questionário, espera-se que os alunos demonstrem uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos abordados, bem como uma maior confiança em suas habilidades matemáticas. Além disso, espera-se que eles tenham adquirido habilidades sociais e emocionais, como a capacidade de trabalhar em equipe, a persistência na resolução de problemas e a motivação para aprender. A matemática, com meios inovadores de ensino apresentados aqui, pode ser uma maneira eficaz de envolver os alunos e prepará-los para enfrentar os desafios do mundo moderno.

Considerações Finais

Vimos que no ensino de expressões algébricas, as metodologias ativas, como a peer instruction e a gamificação, podem auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos de uma maneira bem menos agressiva e assustadora para os estudantes. Porém, É necessário que os professores se qualifiquem e busquem cada vez mais aprendizado e pensem nos objetivos de aprendizagem a longo prazo, como o da compreensão das estruturas algébricas, especialmente os anéis de polinômios. que mesmo não estando presentes na grade curricular do ensino fundamental, se muito bem compreendidas e estruturadas, podem facilitar os processos de ensino aprendizagem dos estudantes no ensino médio no estudo das funções polinomiais.

Essas abordagens colocam o professor como um agente de mudança, incentivando a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem, e promovendo a colaboração, a resolução de problemas e o pensamento crítico. Ao utilizar o Tangram como ferramenta lúdica de aprendizagem matemática na álgebra, os alunos podem desenvolver habilidades importantes, como a criatividade e a capacidade de visualizar e manipular objetos em duas dimensões. Com essas abordagens, os alunos podem se sentir mais motivados a aprender e a desenvolver habilidades essenciais para o sucesso acadêmico e profissional.

A adoção de metodologias ativas no ensino da álgebra é, portanto, uma forma eficaz de tornar o aprendizado mais significativo, atraente e relevante para os alunos. E o professor, agente de mudanças, é a peça que falta nesta engrenagem para o sucesso que precisamos trilhando rumos ao futuro desconhecido, mas com certeza brilhante, da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, Kenneby Lemos. *O Ensino de Expressões Algébricas com Tangram e Jogos Digitais.* Catalão, 2022. Aceito para publicação nos anais do VIII Encontro Goiano De Educação Matemática (VIII ENGEM).

[2] BARBOSA, Míriam Lúcia. e AMARAL, Sérgio Ferreira do. *Aplicativos e gamificação na educação: possibilidades e considerações.* Brazilian Journal of Development, Curitiba, v. 7, n. 3, março de 2021. Disponível em: https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/26044/20654. Acesso em 23 de mar. de 2023.

[3] BARROS, James Jansen Pinho de. *Além da Geometria : o Tangram como Ferramenta Didática para a Matemática do Ensino Fundamental.* Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: `http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/bitstream/handle/unirio/12538/encrypted_TCC%20JAMES.pdf`. Acesso em 23 de mar. de 2023.

[4] BORTOLETTI, Anderson de Abreu. *O ensino de álgebra: uma visão em dois momentos distintos da trajetória da matemática nos currículos escolares.* ÁGORA, Porto Alegre, Ano 6, Mar. 2015. Disponível em: `https://websmed.portoalegre.rs.gov.br/escolas/revistavirtualagora/artigos/ano6artigo3`. Acesso em 23 de mar. de 2023.

[5] BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site`. Acesso em 23 de mar. de 2023.

[6] BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília, 1998. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica` Acesso em 23 de mar. de 2023.

[7] BUSARELLO, Raul Inácio. *Gamification: princípios e estratégias.* Pimenta Cultural. São Paulo, 2016. Disponível em: http://btd.egc.ufsc.br/wp-content/uploads/2016/12/Raul_Inacio_Busarello.pdf Acesso em: 23 mar. 2023

[8] COELHO, Sabrina. *O algoritmo da divisão para polinômios em várias variáveis.* Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/194162/Tcc_Sabrina.pdf Acesso em: 23 mar. 2023

[9] CORTELLA, Mario Sérgio. *Não é só a educação dos filhos que é necessária, mas dos pais também.* Entrevista concedida a Redação Crescer. Revista Crescer, São Paulo, 2016. Disponível em: https://revistacrescer.globo.com/Criancas/Escola/noticia/2016/11/cortella-nao-e-so-educacao-dos-filhos-que-e-necessaria-mas-dos-pais-tambem. Acesso em: 23 mar. 2023.

[10] EVES, Howard Whitley. *Introdução a História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

[11] FORSTER, Cristiano; HORBACH, Ivan Carlos. *Ensino de geometria plana com o auxílio do tangram.* Florianópolis: Universidade do Estado de Santa Catarina, 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Horbach_Ivan.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[12] FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1981.

[13] GIL, Katia Henn.*Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.* Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS, 2008. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[14] GONÇALVES, Adilson. *Introdução a álgebra.* 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, Projeto Euclides, 2008.

[15] HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[16] MILIES, César Polcino. *Breve História da Álgebra Abstrata.* Apostila (minicurso). Bahia: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[17] MÜLLER, Maykon Gonçalves et al. *Uma revisão da literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino Peer Instruction (1991 a*

2015). Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 39, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0012. Acesso em 23 de mar. 2023

[18] NASCIMENTO, Josiele; SANTOS, M. G. T.A. *Vida e obra de Rubem Alves: visões e contribuições para a educação.* Disponível em: https://www.unicerp.edu.br/revistas/educsaudemeioamb/p165.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[19] NAVARRO, Gabrielle. *Gamificação: a transformação do conceito do termo jogo no contexto da pós-modernidade.* Biblioteca Latino-Americana de Cultura e Comunicação, v. 1, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/125459/mod_resource/content/1/gamificacao.pdf Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[20] OLIVEIRA, Sonaly Duarte de. et al. *A Utilização do Tangram no Ensino De Expressões Algébricas.* Oficina ministrada no VII Encontro de Iniciação a Docência da Universidade Estadual da Paraíba (VII ENID), 2019. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/enid/2019/TRABALHO_EV134_MD4_SA26$_ID361_1$0102019191634*.pdf*

[21] PARANÁ, Secretaria de Estado do. *Jogo para Sala – Tangram.* Disponível em: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/Silhuetas_do_tangram.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[22] RACHELLI, Janice. *Peer Instruction: uma experiência no ensino de cálculo com base em metodologias ativas de aprendizagem.* Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2021. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/27176/1/Rachelli2020Peer.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[23] RAVERA, Tércio Costalonga. *A utilização do método Peer Instruction em aulas de Matemática no Ensino Médio.* Dissertação de mestrado, Espírito Santo, 2019. Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em: https://sappg.ufes.br/tese_drupal/tese_13596_versao_pdf_dissertacao.pdf. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[24] SANTOS, Silvana Alves dos. *Polinômios em uma variável: propriedades e operações.* Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2021.

[25] SELBACH, Cássio Volpato. *Uma Introdução ao Estudo de Anéis e Corpos.* Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS, 2015. Disponível em https://lume.ufrgs.br/handle/10183/133730

[26] SILVA, Juliano da. *O ensino da álgebra no ensino fundamental: dificuldades e desafios.* Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/21981. Acesso em: 23 de mar. de 2023.

[27] SOUSA, Reginaldo Jacinto de. *A álgebra dos polinômios.* Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu), Goiânia, 2020. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/10779/3/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Reginaldo%20Jacinto%20de%20Sousa%20-%202020.pdf

[28] WALLE, John Albert Van de. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO

Abaixo segue um sugestão de perguntas aos questionários inicial e final propostos. Sugerimos que o questionário seja formado por perguntas de múltipla escolha ou respostas curtas, para ser bem breve, e que se for possível, que seja feito de forma online através de ferramentas como Google Forms, Microsoft Forms ou similares pois teremos uma devolutiva instantânea das respostas obtidas.

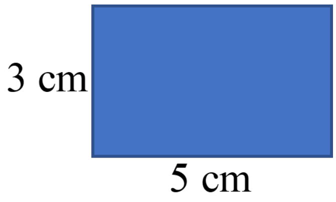
1. Você sabe o que é ou como identificar uma expressão algébrica?
   (a) Sim
   (b) Não
   (c) Não tenho certeza
2. Qual dos itens abaixo é uma expressão algébrica?
   (a) $2x + 4x^3 - 7$
   (b) $5 + 7 - 4^2 + 1$
   (c) $7 + 5 = 12$
   (d) $7x - 25 = 4x - 1$
   (e) Não sei dizer
3. Veja a expressão algébrica a seguir

$$x(2x - 3) + 5(1 - x)$$

   . Qual das expressões abaixo é equivalente à expressão algébrica dada?
   (a) $-x^2 + 5$
   (b) $2x^2 - 8x + 5$
   (c) $2x + 2$
   (d) Não sei dizer
4. Você sabe o que é perímetro?
   (a) Sim
   (b) Não

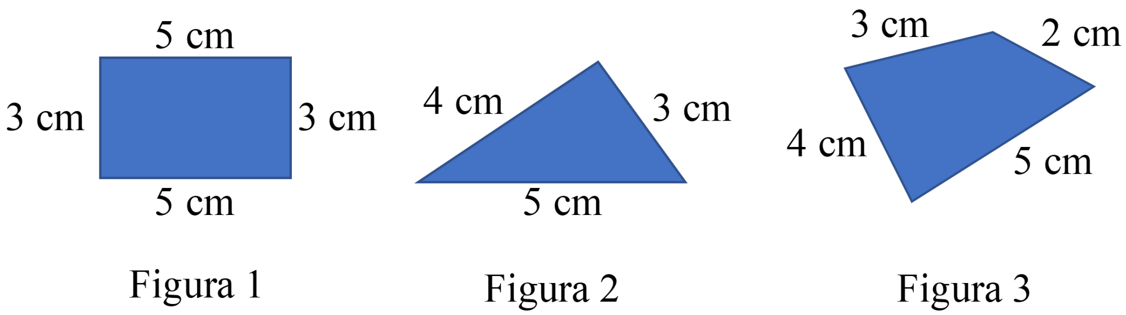
(c) Não tenho certeza

5. Qual o perímetro do retângulo a seguir?



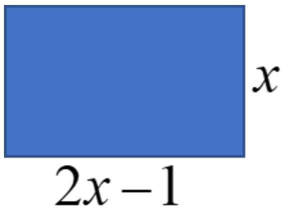
(a) 8 cm
(b) 15 cm
(c) 16 cm
(d) 30 cm

6. Dentre as figuras a seguir, qual delas tem perímetro igual a 14 cm?



(a) Figura 1
(b) Figura 2
(c) Figura 3
(d) Não sei dizer

7. Qual das expressões algébricas abaixo representa o perímetro do retângulo a seguir?



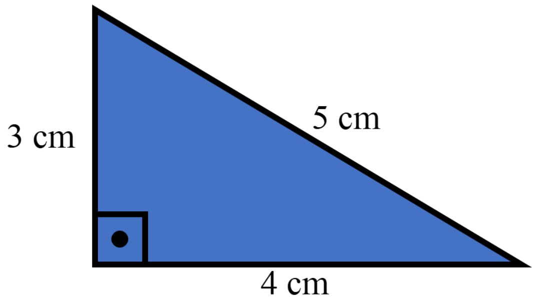
(a) $3x-1$
(b) $6x-2$
(c) $2x^2-x$

(d) $4x$
(e) Não sei dizer

8. Você sabe como calcular a área de figuras conhecidas, como triângulos, retângulos, quadrados, paralelogramos, trapézios e losangos?
   (a) Sim
   (b) Não
   (c) Não tenho certeza

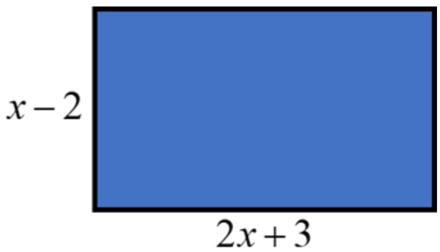
9. Qual das alternativas a seguir representa a área de um retângulo que possui 8 cm de largura e 4 cm de altura?
   (a) 12 cm²
   (b) 24 cm²
   (c) 32 cm²
   (d) Não sei calcular

10. Calcule a área do triângulo a seguir e depois marque a alternativa que representa corretamente a área encontrada:



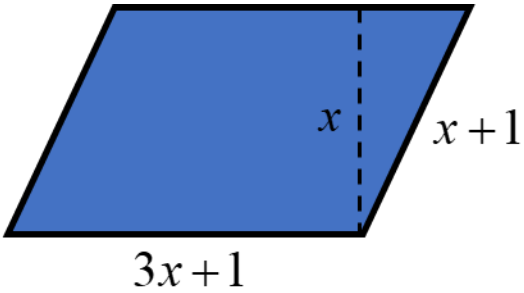
   (a) 12 cm²
   (b) 6 cm²
   (c) 18 cm²
   (d) Não sei calcular

11. Determine a expressão algébrica que representa a área do retângulo a seguir e depois marque a alternativa que representa corretamente esta área:



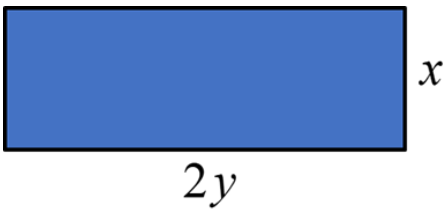
(a) $2x + 1$
(b) $2x^2 - x - 6$
(c) $2x^2 - 6$
(d) Não sei calcular

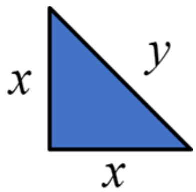
12. Determine a expressão que calcula a área do paralelogramo a seguir e marque a alternativa que representa esta área corretamente:



(a) $4x^2 + 2$
(b) $3x^2 + x$
(c) $3x^2 - 1$
(d) Não sei calcular

Joãozinho tem alguns retângulos e triângulos com as medidas de seus lados indicados a seguir.





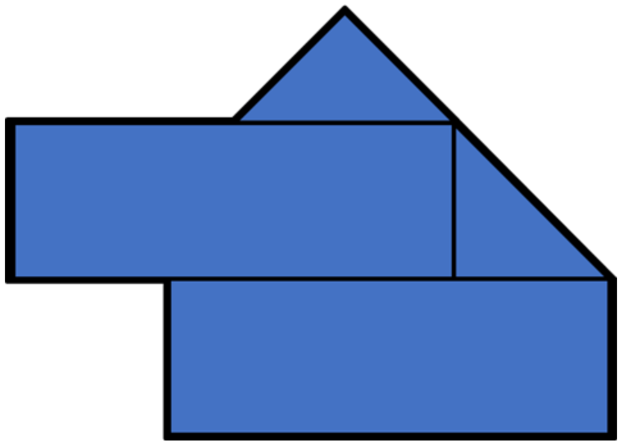
Ele juntou 2 retângulos e um triângulo unindo seus lados ou partes destes lados, sem sobrepor uma figura na outra, como mostra a figura abaixo:

13. Considerando as informações dadas, determine a expressão algébrica que representa o perímetro da figura formada por Joãozinho:

(a) $8x + 10y$
(b) $6x + 4y$
(c) $6x + 2y$
(d) Não sei dizer

14. Considerando ainda a figura feita por Joãozinho, determine a expressão que calcula a área da figura formada:

(a) $x^2 + 4xy$



(b) $2x^2 + 2y^2$

(c) $2xy^2$

(d) Não sei dizer

APÊNDICE B

CARTÃO DE RESPOSTAS - GRUPO

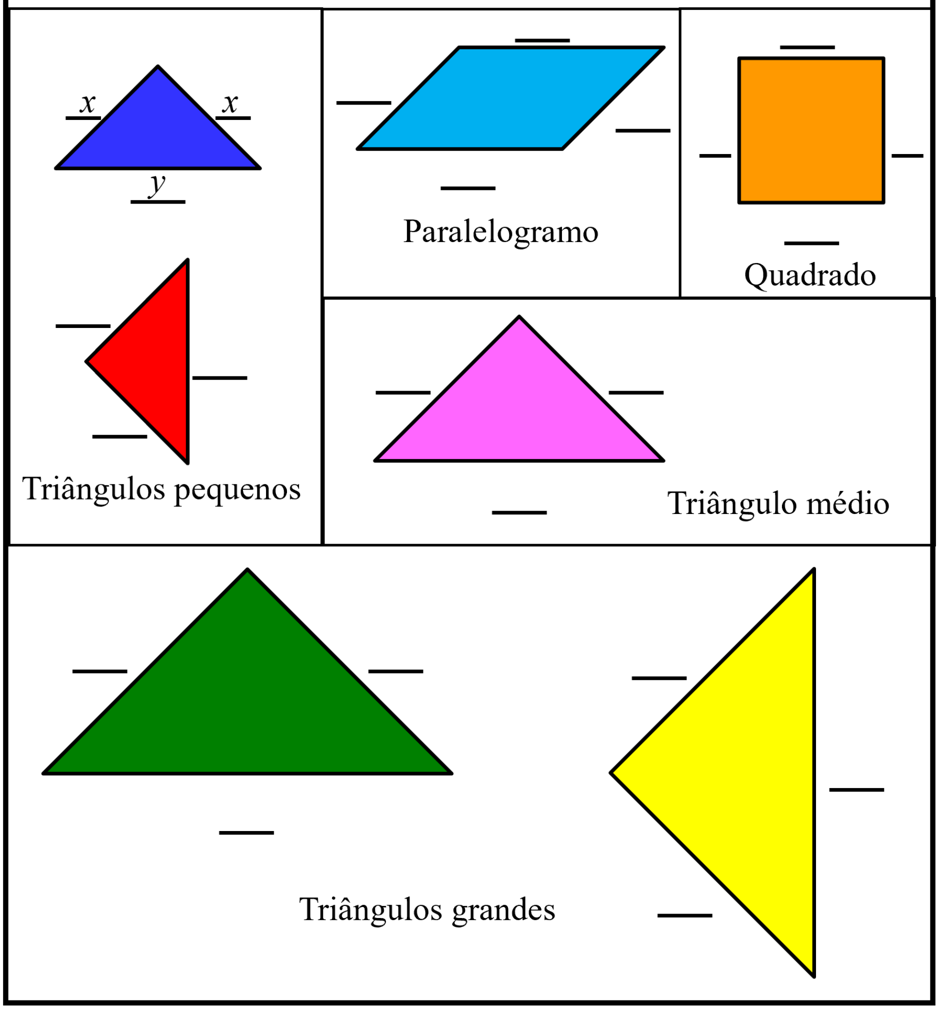
Abaixo temos uma sugestão de modelo de cartão de respostas a serem preenchidos pelo grupo nos encontros.

Data: ___/___/_____

Aluno 1: ________________________ Aluno 3: ________________________

Aluno 2: ________________________ Aluno 4: ________________________

Anote aqui todas as representações dos lados de cada uma das peças do Tangram.

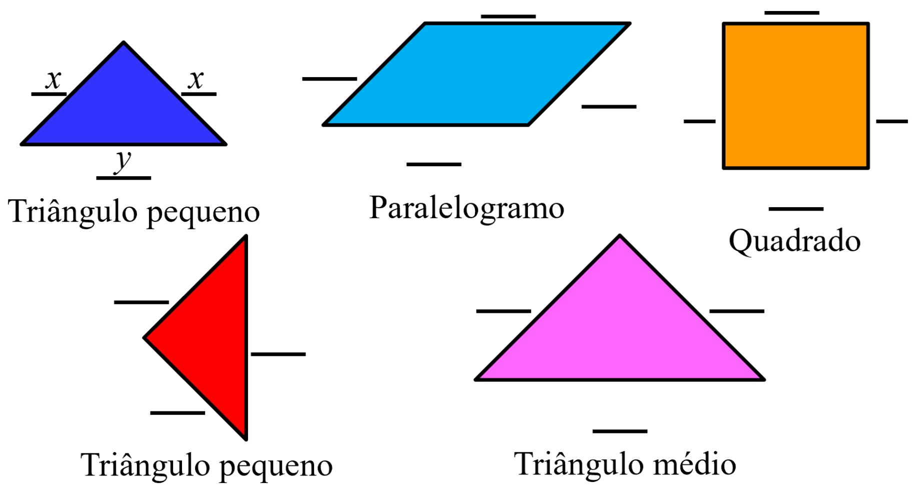


LISTA - EXERCÍCIOS - INDIVIDUAL OU EM GRUPOS

A seguir colocamos sugestões de exercícios que podem ser trabalhados para que os estudantes possam fixar e/ou aperfeiçoar seus estudos.

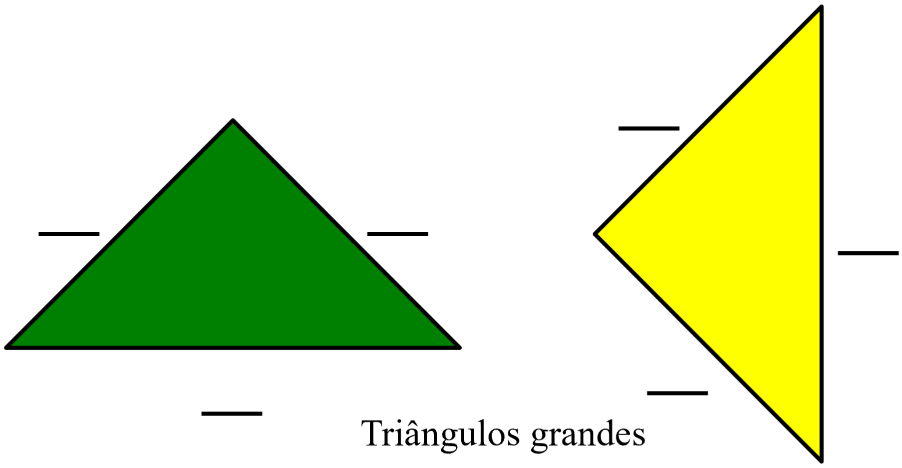
Exercícios de Fixação e Aperfeiçoamento

1. Observe as 7 peças do Tangram, a seguir, e identifique as medidas de cada lado, sabendo que as medidas dos lados do triângulo pequeno são x, x e y.

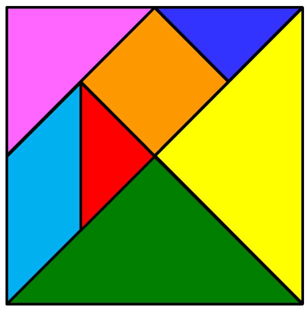


2. Observe o quadrado a seguir, construído com as sete peças do Tangram, contendo dois triângulos pequenos, um triângulo médio, dois triângulos grandes, um quadrado e um paralelogramo.
   Sabe-se que o menor dos triângulos da figura tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y. Nestas condições determine o perímetro P do quadrado de 7 peças.

   (A) $P = 2x + 6y$.
   (B) $P = 8x$.
   (C) $P = 4x + 4y$.

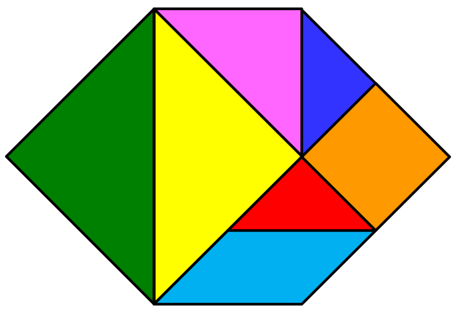


Triângulos grandes



(D) $P = 8y$.

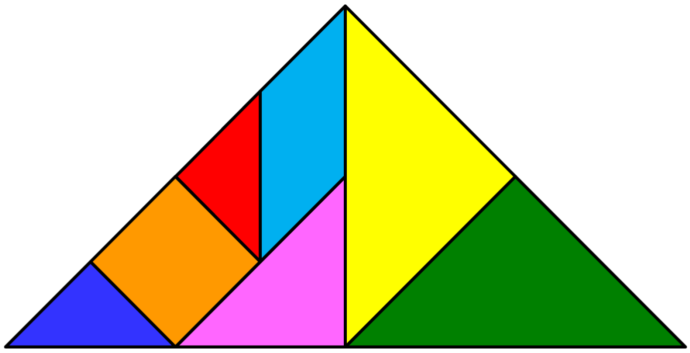
3. Temos a seguir, um hexágono construído com as sete peças do Tangram.



Sabe-se que o menor dos triângulos tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y. Nestas condições determine o perímetro P do hexágono.

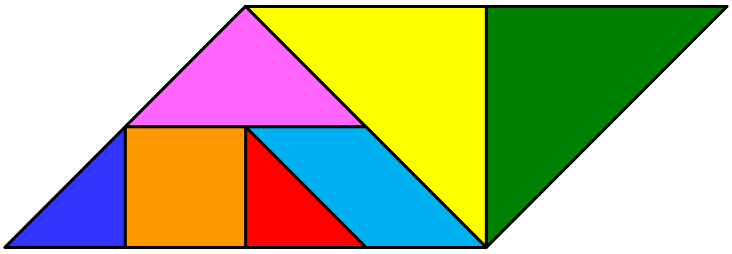
(A) $P = 4x + 2y$.
(B) $P = 6x + 3y$.
(C) $P = 8x + 2y$.
(D) $P = 2x + 8y$.

4. Temos a seguir, um triângulo construído com as sete peças do Tangram. Sabe-se que o menor dos triângulos tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y. Nestas condições determine o perímetro P do triângulo.



(A) $P = 4x + 2y$.
(B) $P = 6x + 3y$.
(C) $P = 8x + 2y$.
(D) $P = 2x + 8y$.

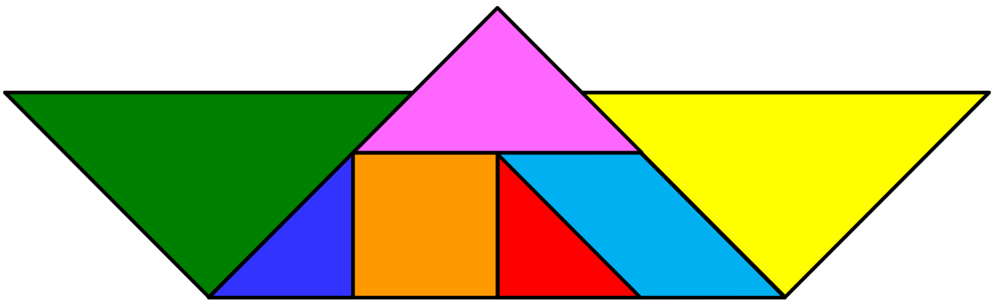
5. A figura a seguir mostra um paralelogramo construído com as 7 peças do Tangram.



Sabe-se que o menor dos triângulos tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y. Nestas condições determine o perímetro P do paralelogramo de sete peças.

(A) $P = 4x + 2y$.
(B) $P = 6x + 3y$.
(C) $P = 8x + 2y$.
(D) $P = 2x + 8y$.

6. A figura a seguir foi construída com as 7 peças do Tangram.

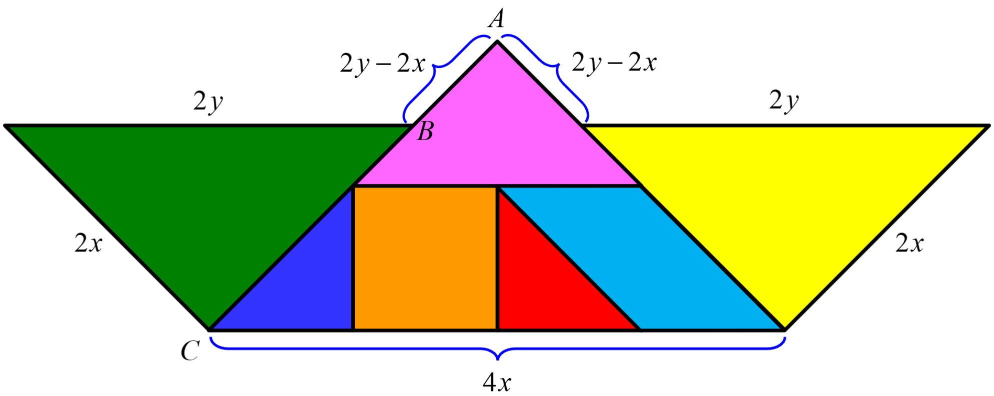


Considere que o menor dos triângulos, que a compõem, tem suas medidas representadas pelos monômios x, x e y. Nestas condições determine o perímetro P desta figura.

(A) $P = 8x + 6y$.
(B) $P = 10x + 6y$.
(C) $P = 4x + 8y$.
(D) $P = 4x + 6y$.

Observação ao professor: Note que esta figura é um heptágono e podemos utilizar a ideia de simetria para calcular uma parte e concluir pela outra, ou identificar as medidas de cada peça e em seguida efetuar a soma dos lados desta figura. Veja a indicação das medidas encontradas na Figura C.1.

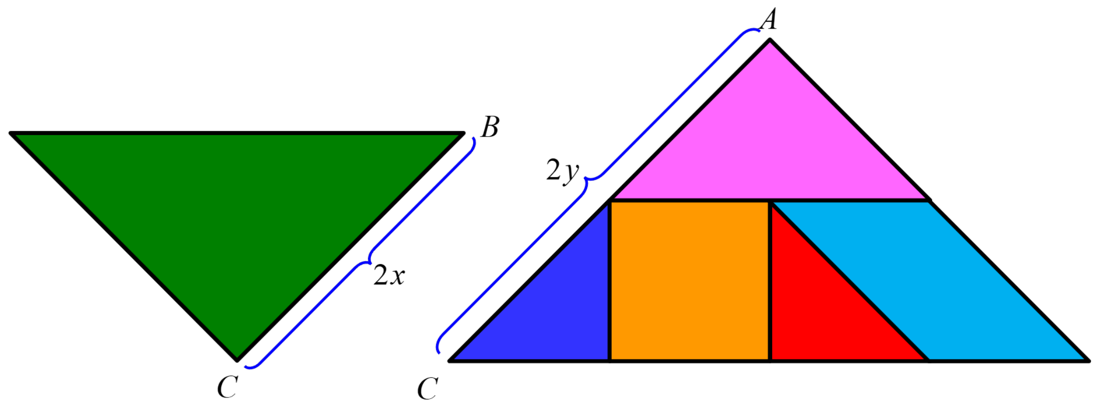
Figura C.1: *heptágono e suas medidas*



Fonte: autoria própria

Perceba que para encontrar as medidas de alguns dos lados desta figura tivemos que utilizar uma subtração pois, para determinar a medida do segmento AB, precisa-se efetuar $\overline{AC} - \overline{AB}$ como mostra a Figura C.2.

Figura C.2: *Conclusões sobre algumas medidas do heptágono*



Fonte: autoria própria