



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



ARTHUR BATISTA DE SOUZA

NÚMEROS ONDULANTES, REPUNIDADES E
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

ARRAIAS - TO
2023

ARTHUR BATISTA DE SOUZA

NÚMEROS ONDULANTES, REPUNIDADES E INVESTIGAÇÃO
MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

ARRAIAS - TO
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S729n Souza, Arthur Batista de Souza.
Números ondulantes, repunidades e investigação matemática.. /
Arthur Batista de Souza Souza. – Arraias, TO, 2023.
75 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-
Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2023.
Orientador: Eudes Antonio da Costa Costa

1. Investigação Matemática. 2. Número Repunidade. 3. Número
Suavemente Ondulante. 4. .. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).


ARTHUR BATISTA DE SOUZA

**NÚMEROS ONDULANTES, REPUNIDADES E INVESTIGAÇÃO
MATEMÁTICA**


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 05/ 05/ 2023.


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 11/05/2023 16:19:08-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa - UFT/PROFMAT - Arraias
Orientador-presidente

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO SOARES DE CARVALHO**
Data: 11/05/2023 14:55:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho - UFT/PROFMAT - Arraias

Examinador Interno
Documento assinado digitalmente
 **RUI SEIMETZ**
Data: 09/05/2023 14:44:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rui Seimetz - UNB/MATEMÁTICA
Examinador Externo

ARRAIAS - TO
2023

Dedico à minha mãe Maria Dioniza, minha maior inspiração e a força motriz que me faz querer ser sempre melhor.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, agradeço a Deus, por permitir que tudo ocorresse conforme a sua vontade.

A minha mãe por ser minha fonte de incentivo diário. Por me fornecer tudo aquilo que eu precisava: amor, carinho, paciência, inspiração. E por acreditar que é possível ser uma pessoa e um profissional brilhante.

Ao meu irmão Alessandro Batista de Souza, por nossa parceria e cumplicidade.

À minha grande amiga Leticia Meneses Marques, por todo apoio e parceria ao longo deste curso.

Aos meus amigos de profissão Dimas, Dyana, Frank, José Carlos, Lisandra e Mirene por serem amigos incentivadores para sempre progredir.

A meu orientador Dr. Eudes Antonio da Costa, por ser um excelente professor e todo o seu exímio trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo Cléber Mendonça Teixeira pelo exemplo de conhecimento, de profissionalismo e ao Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes por todo o suporte durante este curso.

Ao Prof. Msc. Jabson da Cunha Silva, por ter me inspirado e motivado desde a infância.

Aqueles que vieram antes de mim e tornaram o caminho possível.

A UFT – Universidade Federal do Tocantins.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente me auxiliaram na realização desse Mestrado.

*“Os sonhos do homem!
Não tem fim!”.*

Eiichiro Oda

RESUMO

Os números *ondulantes* formam um subconjunto dos números naturais abordado por Pickover(1990), Pickover(2003), Robinson(1994) e Shirriff(1994). Nesta classe de números temos os números *suavemente ondulante*, que são os números escritos na forma $abab\dots ab$ ou $ababab\dots aba$, em que a e b são algarismos distintos na base 10, e formados por no mínimo três algarismos. Este trabalho versa sobre os números *suavemente ondulante* formados apenas pelos algarismos 1 e 0. Em Costa e Costa(2021) mostra-se que exceto o número 101, nenhum outro deste subconjunto é primo. Aqui mostramos também que nenhum número *suavemente ondulante* formado por 1 e 0 é um quadrado perfeito. Nossa discussão se preocupa exclusivamente com a aritmética na base decimal. Nessa perspectiva, esta pesquisa é de caráter qualitativa, de natureza básica, exploratória e explicativa. A busca pelos primos e quadrados perfeitos nos números *suavemente ondulante* é motivada pelo estudo clássico dos números *repunidades*, um subconjunto dos números naturais formado pela repetição da unidade, veja por exemplo: Carvalho e Costa(2015), Costa e Santos(2020), Costa e Santos(2022) ou Ribenboim(2001), e nessa classe encontra-se alguns primos e nenhum quadrado perfeito. Estes resultados foram utilizados como objeto conceitual nas propostas de atividades envolvendo a metodologia *Investigação Matemática*. Tais atividades tem como objetivo possibilitar a compreensão deste assunto/conteúdo por uma metodologia ativa no contexto matemático escolar de níveis diversos.

Palavras-Chave: Investigação Matemática; Número Repunidade, Número Suavemente Ondulante.

ABSTRACT

The *undulating* numbers form a subset of the natural numbers discussed by Pickover(1990), Pickover(2003), Robinson(1994) and Shirriff(1994). In this class of numbers we have the *smoothy undulating* numbers, which are the numbers written in the form $abab\dots ab$ or in the form $ababab\dots aba$, where a and b are different digits in base 10, and consisting of at least three digits. This work deals with the *smoothy undulating* numbers formed only by the digits 1 and 0. In Costa and Costa(2021) it is shown that, except for the number 101, none of this subset is prime. Here we also show that no *gently undulating* number formed by 1 and 0 is a perfect square. Our discussion is concerned exclusively with arithmetic in the decimal base. From this perspective, this research is of a qualitative nature, of a basic, exploratory and explanatory nature. The search for primes and perfect squares in *smoothy undulating* numbers is motivated by the classic study of *repunit* numbers, a subset of the natural numbers formed by the repetition of the unit, see for example: Carvalho and Costa (2015), Costa and Santos(2020), Costa and Santos(2022) or Ribenboim(2001), and in this class there are some primes and no perfect squares. These results were used as a conceptual object in proposed activities involving the *Mathematical Investigations* methodology. Such activities aim to enable the understanding of this subject/content by an active methodology in the school mathematical context of different levels.

Keywords: Mathematical investigations; Repunit Number; Smoothly Undulating Number.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Duas vistas do osso Ishango	34
Figura 2 – Tabela OBMEP 2022	55
Figura 3 – Restos da divisão por 8	57
Figura 4 – Tabela Números	58
Figura 5 – Eliminando números primos	59
Figura 6 – Eliminando números múltiplos de 2	60
Figura 7 – Eliminando números múltiplos de 3	60
Figura 8 – Eliminando números múltiplos de 5	61
Figura 9 – Tabela com primos entre 101 e 150	61

LISTA DE QUADROS

1	Momentos na realização de uma investigação	15
2	Explorações com números	17
3	A mesa de <i>snooker</i>	19
4	Das potências de 2	20
5	Competências Específicas para a Matemática no Ensino Fundamental . . .	26
6	Competências Específicas para a Matemática no Ensino Médio	27
7	Habilidades Números BNCC	28
8	Habilidades Álgebra BNCC	30
9	Habilidades Números e Álgebra no Ensino Médio	30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CF	Constituição Federal
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RPM	Revista do Professor de Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA	15
2.1	Investigações numéricas	19
2.2	Investigações em Geometria e Estatística	21
2.3	Avaliação do trabalho de investigação	22
2.4	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular	25
3	INTEIROS, REPUNIDADES E NÚMEROS ONDULANTES	32
3.1	Aritmética na História	32
3.2	Os Números Inteiros	36
3.2.1	Indução Matemática	40
3.3	Teorema Fundamental da Aritmética	42
3.3.1	O Crivo de Eratóstenes	43
3.4	Congruência Modular	43
3.5	Números Ondulantes e Repunidades	44
3.5.1	Resultados principais	45
3.5.2	Demonstração do Teorema 3.32	47
3.5.3	Nenhum número repunidade é um quadrado perfeito	49
3.5.4	Demonstração do Teorema 3.30	50
3.5.5	Mais resultados	52
4	ATIVIDADES PROPOSTAS	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar um estudo em Aritmética, bem como propor atividades que possibilitem a compreensão deste assunto por meio da Metodologia *Investigação Matemática*. O corpus constituído por diversos assuntos ou conteúdos é resultante da disciplina MA14–Aritmética que compõe a matriz curricular obrigatória do 1º ano do PROFMAT. A Aritmética é uma área da matemática que se concentra no estudo das propriedades e relações dos números inteiros e operações básicas, tais como: adição (subtração) e multiplicação (divisão). A Aritmética é utilizada em muitos aspectos da vida cotidiana, desde situações simples, como contar dinheiro, até cálculos mais complexos, como em finanças, engenharia e outras ciências. Além disso, é um dos blocos fundamentais da matemática, fornecendo uma fundamentação para outras áreas ou subáreas matemáticas, como álgebra, geometria e análise numérica.

Esta é uma pesquisa qualitativa, que é uma abordagem metodológica amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento. Conforme discutido por Fiorentini e Lorenzato (2006), a pesquisa qualitativa permite ao pesquisador uma aproximação mais profunda e contextualizada do objeto de estudo, captando nuances e sentidos que poderiam ser negligenciados por uma abordagem meramente quantitativa. Conforme Gil (2002, p. 133) caracteriza a “sequência de atividades, que envolve a redução dos dados, a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório” fundamenta-se na coleta e análise de dados não numéricos, tais como: entrevistas, observações, registros de diários e documentos. Esta pesquisa é também dita exploratória, pois tem como “objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses” (GIL, 2002, p. 41). Como metodologia de pesquisa trata-se de uma pesquisa bibliográfica, uma que vez é “desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (GIL, 2002, p. 44).

O primeiro capítulo deste discorre acerca da Educação Básica e a Metodologia *Investigação Matemática* proposta por Ponte (2020). Questiona-se então, o que é a metodologia de Investigação em Matemática e, como realizar tal metodologia nas mais diversas áreas de ensino da matemática? Discorremos também como a legislação educacional brasileira aborda o método/processo de investigação. A Lei de Diretrizes e Bases - LDB da Educação Nacional (BRASIL, 1996), como lei que estrutura e regulamenta a educação nacional, proporciona um ambiente propício à investigação como metodologia de ensino? Há nas Diretrizes Curriculares Nacionais- DCN (BRASIL, 1998), alguma perspectiva que privilegie a investigação como processo metodológico de ensino? Na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) houve o cuidado para que a investigação estivesse presente? A Investigação Matemática pode ser realizada de várias maneiras, dependendo

do objetivo da atividade e das características dos estudantes. Algumas estratégias comuns incluem a resolução de problemas, a exploração de padrões e a construção de modelos. O processo pode envolver a colaboração entre os estudantes, a utilização de recursos matemáticos diversos (tais como: livros, jogos, materiais manipuláveis) e a comunicação dos resultados obtidos. A Investigação Matemática envolve o uso de questões abertas e desafios que permitem aos estudantes explorar e descobrir conceitos matemáticos de forma autônoma. O professor tem um papel de primordial como orientador e facilitador, guiando os aprendentes em suas reflexões e ajudando-os a desenvolver habilidades como a formulação de perguntas, a análise de dados, a construção de argumentos e a comunicação de resultados em matemática.

No segundo capítulo faz-se uma abordagem histórica acerca da Aritmética, evidenciando como o processo evolutivo do ser humano está relacionado ao desenvolvimento das ciências, em especial a matemática. É neste capítulo que realizamos um estudo acerca das repunidades e dos números ondulantes, para tal são elencados os pré-requisitos necessários para a compreensão deste estudo, as propriedades dos números inteiros, o teorema fundamental da aritmética e o estudo de congruências numéricas. A Aritmética é uma das áreas mais antigas da matemática, tendo uma história que se estende por milhares de anos. O termo "aritmética" deriva do grego antigo "arithmos", que significava número ou quantidade. Acredita-se que a aritmética surgiu por volta do século III a.C. na Grécia Antiga, embora diversos povos antigos tenham desenvolvido métodos de contar quantidades e calcular ou operar com os números.

No terceiro, e último, capítulo deste trabalho apresentamos propostas de atividades motivadas por questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP e da Revista do Professor de Matemática - RPM alinhadas com as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), que possibilita que o estudante resolva os problemas de maneira autônoma e utilizando a ideia de investigação. A OBMEP tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área, além de contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica no país, já a RPM é uma publicação periódica que tem como objetivo fornecer recursos para professores de matemática do Ensino Básico, bem como para formadores de professores e pesquisadores na área de educação matemática, ambas compõem fontes de excelente qualidade. À vista disso, espera-se que este trabalho sirva de referência e inspiração para os professores de Matemática da Educação Básica, a fim de ampliar e auxiliar no desenvolvimento da sua profissão, bem como estimular a integração metodológica de investigação no tratamento de alguns assuntos de Aritmética e até em outras áreas da Matemática.

2 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA

A Investigação Matemática, segundo Ponte (2020), é um processo que envolve a exploração, a descoberta e a resolução de problemas matemáticos. É uma atividade que procura estimular a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes, permitindo-lhes desenvolver habilidades matemáticas e outras que podem ser vantajosas para outras áreas da vida. De acordo com Ponte (2020, p. 13) investigar é procurar conhecer o que ainda não se sabe ou conhece. Comumente utilizada para definir a procura por alguma informação. Na matemática a palavra investigar adquire uma definição mais singular, investigar é perceber as relações ou padrões entre objetos matemáticos conhecidos, ou não, identificando suas propriedades ou características no processo.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> • reconhecer uma situação problemática; • explorar a situação problemática; • formular questões.
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> • organizar dados; • formular conjecturas e fazer afirmações sobre uma conjectura.
Testes e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> • realizar testes; • refinar uma conjectura (ou reformular).
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> • justificar uma conjectura; • avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: PONTE (2020, p. 20)

De acordo com o Quadro 1, uma investigação pode ser dividida em quatro momentos principais. Primeiro há o **reconhecimento** da situação, no qual aborda a exploração preliminar e questões são formuladas. Após esse momento inicial, há a **organização** de dados e a formulação de conjecturas. O terceiro momento envolve a realização de teste e o refinamento das **conjecturas** formuladas anteriormente. Por último, há o momento de avaliação e **justificação**, na qual a conjectura deve ser demonstrada ou justificada e o raciocínio, ou o resultado dele, deve ser avaliado.

E em contextos de ensino e aprendizagem? Ainda de acordo com Ponte (2020, p. 9), investigar não é necessariamente trabalhar com problemas sofisticados que usam de conhecimentos profundos. “Investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.” (PONTE, 2020, p. 9)

Surge então o questionamento no processo de ensino aprendizagem, seria possível utilizar a Investigação Matemática como metodologia para inspirar as atividades realizadas por estudantes e professores em sala de aula? Ponte (2020, p. 22) diz que as investigações matemáticas fazem parte das atividades que se relacionam com a resolução de problemas.

Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. [...] Os exercícios têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambiguidades.[...] Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas - a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes. (PONTE, 2020, p. 22)

A Investigação Matemática pode proporcionar aos aprendentes o agir matemático, não apenas formulando questões e conjecturas ou realizando provas ou refutamentos, mas na apresentação de resultados, interação e discussão com seus colegas por meio da argumentação.

Ponte (2020, p. 23) adverte que o professor não deve se limitar a apenas atividades de investigação matemática, há lugar para outras atividades como exercícios e problemas, sendo um desafio a articulação desses diferentes tipos de tarefas, tornando possível a construção de um currículo interessante e equilibrado, capaz de tratar o desenvolvimento e aquisição de conhecimento matemático dos estudantes de modos diferentes.

Como é possível aplicar investigações matemáticas, enquanto metodologia, como atividade para os estudantes em sala de aula? Partindo da ideia de que é possível programar o começo de uma investigação mas não o modo como ela irá seguir e ser finalizada, há três fases pelas quais a investigação matemática na sala de aula ocorre. Essas fases ajudam a organizar a atividade de forma que múltiplas situações ainda podem ocorrer:

- i. introdução da tarefa, no momento o professor propõe a atividade para os discentes;
- ii. realização da investigação, que pode ser individual, por pares, em pequenos grupos ou ainda com turma toda;
- iii. discussão dos resultados, relato do trabalho realizado pelos estudantes para os colegas de turma.

Ponte (2020, p. 25) diz que apesar de haver opções de arranjos para a aplicação da atividade, a mais utilizada é a que os professores oferecem uma pequena introdução, a realização da investigação segue em pequenos grupos e então a discussão dos resultados para toda a turma.

O docente deve proporcionar aos aprendentes atuações em que esta estejam ativas e agir apenas como um regulador da atividade? Embora seja necessário que os estudantes sejam autônomos durante a investigação, o professor deve oferecer ajuda na compreensão do que significa investigar e aplicar esse conhecimento na atividade, além de oferecer auxílio para formularem as conjecturas de modo mais completo e usando os conhecimentos prévios.

O início da atividade de investigação é de suma importância, ainda mais nas primeiras atividades desse tipo de metodologia com a qual os estudantes estão tendo experiência. O professor precisa garantir que os estudantes compreendam o que significa investigar e haja participação e interferências durante a atividade.

Quadro 2 – Explorações com números

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: (PONTE 2020, p. 27).

O Quadro 2 apresenta como exemplo uma atividade de Investigação Matemática descrita por Ponte (2020). A proposta é que os aprendentes possam encontrar relações

entre os números apresentados, podendo até estender a tabela para que outros números apareçam, ajudando a embasar seu pensamento para promover o entendimento e elaboração de conjecturas ou testes.

Veja que, os estudantes podem relacionar as colunas 1 e 3 com os números pares e as colunas 2 e 4 com os ímpares. Os estudantes seguem então para a construção de uma conjectura, devem escrever porquê as colunas 1 e 3 apresentam apenas números pares. Apontar que é porque estes são da forma $2n$, sendo n natural. Após isso, seguem os testes e o refinamento da conjectura. O mesmo raciocínio pode ser utilizado nas colunas 2 e 4, sendo estes apenas números ímpares?

Seria este o desenvolvimento esperado pelo professor. Sendo esse tipo de atividade imprevisível, o professor deve também estar preparado para os casos em que os discentes trazem apontamentos inesperados. O docente deve então buscar averiguar a proposta dos estudantes sem interferir com seu raciocínio. Por vezes isso não é possível ainda durante a atividade, podendo então ser revisada em atividades futuras.

Ainda sobre a atividade proposta no Quadro 2, sendo os estudantes responsáveis por registrarem relatórios, explicando suas conjecturas e estabelecendo conexões com os assuntos já vistos, o professor fica encarregado de acompanhar esse processo sem interferir no desenvolvimento.

A justificação ou demonstração das conjecturas deve ter atenção especial. Por vezes os estudantes podem se perder fazendo os testes das conjecturas e não em dar atenção, ou mesmo em esquecer, a justificação ou prova. Apesar dos testes serem importantes para a concepção da conjectura, a justificativa é o que confere a conclusão dos resultados.

À medida que os estudantes vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE, 2020, p. 40)

É importante que o professor realize uma leitura prévia dos relatórios dos estudantes para que, no momento da discussão, ele possa organizar as apresentações de modo que grupos cujas ideias foram mais desenvolvidas fiquem por último, tornando a discussão produtiva para todos.

O papel do professor pode se tornar um tanto difícil em alguns momentos. Os estudantes devem receber acompanhamento de modo que sua linha de pensamento seja

respeitada sem significativas interferências e, ainda, trabalhar com o conteúdo de modo significativo do ponto de vista da disciplina de matemática.

Os estudantes, por estarem acostumados a respostas explícitas, como apresentar o resultado de uma conta, podem ter certa dificuldade para investigar. Outro ponto a ser considerado é que, ao realizar o acompanhamento dos aprendentes, o professor deve realizar perguntas sobre o progresso sem interferir, como por exemplo corrigir alguma afirmação ou conceito matemático pouco rigoroso. Pode haver certa dificuldade para acompanhar o pensamento dos aprendentes, uma vez que nas fases iniciais eles costumam não registrar seu progresso.

Como dito anteriormente, esse tipo de atividade tem seu fim imprevisível. O professor encara mais um desafio, o de avaliar por si uma conjectura inesperada. Essa avaliação pode ser difícil e ter necessidade de certo tempo para verificar, não sendo possível no momento da discussão, o professor pode apresentar suas próprias conclusões em outro momento. Não deve, o professor, encerrar a discussão ou tornar o argumento do grupo que propôs tal conjectura menos válido.

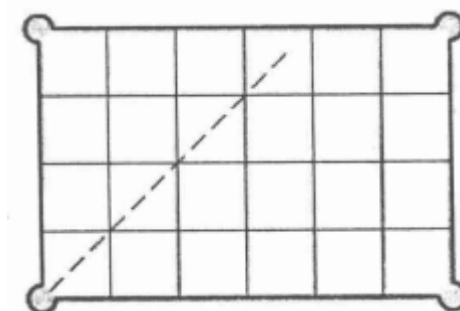
As investigações matemáticas podem ser divididas em subcategorias, aqui trataremos das *investigações numéricas* e *investigações em geometria e estatística*.

2.1 Investigações numéricas

No contexto matemático, as investigações numéricas podem auxiliar para o desenvolvimento do estudante. Tais investigações podem levar o aprendente a descobrir fatos, propriedades ou relações que poderiam não despertar a atenção do estudante se fossem apenas repassados.

Ponte (2020, p. 54) apresenta outra atividade de investigação numérica que será descrita a seguir. A atividade utiliza uma Mesa de Snooker, como no Quadro 3.

Quadro 3 – A mesa de *snooker*



Fonte: PONTE (2020, p. 54)

A mesa de sinuca ou snooker possui algumas características que são importantes para as investigações:

- i. tem apenas quatro buracos, localizados nos cantos da mesa;
- ii. o tampo (da mesa) está dividido em quadrados de medidas iguais;
- iii. tome para unidade o lado de qualquer dos quadrados, pode-se falar que a mesa tem dimensões 6×4 .

A investigação parte do princípio de que, ao jogar uma bola de um dos cantos, sem efeito e numa direção que faz um ângulo de 45° com as tabelas, ela só pare quando cair em um dos buracos. As professoras que aplicaram essa atividade sugeriram duas questões iniciais para a investigação: quantos quadrados a bola irá atravessar e quantas vezes ela irá bater nas bordas da tabelas, contando como batida a entrada da bola em um buraco. Foi recomendado que os estudantes investigassem a relação dos movimentos da bola com as dimensões da mesa.

A atividade foi realizada em pequenos grupos e pelo relato não houve dúvidas quanto ao que era pedido deles. O processo que todos os estudantes usaram foi parecido e as professoras relataram que eles conseguiram usar um raciocínio matemático envolvendo a organização sistemática dos dados, formulação de conjecturas e a realização de certa quantia de testes.

Os alunos devem desenvolver competências numéricas que lhes permitam avaliar se a resposta a uma situação problemática requer um valor exato ou aproximado. Além disso, devem saber estimar o resultado aproximado de uma operação e resolvê-la, de acordo com a complexidade dos valores em causa e das operações, usando o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou a calculadora. Devem também conhecer, perceber e usar relações entre os números e desenvolver uma compreensão dos diferentes conjuntos numéricos. (PONTE, 2020, p. 61)

“O campo dos números também é propício à concepção de tarefas de investigação em que os alunos contatam com aspectos da história da matemática” (Ponte, p. 66). O exemplo da atividade está no quadro *das potências de 2*, à seguir:

Quadro 4 – Das potências de 2

1	2	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶
	$2 + \frac{2}{2} = 3$	$4 + \frac{4}{2} = 6$	$8 + \frac{8}{2} = 12$			
		$6 + \frac{6}{2} = 9$	$12 + \frac{12}{2} = 18$			
			$18 + \frac{18}{2} = 27$			

Fonte: (PONTE, 2020, p. 67)

A atividade aponta que algumas ideias foram desenvolvidas pelo matemático Nicómaco de Gerasa, no século I da nossa era. Apesar de apenas mencionado na atividade, o professor pode ainda levantar outras questões históricas, como: Houve outros matemáticos que utilizaram esse método para o número 2? Ou outro número? Por que muitas tabelas de valores eram criadas antigamente?

“Os estudantes precisam saber interpretar criticamente o modo como os números são usados na vida de todos os dias e a escola deve procurar desenvolver esse tipo de competência. PONTE.” (2020, p. 68)

2.2 Investigações em Geometria e Estatística

A geometria é uma área da matemática que possui características boas para serem aproveitadas nas investigações. Além da possibilidade das tarefas serem aproveitadas, com algumas adaptações, em todos os níveis de ensino, os estudantes podem compreender fatos e relações que vão além da monotonia da memorização de técnicas para resolver exercícios que envolvem o conteúdo.

A atividade presente em Ponte (2020, p. 70), apresentada no Quadro 5, é um exemplo de como a geometria pode ser utilizada como investigação matemática. A atividade *Dobragens e cortes* foi baseada na brincadeira de fazer cortes em papel e brincar com as formas. A ideia é de que os aprendentes utilizem uma folha de papel dobrada ao meio e cortem três tipos de triângulos, equilátero, isósceles e escaleno. Após destacar as formas e desdobrá-las, os estudantes devem indicar quais formas foram formadas. E se a situação for o contrário? Quais formas devem cortar no papel destacado para formar os três triângulos iniciais? E o que acontece se o papel for tiver mais dobragens?

Outros exemplos abordados por Ponte (2020, p. 85) apresentam a utilização de material manipulável, além de ferramentas tecnológicas considerava que todas as salas de aula deveriam oferecer conjuntos de material manipulável e os docentes e discentes

deveriam ter acesso a materiais apropriados para o desenvolvimento de problemas e ideias para exploração.

De acordo com Ponte (2020, p.86), os exemplos apresentados que envolvem investigações geométricas permitem também que o professor siga a recomendação curricular de que deve ser dado tempo e oportunidade ao estudantes para organizar as suas experiências espaciais.

Ainda considerada como um tema novo no currículo de Matemática, a Estatística apresenta conceitos que são utilizados em diversas áreas como a saúde, política e educação.

Ponte (2020, p.100) aponta que diversos estatísticos, como por exemplo Robert Hogg, consideram que a Estatística não deve ser introduzida como uma área da matemática, os alunos devem associar ela ao método científico, a observação, formulação de questões, seleção de dados que são conectados às questões, análise dos dados e comparação de resultados, repetindo o ciclo.

Sendo a Estatística adaptável a diversos campos, o professor pode promover atividades interdisciplinares, além de ser um campo de fácil visualização no dia a dia do estudantes. Apesar de ser um campo que os estudantes têm contato, eles não possuem muita familiaridade com os conceitos, sendo necessário que, antes da aplicação de uma atividade de investigação, o professor introduza aos aprendentes o tema.

2.3 Avaliação do trabalho de investigação

Assim como em outros tipos de atividades, a avaliação serve para que o professor saiba se e como os estudantes estão compreendendo o conteúdo, assim como para que os próprios avaliem seu desempenho. O professor dispõe de diversas ferramentas de avaliação que variam entre oral e dissertativo, individual ou em grupos.

Segundo Ponte (2020, p. 105) “um relatório é uma produção escrita, realizada por um aluno ou por um grupo de alunos, tendo em vista apresentar um trabalho previamente desenvolvido”. Os relatórios podem abordar não apenas as conclusões, mas todo o processo envolvido na investigação, incluindo os caminhos que os estudantes percorreram até chegar a tais conclusões. A falta de experiência dos estudantes com a produção de relatórios pode ser um obstáculo a ser superado. O professor pode elaborar um roteiro para que eles consigam se expressar com maior clareza, além de oferecer sugestões e sanar dúvidas que venham surgir no processo.

Ponte (2020) apresenta escalas unidimensionais de avaliação de relatórios que permitem que o professor atribua notas de acordo com certos aspectos do relatório. A ideia das escalas é de que o professor escolha um ou mais objetivos que possam ser divididos

em diferentes níveis, correspondendo a cada objetivo/nível uma pequena descrição dos aspectos observados nos relatórios.

A primeira escala, presente em Ponte (2020, p. 115-116), classifica os relatórios como 4 - Bom, 3 - Aceitável, 2 - Insuficiente, e 1 - Muito deficiente. As características avaliadas são: ideia principal apresentada, organização das ideias, desenvolvimento do conteúdo, linguagem (incluindo o vocabulário), estrutura gramatical (incluindo a pontuação), e a apresentação (incluindo a ortografia).

A segunda escala, presente em Ponte (2020, p. 116-118), avalia os relatórios de modo que os níveis serão atribuídos de acordo com três características principais: o conhecimento matemático, estratégias e processos de raciocínio, e comunicação. Essas características têm suas próprias particularidades, sendo necessário maior tempo para avaliar o trabalho dos estudantes.

A diferença entre as escalas é que a primeira é mais generalizada, enquanto na segunda é perceptível que as características são mais específicas. A primeira é aconselhável para avaliação rápida, pois não há tanto detalhe como a segunda, esta permite que o professor, e estudante, obtenham mais informações sobre o relatório.

Durante a atividade de investigação o professor, deve estar em constante observação da turma. Essa observação informal também é considerada como uma forma de avaliação do trabalho investigativo dos estudantes. A observação é, por vezes, utilizada para medir o modo como os estudantes realizam uma atividade, se comunicam com seus colegas e se adaptam a situações inusitadas que podem não estar contidas nos relatórios.

Outra forma de avaliação é a apresentação oral, momento em que os estudantes apresentam suas conclusões para os colegas e discorrem sobre seu processo investigativo. Esse tipo de avaliação permite ao estudantes a promoção de suas habilidades de comunicação e argumentação.

Ponte (2020, p. 121) destaca que mesclar as formas de avaliação é o mais recomendado para que os discentes não fiquem entediados ou cansados de um método ou outro. As atividades de investigação podem acabar tomando muito tempo de aula e prejudicando o planejamento inicial, assim o professor deve tomar cuidado para que esse tipo de atividade contribua para o processo de aprendizagem de modo que não ocorram prejuízos ao longo do processo.

Segundo Ponte (2020) as atividades de Investigação Matemática são abordadas nos currículos de modos diversos, variando de acordo com o país. Ponte (2020, p. 125) aponta que nos Estados Unidos da América o termo 'Investigação Matemática' raramente aparece, mas a ideia está implícita na importância que é dada a alguns aspectos que a caracterizam, como a formulação de questões, produção e testes de conjecturas e argumentação de resultados.

Ponte (2020) relata ainda que na Inglaterra a menção ao trabalho de Investigação Matemática começa desde o início dos anos 80. “Em 1988, com a reforma do sistema de avaliação dos alunos com 16 anos de idade, os exames passaram a incluir a realização de um trabalho [...]. Esse trabalho implicava que os estudantes realizassem atividades de exploração e investigação, sendo os respectivos resultados apresentados sob a forma de relatórios”. PONTE (2020, p. 125)

Conforme Ponte (2020), em Portugal há referências diretas ou indiretas a tarefas de natureza investigativa, embora não haja menção a investigação, a formulação de conjecturas tem importante destaque nos documentos curriculares, assim como a criação do espírito de pesquisa no estudantes.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam, entre outros, o desenvolvimento do espírito de investigação, capacidade para resolver problemas e argumentação sobre conjecturas, entre seus objetivos gerais. “Nos PCN, as atividades de investigação surgem em associação estreita com a resolução de problemas, entendida como ‘eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem’. Refere-se que ‘a situação problema é o ponto de partida da atividade matemática [...]’”. PONTE (2020, p. 133)

O professor deve tomar os documentos curriculares como um guia para sua prática de ensino. Considerando características como o tempo disponível, os objetivos da aula, e os objetivos e orientações presentes nos documentos, o professor deve administrar tais aspectos ao definir como a aula será realizada.

Apesar de todos os pontos positivos que as investigações agregam para os estudos em sala de aula, o professor não deve limitar suas aulas a realização apenas desse tipo de atividade. Por ser uma atividade que pode levar mais tempo para ser executada, os estudantes tendem a se sentir cansados caso as atividades se tornem monótonas ou frustrados, caso não avancem.

Ponte (2020, p. 138) conclui que os professores utilizam em suas primeiras atividades de investigação modelos já prontos que podem ter algumas adaptações para sua turma, considerando o nível dos estudantes. Essas primeiras atividades servem também de experiência para o professor que, após se sentir confortável, consegue elaborar atividades mais complexas e específicas para cada turma, considerando assim as particularidades de seus estudantes. Um ponto importante a ser destacado é que os discentes, ao adquirir o hábito de investigar, irão aplicá-lo em outros momentos, não se limitando às atividades e serão capazes de utilizar seu pensamento crítico em outras disciplinas também.

2.4 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular

A Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL,1996) . Sendo baseada na Constituição Federal, ela define e regulariza a educação em seus diferentes níveis e modalidades, sendo competência da União elaborar estratégias e tornar possível que todos tenham o direito à educação assegurado. O Art. 9ª Lei nº 9.394 de 1996 diz que a União está incumbida de:

IV – estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum;

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) constituem uma proposta de reorientação curricular que a Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto oferece as secretarias de educação, escolas, instituições formadoras de professores, instituições de pesquisa, editoras e a todas as pessoas interessadas em educação, dos diferentes estados e municípios brasileiros.

Elaborado na segunda metade da década de 1990, constituem uma das formas de expressão do papel do Estado na busca por coesão e ordem, surge da necessidade de articular demandas nacionais e regionais para que o estudante obtenha conhecimentos indispensáveis para a constituição de sua cidadania, independentemente das condições na quais ele esteja inserido.

Em Matemática, os parâmetros visam a construção de saberes que norteiem as práticas de maneira que possam contribuir com tal construção. Sendo assim,

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (Portal do MEC)

Num mundo globalizado, a educação tem papel de extrema relevância, segundo os PCN's (BRASIL, 1998) a educação deve estar voltada para o desenvolvimento de habilidades de comunicação, re resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoas conhecimentos e valores e de trabalhar cooperativamente. (Portal do MEC)

A matemática possui competências que transpassam todas as outras áreas do conhecimento, proporcionando hábitos de investigar, criar e raciocinar sobre questões e problemas. Deste modo o estudante desenvolve a capacidade de adaptar tais conhecimentos com autonomia e segurança.

Portanto, os PCN's (BRASIL, 1998), em consonância com a BNCC (BRASIL, 2018), inferem à Matemática competências e habilidades subdivididas em três seções: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sócio-cultural.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) foi homologada em 20 de dezembro de 2017 pelo então ministro da educação, Mendonça Filho, e em 14 de dezembro de 2018 pelo ministro da Educação da época, Rossieli Soares, com o acréscimo do Ensino Médio. (BRASIL, 2018)

A BNCC (BRASIL, 2018) foi proposta à medida que surgiu necessidade de se estabelecer um documento normativo que conste diretrizes para o ensino em âmbito nacional. Sendo assim, tal documento evidencia as aprendizagens essenciais de forma a desenvolver competências gerais, ou seja, que abrangem o estudante de maneira que garanta o seu desenvolvimento, sendo que tais competências se desenvolvem de maneira transversal em todas as etapas de ensino.

A BNCC (BRASIL, 2018) apresenta um conjunto de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que devem ser trabalhadas de maneira geral, como apontado acima, e específicas, sendo que tais competências específicas se diferenciam nas etapas de ensino (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), conforme Quadro 5.

No Ensino Fundamental tem-se oito competências específicas para a matemática, das quais os estudantes tem o direito de até o final desta etapa os terem desenvolvido. Já no Ensino Médio tem-se cinco competências específicas que tangem a área de Matemática e suas Tecnologias, conforme Quadro 6.

Quadro 5 – Competências Específicas para a Matemática no Ensino Fundamental

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: (BRASIL,2018 p.271)

Quadro 6 – Competências Específicas para a Matemática no Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018 p.533)

Tais competências trazem a investigação como algo a ser desenvolvido e utilizado pelos estudantes para a constituição de saberem em matemática. Com a investigação, o estudante irá desenvolver conhecimentos e habilidades básicos da matemática nas etapas de ensino fundamental e médio.

A BNCC (BRASIL, 2018) propõe cinco unidades temáticas, das quais devem ser desenvolvidos, estas são: Números, Álgebra, Geometria, Probabilidade e estatística e Grandezas e medidas, em cada uma destas unidades temáticas encontram-se varias habilidades a serem desenvolvidas pelo estudante durante o processo de ensino.

As habilidades na BNCC (BRASIL, 2018) estão organizadas por meio de um código alfa-numérico, da seguinte forma: etapa de ensino; ano escolar ou bloco de anos escolares; componente curricular e, por fim, número da habilidade.

Sendo assim, a habilidade **EF06MA01** refere-se a uma habilidade do ensino fundamental, sexto ano de matemática primeira habilidade. Já a habilidade **EM13MAT106** refere-se ao ensino médio, da primeira a terceira séries, matemática habilidade número 6 da primeira competência.

Nos quadros 7, 8 e 9 estão elencadas habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) do Ensino Básico que fazem referência à Investigação Matemática. É possível desenvolver atividades investigativas que envolvem todas as habilidades, independentemente da Unidade Temática. Este trabalho irá destacar as habilidades de Álgebra e Números, por estarem inseridas no tema central desta pesquisa.

Quadro 7 – Habilidades Números BNCC

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.
(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: (BRASIL, 2018 p.302-317)

Quadro 8 – Habilidades Álgebra BNCC

(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: (BRASIL, 2018 p.302-317)

Quadro 9 – Habilidades Números e Álgebra no Ensino Médio

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BRASIL, 2018 p. 545-546)

A BNCC (BRASIL, 2018) é uma ferramenta importante para garantir a qualidade da educação em todo o país, pois ela estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver, independentemente da região em que vivem ou da escola em que estudam. Ela também ajuda a garantir a equidade na educação, pois define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver, independentemente de sua origem social, cultural ou econômica.

Em resumo, a LDB (BRASIL, 1996), os PCN's (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2018) são instrumentos importantes para garantir a qualidade da educação em todo o país. Eles estabelecem as diretrizes e bases da educação brasileira, orientam a elaboração dos currículos escolares e definem o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica. Com isso, eles criaram para garantir a equidade e a qualidade da educação em todo o Brasil.

3 INTEIROS, REPUNIDADES E NÚMEROS ONDULANTES

Neste capítulo iremos evidenciar alguns dos principais conceitos referentes a aritmética, para isso, foi realizada uma revisão da literatura que fundamenta a base teórica desta pesquisa, com intenção de investigar acerca seu contexto histórico e aplicações, que podem ser consultados em (ALENCAR, 1981), (BOYER,1996), (CADAR, 2015), (CARVALHO, COSTA, 2015), (CARVALHO, COSTA, 2022), (COSTA, COSTA, 2021), (COSTA, SANTOS, 2020), (COSTA, SANTOS, 2022), (EVES, 2011), (HEFEZ, 2016), (HEFEZ, 2009), (PICKOVER, 1990), (PICKOVER, 2003), (ROBINSON, 1994), (ROQUE,2017), (ROQUE, 2012), (SHIRRIFF, 2012) e (TOUMASIS, 1994).

3.1 Aritmética na História

O estudo da história é importante para que compreenda o contexto, o momento ou a situação que estamos inseridos. Em matemática perguntas questionadores podem ser motivadoras para novos conteúdos, e tais quais ‘quem inventou isso?’, ‘pra que estudar isso?’ tem uma resposta na história, pois algumas perguntas já foram feitas e respondidas, e abrem também espaço para uma pesquisa, o diálogo e discussão. Desta maneira, a podemos destacar pontos importantes:

- Compreensão da evolução da matemática: estudar a história da matemática nos permite entender como as ideias matemáticas evoluíram ao longo do tempo. Podemos ver como as descobertas e inovações matemáticas foram feitas, quem as fez e em que contexto histórico elas ocorreram.
- Desenvolvimento do pensamento matemático: a história da matemática também pode nos ajudar a desenvolver nosso pensamento matemático. Ao aprender sobre as abordagens usadas por matemáticas do passado para resolver problemas, podemos ampliar nossa capacidade de encontrar soluções para problemas atuais.
- Ampliação do conhecimento matemático: ao estudar a história da matemática, podemos descobrir áreas da matemática que não conhecíamos antes, bem como elas se relacionam com outras áreas da matemática. Isso pode nos ajudar a ampliar nosso conhecimento e nossa compreensão da matemática.
- Contextualização dos conceitos matemáticos: ao aprender sobre a história da matemática, podemos contextualizar os conceitos matemáticos que estudamos. Isso pode ajudar a torná-los mais atraentes e relevantes para nós.

- Preservação do patrimônio cultural: a história da matemática é um patrimônio cultural que deve ser preservado. Ao estudá-la, podemos contribuir para a preservação e disseminação do conhecimento matemático acumulado ao longo da história.

Essas são apenas algumas razões pelas quais o estudo da história da matemática é importante. Em resumo, a história da matemática pode nos ajudar a compreender a evolução do pensamento matemático, ampliar nosso conhecimento e contextualizar os conceitos matemáticos que estudamos, além de preservar o patrimônio cultural matemático.

Existe uma consciência coletiva de que se deve ir para escola e aprender a ‘ler, escrever e contar’, mas atualmente isso se dá na escola de maneira muito fragmentada, cheias de técnicas, que aparenta ser executada por técnicos ou pessoas que seriam divinas, por conhecer e compreender tais técnicas. Dessa forma, a fragmentação do conhecimento, faz com que não se tenha uma conexão entre temas. A matemática não é algo feito, pronta, ela é extremamente dinâmica.

Segundo Ifrah (1997) houve um tempo em que os homens não sabiam contar, mas é possível supor que o conceito de quantidade (número) deveria revestir no seu espírito. Neste período, o homem primitivo realizava a caça e a pesca, somente o essencial a sobrevivência.

Um bom número de populações ‘primitivas’ contemporâneas parecem igualmente ultrapassadas pelo número, considerado sobre o aspecto conceitual e abstrato. O número é com efeito, ‘sentido’ e ‘percebido’, é aprendido de uma maneira qualitativa, um pouco como se percebe uma dor, uma cor, um barulho ou ainda a presença de um indivíduo ou de uma coisa do mundo exterior. Noutras palavras, esses ‘selvagens’ são afetados pela mudança de aspecto do seu campo visual. Seguindo uma relação direta de sujeito a objeto. Suas capacidades de compreensão dos números abstratos limitam-se, portanto, ao que suas disposições naturais permitem reconhecer numa só olhada. (IFRAH, 1995, p. 10).

De acordo com Eves (2011) alguns conceitos *elementares ou primitivos* então remetem ao homem arcaico como sendo a matemática mais antiga, pois surge o conceito de *número* e do processo de *contar*.

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. (EVES, 2011, p.25)

Muito limitado por sua realidade, o homem primitivo então tinha habilidade de diferenciar quantidades, como por exemplo um mamute de dois ou mais. Sendo percebido na evolução gradual e a criação de animais e controle do rebanho.

Figura 1 – Duas vistas do osso Ishango



Fonte: EVES (2011, p. 26)

É possível que a maneira mais antiga de contar se baseava em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. (EVES, 2011, p.26)

A figura 1 refere-se a um dos primeiros registros conhecidos acerca da preservação do processo de contagem. O registro foi feito utilizando a relação biunívoca entre cada animal e uma marca, utilizando um registrador (*tally*) conhecido com osso de Ishango.

Mesmo de abstrato, o conceito de quantidade ou número ocorreu de maneira concreta com o processo e métodos utilizados para a contagem como por exemplo o osso de Ishango de forma que a compreensão que cada entalhe representa um animal se trata de um processo abstrato.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidades pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. [...]. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo. (BOYER, 1996, p. 4)

Tendo em vista tais momentos, a ideia de número foi se tornando cada vez mais ampla, de forma que maneiras mais sofisticadas e gerais foram surgindo para sua representação e contemplação. Dando sequência ao desenvolvimento da linguagem da Teorias

dos Números. Desta forma a linguagem ou representação que conhecemos hoje é resultado de uma evolução natural do homem.

A impressão de que os sistemas de numeração antigos não eram favoráveis mesmo aos cálculos mais simples é em grande parte baseada na falta de familiaridade com esses sistemas. É claro que a adição e a subtração num sistema de agrupamentos simples requer apenas a capacidade de contar o número de símbolos de cada espécie e a conversão, a seguir, em unidades de ordem superior. (EVES, 2011, p. 38)

Surge então a necessidade do registro e da excussão de operações melhores elaboradas em matemática, o que resulta na utilização do *papiro*, um material similar ao papel, desenvolvido pelos antigos egípcios.

A matemática é muito mais que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas. Felizmente temos outras fontes de informação. Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. (BOYES, 1996, p.8)

Outros materiais foram surgindo, tal qual os pergaminhos feitos de peles de animais que possibilitaram o registro da história e o registro de conhecimentos e técnicas para serem passados para as próximas gerações.

As primeiras evidências de práticas aritméticas datam de cerca de 5000 a.C., com a invenção da escrita na Mesopotâmia Boyer (1996). Os babilônios desenvolveram um sistema numérico sexagesimal, com base 60, que permite a realização de operações complexas, como a resolução de quatro quadráticas. Os egípcios, por sua vez, usavam um sistema decimal, com base 10, e desenvolveram técnicas de multiplicação e divisão por meio da duplicação e da divisão sucessiva.

No mundo grego, a aritmética era vista como uma parte da geometria, e a tensão estava na teoria dos números e na geometria numérica. Segundo Ifrah (1997), o matemático Euclides, em seu livro “Elementos”, estabeleceu as bases da teoria dos números e demonstrou a existência de infinitos números primos. Outro grego notável foi Pitágoras, cujos seguidores desenvolveram a teoria dos números e descobriram a relação entre os comprimentos das cordas de uma lira e as proporções numéricas.

De acordo com Boyer (1996) durante a Idade Média, a aritmética foi considerada uma ferramenta prática para o comércio e as transações financeiras, mas também foi usada para resolver problemas teóricos, como o ‘problema dos números amigos’. No Renascimento, o matemático italiano Leonardo Fibonacci substituiu o sistema numérico hindu-arábico, com base 10, que se tornou o sistema padrão usado em todo o mundo .

Nos séculos XVII e XVIII, Boyer (1996) destaca que a aritmética passou a ser vista como uma disciplina fundamental da matemática, incorporado, a álgebra. O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveu um sistema de notação algébrica, que

permitiu uma resolução de equações algébricas mais complexas, enquanto o matemático francês Pierre de Fermat estabeleceu a teoria dos números e enunciou o famoso ‘Último Teorema de Fermat’, que foi finalmente resolvido em 1995.

Atualmente, Roque (2012) destaca que a aritmética é uma área vital da matemática, usada em vários aspectos da vida, desde o calculado do troco e o planejamento doméstico. A aritmética também é a base para outras áreas da matemática, como a álgebra, a geometria e a análise. Com a crescente importância da tecnologia, a aritmética tornou-se ainda mais essencial, pois é a base para a programação de computadores e para criptografia, que são fundamentais para a segurança da informação.

3.2 Os Números Inteiros

De acordo com Hefez (2016), os números naturais compõem um conjunto cujos elementos são descritos de modo ordenado, sendo o conjunto dos sucessores de um número, iniciado pelo zero e representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}.$$

Uma construção lógica-axiomática dos conjuntos dos naturais pode ser formalizada pelos axiomas de Peano:

A_1 - Zero é um número natural.

A_2 - Todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural.

A_3 - Zero não é sucessor de nenhum natural.

A_4 - Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

A_5 - Se uma coleção S de números naturais contém o zero e também contém o sucessor de todos os seus elementos, então S é o conjunto de todos os naturais.

O conjunto formado pelos números naturais, também chamados de **inteiros positivos**, e pelos números inteiros negativos $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$, é chamado conjunto dos **números inteiros** e é representado pela sucessão numérica:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -(n + 1), -n, \dots, -2 - 1, 0, 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots\}.$$

Tais asserções fundamentam o pensamento aritmético de forma que a teoria é complementada com proposições e teoremas que serão citados por ser de importância para fundamentação teórica e compreensão lógica acerca das "repunidades" e "dos números ondulantes", e ainda as demonstrações podem ser encontradas no referencial teórico desta pesquisa.

Quanto as operações, a adição e a multiplicação são definidas conforme a seguinte proposição:

Proposição 3.1. • *A adição e a multiplicação são bem definidas, isto é, para todos $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$.*

- *A adição e a multiplicação são comutativas, isto é, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.*
- *A adição e a multiplicação são associativas, isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
- *A adição e a multiplicação possuem elementos neutros, isto é, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.*
- *A adição possui elemento simétrico, isto é, para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $b = (-a)$ tal que $a + b = 0$.*
- *A multiplicação é distributiva com relação à adição, isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*
- *Para todo $a \in \mathbb{Z}$ temos que $a \cdot 0 = 0$.*
- *A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade, isto é, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a = b$ se, e somente se $a + c = b + c$.*

No conjunto dos números inteiros define-se a subtração entre dois números como: dados dois números inteiros a e b , define-se o número b menos a , denotado por $b - a$, como sendo $b - a = b + (-a)$, daí $b - a$ é então o resultado da *subtração* de a de b .

Desta forma, em \mathbb{Z} é válido que:

Proposição 3.2. (*Fechamento de \mathbb{N}*): *O conjunto \mathbb{N} é fechado para a adição e para a multiplicação, ou seja, para todos $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que $a + b \in \mathbb{N}$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$*

Proposição 3.3. (*Tricotomia*): *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:*

- i) $a = b$; ou ii) $b - a \in \mathbb{N}$; ou iii) $-(b - a) = a - b \in \mathbb{N}$.*

Do fato de no conjunto dos números inteiros os elementos serem descritos de maneira ordenada, define-se que um número a é *menor que* b , se tal número aparecer *antes* que o número b na sequência, ou ainda podemos dizer que a é *menor que* b uma vez que o a está localizado a *esquerda* de b . A notação $a < b$ será utilizada para descrever que certo número a é *menor que* certo número b . De modo análogo, define-se que um número b é *maior que* a se temos $b > a$.

Assim, a propriedade da tricotomia diz que, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

i) $a = b$; ou ii) $a < b$; ou iii) $b < a$.

Decorre então que a propriedade *transitiva* é verificada.

Proposição 3.4. *A relação ‘menor do que’ é transitiva, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.*

Teorema 3.5. *(Divisão Euclidiana). Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a \cdot q + r, \quad \text{com } r < a$$

Demonstração. Vamos supor que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, b - a, b - 2a, \dots, b - n \cdot a, \dots$$

O conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar.

Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq 0$ e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo

$$r = b - q \cdot a = c + a \iff c = b - (q + 1) \cdot a \in S, \text{ com } c < r;$$

sendo contradição com o fato de r ser o menor elemento de S , o que é um absurdo.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r .

□

Nestas condições, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de a por b .

Exemplo 3.6. *O quociente e o resto da divisão de 2023 por 1010 são 2 e 3, uma vez que $2023 = 1010 \cdot 2 + 3$*

Proposição 3.7. *O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos a e b é denotado por $\text{mmc}(a, b)$ e será chamado de *mínimo múltiplo comum* de a e b (ou abreviadamente *mmc*).*

Proposição 3.8. *Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por $\text{mdc}(a,b)$.*

Proposição 3.9. *Para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, temos:*

- $\text{mdc}(0,a) = |a|, a \in \mathbb{Z}^*$;
- $\text{mdc}(1,a) = 1$;
- $\text{mdc}(a,a) = |a|$;
- $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,a)$;
- $\text{mdc}(0,0)$ não existe;
- Para todo $b \in \mathbb{Z}$ tem-se que $a | b$ se, e somente se, $\text{mdc}(a,b) = |a|$.

Proposição 3.10. *O algoritmo de Euclides é um método eficiente para encontrar o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros. Ele foi descrito pelo matemático grego Euclides em seu livro "Os Elementos", escrito no século III a.C.*

O algoritmo de Euclides para MDC é baseado na propriedade de que, se a e b são inteiros e a é maior que b , então o MDC entre a e b é o mesmo que o MDC entre b e o resto da divisão de a por b . Em outras palavras, o MDC entre a e b é igual ao MDC entre b e $a \bmod b$.

O processo do algoritmo de Euclides consiste em repetir a operação de divisão sucessivamente, utilizando sempre o número menor como divisor. O algoritmo termina quando o resto da divisão é igual a zero, indicando que o último divisor utilizado é o MDC entre os dois números iniciais.

Exemplo 3.11. *Encontrar o MDC entre 84 e 18 usando o algoritmo de Euclides, o processo seria o seguinte:*

84 dividido por 18 resulta em quociente 4 e resto 12 ($84 = 18 \cdot 4 + 12$) Como o resto não é zero, agora dividimos 18 por 12, resultando em quociente 1 e resto 6 ($18 = 12 \cdot 1 + 6$). Como o resto ainda não é zero, dividimos 12 por 6, resultando em quociente 2 e resto 0 ($12 = 6 \cdot 2 + 0$). Como o resto é zero, o MDC entre 84 e 18 é 6.

O algoritmo de Euclides para MDC é bastante eficiente, mesmo para números grandes, uma vez que utiliza o resto da divisão.

3.2.1 Indução Matemática

Segundo Hefez (2016), do quarto axioma de Peano obtêm-se um resultado muito relevante para a aritmética, a indução matemática, que podemos enunciar da seguinte forma: Seja $p(n)$ um sentença aberta tal que:

- i) $p(a)$ é verdadeiro, e que
- ii) $\forall n, p(a)$ e $p(a+1)$ e \dots e $p(n)$ é verdadeiro.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Teorema 3.12. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais r_0, r_1, \dots, r_n menores do que b , univocamente determinados, tais que $a = r_n b^n + \dots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0$.*

Demonstração. Iremos demonstrar o teorema utilizando Indução Matemática sobre a . Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $r_0 = a$, tendo assim uma única representação. Supondo então o resultado válido para todo natural menor do que a , vamos prová-lo para a . Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais $n' \geq 0$ e $0 \leq r_1, \dots, r_{n'+1} < b$ com $r_{n'+1} \neq 0$ univocamente determinados, tais que

$$q = r_{n'+1} b^{n'} + \dots + r_2 b + r_1.$$

Levando em conta as igualdades acima, temos que

$$a = bq + r = b(r_{n'+1} b^{n'} + \dots + r_2 b + r_1) + r$$

donde o resultado segue-se pondo $r_0 = r, n = n' + 1$. □

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b . Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal, e quando $b = 2$, ela toma o nome de expansão binária. A demonstração do Teorema 3.2.2 também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b . Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, & r_0 < b; \\ q_0 &= bq_1 + r_1, & r_1 < b; \\ q_1 &= bq_2 + r_2, & r_2 < b; \end{aligned}$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \dots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n;$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \dots$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \dots$. Temos, então, que

$$a = r_0 + r_1b + \dots + r_nb^n.$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_{b-1}\}$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b-1$. Um número natural a na base b se escreve da forma

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$$

com $x_0, \dots, x_n \in S$, e n natural, dependendo de a , representando o número

$$x_0 + x_1b + \dots + x_nb^n$$

No sistema decimal, isto é de base $b = 10$, usa-se $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Se $b \leq 10$, utilizam-se os símbolos de 0 a 9. Se $b > 10$, utilizamos os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para $b, b+1, \dots, b+k$. No sistema de base $b = 2$, temos que $S = \{0, 1\}$ e todo número natural é representado por uma sequência de 0 e 1. Por exemplo, o número 10 na base 2 representa o número 2 (na base 10). Temos também que

$$(100)_2 = 2^2, \quad (101)_2 = 1 + 2^2, \quad (111)_2 = 1 + 2 + 2^2, \quad 1011 = 1 + 2 + 2^3.$$

Exemplo 3.13. *Vamos representar o número 723 na base 5, por divisão euclidiana sucessiva, temos que*

$$723 = 144 \cdot 5 + 3, \quad 144 = 28 \cdot 5 + 4, \quad 28 = 5 \cdot 5 + 3, \quad 5 = 1 \cdot 5 + 0, \quad 1 = 0 \cdot 5 + 1.$$

Portanto, $723 = 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4$ e, conseqüentemente, 723 na base 5 se representa por 10343, desta forma $723 = (10343)_5$.

Os divisores inteiros de um número representam um novo e muito importante olhar acerca dos múltiplos de um número, de forma que quando a é múltiplo de b dizemos também que a é divisível por b e ainda que b é um divisor de a e caso b seja um divisor

de a representa-se como $b \mid a$ e caso contrário $b \nmid a$.

Proposição 3.14. *Sejam, $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Tem-se que:*

- i) $1 \mid c$, $a \mid a$ e $a \mid 0$;*
- ii) se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.*

3.3 Teorema Fundamental da Aritmética

Um número maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de *número primo* e, um número maior do que 1 e que não é primo é *composto*.

Lema 3.15. *(Lema de Gauss) Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Se $a \mid bc$, então existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ae$. Se $(a, b) = 1$, então temos que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma + nb = 1$. Sendo assim, multiplicando a igualdade por c , obtemos $c = mac + nbc$. Substituindo bc por ae , teremos $c = mac + nae = a(mc + ne)$ e, portanto, $a \mid c$. \square

Este lema estabelece uma relação que permitirá provar vários outros resultados, tais quais o *lema de Euclides*, resultado fundamental de Euclides proveniente da Proposição 30 do livro VII dos *Os Elementos*.

Lema 3.16. *(Lema de Euclides) Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração. Basta provar que, se $p \mid ab$ e $p \nmid a$, então $p \mid b$. Mas, se $p \nmid a$, temos que $\text{mdc}(p, a) = 1$, e o resultado segue-se do Lema de Gauss. \square

Teorema 3.17. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como produto de números primos.*

Demonstração. Iremos demonstrar utilizando o Princípio de Indução. Se $n = 2$ o número é primo, de acordo com o teorema. Consideremos então o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n . Se o número n é primo, nada temos a demonstrar, pois fica de acordo com o enunciado. Consideremos, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 , com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos p_1, \dots, p_r e q_1, \dots, q_s tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$. Portanto, $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$. Vamos, agora, provar a

unicidade da escrita. Suponhamos que tenhamos $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, sendo os p_j e os q_i são números primos. Como $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, (verificar), temos que $p_1 = q_j$ para algum j , que, após reordenamento de q_1, \dots, q_s , podemos supor que seja q_1 . Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares. \square

3.3.1 O Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene foi um matemático, gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrônomo da Grécia Antiga, viveu por volta de 230 anos antes de Cristo, desenvolveu um método, o *Crivo de Eratóstenes*, que possibilita encontrar números primos, que é muito eficaz, mas estritamente lento quando se trata de números muito grandes.

A palavra crivo significa peneira, coador, sendo assim, o crivo de Eratóstenes é um método que separa os números primos dos números compostos em um dado intervalo, de forma que se ‘joga fora’ os números compostos, restando somente números primos.

Lema 3.18. *Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.*

Exemplo 3.19. *Determinar os números primos entre 1 e 20 utilizando o Crivo de Eratóstenes é de tal forma que $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$, sendo assim basta escrever os números de 1 a 20, e eliminar os números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 pois são múltiplos de 2, os números 9, 15 que são múltiplos de 3, determinando assim que os números primos entre 1 e 20 que são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19.*

3.4 Congruência Modular

Segundo Hefez (2016) seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , escreve-se $a \equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 3.20. *Como, $2023 = 4 \cdot 505 + 3$ e $3 = 4 \cdot 0 + 3$, isso significa dizer que $2023 \equiv 3 \pmod{4}$.*

Proposição 3.21. *Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

i) $a \equiv a \pmod{m}$;

ii) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$;

iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$;

Proposição 3.22. *Suponha que $a, b \in \mathbb{N}$ são tais que $b \geq a$. Tem-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid b - a$.*

3.5 Números Ondulantes e Repunidades

Como motivação apresentamos um problema do Banco de Questões da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP, 2022).

Exemplo 3.23. *(BQ OBMEP 2015 - Adaptada) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual $\frac{a}{b}$, em que $a = \underbrace{11\dots11}_{2022}$ e $b = 2020\dots02$, em que o algarismo 2 aparece 1011 vezes alternados por 0.*

Veja que

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots11}_{2022} &= 11 \times \underbrace{1010\dots0101}_{2021} \quad e \\ \underbrace{2020\dots02}_{1011 \text{ algarismos } 2 \text{ e } 1010 \text{ algarismos } 0} &= 2 \times \underbrace{1010\dots0101}_{2021}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{11 \times 1010\dots0101}{2 \times 1010\dots0101} = \frac{11}{2}.$$

Como $\frac{11}{2}$ é irredutível, pois $\text{mdc}(11, 2) = 1$ temos que $11 + 2 = 13$.

Definição 3.24. *Diremos que número natural m é um número suavemente ondulante ou alternado do tipo UZ se for formado apenas pelos dígitos (algarismos) 0 e 1 e é uma sequência alternada dos dígitos 0 e 1, iniciada por 1.*

Exemplo 3.25. *Os números 10, 101, 1010 e 10101010101, e o número $\underbrace{1010\dots0101}_{2021}$ com 1011 algarismos 1 alternados por 1010 algarismos 0, que apareceu no Exemplo (3.23), são exemplos de números suavemente ondulante do tipo UZ.*

De uma forma geral, seja $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal. Dizemos que um número natural N formado por $n > 2$ algarismos é suavemente ondulante ou alternado quando,

$$N = \underbrace{aba\dots ab}_{n \text{ par}} \quad \text{ou} \quad N = \underbrace{aba\dots ba}_{n \text{ ímpar}} \quad \text{com } a, b \in D, \quad a \neq b \text{ e } a \neq 0.$$

Observe que, os números 3535353, 10101010101 e 9494 são suavemente ondulantes.

Em Carvalho e Costa (2022) encontra um estudo acerca dos números *suavemente ondulantes*, no qual apresenta uma lista dos números primos *suavemente ondulantes* menores que 10^{13} , para quaisquer $a \neq b$ em D .

3.5.1 Resultados principais

Por simplicidade (e conveniência) diremos apenas que m é um *número suavemente ondulante* do tipo UZ se $m \in UZ$. Para qualquer natural $m \in UZ$, usaremos a notação $m = uz(n)$ em que $n > 1$ indica a quantidade de dígitos (algarismos) no *número suavemente ondulante* m .

Exemplo 3.26.

- O número $uz(5) = 10101$, possui 3 algarismos 1 alternados por 2 algarismos 0.
- Já o número $uz(8) = 10101010$ possui 4 algarismos 1 alternados por 4 algarismos 0.
- Enquanto que o número $uz(2022) = 1010\dots 01010$ possui 1011 algarismos 1 alternados por 1011 algarismos 0.

Os primeiros resultados são fáceis, mas apresentamos as demonstrações para que o trabalho fique o mais autocontido possível.

Proposição 3.27. *Costa e Costa (2021): Se n é par então $uz(n)$ termina em 0, caso contrário $uz(n)$ termina em 1.*

Demonstração. Tomemos n par então para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ temos $n = 2k$, agora basta ver que $uz(n) = uz(2k)$ é da forma

$$\begin{aligned} uz(2k) &= \underbrace{10 \ 10 \ \dots \ 10}_{k \text{ vezes}} \\ &= 10 \cdot \left(\underbrace{101 \dots 101}_{2k-1 \text{ algarismos}} \right) \\ &= uz(2k-1) \cdot 10. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De igual modo, para n ímpar temos

$$uz(2k+1) = \underbrace{10 \ 10 \ \dots \ 10}_{k \text{ vezes}} 1.$$

E obtemos o resultado. □

Dados os naturais n, k_1 e k_2 tais que $k_1 + k_2 = n$, seja $uz(n)$ um número suavemente ondulante com k_1 algarismos 1 alternados por k_2 algarismos 0 e escrevemos $uz(n) = 1_{k_1}0_{k_2}$. Segue da Proposição 3.27 o Corolário seguinte

Corolário 3.28. *Se $n = 2k$ é par então a quantidade de 1's e 0's em $uz(n)$ são iguais e $uz(n) = 1_k0_k$.*

Demonstração. Utilizando indução sobre k . Para $k = 1$, temos $uz(2) = 10$, que tem 1 número um e 1 número zero, o que é verdadeiro. Suponhamos que para algum k tenhamos $uz(2k) = 1_k0_k$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 100 e adicionando 10, obtemos: $uz(2k+2) = uz(2k) \cdot 100 + 10 = (1_k0_k) \cdot 100 + 10$, como $uz(2) = 10$, podemos reescrever a igualdade da forma:

$$\begin{aligned} uz(2(k+1)) &= uz(2k+2) = uz(2k) \cdot 100 + uz(2) \\ &= (1_k0_k) \cdot 10^2 + 10 \\ &= 1_{k+1}0_{k+1}. \end{aligned}$$

O que garante que a asserção é verdadeira para $k+1$. Logo, obtemos que ela é válida para todo k natural. \square

Corolário 3.29. *Se $n = 2k+1$ é ímpar então, em $uz(n)$, a quantidade de 1's é $k+1$ e a de 0's é k , ou seja, em $uz(n) = 1_{k+1}0_k$.*

Demonstração. Como $uz(2k+1) = uz(2k) \cdot 10 + 1$, temos então, que do Corolário 3.29 a quantidade de 1's e 0's são iguais a k , em $uz(2k+1)$ será então acrescentado um algarismo 1, logo $uz(n) = 1_{k+1}0_k$. \square

Lembramos que um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $m = b^2$. Nosso principal resultado é mostrar que

Teorema 3.30. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é um quadrado perfeito.*

Apresentaremos uma demonstração do Teorema 3.30 na Seção 3.5.4.

Exemplo 3.31. *Por inspeção direta nos divisores dos 6(seis) primeiros números suavemente ondulantes UZ obtemos que:*

1. o número $uz(2) = 10 = 2 \cdot 5$ não é primo;
2. o número $uz(3) = 101$ é **primo**;
3. o número $uz(4) = 1010 = 10 \cdot 101$ não é primo;
4. o número $uz(5) = 10101 = 111 \cdot 91$ não é primo;

5. o número $uz(6) = 101010 = 10 \cdot 10101$ não é primo;
6. o número $uz(7) = 1010101 = 101 \cdot (10^4 + 1)$ não é primo .

No Exemplo (3.31) listamos apenas uma fatoração, a título de exemplo, quando o número $uz(n)$ é composto. Outro resultado interessante acerca dos números suavemente ondulantes $uz(n)$ é o seguinte:

Teorema 3.32. *Teorema 5 de Costa e Costa (2021): Exceto 101, nenhum número suavemente ondulado $uz(n)$ é primo.*

Na próxima seção apresentaremos uma demonstração adaptada de Costa e Costa (2021). Aqui este resultado nos será útil para demonstrarmos o Teorema 3.30.

Em complemento ao Exemplo 3.31 apresentamos também a Tabela 1, com os números suavemente ondulantes $uz(n)$ e alguns fatores para n ímpar com $5 \leq n \leq 21$.

Tabela 6 – Fatores

n	$uz(n)$	Fatoração
5	1_30_2	$111 \times (10^2 - 10 + 1)$
7	1_40_3	$101 \times (10^4 + 1)$
9	1_50_4	$11111 \times (10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
11	1_60_5	$10101 \times (10^6 + 1)$
13	1_70_6	$1111111 \times (10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
15	1_80_7	$1010101 \times (10^8 + 1)$
17	1_90_8	$111111111 \times (10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
19	$1_{10}0_9$	$101010101 \times (10^{10} + 1)$
21	$1_{11}0_{10}$	$11111111111 \times (10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$

Fonte: Elaboração própria

3.5.2 Demonstração do Teorema 3.32

Segue da Proposição 3.27 que o número suavemente ondulado $uz(2k)$ é múltiplo de 10 (par e múltiplo de 5) e portanto não é primo, isto justifica a seguinte propriedade

Proposição 3.33. *Nenhum número suavemente ondulado $uz(2k)$ é primo.*

Para mostrarmos o caso em que n é ímpar, no número suavemente ondulante $uz(n)$, vamos precisar de mais ferramentas. Antes o

Exemplo 3.34. *Para qualquer x natural, temos que*

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1 .$$

De fato, vejamos

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= \left((x^2 + 1) + x\right)\left((x^2 + 1) - x\right) \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 - x^2 \\ &= x^4 + x^2 + 1 . \end{aligned}$$

Podemos generalizar essa ideia usando três somas de Progressões Geométricas (PG). Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural a seguinte igualdade ocorre

$$\begin{aligned} &(x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \dots + x^2 - x + 1) \\ &= \frac{x^{2q+1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{2q+1} + 1}{x + 1} = \frac{x^{4q+2} - 1}{x^2 - 1} = x^{4q} + x^{4(q-1)} + \dots + x^2 + 1 . \end{aligned}$$

Isto prova o seguinte resultado:

Lema 3.35 (COSTA e COSTA, 2021). *Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural a seguinte igualdade ocorre*

$$\begin{aligned} &x^{4q} + x^{4(q-1)} + \dots + x^2 + 1 \\ &= (x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \dots + x^2 - x + 1) . \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de apresentar a

Proposição 3.36. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é primo, com $n > 3$ ímpar.*

Demonstração. O caso em que n é ímpar, será feito considerando dois casos, visto que $n > 1$ ímpar acarreta que existe um natural $q > 0$, tal que $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$.

Caso tenhamos $n = 4q + 1$, segue do Lema 3.35, fazendo $x = 10$, que $uz(n)$ não é

primo, visto que

$$\begin{aligned} uz(n) &= 10^{4q} + 10^{4(q-1)} + \dots + 10^2 + 1 \\ &= (10^{2q} + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1) \\ &\quad (10^{2q} - 10^{2q-1} + 10^{2q-2} - \dots + 10^2 - 10 + 1) . \end{aligned}$$

Já no caso em que $n = 4q + 3$, o algarismo 0 ocupa a posição central, assim escrevemos $n = 2k + 1$ para algum natural k . Agora basta ver que

$$\begin{aligned} uz(n) &= \underbrace{101 \dots 01}_k \text{ dígitos} 0 \underbrace{101 \dots 01}_k \text{ dígitos} \\ &= uz(k) 0 uz(k) \\ &= uz(k) \cdot 10^{k+1} + uz(k) \\ &= uz(k) \cdot (10^{k+1} + 1) . \end{aligned}$$

Logo $uz(k)$ é um divisor de $uz(2k + 1)$.

Em ambos os casos obtemos que $uz(n)$ não é primo, quando n é ímpar. \square

O Teorema 3.32 é consequência direta das Proposições 3.33 e 3.36.

3.5.3 Nenhum número repunidade é um quadrado perfeito

Para mostrarmos que nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é um quadrado perfeito, Teorema 3.30, necessitamos de um resultado correlato sobre os números suavemente ondulantes.

Os números *repunidades* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, que apresentam um padrão e algumas propriedades bem definidas as quais despertam o interesse de matemáticos. O termo *repunidades* é referente aos números naturais R_n que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1, n vezes. Assim, para todo $n \geq 1$, $\mathbf{R}_1 = \{1, 11, 111, 1111, \dots, R_n, \dots\}$ representa o conjunto dos números *repunidades*. Na língua portuguesa, um estudo e propriedades adicionais sobre as *repunidades* podem ser consultadas em Carvalho e Costa (2015), Costa e Santos (2020, 2022) ou em Ribenboim (2001).

Proposição 3.37. (Costa e Santos, 2020) e (Hefez, 2016); *Exceto $R_1 = 1$, nenhum outro R_n é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Aqui utilizaremos os seguinte fato: *um quadrado perfeito é da forma $4q$ (par) ou $4q + 1$ (ímpar), e portanto nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$,*

que pode ser consultado em HEFEZ (2016).

Para $n \geq 2$ temos:

$$R_n = \underbrace{\underbrace{111 \cdots 111}_n}_{n \text{ algarismos}} = 10^2 \left(\underbrace{\underbrace{111 \cdots 1}_{n-2}}_{n-2 \text{ algarismos}} \right) + 11 .$$

Como 4 divide 10^2 , e $11 = 4 \times 2 + 3$, obtemos que $R_n = 4q + 3$, para algum inteiro positivo q . Como nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, então podemos concluir que exceto R_1 nenhum outro número *repunidade* será quadrado perfeito. \square

3.5.4 Demonstração do Teorema 3.30

Nesta seção, para o caso em que n é ímpar vamos utilizar o clássico resultado conhecido como *algoritmo do maior divisor comum* entre dois números inteiros.

Lema 3.38. [*Algoritmo de Euclides*] (HEFEZ, 2016) *Dados os inteiros a, b , com $b = aq + r$ para q e $0 \leq r < |b|$ inteiros. O maior divisor comum entre a e b é dado por*

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, r) .$$

Para mostrar isso, deve-se provar que o conjunto dos divisores positivos de a e b é o mesmo conjunto dos divisores positivos de b e r , portanto seus máximos também são iguais, fica como desafio ao leitor, ou consultar HEFEZ (2016). O Algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do Lema acima. Como os restos formam uma sequência estritamente decrescente, o algoritmo para quando atingimos o resto 0. Se o *mdc* de dois números é igual a 1, dizemos que os números são coprimos ou primos entre si.

Ao modo da Seção (3.5.2), vamos separar em dois casos, n par ou ímpar. E o Teorema 3.30 será uma consequência direta dos próximos resultados.

Proposição 3.39. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n par.*

Demonstração. Para todo natural par $n > 1$ existe um natural $k > 0$, tal que, $n = 2k$. Segue da Proposição 3.27 que $uz(2k)$ termina em 0, portanto $uz(2k)$ é par e se for um quadrado perfeito, será da forma $4q$ para algum inteiro q . Da Equação (3.1) temos que $uz(2k) = uz(2k - 1) \times 10$. Como 10 é fator de $uz(2k)$, e novamente pela Proposição 3.27, $10 = 2 \cdot 5$ (nem 2 e nem o 5) não é fator de $uz(2k - 1)$, pois $uz(2k - 1)$ é ímpar terminado em 1. Logo nenhum $uz(2k)$ é quadrado perfeito. \square

Para organizar e facilitar a leitura, o caso em que n é ímpar será feito considerando dois casos, $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$. Em ambos os casos, vamos mostrar que os fatores

dados na Proposição 3.36 são coprimos.

Proposição 3.40. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n ímpar da forma $n = 4q + 1$.*

Demonstração. Tomemos $n = 4q + 1$, pela Proposição 3.36 temos que $uz(n)$ não é primo, e temos a fatoração

$$uz(n) = (10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1)(10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1) .$$

Vamos mostrar que o $\text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1, 10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1) = 1$. Pelo Algoritmo de Euclides (Lema 3.38), temos que

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1, 10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1) \\ &= \text{mdc}(10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1, 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10) \\ &= \text{mdc}(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-3} + \dots - 10 + 1, 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10) . \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 10^{2q-1} + 9 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 9 \cdot 10 + 1 \\ &= 4 \cdot (2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10) + 10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1 . \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-3} + \dots - 10 + 1, 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 10) \\ &= \text{mdc}(2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10, 10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1) \\ &= \text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1, 10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 - 1) . \end{aligned}$$

Veja que os números $10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1$ e $10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 - 1$ são ímpares consecutivos, assim

$$\text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1, 10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 - 1) = 1 .$$

Como $\text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 + 1, 10^{2q-1} + 10^{2q-3} + \dots + 10 - 1) = 1$, concluímos que os fatores do número suavemente ondulante $uz(4q + 1)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator uma *repunidade* maior que 1, a qual pela Proposição 3.37 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q + 1)$ não é um quadrado perfeito. \square

Proposição 3.41. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para o número n ímpar da forma $n = 4q + 3$.*

Demonstração. Temos $n = 4q + 3$, novamente pela Proposição 3.36 temos que $uz(n)$ não é primo, reescrevendo $n = 2k + 1$, obtemos a fatoração

$$uz(n) = uz(2k + 1) = (10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1)(10^{2q+2} + 1) .$$

Primeiro, veja que

$$\begin{aligned} & (10^2 - 1)(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1) \\ = & 10^{2q+2} + 10^2 \cdot 10^{2q-2} + \dots + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 - 10^{2q} - 10^{2q-2} - \dots - 10^2 - 1 \\ = & 10^{2q+2} + 10^{2q} + \dots + 10^4 + 10^2 - 10^{2q} - 10^{2q-2} - \dots - 10^4 - 10^2 - 1 \\ = & 10^{2q+2} - 1 . \end{aligned}$$

Como $10^{2q+2} + 1 = (10^{2q+2} - 1) + 2$. Outra vez, pelo Algoritmo de Euclides (Lema 3.38) segue que

$$\begin{aligned} & mdc(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 10^{2q+2} + 1) \\ = & mdc(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2) . \end{aligned}$$

Como o número $10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1$ é ímpar, temos que $mdc(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2) = 1$.

Como $mdc(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2) = 1$, concluímos que os fatores do número suavemente ondulante $uz(4q + 3)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator um número suavemente ondulante $uz(4q + 1)$, a qual pela Proposição 3.40 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q + 3)$ não é um quadrado perfeito. \square

3.5.5 Mais resultados

Dados os números a e b dizemos que b é um divisor de a , ou a é múltiplo de a , se existir um número c tal que $a = b \cdot c$.

O próximo resultado mostra uma relação entre os números suavemente ondulantes e repunidades.

Proposição 3.42. *Se $n = 4q + 1$ então $uz(n)$ é múltiplo de R_{2q+1} .*

Demonstração. No Lema 3.35, fazendo $x = 10$, basta ver que

$$R_{2q+1} = 10^{2q} + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1 .$$

\square

E mais, observando a Tabela 1, constatamos que $uz(5)$, $uz(6)$, $uz(9)$ e $uz(11)$ são também múltiplos de 3. De uma forma geral, temos

Proposição 3.43. *Se $n = 3k$ é par ou $n = 3k + 2$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 3.*

Demonstração. Basta observar que no primeiro caso a quantidade de algarismos 1's é o inteiro $\frac{3k}{2}$, enquanto que no segundo caso é $\frac{3(k+1)}{2}$. Portanto nos dois casos a quantidade de dígitos 1's também é múltiplo de 3. \square

O mesmo argumento é válido para 9, e de modo similar para qualquer outra potência de 3.

Proposição 3.44. *Se $n = 9k$ é par ou $n = 9k + 8$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 9.*

Agora vamos apresentar uma definição um pouco mais geral que a Definição 3.24 .

Definição 3.45. *Diremos que número suavemente ondulante m é do tipo AZ se for formado apenas pelos dígitos 0 e a e é uma sequencia alternada dos dígitos 0 e a , iniciada por a , com $a \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$.*

Exemplo 3.46. *Os números 10, 202, 3030, 20202 e 40404040404 são exemplos de números suavemente ondulantes do tipo AZ.*

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 3.32. E fica como desafio provar (justificar) que:

Proposição 3.47. *Se $a \neq 1$ e $n \geq 2$ então nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é primo.*

O resultado seguinte é uma consequência do Teorema 3.30. E fica como desafio provar:

Proposição 3.48. *Nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é quadrado perfeito, para $n \geq 2$.*

Proposição 3.49. *Critério de divisibilidade por 11.*

Primeiro, notamos que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, desta forma tem-se que $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$ e $10^{2n+1} \equiv -1 \pmod{11}$.

Sendo assim, seja a um número na base decimal representado da seguinte forma $a = 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$ de forma que:

$$\begin{array}{rcl}
a_0 & \equiv & a_0 \pmod{11} \\
10a_1 & \equiv & -a_1 \pmod{11} \\
10^2a_2 & \equiv & a_2 \pmod{11} \\
\vdots & \equiv & \vdots
\end{array}$$

Somando cada uma das congruências tem-se que: $a = 10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pmod{11}$

Desta forma, o preenchimento de divisibilidade por 11 é baseado na soma alternada dos dígitos do número em questão. Para determinar se um número é divisível por 11, seguimos os seguintes passos:

- Começando pela direita, somamos os dígitos em índices ímpares a_0, a_2, \dots e subtraímos a soma dos dígitos em índices pares a_1, a_3, \dots .
- Se o resultado da subtração for um número múltiplo de 11 (ou zero), então o número original é divisível por 11. Caso contrário, não é divisível.

Exemplo 3.50. *Verificar se o número 1718046 é divisível por 11. Veja que a soma dos dígitos em índices ímpares é $6+0+1+1=8$; e a soma dos dígitos em índices pares é $4+8+7=19$. Assim a subtração destes é $19 - 8 = 11$. Como o resultado da subtração é 11, concluímos que o número 1718046 é divisível por 11.*

Exemplo 3.51. *Verificar se o número 123456789 é divisível por 11. Temos que a soma dos dígitos em índices ímpares é $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$; enquanto a soma dos dígitos em índices pares é $8 + 6 + 4 + 2 = 20$. Por fim, a subtração destes é $25 - 20 = 5$. Como o resultado da subtração não é um múltiplo de 11, concluímos que o número 123456789 não é divisível por 11.*

De acordo com Carvalho e Costa (2022) é comum encontrarmos números suavemente ondulantes que sejam múltiplo de 11, basta que tenham uma quantidade par de dígitos, pois os dígitos em posições ímpares são os mesmos dos dígitos nas posições pares, sendo então as somas iguais e a subtração múltiplo de 11 (igual a 0).

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo evidenciaremos algumas competências e habilidades a serem desenvolvidas pelo estudantes. Nosso propósito é que tais competências e habilidades possam ser desenvolvidas mediante atividades de caráter investigativo, possibilitando ao estudante criar, testar e conjecturar. As atividades propostas abordam conceitos e práticas relacionadas a repunidades e números suavemente ondulantes, conteúdos que foram abordados no Capítulo 3.

Para tal, foi realizada uma revisão de literatura que incluiu a consulta de artigos em periódicos, livros ou dissertações como referência ou motivação para a elaboração da atividades propostas neste, os quais listamos (CARVALHO, COSTA, 2015), (CARVALHO, COSTA, 2022), (COSTA, COSTA, 2021), (COSTA, SANTOS, 2020), (COSTA, SANTOS, 2022), (OBMEP, 2022), (PICKOVER, 1990), (PICKOVER, 2003), (ROBINSON, 1994), (SHIRRIFF, 2012) e (TOUMASIS, 1994). Para além disto as atividades para educação básica, habilidades a serem desenvolvidas, seguem orientações apontadas na BNCC (BRASIL, 2018).

O primeiro problema a ser apresentado aqui pode ser relacionado com as habilidades (EF06MA05), (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), (EF07MA07), (EF07MA14), (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e também a (EM13MAT315).

Sendo um problema da OBMEP é possível utilizá-lo em diferentes níveis de ensino, estando atento a maneira a ser apresentada ou explorada em cada um deles para resolução do mesmo, pois atendemos níveis como o 6º ano do ensino fundamental não esta ainda familiarizado com linguagem algébrica por exemplo, mas o problema pode ser remediado a estas ferramentas, o que o torna ainda mais interessante.

Atividade 1. (OBMEP 2022- Adaptado) *Os números naturais maiores do que 1 estão escritos em uma tabela de acordo com o padrão apresentado na figura abaixo.*

Figura 2 – Tabela OBMEP 2022

1ª. Linha	↻	9	↻	17	↻	25	...
2ª. Linha	2	8	10	16	18	24	...
3ª. Linha	3	7	11	15	19	23	...
4ª. Linha	4	6	12	14	20	22	...
5ª. Linha	5	↻	13	↻	21	↻	...

Fonte: OBMEP 2022

- a) Qual é a linha em que aparece o número 101?
- b) Qual é a linha em que aparece o número 11111?
- c) Qual é a linha em que aparece o número 2023?

Comentário:

Observando a tabela algumas dúvidas surgem antes de resolver a atividade: há algum padrão na localização dos números? Procurando nas colunas, nota-se que em cada coluna temos uma seta e mais quatro números, ora subindo e ora descendo. Sendo assim, em qual linha está a seta que aponta para baixo? E a seta que aponta para cima? Isto ocorre sempre?

Existe um padrão na aparição dos números que se relacionam com as cinco linhas da tabela, ou em relação as colunas? É possível conjecturar que ocorra um padrão de repetição dos números nesta tabela, para assim localizar um número qualquer?

Apesar do problema sugerir a localidade do número em relação as linhas da tabela, temos que na primeira linha aparecem: seta para baixo, o número 9, seta para baixo, o número 17, seta para baixo, o número 25,.... Já na segunda linha aparecem 2, 8, 10, 16, 18, 24,.... Nota-se também que a cada duas colunas os números seguem um mesmo padrão, tendo uma quantidade de 8 números. Desta forma conjectura-se: existe um padrão de repetição a cada 8 números?

Observe o número 2, o primeiro a aparecer na tabela, está localizado na segunda linha e, $8 + 2 = 10$, que também está na segunda linha, temos ainda que $8 + 8 + 2 = 8 \cdot 2 + 2 = 18$ que da mesma forma está na segunda linha. Utilizando o padrão a cada 8 números, encontramos somente números na segunda linha, partindo desta mesma linha, desta maneira é possível caracterizar qualquer número que esteja na segunda linha?

Para verificar é necessário realizar a divisão por 8, uma vez que, sendo esse o padrão de repetição encontrado uma questão: a divisão localizaria qualquer número? Por exemplo, o número $10 = 8 \cdot 1 + 2$ e está localizado na segunda linha, mas o número $24 = 8 \cdot 3$ também está na segunda linha. A divisão por 8 possibilita os restos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, necessitando assim localizar cada um destes possíveis restos na linha da tabela para então localizarem qualquer número.

O número 1 não aparece nessa contagem, sendo assim a divisão que obtiver resto 1 estará localizada em qual local da tabela? O número 2 está na segunda linha, desta maneira o número cujo resto da divisão por 8 for 2 estará na segunda linha e assim por diante, tendo então o número 8, localizado também na segunda linha com resto 0 na divisão. As linhas então poderão localizar dois restos distintos? E as linhas com setas, o que pode significar?

A tabela abaixo, Figura 3, correlaciona o resto na divisão por 8 com a localização do número na tabela. Desta maneira, podemos indicar a localização de qualquer número natural, exceto o 1, na tabela da Figura 2. Assim:

Figura 3 – Restos da divisão por 8

1ª. Linha		1
2ª. Linha	2	0
3ª. Linha	3	7
4ª. Linha	4	6
5ª. Linha	5	

Fonte: Elaboração própria

- (a) Como $101 = 8 \cdot 12 + 5$, ou seja, $101 \equiv 5 \pmod{8}$, estando então na quinta linha.
- (b) E, $1111 = 8 \cdot 138 + 7$, ou seja, $1111 \equiv 7 \pmod{8}$, estando então na terceira linha.
- (c) E ainda seja $2023 = 8 \cdot 252 + 7$ ou $2023 \equiv 7 \pmod{8}$, estando também na terceira linha.

Podem surgir outras perguntas como, as setas nessa tabela, aparecem de que forma? Tem relação com o que já foi concluído até então? •

O próximo problema esta relacionado com as habilidades da BNCC (Brasil, 2018) (EF06MA05), (EF06MA06), (EF07MA01), (EF07MA05), (EF07MA07) e também (EF08MA11).

Nos demais níveis, como o ensino médio, os estudantes devem ter maior facilidade por já conhecer e ter trabalhado com números primos, mas o problema ainda é interessante, pois o estudante irá precisar encontrar estratégias para validar sua resposta. Para o caso em que os aprendentes ainda não estudaram tal conteúdo é possível ainda aplicar essa atividade, fazendo pequenas adaptações e estar ciente que sua aplicação poderá exigir mais tempo para que os aprendentes possam aproveitá-la ao máximo.

Atividade 2. *Um número natural maior que 1 é primo quando ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. No quadro abaixo, marque um X nos números que não são primos.*

Figura 4 – Tabela Números

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

101	102	103	104	105
106	107	108	109	110
111	112	113	114	115
116	117	118	119	120
121	122	123	124	125
126	127	128	129	130
131	132	133	134	135
136	137	138	139	140
141	142	143	144	145
146	147	148	149	150

Fonte: Elaboração própria

Comentário:

Os estudantes, já de início, devem notar que o número 1 não é primo pela definição apresentada no enunciado. A partir dessa interpretação, outras asserções vão surgindo naturalmente, de forma que o estudante possa verificar cada número da tabela, se ele está de acordo com a definição de número primo. Sendo assim, o mesmo irá verificar que o número 2 é primo, uma vez que ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. O mesmo vale para o número 3.

Seria o número 4 primo? Este questionamento leva à discussão do porquê o número 2 é o único número par que é primo. Temos que o número 4 é divisível por 1, 2 e 4, ou seja, por causa do divisor 2, que é diferente do número 1 e 4, ele não atende aos critérios para ser primo, logo o número 4 não é primo. De modo análogo é possível excluir todos os números pares, exceto o próprio 2 que já foi verificado que é primo, pois todos têm o número 2 como divisor além do 1 e do próprio número em questão, não atendendo a definição de primo.

Daí, pode-se criar conjecturas e verificar cada um dos números conforme a definição ou excluir os números que, se for o caso, sejam divisíveis pelos números primos verificados, pois sendo o número a divisível por 1, por um primo b e o próprio a é o suficiente para que a não seja primo. Sendo assim, segue:

- excluir os números múltiplos de 2;
- excluir os números múltiplos de 3;
- excluir os números múltiplos de 5;

- excluir os números múltiplos de 7;

Desta forma, teremos resultante do primeiro quadro da figura 4:

Figura 5 – Eliminando números primos

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Fonte: Elaboração própria

Evidenciando então o crivo de Eratóstenes para encontrar números primos.

Para a segunda etapa da atividade, espera-se que os estudantes a realizem com mais convicção e testem então suas conjecturas, desta maneira

- riscar inicialmente todos os múltiplos de 2, conforme a Figura 6

Figura 6 – Eliminando números múltiplos de 2

101	102	103	104	105
106	107	108	109	110
111	112	113	114	115
116	117	118	119	120
121	122	123	124	125
126	127	128	129	130
131	132	133	134	135
136	137	138	139	140
141	142	143	144	145
146	147	148	149	150

Fonte: Elaboração própria

- riscar todos os múltiplos de 3 e 5

Figura 7 – Eliminando números múltiplos de 3

101	102	103	104	105
106	107	108	109	110
111	112	113	114	115
116	117	118	119	120
121	122	123	124	125
126	127	128	129	130
131	132	133	134	135
136	137	138	139	140
141	142	143	144	145
146	147	148	149	150

Fonte: Elaboração própria

Figura 8 – Eliminando números múltiplos de 5

101	102	103	104	105
106	107	108	109	110
111	112	113	114	115
116	117	118	119	120
121	122	123	124	125
126	127	128	129	130
131	132	133	134	135
136	137	138	139	140
141	142	143	144	145
146	147	148	149	150

Fonte: Elaboração própria

- riscando agora 119 e 133 que são múltiplos de 7 e 121 e 143 que são múltiplos de 11, como $13^2 = 169$, eliminados todos os múltiplos de 2,3,5,7 e 11, de acordo com o Crivo de Eratostenes todos os números que restaram na tabela são números primos.

Figura 9 – Tabela com primos entre 101 e 150

101	102	103	104	105
106	107	108	109	110
111	112	113	114	115
116	117	118	119	120
121	122	123	124	125
126	127	128	129	130
131	132	133	134	135
136	137	138	139	140
141	142	143	144	145
146	147	148	149	150

Fonte: Elaboração própria

Uma sugestão é que o professor peça para os estudantes pesquisarem sobre o Crivo de Eratóstenes, assim a atividade fluirá melhor e será possível tratar de assuntos mais avançados.

Este problema é de caráter prático e investigativo, no qual o estudante tem diante de si a necessidade de criar a melhor estratégia para catalogar os números em primos ou compostos (não primos). Sendo assim, a atividade pode ser realizada como uma investigação numérica.

O próximo problema está relacionado com as habilidades a seguir, **(EF06MA05)**, **(EF06MA06)**, **(EF06MA14)**, **(EF07MA01)**, **(EF07MA05)**, **(EF07MA07)**, assim como **(EF07MA14)**, **(EF07MA15)**, **(EF07MA16)**, e também a **(EF08MA11)** e **(EM13MAT315)**.

De maneira similar ao problema anterior, esse é mais adequado para o ensino médio, com a diferença que é esperado que os estudantes tenham mais ferramentas para a resolução deste de forma que o problema se descaracterize em uma Investigação Matemática.

Atividade 3. *Quais os divisores dos números 101 e 1010?*

Comentário:

Note primeiro que este problema trata de números monodígitos e suavemente ondulantes. Uma ideia para resolvê-lo é fatorar ou decompor cada um destes números em produtos de números primos, e assim verificar quais são os divisores primos deles e então combinar os fatores primos de modo que os compostos apareçam também, tornando a resposta completa uma vez que é pedido os divisores e não apenas os fatores primos. Os números não primos, chamados de compostos, serão a combinação dos fatores primos, uma vez que um número composto pode ser fatorado em fatores primos.

Como então fatorar agora o número 101? Sabemos que 2,3,5,7 e 11 são números primos facilmente verificáveis pelo Crivo de Eratóstenes. O maior deles é 11, e $11^2 = 121$, como 101 não é divisível por 2,3,5,7 ou 11, podemos então concluir que 101 é primo, como visto, é o único número suavemente ondulado primo.

Sabemos que 1010 é suavemente ondulado mas não é primo, pois é par, então partimos para encontrar os divisores do número 1010. Precisamos encontrar todos os números inteiros que dividem exatamente 1010 sem deixar resto. Podemos começar por fatorar 1010 em seus fatores primos $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$. Agora, podemos encontrar os divisores de 1010 listando todas as combinações possíveis de seus fatores primos 1, 2, 5, 10, 101, 202, 505 e 1010.

Portanto, os divisores do número 1010 são 1, 2, 5, 10, 101, 202, 505 e 1010.

Para encontrar os divisores de um número, também pode ser feita uma lista de todos os números inteiros positivos menores ou iguais à raiz quadrada do número e verificar se cada um deles é um divisor. Depois, basta verificar os divisores restantes, que serão obtidos dividindo o número original pelo divisor encontrado anteriormente. Sendo assim, para encontrar os divisores de um número, você pode seguir os seguintes passos:

- (a) Liste todos os números inteiros positivos menores ou iguais à metade do número em questão.
- (b) Teste se cada um desses números divide exatamente o número em questão. Para fazer isso, divida o número em questão pelo número testado e verifique se o resultado é um número inteiro. Se for, então esse número é um divisor do número em questão.
- (c) Além disso, deve também incluir os números 1 e o próprio número como divisores.

Por exemplo, para encontrar os divisores de 44, podemos seguir esses passos:

- (a) Os números inteiros positivos menores ou iguais à metade de 44 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 22.
- (b) Testando cada um desses números, encontramos que 1, 2, 4, 11, 22 e 44 dividem exatamente 44.
- (c) Portanto, os divisores de 44 são: 1, 2, 4, 11, 22 e 44.

Para encontrar os divisores de 99, podemos seguir os mesmos passos:

Os números inteiros positivos menores ou iguais à metade de 99 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 e 46.

Testando cada um desses números, encontramos que 1, 3, 9, 11, 33 e 99 dividem exatamente 99. Portanto, os divisores de 99 são: 1, 3, 9, 11, 33 e 99.

Para encontrar os divisores do número 101, podemos seguir os mesmos passos: os números inteiros positivos menores ou iguais à metade de 101 são entre 1 e 50; testando cada um desses números, encontramos que apenas o número 1 e o próprio número 101 dividem exatamente 101; portanto, os divisores de 101 são: 1 e 101. Note que como 101 é um número primo, ele só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Para o número 1010 o processo se torna exaustivo por ser um número com 4 dígitos, sendo assim, analisando os resultados anteriores é válido notar que $1010 = 10 \cdot 101$, e que os divisores de 101 já foram listados, e os divisores de 10 podem ser encontrados de maneira trivial. Como os divisores de 101 são, conforme listado, 1 e o próprio 101 e os divisores de 10 são 1, 2, 5 e 10, quais serão então os divisores de 1010? Testando cada combinação

destes divisores, tem-se que os divisores de 1010 são 1, 2, 5, 10, 101, 202, 505 e 1010. Uma sugestão de atividade é observar a fatoração de um número e a quantidade de divisores.

•

A atividade anterior também pode despertar perguntas sobre os números primos como ‘há uma quantidade finita deles?’, ‘qual o maior número primo conhecido?’, ‘por que tem pessoas pesquisando sobre os números primos atualmente?’ e quantos são os divisores próprios de um número?

O próximo problema está relacionado com as habilidades já vistas (EF06MA05), (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), (EF07MA07), além da (EF07MA14), (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e (EM13MAT315).

Atividade 4. (Toumasis, 1994). Os números repunidades (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, que apresentam um padrão e algumas propriedades bem definidas as quais despertam o interesse de matemáticos. O termo repunidade se refere aos números naturais R_n que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1, n vezes. Assim, para todo $n \geq 1$, $R_n = \underbrace{111 \cdots 111}_{n \text{ algarismos}}$. Por exemplo, $R_4 = 1111$. Sendo assim, efetue:

(a) $R_6 + R_4$

(b) $R_6 - R_4$

(c) $R_6 \cdot R_4$

(d) Encontre o quociente e o resto da divisão de R_6 por R_4 .

Comentário:

É possível obter o resultado de maneira direta:

$$(a) \begin{array}{r} 111111 \\ + \quad 1111 \\ \hline 112222 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{r} 111111 \\ - \quad 1111 \\ \hline 110000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \times \quad 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 \text{(c)}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 3\ 2\ 1
 \end{array}$$

$$\text{(d)} \quad \begin{array}{r|l}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1 & 1\ 0\ 0
 \end{array}$$

Tais operações podem ser resolvidas de maneira prática, mas seus resultados e métodos utilizados evidenciam características relacionadas a repunidades e conceitos de sistema posicional.

Seja $R_n = \underbrace{111 \dots 111}_n$, então $R_i + R_j$ terá somente algarismos 1 ou 2, o 1 caso ele não seja adicionado a nenhum outro algarismo 1, e o 2 caso seja adicionada as parcelas $1 + 1$, desta forma, teremos:

$$\begin{aligned}
 R_{13} + R_{13} &= \underbrace{222 \dots 222}_{13 \text{ dígitos}} \\
 R_{14} + R_6 &= \underbrace{11111111}_8 \text{ dígitos } \underbrace{222222}_6 \text{ dígitos}
 \end{aligned}$$

desta forma, de maneira geral teremos que, dados $i, j \in \mathbb{N}$, os seguintes casos para calcularmos $R_i + R_j$:

- i) Se $i = j$, $R_i + R_j = \underbrace{222 \dots 222}_{i, j \text{ dígitos}}$, ou apenas $2 \cdot R_i$ ou ainda $2 \cdot R_j$, do qual então todos os algarismos da resposta são compostos pelo número 2.
- ii) Se $i > j$, ou $i < j$, $R_i + R_j = \underbrace{111 \dots 11}_{i-j \text{ dígitos}} \underbrace{222 \dots 222}_j \text{ dígitos}$. Sendo então da direita para esquerda os primeiros j algarismos compostos somente pelo número 2 e os demais pelo número 1. É válido evidenciar que de $i < j$, ou $i > j$ então então a parte comum a interseção composta pelo algarismo 2, já que será adicionado 1 de cada um dos números e a diferença entre os intervalo não haverá adição, tendo então 1 como soma.

O dispositivo prático utilizado para alcançar o resultado final o encontra sem muitas conclusões, mas destes resultados questiona-se então: Como resolver operações com repetições da unidade? Estas respostas tem uma ‘cara’?

Sugestão: Realizar operações com outras repunidades.

Sendo assim, dados $i > j$ que:

$$R_i + R_j = R_{i-j} \cdot 10^j + 2 \cdot R_j$$

$$R_i - R_j = r_{i-j} \cdot 10^j$$

$$R_i \times R_j = 123\dots321 \bullet$$

Dependendo do grau de conhecimento do professor, esse conteúdo pode não ser muito familiar, o que torna essa proposta ainda melhor pois possibilita ao professor a construção do conhecimento junto com os estudantes. Por vezes há o sentimento que o professor deve saber de todo conteúdo e responder todas as dúvidas dos aprendentes sobre os mais variados assuntos, mas isso não é verdade. O professor, mostrando que não sabe de tudo, estabelece com os aprendentes uma relação mais empática, se sentem compreendidos e mais inclinados a fazerem perguntas.

O problema a seguir está relacionado as habilidades **(EF06MA05)**, **(EF06MA06)**, **(EF06MA14)**, **(EF07MA01)**, **(EF07MA05)**, **(EF07MA07)**, **(EF07MA14)**, assim como a **(EF07MA15)**, **(EF07MA16)**, **(EF08MA11)** e **(EM13MAT315)**.

Atividade 5. (OBMEP 2008) Roberto quer escrever o número $R_6 = 111111$ como um produto de dois números, nenhum deles terminado em 1. Isso é possível? Como?

Comentário:

Primeira questão que surge é quando o produto de dois números quaisquer, nenhum deles terminado em 1 tem como algarismo das unidades o próprio 1?

Para que seja possível encontrar tais dois números, é preciso verificar quais são seus divisores, sabendo quais números tem seu produto resultando no número $R_6 = 111111$ é possível obter arranjos diferentes entre dois desses números.

É fato que $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, tendo que o produto da unidade 3 pela unidade 7 resulta em unidade 1, e o produto de unidade 1 por unidade 1 resulta, também, em unidade 1. Não é possível que esses números sejam arranjados entre si pois violam o critério de não terminar em 1.

Logo, o produto deverá ser necessariamente dos números $3 \cdot 13 = 39$ e $7 \cdot 37 = 259$, e para encontrar dois números cujo produto resulte no número R_6 , basta escolher um destes para ser fator com o 11.

Escrevendo todas as possibilidades de produtos e evitando os que apresentam o algarismo 1, obtemos:

$$3 \cdot 37037; 7 \cdot 15873; 13 \cdot 8547; 37 \cdot 3003;$$

$$33 \cdot 3367; 39 \cdot 2849; 77 \cdot 1443; 259 \cdot 429; 143 \cdot 777; 407 \cdot 273.$$

•

Apesar de ser um problema ‘simples’, ele consegue despertar algumas perguntas interessantes para os alunos, e até mesmo o professor, como: Qual a relação desse problema com o anterior? Esse método funciona para o caso onde tais números cujo produto resulta em R_6 , sejam eles a e b , não podem terminar em outro número além do 1? Quais números estão presentes nas unidades de a e b apresentadas pelos arranjos dos divisores de R_6 ? E se o número fosse um múltiplo de R_6 , no que isso afetaria a e b ?

O próximo problema está relacionado as habilidades (EF06MA05), (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), (EF07MA07), (EF07MA14), e também a (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e (EM13MAT315).

Atividade 6. *Determinar o maior divisor comum entre 878787878787 e 787878787878.*

Comentário:

É fácil notar 878787878787 se trata da repetição alternada dos algarismos 8 e 7, nesta ordem, e 787878787878 da repetição dos algarismos 7 e 8, nesta ordem. Então quais são os divisores destes números?

Sabemos que 878787878787 não é divisível por 2, logo 2 não pode ser um divisor comum entre eles. Ambos são divisíveis por 3 de acordo com o critério de divisibilidade¹ por 3 pois $8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 = 90$ e 90 é um múltiplo de 3, logo temos que $878787878787 = 3 \cdot 292929292929$. Note que ambos números 878787878787 e 787878787878 tem a mesma quantidade de algarismos 7 e 8, assim a divisibilidade é análoga e, portanto, podemos escrever $787878787878 = 3 \cdot 262626262626$. Temos agora a repetição alternada dos algarismos 2 e 9, e 2 e 6.

É possível repetir essas operações até chegarmos ao maior divisor comum entre os números 878787878787 e 787878787878 mas será que não há outra forma mais rápida ou até mesmo mais fácil de chegar na mesma conclusão? O que se pode concluir sobre fatoração e repetição então? Há algum tipo de padrão?

Sendo os números 878787878787 e 787878787878 múltiplos de 87 e de 78, respectivamente, temos que: $878787878787 = 87 \cdot 10^{10} + 87 \cdot 10^8 + 87 \cdot 10^6 + 87 \cdot 10^4 + 87 \cdot 10^2 + 87 = 87 \cdot (10^{10} + 10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) = 87 \cdot (10101010101)$ e $787878787878 = 78 \cdot 10^{10} + 78 \cdot 10^8 + 78 \cdot 10^6 + 78 \cdot 10^4 + 78 \cdot 10^2 + 78 = 78 \cdot (10^{10} + 10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) = 78 \cdot (10101010101)$ Perceba, então, que o número 10101010101 divide ambos e, como o 3 também divide ambos podemos concluir que o maior divisor comum entre os números 878787878787 e 787878787878 é dado por $3 \cdot 10101010101 = 30303030303$.

Como conferir que essa resposta está correta? Podemos dividir ambos os números 878787878787 e 787878787878 por 30303030303 e confirmar. Como $878787878787 = 3 \cdot 10101010101 \cdot 29$ e $787878787878 = 3 \cdot 10101010101 \cdot 26$. Como 29 é um número primo

¹ Um número é divisível por 3, se a soma de seus algarismos é divisível por 3

não temos mais opções para múltiplos, logo o maior divisor comum entre os números 878787878787 e 787878787878 é o número 30303030303.

Há ainda outra forma de resolver esse problema que não foi citado? •

O próximo problema está relacionado com as habilidades previstas na BNCC (EF06MA05), (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), assim como a (EF07MA07), (EF07MA14), (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e (EM13MAT315).

Atividade 7. (OBMEP- Adaptado) *Três asteroides passaram pela Terra em 2016, sendo que Arkanoide passa de 13 em 13 anos; Bumeroide passa de 21 em 21 anos; e Clivonoide passa de 37 em 37 anos. Qual será o próximo ano em que os três passarão novamente pela Terra?*

Comentário: Os estudantes, ao analisarem o enunciado devem avaliar as situações, questionando: em quais anos o asteroide Arkanoide irá passar? E o Bumeroide? e o Clivonoide? Começando pelo ano que já sabemos que ambos asteroides passaram pela Terra, e como temos a duração de suas órbitas os anos em que cada um vai passar pela Terra são:

Arkanoide: 2016, 2029, 2042, 2055, 2068, 2081, ...

Bumeroide: 2016, 2037, 2058, 2079, 2100, 2121, ...

Clivonoide: 2016, 2053, 2090, 2127, 2164, 2201, ...

Listando algumas poucas datas nas quais os asteroides irão passar observa-se que nenhuma data foi comum, sendo assim, se torna necessário criar novas alternativas, apontando e discutindo algumas dúvidas.

Podemos reduzir o problema para encontrar o ano em comum de dois asteroides e então encontrar o ano em comum com o terceiro. Logo, quais anos os asteroides Arkanoide e Bumeroide irão passar juntos?

Observando a breve lista feita nota-se que nenhuma data é comum a dois dos asteroides. Estendendo a lista de anos temos que o asteroide Bumeroide passa nos anos de 2016, 2037, 2058, 2079, 2100, 2121, 2142, 2163, 2184, 2205, 2226, 2247, 2268, e 2289, sendo que, destas datas o Arkanoide irá passar também em 2289. Sendo assim, o que o 2289 tem em comum com 13 e 21? Tem-se que $2289 - 2023 = 266$ e $266 = 13 \cdot 20$, ou seja, a data que foi comum a eles é uma data múltiplo do período que estes asteroides passam. Para encontrar a próxima data, este múltiplo comum necessita então ser o menor possível, logo daqui $10101 = 13 \cdot 21 \cdot 37$ anos os três asteroides passarão juntos, ou seja, no ano de 10307. •

O problema trata-se de uma situação problema, na qual não está explícito o caminho a ser utilizado para a resolução, possibilitando ao estudante criar conjecturas, explorar a situação e então chegar a uma possível solução.

Esse problema possibilita ainda a interdisciplinaridade com a componente curricular de física, estudando corpos celestes e suas relações com a Terra por exemplo. A atividade propicia também elaborar o algoritmo para o máximo divisor comum (MDC) para três números inteiros.

O problema a seguir pode ser relacionado as habilidades previstas na BNCC (EF06MA05), (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), e também a (EF07MA07), (EF07MA14), (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e (EM13MAT315). Assim como o primeiro problema, por ser um problema da OBMEP, é possível utilizá-lo em diferentes níveis de ensino.

Atividade 8. (OBMEP 2015) *Encontre a fração irredutível*

$$\frac{111 \cdots 111}{202 \cdots 020}.$$

Na fração anterior o numerador representa um número com 2014 algarismos iguais a 1 e no denominador existem 1007 algarismos 2 alternados por algarismos 0.

Comentário:

Algo que rápido se observa é que $202 \cdots 020 = 2 \cdot 101 \cdots 010$ que trata-se da repetição da unidade 1 alternada pelo algarismo 0, tendo então um total de 1007 algarismos 1. É possível pensar na situação com menos repetições?

Nota-se que a quantidade de algarismos 2 é metade da quantidade de algarismos 1 do numerador, sendo assim, a fração $\frac{111111}{202020}$ para ser simplificada é necessário fatorar numerador e denominador. Vejamos este caso:

$$111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \text{ e}$$

$$202020 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37, \text{ logo}$$

$$\frac{111111}{202020} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{11}{20} \cdot \frac{10101}{10101}.$$

Assim a fração pode ser simplificada por $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$. Agora temos que, $101 \cdots 010$ com 1007 algarismos 1 é fator de $111 \cdots 111$ com 2014 também? Vale notar que $111111 = 11 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^2 + 11 = 11 \cdot (10^4 + 10^2 + 1) = 11 \cdot 10101$. Qual o papel do 11 neste produto?

$$\text{Como resultado temos, } \frac{111 \cdots 111}{202 \cdots 020} = \frac{11}{2} \cdot \bullet$$

O problema a seguir pode ser relacionado a habilidade (EF06MA05), assim como

a (EF06MA06), (EF06MA14), (EF07MA01), (EF07MA05), (EF07MA07), (EF07MA14), (EF07MA15), (EF07MA16), (EF08MA11) e (EM13MAT315).

Da mesma maneira que os problemas anteriores, por ser um problema da OBMEP acaba que é possível utilizá-lo em diferentes níveis de ensino, estando atento a maneira utilizada em cada um deles para resolução do mesmo pois níveis como o 6º ano do ensino fundamental não está ainda familiarizado com linguagem algébrica por exemplo, tendo assim resoluções distintas baseadas num mesmo conceito.

Atividade 9. (OBMEP 2011-Adaptada) *O múltiplo irado de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o 110 é ele mesmo.*

- Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

Comentário:

Sabe-se que $1110 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$, sendo assim, seus múltiplos são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 37, 74, 111, 222, 185, 370, 555, e 1110. Destes, o múltiplo irado de 1, 2, 5 é 10 e, do enunciado, temos que o de 3 é 111, sendo assim 6 é candidato.

Sabe-se que 1110 é múltiplo de 6, para que seja o múltiplo irado é necessário que ele seja o menor composto somente pelos algarismos 1 e 0 e, como $6 = 3 \cdot 2$, um múltiplo de 6 é também múltiplo de 3 e de 2. Logo, utilizando critério de divisibilidade de 3 e 2, verifica-se que o múltiplo irado de 6 deverá ser formado por três algarismos 1 e terminar em 0, para ser par e divisível por três. Desta forma verifica-se que o menor múltiplo irado de 1110 é o 6. •

Uma sugestão de atividade é que o professor peça aos estudantes para pesquisarem sobre critérios de divisibilidade.

Apesar de ser perguntado sobre o menor número natural, podem ser levantadas perguntas como ‘e o maior?’, ‘e se o número fosse inteiro?’, ‘e se fosse de outro conjunto, qual diferença isso faz para a resposta? Por que?’.

Este capítulo buscou apresentar questões que, além de trabalharem com competências e habilidades previstas na BNCC, possibilitem abordar o conteúdo pela Investigação Matemática, enquanto metodologia de ensino. Apesar de serem apresentados comentários com possíveis caminhos para a resolução dos problemas há outros meios de chegar no mesmo resultado e, mesmo optando por seguir o caminho previsto aqui, o professor pode sempre instigar o aluno a pesquisar acerca do assunto, orientado-o em sua investigação sem afetar seu processo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma abordagem sobre divisores, múltiplos, e decomposição em fatores primos de um número inteiro ou natural pode ser feita na forma de desafio ou estudo de propriedades aritméticas. Uma apresentação sobre alguns subconjuntos de números inteiros, tais como números *ondulantes* ou *repunidades* pode ser abordado num contexto de matemática recreativa ou com estudantes olímpicos. Nas várias possibilidades, o conhecimento específico aliado ao fascínio que os números, primos ou quadrados perfeitos por exemplo, sempre despertam pode ser utilizado tanto para fixar melhor o conteúdo ou assunto, quanto para despertar no estudante o gosto por problemas desafiadores em Aritmética.

Este trabalho aborda a Investigação Matemática como prática de ensino que possibilite ao estudantes desenvolver habilidades referentes à Educação Básica, em acordo a BNCC(BRASIL, 2018). A Investigação Matemática pode ser uma ferramenta eficaz ao ensinar matemática, uma vez que permite aos aprendentes construir significados e compreensões propriamente ditas dos conceitos matemáticos. Além disso, enquanto metodologia de ensino favorece a aprendizagem autônoma, a descoberta e a resolução de problemas complexos, e assim prepara os estudantes para enfrentar desafios futuros na vida pessoal e profissional. A Investigação Matemática pode despertar nos estudantes a curiosidade e o senso crítico, uma vez que possuem alguma resistência em acatar respostas prontas ou métodos de resoluções que por vezes se sentem obrigados a decorar quando não compreendem o processo para encontrar a solução, ou não são lhes dadas oportunidades para tal compreensão.

Aqui compartilhamos o estudo provocado pela conversa entre os atores, durante a disciplina de Aritmética (PROFMAT), que despertou a curiosidade sobre existência (ou não) de primos ou quadrados perfeitos no conjunto de números *suavemente ondulantes*. Tais questões, foram também apresentadas a estudantes de matemática e esperamos assim despertar o interesse por estes subconjuntos, bem como observar padrões, que são características típicas de um matemático. Os números ondulantes e as repunidades estão principalmente relacionados à sua aplicabilidade ou utilidade em problemas, jogos matemáticos e na Aritmética. Por exemplo, os números ondulantes são frequentemente usados em quebra-cabeças e jogos matemáticos, como o jogo do número ondulante, em que o objetivo é encontrar o próximo número ondulante em uma sequência.

Além disso, o estudo dos números ondulantes pode ajudar a melhor entender propriedades acerca dos números inteiros e sua estrutura, bem como explorar a matemática recreativa e descobrir novas propriedades dos números. Em termos de teoria dos números, os números ondulantes são um tema de pesquisa interessante, pois têm propriedades dis-

tintas que podem ser exploradas e utilizadas para resolver problemas teóricos e práticos. Por exemplo, um problema interessante relacionado aos números ondulantes é o de encontrar uma quantidade de números ondulantes menores que um determinado limite. Esse tipo de problema pode ser resolvido usando técnicas de análise combinatória e teoria dos números. As repunidades também são utilizadas em alguns problemas matemáticos e em jogos de lógica. Além disso, existem aplicações em criptografia e em outras áreas da matemática aplicada. Em resumo, embora os números ondulantes e as repunidades não sejam fundamentais para a matemática básica, eles são uma área interessante de pesquisa que pode ser útil em várias aplicações matemáticas e ajuda a entender melhor as propriedades dos números inteiros.

A partir dos textos apresentados é possível inferir que é possível inserir as investigações matemáticas no cotidiano escolar e suas contribuições para a formação do estudante transcendem a matemática. As atividades propostas demonstram algumas formas de inserção da investigação nas atividades de matemática, e também servem como inspiração para professores e demais pessoas da área da educação. Recomenda-se uma aplicação de tais atividades, possibilitando uma comparação mais direta entre teoria e prática, o que irá possibilitar novas conclusões sobre o assunto.

REFERÊNCIAS

- [1] ALENCAR Filho, Edgard de. **Teoria Elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.
- [2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [3] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.
- [5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2022.
- [6] CADAR Luciana; DUTENHEFNER, Francisco. **Encontros de Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [7] CARVALHO, Fernando Soares de; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o Número $111 \cdots 111$ Como Produto de Dois Números. **RPM: Revista do Professor de Matemática**, n. 87, p. 15-19, 2015.
- [8] CARVALHO, Fernando Soares de; COSTA, Eudes Antonio. Um Passeio Pelos Números Ondulantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 2, p. e3001, 2022. DOI: 10.35819/remat2022v8i2id6043.
- [9] COSTA, Eudes Antonio; COSTA, Grieg Antonio. Existem Números Primos na Forma $101 \cdots 101$. **RPM: Revista do Professor de Matemática**, n. 103, p. 21-22, 2021.
- [10] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Números Repunidades: Algumas Propriedades e Resolução de Problemas. **Professor de Matemática Online - Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836>.
- [11] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Algumas Propriedades dos Números Monodígitos e Repunidades. **RMAT: Revista de Matemática**, Ouro Preto, MG, v. 2, p. 48-58, 2022.

- [12] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- [13] FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores)
- [14] GIL, Antonio Carlos et al. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- [15] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2016.
- [16] HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. Niterói: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2009.
- [17] IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos**, v.1 . Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- [18] OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. [S.l.], 2022. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 31 de Março de 2023.
- [19] PICKOVER, Clifford Alan. Is There a Double Smoothly Undulating Integer?, **Journal of Recreational Mathematics**, v.22, n.1, p. 52-53, 1990.
- [20] PICKOVER, Clifford Alan. **Wonders of Numbers: Adventures in Mathematics, Mind, and Meaning** . (Chapter 52 and 88). Oxford University Press, 2003.
- [21] PONTE, João; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélio. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.
- [22] RIBENBOIM, Paulo. **Números Primos: Mistérios e Recordes** . 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2001.
- [23] ROBINSON, D. F. There Are no Double Smoothly Undulating Integers in Both Decimal and Binary Representation. **Journal of Recreational Mathematics** , v. 26, n. 2, p. 102-103, 1994.
- [24] ROQUE, Tatiana. História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. **Sustinere - Revista de Saúde e Educação**, v. 5, n. 2, p. 375-376, 2017.

- [25] ROQUE, Tatiana Marins; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática** (Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [26] SHIRRIFF, Ken. Comments on Double Smoothly Undulating Integers. **Journal of Recreational Mathematics** , v. 26, n. 2, p. 103-104, 1994.
- [27] TOUMASIS, Charalampos. Exploring Repunits. **School Science and Mathematics**, v. 94, p. 142-145, 1994.