UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Uma abordagem sobre o uso de recursos computacionais como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática.

por

Anselmo de Albuquerque Guerra Júnior[1]

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
Recife – PE

[1]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

PROFMAT

UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Uma abordagem sobre o uso de recursos computacionais como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática.

por

Anselmo de Albuquerque Guerra Júnior

Dissertação julgada adequada para obtenção do titulo de mestre em Matemática, defendida e aprovada por unanimidade em 19/08/2013 pela Comissão Examinadora.

Orientador

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera – PROFMAT, DM-UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago – PROFMAT, DM-UFRPE

Thiago Dias Oliveira Silva

Prof.Dr. Thiago Dias Oliveira Silva – PROFMAT, DM-UFRPE

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro – Dmat - UFRPE

Agosto de 2013

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha avó Maria Anísia Lira dos Santos, o maior exemplo de vida que já tive. Sua partida, aos 2 dias do mês de Abril de 2011 – no exato momento em que começava minha jornada no PROFMAT, em aula inaugural – deixou muitas saudades. Suas lições fizeram com que me mantivesse firme no decorrer do curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, principalmente, a Deus nosso pai, pelo dom da vida, dando-me força e esperança nos momentos mais difíceis;

Aos meus pais, por estarem presentes em todos os momentos de minha vida, dando-me apoio quando mais precisei e por ter me ensinado a ser a pessoa que hoje sou;

À minha tia Joseane de Fátima, pelo amor, carinho e zelo dispensados ao longo de toda minha vida, como se filho seu eu fosse;

À minha esposa Sandra Maria Cavalcanti Guerra, meu presente de Deus, pela grande amiga, companheira, cúmplice e amante que é; pelo incentivo e puxões de orelha que me foram dados para "não deixar a peteca cair" nesta reta final do curso;

Ao ex-aluno Rodrigo Motta, através de quem conheci o Google Sketchup e tomei interesse por utilizá-lo neste trabalho. Suas dicas foram de grande valia.

A todo o corpo docente do PROFMAT-UFRPE, em especial ao Professor Dr. Paulo Roberto Santiago, sempre disponível para nos ajudar, nos mais diversos assuntos relativos ao curso, e ao Professor Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera por todo o conhecimento que me foi passado no decorrer do curso, bem como pela orientação prestada no desenvolvimento deste trabalho;

Aos meus companheiros de turma pela força dada nas dificuldades, pelas exaustivas e divertidas reuniões do grupo de estudos, pelo alto astral que tomava conta de nossos sábados e por todo conhecimento que adquiri com eles. Não teria chegado até aqui sem vocês!

RESUMO

O objetivo desse trabalho é produzir um material que possa servir de referência para professores que almejam incrementar suas aulas presenciais com recursos computacionais, bem como orientar aqueles que pretendem produzir conteúdos voltados para educação à distância (EAD).

Inicialmente, serão apresentados em detalhes os recursos utilizados durante o seu desenvolvimento. Dentre eles um software gráfico para escrita, um software de gravação, um de modelagem 3D, um microfone e uma mesa digitalizadora.

A culminância do trabalho se dará com a elaboração de um roteiro de utilização dos softwares e hardwares escolhidos para produção de uma vídeo-aula com foco na Educação à Distância e com a criação de um acervo de sólidos geométricos com auxílio de um software de modelagem 3D.

PALAVRAS-CHAVE: Educação à distância, Recursos computacionais, Ensino da Matemática, Tecnologia, Vídeo aulas.

ABSTRACT

The aim of this work is produce a reference document for teachers who aspire to enhance their classroom with computer resources, as well to guide who wish to produce content focused on distance learning (ODL).

Initially, the resources used during this work development will be detailed introduced. Among them, a graphic software for writing, a recording software, an 3D modeling software, a microphone and a tablet.

The culmination of the work will be with the development of a script to use the chosen software and hardware to produce a video lesson focusing on distance learning and a collection of geometric solids creation with the aid of a 3D modeling software.

KEYWORDS: Distance Learning, Computing Resources, Teaching Mathematics, Technology, Video Lessons

Sumário

Introdução

Tecnologias são desenvolvidas com o objetivo de suprir as mais diversas necessidades humanas, sempre a fim de otimizar algum processo ou gerar melhorias em nosso bem estar. Assim como nas mais diversas áreas, a tecnologia também se faz presente na educação.

É importante que se evite uma falsa associação da palavra tecnologia de forma exclusiva a recursos computacionais/equipamentos eletrônicos, pois seu conceito é muito mais abrangente.

De acordo com o site Wikipedia [11]:

> Tecnologia (do grego τεχνη — "técnica, arte, ofício" e λογια — "estudo") é um termo que envolve o conhecimento técnico e científico e as ferramentas, processos e materiais criados e/ou utilizados a partir de tal conhecimento ([11] Wikipedia, Acesso em 18 de Julho de 2013).

Podemos, por exemplo, com base nessa definição, concluir que um simples pedaço de giz antialérgico ou um, hoje praticamente obsoleto, retroprojetor, representam artefatos tecnológicos, devido à necessidade do conhecimento técnico e científico envolvidos em sua produção.

Dentre as mais diversas formas de tecnologias disponíveis, vamos nos deter, especificamente, a alguns recursos computacionais neste trabalho. O tema sempre me despertou interesse e encaro essa dissertação como uma oportunidade de discutí-lo com outros professores.

Veremos como utilizar alguns recursos que podem ajudar o professor em suas aulas presenciais ou na produção de conteúdo voltado para Educação à Distância.

No primeiro capítulo, faremos uma revisão de literatura a respeito do uso de novas tecnologias na educação. Discutiremos sua importância na sociedade contemporânea, sua inserção no sistema educacional, a consequente necessidade de qualificação docente e também a resistência oferecida por alguns profissionais.

No segundo, será dada uma descrição das tecnologias utilizadas, dentre softwares e equipamentos (hardware), e qual uso será dado a cada uma delas. Neste capítulo ficará evidente que um dos objetivos do trabalho é utilizar, além de programas específicos, softwares e hardwares projetados para fins diversos como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática.

O terceiro capítulo será dedicado à produção de uma vídeo-aula, com foco na educação à distância. Para isso, serão utilizados, como recursos hardware, um computador pessoal, um microfone e uma mesa digitalizadora. Já como recursos de software, utilizaremos um programa gráfico para escrita, outro para gravação, um aplicativo para apresentação de slides e um software específico para Matemática, o Geogebra. O eixo temático escolhido foi a Geometria Analítica e o tópico abordado foi o estudo da circunferência. Este foi o tema escolhido, devido à possibilidade que o mesmo nos dá de explorar uma quantidade significativa de funcionalidades dos softwares utilizados.

É importante salientar que o principal objetivo desse capítulo não é o conteúdo matemático da aula em si. Apesar de contar com breve resumo teórico e resolução de alguns problemas, o foco do trabalho é mostrar ao professor como elaborar um material audiovisual dessa natureza e não ensinar Matemática de Ensino Médio a um profissional da área.

O quarto e último capítulo destinar-se-á à construção de alguns sólidos geométricos com auxílio de um software de modelagem em três dimensões para serem exibidos aos alunos em aulas presenciais. Foram escolhidos cinco problemas de geometria espacial e, para cada um deles, foi elaborado um roteiro detalhado da construção da figura (sólido) correspondente. Assim como no capítulo anterior, é possível contar com a resolução de cada um dos problemas, mas ressalta-se que o foco é mostrar ao professor como utilizar o software adotado para construir tais figuras.

Para cada um dos sólidos construídos no Capítulo 4, foi gravado um vídeo tutorial com todo o roteiro da construção e no Apêndice 4 deste trabalho encontram-se as URL´s (links) para todos os dez vídeos produzidos durante a elaboração dessa dissertação.

Capítulo 1: Recursos computacionais na Educação

Atualmente, é difícil de pensar em fazer algumas tarefas sem o auxílio de um computador. Determinados procedimentos, quando não impossíveis, se tornam extremamente trabalhosos se realizados sem uso de um recurso computacional.

Segundo Fugimoto e Altoé [2]:

> O desenvolvimento das tecnologias de informação e comunicação, durante as últimas décadas, assumiu um ritmo crescente imprimindo à sociedade novos rumos. As tecnologias são fundamentais para a sobrevivência de nossa sociedade, e desde a invenção da escrita e da imprensa, nada igual tem causado tanto impacto social e estimulado tantas mudanças. ([2] FUGIMOTO E ALTOÉ, 2009, p. 1).

Fugimoto e Altoé [2] (2009) ainda afirmam que é evidente que essas mudanças também atingiriam a organização dos sistemas educacionais e o próprio processo de ensino-aprendizagem.

Embora o reconhecimento da extensa presença e importância dos computadores na sociedade atual seja praticamente unânime, ainda é muito comum encontrar profissionais de educação que oferecem resistência a estes recursos, optando por manter uma forma mais “tradicional” de atuar. Não por acharem que seja melhor, mas sim, por não se julgarem preparados para trabalhar com tais ferramentas.

De acordo com Fugimoto e Altoé [2]:

> Estudos realizados acerca do uso do computador em sala de aula mostram que a maioria das escolas [...] dispõe de laboratórios de informática para serem utilizados pedagogicamente pelos professores e pelos alunos. No entanto, observa-se que o problema de não utilizar o computador não está na falta de equipamentos, mas em professores que busquem

> atender seus alunos neste ambiente. ([2] FUGIMOTO E ALTOÉ, 2009, p. 3).

É fato que a formação do professor no Brasil ainda não é adequadamente voltada para o uso das novas tecnologias em sala de aula. Em outras palavras, não é necessário apenas que haja uma revolução tecnológica nas escolas. Esta revolução também deve se dar na capacitação docente.

Porém, independente de ter ou não sido preparado para trabalhar com tais recursos durante a graduação, enquanto profissional, deve-se sempre buscar por aperfeiçoamento e adequar sua prática às necessidades e mudanças do tempo em que se vive.

Sabemos que o dia-a-dia do professor não seria o mesmo sem o uso desta simples, porém poderosa, máquina. As finalidades mais comuns dadas pelos professores aos computadores são: manter-se informado (leitura de notícias), comunicar-se (e-mails, chats, entre outros), realizar pesquisas, digitar provas, realizar lançamento de notas, etc.

Notemos que as finalidades mencionadas acima são de cunho burocrático, sem influência muito significativa no processo de ensino-aprendizagem, porém, há alguns anos, vários softwares vêm sendo desenvolvidos para fins específicos neste processo. Programas projetados exclusivamente para o ensino da Matemática, como o Geogebra, Cabri, entre outros; sistemas voltados para o ensino da Biologia, Química, História, Geografia, etc.

Softwares dessa natureza podem promover excelentes resultados quando utilizados em sala de aula, pois são ferramentas facilitadoras da aprendizagem e despertam grande interesse do educando.

Porém, é um grande erro da parte do educador acreditar que só é possível utilizar o computador nas aulas de sua disciplina com uso de um software específico. Um software de planilha eletrônica (como o Microsoft Excel ou OpenOffice.org Calc), por exemplo, não foi desenvolvido pensando em ser utilizado numa aula de Matemática, porém, pode ser (e já é) usado como ferramenta de apoio ao ensino de conteúdos como funções, matrizes, noções de estatística, entre outros.

Um dos objetivos desse trabalho é justamente utilizar, além de softwares específicos, recursos originalmente projetados para outros fins como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática.

Capítulo 2: Recursos utilizados

Neste capítulo serão dadas pequenas descrições de cada um dos recursos utilizados no desenvolvimento deste trabalho, bem como a que fim cada um deles se destinará. Informações mais detalhadas e instruções de uso serão dadas nos capítulos subsequentes.

2.1 Hardware básico

Como equipamentos básicos – que dispensam maiores explicações – foram utilizados um computador (desktop ou laptop) e um microfone.

O computador em questão rodava sistema operacional Windows™ 7 Home Premium, 64 bits, com processador Intel® Core I5 e memória RAM de 6GB. Vale salientar que estas não são as configurações mínimas exigidas para produção do material desejado. É possível atingir os objetivos do trabalho com uma máquina mais modesta.

Já para a captação de voz, foi utilizado um microfone simples, estilo headset (fone de ouvido e microfone acoplados, que ficam presos à cabeça do usuário).

2.2 Mesa Digitalizadora

Uma mesa digitalizadora é um dispositivo (hardware) periférico – aparelhos ou placas que enviam e/ou recebem informação do computador – que permitem que se possa desenhar diretamente no computador, por meio de algum software gráfico. Ela consiste de uma superfície plana onde o usuário pode desenhar e/ou escrever com uso de um dispositivo semelhante a uma caneta.

Nos modelos mais básicos, o usuário visualiza diretamente na tela do computador o resultado dos seus “rabiscos”, porém já é possível encontrar modelos mais sofisticados com tela própria de LCD ou LED sobre a qual é possível utilizar a “caneta”.

As mesas digitalizadoras são muito populares entre os designers gráficos e cartunistas, que as utilizam de forma integrada com softwares como o Adobe Photoshop© e o GIMP (GNU Image Manipulation Program – software livre) que, inclusive são capazes de fazer uso da informação de pressão e inclinação da caneta para definir os atributos dos traços (espessura, cor, etc.).

Figura 1 - Mesa digitalizadora Wacom Bamboo Connect

Já no oriente, esses tablets são amplamente utilizados de forma integrada com softwares de edição de entrada para facilitar a escrita com caracteres específicos daquela região.

Outro grupo que também se beneficia deste recurso é o dos criadores de desenhos técnicos e usuários de softwares de CAD (computer-aided design ou desenho assistido por computador). Por fim, há quem as utilize como um simples substituto do mouse convencional, alegando menor risco de ocorrência de lesão por esforço repetitivo (LER).

Neste trabalho a utilizaremos como um substituto do mouse, a fim de facilitar o processo escrita, juntamente com qualquer software gráfico. Isto ajudará o professor na hora de gravar uma resolução de questão comentada, por exemplo.

O modelo utilizado será o Bamboo Connect ™, da marca Wacom ®. É uma mesa simples, compatível com os sistemas operacionais Windows ® e Mac OS ® e se comunica com o computador, através de uma conexão USB. Acompanha porta caneta, pontas suplentes e pacote de softwares, dentre os quais se encontra o Sketchbook® Express, que pode ser utilizado como uma “lousa virtual” para escrita do professor, como mostra a figura abaixo:

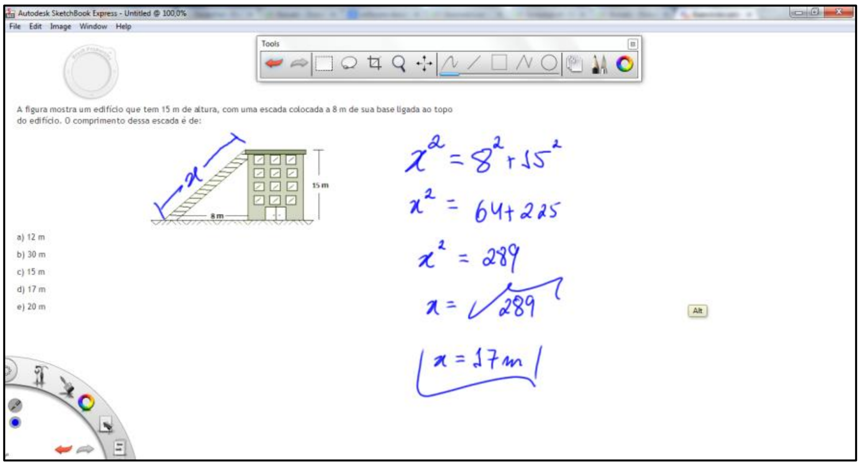


Figura 2 - Software Autodesk SketchBook Express

O motivo da escolha deste equipamento foi sua facilidade de uso e o baixo custo de aquisição.

2.3 ScreenHunter

O ScreenHunter é um software gratuito cuja finalidade é realizar capturas de tela (também conhecidas como capturas de ecrã ou screenshots). Pode-se tirar uma screenshot da tela inteira, de uma janela específica de algum aplicativo que esteja aberto ou de uma área retangular da tela. A versão adotada foi a 5.0 Portable. O termo Portable é utilizado para indicar um software portátil, que dispensa instalação e pode ser aberto a partir de uma mídia flash, como um pendrive, por exemplo.

A sua saída pode ser para um arquivo de imagem ou simplesmente para a área de transferência do computador, para posterior "colagem" em algum outro aplicativo (um editor de texto ou software gráfico, por exemplo).

Neste trabalho o aplicativo foi utilizado para "fotografar" enunciados de questões e/ou figuras localizados em documentos de texto, PDF ou sites da internet para posterior colagem no software gráfico utilizado para escrita da resolução. A questão localizada na *Figura 2*, por exemplo, foi capturada a partir do ScreenHunter e colada no Sketchbook.

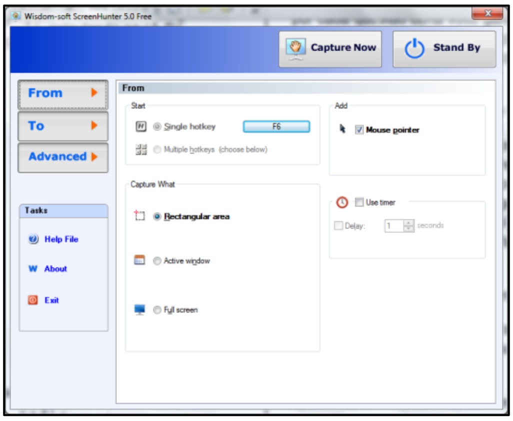


Figura 3 - ScreenHunter 5.0 Free

2.4 Apowersoft Free Screen Recorder

Este software foi o escolhido para a geração dos screencasts. Screencast é a gravação da saída de vídeo do computador, podendo ou não conter o áudio integrado. É amplamente utilizado para gravação de tutoriais, que podem ser gravados em DVD ou publicados na internet em sites como o YouTube™.

Este aplicativo foi o escolhido por ser gratuito e possuir recursos avançados, como seleção da entrada de áudio (permitindo, inclusive, que se possa gravar simultaneamente do microfone e do som do sistema), comandos por tecla de atalho, pausa/retorno, configuração da qualidade de saída de som e imagem, possibilidade de gravar imagem da webcam, dentre outras possibilidades.

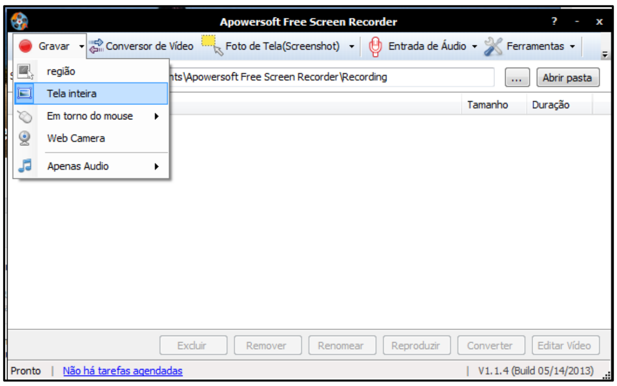


Figura 4 - Apowersoft Free Screen Recorder

2.5 Google Sketchup 8

O Sketchup é um software para geração de modelos 3D no computador. É um programa proprietário, mas que possui versão gratuita com menos recursos do que a versão completa, mas com funcionalidades suficientes para a finalidade que queremos.

O programa foi originalmente desenvolvido pela empresa At Last Software, que foi comprada pela Google em 2006. Disponível para os sistemas operacionais Windows™ e MacOS™, o software encontra-se na versão 8.0 e seu download pode ser realizado no site do desenvolvedor em vários idiomas.

Os principais usuários do Sketchup são designers de móveis, engenheiros, escultores, desenhistas técnicos e outros profissionais que necessitem de visualização em três dimensões. Os modelos criados podem ser usados para gerar animações ou imagens estáticas sob qualquer ângulo de perspectiva desejado.

Também é possível contar com um vasto acervo de modelos prontos na internet, compartilhados entre os diversos usuários do Sketchup ao redor do mundo.

Utilizaremos esta ferramenta para criar sólidos geométricos como pirâmides, cones e prismas, com o objetivo específico de utilizá-los em aulas de geometria espacial, exibindo-os aos alunos sob os mais diversos ângulos, de modo que seus elementos característicos (alturas, faces laterais e da base, geratrizes, etc.) possam ser melhor visualizados e explorados.

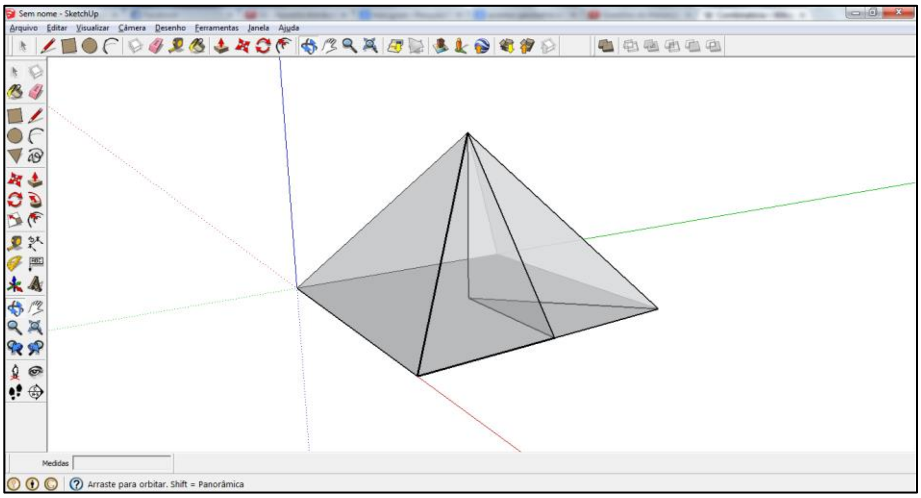


Figura 5 - Pirâmide de base quadrada desenhada no Google Sketchup 8

2.6 eInstruction Interwrite Workspace

Dentre os softwares utilizados, o Interwrite Workspace® é o único cuja licença não é gratuita. O uso feito deste programa para a realização do trabalho se deu dentro de um período de avaliação grátis de 45 dias, dado pelo desenvolvedor. Qualquer usuário pode realizar o download e testá-lo por este período e, só então, decidir pela compra.

O Workspace® é um software interativo que pode ser utilizado em integração com uma lousa digital. Dessa forma, as imagens do computador são projetadas na lousa, onde poderão ser vistas e manipuladas. O software pode ser controlado no próprio quadro ou no computador, por meio de uma caneta especial.

Já neste trabalho, foi dada ao Workspace a mesma utilidade do Sketchbook: lousa "virtual" – apenas para escrita na tela.

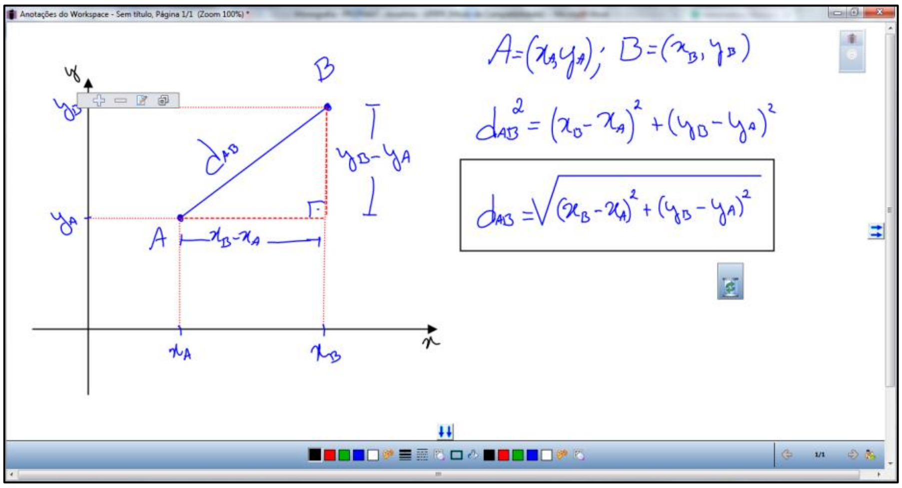


Figura 6 - eInstruction Interwrite Workspace

Embora, visualmente seja muito parecido com o Sketchbook, o Workspace possui dezenas de ferramentas muito úteis não encontradas no software gratuito, como marca-texto, tracejados, pontilhados e setas para as retas e curvas, polígonos, texto, anotações sobre a área de trabalho, régua, compasso, esquadro e transferidor, página quadriculada – semelhante ao papel milimetrado - dentre outras. Esta foi a razão pela opção de testá-lo e compartilhar as impressões com o leitor.

2.7 Geogebra

O Geogebra é um software de distribuição livre, multiplataforma no qual se pode trabalhar conceitos de Geometria e Álgebra numa mesma interface gráfica – a origem do seu nome, inclusive, vem da fusão dessas duas palavras. Esse é, do ponto de vista didático, o seu grande atrativo: poder mostrar, em uma única tela, de forma dinâmica, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Neste trabalho, o Geogebra foi utilizado durante a gravação de uma vídeo-aula de Geometria Analítica, para visualização dinâmica de uma circunferência e sua equação reduzida.

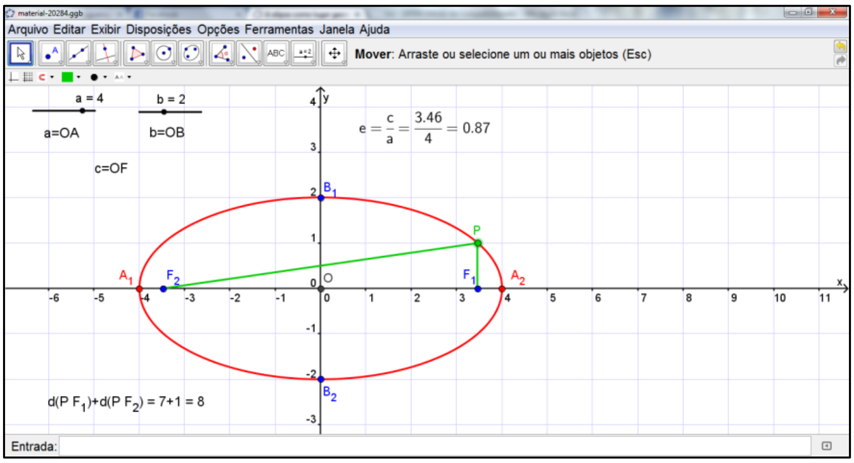


Figura 7 – Área de trabalho do software Geogebra

2.8 LibreOffice

O LibreOffice é um conjunto de aplicativos para escritório, desenvolvido para diversas plataformas (sistemas operacionais). É uma alternativa ao popular Microsoft® Office, sendo inclusive compatível com os seus arquivos, abrindo e editando sem problemas documentos do Word, Excel e PowerPoint.

Fez-se necessário neste trabalho para preparação das apresentações de slides, com o aplicativo LibreOffice Impress, utilizadas nas gravações das vídeo-aulas. O motivo de sua escolha foi o fato de ser um software livre.

Capítulo 3: Elaborando uma vídeo-aula de Geometria Analítica

Neste capítulo veremos como produzir uma vídeo-aula de Matemática com alguns dos recursos apresentados no capítulo anterior. O ramo da Matemática escolhido foi a Geometria Analítica Plana e o tema foi o Estudo da Circunferência.

Serão apresentadas as equações reduzida e geral da circunferência e serão discutidas também as posições relativas entre um ponto do plano e uma circunferência e entre uma reta e uma circunferência.

Antes das instruções técnicas para a preparação da aula, vejamos os seus objetivos e expectativas de aprendizagem (baseados do Currículo de Matemática do Ensino Médio – Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco [8]), seu público alvo e uma breve fundamentação teórica do assunto.

As figuras desse capítulo foram geradas com uso das ferramentas apresentadas no *Capítulo 2* e os exercícios resolvidos são os mesmos utilizados na gravação da aula.

3.1 Objetivos e público alvo:

- Modalidade de ensino: Ensino Médio - Educação à distância;
- Eixo temático: Geometria Analítica;
- Público alvo: Alunos da 3ª Série do Ensino Médio;
- Conteúdos:
    - Equação da circunferência;
    - Posições relativas entre ponto e circunferência;
    - Posições relativas entre reta e circunferência
- Pré-requisitos:
    - Conhecimento do plano cartesiano e representação de pontos neste;
    - Cálculo da distância entre dois pontos no plano (Teorema de Pitágoras);
    - Complementação de quadrados.
    - Equação da reta
    - Distância entre ponto e reta

- Expectativas de aprendizagem:
  - Associar a equação de uma circunferência à sua representação no plano cartesiano;
  - Dominar a aplicação dos conhecimentos de geometria analítica na resolução de problemas;
  - Reconhecer, entre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências;
  - Determinar as posições relativas de um ponto do plano em relação a uma circunferência.
  - Determinar as posições relativas entre uma reta e uma circunferência no plano.
  - Determinar regiões do plano cartesiano correspondente às soluções de inequações do segundo grau em duas variáveis, relacionando-as com equações de circunferências.

3.2 Conteúdo da aula

3.2.1 Equação da circunferência

Dado um ponto $C = (a, b)$ e um número real positivo r, definimos como Circunferência de centro C e raio r, o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano cuja distância até C é r.

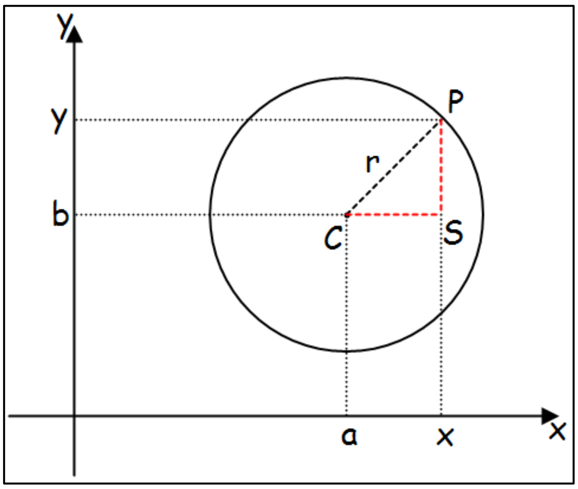


Figura 8 - Circunferência de Centro C e raio r

Denotamos por $\lambda(C, r)$, ou simplesmente por λ, a circunferência de centro C e raio r. Seja P um ponto qualquer de λ. Logo, pela definição, $d(C, P) = r$. Observe, na *Figura 8*, o triângulo PSC, retângulo em S. Temos que $PC = |x - a|$ e $PS = |y - b|$. Aplicando a conhecida fórmula da distância entre dois pontos no plano (conhecimento prévio para esta aula - demonstrada a partir do Teorema de Pitágoras), temos:

$$d(C, P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

que nos dá a chamada Equação Reduzida da Circunferência de λ:

$$\boxed{\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Desenvolvendo-a, temos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Organizando, ficamos com

$$\boxed{\lambda: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

que é conhecida como Equação Normal ou Equação Geral da Circunferência λ.

Vejamos algumas aplicações:

3.2.1.1 Exemplo 1

Obter as equações reduzida e geral da circunferência λ, com centro em $C = (4, -2)$ e raio $r = 6$.

Solução:

A obtenção da equação reduzida é imediata:

$$\lambda: (x-4)^2 + [(y-(-2)]^2 = 6^2$$

$$\boxed{\lambda: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 36}$$

Desenvolvendo-a, chegamos à equação geral:

$$\lambda: x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 - 36 = 0$$

$$\boxed{\lambda: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 16 = 0}$$

3.2.1.2 Exemplo 2

Considere λ uma circunferência de centro $C = (2, -3)$ e raio 5. Responda:

a) Em que ponto λ intersecta o eixo das abscissas?

b) Sabendo que o ponto $P = (2, b)$, localizado no 4º quadrante, pertence a λ, determine o valor de b

Solução:

Primeiramente, vamos obter a equação de λ, de forma imediata:

$$\boxed{\lambda: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25}$$

a) Sabemos que todo ponto do eixo das abscissas é da forma $P = (x, 0); x \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação reduzida, temos:

$$(x-2)^2 + 3^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9 = 25$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Logo, os pontos onde λ corta o eixo das abscissas são $(-2, 0)$ e $(6, 0)$.

b) Substituindo as coordenadas de $P(2, b)$ na equação de λ, temos:

$$(2-2)^2 + (b+3)^2 = 25$$

$$b^2 + 6b - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -8 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Como o ponto procurado pertence ao 4º quadrante, a resposta é $b = -8$.

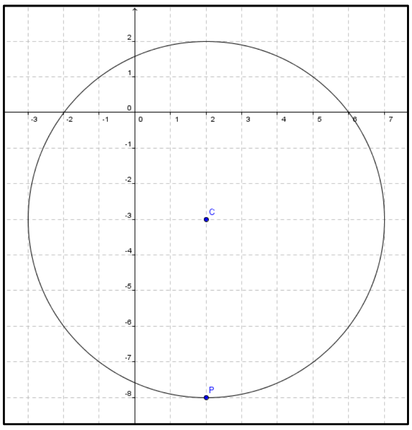


Figura 9 - Representação geométrica do Exemplo 2

3.2.1.2 Exemplo 3

Verifique se $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ (*) é equação de uma circunferência. Caso seja, determine as coordenadas do centro e medida do raio.

Solução 1:

Sabemos que a equação reduzida de uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r é $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Vamos completar quadrados para encontrar as coordenadas e C e o valor de r na equação (*):

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 16 - 9 + 21 = 0$$

$$\boxed{(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 2^2} \ (**)$$

Donde obtemos que $C = (4, -3) e\ r = 2$. Observe que a equação (**) representa uma circunferência pelo fato do membro da direita ser um número real positivo.

Solução 2:

Considere a equação geral de uma circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Agora, vamos comparar, termo a termo, seus coeficientes com os coeficientes da equação (*):

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -8 \\ -2b = 6 \\ a^2 + b^2 - r^2 = 21 \end{cases} \text{, que nos dá}$$

$$\begin{cases} a = 4; \\ b = -3; \\ 4^2 + (-3)^2 - r^2 \Rightarrow 25 - r^2 = 21 \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

Logo, a equação (*) corresponde a uma circunferência cujo centro é $C = (4, -3)$ e o raio é $r = 2$. Observe que, caso não tivéssemos encontrado um valor positivo para r, a equação (*) não representaria uma circunferência.

3.2.2 Posições relativas entre um ponto do plano e uma circunferência

Antes de definirmos as posições relativas entre um ponto do plano e uma circunferência, lembremos que:

Dados dois números reais d e r, temos que uma, e somente uma, das proposições a seguir é verdadeira (tricotomia):

- $d = r$
- $d < r$
- $d > r$

Agora, consideremos que d seja a distância de um ponto $P(x, y)$ ao centro $C(a, b)$ de uma circunferência λ de raio r. Se $d = r$, já sabemos que $P \in \lambda$ (definição).

Para os outros dois casos, definimos:

- P é um ponto interno à circunferência λ quando $d < r$
    - Temos, então:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \xRightarrow{d>0 \text{ e } r>0} (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

- P é um ponto externo à circunferência quando $d > r$
    - Temos, então:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} > r \xRightarrow{d>0 \text{ e } r>0} (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$$

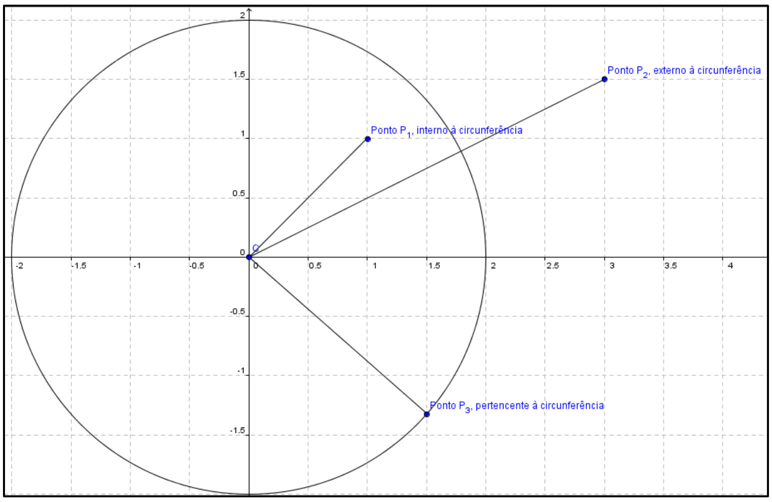


Figura 10 - Posições relativas entre um ponto e uma circunferência

Na *Figura 10*, gerada com auxílio do Geogebra, podemos observar as posições relativas entre os pontos P_1, P_2 e P_3, em relação à circunferência de centro na origem e raio 2. P_1, P_2 e P_3 são, respectivamente, interno, externo e pertencente à circunferência, já que suas distâncias à origem são, respectivamente, menor, maior e igual a 2.

Portanto, como vimos, por meio da tricotomia, quando traçamos uma circunferência λ de equação $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ no plano cartesiano, determinamos três partições do $\mathbb{R}^2$ – subconjuntos disjuntos do plano cartesiano, cuja união é o próprio plano:

i) Pontos da circunferência λ: conjunto dos pontos (x,y) para os quais temos $f(x,y) = 0$

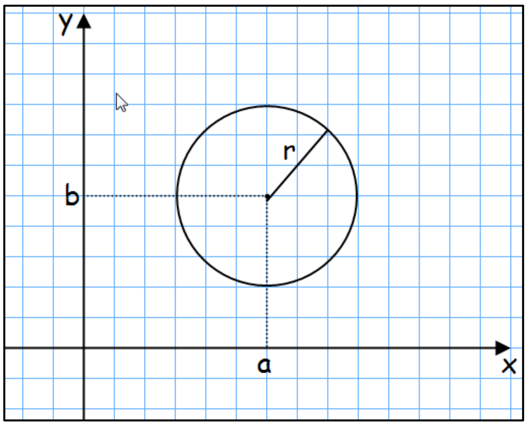


Figura 11 - Conjunto dos pontos (x,y) com f(x,y)=0

ii) Pontos internos à circunferência λ: conjunto dos pontos (x,y) para os quais $f(x,y) < 0$

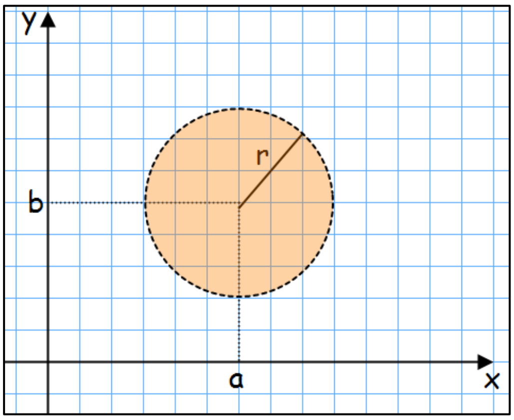


Figura 12 - Conjunto dos pontos (x,y), para os quais f(x,y)<0

iii) Pontos exteriores à circunferência λ: conjunto dos pontos (x, y) para os quais $f(x, y) > 0$

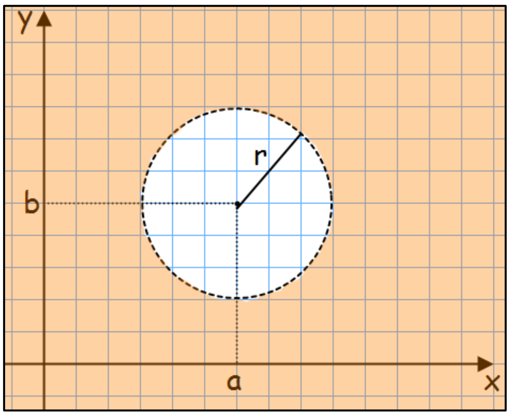


Figura 13 - Conjunto dos pontos (x,y) para os quais f(x,y)>0

Vamos a algumas aplicações:

3.2.2.1 Exemplo 4

Qual a posição do ponto $P(-3, -2)$ *em relação à circunferência* $\lambda: x^2 + (y-2)^2 = 16$*?*

Solução:

Como a equação da circunferência λ já se encontra na forma reduzida, basta substituirmos as coordenadas do ponto P no primeiro membro e compará-lo com o segundo:

$$(-3)^2 + (-2-2)^2 = 9 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$$

Como $25 > 16$, temos que o ponto P é **externo** à circunferência λ.

Em outras palavras, temos que a distância do ponto $P(-3, -2)$ ao centro da circunferência λ é igual a $\sqrt{25} = 5$, enquanto seu raio r mede $\sqrt{16} = 4$.

3.2.2.2 Exemplo 5

Qual o menor valor inteiro de r na equação da circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$, de modo que o ponto $P(7,3)$ seja interno a ela?

Solução:

Para que o ponto $P(7,3)$ seja interno à circunferência λ, sua distância ao centro $C(1,2)$ de λ deve ser menor que o raio r:

$$d(P,C) = \sqrt{(7-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{37} < r$$

Como $6 < \sqrt{37} < 7$, o menor inteiro $r > \sqrt{37}$ é 7.

3.2.2.3 Exemplo 6

Determine os valores de m para os quais o ponto $A(m,5)$ é interior à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 12x - 10y + 52 = 0$.

Solução:

Para que $A(m,5)$ seja interior a λ, devemos ter

$$m^2 + 5^2 - 12m - 10 \cdot 5 + 52 < 0$$

$$m^2 - 12m + 27 < 0$$

Esta inequação pode ter seu primeiro membro fatorado, sendo escrita da forma abaixo:

$$\boxed{(m-3) \cdot (m-9) < 0}$$

Na figura abaixo, temos o estudo do sinal da expressão $(m-3)(m-9)$:

	$m<3$	$3<m<9$	$m>9$
$m-3$	$-$	$+$	$+$
$m-9$	$-$	$-$	$+$
$(m-3)(m-9)$	$+$	$-$	$+$

Figura 14 – Estudo do sinal da expressão $(m-3)(m-9)$

Podemos, então, ver que $(m-3)(m-9)<0$ para $3<m<9$.

3.2.2.4 Exemplo 7

Represente graficamente o conjunto solução da inequação $x^2+y^2-10x-8y+32\leq 0$.

Solução:

Podemos completar quadrados ou usar o método da comparação para encontrar as coordenadas do centro e o raio da circunferência $\lambda: x^2+y^2-10x-8y+32=0$, como vimos no *Exemplo 3*.

Optando por completar quadrados, chegamos à equação reduzida de λ:

$$\boxed{(x-5)^2+(y-4)^2=9}$$

donde concluímos que o centro de λ é o ponto $C=(5,4)$ e o raio é $r=3$.

Logo, o conjunto solução da inequação $x^2+y^2-10x-8y+32\leq 0$ é formado pela circunferência λ e seus pontos interiores.

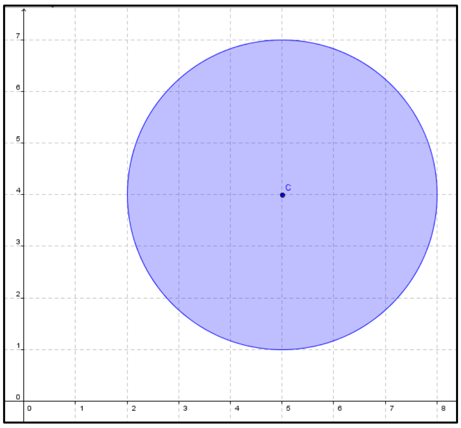


Figura 15 - Representação geométrica do Exemplo 7

Observe na *Figura 15* a representação geométrica da inequação em questão. Repare que, diferentemente da *Figura 13*, a "borda" não está tracejada, pois os pontos da circunferência também fazem parte do conjunto solução.

3.2.2.5 Exemplo 8

Represente graficamente o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 22x - 14y + 161 > 0 \end{cases}$.

Solução:

Podemos escrever as inequações do sistema na forma reduzida, a fim de identificar os centros e raios de cada uma das circunferências:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-5)^2 \leq 16 \quad (I) \\ (x-11)^2 + (y-7)^2 > 9 \quad (II) \end{cases}$$

Sendo assim, a primeira inequação representa o conjunto dos pontos do plano pertencentes à circunferência λ_1, de centro $C = (6,5)$ e raio $r_1 = 4$ e seus pontos interiores, enquanto a segunda inequação corresponde aos pontos exteriores à circunferência λ_2, de centro $D = (11,7)$ e raio $r_2 = 3$.

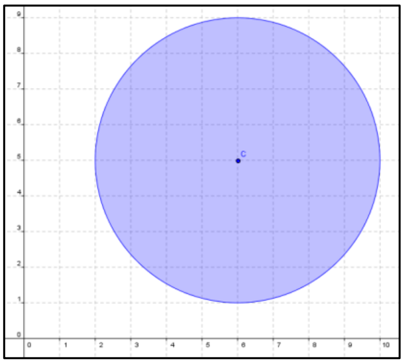


Figura 16 - Representação geométrica da Inequação I

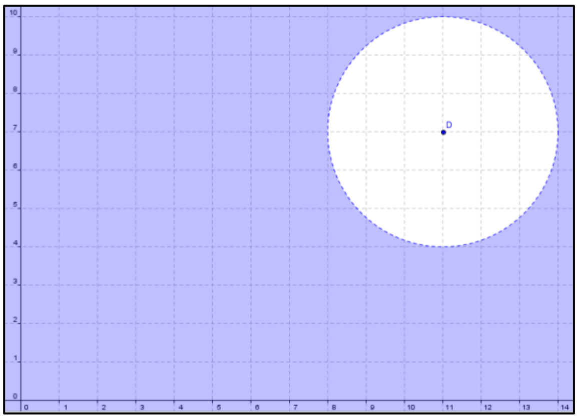


Figura 17 - Representação geométrica da Inequação II

Como se pode ver, o conjunto solução do sistema será geometricamente representado pela região comum às áreas hachuradas das figuras 16 e 17. Segue abaixo a representação geométrica do sistema:

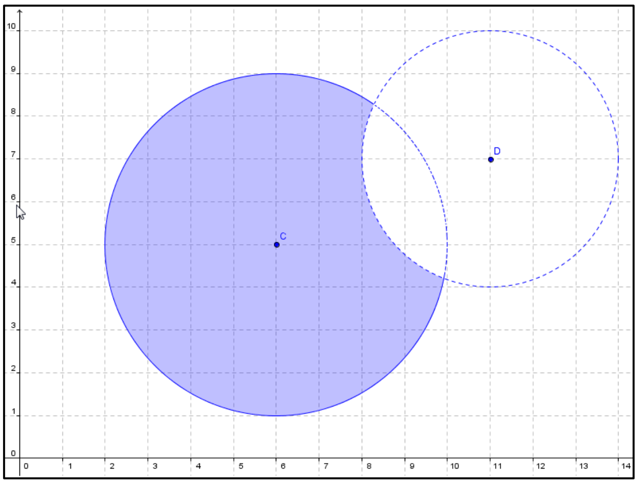


Figura 18 - Representação geométrica do sistema do Exemplo 8

Observe que, na *Figura 18*, a circunferência λ_2 está tracejada, visto que seus pontos não pertencem ao conjunto solução do sistema de inequações, ao contrário dos pontos de λ_1 que estão localizados fora de λ_2.

3.2.3 Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Considere uma reta $s: a_s x + b_s y + c = 0$ e uma circunferência $\lambda: (x - a_c)^2 + (y - b_c)^2 = r^2$, de centro $C = (a_c, b_c)$ e raio r.

Definição: dizemos que a reta s é tangente à circunferência λ, quando $s \cap \lambda = \{P\}$, isto é, s e λ possuem apenas um ponto em comum P, chamado de *ponto de tangência* entre s e λ.

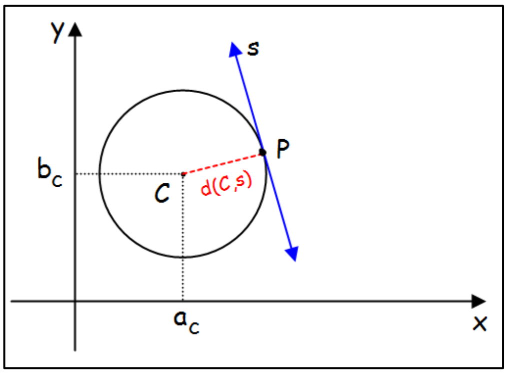


Figura 19 - Reta s tangente à circunferência λ

Note que, no caso da tangência, a distância entre a reta s e o centro $C = (a_c, b_c)$ de λ é igual ao seu raio r. Portanto

$$\boxed{d(C, s) = \frac{|a_s \cdot a_c + b_s \cdot b_c + c|}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}} = r}$$

Definição: dizemos que a reta s é secante à circunferência λ, quando $s \cap \lambda = \{P_1, P_2\}$, isto é, s e λ possuem exatamente dois pontos P_1 e P_2 em comum.

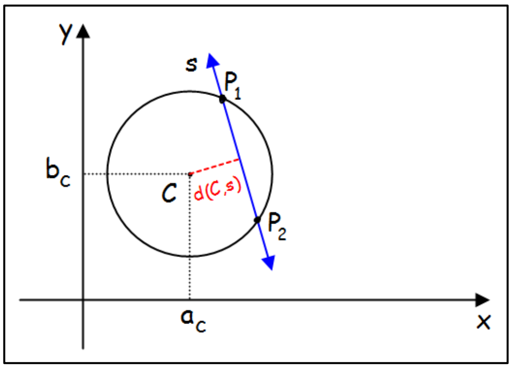


Figura 20 - Reta s secante à circunferência λ

Note que, no caso da reta s ser secante à circunferência λ, sua distância ao centro $C = (a_c, b_c)$ é menor que o raio r. Portanto

$$\boxed{d(C,s) = \frac{|a_s \cdot a_c + b_s \cdot b_c + c|}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}} < r}$$

Definição: dizemos que a reta s é exterior à circunferência λ, quando $s \cap \lambda = \emptyset$, isto é, s e λ não possuem pontos em comum.

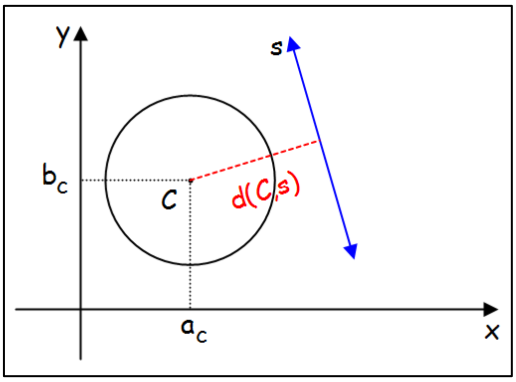


Figura 21 - Reta s externa à circunferência λ

Note que, no caso da reta s ser exterior à circunferência λ, sua distância ao centro $C = (a_c, b_c)$ é maior que o raio r. Portanto

$$\boxed{d(C,s) = \frac{|a_s \cdot a_c + b_s \cdot b_c + c|}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}} > r}$$

Podemos determinar os pontos $P(x, y)$ de intersecção entre s e λ, solucionando o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} s: a_s x + b_s y + c = 0 \\ \lambda: (x - a_c)^2 + (y - b_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

Isolando a variável y na primeira equação do sistema (considerando $b_s y \neq 0$) e substituindo-a na segunda, nos depararemos com uma equação do segundo grau, na variável x, cujo sinal do discriminante Δ será suficiente para determinar a posição relativa entre a reta s e a circunferência λ:

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ s é $tangente$ à λ;
- $\Delta > 0 \Rightarrow$ s é $secante$ à λ;
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ s é $exterior$ à λ

3.2.3.1 Exemplo 9

Determinar a posição relativa entre a reta $r: 2x + y - 2 = 0$ *e a circunferência* $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$, *procurando as eventuais intersecções entre as duas.*

Solução: Isolando a variável y na equação da reta, temos $y = -2x + 2$. Substituindo na equação da circunferência λ, temos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 5 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (2 - 2x)^2 - 2x - 10(2 - 2x) + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

Calculando o discriminante da equação obtida, temos $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Isso já é suficiente para concluirmos que a reta r é **tangente** à circunferência λ.

Para encontrar o ponto de intersecção entre r e λ, basta continuarmos com a resolução da equação quadrática:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

Como $y = -2x + 2$, a reta r tangencia a circunferência λ no ponto $P(-1, 4)$.

3.2.3.2 Exemplo 10

Sabendo que a reta $s: y = \sqrt{3 \cdot} x + n$ é tangente à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 = 4$, encontre os valores de n.

Solução: É fácil identificar o centro $C = (0,0)$ e raio $r = 2$ da circunferência λ. Para que a reta s seja tangente à circunferência λ, devemos ter que $d(C, s) = r$:

$$\boxed{\frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 1 \cdot 0 + n|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|n|}{2} = 2 \Rightarrow |n| = 4 \Rightarrow n = \pm 4}$$

Em outras palavras, temos duas retas tangentes à circunferência λ com coeficiente angular $\sqrt{3}$:

$$\boxed{s_1: \sqrt{3} \cdot x + 4 \quad e \quad s_2: \sqrt{3} \cdot x - 4}$$

3.3 Procedimentos técnicos para elaboração e gravação da vídeo-aula

Neste tópico, veremos todos os procedimentos de utilização dos softwares necessários à elaboração e gravação da vídeo-aula. Consideraremos, como ponto de partida, que todos os softwares apresentados no *Capítulo 2* já estejam instalados na máquina do professor.

3.3.1 Confecção dos slides

O primeiro passo, antes da gravação da vídeo-aula, é a confecção dos slides que serão utilizados – procedimento que dispensa maiores explicações. Estes conterão os objetivos da aula e definições. Vale salientar que demonstrações e/ou justificativas não constarão nos slides, pois serão feitas durante a gravação com escrita sobre a mesa digitalizadora e explanação oral. Os slides foram criados com uso do LibreOffice e encontram-se disponíveis nos Apêndices deste trabalho.

3.3.2 Elaboração do modelo de circunferência no Geogebra

Além dos slides, também foi previamente preparada uma exibição dinâmica da equação reduzida da circunferência com uso do software Geogebra. Com o auxílio dessa ferramenta, será possível fazer com que o aluno visualize uma circunferência no plano e sua equação de maneira dinâmica à medida que se arrasta o centro e define-se o valor do raio com um controle deslizante. Vamos ao passo a passo para sua criação:

i) Abrir o software Geogebra;

ii) Devem estar exibidas a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização. Caso não estejam visíveis, basta marcar as opções correspondentes no menu “Exibir” ou através dos atalhos CTRL+Shift+A e CTRL+Shift+1, respectivamente;

iii) No campo de entrada, criar um ponto C com coordenadas arbitrárias. Digitar "$C = (2,3)$", por exemplo. Este ponto será um objeto independente, podendo ser alterado dinamicamente, bastando clicar sobre ele e arrastá-lo ao local do plano desejado.

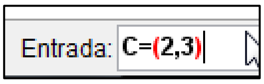


Figura 22 – Geogebra – Campo de Entrada

iv) O próximo passo é a criação de um controle deslizante com os valores possíveis para o raio da circunferência. Na barra de ferramentas, selecione a opção "Controle Deslizante" (*Figura 23*) e clique na área do plano onde deseja inseri-lo. Em seguida, será aberta uma janela de diálogo com as propriedades do controle. Preencha os campos como mostrado na *Figura 24*. Construiremos um exemplo com o raio r variando de 0 a 15 e incremento de 0,1. Em seguida, clicar em "aplicar" para que o controle seja exibido no plano.

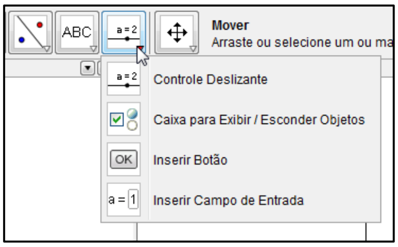


Figura 23 – Geogebra – Controle Deslizante

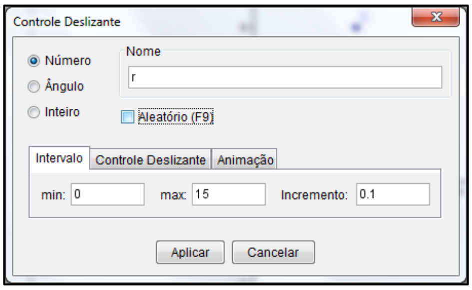


Figura 24 – Geogebra – Controle Deslizante

v) O passo seguinte é inserir a equação da circunferência no campo de entrada para que ela seja esboçada no plano. Digitar *(x-x(C))^2+(y-y(C))^2=r^2*. As funções x(C) e y(C) retornam dinamicamente, os respectivos valores da abscissa e ordenada do ponto C já criado, que é o centro da circunferência e o parâmetro r retorna o valor do controle deslizante criado no item anterior.

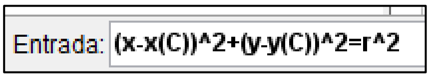


Figura 25 – Geogebra – Campo de Entrada

vi) Por fim, a exibição da equação da circunferência no plano. Clicar no botão "Inserir Texto" (*Figura 26*), digitar "Equação da circunferência" no campo "Editar" e, em seguida, clicar em "Objetos", para inserir a circunferência "c", criada anteriormente. Veja a *Figura 27*. Para concluir, basta clicar em "Ok" e, posteriormente, no local do plano onde desejar inserir o texto.

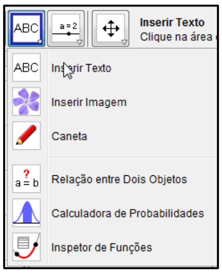


Figura 26 – Geogebra – Inserir Texto

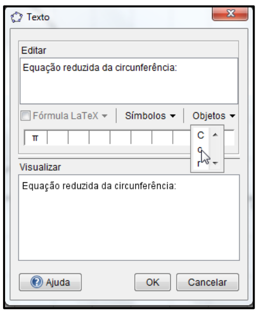


Figura 27 – Geogebra – Inserir Texto

Uma vez inserido o texto, é possível alterar suas propriedades, como tamanho e cor da fonte. Basta selecionar a ferramenta "Mover" e clicar com o botão direito do mouse sobre o texto. Veja abaixo, na *Figura 28*, o resultado final.

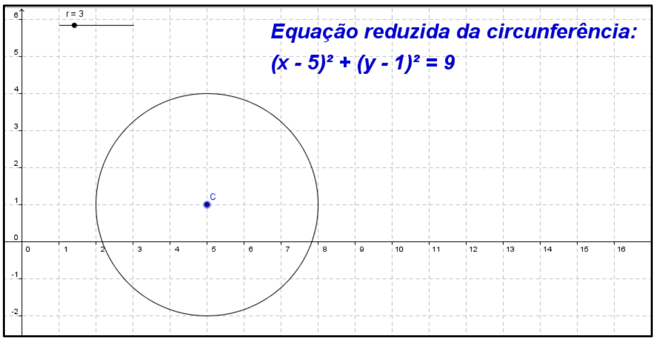


Figura 28 – Equação da Circunferência Dinâmica no Geogebra

À medida que arrastamos o ponto C e alteramos o valor de r no controle deslizante, a equação da circunferência é exibida dinamicamente. Este procedimento será realizado na vídeo-aula, após mostrarmos como se obtém a equação reduzida de uma circunferência.

No *Apêndice 4* deste trabalho, encontra-se um link para um vídeo produzido com a demonstração da criação desse modelo.

3.3.3 Preparando o Apowersoft Free Screen Recorder para gravação

Neste tópico veremos como preparar o software responsável pela gravação da vídeo-aula. Como dito no *Capítulo 2*, o Apowersoft Free Screen Recorder é capaz de gravar em vídeo tudo que se passa na tela do computador, juntamente com o áudio captado pelo microfone. Ele, juntamente com a mesa digitalizadora, são os recursos essenciais para produção de um material dessa natureza.

Vamos, primeiramente, às configurações iniciais do software. Com ele aberto, ao clicar no menu Ferramentas e, posteriormente em Opções, pode-se customizar o programa de acordo com as preferências do usuário.

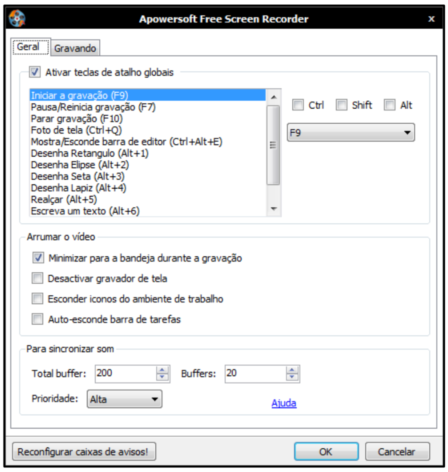


Figura 29 - Configurações - Aba "Geral"

Esta janela é dividida em duas abas. A primeira delas é a aba “Geral”, onde é possível configurar as teclas de atalho, caso seja da vontade do usuário. A customização de três teclas para as funções “Iniciar Gravação”, “Pausa/Reinicia Gravação” e “Parar Gravação” é fortemente recomendável para a gravação de uma aula, a fim de evitar que o professor precise exibir a janela do Screen Recorder durante a gravação quando quiser pausar/encerrar o processo. Para este trabalho, definimos as teclas F9, F7 e F10 para iniciar, pausar/reiniciar e parar a gravação, respectivamente. Veja a *Figura 29*.

Na *Figura 30*, podemos ver a segunda aba, a “Gravando”. Nesta aba encontramos, dentre outras, as seguintes opções:

- Autogerar nome de arquivo – Opção que, quando marcada, faz com que o software nomeie o arquivo de vídeo gerado automaticamente;
- Gravar cursor do mouse – Deverá ser desmarcado, caso não se queira exibir o cursor do mouse no vídeo. Há um link para opções avançadas deste recurso;
- Mostre contagem regressiva antes de gravar – É um recurso muito interessante, que permite ao professor ver um “countdown” para saber o momento exato de começar sua aula;

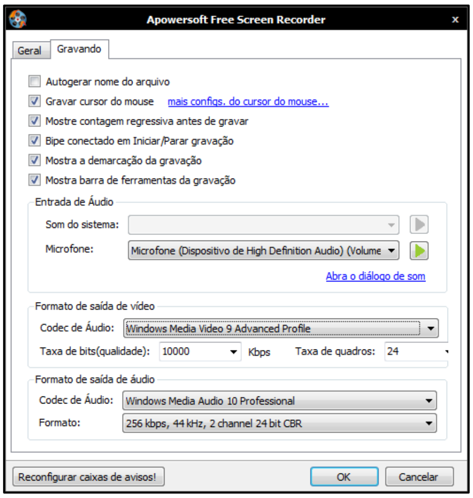


Figura 30 - Configurações - Aba "Gravando"

Além do que já foi citado, também é possível realizar ajustes relativos ao dispositivo de entrada (microfone e/ou som do sistema) e qualidade do vídeo.

Finalizados os ajustes, basta pressionar a tecla F9 quando se desejar iniciar a gravação.

3.3.4 Utilizando o eInstruction Interwrite Workspace

Vejamos como utilizar algumas das ferramentas disponíveis no software eInstruction Interwrite Workspace para realizarmos anotações durante a gravação da vídeo-aula. Como visto no Capítulo 2, o Workspace possui uma vasta coleção de ferramentas, entretanto, apenas algumas foram utilizadas na produção da vídeo-aula de Geometria Analítica.

Na *Figura 31*, logo abaixo, é possível visualizar uma barra de ferramentas personalizada com os recursos utilizados.

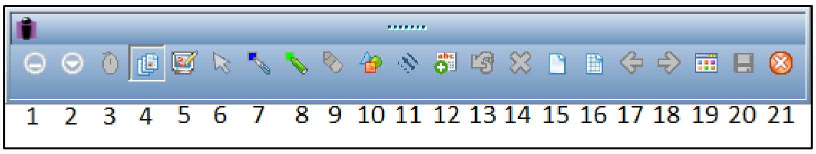


Figura 31 - Barra de Ferramentas Personalizada do Workspace

1 – Botão minimizar;

2 – Botão "Menu do Workspace": dá acesso aos ajustes do software e opções de salvamento;

3 – Modo Mouse: fecha a janela de anotações e mostra a área de trabalho;

4 – Modo Lição: é o modo principal de operação do Workspace. Permite o uso das ferramentas de anotações;

5 - Anotar sobre a área de trabalho: permite usar as ferramentas de anotações ou páginas enquanto a área de trabalho ativa é exibida;

6 – Seleção: Usado para selecionar objetos da página atual, redimensioná-los, movê-los, copiar, colar, apagar, rotacionar, agrupar/desagrupar, etc. Quando a ferramenta de seleção é selecionada, a sua barra de propriedades é exibida, com as ferramentas de edição ao seu lado esquerdo e as de navegação de páginas ao lado direito. Quando um objeto é selecionado, a barra de propriedades é mostrada ao centro, permitindo que sejam modificados os seus atributos;

7 – Caneta: usada para escrever ou desenhar na página da janela de anotações. Quando selecionada, suas opções de configuração são exibidas na barra de propriedades;

8 – Marca texto: utilizada para marcar o que desejar na página;

9 – Borracha: usada para apagar objetos na janela de anotações. Sua espessura pode ser ajustada na barra de propriedades;

10 – Formas: permite desenhar diversas formas, como retângulos, quadrados, triângulos, circunferências, elipses, entre outras. Em cada uma delas é possível configurar as opções de cor e espessura de borda, assim como cor de preenchimento ou transparência;

11- Linha: usada para desenhar linhas retas na janela de anotações. Dentre as opções de configuração, encontram-se as cores, espessuras, tipo de extremidade (setas, bolas, etc.) e tipo de linha (contínua, tracejada, pontilhada, etc.);

12 – Texto: utilizada para digitar texto sobre a janela de anotações. Basta selecioná-la e clicar sobre o ponto da janela onde se deseja inserir o texto;

13 – Desfazer: cancela a última operação realizada;

14 – Limpar: remove todos os objetos inseridos na janela de anotações, deixando-a da forma como foi aberta;

15 – Inserir página em branco: insere uma nova pagina em branco na janela de anotações;

16 – Inserir página com linhas de grade: cria uma nova página quadriculada na janela de anotações. As configurações desta página, como espessura e cor das grades podem ser acessadas através do Menu Workspace (2), clicando em *Preferências* e *Configurações de Nova Página*;

17 e 18: Página Anterior e Próxima Página: estas setas servem para navegação nas páginas criadas sobre a janela de anotações;

19 – Ordenador de Páginas: abre a janelado ordenador, onde é possível reordenar as páginas criadas, bem como excluir páginas da janela de anotações;

20 – Salvar: salva o conjunto de páginas criadas sobe a janela de anotações no formato GWB, específico do Workspace;

21 – Fechar: encerra o Workspace, fechando sua janela de anotação.

Um vídeo de demonstração das ferramentas foi produzido. O link para acessá-lo consta no *Apêndice 4* deste trabalho.

3.3.5 Produzindo o vídeo

Criados os slides e o modelo dinâmico do Geogebra e, como dito no começo deste capítulo, tendo os demais softwares em questão instalados, o professor está pronto para iniciar a produção de sua vídeo-aula. O roteiro é simples:

i) Plugar o microfone ao computador;
ii) Abrir o Apowersoft Free Screen Recorder;
iii) Abrir o Geogebra e o modelo dinâmico da equação da circunferência;
iv) Abrir o Workspace;
v) Abrir o Libre Office e o arquivo contendo os slides necessários à aula;
vi) Abrir o slide inicial da aula no modo "Tela Cheia" e minimizar a barra de ferramentas do Workspace;
vii) Pressionar a tecla F9 para que o Screen Recorder inicie a gravação.

Capítulo 4: Criando um acervo de sólidos geométricos com auxílio do software Google Sketchup

No capítulo anterior, vimos como produzir uma vídeo-aula voltada para Educação à Distância (EAD), o que não significa que um material dessa natureza não possa ser utilizado como ferramenta de apoio ao ensino presencial como, por exemplo, aulas de revisão ou resolução de exercícios complementares que possam ser assistidas em casa pelos alunos.

Da mesma forma, neste capítulo o professor verá, através de exemplos (exercícios), como utilizar o Google Sketchup 8 para criar um acervo de sólidos geométricos que podem ser exibidos dinamicamente aos alunos em aulas presenciais, através de projeções, facilitando o entendimento daqueles que não possuem uma visão espacial aguçada. Vale ressaltar que isso não exclui a possibilidade de utilizar o software em gravações de vídeo-aulas com foco na EAD, como no *Capítulo 3*.

Como o foco neste capítulo é a construção dos sólidos no Sketchup, as resoluções dos exemplos serão feitas de forma breve, de maneira mais superficial. Também foram gravados vídeos, demonstrando a construção de cada um dos sólidos deste capítulo. Os links para os vídeos produzidos encontram-se no *Apêndice 4* deste trabalho.

Vamos aos primeiros passos no Google Sketchup. Ao abrir o software pela primeira vez, será exibida uma janela com dicas e opções iniciais, como mostra a figura abaixo:

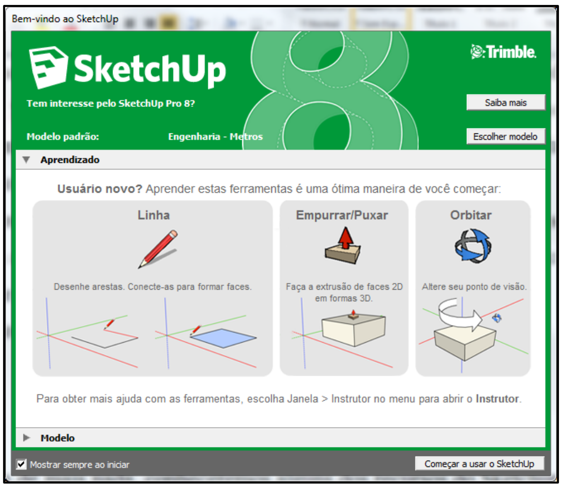


Figura 32 - Janela de diálogo inicial do Google Sketchup 8

É possível desmarcar a opção “Mostrar sempre ao iniciar” para que esta janela não seja mais exibida futuramente. O próximo passo é a escolha do modelo a se utilizar. O modelo a se escolher depende da finalidade que se quer dar à sua construção. Dentre as opções de modelos, temos Modelo simples, Design arquitetônico, Modelagem para Google Earth, Engenharia, Design de produtos e marcenaria, Visualização de planta (este modelo é interessante para desenhos planos) e Modelo de treinamento inicial. Em cada um deles é possível escolher o sistema de unidades a se adotar. As opções são “metros” e “pés/polegadas”. Neste trabalho foi utilizado o modelo de Engenharia (metros). Após a escolha do modelo, basta clicar no botão “Começar a utilizar o Sketchup”.

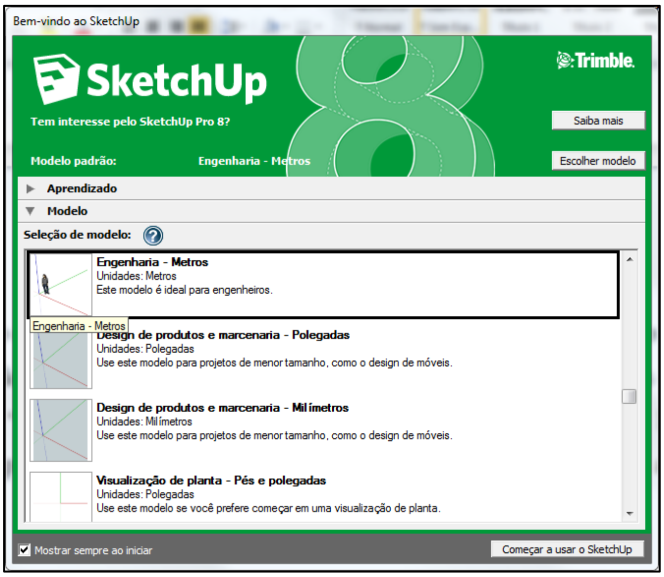


Figura 33 - Janela de seleção de modelo do Sketchup

Ao abrir o modelo de Engenharia, serão exibidos os eixos ordenados, nas cores vermelho, verde e azul. O plano do solo é aquele formado pelos eixos vermelho e verde.

Antes de irmos aos exemplos, conheceremos alguns dos recursos do Sketchup que foram utilizados em nossas construções.

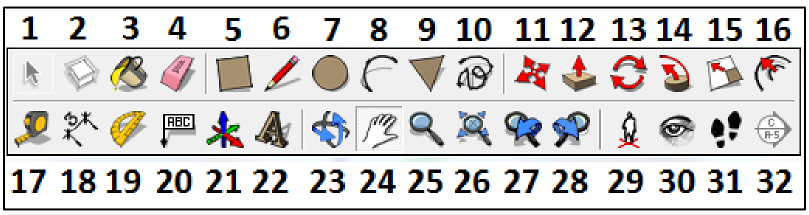


Figura 34 - Algumas ferramentas do Google Sketchup 8

1 – Selecionar: seleciona um objeto da área de trabalho do Sketchup. Também pode ser acionada pela tecla “Espaço”. Pode ser combinada com as teclas CTRL, CTRL+Shift e Shift para adicionar, subtrair e adicionar/subtrair elementos à seleção, respectivamente;

2 – Criar componente: Permite criação de componente. Não será utilizada nesse trabalho;

3 – Pintura: utilizada para pintar faces dos sólidos;

4 – Borracha: usada para remover objetos da área de trabalho;

5 – Retângulo: desenha retângulos. Para utilizá-la, basta nos locais onde se deseja inserir 2 vértices opostos ou, após o primeiro clique, digitar na caixa de dimensões as suas medidas, separadas por ponto e vírgula;

6 – Linha: traça segmentos de reta, bastando clicar nos locais onde se quer suas extremidades. Quando combinada com as setas para cima, esquerda e direita, é possível traçar segmentos respectivamente paralelos aos eixos azul, verde e vermelho;

7 – Círculo: desenha polígonos regulares com quantidade de lados elevada, dando-nos a ideia de que é uma circunferência. Ao selecionar a ferramenta, deve-se digitar a quantidade de lados (por padrão, encontra-se 24) e clicar no ponto que se deseja como centro. Em seguida, basta digitar o valor numérico do raio e pressionar ENTER ou arrastar até um ponto desejado e clicar com botão esquerdo do mouse;

8 – Arco: esboça arcos. Para tal, clica-se nos ponto inicial e final (podendo, também, digitar a medida da corda, antes de clicar no ponto final). Em seguida, digita-se o valor da curvatura ou arrasta-se o mouse até o local desejado.

9 – Polígono: desenha polígonos regulares com n lados. Basta, ao selecionar, digitar a quantidade de lados desejada e, em seguida, clicar no ponto desejado como centro. Após isto, digita-se o raio desejado ou seleciona-se um ponto como extremidade, clicando sobre ele;

10 – Desenho à mão livre: permite traçado livre pelo usuário;

11- Mover: permite mover qualquer objeto no espaço da área de trabalho. Assim como a ferramenta linha, é possível fazer com que o movimento seja paralelo a um dos eixos utilizando as setas para cima, esquerda e direita;

12 – Empurrar/puxar: empurra/puxa uma figura plana, gerando um sólido tridimensional. No caso de sólidos já existentes, é possível usar esta ferramenta para modificar sua altura;

13 – Rotar: permite realizar rotações dos objetos no espaço de trabalho;

14 – Siga-me: utilizaremos para gerar rotações de objetos, seguindo o perímetro de outro. Será utilizado para criação de cones, gerados a partir da rotação de um triângulo em torno de um perímetro de circunferência, por exemplo;

15 – Escala: redimensiona o(s) objeto(s) selecionado(s) de acordo com a proporção especificada;

16 – Equidistância: usada para criar cópias de linhas e faces que estejam a uma distância uniforme dos objetos originais;

17 – Fita métrica: utilizada para medir comprimento de segmentos;

18 – Dimensões: usada para exibir as medidas de segmentos ou rótulos, caso desejado;

19 – Transferidor: utilizado para medição de ângulos;

20 – Texto: insere texto em locais desejados do espaço de trabalho;

21 – Eixos: redefine origem e orientação do sistema de coordenadas;

22 – Texto 3D: recurso análogo ao “Texto”, porém em 3D;

23 – Orbitar: utilizada para rotar a câmera ao redor do modelo, visualizando-o sob o ângulo/perspectiva desejado;

24 – Panorâmica: utilizada para mover a câmera verticalmente e horizontalmente;

25 – Zoom: utilizada para reduzir/ampliar o modelo;

26 – Modelo centralizado: centraliza o modelo no espaço de trabalho;

27 – Anterior: desfaz a última ação realizada;

28 – Próximo: realiza a ação seguinte (caso a ferramenta “Anterior” tenha sido utilizada);

29 – Posicionar câmera: Posiciona sua visualização em uma altura dos olhos específica;

30 – Girar: Utilizada para girar o campo de visão do usuário em torno de um ponto estacionário;

31 – Percorrer: Utilizada para deslocar-se em torno do modelo como se estivesse andando sobre ele (ou através dele);

32 – Plano de seção: Usada para criar cortes de seção permitindo que se visualize a geometria dentro do modelo.

4.1 Exemplo 1: Problema envolvendo um cubo

Problema: *Considere um cubo ABCDEFGH (quadrado ABCD como base e arestas laterais AE, BF, CG e DH) de aresta 8cm. Sobre a aresta AE, é marcado um ponto M, tal que AM=3ME. Calcule a área do triângulo BCM.*

<u>4.1.1: Construindo a figura (Cubo)</u>

1) Com o Sketchup aberto já no espaço de trabalho (com os eixos visíveis), selecionar a ferramenta “retângulo” ( ) e clicar sobre um ponto do plano do solo. Em seguida, arrastar um pouco o cursor, em diagonal, na direção do vértice oposto da base, e digitar as medidas desejadas, separadas por ponto e vírgula. No caso deste problema, digitar “8;8” e teclar ENTER. Um quadrado será desenhado no plano do solo. Vale ressaltar que o desenho será feito em escala de 1 para 100, visto que o problema usa o centímetro como unidade, enquanto o esquema adotado utiliza o metro. Veja na figura abaixo:

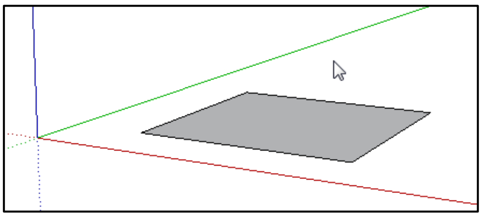


Figura 35 - Desenhando quadrado para base de um cubo

2) Utilizando a ferramenta “empurrar/puxar” ( ), passar o cursor sobre o quadrado desenhado até que sua superfície fique pontilhada. Em seguida, clicar sobre o mesmo e arrastar para cima. Note que é possível puxar para cima ou para baixo o quanto quiser. No nosso caso, como estamos desenhando um cubo, pode-se digitar o valor “8” e teclar ENTER para que sua altura fique exata.

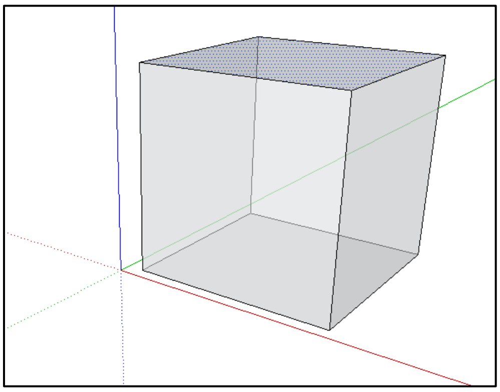


Figura 36 - Utilizando a ferramenta "empurrar/puxar"

Para que se possa enxergar "por dentro" do sólido, como na figura acima, é necessário ajustar as configurações de visualização de faces. Para isto, basta ir ao menu "Visualizar → Estilo de face" e selecionar "Raios X" (isto valerá para os exemplos futuros).

3) Para rotular um vértice, utilizando a ferramenta texto ( ), passar o mouse sobre o ponto desejado, até que ele fique destacado na cor verde com o texto "extremidade" exibido. Clicar sobre o ponto e arrastar o cursor até onde desejar, digitando, em seguida, o nome do ponto em questão. Repetir este procedimento para cada um dos vértices do cubo.

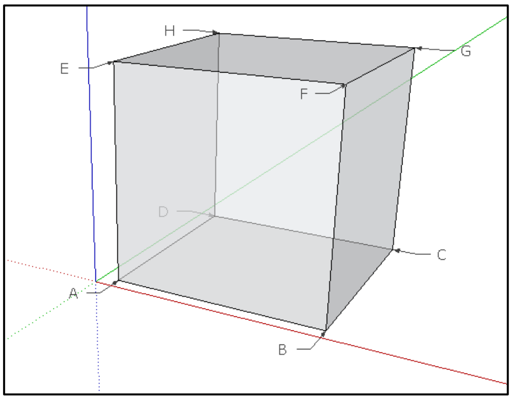


Figura 37 - Rotulando os vértices do cubo com a ferramenta texto

4) Para esboçar o segmento AM mencionado no problema, utilizaremos a ferramenta linha ( ). Após selecioná-la, clicamos sobre o vértice A e

arrastamos o cursor na direção da aresta AE. Digitamos o valor “6” (para que atenda à condição do problema: AM=3ME) e teclamos ENTER. Em seguida, utilizamos a ferramenta texto, como no passo anterior, para rotular o ponto M.

5) Ainda usando a ferramenta linha, podemos traçar os segmentos BM e MC, necessários ao problema, clicando sobre suas extremidades e, em seguida, rotulamos com a ferramenta texto.

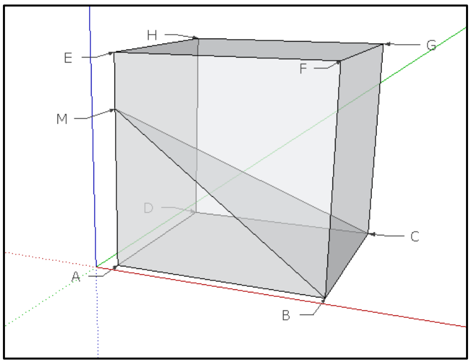


Figura 38 - Esboço do cubo com segmentos BM e MB destacados

6) A fim de deixar a figura mais clara, é possível desenhar pequenos quadrados, indicando os ângulos retos que serão utilizados na resolução do problema. Para isto, deve-se clicar sobre um dos lados do ângulo com a ferramenta “retângulo” selecionada e arrastar o cursor até o outro lado, até que apareça a indicação “square”, informando que será desenhado um quadrado perfeito. Caso a indicação não apareça, será desenhado um retângulo qualquer, com base diferente da altura. Para o nosso desenho, clicaremos sobre a aresta AE e arrastaremos à aresta AB e do segmento BM para o segmento BC. Para uma melhor visualização na hora do esboço, pode-se utilizar a ferramenta orbitar().

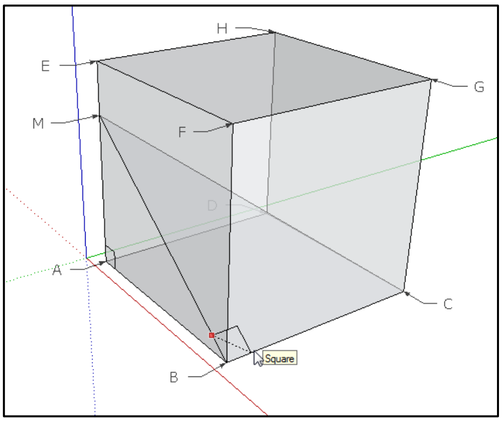


Figura 39 - Utilizando ferramenta "retângulo" para marcação de ângulos retos

4.1.2: Resolvendo o problema

Temos que $AM = 3ME$ e que $AM + ME = 8$. Isso nos dá que $AM = 6\ e\ ME = 2$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMB, temos que $(MB)^2 = 6^2 + 8^2$, que nos dá $MB = 10cm$.

O problema pede que se calcule a área do triângulo BCM, que é retângulo em B. Sua área é calculada pelo semi-produto dos seus catetos BM e BC que medem 10cm e 8cm, respectivamente. Logo, $Área_{BCM} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40cm^2$.

4.2 Exemplo 2: Problema envolvendo uma pirâmide

Problema: *Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular com aresta lateral medindo 5cm e altura igual a 4cm.*

4.2.1: Construindo a figura (Pirâmide)

1) Esboçar no plano do solo, com a ferramenta "retângulo", um quadrado com lado 4,2, como feito no exemplo anterior. Não nos preocuparemos com perfeição da escala neste exemplo. Faremos apenas uma figura que facilite a visualização do aluno. Se fôssemos fieis às medidas, teríamos o lado do quadrado da base medindo $3\sqrt{2}cm \cong 4{,}2cm$, mas não exatamente, visto que é um número irracional.
2) Com a ferramenta "linha" selecionada, clicar sobre vértices opostos do quadrado para traçar suas diagonais.

3) Com a ferramenta “linha”, clicar sobre o centro do quadrado e arrastar o cursor para cima, pressionando a tecla de “seta para cima”, a fim de que a altura a ser traçada seja paralela ao eixo vertical (azul). Digitar o valor 4 e teclar ENTER.
4) Utilizar a ferramenta “texto” para rotular os vértices da base e extremidades da altura, conforme figura abaixo:

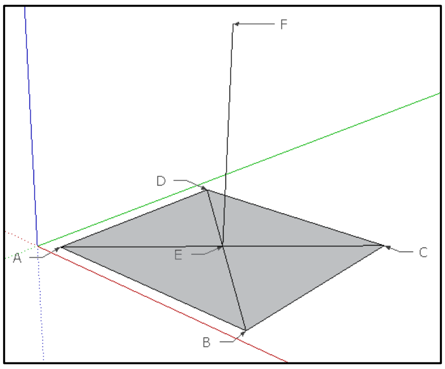


Figura 40 - Esboço de face da base e altura de uma pirâmide

5) Utilizar a ferramenta “retângulo” para desenhar a indicação do ângulo reto FÊB;
6) Com a ferramenta linha, crie os segmentos que unem os vértices da base ao vértice da pirâmide F. Com isso, a pirâmide estará esboçada.
7) Utilizar a ferramenta “texto” para indicar as medidas da altura e aresta lateral da pirâmide.

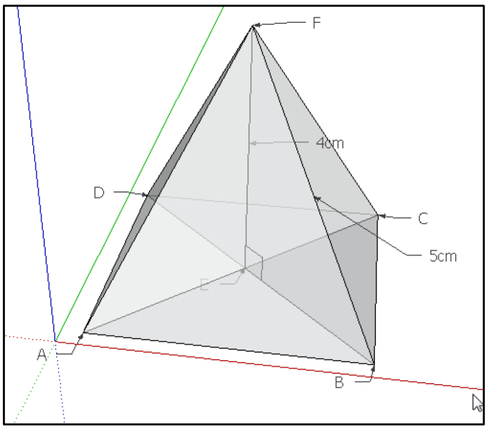


Figura 41 - Esboço da pirâmide do "Problema 2"

Vale ressaltar que a pirâmide desenhada na *Figura 41* conta com detalhes específicos do *Problema 2*. Há uma maneira mais simples de se desenhar uma pirâmide de base quadrada: Primeiramente, desenha-se um quadrado no plano do solo com a ferramenta "retângulo" e traçar suas diagonais com a ferramenta "linha". Em seguida, basta selecionar a ferramenta "mover" ( ) e ir com o cursor até o ponto de encontro das diagonais (centro da base), até aparecer a indicação de "extremidade". Por fim, basta clicar sobre este ponto e movê-lo para cima na direção do eixo azul (caso se queira uma pirâmide reta, ou em qualquer outra direção para construir uma pirâmide oblíqua).

<u>4.2.2: Resolvendo o problema</u>

Para calcular o volume de uma pirâmide, precisamos de sua altura (que já temos) e de sua área da base. A base da pirâmide é um quadrado cuja metade da diagonal é o cateto EB do triângulo FEB. Esta medida pode ser facilmente calculada pelo teorema de Pitágoras: $(EB)^2 = (FB)^2 - (EF)^2$, que nos dá que $EB = EA = 3$cm. Aplicando novamente o teorema de Pitágoras no triângulo AEB, temos que o lado AB do quadrado base da pirâmide mede $3\sqrt{2}cm$. Logo, a área da base mede $(3\sqrt{2})^2 = 18cm^2$. Sendo assim, o volume da pirâmide procurado é $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24cm^3$.

4.3 Exemplo 3: Problema envolvendo uma prisma hexagonal e duas pirâmides congruentes

Problema: *Um cristal com a forma de um prisma hexagonal regular, após ser cortado e polido, deu origem a um sólido de doze faces triangulares congruentes. Os vértices desse poliedro são os centros das faces do prisma. Calcule a razão entre os volumes do sólido e do prisma*.

<u>4.3.1: Construindo a figura (Prisma)</u>

1) Selecionar a ferramenta "polígono" ( ), digitar 6 e teclar ENTER, a fim de indicar o número de lados, clicar sobre um ponto do plano do solo e digitar uma medida para o "raio" (distância do centro a um vértice do hexágono);
2) Com a ferramenta "empurrar/puxar" selecionada, clicar sobre o hexágono desenhado e puxar para cima, digitando um valor desejado para a altura (o

problema em questão independe das medidas da aresta da base e da altura do prisma) e teclando ENTER;

3) Com a ferramenta "linha" traçar as diagonais das faces laterais e pelo menos duas diagonais das faces hexagonais, a fim de marcar os pontos que serão os vértices do novo sólido. É recomendável, durante o esboço das diagonais, que se utilize a ferramenta "orbitar", facilitando a visualização dos elementos em questão.

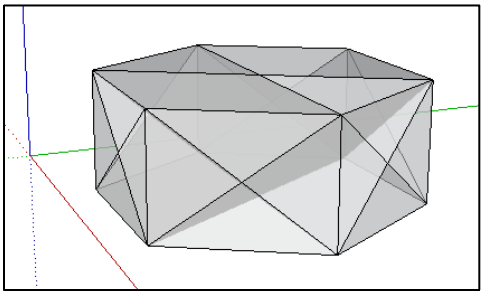


Figura 42 - Marcando centro das faces do prisma hexagonal regular

4) Ainda com a ferramenta "linha", ligar os centros dos hexágonos aos centros das faces laterais. Para "despoluir visualmente" a figura, é recomendado o uso da ferramenta "borracha" ( ) para remover segmentos que não serão utilizados na solução do problema;
5) Utilizar a ferramenta "linha" para unir os centros de faces laterais consecutivas, completando o sólido em questão;
6) Traçar um segmento do centro da face superior ao centro do sólido e, com a ferramenta "dimensões" ( ), indicar as alturas h e h' do prisma hexagonal e de uma das pirâmides determinadas pelo sólido interior, respectivamente;
7) Por fim, utilizar a ferramenta texto para indicar as arestas a e a', das bases do prisma e da pirâmide hexagonal, respectivamente.

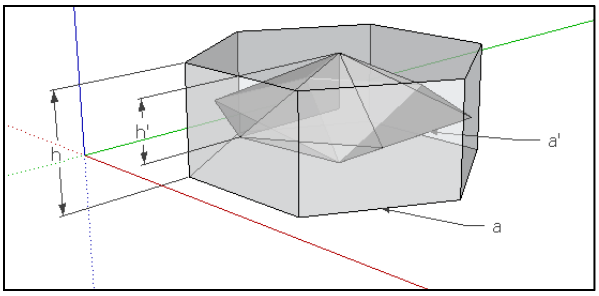


Figura 43 - Sólido do "Exemplo 3" finalizado

4.3.2: Resolvendo o problema

Um plano horizontal, “cortando” o prisma a uma altura $\frac{h}{2}$, determina uma secção, mostrada na figura abaixo, também criada com uso do Google Sketchup

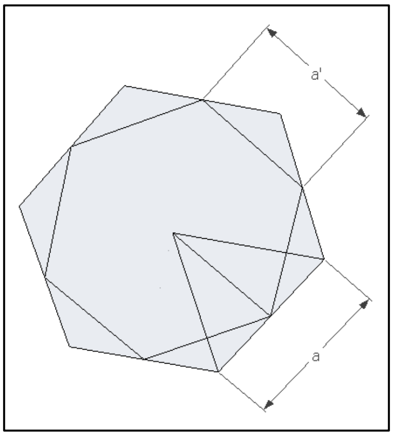


Figura 44 - Secção horizontal do sólido do Exemplo 3

É fácil verificar as seguintes relações:

i) $h' = \frac{h}{2}$

ii) $a' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Sendo B a área da base do prisma e B' a área da base das pirâmides, temos que:

$$\frac{B'}{B} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Com isto, podemos obter os volumes V e V' do prisma e do poliedro, respectivamente:

$$V = B \cdot h$$

e

$$V' = \frac{2}{3} \cdot B' \cdot h'$$

Logo, $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{B'}{B} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

4.4 Exemplo 4: Problema envolvendo cilindro equilátero

Problema: *Uma secção meridiana de um cilindro equilátero tem* $144\ cm^2$ *de área. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse cilindro.*

<u>4.4.1: Construindo a figura (Cilindro equilátero)</u>

1) Selecionar a ferramenta “círculo” ( ), clicar sobre o plano do solo e, arrastando na direção do eixo vermelho, digitar a medida do raio e teclar ENTER.
2) Selecionar a ferramenta “empurrar/puxar”, clicar sobre o círculo construído, puxar para cima e digitar o valor da altura. Como o cilindro em questão é equilátero, o valor da altura deverá ser o dobro do raio do círculo, a fim de respeitar as proporções.
3) Com a ferramenta linha, passar o cursor sobre a face superior do cilindro, até localizar o centro desta. Quando isto acontecer, aparecerá a indicação “Centralizar”, junto ao cursor.
4) Clicar neste ponto e descer, segurando a seta para cima, a fim de manter-se paralelo ao eixo azul, até encontrar a face inferior, traçando o eixo do cilindro.

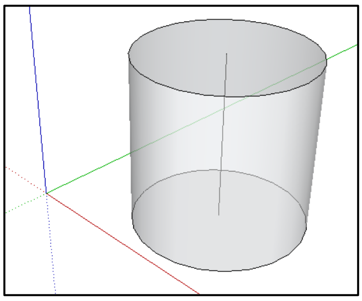


Figura 45 - Esboço inicial de cilindro equilátero e seu eixo

5) Ainda com a ferramenta “linha”, traçar um raio no círculo superior, partindo do centro e na direção do eixo vermelho (segurar a seta para direita, para manter a direção).
6) Com a ferramenta “retângulo”, desenhar a secção meridiana do cilindro, a partir da extremidade do raio da face superior, passando pelo centro da base inferior.

7) Com a ferramenta "dimensões" selecionada, indicar as medidas do raio da base e da altura do cilindro). Utilizar a ferramenta borracha para apagar o eixo do cilindro, caso se deseje.

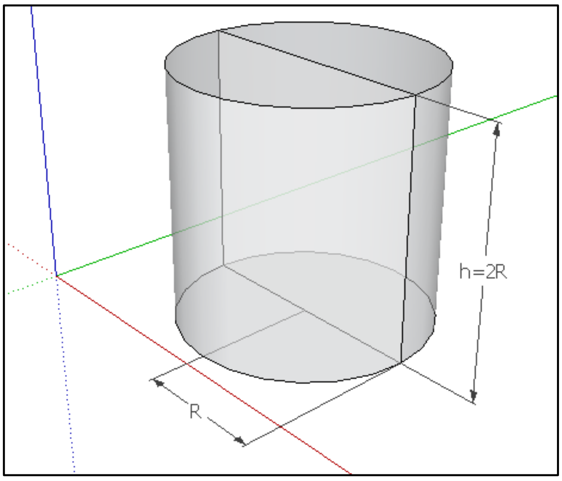


Figura 46 - Cilindro equilátero do Exemplo 4

4.4.2: Resolvendo o problema

Temos que a secção meridiana do cilindro em questão é um quadrado de lado $2R$, onde R é o raio da base. Logo, $(2R)^2 = 144cm^2$, donde concluímos que $R = 6cm$.

Logo, a área lateral desse cilindro equivale a área de um retângulo de base $2\pi R = 12\pi cm$ e altura igual $12cm$, tendo valor igual a $144\pi cm^2$.

Sua área total é igual aos $144\pi cm^2$ da área lateral, somados ao dobro da área da base que é 36π, totalizando $216\pi cm^2$.

Por fim, o volume do cilindro é a sua área da base ($36\pi cm^2$), multiplicada pela sua altura ($12cm$), que dá $432\pi cm^3$.

4.5 Exemplo 5: Problema envolvendo um tronco de cone

Problema: *Um tanque em formato de cone, com base sobre o solo de raio igual a 2m e altura igual a 3m, é preenchido com água até uma altura de 2m. Calcule a quantidade de água, em litros, contida nesse tanque. Considere* $\pi = 3$.

4.5.1: Construindo a figura (Cone e tronco de cone)

1) Traçar um círculo no plano do solo, com raio 2m, utilizando a ferramenta de mesmo nome;
2) Com a ferramenta "linha", procurar centro do círculo e traçar segmento com medida 3m paralelo ao eixo azul;
3) Ainda com a "linha", traçar raio paralelo ao eixo vermelho e, em seguida, completar triângulo retângulo, ligando as extremidades dos dois últimos segmentos criados.

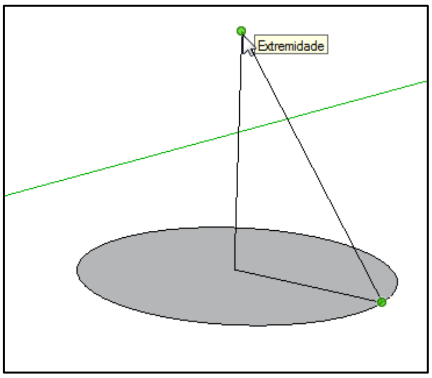


Figura 47 - Primeiros passos para criação do cone e tronco de cone

4) Partindo do centro do círculo da base, traçar um segmento vertical de 2m. Ele ficará "invisível", já que estará sobreposto ao eixo do cone. De sua extremidade, traçar um segmento horizontal, paralelo ao raio criado e com extremidade sobre a geratriz, a fim de obter dois triângulos retângulos semelhantes.

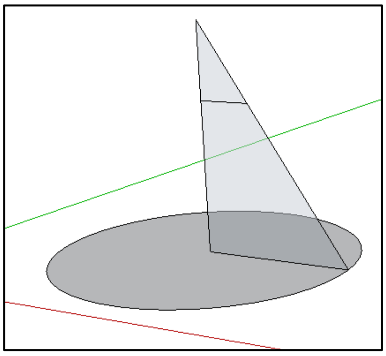


Figura 48 - Triângulos semelhantes a serem explorados no Exemplo 5

5) Desenhar outro círculo com centro no eixo e raio sobre o último segmento criado.

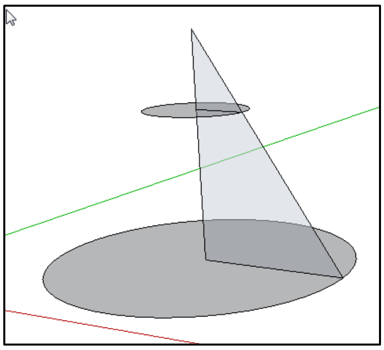


Figura 49 - Círculos que servirão de base para construção do tronco de cone

6) Com a ferramenta "siga-me" ( ) selecionada, passar o cursor sobre o menor triângulo formado, até que ele fique pontilhado dando um clique, em seguida, sobre ele. Após isto, utilizar o cursor para acompanhar a menor circunferência formada, de modo a fechar um pequeno cone. Clicar para concluir.

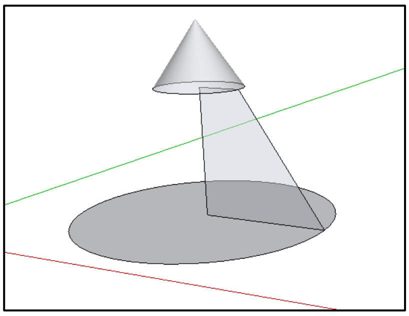


Figura 50 - Pequeno cone, esboçado com a ferramenta "siga-me"

7) Realizar o mesmo procedimento com a ferramenta "siga-me", com o trapézio que ficou determinado, sobre o círculo maior, a fim de concluir o cone. Será possível notar que, após este procedimento, a geratriz e os raios dos dois círculos "desaparecerão". Portanto, será necessário utilizar a ferramenta "linha" novamente, para reconstruir tais segmentos.

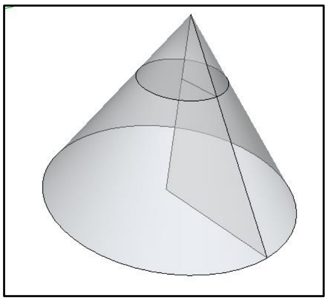


Figura 51 - Cone e secção esboçados com auxílio da ferramenta "siga-me"

8) Com a ferramenta "dimensões", marcamos as indicações das medidas necessárias à resolução do problema.

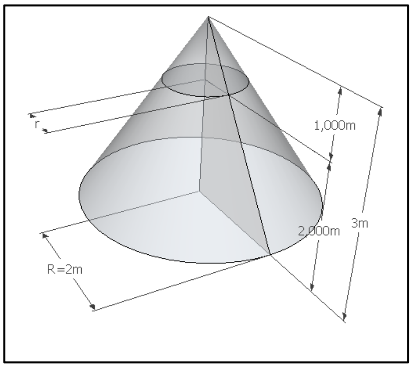


Figura 52 - Marcação de dimensões na figura do Exemplo 5

9) Para finalizar, utilizaremos a ferramenta "pintura" ( ) para indicar a parte do tanque que será preenchida com água. Ao selecionar a ferramenta, será exibida uma janela para seleção da cor, textura ou material com que se quer pintar uma face. Para este exemplo, foi selecionada a opção "Água" e, das amostras de água disponíveis, selecionamos "Água de Piscina".

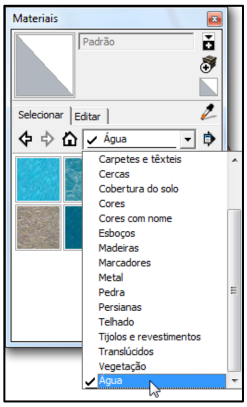


Figura 53 - Selecionando textura de água para pintura do tronco de cone

10) Agora basta clicar na lateral do tronco de cone para vê-lo preenchido com a textura de água. Será facilmente notado que a face superior do tronco (o círculo menor) não estará preenchida. Tentar clicar sobre ele na visão onde nos encontramos, fará com que pintemos, sem desejar, o restante do cone. Para que seja possível a pintura correta, será necessário utilizar a ferramenta “zoom” ( ), a fim de se “entrar” no cone e visualizar o círculo pequeno sem obstáculos à frente. Com isto, concluímos o modelo do *Exemplo 5*.

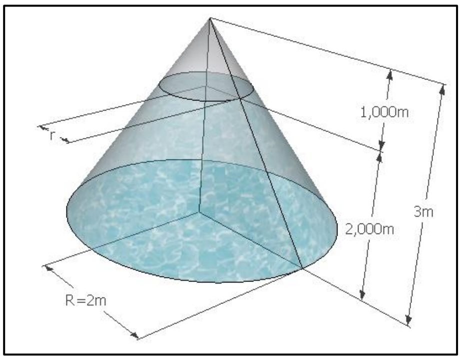


Figura 54 - Figura do Exemplo 5 concluída

4.5.2: Resolvendo o problema

O volume preenchido equivale à diferença entre o volume total do cone (tanque inteiro, de raio da base $R = 2m$ e altura $3m$) e o volume não preenchido (cone pequeno). Utilizando semelhança de triângulos, podemos encontrar o raio r do cone pequeno, cuja altura já sabemos que mede $1m$.

$$\frac{1}{3} = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}m$$

Calculando o volume v do cone menor, temos:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1$$

Como o problema pede que se considere $\pi = 3$, temos $v = \frac{4}{9}m^3$.

Agora calculamos o volume V do tanque (também considerando $\pi = 3$):

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12m^3.$$

Logo, o volume preenchido é:

$$V - v = 12 - \frac{4}{9} = \frac{104}{9} \cong 11{,}556m^3$$

Como $1m^3$, comporta 1000 litros, temos que a quantidade de água contida no tanque é de, aproximadamente, 11.556 litros.

Considerações finais

Embora em determinados momentos deste trabalho tenham sido realizadas revisões teóricas e resoluções de exercícios, este não foi o foco da dissertação, visto que foi escrita para professores de Matemática, portanto, os conhecimentos apresentados já fazem parte do seu cotidiano.

Tampouco houve a intenção de apresentar as tecnologias utilizadas como novidades. Mesas digitalizadoras são equipamentos utilizados há bastante tempo, principalmente por profissionais da área de design. Também não é de hoje que se exploram softwares de captura de tela. Há anos já se produz vídeos tutoriais para publicação na web.

Até a produção de vídeo aulas de Matemática, já é algo que está se tornando bem popular. Um dos precursores dessa ideia foi o americano Salman Khan, graduado em Matemática, Ciências da Computação e Engenharia Elétrica pelo MIT. Ele produziu seus primeiros vídeos com o objetivo de sanar dúvidas de Matemática à distância de sua prima. Amigos e outros parentes o procuraram com novas dúvidas e mais vídeos foram gravados. A “brincadeira” ficou tão popular que, com um tempo, Khan precisou largar o emprego e dedicar-se integralmente ao seu novo negócio, a Khan Academy, ONG que hoje conta com um acervo de mais de 4000 aulas das mais diversas áreas do conhecimento, totalizando mais de 240 milhões de visualizações.

O próprio Google Sketchup já se encontra na versão 8, portanto, não é nenhuma novidade, porém, apesar de seu potencial, é muito pouco utilizado como ferramenta de apoio ao ensino da Geometria Plana e Espacial.

Enfim, o objetivo maior desta dissertação é aproximar colegas professores dessas tecnologias, já bastante dominadas pelos nossos alunos, habilitando-os a dar seus primeiros passos com essas ferramentas e mostrando-os que, com poucos recursos técnicos, baixo custo e um pouco de criatividade é possível melhorar nossas aulas, tornando-as mais atrativas aos educandos.

Que estas páginas sirvam de incentivo para que outros colegas nos apresentem e/ou aproximem de outras ferramentas que possam ser úteis à nossa prática docente.

Referências Bibliográficas

[1] *eInstrunction Workspace*. (s.d.). Acesso em 1 de Julho de 2013, disponível em Site da eInstruction: http://www.einstruction.com/workspace-overview

[2] Fugimoto, S. M., & Altoé, A. (Junho de 2009). O Computador na Escola: Professor de Educação Básica e sua Prática Pedagógica. *Seminário de Pesquisa do PPE*.

[3] *Geogebra*. (s.d.). Acesso em 1 de Julho de 2013, disponível em http://www.geogebra.org/cms/en/

[4] Google. (s.d.). *Ajuda do Sketchup*. Acesso em 1 de Julho de 2013, disponível em Ajuda do Sketchup: http://support.google.com/sketchup/?hl=pt-BR

[5] Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., & Almeida, N. d. (2004). *Matemática - Ciência e Aplicações* (2ª ed., Vol. 3). São Paulo, SP, Brasil: Atual Editora.

[6] Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* (6ª ed., Vol. 2). Rio de Janeiro, RJ, Brasil: SBM.

[7] Ribeiro, J. (2011). *Matemática - Cicência, Linguagem e Tecnologia* (1ª ed., Vol. 3). São Paulo: Scipione.

[8] Secretaria de Educação do Governo do Estado de Pernambuco. (2013). Currículo de Matemática para o Ensino Médio com Base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco. Recife, PE, Brasil.

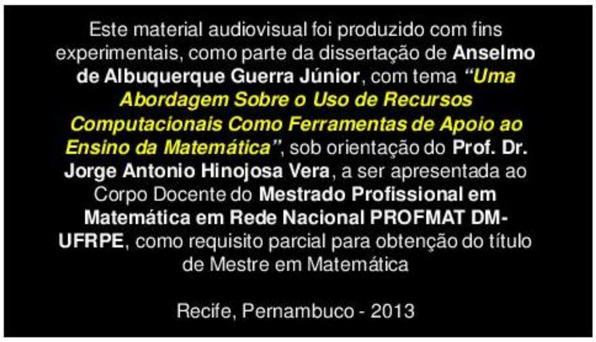
[9] Souza, J. (2012). *Matemática* (1ª ed., Vol. 2). São Paulo, SP, Brasil: FTD.

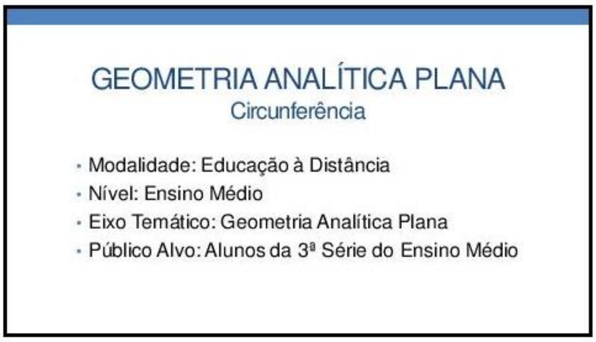
[10] *Wikipedia - Khan Academy*. (s.d.). Acesso em 1 de Julho de 2013, disponível em Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Khan_Academy

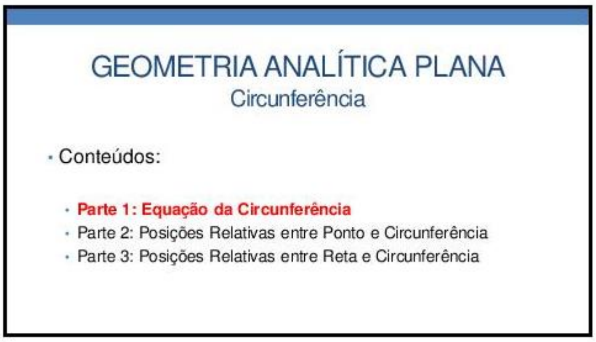
[11] Wikipedia. (s.d.). *Tecnologia*. Acesso em 18 de Julho de 2013, disponível em Wikipedia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tecnologia

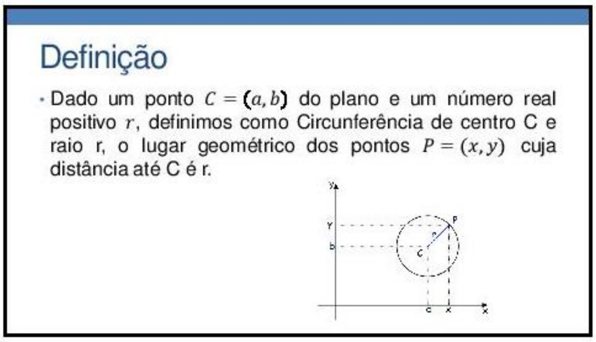
Índice das figuras

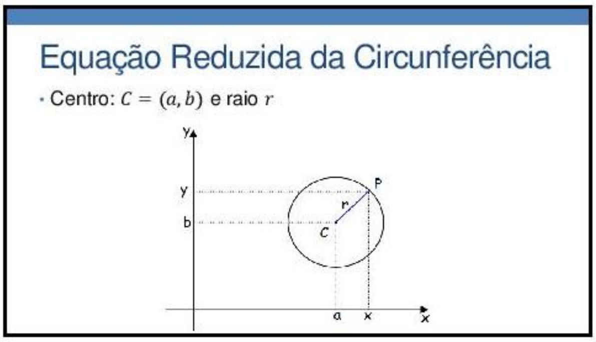
Apêndice 1 – Slides utilizados na gravação da vídeo-aula – P1











Equação Reduzida da Circunferência

A equação reduzida de uma circunferência λ de Centro $C = (a, b)$ e raio r é dada por:

$$\lambda: \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Equação Reduzida da Circunferência

- Vamos vê-la dinamicamente!

Equação Geral ou Normal da Circunferência

- Vamos desenvolver a equação reduzida...

Equação Geral ou Normal da Circunferência

- A Equação Geral ou Normal de uma circunferência λ de Centro $C = (a, b)$ e raio r é dada por:

$$\lambda: \ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplo 1

- *Obter as equações reduzida e geral da circunferência λ, com centro em $C = (4, -2)$ e raio $r = 6$.*

Exemplo 2

- *Considere λ uma circunferência de centro $C = (2, -3)$ e raio 5. Responda:*

a) Em que ponto λ intersecta o eixo das abscissas?

b) Sabendo que o ponto $P = (2, b)$, localizado no 4º quadrante, pertence a λ, determine o valor de b

Exemplo 2

- Considere λ uma circunferência de centro $C = (2, -3)$ e raio 5. Responda:

a) Em que ponto λ intersecta o eixo das abscissas?

Exemplo 2

- Considere λ uma circunferência de centro $C = (2, -3)$ e raio 5. Responda:

b) Sabendo que o ponto $P = (2, b)$, localizado no 4º quadrante, pertence a λ, determine o valor de b

Exemplo 3

- Verifique se $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ (*) é equação de uma circunferência. Caso seja, determine as coordenadas do centro e medida do raio.

Solução 1:

Exemplo 3

- Verifique se $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ (*) é equação de uma circunferência. Caso seja, determine as coordenadas do centro e medida do raio.

Solução 2:

FIM

Apêndice 2 – Slides utilizados na gravação da vídeo-aula – P2

Este material audiovisual foi produzido com fins experimentais, como parte da dissertação de **Anselmo de Albuquerque Guerra Júnior**, com tema ***"Uma Abordagem Sobre o Uso de Recursos Computacionais Como Ferramentas de Apoio ao Ensino da Matemática"***, sob orientação do **Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera**, a ser apresentada ao Corpo Docente do **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE**, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Recife, Pernambuco - 2013

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

CIRCUNFERÊNCIA

PARTE 2 – POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Professor: Anselmo de A. Guerra Júnior

Mestrando – PROFMAT - UFRPE

Recife, Pernambuco - 2013

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Circunferência

- Conteúdos:
  - Parte 1: Equação da Circunferência
  - **Parte 2: Posições Relativas entre Ponto e Circunferência**
  - Parte 3: Posições Relativas entre Reta e Circunferência

Tricotomia

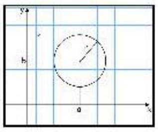
- Dados dois números reais d e r, temos que uma, e somente uma, das proposições a seguir é verdadeira:
  - $d = r$
  - $d < r$
  - $d > r$

Agora, considere que...

- d é a distância de um ponto do plano $P(x, y)$ ao centro $C(a, b)$ de uma circunferência λ, de raio r

1 - Se $d = r$, já sabemos...

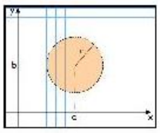
que o ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência λ



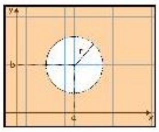
Para os outros dois casos, definimos:

- 1) $P\ (x, y)$ é interno à circunferência λ, quando $d < r$
- 2) $P\ (x, y)$ é externo à circunferência λ, quando $d > r$

2) P é um ponto interno à circunferência λ



3)P é um ponto externo à circunferência λ



Exemplo 4

Qual a posição do ponto $P(-3, -2)$ em relação à circunferência λ: $x^2 + (y-2)^2 = 16$?

Exemplo 5

- *Qual o menor valor inteiro de r na equação da circunferência λ: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$, de modo que o ponto $P(7,3)$ seja interno a ela?*

Exemplo 6

- *Determine os valores de m para os quais o ponto $A(m, 5)$ é interior à circunferência λ: $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 52 = 0$*

Exemplo 7

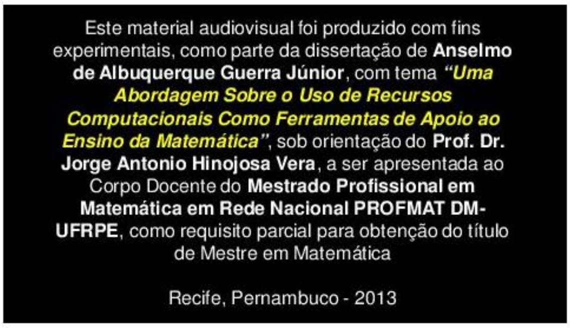
- *Represente graficamente o conjunto solução da inequação* $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 \leq 0$

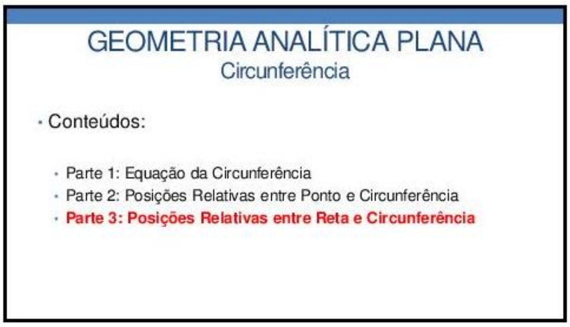
Exemplo 8

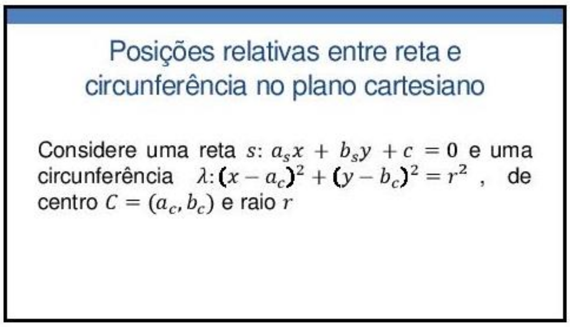
- *Represente graficamente o conjunto solução do sistema*
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 22x - 14y + 161 > 0 \end{cases}$$

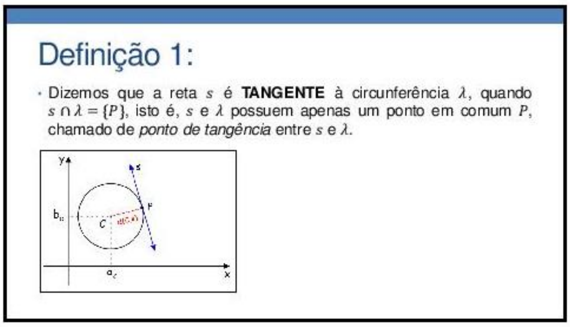
FIM

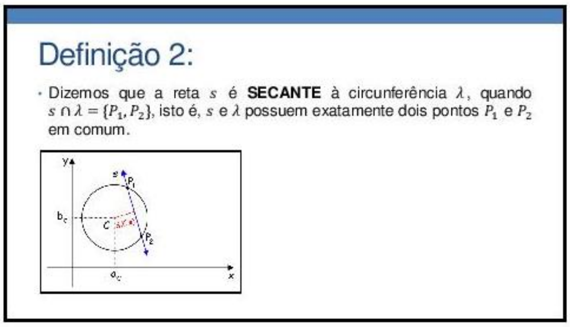
Apêndice 3 – Slides utilizados na gravação da vídeo-aula – P3





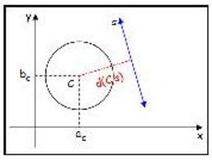






Definição 3:

- Dizemos que a reta s é **EXTERIOR** à circunferência λ, quando $s \cap \lambda = \emptyset$, isto é, s e λ não possuem pontos em comum.



Determinando os pontos em comum entre a reta s e a circunferência λ

- Podemos determinar os pontos $P(x, y)$ de intersecção entre s e λ, solucionando o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} s: a_s x + b_s y + c = 0 \\ \lambda: (x - a_c)^2 + (y - b_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

Analisando o valor do discriminante Δ

- $\Delta = 0 \Rightarrow s$ é *tangente* à λ;
- $\Delta < 0 \Rightarrow s$ é *secante* à λ;
- $\Delta > 0 \Rightarrow s$ é *exterior* à λ

Exemplo 9

- *Determinar a posição relativa entre a reta* $r: 2x + y - 2 = 0$ *e a circunferência* $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$, *procurando as eventuais intersecções entre as duas.*

Exemplo 10

- *Sabendo que a reta* $s: y = \sqrt{3} \cdot x + n$ *é tangente à circunferência* $\lambda: x^2 + y^2 = 4$, *encontre os valores de* n.

FIM

Apêndice 4 – URL´s dos vídeos produzidos neste trabalho

Vídeo	URL
Criando modelo dinâmico de circunferência com uso do Geogebra	http://youtu.be/oiuGysvRDj0
Conhecendo o Workspace	http://youtu.be/94x9fSaExDM
Vídeo-aula: Circunferência – Parte 1 – Equação da Circunferência	http://youtu.be/Pvtu66BbVUc
Vídeo-aula: Circunferência – Parte 2 – Posições relativas entre ponto e circunferência	http://youtu.be/pr1swKS8kZQ
Vídeo-aula: Circunferência – Parte 3 – Posições relativas entre reta e circunferência	http://youtu.be/xquwbheA7oQ
Construindo cubo do Exemplo 1, com auxílio do Google Sketchup	http://youtu.be/vEJb19W3tzE
Construindo pirâmide do Exemplo 2, com auxílio do Google Sketchup	http://youtu.be/jQ6Gp3O2ZpQ
Construindo Prisma do Exemplo 3, com auxílio do Google Sketchup	http://youtu.be/6vEkCQo1qaI
Construindo cilindro do Exemplo 4, com auxílio do Google Sketchup	http://youtu.be/XbCYcOri26Q
Construindo cone e tronco do Exemplo 5, com auxílio do Google Sketchup	http://youtu.be/WZ0KFIMOYdE